



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"LOCALIZACIÓN DE ANDERSON DEBIDO A
UNA ONDA TORSIONAL EN UN SISTEMA
UNIDIMENSIONAL ELÁSTICO Y LAS
PROPIEDADES DEL ÍNDICE DE PARTICIPACIÓN
INVERSO DE LOS ESTADOS PROPIOS."**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA

MIGUEL ROQUE VARGAS

DIRECTORES DE TESIS

DR. ALFREDO DÍAZ DE ANDA

No. de CVU: 928236

OCTUBRE 2020

©2020 - Miguel Roque Vargas
Derechos Reservados

Título: Localización de Anderson debido a una onda torsional en un sistema unidimensional elástico y las propiedades del Índice de Participación Inverso de los estados propios.
Estudiante: Miguel Roque Vargas.

Comité.

Dr. Jonathan Torres Herrera

Presidente.

Dr. Giuseppe Luca Celardo

Secretario.

Dr. Luis Octavio Meza Espinoza

Vocal

Dr. Alfredo Díaz de Anda.

Asesor.

Agradecimientos.

Agradezco a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (*BUAP*) y al Instituto de Física "Luis Rivera Terrazas" (*IFUAP*), por permitirme realizar mis estudios de Maestría en Física. A mis padres por haberme forjado como la persona que soy en la actualidad; muchos de mis logros se los debo a ustedes entre los que incluyo este. Me formaron con reglas y algunas libertades, pero al final de cuentas, me motivaron constantemente para alcanzar mis anhelos.

Mi agradecimiento al Dr. Alfredo Díaz de Anda por la dirección, asesoría y tiempo proporcionado para la realización de esta tesis y por compartir sus conocimientos conmigo. Agradezco a todos mis profesores por haberme brindado su conocimiento, tiempo y paciencia para la contribución de mi formación académica.

Agradezco a mis hermanos, por siempre apoyarme cuando más lo he necesitado. A mis compañeros y a mis amigos presentes y pasados, quienes sin esperar nada a cambio compartieron conocimiento, alegrías y tristezas y a todas aquellas personas que durante estos 2 años estuvieron a mi lado apoyándome.

El autor y el asesor de la presente tesis agradecen al Laboratorio Nacional de Supercómputo del Sureste de México (LNS), perteneciente al padrón de laboratorios nacionales CONACYT, por los recursos computacionales, el apoyo y la asistencia técnica brindados, a través del proyecto No. 201901012C.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca que me fue otorgada con la cual pude realizar este trabajo (CVU:928236).

¡Muchas Gracias!

Resumen.

El estudio del fenómeno de localización de estados cuánticos en la materia condensada, dio origen a uno de los temas más importantes de la física en las propiedades de transporte de los materiales. Este hecho representa un gran descubrimiento en la física y despertó el interés de muchos investigadores, dado que muchos sistemas desordenados se han estudiado a lo largo de los años, llegando a la misma conclusión dependiendo del grado de desorden o aleatoriedad que presenta el sistema, las ondas se localizan en ciertas regiones. Los estudios más recurrentes son los relacionados con fenómenos cuánticos y ondas electromagnéticas, además de que últimamente se incursiona en reproducir este fenómeno en sistemas clásicos utilizando ondas mecánicas como el sonido [2].

En la presente tesis estudiamos el fenómeno de la localización de Anderson, desde un punto de vista teórico, experimental y numérico, en un sistema que consiste de vigas acopladas que presentan oscilaciones torsionales, las cuales tienen desorden en el tamaño de las vigas. Estudiamos el desorden como función de la frecuencia y como función del tamaño del desorden. Usamos el índice de participación inversa (*IPR*) como una medida de la localización de las funciones de onda. Encontramos que la localización aumenta con el tamaño del desorden. También estudiamos la funciones de distribución del *IPR* para los diferentes ensambles como función del tamaño del desorden.

Abstract.

The study of the phenomenon of localization of quantum states in condensed matter gave origin to one of the most important subjects in physics in the transport properties of materials. This fact represents a great discovery in physics and aroused the interest of many Researchers, given that many disordered systems have been studied over the years, reaching the same conclusion depending on the degree of disorder or randomness that the system presents, the waves are located in certain regions. The most recurrent studies are those related to quantum phenomena and electromagnetic waves, in addition to the recent attempt to reproduce this phenomenon in classical systems using mechanical waves such as sound [2].

In this thesis we study of the Anderson localization phenomenon, from a theoretical, experimental and numerical point of view, in a system that consists of coupled aluminum beams that present torsional oscillations, which have disorder in the size of the beams. We study disorder as a function of frequency and as a function of the size of the disorder. We use the inverse participation ratio (*IPR*) as a measure of the location of the wave functions. We found that the location increases with the size of the disorder. We also studied the IPR distribution functions for the different ensembles as a function of the size of the disorder.

Índice general

Capítulos	Página
Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
Lista de figuras	XI
Lista de Tablas	XV
1. Introducción.	3
1.1. Ondas de sonido.	3
1.1.1. Aplicaciones de las ondas.	4
1.1.2. Ondas en sólidos.	5
1.2. Localización de Anderson.	8
1.2.1. Estados Localizados.	8
1.3. Método de la matriz de transferencia.	9
1.3.1. Propiedades generales.	11
2. Antecedentes.	13
2.1. Localización de Anderson.	13
2.2. Ondas en sistemas elásticos.	17
3. Metodología	25
3.1. Método de la Matriz de Transferencia para ondas torsionales en vigas de sección transversal rectangular.	25
3.2. Índice de Participación Inverso.	30
3.3. Método experimental.	31
4. Resultados.	35
4.1. Aplicación al sistema de 3 cuerpos.	35
4.2. Sistema periódico de n cuerpos con diferente sección transversal.	39
4.3. Aplicación de la matriz de transferencia a un sistema periódico con sección transversal circular.	45

4.4. Localización de Anderson en un sistema unidimensional para ondas torsionales.	48
4.5. Contraste entre matriz de transferencia, elemento finito y experimento. . .	64
5. Conclusiones.	71
5.1. Perspectivas del trabajo.	73
Bibliografía.	75

Índice de figuras

1.1.	Se muestra el elemento diferencial de la cuerda y como este es sometido a una tensión y una fuerza externa [3] (p. 10).	5
1.2.	Diferentes funciones de onda, para distintos tiempos, dados por la función $y(x,t) = A\sin(\omega t)\cos(\gamma x)$ [3] (p. 11).	6
1.3.	Diferentes frentes de onda, para diferentes tiempos, donde observamos la longitud de onda λ y la velocidad de fase c_0 [3] (p. 12).	7
1.4.	Ejemplo de dos sistemas; uno periódico (a) en donde la propagación de la onda se realiza a través de todo el sistema, mientras que en (b) vemos un sistema aleatorio, provocando que la perturbación este localizada en una parte del sistema.	9
1.5.	Sistema de largo M ($= 4$) y longitud N ($= 10$) con un corte adicional a punto de ser agregado a la derecha [7] (p.22).	11
2.1.	Geometría de una sola capa de dieléctrico, con constante ϵ , considerando el sistema en el vacío, mostrando un grosor del dieléctrico de $\Delta = x'' - x'$ [12] (p.121).	15
2.2.	Gráfica de $(\omega l/c)$ vs $\omega a/c$ con un sistema desordenado. Los resultados muestran que para (a) ω el borde del dieléctrico izquierdo y en (b) corresponde al lado derecho [12] (p.123).	16
2.3.	Barra utilizada para obtener las frecuencias propias de las <i>escaleras de Wannier-Stark</i> . Los cubos tienen la misma longitud $l = 5cm$ y con ancho de $w = 1.905cm$, pero diferentes alturas, La $v^{(i)} = (1 + i\gamma)v$, $i=1,2,3,4...$ con $v=2027.3$ m/s y $\gamma = 0.02786$, El ancho, alto y largo del los cuboides pequeños son $w' = 5mm$, $h' = 5mm$ y $l' = 6mm$, respectivamente [14] (p.1632).	17
2.4.	Predicción de Navier para la velocidad v en función de la altura h para los cuboides (línea continua). Los valores experimentales (puntos) se ajustan a la predicción, $\sqrt{G/\rho} = 3190$ m/s y $w = 1.905$ cm [14] (p.1634).	18
2.5.	Dos amplitudes de onda para ondas torsionales de la barra Figura 2.3 asociadas con la segunda escalera $n_n=2$, La función de onda de la izquierda es la localizada en el décimo cuerpo, y la función de la derecha en el tercero. Las líneas verticales pequeñas dobles a lo largo del eje de la barra indican la posición de los cuboides pequeños. Los puntos son valores experimentales, mientras que la línea continua proporciona valores calculados [14] (p.1635).	19

2.6.	Frecuencias de los modos normales de un barra desordenada, obtenidas numéricamente mediante "TBT", en función del desorden Δ . La línea vertical se encuentra en $\Delta = 0.4$, el valor elegido en el experimento. Tenga en cuenta el cambio cualitativo alrededor de $f_c = 63.1$ kHz indicado por una línea roja discontinua horizontal [15] (p. 2).	20
2.7.	Amplitudes de onda medidas en función de la posición a lo largo del eje z, correspondiente a dos modos normales de frecuencias (a) $f=4.768$ KHz y (b) $f=5.125$ kHz [15] (p. 4).	21
2.8.	Índice de Participación como función de la frecuencia para los modos normales de la barra con desorden $\Delta = 0.4$. Los cuadros negros corresponden a los valores obtenidos por "TBT", los rojos son del experimento, los puntos azules corresponden a un ensamble de 200 barras con $\Delta = 4$ cm [15] (p. 4).	21
2.9.	Sistema unidimensional para medir la localización, en este experimento el número $N=50$, $R=1.28$ cm, $d=< d_i >=7.2$ cm, y $\epsilon = 1.016$ mm; $\Delta=0.35$, $\eta=0.65$, la velocidad es $c = 3140 \frac{m}{s}$. Tomado de Flores J., Méndez R., Monsivais G. and Morales A. (2012), <i>Anderson Localization in Disordered Vibrating Rods</i> (p. 2).	22
2.10.	Funciones de onda experimentales, para el sistema desordenado de la Figura 2.9. La longitud de localización se extrae de las envolventes de la gráfica como función de la posición [20] (p. 5).	23
2.11.	Distribución de espaciamiento obtenida para un ensamble de 5000, en un intervalo de 20 kHz. Centrada de izquierda a derecha en 28 kHz, 38 kHz y 78 kHz respectivamente [20] (p. 7).	23
2.12.	Distribución de espaciamiento obtenida experimentalmente, en un intervalo de 20 kHz. Centrada de izquierda a derecha en 20 kHz, 24 kHz y 48 kHz respectivamente [20] (p. 7).	24
3.1.	Imagen ilustrativa del sistema de n cuerpos acoplados, donde h_j , W_j , l_j corresponden a las dimensiones del cuerpo j-esimo.	26
3.2.	Sistema a estudiar, donde las variaciones se generaran en la longitud z_j , el sistema consiste en cuerpos con la misma sección transversal, acoplados mediante muescas (cuerpos pequeños), la variación Δ_j , afecta solo al largo del cuerpo (en el eje z), con lo cual se pretende generar el fenómeno de localización de Anderson.	30
3.3.	Dibujo esquemático que muestra diferentes configuraciones EMAT. Podemos notar que al cambiar la configuración de la bobina y el imán, así como su posición se pueden excitar o detectar diferentes tipos de ondas: C_1 y C_2 compresionales T_1 y T_2 torsionales por último F_1 y F_2 flexionales.	32
3.4.	Esquema del arreglo experimental completo, mostramos el excitador y el detector (EMAT) y como estos están acoplados a los osciloscopios y los amplificadores para detectar las frecuencias normales del sistema y la forma de la función de onda. El esquema muestra el sistema compuesto por los cuerpos (bloques en blanco) acoplados mediante las muescas (bloques sombreados).	33

4.1.	Sistema ficticio a replicar, que consta de tres cuerpos acoplados con la misma sección transversal, generando el sistema de la barra simple a la cual se le aplica una torsión.	36
4.2.	mostramos los modos, de una barra simple, calculado con la matriz de transferencia, lo cual concuerda con lo ya visto en la teoría.	37
4.3.	Mostramos los modos 7° y 15°, vemos que se describe perfectamente el comportamiento de una onda torsional en una barra simple.	38
4.4.	Se muestra el 1° y 3° modo de una barra simple, con una longitud total de 1.45 m, compuesta de 19 cuerpos acoplados con la misma sección transversal de 0.1cm×0.1cm, se observa observamos el comportamiento de una barra simple, resultado que se esperaba.	38
4.5.	Mostramos los modos 7° y 15°, de igual manera para un sistema de 19 cuerpos acoplados con la misma sección transversal, el cual se reduce a una barra simple.	39
4.6.	Sistema periódico, el cual consiste en cuerpos con la misma sección transversal (cuerpos grandes), acoplados mediante muescas (cuerpos pequeños), la longitud de los cuerpos se mantiene constante.	40
4.7.	Se muestran los 3° y 6° modo, de una barra periódica con secciones transversales de 10cm×10cm para los cuerpos y de 3cm× 3cm para las muescas.	43
4.8.	mostramos los modos 7 y 14, de una barra periódica, con secciones transversales de 10cm×10cm para los cuerpos y de 3cm×3cm para las muescas.	43
4.9.	Se muestran en (a) el modo 28°, la amplitud de las muescas ya no es constante, salvo en una, para (b) que corresponde al 31° modo la estructura de las muescas ya no es apreciable.	44
4.10.	mostramos los modos 1 y 3, de una barra periódica, con secciones transversales de 10cm×10cm para los cuerpos y de 3cm×3cm para las muescas. Donde la amplitud de la onda es muy parecida a la de una barra periódica, resaltando que hay "quiebres" de la función	44
4.11.	Se muestran en (a) el modo 10°, se observan pequeños quiebres en la función de onda, que corresponde a las muescas, pero de igual manera con forma se analiza un modo normal mayor, como en (b) que corresponde al 27°, este comportamiento de las muescas es despreciable.	45
4.12.	Sistema reportado, el cual es periódico de sección transversal circular.	46
4.13.	Simulación de los modos normales del artículo <i>Compressionl and torsional wave amplitudes in rods with periodic structures</i> , se reporta el modo 13, como vemos los resultados del artículo (puntos negros) y lo calculado (línea roja) son las mismas.	46
4.14.	Comparación del modo 18, justamente vemos como ambos resultados concuerdan muy bien.	47
4.15.	Comparación para el modo 23, de igual manera ambos resultados concuerdan, reproduciendo exactamente lo reportado.	47
4.16.	Sistema a estudiar, donde las variaciones se generaran en la longitud z_j , el sistema consiste en cuerpos con la misma sección transversal, acoplados mediante muescas, la variación Δ_j , afecta solo al largo del cuerpo (en el eje z), con lo cual se pretende generar el fenómeno de localización de Anderson.	48

4.17. Bandas de 20 replicas, para un sistema, en el cual la perturbación es "muy pequeña" (a), la estructura es prácticamente el de un sistema periódico, mientras al cambiar el tamaño de la perturbación, vemos como la estructura cambia (b).	49
4.18. Se muestra la estructura de bandas, para un sistema, en el cual la perturbación es $\Delta = 2cm$ (a), como vemos el ensanchamiento de la tercera banda ya es notorio, mientras al cambiar el tamaño de la perturbación $\Delta = 4cm$ (b), la cuarta y tercera, banda están unidas, la única que mantiene su estructura es la primera.	50
4.19. Para perturbaciones más grandes como en (a) $\Delta = 8cm$, como vemos la cuarta, tercera y segunda banda están unidas, de igual manera en (b) $\Delta = 9cm$	50
4.20. Se muestra el PR para un $\Delta = 1mm$, en (a) son las 3 primeras bandas del sistema, para 20 replicas, (b) corresponde a 50 replicas, (c) 250 y (d) 500 con la misma perturbación.	51
4.21. PR para mil replicas en donde (a) $\Delta = 1mm$, como en el caso de las frecuencias propias para este sistema, el PR dada esta perturbación, corresponde a un sistema periódico, mientras en (b) $\Delta = 1cm$ vemos como las bandas se ensanchan.	51
4.22. PR para mil replicas en donde (a) $\Delta = 3cm$, para este desorden la tercera y cuarta banda se unen y muestran estados cada vez más localizados, mientras en (b) $\Delta = 5cm$ vemos como ya las bandas 2 y 3 están unidas y que hay estados en la primera banda que aumentaron o disminuyeron su PR	52
4.23. PR para mil replicas en donde (a) $\Delta = 7cm$, la estructura de bandas se ha perdido, donde solo es posible reconocer la primera banda, mientras en (b) $\Delta = 9cm$ de igual manera las bandas están prácticamente unidas y en donde los estados están más localizados.	52
4.24. Se muestran dos histogramas del PR para diferente desorden, para $\Delta = 1cm$ (a), vemos en (1) como hay más estados extendidos por lo cual su PR es "grande" (alrededor de 0.7), mientras al cambiar el tamaño de la perturbación $\Delta = 3cm$ (b), los estados comienzan a localizarse, por lo cual tenemos más con PR "pequeño".	53
4.25. Se muestran dos histogramas del PR para diferente desorden, para $\Delta = 5cm$ (a), vemos como los estados extendidos (alrededor de 0.7) empiezan a disminuir, mientras que para $\Delta = 9cm$ (b), la gran mayoría de los estados están localizados.	53
4.26. Para el ajuste del histograma del PR con $\Delta = 1cm$, vemos que para los estados extendidos la función que mejor se ajusta es una Normal , para los estados localizados, se uso la distribución Izrailev con un $\alpha = 0.18$	54
4.27. Para (a) $\alpha = 0.10$ mientras que en (b) $\alpha = 0.17$, ya se puede observar como la parte del histograma que corresponde a los estados extendidos, estos comienza a disminuir, y los localizados aumentan.	55
4.28. Vemos que en (a) $\alpha = 0.20$ y el valor correspondiente para (b) $\alpha = 0.16$, donde se aplica la perturbación más grande que realizamos al sistema.	55

4.29. Ajustes de la distribución Normal para los histogramas de PR de la primera banda, donde (a) corresponde a $\Delta = 1cm$, (b) $\Delta = 2cm$ y así sucesivamente hasta llegar (i) con $\Delta = 9cm$, como vemos conforme aumenta Δ , el máximo disminuye y el histograma se extiende hacia valores pequeños.	57
4.30. Histogramas correspondientes a la segunda banda, para esta banda se utilizo la distribución de Wigner-Dyson expresada en la ecuación 4.27. De igual manera (a) corresponde a $\Delta = 1cm$ hasta llegar a (g) donde $\Delta = 7cm$. . .	58
4.31. Histogramas correspondientes a la tercera banda, para esta banda se utilizo la distribución de Izrailev. De igual manera (a) corresponde a $\Delta = 1cm$ hasta llegar a (g) donde $\Delta = 7cm$, esta banda corresponde a los estados más localizados.	59
4.32. Ajuste con la suma de dos distribuciones, Normal y Gamma para $\Delta = 1cm$, el ajuste para los estados extendidos es el mismo.	60
4.33. Vemos el ajuste con la distribución propuesta, conforme aumenta Δ , la distribución describe el comportamiento del histograma.	60
4.34. Ajuste de los histogramas con $\Delta = 6cm$ (a) y $\Delta = 9cm$ (b), como la distribución Normal más Gamma, ajustan muy bien al PR de los estados localizados.	61
4.35. Histogramas correspondientes a la segunda banda, para esta banda se utilizo la suma de dos distribuciones. Tenemos casos particulares, (a) corresponde a $\Delta = 1cm$ donde solo es necesario ajustar una distribución Normal , mientras que en (b) $\Delta = 2cm$ fue con la distribución Gamma , para Δ 's mayores se uso la suma de estas.	62
4.36. Histogramas correspondientes a la tercera banda. (a) $\Delta = 1cm$, (b) $\Delta = 2cm$ así sucesivamente hasta llegar a (g) $\Delta 7cm$, como vemos similar a la distribución de Wigner-Dyson esta ajusta mejor conforme aumenta Δ . . .	63
4.37. Frecuencias de los modos normales, comparamos los obtenidos por el método de matriz de transferencia (círculos azules) contra los obtenidos mediante elemento finito (rombos rojos).	65
4.38. PR para un ensamble de 1000 replicas con $\Delta = 4cm$ (puntos rojos), se muestra también el PR del sistema simulado en Comsol (rombos azules). .	65
4.39. Funciones que corresponden a dos modos 2° y 6° , con linea continua MMT y círculos FEM	66
4.40. Funciones que corresponden a dos modos 14° y 29° , con linea continua MMT y círculos FEM	66
4.41. PR para un ensamble de 1000 replicas con $\Delta = 4cm$ representado por los círculos rojos, mientras que los rombos azules representan el PR de las funciones medidas por el método experimental. Por otra parte se muestra el modo normal 19° , donde vemos que la función de onda que nos provee Fortran describe bien el comportamiento que sucede en la barra.	67
4.42. Funciones de onda de la primera banda, en (a) se presenta el 5° modo, En (b) tenemos el 8° modo, en ambos casos se representa la la función numérica (linea continua) y la medida experimentalmente (círculos azules). .	68
4.43. Se muestran el 13° en (a) y 24° modo en (b), tanto experimental y numérico. .	68

Índice de tablas

4.1. Propiedades de varilla con sección transversal circular.	45
4.2. Propiedades de la barra con sección transversal rectangular.	49
4.3. Constantes del ajuste propuesto, con forme a la variación en la longitud. . .	56
4.4. Constantes del ajuste para la distribución normal , con forme a la variación en la longitud.	56
4.5. Constantes del ajuste para la distribución normal que corresponde a la primera banda, con forme a la variación en la longitud.	57
4.6. Constantes del ajuste para la segunda banda, utilizando la distribución de Izrailev	58
4.7. Constantes del ajuste para la tercera banda.	59
4.8. Constantes del ajuste para los estados localizados, vemos la evolución de las constantes respecto al desorden.	61
4.9. Constantes del ajuste para los estados localizados, vemos la evolución de las constantes respecto al desorden.	62
4.10. Constantes del ajuste para los estados localizados, vemos la evolución de las constantes respecto al desorden.	63
4.11. Longitud de todos los cuerpos que conforman la barra, acoplados mediante muescas de 3mm de largo.	64

Capítulo 1

Introducción.

1.1. Ondas de sonido.

El efecto de una perturbación aplicada bruscamente en un medio, generara que esta perturbación sea transmitida o se propague a otras partes del cuerpo. Este simple hecho, forma parte del estudio del fenómeno de la **propagación de ondas**. La manifestación de este fenómeno físico es muy familiar para mucha gente, desde la transmisión de sonido en el aire, la generación de ondas en un estanque, la transmisión en un sensor sísmico, o la transmisión de ondas de radio, son un ejemplo que nos pueden ilustrar sobre la propagación de ondas en un medio gaseoso, líquido, sólido y el espacio libre.

La propagación de esta perturbación en los diferentes medios mencionados, comparten muchas características en común, de manera que podemos hacer un desarrollo completamente general del tema. Las bases físicas de la propagación de la perturbación, radica en la interacción de los átomos discretos del solido. En un sólido y un fluido mecánico el medio es considerado como continuo y propiedades tales como la densidad o elasticidad son consideradas como funciones continuas, representando los promedios de las cantidades microscópicas. Sin embargo, al prever las bases de la propagación de una onda en un medio, uno de los primeros modelos a considerar es el de un sistema discreto, compuesto por una serie de masas conectadas por resortes, al aplicar una perturbación a una masa en particular, la perturbación sera transmitida a la siguiente masa por la intervención de resorte, donde las cantidades de la masa y la rigidez del resorte, influyen en la velocidad de propagación de la onda.

Para el caso de un medio continuo la masa y la elasticidad, son remplazados por la densidad y el módulo de Young, la interacción se lleva a cabo mediante un diferencial del medio al siguiente. Hablando sobre un sistema sólido, hay dos tipos de acciones que son posibles al aplicar una onda, en un caso el sólido transmite la tensión y el '**estres**', y el movimiento de las partículas sera en la dirección de propagación de la onda, el comportamiento es similar al producido en un fluido. Por otra parte, el sólido puede transmitir el '**esfuerzo cortante**' (*shear stress*), generando que el movimiento de las partículas sea transversal a la propagación de la onda, comportamiento que difiere al de un fluido. Otro aspecto a considerar es el comportamiento de las ondas fuera del sólido, la perturbación eventual-

mente se encontrara con las fronteras (límites del sólido), donde el comportamiento difiere considerablemente con el de una onda en un fluido. Para una onda en un sólido ya sea de compresión o de esfuerzo esta generara en las fronteras ambas ondas [3,4].

La propagación de ondas en un sólido puede ser dividida en tres categorías:

1. En la primera, consideramos ondas elásticas donde el esfuerzo '*stress*' en el material obedece la ley de Hooke, donde el análisis se realiza con ecuaciones exactas.
2. En la segunda categoría se trata con ondas visco-elásticas, donde la viscosidad y el estrés actúan.
3. Por último se tienen las ondas plásticas en el cual el campo del estrés del material es excedido.

El estudio de la propagación de ondas en un sólido va más allá de una matemática abstracta, las medidas experimentales nos proporcionan propiedades de los sólidos, esos sólidos pueden ser la tierra, cristales, metales o alguna otra sustancia [3].

1.1.1. Aplicaciones de las ondas.

El comportamiento de materiales estructurados bajo alguna perturbación son de gran interés, las perturbaciones en estos materiales pueden tener muchas aplicaciones practicas en la ciencia y la industria. A continuación mostramos unos ejemplos.

Hablando principalmente de **ondas sonoras**, una onda sonora es una onda longitudinal que transmite lo que se asocia con sonido. Si se propaga en un medio elástico y continuo genera una variación local de presión o densidad, que se transmite en forma de onda esférica periódica. Mecánicamente las ondas sonoras son un tipo de onda elástica, es importante decir que estas ondas necesitan de un medio para transportarse.

- Música: producción de sonido en instrumentos musicales y sistemas de afinación de la escala.
- Electroacústica: tratamiento electrónico del sonido, incluyendo la captación (micrófonos y estudios de grabación), procesamiento (efectos, filtrado, compresión, etc.) amplificación, grabación, producción (altavoces) etc.
- Acústica fisiológica: estudia el funcionamiento del aparato auditivo, desde la oreja a la corteza cerebral.
- La ecografía, ultrasonografía o ecosonografía es un procedimiento de imagenología que emplea los ecos de una emisión de ultrasonidos dirigida sobre un cuerpo u objeto como fuente de datos para formar una imagen de los órganos o masas internas con fines de diagnóstico.
- La litotricia es una técnica utilizada para destruir los cálculos que se forman en el riñón, la vejiga, los uréteres o la vesícula biliar. Hay varias formas de hacerla, aunque la más común es la litotricia extracorpórea (por fuera del cuerpo) por ondas de choque.

1.1.2. Ondas en sólidos.

A continuación, realizaremos el desarrollo matemático de la propagación de una onda en una cuerda tensada, en la cual tomamos la consideración de que es infinita o semi infinita, con el objetivo de que el efecto de reflexión de la onda al llegar a las fronteras del cuerpo no aparezca, es importante mencionar que esta consideración es tomada en el estudio de ondas libres y ondas producidas por una fuerza externa.

Consideramos un elemento diferencial de la cuerda bajo una tensión $\mathbf{T}$ como se muestra en la Figura 1.1, asumimos que cualquier variación en la tensión debido al desplazamiento de la cuerda es insignificante. La densidad de masa por unidad de longitud es ρ y la fuerza sobre el cuerpo o carga externa es definida por $\vec{q}(x, t)$, la ecuación resultante de movimiento en la dirección vertical es.

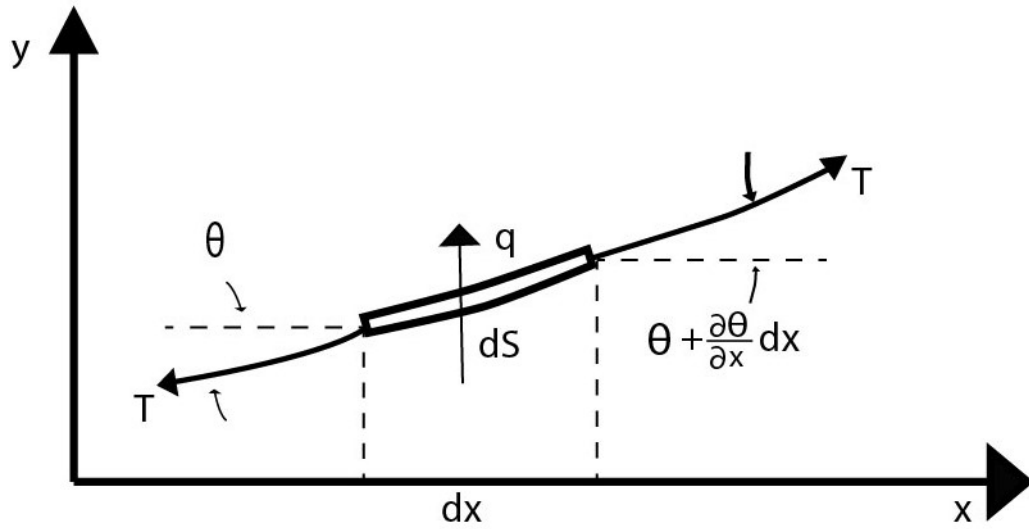


Figura 1.1: Se muestra el elemento diferencial de la cuerda y como este es sometido a una tensión y una fuerza externa [3] (p. 10).

$$-T \sin \theta + T \sin \left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \right) + q dS = \rho dS \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

La longitud de arco esta dada por $dS = (1 + y'^2)^{1/2} dx$ si asumimos pequeñas flexiones en la cuerda podemos aproximar $dS \approx dx$, de igual manera $\sin \theta \approx \theta$ y notamos que $\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$ la ecuación (1.1) toma la forma

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + q = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

Ahora tenemos una ecuación diferencial parcial de segundo orden no homogénea, la ecuación homogénea se obtiene cuando la fuerza externa $q=0$.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad , \quad c_0 = \left(\frac{T}{\rho} \right)^{(1/2)} \quad (1.3)$$

Este resultado gobierna el movimiento trasversal del cuerpo y es conocido como ecuación de onda.

Resulta interesante estudiar la propagación de ondas armónicas a través del sólido, por lo cual usamos como solución general lo siguiente.

$$Y(x, t) = Y(x)T(t) \quad (1.4)$$

La propuesta es tener un producto de funciones que cumplen con la igualdad de la ecuación diferencial, una función para la parte espacial y otra función que solo depende de la parte temporal, la cual la sustituimos en la ecuación (1.3).

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{T''}{c_0^2 T} = -\gamma^2 \quad (1.5)$$

De esta manera ya podemos encontrar las funciones $Y(x)$ y $T(t)$, la cual tendra la siguiente forma, mostraremos dos soluciones que son equivalentes

$$\begin{aligned} y(x, t) &= (A_1 e^{i\gamma x} + A_2 e^{-i\gamma x})(A_3 e^{i\omega t} + A_4 e^{-i\omega t}) \\ y(x, t) &= [A_1 \sin(\gamma x) + A_2 \cos(\gamma x)] [A_3 \sin(\omega t) + A_4 \cos(\omega t)] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Donde tenemos que la frecuencia esta dada por $\omega = \gamma c_0$. La solución mencionada en la ecuación (1.6) y tomamos el caso más sencillo en el cual $A_1 = A_4 = 0$.

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A_1 A_4 \cos(\omega t) \sin(\gamma x) + A_2 A_3 \sin(\omega t) \cos(\gamma x) + A_1 A_3 \sin(\omega t) \sin(\gamma x) \\ &\quad + A_2 A_4 \cos(\omega t) \cos(\gamma x) \\ y(x, t) &= A \sin(\omega t) \cos(\gamma x) \end{aligned} \quad (1.7)$$

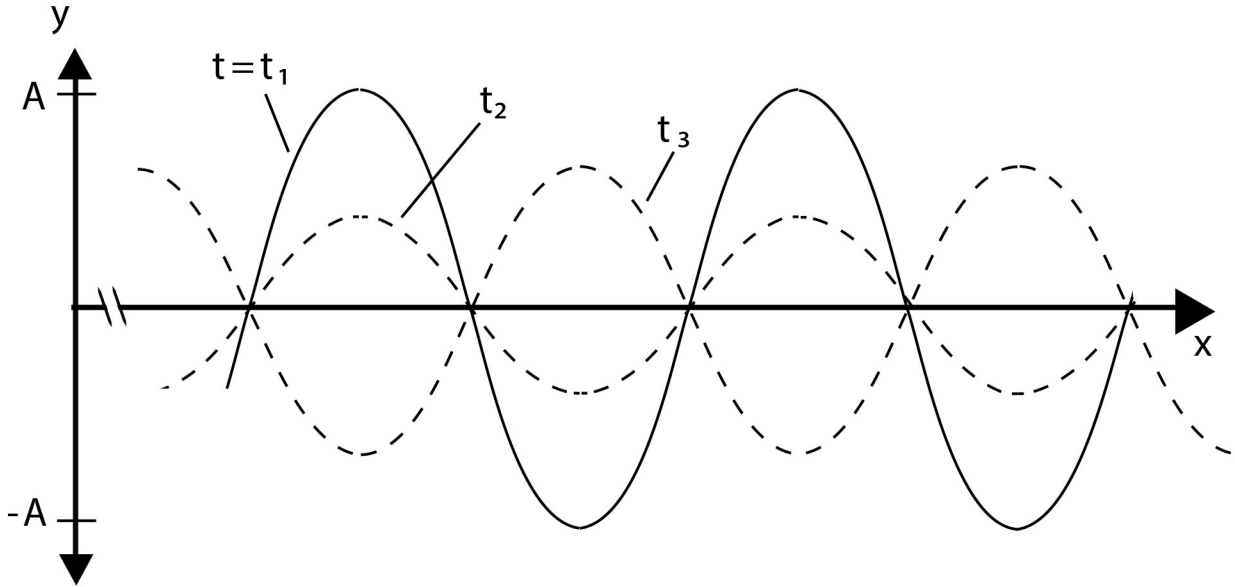


Figura 1.2: Diferentes funciones de onda, para distintos tiempos, dados por la función $y(x, t) = A \sin(\omega t) \cos(\gamma x)$ [3] (p. 11).

El comportamiento del sólido a diferentes tiempos, lo observamos en la figura 1.2, notamos que hay puntos donde la amplitud es cero, esos puntos son conocidos como nodos, mientras los puntos de amplitud máxima son conocidos como antinodos. La solución (1.7), es denominada una *onda estacionaria*. Por otra parte podemos obtener otra forma de la ecuación (1.7), usando propiedades trigonométricas, mostraremos una forma general y una solución sencilla.

$$y = B_1 \sin(\gamma x + \omega t) + B_2 \sin(\gamma x - \omega t) + B_3 \cos(\gamma x + \omega t) + B_4 \cos(\gamma x - \omega t) \quad (1.8)$$

$$y = A \cos(\gamma x - \omega t) = A \cos[\gamma(x - c_0 t)]$$

De esta manera podemos representar una onda que se propaga en la dirección x positiva. Si asociamos al argumento de la función de onda una variable.

$$\phi = \gamma(x - c_0 t) \quad (1.9)$$

Notamos que un incremento en el tiempo, hará que x disminuya para mantener a ϕ constante, en la figura mostramos las diferentes perfiles de onda, donde la velocidad de propagación de las distintas fases es c_0 , lo cual nos define la velocidad de fase.

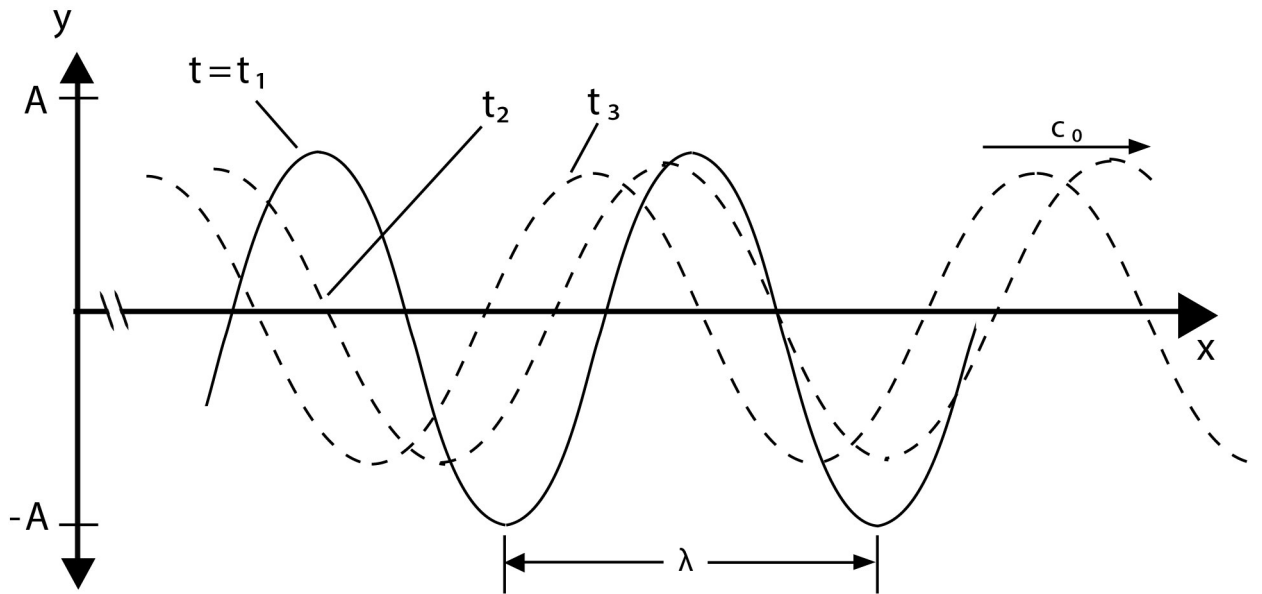


Figura 1.3: Diferentes frentes de onda, para diferentes tiempos, donde observamos la longitud de onda λ y la velocidad de fase c_0 [3] (p. 12).

Definimos la distancia entre dos puntos de fase constante como la *longitud de onda*, esta se encuentra entre los dos mínimos o máximos consecutivos. De la ecuación (1.9), en donde relacionamos la *longitud de onda* con el parámetro γ

$$\lambda = 2\pi/\gamma \quad (1.10)$$

Otras cantidades que describen el movimiento de una onda, son la *frecuencia*, el *periodo*, entre otros que mostramos a continuación.

- A = Amplitud de la onda (longitud)
- f = frecuencia de la onda (1/tiempo)
- $\omega = 2\pi f$ frecuencia angular (radianes/ tiempo)
- λ = longitud de onda (longitud)
- γ = número de onda (1/longitud)
- c_0 = velocidad de fase (longitud/tiempo)
- τ = periodo (tiempo)

$$\omega = \gamma c_0 \quad , \quad \omega = 2\pi f \quad , \quad \tau = 1/f \quad , \quad \lambda = 2\pi/\gamma \quad (1.11)$$

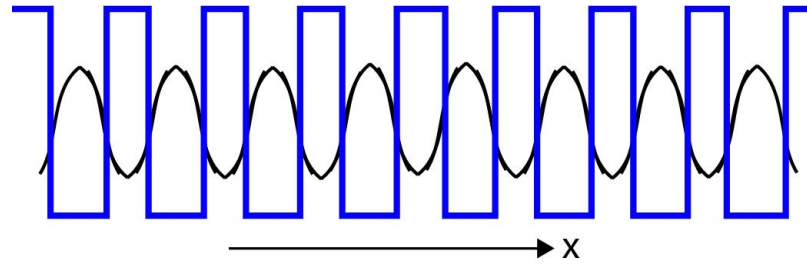
Hemos considerado las características típicas de una onda armónica y vimos las diferentes formas de la solución que describe el comportamiento de la onda de manera muy precisa [3].

1.2. Localización de Anderson.

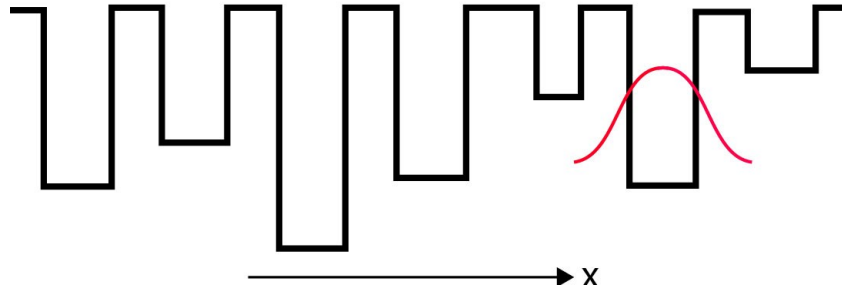
En la literatura moderna, el fenómeno de decaimiento exponencial de las funciones propias de un sistema cuántico en un entorno desordenado se llama **localización de Anderson**, fue Philip W. Anderson que, a los 34 años, publicó un artículo seminal con el objetivo, como señaló, "sentar las bases de la teoría del transporte en la mecánica cuántica" [9]. El artículo discutió un modelo cuántico en una red tridimensional regular, que presenta impurezas aleatorias en el espacio, donde los potenciales generados en los sitios de la red son independientes e idénticamente distribuidos, con media cero y una varianza finita. La amplitud de salto se suponía que era pequeño en comparación con la variación de la distribución en el sitio, y se consideró una serie particular de perturbaciones (luego llamada "serie de localizador" por el autor). El resultado del cálculo de Anderson fue que la serie converge cuando la amplitud de salto es pequeña en comparación con la varianza anterior, Anderson llegó a la conclusión de como la onda cuántica funciona en los medios aleatorios fuertemente desordenados, y como estas ondas se vuelven "localizadas" [5].

1.2.1. Estados Localizados.

Durante mucho tiempo se ha pensado que los estados de electrones u otros los portadores de carga son cualitativamente diferentes en conductores y aislantes. En un metal no magnético la conductividad se eleva cuando se baja la temperatura, mientras que en muchos aislantes la conductividad cae de manera exponencial con el siguiente argumento $-E_0/k_B T$, lo que afecta a las funciones de onda de los electrones que se extienden a través del sistema, mientras que los aisladores tienen portadores de carga localizados, eso debe superar barreras energéticas de orden E_0 para moverse por el sistema. Parece que solo en el límite de temperatura cero hay una clara distinción entre metales y aislantes, y por esa razón, la transición de metal aislante, se considera una transición de fase cuántica.



(a) Sistema periódico



(b) Sistema aleatorio

Figura 1.4: Ejemplo de dos sistemas; uno periódico (a) en donde la propagación de la onda se realiza a través de todo el sistema, mientras que en (b) vemos un sistema aleatorio, provocando que la perturbación este localizada en una parte del sistema.

En una región energética donde los estados están localizados, el Hamiltoniano tiene un espectro puntual, en el que las funciones de onda tienen valores propios bien definidos y vectores propios que son insensibles a las condiciones de contorno o a que es el estado del sistema a grandes distancias de los estados propios particulares bajo consideración. Como están localizados, los estados propios que son dominantes en una región son insignificantes en regiones distantes. Los estados extendidos son niveles de energía que dependen sensiblemente de las condiciones de contorno, y estas pueden responder a un campo externo aplicado formando estados propios complejos que representan corrientes que pueden llegar justo al otro lado el sistema. El espectro es continuo y la densidad local de los estados se desvía suavemente de la densidad media de los estados localizados [6].

1.3. Método de la matriz de transferencia.

De los muchos enfoques que se han desarrollado para simulaciones numéricas de sistemas desordenados en general, y la localización de Anderson en particular, la matriz de transferencia ha demostrado ser la más productiva. A continuación se presentan dos enfoques relacionados que podrían ser ampliamente considerados, como métodos de matriz de transferencia. Como definición de una matriz de transferencia, se puede considerar como un operador que utiliza un conjunto de cantidades definidas en una posición para generar el mismo conjunto de cantidades en una posición posterior. Este concepto puede expresarse en términos de una ecuación recursiva como:

$$\vec{\mathbf{a}}(z + \delta z) = \hat{\mathbf{T}}(z)\vec{\mathbf{a}}(z) \quad (1.12)$$

o una simple ecuación diferencial

$$\frac{d}{dz}\vec{\mathbf{a}}(z) = \hat{\mathbf{D}}(z)\vec{\mathbf{a}}(z) \quad (1.13)$$

Las componentes del vector $\vec{\mathbf{a}}$ pueden representar varias cantidades dependiendo del problema particular a considerar. La importancia de este factor es que es un conjunto completo en el sentido que el número de componentes no cambia como z aumenta, es importante mencionar que tanto $\hat{\mathbf{T}}$, $\hat{\mathbf{D}}$ pueden no ser lineales. Unos simples ejemplos en los que la matriz de transferencia es usado, como en un Hamiltoniano unidimensional que puede reformularse como ecuaciones tal como la Ecuación de Schrödinger unidimensional.

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} + V(z)\psi &= E\psi \\ \frac{d\psi}{dz} &= \psi' \end{aligned} \quad (1.14)$$

La forma matricial de este sistema de ecuaciones diferenciales tiene la siguiente forma

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2m}{\hbar^2}(V(z) - E) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{D}}(z) \begin{pmatrix} \psi' \\ \psi \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

otro ejemplo, ahora utilizando el Hamiltoniano de Anderson

$$V a_{n+1} + \varepsilon_n a_n + V a_{n-1} = E a_n \quad (1.16)$$

Donde obtenemos la siguiente forma matricial.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ V a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E - \varepsilon_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ V a_{n-1} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{T}}_n \begin{pmatrix} a_n \\ V a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Para los operadores lineales $\hat{\mathbf{D}}(z)$ y $\hat{\mathbf{T}}_n$, es posible escribir la solución de manera formal teniendo la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi'(z) \\ \psi(z) \end{pmatrix} &= \hat{P} e^{\int_0^z \hat{\mathbf{D}}(z') dz'} \begin{pmatrix} \psi'(0) \\ \psi(0) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ V a_n \end{pmatrix} &= \hat{P} \Pi_{i=1}^n \hat{\mathbf{T}}_i \begin{pmatrix} a_1 \\ V a_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Donde $\hat{P}$ representa un operador de ordenamiento espacial análogo al ordenamiento por el operador temporal que aparece en la mayoría de las discusiones sobre la teoría de muchos cuerpos. Como ya veremos, estas soluciones formales tienden a no ser útiles en la práctica debido a inestabilidades numéricas y se han desarrollado varias técnicas para superar estas dificultades [7].

1.3.1. Propiedades generales.

Para hablar sobre las propiedades que se observan, utilizaremos un ejemplo cuasi unidimensional (quasi-1D), como se ilustra en la figura 1.5 con una sección transversal finita descrita por el siguiente Hamiltoniano.

$$\begin{aligned} V_{i,n;j,n+1}a_{j,n+1} + H_{i,n;j,n}a_{j,n} + V_{i,n;j,n-1}a_{j,n-1} &= Ea_{i,n} \\ \mathbf{V}_{n,n+1}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{H}_{n,n}\mathbf{a}_n + \mathbf{V}_{n,n-1}\mathbf{a}_{n-1} &= E\mathbf{a}_n \end{aligned} \quad (1.19)$$

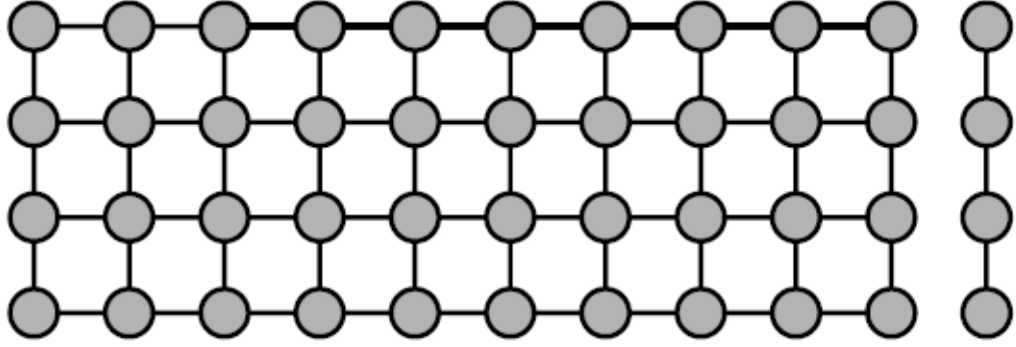


Figura 1.5: Sistema de largo $M (= 4)$ y longitud $N (= 10)$ con un corte adicional a punto de ser agregado a la derecha [7] (p.22).

donde i y j corren a través de la rebanada y n a lo largo de ella. En la representación vectorial, n tiene componentes para cada estado base en el n -ésimo segmento y las matrices H_n , n y V_n , $n \pm 1$ se definen en el subespacio de un solo segmento con sus subíndices denotando rodajas. Este Hamiltoniano puede ser definido en términos de una matriz de transferencia como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{n+1} \\ \mathbf{V}_{n+1,n}a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (V_{n+1,n}^\dagger)^{-1} & 0 \\ 0 & V_{n+1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E - \mathbf{H}_{n,n} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ V_{n,n-1}a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} (V_{n+1,n}^\dagger)^{-1} & 0 \\ 0 & V_{n+1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E - \mathbf{H}_{n,n} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma podemos ver una restricción importante en esta simple matriz de transferencia, ya que $\mathbf{V}$ puede no ser singular. En particular, los problemas en los que los elementos fuera de la diagonal pueden ser cero, como la percolación cuántica [7, 16].

Otra importante propiedad es cuando se considera el caso de $\mathbf{V} = \mathbf{I}$ (la matriz identidad), en este caso la matriz $\mathbf{T}$ tiene propiedad de antisimetría.

$$\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1} \quad \text{con} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Por otra parte la matriz de transferencia se puede usar para calcular los coeficientes de transmisión y la reflexión, donde una muestra se considera incrustada entre semi-infinitos cables. Para hacerlo, comenzamos con una matriz inicial $\mathbf{A}_0$ cuyas columnas representan un conjunto completo de N ondas derechas (las cuales indicamos con R , para una onda izquierda sera L). Es importante tener en cuenta que la matriz de transferencia no es hermitiana y que los vectores propios correspondientes para esta representación para ondas izquierdas toman la forma.

$$\mathbf{A}_0^L = [(\mathbf{A}_0^t)^T - (\mathbf{A}_0^b)^T] \quad \text{con} \quad \mathbf{A}_0^R = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^t \\ \mathbf{A}_0^b \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

El coeficiente de transmisión $(\mathbf{t}_{k,k'})$ puede calcularse observando que después de operar con la matriz de transferencia en los vectores iniciales, podemos proyectar un conjunto de vectores incidentes derechos en el lado izquierdo usando los vectores propios zurdos, de la siguiente manera

$$\mathbf{t}_{k,k'}^{-1} = \mathbf{A}_0^L \mathbf{T} \mathbf{A}_0^R \quad \text{donde} \quad \mathbf{A}_0^L \mathbf{A}_0^R = \mathbf{I} \quad (1.23)$$

Desafortunadamente la mayoría de las veces no podemos simplemente invertir t^{-1} para tener t , para superar esto, se implementa un procedimiento de estabilización, introduciendo una matriz triangular superior $\mathbf{U}$ que ortonormaliza las columnas de $\mathbf{A}_0$, con $\mathbf{B} = \mathbf{t}^{-1}\mathbf{U}$, de esta manera podemos determinar $\mathbf{t}$.

$$\mathbf{t}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{U}^{-1} \quad \implies \quad \mathbf{t} = \mathbf{U}\mathbf{B}^{-1} \quad (1.24)$$

De esta manera obtenemos el coeficiente de trasmisión, una vez que hayamos obtenido la matriz de transferencia de las ondas, la información de los eigenvalores están contenidos en $\mathbf{U}$ y $\mathbf{B}$ [6, 7].

Capítulo 2

Antecedentes.

El descubrimiento del fenómeno de localización de Anderson en la mecánica Cuántica, dio origen a uno de los temas más importantes de la física de materia condensada y que ha tenido un efecto crucial en las propiedades de los materiales. La teoría de localización de Anderson, sirve como un modelo para entender la dinámica de vibraciones o excitaciones electrónicas de moléculas o cristales inorgánicos, ya que estudia las alteraciones en las propiedades de localización de las funciones de onda provocado por el desorden en el sistema. Es bien sabido que en un material periódico los niveles de energía permitidos, forman una estructura de bandas y las funciones de onda asociadas con las energías están extendidas a lo largo del sistema. Si el sistema presenta imperfecciones aleatorias, por ejemplo cuando hay anormal separación entre átomos debido a dislocaciones, las funciones de onda correspondientes pueden estar localizadas en una región del sistema, en el caso particular de un sistema unidimensional infinito, cualquier magnitud del desorden produce la localización de los estados, mientras para un sistema finito el desorden debe ser mayor para generar estados localizados [8, 9].

2.1. Localización de Anderson en diversos sistemas.

A continuación se mencionan diferentes estudios realizados sobre el fenómeno de ondas torsionales en sistemas elásticos y la localización de Anderson [11]. El cual utiliza un método numérico para el estudio de la localización de Anderson, propuesta por Weaire y Williams en 1977. Las ventajas de este método son su versatilidad, y la habilidad de encargarse de sistemas con un gran número de partículas alrededor de 10^3 y la sencilla interpretación de la información obtenida. Se aplicará al Hamiltoniano de Anderson con un sitio en la diagonal desordenado, que tiene una distribución rectangular y la interacción con el vecino más cercano. Implica el cálculo de la dependencia temporal de una función de onda en un ensayo aleatorio, y produce promedios de la cantidad:

$$\mathcal{IPR} = \frac{\sum_i^N |\psi_i|^4}{\left[\sum_i^N |\psi_i|^2\right]^2} \quad (2.1)$$

donde ψ es una función propia y la suma esta sobre todos los sitios. Esto es N^{-1} veces indice de participación inversa o, más simplemente, el inverso del *Número efectivo de sitios* que contribuyen a la función de onda (N_0). Es el valor promedio en una energía E dada, por lo tanto, tiende a un límite distinto de cero ya que el tamaño del sistema llega al infinito ($N \rightarrow \infty$) sólo si los estados en esa energía están localizados para el sistema infinito. Si las funciones de onda se extienden, esperamos que ψ tienda a cero como N^{-1} en este límite la relación N_0/N da el resultado efectivo de sitios que contribuyen para una función de onda extendida.

Los promedios de la ecuación 2.1, los denotamos por $\mathcal{P}$, están relacionados con los promedios temporales de una función de onda aleatoria elegida adecuadamente, de acuerdo con:

$$\mathcal{P} = \frac{N}{2} \sum_i^N (2\bar{p}_i^2 - \bar{p}_i^2) \quad (2.2)$$

Con $p_i \equiv a_i$, a_i es la componente de la función de onda en el sitio i . Para favorecer a los estados cercanos a una energía E_0 , denotamos una función de onda pesada y no pesada, respectivamente ψ^0 y ψ^m

$$\begin{aligned} w^m(E) &= [1 - (E - E_0)^2 / E_{max}^2]^{4m} \quad peso \\ \psi^m &= [1 - E_{max}^{-2} (H - E_0)^2]^m \psi^0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Usamos el metodo utilizado en *The Anderson localisation problem I.*, el cual nos provee de una relación para

$$\begin{aligned} \left[\sum_i^N |\psi_i|^4 \right] &= \int n(E) r(E) w^m(E) dE \\ \mathcal{P}^m &= \int_{-\infty}^{\infty} n(E) r(E) w^m(E) dE / \int_{-\infty}^{\infty} n(E) w^m(E) dE \end{aligned} \quad (2.4)$$

Donde $r(E)$ es el promedio de la cantidad 2.1 para estados de energía E , y $n(E)$ es la densidad de estados. Por último utilizan un programa estándar de Runge-Kutta para la integración de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, el tiempo de cálculo es aproximadamente proporcional al número de sitios en la muestra [11].

Otra investigación importante que se realizo es donde calculan la dependencia de la longitud de localización con la frecuencia en un sistema óptico unidimensional desordenado aleatoriamente, estudiando la dependencia de la transmitividad, el sistema analizado consiste en un arreglo de N capas, con losas dieléctricas que cambian aleatoriamente, con el eje óptico perpendicular a las capas [12].

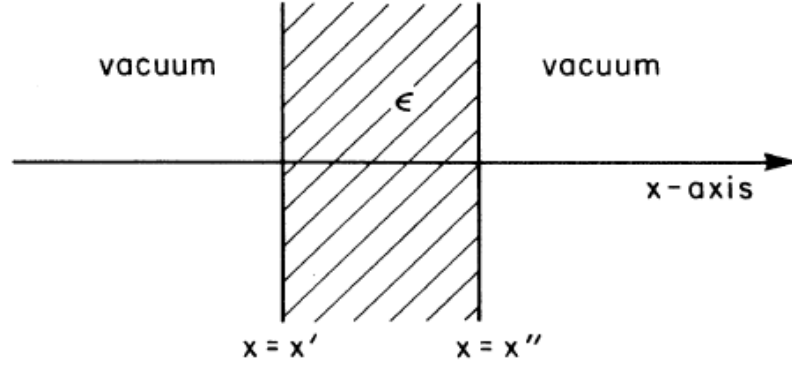


Figura 2.1: Geometría de una sola capa de dieléctrico, con constante ϵ , considerando el sistema en el vacío, mostrando un grosor del dieléctrico de $\Delta = x'' - x'$ [12] (p.121).

La cara izquierda del dieléctrico esta localizada en x' y la cara derecha en x'' . El campo eléctrico para las diferentes regiones son.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= [E_{1R}e^{i\omega(x/c-t)} + E_{1L}e^{-i\omega(x/c+t)}]\hat{i} \quad x < x' \\ \vec{E} &= [E_{2R}e^{i\omega(x/c-t)} + E_{2L}e^{-i\omega(x/c+t)}]\hat{i} \quad x > x''\end{aligned}\quad (2.5)$$

Dado que se satisfacen las condiciones de frontera en x' y x'' , podemos encontrar la matriz que relaciona las amplitudes $E_{1R,L}$ y $E_{2R,L}$

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= T(x'', x'; \epsilon) \vec{E}_1 \quad \text{con} \\ \vec{E}_1 &= \begin{pmatrix} E_{1R} \\ E_{1L} \end{pmatrix} \\ \vec{E}_2 &= \begin{pmatrix} E_{2R} \\ E_{2L} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$T(x'', x'; \epsilon) = \begin{pmatrix} T_1(x'', x'; \epsilon) & T_2(x'', x'; \epsilon) \\ T_3(x'', x'; \epsilon) & T_4(x'', x'; \epsilon) \end{pmatrix}\quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}T_1 &= \left[\frac{i}{2} \left(\sqrt{\epsilon} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right) \sin \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\omega}{c} (x'' - x') \right) + \cos \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\omega}{c} (x'' - x') \right) \right] e^{-i\omega(x''-x')/c} = T_4^* \\ T_2 &= \left[\frac{i}{2} \left(\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right) \sin \left(\sqrt{\epsilon} \frac{\omega}{c} (x'' - x') \right) \right] e^{-i\omega(x''-x')/c} = T_3^*\end{aligned}\quad (2.8)$$

Por último se realiza un sistema, el cual consiste en 2N-1 losas con constante dieléctrica fija ϵ y 1, de tal manera que la constate ϵ_i para i-esima losa es:

$$\begin{aligned}\epsilon_{2i-1} &= \epsilon \\ \epsilon_{2i} &= 1\end{aligned}\quad (2.9)$$

El ancho de las losas son ligeramente modificadas aleatoriamente pero se mantiene el grosor 'a' de la losa. La coordenada x del lado izquierdo y derecho del dieléctrico esta dada respectivamente por

$$\begin{aligned}x_{L,2i-1} &= (2i-2)a + d_{2i-1} \\ x_{R,2i} &= (2i-1)a + e_{2i-1}\end{aligned}\quad (2.10)$$

Donde $d_1 = 0$, d_{2i-1} y e_{2i-1} son un número aleatorio de una distribución uniforme entre $[-\gamma, \gamma]$ Usando las ecuaciones (2.5) y (2.6)

$$\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \Pi_{i=1}^N [T(x_{R,2i-1}, x_{L,2i-2}; \epsilon)] \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Para sistemas unidimensionales que presentan el fenómeno de *Localización de Anderson*, esperamos que la transmitividad $T = |t|^2$ en el sistema decrece rápidamente conforme incrementa N . La longitud de localización l es escrita por una función de distribución dada por

$$l = -\frac{L}{\langle \ln(T) \rangle} \quad (2.12)$$

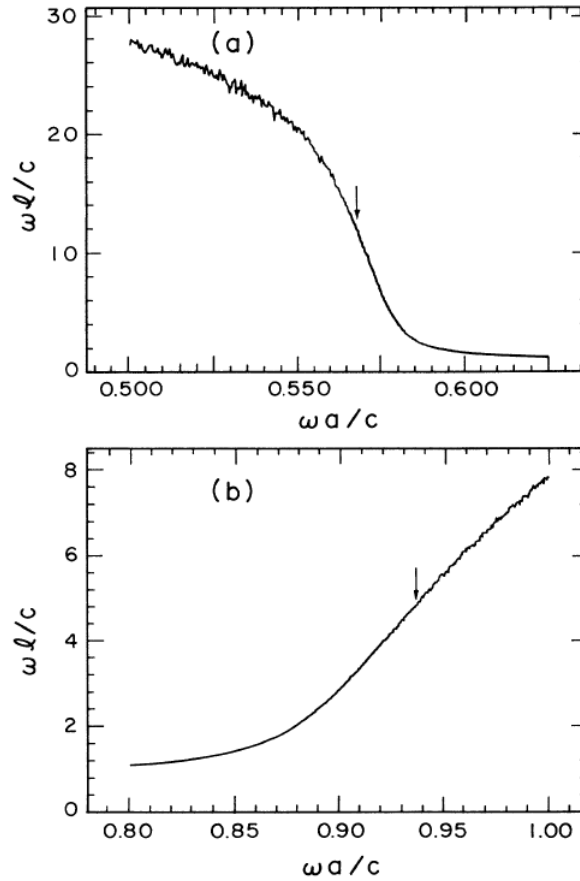


Figura 2.2: Gráfica de $(\omega l/c)$ vs $\omega a/c$ con un sistema desordenado. Los resultados muestran que para (a) ω el borde del dieléctrico izquierdo y en (b) corresponde al lado derecho [12] (p.123).

La investigación concluye que se puede generar una alta localización de ondas electromagnéticas, además de una relación en la pérdida de transmitividad [12]. Es importante resaltar que la aplicación del fenómeno de localización de Anderson no solo se limita a trabajar con ondas electromagnéticas, el fenómeno es observado en ondas mecánicas y últimamente muy analizado en ondas de materia.

2.2. Ondas en sistemas elásticos.

Por otra parte, el estudio de ondas en sistemas elásticos ya sean electromagnéticas o acústicas ha sido sujeto de una extensa investigación a lo largo de los años, además del tratamiento de la barra uniforme en los libros de texto muchas variantes han sido discutidas, dada la significancia científica y tecnológica. Dos de las más importantes aplicaciones son el aislamiento de vibraciones y la supresión de modos resonantes no deseados. Por lo cual una pregunta importante es entender como las propiedades de transporte están relacionadas con el espectro de resonancias. Diferentes estudios se han realizado sobre este fenómeno [10].

Hablando de ondas en sistemas elásticos, en la siguiente investigación se estudia los modos normales de ondas torsionales en un sistema elástico que consiste en un arreglo de N cubos de diferentes dimensiones, el cual presenta resultados numéricos y experimentales. El objetivo principal en este trabajo es obtener una analogía entre este sistema y de las escaleras de resonancia de Wannier-Stark, lo cual consiste en una serie de niveles de energía equidistantes para los electrones en un cristal en presencia de un campo eléctrico externo con el vecino más cercano, la separación entre niveles es proporcional a la intensidad del campo externo, el cual presenta una localización de estados, el sistema descrito es un arreglo de paralelepípedos acoplados de aluminio donde la altura de la sección transversal crece gradualmente entre los cuerpos [14].

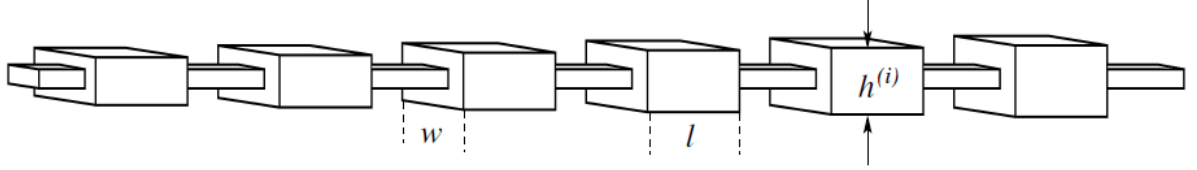


Figura 2.3: Barra utilizada para obtener las frecuencias propias de las *escaleras de Wannier-Stark*. Los cubos tienen la misma longitud $l = 5\text{cm}$ y con ancho de $w = 1.905\text{cm}$, pero diferentes alturas, La $v^{(i)} = (1 + i\gamma)v$, $i=1,2,3,4\dots$ con $v=2027.3\text{ m/s}$ y $\gamma = 0.02786$, El ancho, alto y largo del los cuboides pequeños son $w' = 5\text{mm}$, $h' = 5\text{mm}$ y $l' = 6\text{mm}$, respectivamente [14] (p.1632).

Ahora discutimos la regla usada para asignar los valores de las alturas $h^{(i)}$. Para diseñar la viga nos estamos guiando por un análisis cualitativo de lo que podría llamarse un modelo de haz independiente en el que cada cuerpo oscila independientemente del resto. Es bien sabido que la ecuación describe las ondas torsionales.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{v}\right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (2.13)$$

Ahora aplicamos esta ecuación a los modos normales del i -ésimo cuboide, para $i=1,2,3\dots N$, con extremos libres. Si denotamos por n_n el número de nodos de este modo y por $\omega_{n_n}^{(j)}$ es su frecuencia angular, la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \left(k_{n_n}^{(j)}\right)^2 \theta = 0 \quad (2.14)$$

$$k_{n_n}^{(j)} = \omega_{n_n}^{(j)} / v^{(j)} = 2\pi / \lambda_{n_n}^{(j)}$$

Está claro que la longitud l de un cuboide con los extremos libres están relacionados con $\lambda_{n_n}^{(i)}$, $l = \lambda_{n_n}^{(j)} n_n / 2$, con lo cual modifica la frecuencia angular.

$$\omega_{n_n}^{(j)} = \pi v^{(j)} n_n / l \quad (2.15)$$

Para obtener un conjunto de frecuencias equidistantes (para un valor dado de n_n) buscamos un conjunto de velocidades $v^{(j)}$ tal que $v^{(j)} = (1 + j\gamma)v$, donde v es una velocidad constante arbitraria, el parámetro γ es adimensional.

$$\omega_{n_n}^{(j)} = \pi(1 + j\gamma)v n_n / l \quad , \quad \Delta n_n \equiv \Delta \omega_{n_n}^{(j)} = \frac{\pi v \gamma}{l} n_n \quad (2.16)$$

La velocidad de la onda en el cuerpo, no es constante, depende de la geometría del mismo, como a continuación se muestra.

$$v_j = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \sqrt{\frac{\alpha_j}{I_j}} \quad (2.17)$$

donde ρ es la densidad del sistema, G es el modulo de corte.

$$\alpha_j = \frac{256}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 (2p+1)^2} \frac{h_j w_j}{[(2m+1)/h_j]^2 + [(2p+1)/w_j]^2} \quad (2.18)$$

Y aquí α_j es el parametro de Navier y I_j es el momento de inercia respecto al eje z.

$$I_j = \frac{h_j w_j^3 + h_j^3 w_j}{12} \quad (2.19)$$

Utilizando la teoría para calcular, la velocidad de propagación de las ondas en vigas con sección transversal rectangulares desarrollada por Navier(1827), esta investigación muestra que para ondas torsionales se encuentra un comportamiento similar, las vibraciones en el sistema muestran resonancias con frecuencias equidistantes con el vecino más cercano [10].

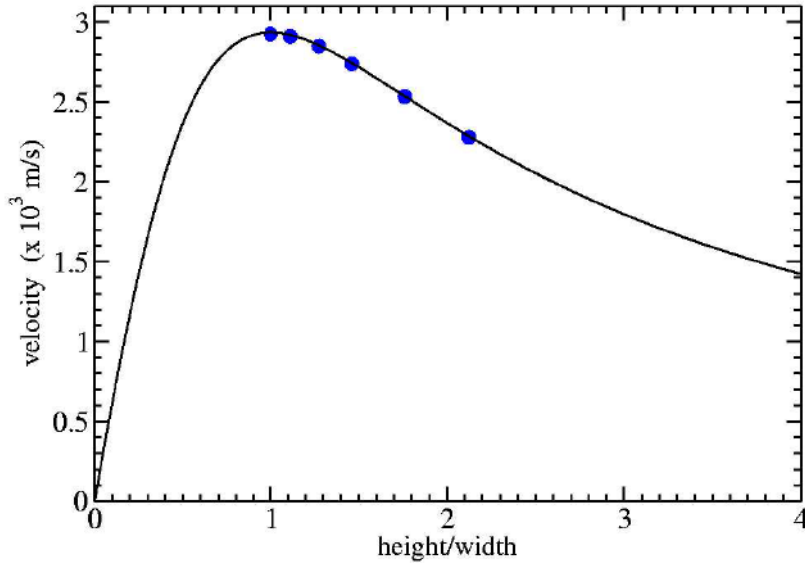


Figura 2.4: Predicción de Navier para la velocidad v en función de la altura h para los cuboides (línea continua). Los valores experimentales (puntos) se ajustan a la predicción, $\sqrt{G/\rho} = 3190$ m/s y $w = 1.905$ cm [14] (p.1634).

Se toman en cuenta las condiciones de frontera del sistema, estamos manejando extremos libres.

$$\theta_j(z)|_{z_j} = \theta_{j+1}(z)|_{z_j} \quad \text{y} \quad \beta_j^2 \frac{\partial \theta_j(z)}{\partial z}|_{z_j} = \beta_{j+1}^2 \frac{\partial \theta_{j+1}(z)}{\partial z}|_{z_j} \quad (2.20)$$

Donde β_i es el área de la sección transversal de la viga enésima. El último resultado reportado es el siguiente.

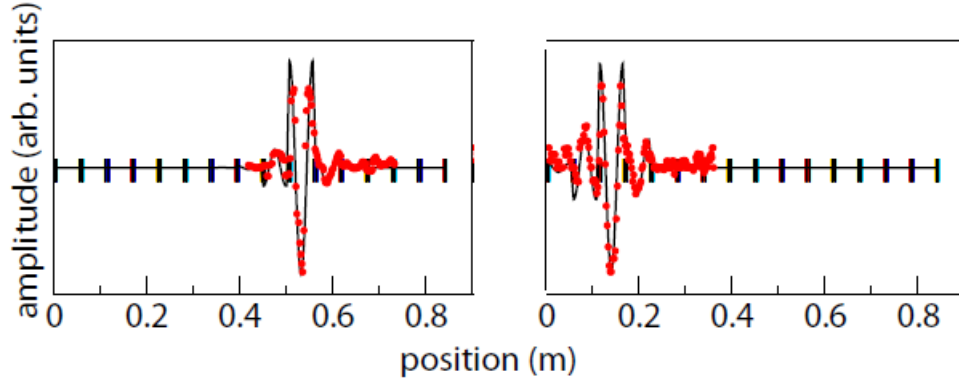


Figura 2.5: Dos amplitudes de onda para ondas torsionales de la barra Figura 2.3 asociadas con la segunda escalera $n_n=2$, La función de onda de la izquierda es la localizada en el décimo cuerpo, y la función de la derecha en el tercero. Las líneas verticales pequeñas dobles a lo largo del eje de la barra indican la posición de los cuboides pequeños. Los puntos son valores experimentales, mientras que la línea continua proporciona valores calculados [14] (p.1635).

Por último se mencionan otras dos investigaciones que abordan las ondas mecánicas en sistemas elásticos. En el primerose realiza un estudio numérico y experimental; sobre el fenómeno de localización de Anderson. El sistema consiste en una barra de aluminio con muescas espaciada al azar, la barra tiene una sección transversal rectangular, cabe mencionar que para el caso de ondas flexionales en la barra, la ecuación diferencial bajo la cual estan regidas, es una ecuación diferencial de 4 orden, por lo cual se utiliza la teoría de **Timoshenko** para resolver este problema. La teoría de **Timoshenko** utilizada para estudiar numéricamente el *fenómeno de localización de Anderson* en las oscilaciones flexionales se basa en la siguiente ecuación, obedecida por el desplazamiento ζ del eje neutro [15].

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial z^4} - \frac{I}{S} \left(1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \frac{\partial^4 \zeta}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{\rho I}{\kappa G S} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial t^4} = 0 \quad (2.21)$$

Involucra E y G , como el modulo de Young y la constante de corte, ρ corresponde a la densidad, I al segundo momento de inercia, S el área de la sección transversal de la barra. El único parámetro libre es κ que corresponde al *coeficiente de corte de Timoshenko*.

Timoshenko introdujo una variable angular $\psi(z, t)$, que indica la rotación de la sección transversal con respecto al eje y . Las variables ζ y ψ obedecen a siguiente sistema de ecuaciones acopladas:

$$\begin{aligned} \kappa G S \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) &= \rho S \frac{\partial^4 \zeta}{\partial z^2 \partial t^2} \\ \kappa G S \left(\psi + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) - EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial t^2} &= -\rho I \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial t^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Imponen las condiciones de modos normales, por lo cual $\psi(z, t) = \varphi(z)e^{i\omega t}$, $\zeta(z, t) = \chi(z)e^{i\omega t}$, $\omega = 2\pi f$, f representa la frecuencia del sistema. La ecuación de Timoshenko bajo esta condición admite la solución de la siguiente manera.

$$\chi(z) = A_j e^{ik_{1,j}(z-z_j)} + B_j e^{ik_{2,j}(z-z_j)} + C_j e^{ik_{3,j}(z-z_j)} + D_j e^{ik_{4,j}(z-z_j)} \quad (2.23)$$

$$k_m = (-1)^{m/2} \sqrt{-\alpha + (-1)^m \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}, \quad m = 1, 2, 3, 4$$

Donde el vector de onda, depende de las propiedades mecánicas y geométricas del sistema.

$$\alpha = \frac{\rho\omega^2}{2M_r}, \quad \beta = \frac{\rho\omega^2 S}{EI} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) \quad y \quad \omega_c = \sqrt{\kappa GS / \rho I} \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{M_r} = \frac{1}{E} + \frac{1}{\kappa G}$$

ω_c corresponde a la frecuencia angular crítica del sistema, esta frecuencia afecta directamente a la constante de Timoshenko.

$$\kappa(\omega) = \begin{cases} \kappa_0 + a\omega + b\omega^2 & si \quad \omega < \omega_c \\ \kappa_1 & si \quad \omega > \omega_c \end{cases} \quad (2.25)$$

Por último se aplican las condiciones de frontera para las ondas flexionales para las funciones χ y φ , el momento de flexión y la fuerza de corte, respectivamente

$$M(z) = -EI \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.26)$$

$$Q(z) = -\kappa GS \left(\psi + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)$$

Una vez desarrollado toda la teoría correspondiente a **Timoshenko**, se utilizó el método de matriz de transferencia para obtener las frecuencias propias del sistema.

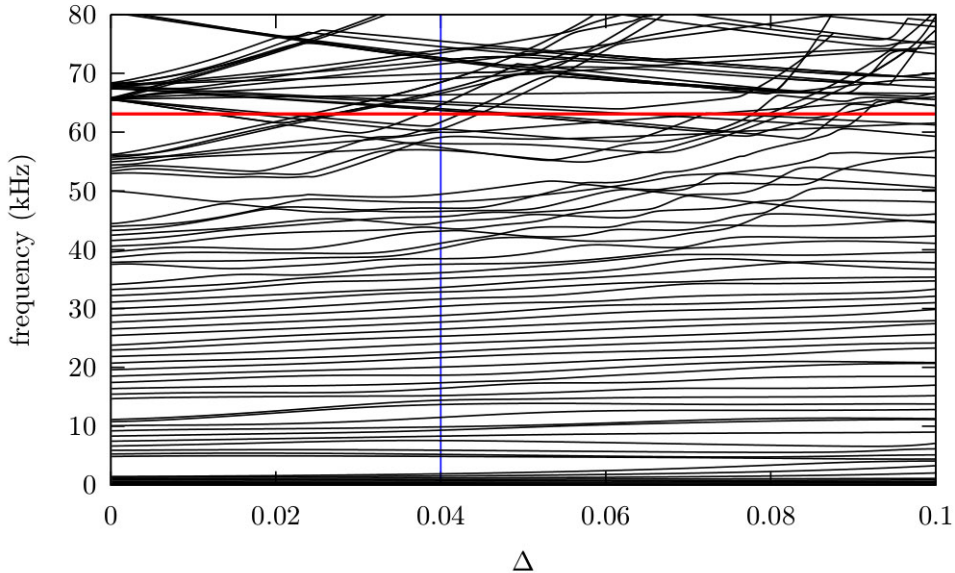


Figura 2.6: Frecuencias de los modos normales de un barra desordenada, obtenidas numéricamente mediante "TBT", en función del desorden Δ . La línea vertical se encuentra en $\Delta = 0.4$, el valor elegido en el experimento. Tenga en cuenta el cambio cualitativo alrededor de $f_c = 63.1$ kHz indicado por una línea roja discontinua horizontal [15] (p. 2).

Para este desorden en específico, se realizó el sistema, y el cual se midieron las funciones de onda.

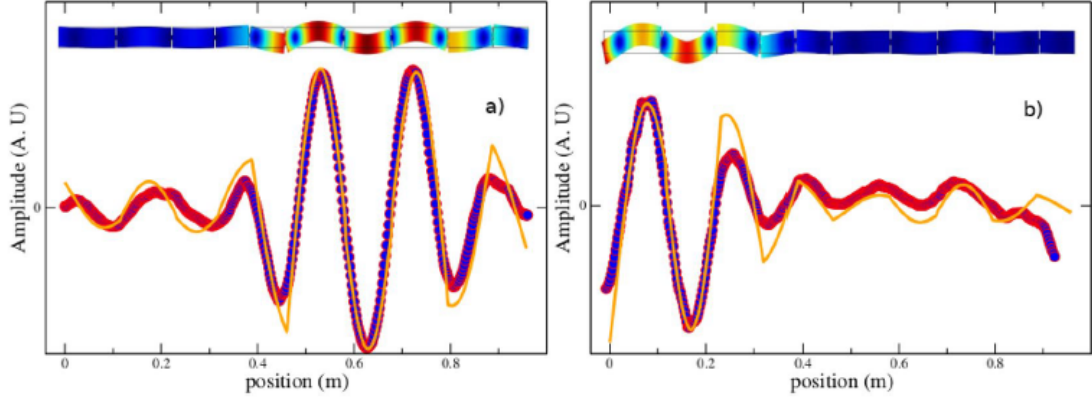


Figura 2.7: Amplitudes de onda medidas en función de la posición a lo largo del eje z , correspondiente a dos modos normales de frecuencias (a) $f=4.768\text{kHz}$ y (b) $f=5.125\text{kHz}$ [15] (p. 4).

Unos de los últimos resultados es el análisis del índice de participación (IPR) el cual es definido de la siguiente manera

$$IPR = \frac{\sum_j \chi^4}{\left(\sum_j \chi^2\right)^2} \quad (2.27)$$

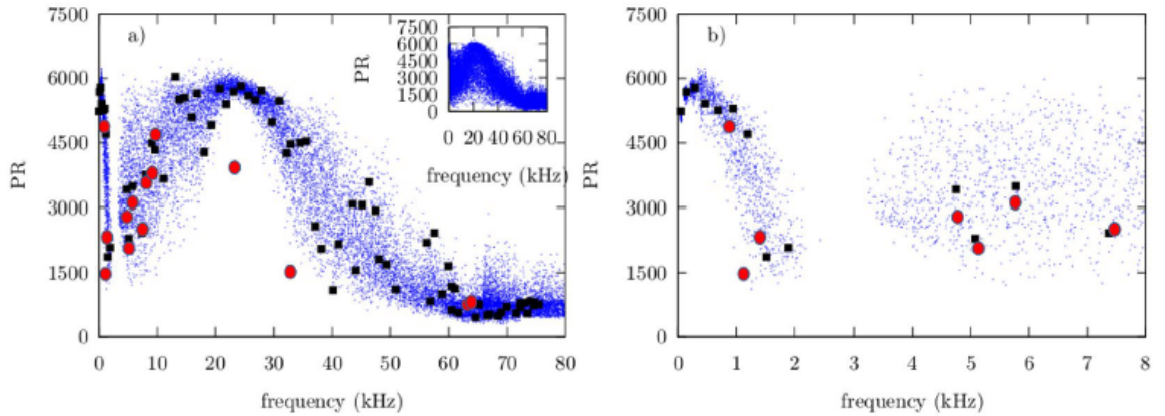


Figura 2.8: Índice de Participación como función de la frecuencia para los modos normales de la barra con desorden $\Delta = 0.4$. Los cuadros negros corresponden a los valores obtenidos por "TBT", los rojos son del experimento, los puntos azules corresponden a un ensamble de 200 barras con $\Delta = 4\text{cm}$ [15] (p. 4).

Los resultados obtenidos nos dicen que el efecto del desorden en el sistema es más fuerte por encima de una frecuencia crítica f_c que por debajo de él. Para un valor elegido de desorden, mostramos que arriba de f_c las funciones de onda en modo normal se localizan como ocurre en sólidos desordenados, mientras que debajo de f_c las funciones de onda están parcial y totalmente

extendidas, pero la dependencia de la frecuencia no se rige por una relación monótona, como ocurre en otros sistemas clásicos y cuánticos [15].

El último trabajo a comentar es el siguiente donde se estudia experimentalmente y numéricamente el fenómeno de localización de Anderson para ondas torsionales. Se determinan las funciones de onda de los modos normales que muestra como decrece la función de onda respecto a la frecuencia. El sistema esta compuesto de N cilindros de radio R , con longitud d_i , $i = 1, 2, \dots, N$, unidos por pequeños cilindros de longitud $\epsilon \ll d_i$ y el radio $r = \eta R$, con la constante η , $0 < \eta < 1$, d_i forma parte de un conjunto de números aleatorios con una distribución uniforme en el intervalo $[d(1 - \Delta), d(1 + \Delta)]$, $d = \langle d_i \rangle$ y Δ es la medida del desorden, con esto se nos permite estudiar el fenómeno de localización de Anderson en sistemas elásticos; en particular, podemos observar cómo las amplitudes de onda decaen exponencialmente con una longitud de localización ξ [20].

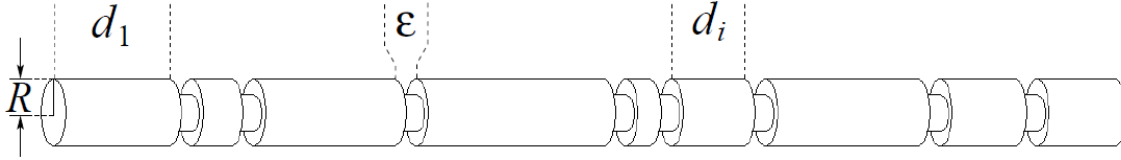


Figura 2.9: Sistema unidimensional para medir la localización, en este experimento el número $N=50$, $R=1.28$ cm, $d=\langle d_i \rangle=7.2$ cm, y $\epsilon = 1.016$ mm; $\Delta=0.35$, $\eta=0.65$, la velocidad es $c = 3140 \frac{m}{s}$. Tomado de Flores J., Méndez R., Monsivais G. and Morales A. (2012), *Anderson Localization in Disordered Vibrating Rods* (p. 2).

Para calcular y medir la longitud de localización ξ para una barra desordenada. Esta la cantidad se puede definir al menos de tres maneras: utilizando la disminución exponencial del coeficiente de transmisión; por el exponente de Lyapunov de la matriz de transferencia, o por el decaimiento exponencial de la envolvente de amplitud de onda. Utilizando la ultima definición, para medir experimentalmente la longitud de localización ξ desde las funciones de onda, se considera un intervalo de frecuencia, donde se miden las funciones de onda, una función exponencial es ajustada por mínimos cuadrados a esas funciones de onda para obtener la longitud de localización.

$$\psi_{env} = A \exp\left(\frac{-|x - x^*|}{\xi}\right) \quad (2.28)$$

Con A una constante, x^* corresponde al máximo de la función de onda.

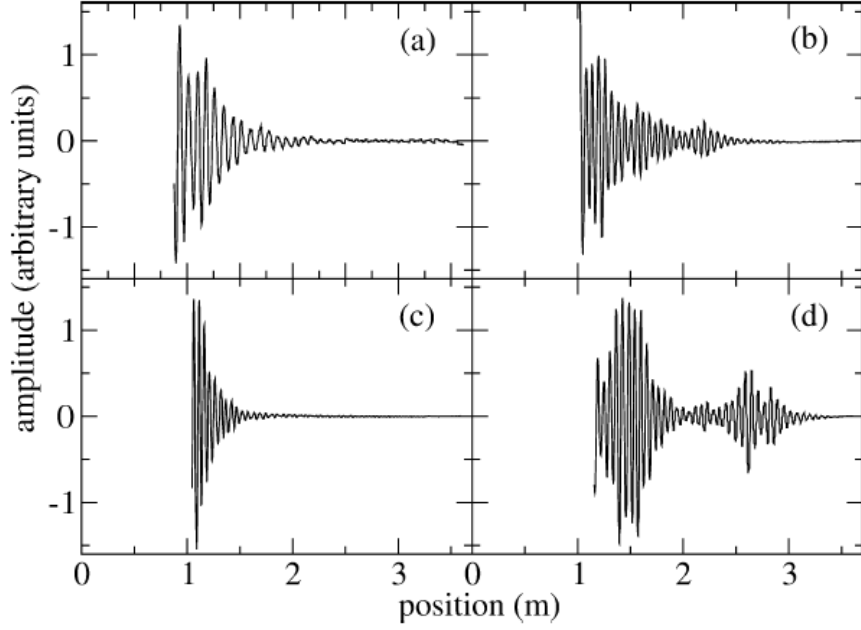


Figura 2.10: Funciones de onda experimentales, para el sistema desordenado de la Figura 2.9. La longitud de localización se extrae de las envolventes de la gráfica como función de la posición [20] (p. 5).

Para el estudio de la distribución de espacios a lo largo del espectro. Vemos que se necesita una función más general que los calculados para **Gaussiana Ortogonal (GOE)**, la **Gaussiana Unitaria (GUE)** y los Conjuntos de matriz aleatoria **Gaussiana simpléctica (GSE)**. Como un método para obtener el nivel de repulsión, el parámetro α , la distribución es:

$$p_\alpha(s) = As^\alpha(1 + B\alpha s)^{f(\alpha)} \exp \left[-\frac{\pi^2}{16}\alpha s^2 - \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)s \right] \quad (2.29)$$

$$f(\alpha) = \frac{2^\alpha(1 - \frac{\alpha}{2})}{\alpha} - 0.16874$$

Tenemos que $s_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\langle f_{i+1} - f_i \rangle}$, y A, B son constantes de modo que la distribución y el promedio del espaciado se normalizan [20].

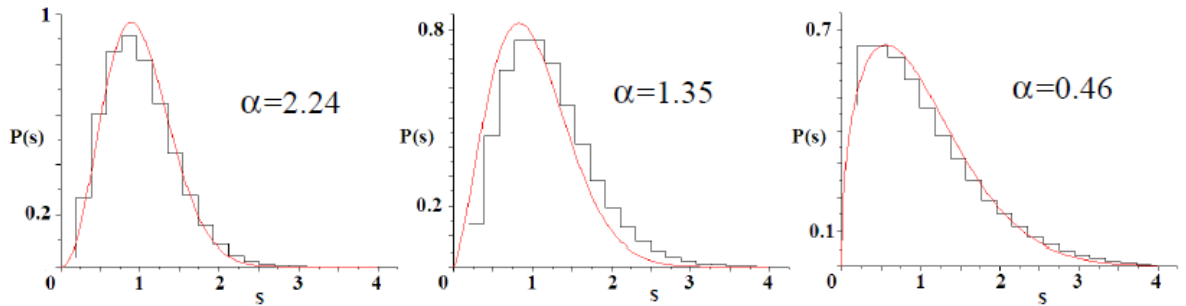


Figura 2.11: Distribución de espaciamiento obtenida para un ensamble de 5000, en un intervalo de 20 kHz. Centrada de izquierda a derecha en 28 kHz, 38 kHz y 78 kHz respectivamente [20] (p. 7).

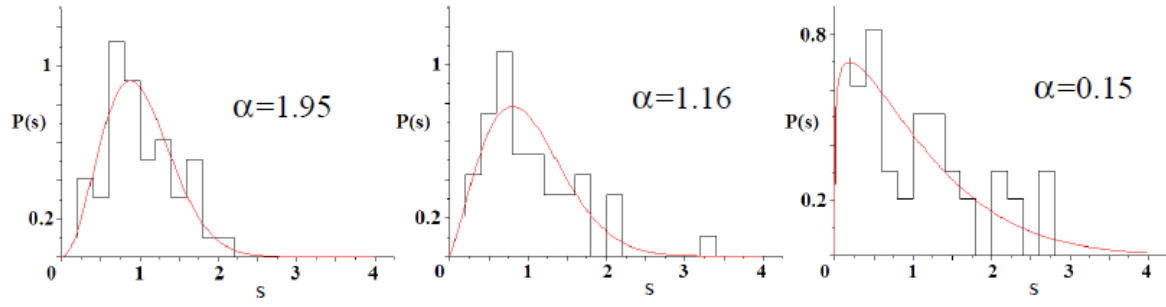


Figura 2.12: Distribución de espaciamiento obtenida experimentalmente, en un intervalo de 20 kHz. Centrada de izquierda a derecha en 20 kHz, 24 kHz y 48 kHz respectivamente [20] (p. 7).

Hasta ahora se ha realizado una descripción de investigaciones realizadas, las cuales tienen un enfoque tanto clásico como cuántico, como pudimos ver, aunque el fenómeno de localización de Anderson surgió como puramente cuántico, a lo largo de los diversos estudios, se ha podido encontrar este fenómeno en sistemas semi-clásicos y puramente clásicos, hablando concretamente en las ondas mecánicas en medios elásticos hay muchos estudios realizados sobre las ondas longitudinales y flexionales, por lo cual analizar las ondas torsionales sobre un sistema desordenado, resulta interesante desde el punto de vista de la ciencia básica.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Método de la Matriz de Transferencia para ondas torsionales en vigas de sección transversal rectangular.

El sistema que nosotros estudiamos consiste en n cuerpos acoplados, de diferentes secciones transversales. Para encontrar los modos normales de vibración utilizamos "método de matriz de transferencia unidimensional".

La barra aquí analizada consiste en n copias de un arreglo periódico en la que introducimos un desorden, que esta formado por paralelepípedos unidos, como podemos ver en la Figura 3.1.

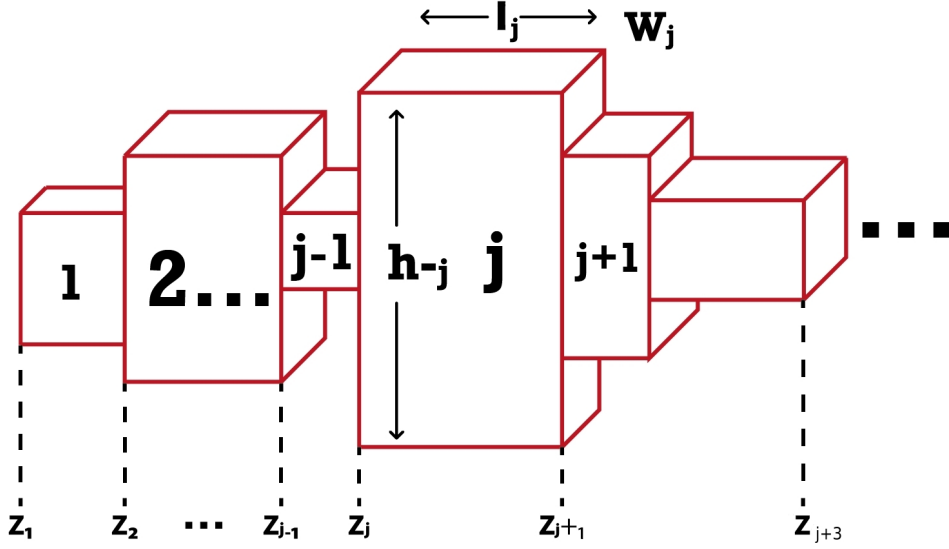


Figura 3.1: Imagen ilustrativa del sistema de n cuerpos acoplados, donde h_j , W_j , l_j corresponden a las dimensiones del cuerpo j -ésimo.

Regidas por la ecuación diferencial para la torsión. La ecuación de onda que guía los modos torsionales, tendrá como característica un vector de onda k_j asociado a cada cuerpo, $k_j = \frac{\omega_j}{v_j} = \frac{2\pi}{\lambda_j}$, v_j la velocidad de la onda, ω_j la frecuencia angular, λ_j la longitud de onda.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{v}\right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

La velocidad de la onda en el cuerpo, no es constante, depende de la geometría del mismo, como a continuación se muestra.

$$v_j = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \sqrt{\frac{\alpha_j}{I_j}} \quad (3.2)$$

donde ρ es la densidad del sistema, G es el modulo de corte.

$$\alpha_j = \frac{256}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 (2p+1)^2} \frac{h_j w_j}{[(2m+1)/h_j]^2 + [(2p+1)/w_j]^2} \quad (3.3)$$

Y aquí α_j es el parámetro de Navier y I_j es el momento de inercia respecto al eje z .

$$I_j = \frac{h_j w_j^3 + h_j^3 w_j}{12} \quad (3.4)$$

Regresamos a la ecuación 3.1, de manera general tenemos que $\theta = \theta(\vec{x}, t)$ ya que la función de onda en el cuerpo i^{th} es para un modo normal

$$\theta_j = \theta_j(z)e^{i\omega t} \quad (3.5)$$

la sustituimos en 3.1, donde llegamos a.

$$\frac{\partial^2 \theta_i(z)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega_i}{v_i}\right)^2 \theta_i(z) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \theta_i(z)}{\partial z^2} + k_i^2 \theta_i(z) = 0 \quad (3.6)$$

Por lo tanto la solución es:

$$\theta_j(z) = A_j e^{ik_j(z-z_{j-1})} + B_j e^{-ik_j(z-z_{j-1})} \quad , \quad z_j \leq z \leq z_{j+1} \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.7)$$

Para ondas torsionales tenemos que las condiciones de borde entre los cuerpos son: que la función de onda y momento de torsión sean continuas, es decir:

$$\boxed{\theta_j(z)|_{z_j} = \theta_{j+1}(z)|_{z_j}} \quad \text{y} \quad \boxed{S_j^2 \frac{\partial \theta_j(z)}{\partial z}|_{z_j} = S_{j+1}^2 \frac{\partial \theta_{j+1}(z)}{\partial z}|_{z_j}} \quad (3.8)$$

función Momento torsional

Donde tenemos que $S_j = h_j w_j$, aplicamos las condiciones a la frontera.

$$\begin{aligned} A_j e^{ik_j(z_j-z_{j-1})} + B_j e^{-ik_j(z_j-z_{j-1})} &= A_{j+1} e^{ik_j(z_j-z_j)} + B_{j+1} e^{-ik_j(z_j-z_j)} \\ S_j^2(k_j) A_j e^{ik_j(z_j-z_{j-1})} - S_j^2(k_j) B_j e^{-ik_j(z_j-z_{j-1})} &= A_{j+1} S_{j+1}^2(k_j) e^{ik_j(z_j-z_j)} \\ &\quad - B_{j+1} S_{j+1}^2(k_j) e^{-ik_j(z_j-z_j)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Claramente vemos que las exponenciales del lado derecho son uno.

$$\begin{aligned} A_{j+1} + B_{j+1} &= A_j e^{ik_j(z_j-z_{j-1})} + B_j e^{-ik_j(z_j-z_{j-1})} \\ S_{j+1}^2(k_{j+1}) A_{j+1} - S_{j+1}^2(k_{j+1}) B_{j+1} &= A_j S_j^2(k_j) e^{ik_j(z_j-z_{j-1})} - B_j S_j^2(k_j) e^{-ik_j(z_j-z_{j-1})} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} A_{j+1} + B_{j+1} &= A_j e^{ik_j(z_j-z_{j-1})} + B_j e^{-ik_j(z_j-z_{j-1})} \\ \frac{S_{j+1}^2(k_{j+1})}{S_j^2(k_j)} A_{j+1} - \frac{S_{j+1}^2(k_{j+1})}{S_j^2(k_j)} B_{j+1} &= A_j e^{ik_j(z_j-z_{j-1})} - B_j e^{-ik_j(z_j-z_{j-1})} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como vemos tenemos un sistema de ecuaciones acopladas, con lo cual podemos asociar un matriz de transformación entre las amplitudes, definimos los siguientes términos: $\delta = S_j^2(k_j)$, $\Delta = z_j - z_{j-1}$, de modo que tenemos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\delta_{j+1}}{\delta_j} & -\frac{\delta_{j+1}}{\delta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_j \Delta_j} & e^{-ik_j \Delta_j} \\ e^{ik_j \Delta_j} & -e^{-ik_j \Delta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

definimos como

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\delta_{j+1}}{\delta_j} & -\frac{\delta_{j+1}}{\delta_j} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

En donde el $\text{Det}(M) = -2\frac{\delta_{j+1}}{\delta_j}$, por lo cual podemos obtener la matriz inversa M^{-1} a partir de la matriz adjunta de la siguiente manera, debemos tener en cuenta que las cantidades δ_j son cantidades positivas. Observando las componentes de una matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Por lo tanto tenemos que para nuestra matriz inversa es:

$$M^{-1} = \frac{-1}{2} \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}} \begin{pmatrix} -\frac{\delta_{j+1}}{\delta_j} & -1 \\ -\frac{\delta_{j+1}}{\delta_j} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}} \\ 1 & -\frac{\delta_j}{\delta_{j+1}} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

De esta manera podemos obtener las amplitudes A_{j+1} y B_{j+1} en términos de los anteriores; A_j y B_j .

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}} \\ 1 & -\frac{\delta_j}{\delta_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ik_j \Delta_j} & e^{-ik_j \Delta_j} \\ e^{ik_j \Delta_j} & -e^{-ik_j \Delta_j} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{ik_j \Delta_j} + \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}} e^{ik_j \Delta_j} & e^{-ik_j \Delta_j} - \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}} e^{-ik_j \Delta_j} \\ e^{ik_j \Delta_j} - \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}} e^{ik_j \Delta_j} & e^{-ik_j \Delta_j} + \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}} e^{-ik_j \Delta_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Definimos

$$\mathcal{M}_{j \rightarrow j+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}}) e^{ik_j \Delta_j} & (1 - \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}}) e^{-ik_j \Delta_j} \\ (1 - \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}}) e^{ik_j \Delta_j} & (1 + \frac{\delta_j}{\delta_{j+1}}) e^{-ik_j \Delta_j} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

De esta manera podemos saber, la amplitud A_n y B_n en términos de las iniciales A_1 y B_1 , La cual representara un producto de todas las matrices $\mathcal{M}$, y de esta manera definimos la matriz de transferencia de todo el sistema.

$$\mathcal{M}^T = \mathcal{M}_{n-1 \rightarrow n} \mathcal{M}_{n-2 \rightarrow n-1} \cdots \mathcal{M}_{2 \rightarrow 3} \mathcal{M}_{1 \rightarrow 2} \quad (3.19)$$

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \mathcal{M}^T \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

De esta manera conociendo las amplitudes iniciales (ya sean condiciones Dirichlet o Neumann) y la matriz de transferencia, determinamos las amplitudes en el cuerpo n . Para este caso utilizamos condiciones Dirichlet (extremos libres) en $z_1 = 0$ y $z_n = L$.

$$\frac{\partial \theta_1(z)}{\partial z} \Big|_{z_1} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \theta_n(z)}{\partial z} \Big|_{z_n} = 0 \quad (3.21)$$

Aplicamos esta condición:

$$\begin{aligned} ik_1 A_1 e^{ik_1(0-z_1)} - ik_1 B_1 e^{-ik_1(0-z_1)} &= 0 \\ A_1 e^{ik_1(0)} - B_1 e^{ik_1(0)} &= 0 \\ A_1 &= B_1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Mientras para z_n

$$\begin{aligned} ik_n A_n e^{ik_n(z_n - z_{n-1})} - ik_n B_n e^{-ik_n(z_n - z_{n-1})} &= 0 \\ A_n e^{ik_n(L - z_{n-1})} - B_n e^{-ik_n(L - z_{n-1})} &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Teniendo las anteriores condiciones de contorno, es conveniente trabajar con las componentes de la matriz de transferencia:

$$\mathcal{M}^T = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Sustituimos en las ecuación 3.20 y llegamos a:

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Por lo cual tenemos que las amplitudes A_n y B_n en términos de la matriz de transferencia son:

$$\begin{aligned} A_n &= M_{11}A_1 + M_{12}B_1 \\ B_n &= M_{21}A_1 + M_{22}B_1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

sustituimos las soluciones para A_n y B_n en la ecuación (3.23) y teniendo en cuenta la ecuación (3.22), tenemos un sistema de ecuaciones acopladas que la podemos representar de la siguiente manera matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ M_{11}e^{ik_n(L - z_{n-1})} - M_{21}e^{-ik_n(L - z_{n-1})} & M_{12}e^{ik_n(L - z_{n-1})} - M_{22}e^{-ik_n(L - z_{n-1})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.27)$$

Definimos como $\mathcal{P}$ la matriz cuadrada del sistema de ecuaciones.

$$\mathcal{P} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.28)$$

Donde el $\text{Det}(\mathcal{P})=0$, nos dará el valor de las frecuencias propias del sistema.

$$M_{12}e^{ik_n(L - z_{n-1})} - M_{22}e^{-ik_n(L - z_{n-1})} + M_{11}e^{ik_n(L - z_{n-1})} - M_{21}e^{-ik_n(L - z_{n-1})} = 0 \quad (3.29)$$

Una forma más compacta de expresarlo es la siguiente

$$(M_{12} + M_{11})e^{ik_n(L - z_{n-1})} - (M_{22} + M_{21})e^{-ik_n(L - z_{n-1})} = 0 \quad (3.30)$$

Con el método de matriz de transferencia podemos determinar las frecuencia propias del sistema, como se indico, y también la función de onda del sistema, es importante recordar que estamos buscando determinar los estados localizados asociando el desorden del sistema. Por último es importante mencionar el sistema a estudiar, estamos trabajando en ondas torsionales aplicado a un sistema de cuerpos acoplados con sección transversal rectangular, para este caso, consideramos dos secciones, una correspondiente al cuerpo y otra de la muesca (que es un cuerpo pequeño que une a los otros dos grandes), como vemos en la siguiente figura.

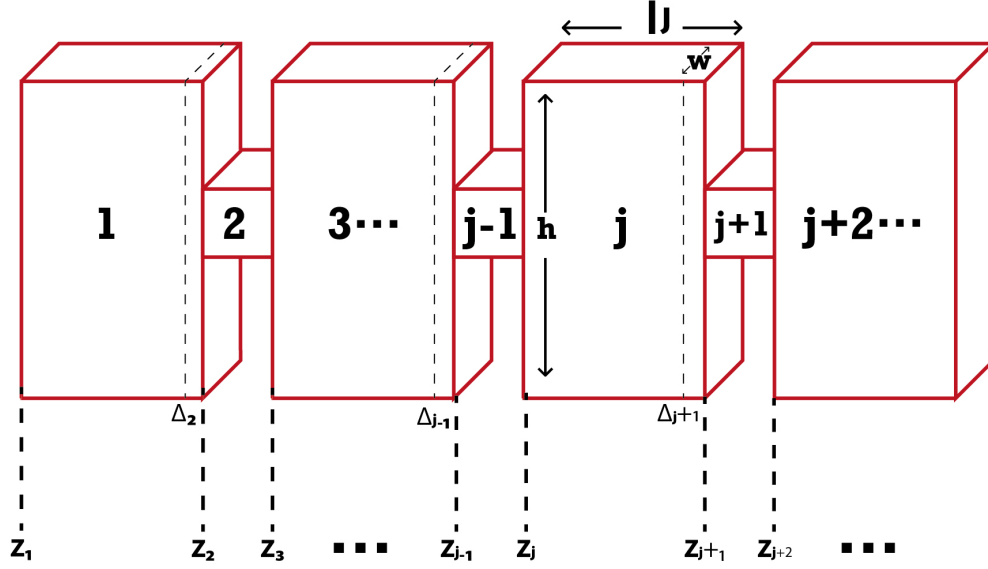


Figura 3.2: Sistema a estudiar, donde las variaciones se generaran en la longitud z_j , el sistema consiste en cuerpos con la misma sección transversal, acoplados mediante muescas (cuerpos pequeños), la variación Δ_j , afecta solo al largo del cuerpo (en el eje z), con lo cual se pretende generar el fenómeno de localización de Anderson.

3.2. Índice de Participación Inverso.

Las funciones de onda en un medio aleatorio pueden caracterizarse físicamente por varios parámetros tales como su diámetro promedio, la fracción del volumen del sistema que ocupan, correlaciones espaciales entre sus amplitudes y fases, y sus asintóticas comportamiento e, indirectamente, por sus propiedades de transporte, estos últimos son estrechamente relacionado con la correlación espacial de las amplitudes y con el comportamiento asintótico. El comportamiento asintótico de un estado localizado generalmente se describe por la longitud del decaimiento exponencial de su envolvente, ξ , la longitud de localización.

$$\Psi_{env}(\vec{x}) = \Psi_0(\vec{x}) e^{-\frac{|x-x^*|}{\xi}} \quad (3.31)$$

Donde Ψ_0 es una función que varía aleatoriamente, y x^* es la posición del máximo de la amplitud de onda.

Para decidir si un estado está localizado o no, a menudo es suficiente considerar el segundo momento de la densidad de probabilidad esto es *índice de participación inverso* (*IPR*) en pocas palabras; es una medida de la porción del espacio donde la amplitud de la función de onda difiere notablemente de cero. Números cercanos a 1 del *PR* implican que la función esta extendida y números mucho más pequeños a 1, implican funciones localizadas en ciertas regiones del sistema. Por lo tanto el valor del *IPR* nos da una medida cuantitativa del valor de la eigen-función. El *IPR* está directamente conectado con la longitud de localización ξ [18, 22].

$$\mathcal{IPR} = \left(\frac{\int_{z_1=0}^{z_n=L} |\Psi_i|^4 dz}{\left[\int_{z_1=0}^{z_n=L} |\Psi_i|^2 dz \right]^2} \right) \quad (3.32)$$

En adelante vamos a usar el inverso de la ecuación 3.32, el cual vamos a denominar como PR .

3.3. Método experimental.

Para realizar las mediciones tanto de las frecuencias propias de nuestro sistema como las funciones de onda del mismo, se recurrió a utilizar el *Transductor electromagnético acústico* (EMAT) por sus siglas en inglés desarrollado en [10]. Un EMAT es un dispositivo sin contacto para excitar y detectar ondas elásticas. El EMAT desarrollado recientemente consiste en una bobina simple y un imán permanente ver Fig.3.3. Cuando se usa como excitador, el campo magnético variable en el tiempo de la bobina induce una corriente de Foucault variable en el tiempo en el metal. El campo del imán permanente genera una fuerza de Lorentz sobre el corriente que acelera la varilla. Cuando se usa como detector. El movimiento de la barra induce un flujo magnético variable en el varilla debido al campo del imán permanente. Esto, de acuerdo según la ley de Faraday, genera una *fem*, que a su vez produce corrientes de Foucault. El campo magnético variable que surge de estas corrientes de Foucault son detectadas por la bobina del EMAT. La *fem* producida por el detector EMAT es proporcional a la aceleración de la superficie de la barra. Esto es porque la corriente de remolino es proporcional a la derivada temporal del flujo magnético, y esto es proporcional, en una primera aproximación, a la velocidad de la superficie del metal. La *fem* inducida en la bobina es proporcional a la derivada del tiempo del campo magnético producido por la corriente de Foucault, esta *fem* es, nuevamente en una primera aproximación, proporcional a la aceleración de la superficie de la barra.

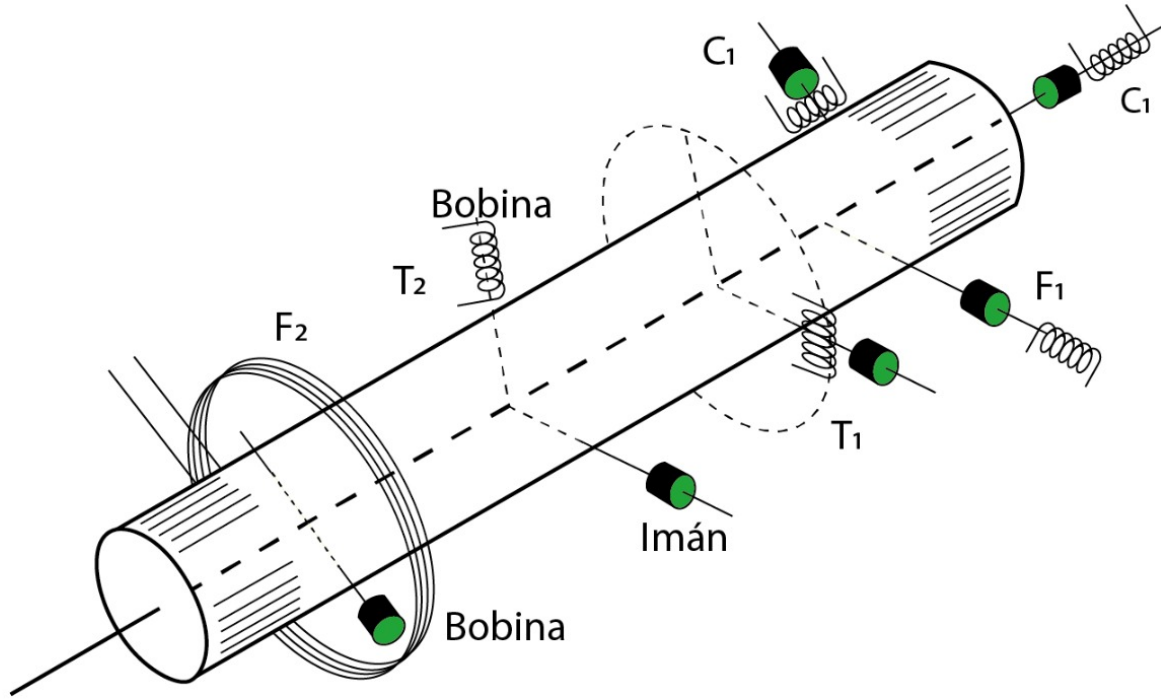


Figura 3.3: Dibujo esquemático que muestra diferentes configuraciones EMAT. Podemos notar que al cambiar la configuración de la bobina y el imán, así como su posición se pueden excitar o detectar diferentes tipos de ondas: C_1 y C_2 compresionales T_1 y T_2 torsionales por último F_1 y F_2 flexionales.

Para realizar nuestras mediciones, utilizamos un transductor electromagnético acústico (EMAT), por sus siglas en inglés, desarrollado en [10]. El EMAT es un dispositivo sin contacto para excitar y detectar ondas elásticas. El EMAT desarrollado recientemente consiste en una bobina simple y un imán permanente. En la Figura 3.3 mostramos algunas configuraciones de estos EMATs para excitar y detectar diferentes modos de vibración en una viga. Cuando este dispositivo se usa como excitador, se envía a la bobina un campo magnético variable en el tiempo, la cual induce una corriente de Foucault en la superficie del metal también variable en el tiempo. El campo del imán permanente genera una fuerza de Lorentz sobre la corriente inducida en el metal, que a su vez acelera la superficie de la varilla. Cuando se usa como detector, el movimiento de la barra induce un flujo magnético variable en la varilla debido al campo del imán permanente. Esto, de acuerdo según la ley de Faraday, genera una *fem*, que son detectadas por la bobina del EMAT. La *fem* producida por el detector EMAT es proporcional a la aceleración de la superficie de la barra. Esto es porque las corrientes de remolino son proporcionales a la derivada del tiempo del flujo magnético, y esto es proporcional, en una primera aproximación, a la velocidad de la superficie del metal. La *fem* inducida en la bobina es proporcional a la derivada del tiempo del magnético campo producido por la corriente de Foucault, esta *fem* es, nuevamente en una primera aproximación, proporciona la aceleración de la superficie de la barra.

En la Figura 3.4, se muestra el diagrama de la configuración la experimental que utilizamos para excitar y detectar los modos de vibración torsionales en la viga con estructura con desorden. Para encontrar las frecuencias de los modos normales de vibración se hace un barrido en un cierto intervalo de frecuencias. Para excitar estos modos normales en la viga, se envía la señal sinusoidal desde el oscilador a un amplificador de potencia, y luego al excitador EMAT. Éste a su vez induce una respuesta en la viga, como se indicó antes. La señal registrada por el detector EMAT se amplifica mediante un amplificador Lock-in sensible a la fase. Para monitorear las resonancias se envía la señal a un osciloscopio. La señal filtrada por el Lock-in se envía a un DAC, el cual convierte la señal de corriente analógica en una señal digital que después es enviada a la computadora para su análisis. Este voltaje es proporcional a la amplitud de onda cuando se excita un normal modo de la barra. La señal de referencia para el Lokc-in es tomada directamente del oscilador. Esta técnica mejora la medida de las amplitudes de onda. Para medir las funciones de onda, se envía una señal de frecuencia contante que corresponde a un modo normal. Para medir la deformación en la viga, se utiliza un EMAT montado sobre un eje que puede desplazarse a lo largo de la viga. La posición del detector se mide con un motor a pasos [10, 19].

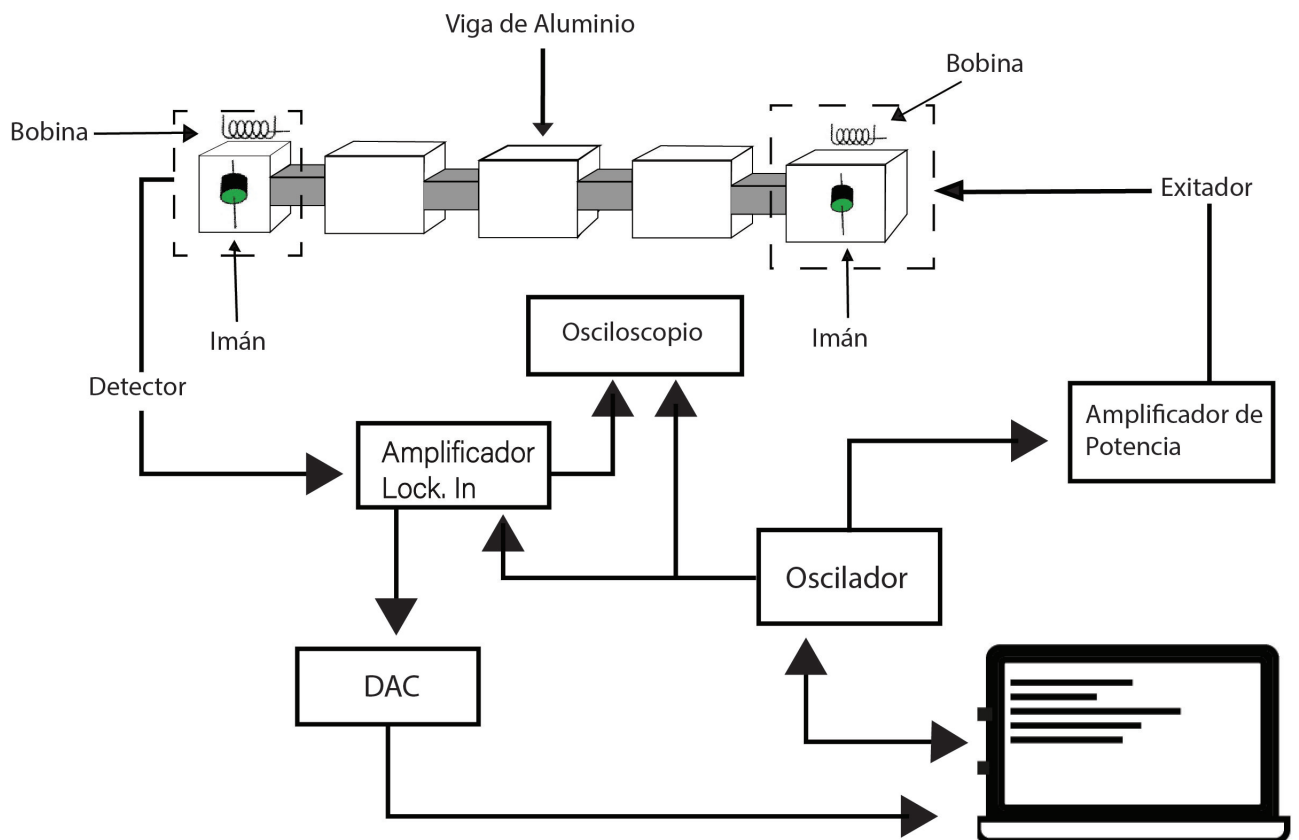


Figura 3.4: Esquema del arreglo experimental completo, mostramos el excitador y el detector (EMAT) y como estos están acoplados a los osciloscopios y los amplificadores para detectar las frecuencias normales del sistema y la forma de la función de onda. El esque ma muestra el sistema compuesto por po los cuerpos (bloques en blanco) acoplados mediante las muescas (bloques sombreados).

Capítulo 4

Resultados.

Parte de este trabajo consiste en un desarrollo teórico e experimental, para ello se utilizó el método de la matriz de transferencia, el cual fue implementado en un lenguaje numérico, en el cual se utilizó Fortran, como principal lenguaje donde se desarrolló el programa, uno de los principales objetivos era desarrollar un programa en donde se hiciera un cambio, el cual causara un desorden en la dimensión de los cuerpos que componen al sistema, incrementando gradualmente este desorden veremos como es que las funciones de onda llegan a localizarse, de las distintas replicas realizaremos un estudio de las funciones, de los valores propios y del IPR. Por último se realizarán dos sistemas con cierto desorden, el cual se podrá comparar con Comsol, Fortran y el experimento.

4.1. Aplicación al sistema de 3 cuerpos.

El propósito de esta sección, es aplicar el método de la matriz de transferencia a un sistema simple, el cual consta de 2 cuerpos y una muesca, en el cual se realizara la aproximación a la barra simple, es decir, serán tres cuerpos con la misma sección transversal y longitud l . Tomaremos la matriz de transferencia para el cuerpo 1 al 2.

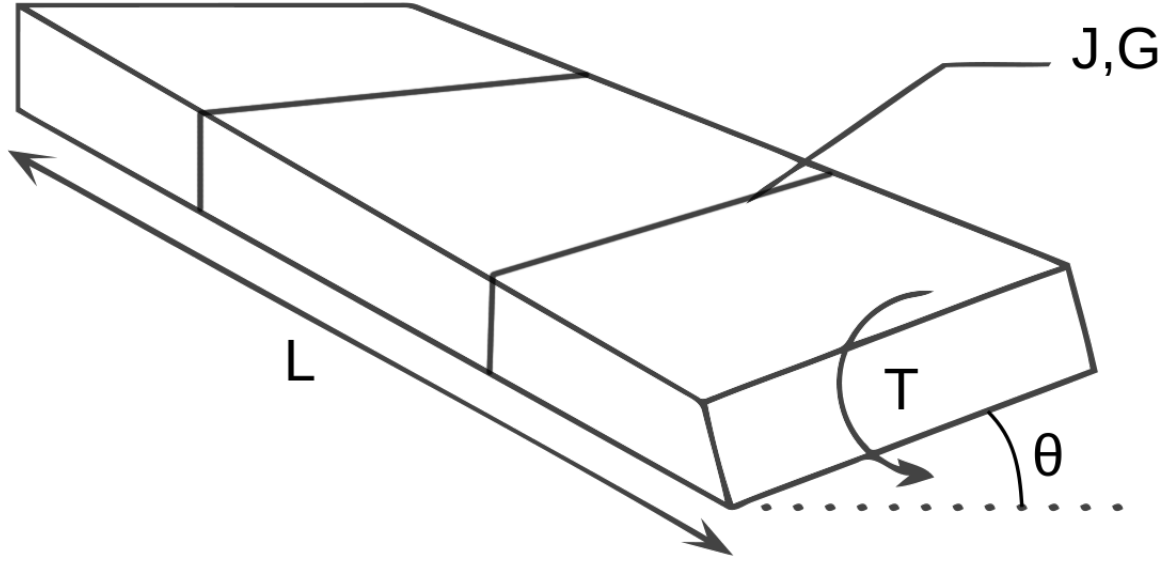


Figura 4.1: Sistema ficticio a replicar, que consta de tres cuerpos acoplados con la misma sección transversal, generando el sistema de la barra simple a la cual se le aplica una torsión.

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{\delta_2}{\delta_1})e^{ik_1\Delta_1} & (1 - \frac{\delta_2}{\delta_1})e^{-ik_1\Delta_1} \\ (1 - \frac{\delta_2}{\delta_1})e^{ik_1\Delta_1} & (1 + \frac{\delta_2}{\delta_1})e^{-ik_1\Delta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Realizaremos las multiplicaciones de las matrices, para obtener la matriz de transferencia del sistema. Definimos $a = (1 + \frac{\delta_2}{\delta_1})$, $b = (1 - \frac{\delta_2}{\delta_1})$, $c = (1 + \frac{\delta_3}{\delta_2})$ y $d = (1 - \frac{\delta_3}{\delta_2})$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{\delta_2}{\delta_1})e^{ik_1\Delta_1} & (1 - \frac{\delta_2}{\delta_1})e^{-ik_1\Delta_1} \\ (1 - \frac{\delta_2}{\delta_1})e^{ik_1\Delta_1} & (1 + \frac{\delta_2}{\delta_1})e^{-ik_1\Delta_1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{\delta_3}{\delta_2})e^{ik_2\Delta_2} & (1 - \frac{\delta_3}{\delta_2})e^{-ik_2\Delta_2} \\ (1 - \frac{\delta_3}{\delta_2})e^{ik_2\Delta_2} & (1 + \frac{\delta_3}{\delta_2})e^{-ik_2\Delta_2} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

De manera que tenemos lo siguiente.

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (ac)e^{ik_1\Delta_1+ik_2\Delta_2} + (bd)e^{-ik_1\Delta_1+ik_2\Delta_2} & (ad)e^{ik_1\Delta_1-ik_2\Delta_2} + (bc)e^{-ik_1\Delta_1-ik_2\Delta_2} \\ (bc)e^{ik_1\Delta_1+ik_2\Delta_2} + (ad)e^{-ik_1\Delta_1+ik_2\Delta_2} & (bd)e^{ik_1\Delta_1-ik_2\Delta_2} + (ac)e^{-ik_1\Delta_1-ik_2\Delta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Esta seria la matriz de transferencia para el sistema, aplicaremos las condiciones de frontera, directamente ocupamos la ecuación (28)

$$\begin{aligned} & ((ad)e^{ik_1\Delta_1-ik_2\Delta_2} + (bc)e^{-ik_1\Delta_1-ik_2\Delta_2})e^{ik(L-z_{n-1})} \\ & - ((bd)e^{ik_1\Delta_1-ik_2\Delta_2} + (ac)e^{-ik_1\Delta_1-ik_2\Delta_2})e^{-ik(L-z_{n-1})} \\ & + ((ac)e^{ik_1\Delta_1+ik_2\Delta_2} + (bd)e^{-ik_1\Delta_1+ik_2\Delta_2})e^{ik(L-z_{n-1})} \\ & - ((bc)e^{ik_1\Delta_1+ik_2\Delta_2} + (ad)e^{-ik_1\Delta_1+ik_2\Delta_2})e^{-ik(L-z_{n-1})} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aplicamos las condiciones de tener la misma sección transversal, $a=2$, $b=0$, $c=2$, $d=0$, $L=3l$

$$\begin{aligned}
& -((ac)e^{-ik_1\Delta_1 - ik_2\Delta_2})e^{-ik(L-z_{n-1})} + ((ac)e^{ik_1\Delta_1 + ik_2\Delta_2})e^{ik(L-z_{n-1})} = 0 \\
& -e^{-ik_1\Delta_1 - ik_2\Delta_2 - ik_3(L-z_{n-1})} + e^{ik_1\Delta_1 + ik_2\Delta_2 + ik_3(L-z_{n-1})} = 0 \\
& 2i\sin[k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + k_3(L-z_{n-1})] = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Al tener la misma sección transversal, el vector de onda k_i es el mismo para los tres cuerpos, y recordamos las definiciones de $\Delta_j = z_j - z_{j-1}$, por último $n=3$.

$$\begin{aligned}
\sin[k((z_1 - 0) + (z_2 - z_1) + (L - z_2))] &= \sin[k(3l)] = 0 \\
k &= \frac{n\pi}{3l} = \frac{2\pi}{v}f \\
f &= \frac{vn}{6l}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Recordar que la velocidad depende de la geometría del sistema, la cual sera misma para la misma sección transversal, El sistema que se manejo fue el siguiente, el cual consta de 3 cuerpos con las siguientes características; sección transversal de $0.1 \times 0.1 \text{ m}^2$, una longitud de 20 cm para los dos cuerpos acoplados y 15 cm para la muesca, teniendo una distancia total de 0.55 cm y una velocidad de $v=4607.2984513 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

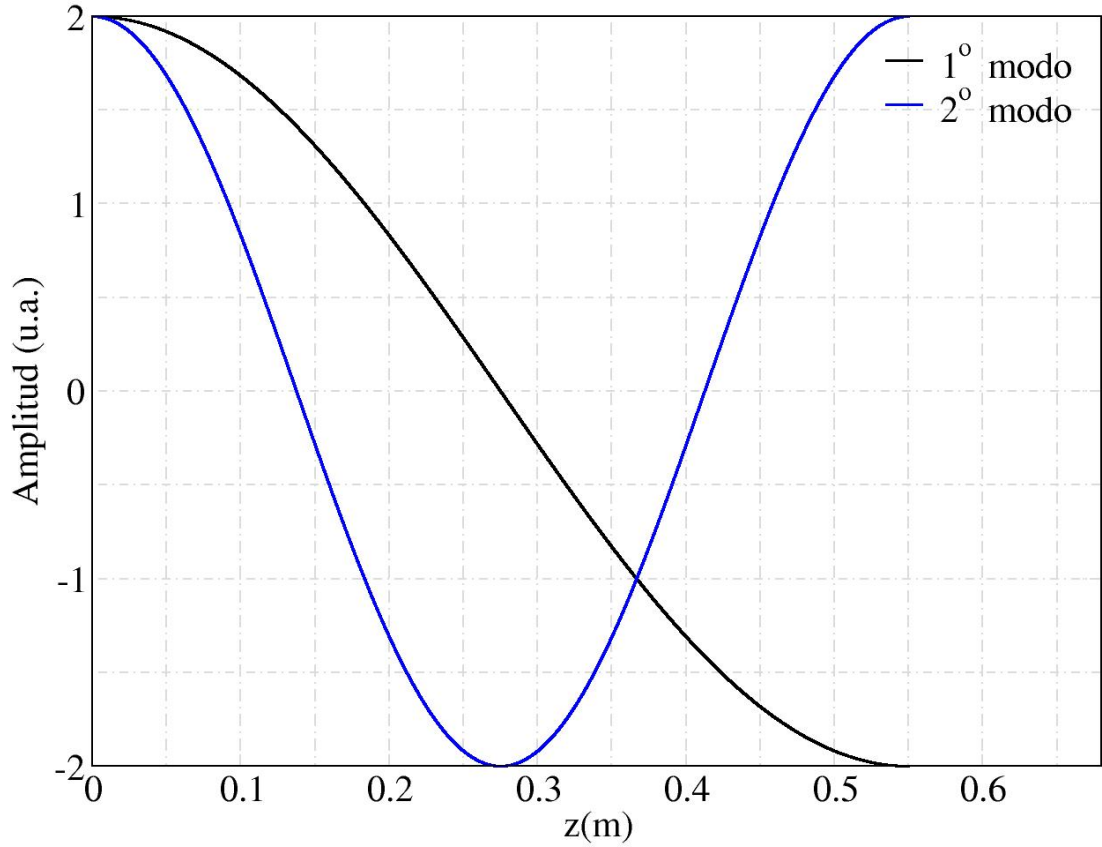


Figura 4.2: mostramos los modos, de una barra simple, calculado con la matriz de transferencia, lo cual concuerda con lo ya visto en la teoría.

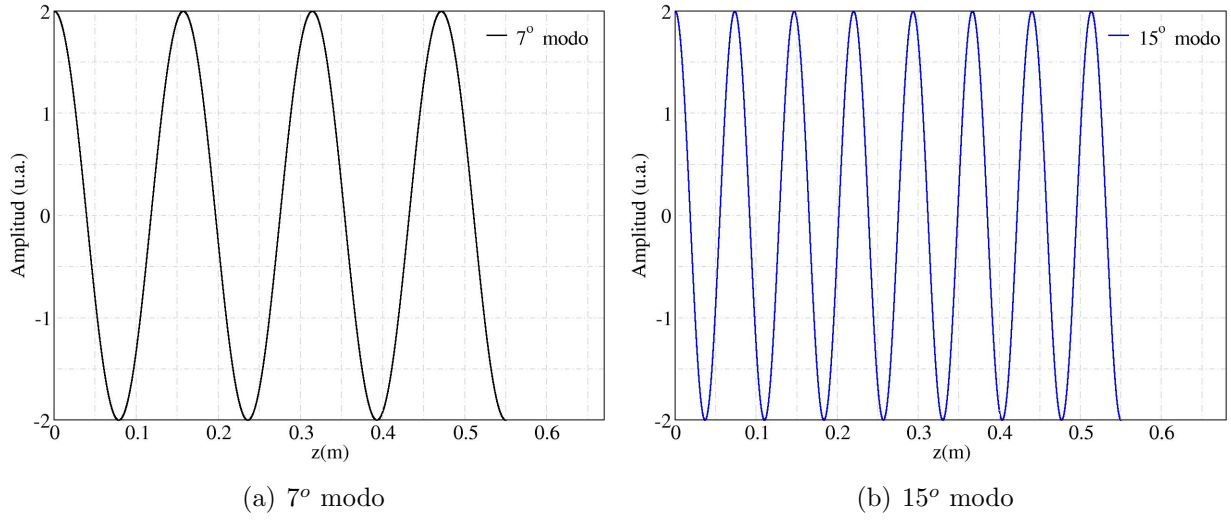


Figura 4.3: Mostramos los modos 7º y 15º, vemos que se describe perfectamente el comportamiento de una onda torsional en una barra simple.

Por último aumentamos el número de cuerpos en el sistema, tenemos 10 cuerpos con longitud de 10 cm, acoplados por 9 muescas con longitud de 5 cm.

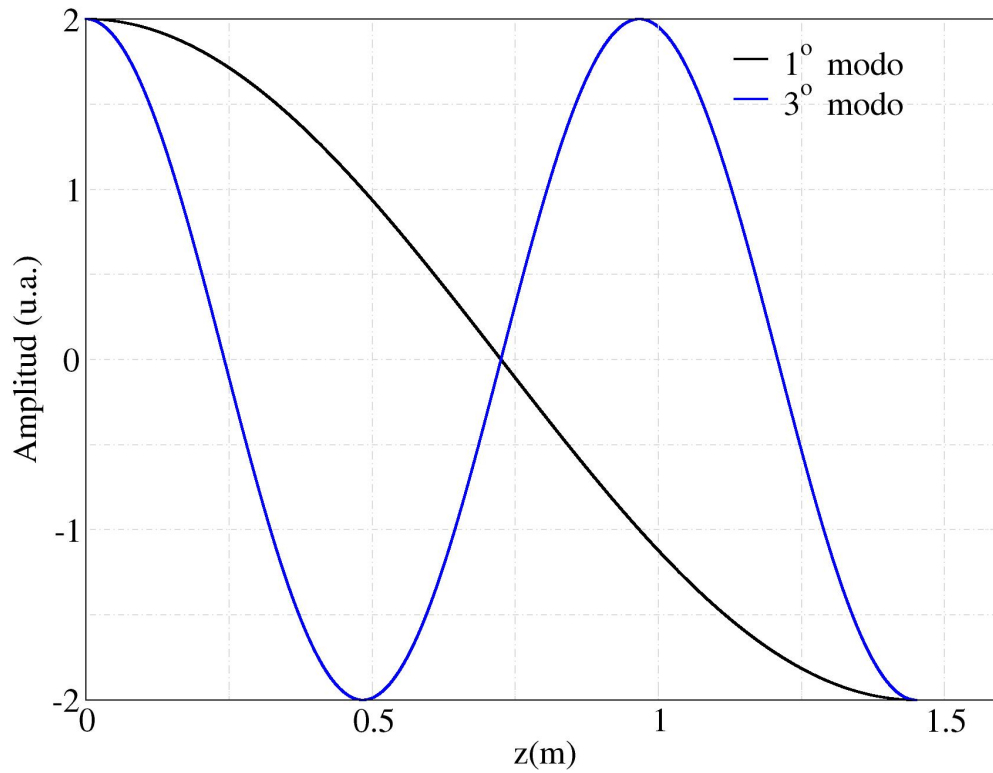


Figura 4.4: Se muestra el 1º y 3º modo de una barra simple, con una longitud total de 1.45 m, compuesta de 19 cuerpos acoplados con la misma sección transversal de $0.1\text{cm} \times 0.1\text{cm}$, se observa observamos el comportamiento de una barra simple, resultado que se esperaba.

Para modos superiores para la barra simple se obtiene lo siguiente.

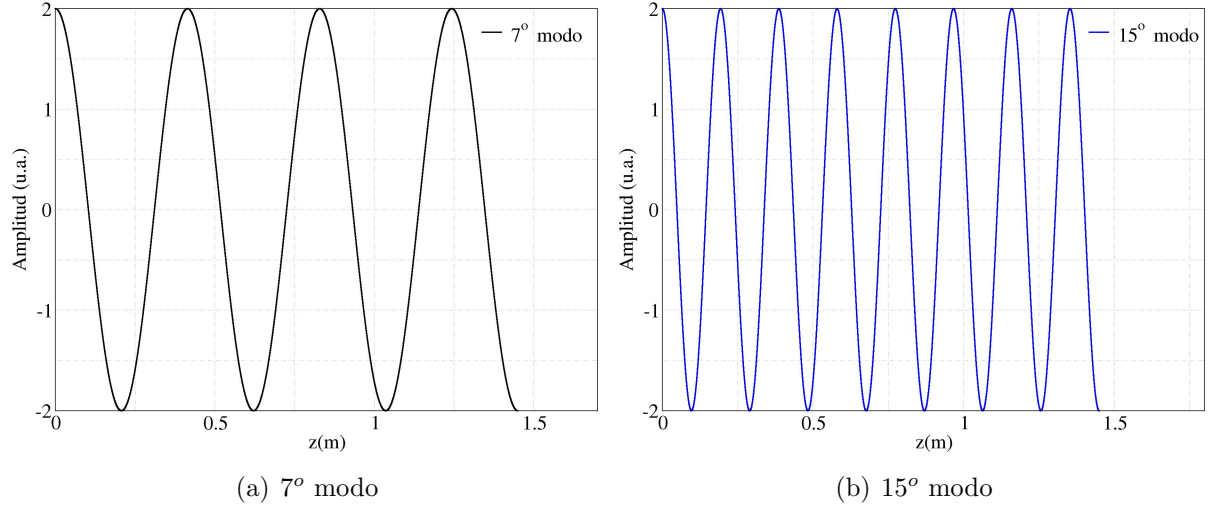


Figura 4.5: Mostramos los modos 7° y 15°, de igual manera para un sistema de 19 cuerpos acoplados con la misma sección transversal, el cual se reduce a una barra simple.

Como vemos los resultados anteriores, corresponden perfectamente a los de una barra simple, una viga o alambre con sección transversal rectangular, bajo una onda torsional.

4.2. Sistema periódico de n cuerpos con diferente sección transversal.

El siguiente sistema a analizar consta de dos secciones transversales, una para el cuerpo y otra para la muesca, será un sistema periódico, no habrá variaciones en la longitud de los cuerpos (eje z). Dadas las características de los cuerpos acoplados este sistema se denomina como *periódico* o *cristalino*. De la misma manera aplicaremos el método de matriz de transferencia, dado que ahora hay dos secciones transversales una del cuerpo y otra de la muesca contaremos con dos velocidades de propagación de la onda v_1 y v_2 respectivamente, una característica importante es que la velocidad de la muesca es mayor que el del cuerpos, de igual manera se tomaran las condiciones de extremos libres.

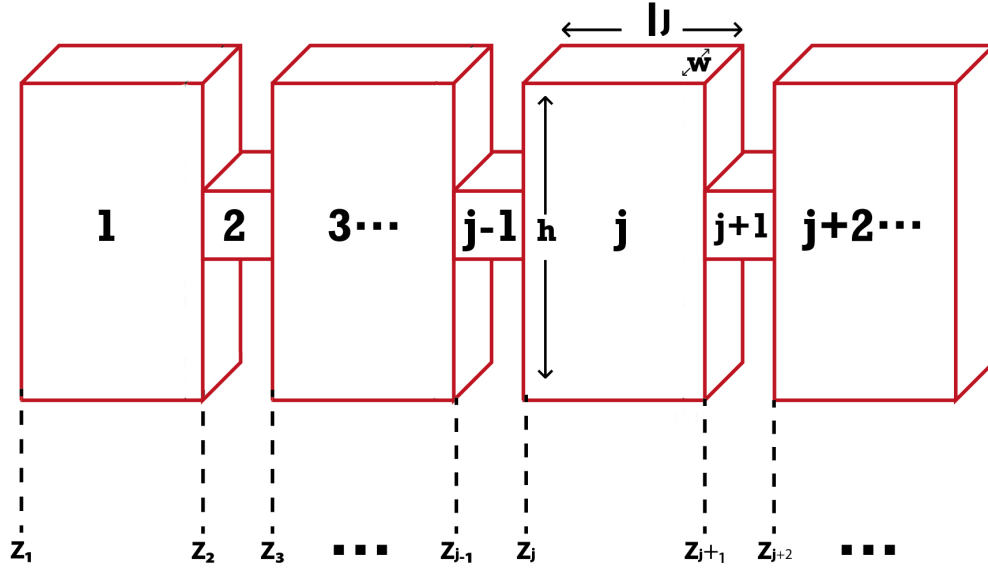


Figura 4.6: Sistema periódico, el cual consiste en cuerpos con la misma sección transversal (cuerpos grandes), acoplados mediante muescas (cuerpos pequeños), la longitud de los cuerpos se mantiene constante.

De la misma manera manejaremos un sistema de n cuerpos, tomaremos la matriz de transferencia del cuerpo uno y dos.

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{\delta_2}{\delta_1})e^{ik_1\Delta_1} & (1 - \frac{\delta_2}{\delta_1})e^{-ik_1\Delta_1} \\ (1 - \frac{\delta_2}{\delta_1})e^{ik_1\Delta_1} & (1 + \frac{\delta_2}{\delta_1})e^{-ik_1\Delta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Donde contamos que $\delta_1 = k_1 S_1^2 = \frac{2\pi}{v_1} f(h_1 w_1)^2$, de igual manera para δ_2 , sustituimos en la matriz de transferencia y tenemos lo siguiente.

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{v_1}{v_2} \left(\frac{h_2 w_2}{h_1 w_1}\right)^2) e^{ik_1\Delta_1} & (1 - \frac{v_1}{v_2} \left(\frac{h_2 w_2}{h_1 w_1}\right)^2) e^{-ik_1\Delta_1} \\ (1 - \frac{v_1}{v_2} \left(\frac{h_2 w_2}{h_1 w_1}\right)^2) e^{ik_1\Delta_1} & (1 + \frac{v_1}{v_2} \left(\frac{h_2 w_2}{h_1 w_1}\right)^2) e^{-ik_1\Delta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Mientras que para la interfaz entre el cuerpo 2 y el 3 tenemos que la matriz de transferencia es la siguiente.

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{\delta_3}{\delta_2})e^{ik_2\Delta_2} & (1 - \frac{\delta_3}{\delta_2})e^{-ik_2\Delta_2} \\ (1 - \frac{\delta_3}{\delta_2})e^{ik_2\Delta_2} & (1 + \frac{\delta_3}{\delta_2})e^{-ik_2\Delta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Es importante darse cuenta de lo siguiente, ya que tenemos un sistema constante, observamos que las secciones de los cuerpos es la misma, al igual que el de las muescas que une a los cuerpos,

por último es importante decir que la longitud de los cuerpos se mantiene constante es decir:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_3 = \delta_5 = \dots = \delta_{2i+1} \\ \delta_2 &= \delta_4 = \delta_6 = \dots = \delta_{2i} \\ \Delta_1 &= \Delta_3 = \Delta_5 = \dots = \Delta_{2i+1} \\ \Delta_2 &= \Delta_4 = \Delta_6 = \dots = \Delta_{2i}\end{aligned}\tag{4.10}$$

teniendo en cuenta esto, la matriz de transferencia entre el cuerpo 2 y la muesca, es la siguiente.

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{v_2}{v_1} \left(\frac{h_1 w_1}{h_2 w_2}\right)^2) e^{ik_2 \Delta_2} & (1 - \frac{v_2}{v_1} \left(\frac{h_1 w_1}{h_2 w_2}\right)^2) e^{-ik_2 \Delta_2} \\ (1 - \frac{v_2}{v_1} \left(\frac{h_1 w_1}{h_2 w_2}\right)^2) e^{ik_2 \Delta_2} & (1 + \frac{v_2}{v_1} \left(\frac{h_1 w_1}{h_2 w_2}\right)^2) e^{-ik_2 \Delta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}\tag{4.11}$$

Realizamos la multiplicación de las dos matrices para tener la matriz de transferencia entre los cuerpos 1-3.

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 + \frac{v_1}{v_2} \left(\frac{h_2 w_2}{h_1 w_1}\right)^2) e^{ik_1 \Delta_1} & (1 - \frac{v_1}{v_2} \left(\frac{h_2 w_2}{h_1 w_1}\right)^2) e^{-ik_1 \Delta_1} \\ (1 - \frac{v_1}{v_2} \left(\frac{h_2 w_2}{h_1 w_1}\right)^2) e^{ik_1 \Delta_1} & (1 + \frac{v_1}{v_2} \left(\frac{h_2 w_2}{h_1 w_1}\right)^2) e^{-ik_1 \Delta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + \frac{v_2}{v_1} \left(\frac{h_1 w_1}{h_2 w_2}\right)^2) e^{ik_2 \Delta_2} & (1 - \frac{v_2}{v_1} \left(\frac{h_1 w_1}{h_2 w_2}\right)^2) e^{-ik_2 \Delta_2} \\ (1 - \frac{v_2}{v_1} \left(\frac{h_1 w_1}{h_2 w_2}\right)^2) e^{ik_2 \Delta_2} & (1 + \frac{v_2}{v_1} \left(\frac{h_1 w_1}{h_2 w_2}\right)^2) e^{-ik_2 \Delta_2} \end{pmatrix}\tag{4.12}$$

Renombramos $\alpha = \frac{v_1}{v_2} \left(\frac{h_2 w_2}{h_1 w_1}\right)^2$, y $\alpha^{-1} = \frac{v_2}{v_1} \left(\frac{h_1 w_1}{h_2 w_2}\right)^2$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 + \alpha) e^{ik_1 \Delta_1} & (1 - \alpha) e^{-ik_1 \Delta_1} \\ (1 - \alpha) e^{ik_1 \Delta_1} & (1 + \alpha) e^{-ik_1 \Delta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + \alpha^{-1}) e^{ik_2 \Delta_2} & (1 - \alpha^{-1}) e^{-ik_2 \Delta_2} \\ (1 - \alpha^{-1}) e^{ik_2 \Delta_2} & (1 + \alpha^{-1}) e^{-ik_2 \Delta_2} \end{pmatrix}\tag{4.13}$$

De manera que tenemos lo siguiente.

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 + \alpha)(1 + \alpha^{-1}) e^{ik_1 \Delta_1 + ik_2 \Delta_2} + (1 - \alpha)(1 - \alpha^{-1}) e^{-ik_1 \Delta_1 + ik_2 \Delta_2} & ((1 + \alpha)(1 - \alpha^{-1}) e^{ik_1 \Delta_1 - ik_2 \Delta_2} + (1 - \alpha)(1 + \alpha^{-1}) e^{-ik_1 \Delta_1 - ik_2 \Delta_2}) \\ (1 - \alpha)(1 + \alpha^{-1}) e^{ik_1 \Delta_1 + ik_2 \Delta_2} + (1 + \alpha)(1 - \alpha^{-1}) e^{-ik_1 \Delta_1 + ik_2 \Delta_2} & ((1 - \alpha)(1 - \alpha^{-1}) e^{ik_1 \Delta_1 - ik_2 \Delta_2} + (1 + \alpha)(1 + \alpha^{-1}) e^{-ik_1 \Delta_1 - ik_2 \Delta_2}) \end{pmatrix}\tag{4.14}$$

Realizamos las operaciones correspondientes, en este caso tenemos que los coeficientes de los exponenciales dan.

$$\begin{aligned}(1 + \alpha)(1 + \alpha^{-1}) &= 2 + \alpha^{-1} + \alpha \\ (1 - \alpha)(1 + \alpha^{-1}) &= \alpha^{-1} + \alpha \\ (1 - \alpha)(1 - \alpha^{-1}) &= 2 - \alpha^{-1} - \alpha \\ (1 + \alpha)(1 - \alpha^{-1}) &= \alpha - \alpha^{-1}\end{aligned}\tag{4.15}$$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2 + \alpha^{-1} + \alpha) e^{ik_1 \Delta_1 + ik_2 \Delta_2} + (2 - \alpha^{-1} - \alpha) e^{-ik_1 \Delta_1 + ik_2 \Delta_2} & (\alpha - \alpha^{-1}) e^{ik_1 \Delta_1 - ik_2 \Delta_2} + (\alpha^{-1} + \alpha) e^{-ik_1 \Delta_1 - ik_2 \Delta_2} \\ (\alpha^{-1} + \alpha) e^{ik_1 \Delta_1 + ik_2 \Delta_2} + (\alpha - \alpha^{-1}) e^{-ik_1 \Delta_1 + ik_2 \Delta_2} & (2 - \alpha^{-1} - \alpha) e^{ik_1 \Delta_1 - ik_2 \Delta_2} + (2 + \alpha^{-1} + \alpha) e^{-ik_1 \Delta_1 - ik_2 \Delta_2} \end{pmatrix}\tag{4.16}$$

Esta matriz corresponde a la matriz de transferencia del sistema, dos cuerpos y una muesca, aplicamos la condición de frontera para determinar las frecuencias del sistema

$$(M_{12} + M_{11}) e^{ik_n(L - z_{n-1})} - (M_{22} + M_{21}) e^{-ik_n(L - z_{n-1})} = 0\tag{4.17}$$

Es importante recordar las siguientes cantidades $L - z_2 = \Delta_3$, y que para este caso que el sistema consta de solo 2 secciones trasversales tenemos $k_3 = k_1$, realizamos las operaciones correspondientes.

$$\begin{aligned}& \left((2 + \alpha^{-1} + \alpha) e^{ik_1 \Delta_1 + ik_2 \Delta_2} + (2 - \alpha^{-1} - \alpha) e^{-ik_1 \Delta_1 + ik_2 \Delta_2} \right) e^{ik_1 \Delta_3} + \\ & \left((\alpha - \alpha^{-1}) e^{ik_1 \Delta_1 - ik_2 \Delta_2} + (\alpha^{-1} + \alpha) e^{-ik_1 \Delta_1 - ik_2 \Delta_2} \right) e^{ik_1 \Delta_3} \\ & - \left((\alpha^{-1} + \alpha) e^{ik_1 \Delta_1 + ik_2 \Delta_2} + (\alpha - \alpha^{-1}) e^{-ik_1 \Delta_1 + ik_2 \Delta_2} \right) e^{-ik_1 \Delta_3} \\ & - \left((2 - \alpha^{-1} - \alpha) e^{ik_1 \Delta_1 - ik_2 \Delta_2} + (2 + \alpha^{-1} + \alpha) e^{-ik_1 \Delta_1 - ik_2 \Delta_2} \right) e^{-ik_1 \Delta_3} = 0\end{aligned}\tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
& (2 + \alpha^{-1} + \alpha)e^{ik_1\Delta_1 + ik_2\Delta_2 + ik_1\Delta_3} + (2 - \alpha^{-1} - \alpha)e^{-ik_1\Delta_1 + ik_2\Delta_2 + ik_1\Delta_3} \\
& + (\alpha - \alpha^{-1})e^{ik_1\Delta_1 - ik_2\Delta_2 + ik_1\Delta_3} + (\alpha^{-1} + \alpha)e^{-ik_1\Delta_1 - ik_2\Delta_2 + ik_1\Delta_3} \\
& - (\alpha^{-1} + \alpha)e^{ik_1\Delta_1 + ik_2\Delta_2 - ik_1\Delta_3} + (\alpha - \alpha^{-1})e^{-ik_1\Delta_1 + ik_2\Delta_2 - ik_1\Delta_3} \\
& - (2 - \alpha^{-1} - \alpha)e^{ik_1\Delta_1 - ik_2\Delta_2 - ik_1\Delta_3} + (2 + \alpha^{-1} + \alpha)e^{-ik_1\Delta_1 - ik_2\Delta_2 - ik_1\Delta_3} = 0
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Usamos la siguiente igualdad entre el exponencial y el coseno

$$\begin{aligned}
e^{ix} + e^{-ix} &= 2\cos(x) \\
e^{ix} - e^{-ix} &= 2i\sin(x)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
& (2 + \alpha^{-1} + \alpha)e^{ik_1\Delta_1 + ik_2\Delta_2 + ik_1\Delta_3} - (2 + \alpha^{-1} + \alpha)e^{-ik_1\Delta_1 - ik_2\Delta_2 - ik_1\Delta_3} \\
& + (2 - \alpha^{-1} - \alpha)e^{-ik_1\Delta_1 + ik_2\Delta_2 + ik_1\Delta_3} - (2 - \alpha^{-1} - \alpha)e^{ik_1\Delta_1 - ik_2\Delta_2 - ik_1\Delta_3} \\
& + (\alpha - \alpha^{-1})e^{ik_1\Delta_1 - ik_2\Delta_2 + ik_1\Delta_3} - (\alpha - \alpha^{-1})e^{-ik_1\Delta_1 + ik_2\Delta_2 - ik_1\Delta_3} \\
& + (\alpha^{-1} + \alpha)e^{-ik_1\Delta_1 - ik_2\Delta_2 + ik_1\Delta_3} - (\alpha^{-1} + \alpha)e^{ik_1\Delta_1 + ik_2\Delta_2 - ik_1\Delta_3} = 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Aplicamos la igualdad de la ecuación 4.20, y con lo cual vemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
& 2i(2 + \alpha^{-1} + \alpha)\sin[k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + k_1\Delta_3] \\
& + 2i(2 - \alpha^{-1} - \alpha)\sin[-k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + k_1\Delta_3] \\
& + 2i(\alpha - \alpha^{-1})\sin[k_1\Delta_1 - k_2\Delta_2 + k_1\Delta_3] \\
& + 2i(\alpha^{-1} + \alpha)\sin[-k_1\Delta_1 - k_2\Delta_2 + k_1\Delta_3] = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
& (2 + \alpha^{-1} + \alpha)\sin[k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + k_1\Delta_3] \\
& + (2 - \alpha^{-1} - \alpha)\sin[-k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + k_1\Delta_3] \\
& + (\alpha - \alpha^{-1})\sin[k_1\Delta_1 - k_2\Delta_2 + k_1\Delta_3] \\
& + (\alpha^{-1} + \alpha)\sin[-k_1\Delta_1 - k_2\Delta_2 + k_1\Delta_3] = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Como vemos para determinar las frecuencias normales del sistema se volvió un trabajo más complejo, al solo modificar un elemento del sistema. pero también vemos como es que las frecuencias propias se obtienen de la parte imaginaria del determinante lo cual nos ahorra trabajo a la hora de realizar un código que determine las frecuencias normales del sistema.

Para poner a prueba nuestro programa computacional, realizamos un sistema ficticio, una barra de $10cm \times 10cm$ de sección transversal para los cuerpos y de $3cm \times 3cm$ para la muesca. Los resultados obtenidos por el programa computacional son los siguientes.

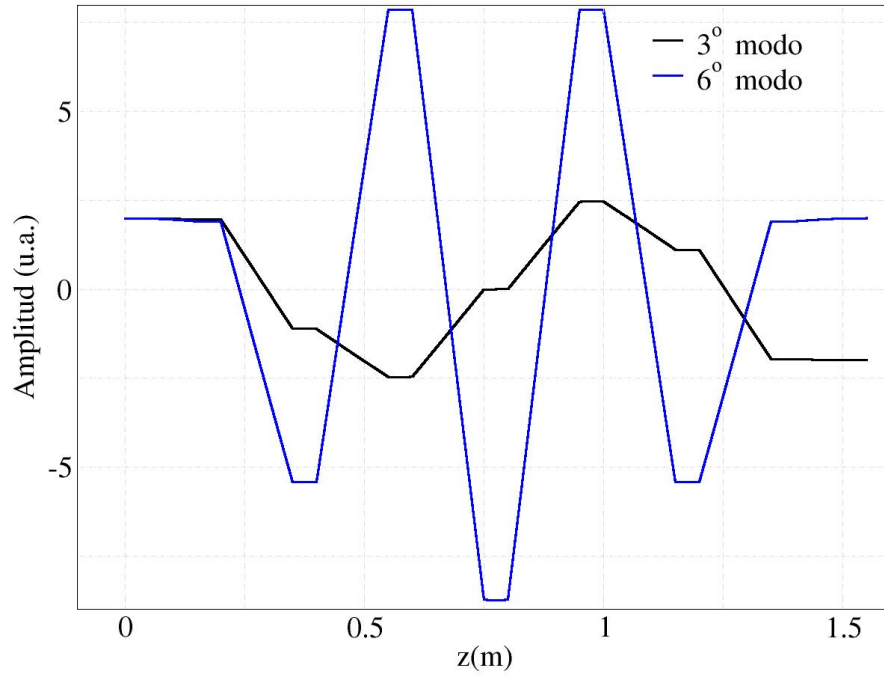


Figura 4.7: Se muestran los 3º y 6º modo, de una barra periódica con secciones transversales de $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ para los cuerpos y de $3\text{cm} \times 3\text{cm}$ para las muescas.

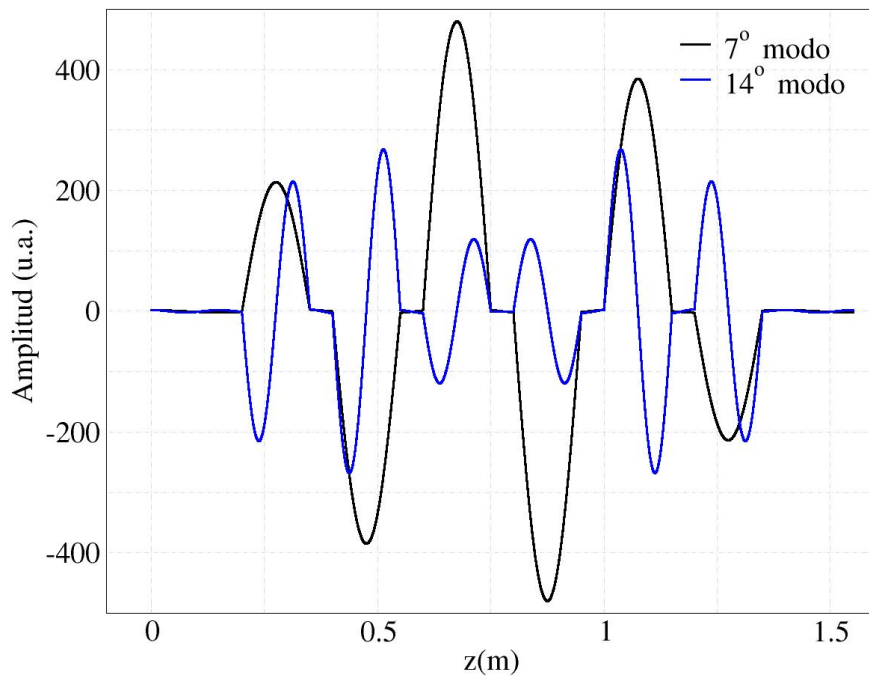


Figura 4.8: mostramos los modos 7 y 14, de una barra periódica, con secciones transversales de $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ para los cuerpos y de $3\text{cm} \times 3\text{cm}$ para las muescas.

Como vemos en la Figura (4.7) y en (4.8), en este sistema periódico donde las muescas son

comparables con los cuerpos, vemos como las amplitudes son constantes cuando la onda pasa por ella, esto es más apreciable en bajas frecuencias.

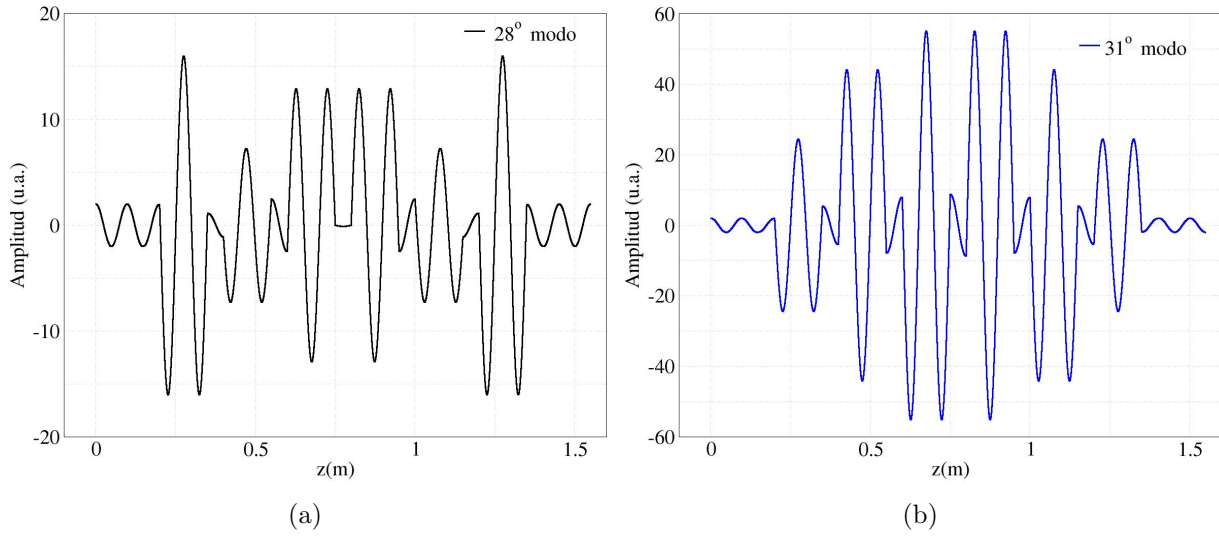


Figura 4.9: Se muestran en (a) el modo 28°, la amplitud de las muescas ya no es constante, salvo en una, para (b) que corresponde al 31° modo la estructura de las muescas ya no es apreciable.

Otro resultado a resaltar es cuando la longitud de las muescas que unen a los cuerpos es "muy pequeña" comparado con la longitud de los cuerpos, simulamos un sistema periódico en donde la longitud de los cuerpos es de 15 cm, y la de las muescas pasa a 3.0 mm, los resultados son muy similares a la barra simple.

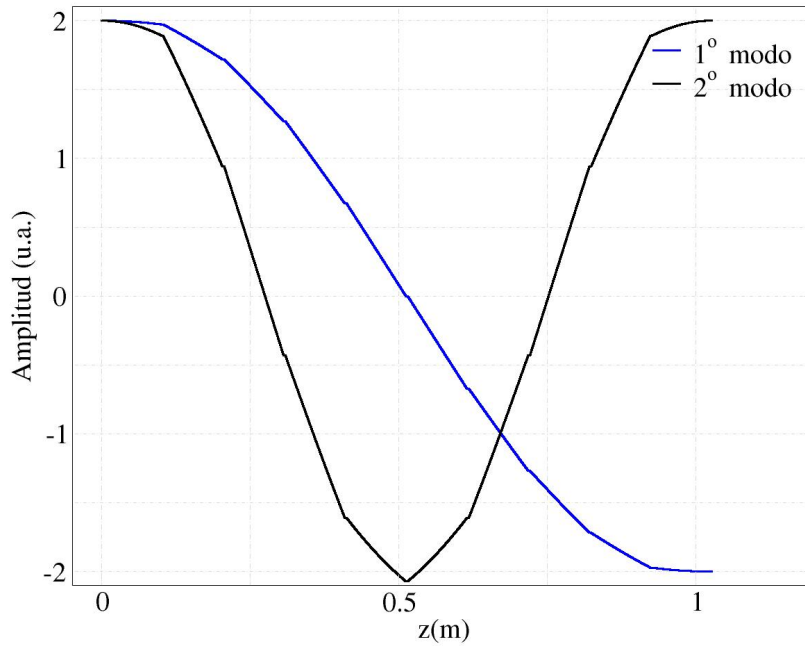


Figura 4.10: mostramos los modos 1 y 3, de una barra periódica, con secciones transversales de 10cm×10cm para los cuerpos y de 3cm×3cm para las muescas. Donde la amplitud de la onda es muy parecida a la de una barra periódica, resaltando que hay "quebres" de la función

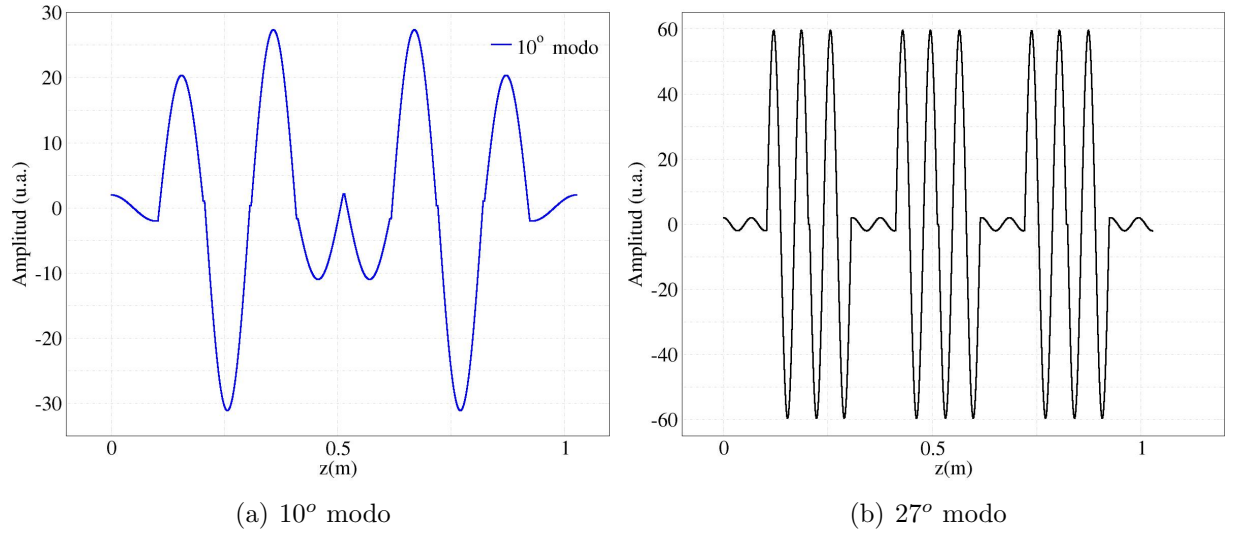


Figura 4.11: Se muestran en (a) el modo 10°, se observan pequeños quiebres en la función de onda, que corresponde a las muescas, pero de igual manera con forma se analiza un modo normal mayor, como en (b) que corresponde al 27°, este comportamiento de las muescas es despreciable.

4.3. Aplicación de la matriz de transferencia a un sistema periódico con sección transversal circular.

El artículo *Compressionl and torsional wave amplitudes in rods with periodic structures* de los investigadores A. MORALES, J. FLORES, L. GUTIÉRREZ Y R.A. MÉNDEZ-SÁNCHEZ, reproduciremos los trabajos realizados en ondas torsionales, con el fin de comparar nuestro programa numérico. El sistema estudiado aquí son ondas torsionales en un sistema periódico con sección transversal circular, una ventaja de tener esta sección es que la velocidad de propagación es la misma, Para realizar este hay que tener en cuenta los siguientes cantidades y la siguiente ecuación.

total cuerpos	12
muecas	13
Radio cuerpo	R=6.45 mm
η	r/R =0.209
ϵ	0.33 mm
Longitud	L=0.9106 m
α_T	0.88 mm

Tabla 4.1: Propiedades de varilla con sección transversal circular.

$$\eta_{eff}^T = \frac{\eta}{(1 + \alpha_T/\epsilon)^{\frac{1}{4}}} \quad \text{and} \quad \eta_{eff}^T = 0.151035288 \quad (4.24)$$

$$(\eta_{eff}^T)^{-1} = 6.620969266 \quad (4.25)$$

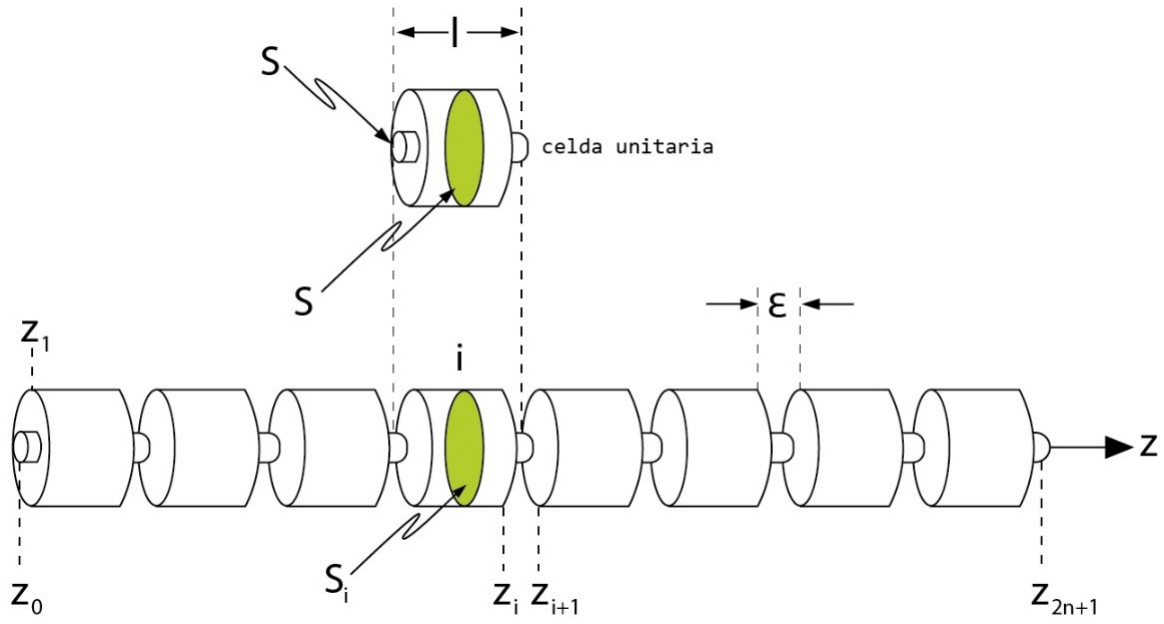


Figura 4.12: Sistema reportado, el cual es periódico de sección transversal circular.

El sistema consta de un celda unitaria, la cual es el acoplamiento de un cuerpo y media muesca de ambos extremos, que al ser unidos con más celdas, generan un sistema periódico, una característica de estos sistemas es que la propagación de la perturbación se transmite a todo el cuerpo, como se vera a continuación en los resultados reportados.

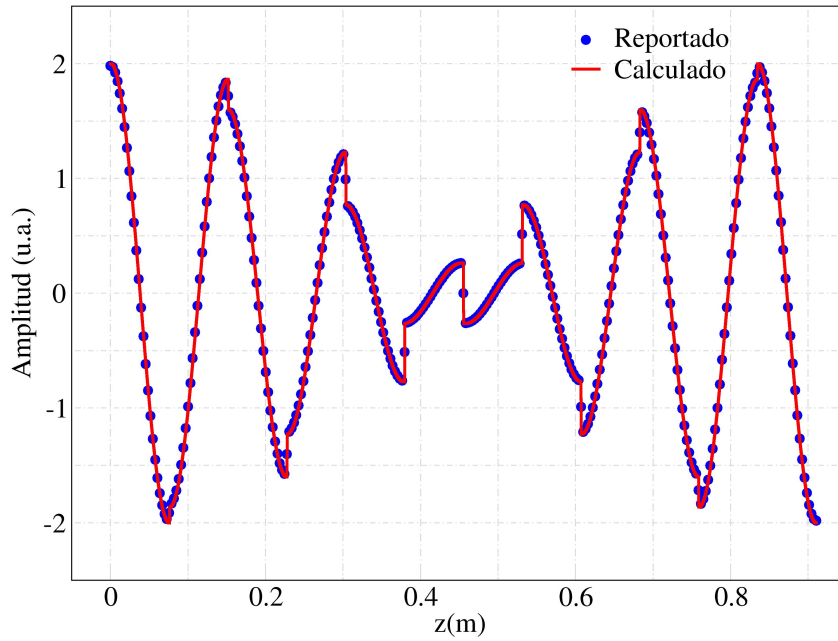


Figura 4.13: Simulación de los modos normales del artículo *Compressionl and torsional wave amplitudes in rods with periodic structures*, se reporta el modo 13, como vemos los resultados del artículo (puntos negros) y lo calculado (línea roja) son las mismas.

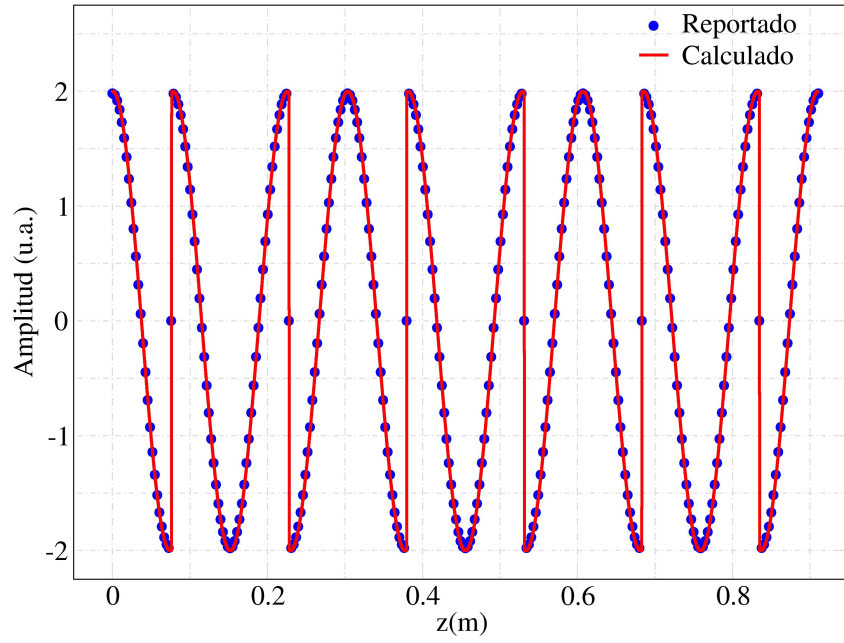


Figura 4.14: Comparación del modo 18, justamente vemos como ambos resultados concuerdan muy bien.

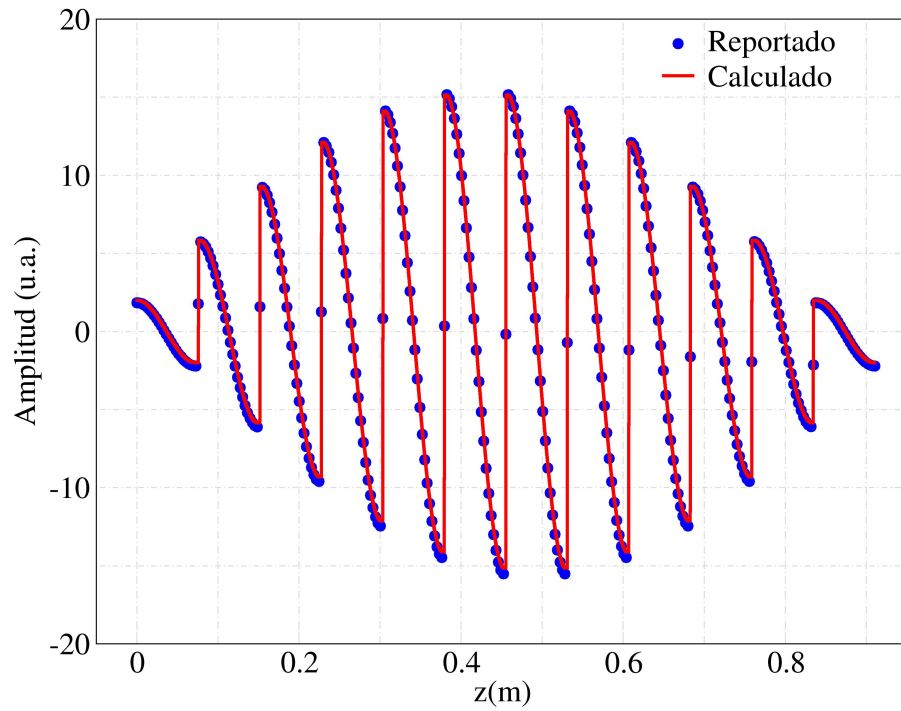


Figura 4.15: Comparación para el modo 23, de igual manera ambos resultados concuerdan, reproduciendo exactamente lo reportado.

Con lo anterior mostrados en las Figuras 4.13-4.15, vemos que la simulación numérica realizada nos provee de resultados confiables y que son lo suficientemente buenos para replicar resultados

ya realizados, es importante mencionar que el sistema a realizar mostrara algunas complicaciones que se deberán de tener en cuenta, las cuales asumimos que la simulacion que se maneja resolverá gratamente.

4.4. Localización de Anderson en un sistema unidimensional para ondas torsionales.

Después de realizar un sistema sencillo, pasar a uno periódico y por último replicar resultados reportados, nos dimos a la tarea de obtener las frecuencias normales y las funciones de onda junto con el *IPR*, ahora para sistemas a los cuales se les genera una perturbación en la longitud de los cuerpos, utilizamos números generados por una distribución normal. La perturbación aumentara gradualmente hasta poder encontrar funciones localizadas, información que se nos dará el *PR*.

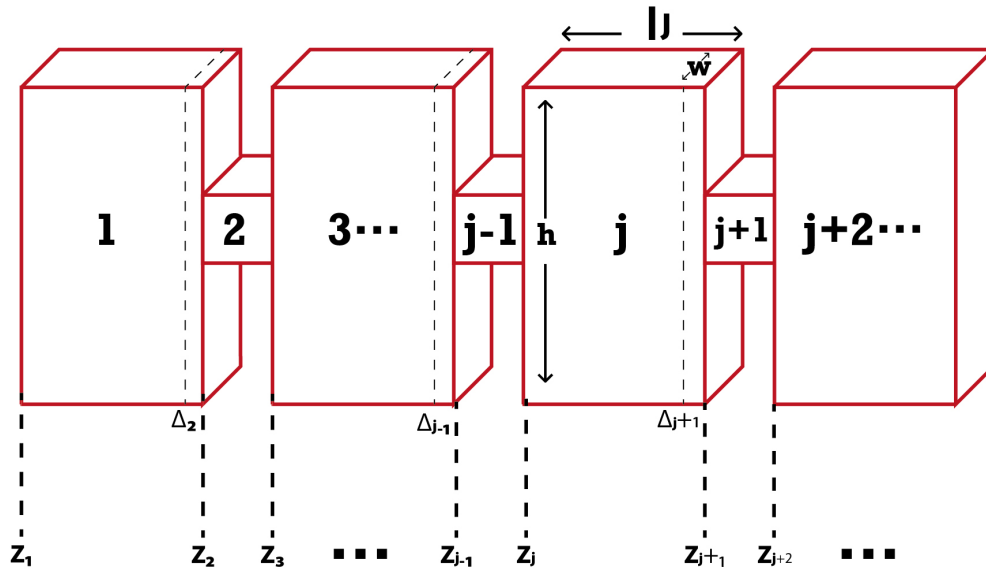


Figura 4.16: Sistema a estudiar, donde las variaciones se generaran en la longitud z_j , el sistema consiste en cuerpos con la misma sección trasversal, acoplados mediante muescas, la variación Δ_j , afecta solo al largo del cuerpo (en el eje z), con lo cual se pretende generar el fenómeno de localización de Anderson.

A continuación mostramos la propiedades del sistema a realizar, es importante mencionar que se trabajara con una barra de Aluminio (Al), a la cual se le midieron sus propiedades físicas, mostradas en la Tabla 4.2, las cuales determinaran la velocidad de propagación de la onda, serán 10 cuerpos acoplados por una muesca como se muestra en la Figura 4.16

Propiedad	Valor
Densidad (ρ)	2755.13 kg/m ³
Constante de corte (G)	2827.810676 $\times 10^7$ Pa
Modulo de Young (E)	67.3333 $\times 10^9$ Pa
Constante de Poisson (ν)	0.190550
Longitud del cuerpo	0.10 m
Longitud muesca	0.003 m
Sección transversal del cuerpo	0.0126m $\times$ 0.0256m
Sección transversal muesca	0.0056m $\times$ 0.0056m
α_c	1.179215001275552 $\times 10^{-8}$
α_m	1.382471615241500 $\times 10^{-10}$
I_c	2.188354560000000 $\times 10^{-8}$
I_m	1.639082666666667 $\times 10^{-10}$
Velocidad cuerpo v_c	2351.75334574356 m/s
Velocidad muesca v_m	2942.26509600954 m/s

Tabla 4.2: Propiedades de la barra con sección transversal rectangular.

A continuación mostramos las frecuencias propias de 20 sistemas, primero al aplicar una perturbación $\Delta = 1mm$ y después $\Delta = 1cm$, podemos ver las estructuras de bandas, la cual ,muestran un comportamiento similar para la primera (0kHz-5kHz) y segunda (10kHz-15kHz), y mostrando ya un cambio visible para la tercera (21kHz-27kHz) y cuarta banda (30kHz-30kHz). Como es de esperarse, para una perturbación pequeña $\Delta = 1mm$, el sistema se comporta como un sistema localmente periódico, con una estructura de bandas bien definidas.

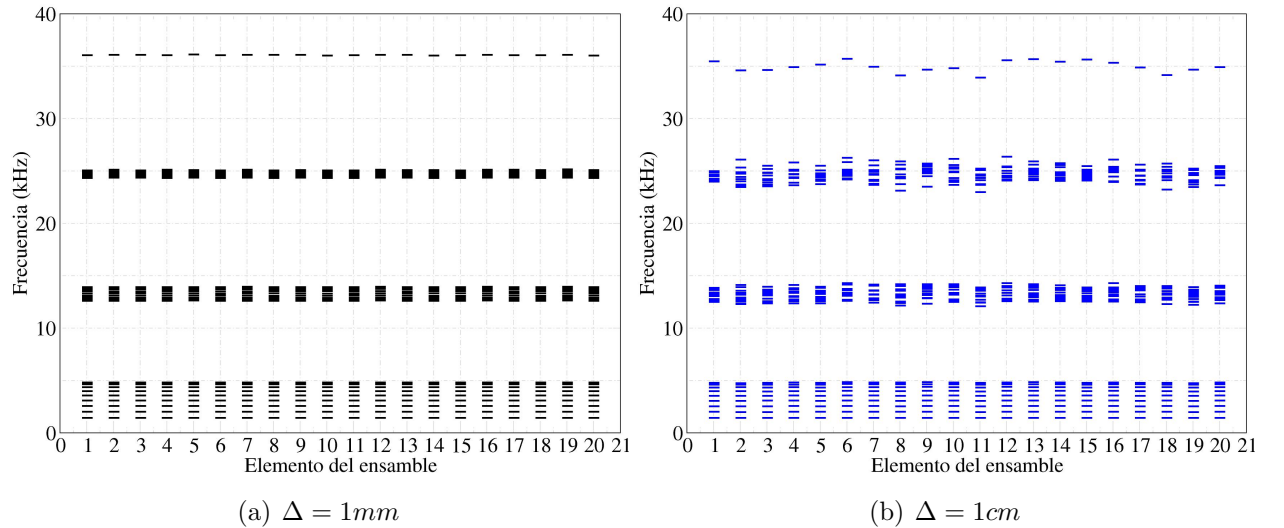


Figura 4.17: Bandas de 20 replicas, para un sistema, en el cual la perturbación es "muy pequeña" (a), la estructura es prácticamente el de un sistema periódico, mientras al cambiar el tamaño de la perturbación, vemos como la estructura cambia (b).

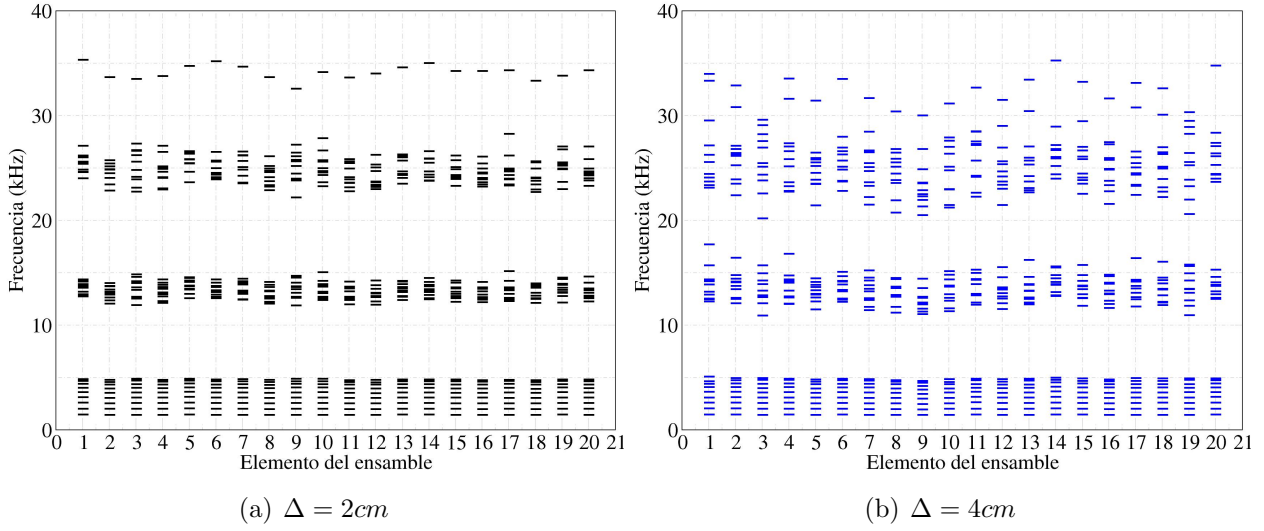


Figura 4.18: Se muestra la estructura de bandas, para un sistema, en el cual la perturbación es $\Delta = 2cm$ (a), como vemos el ensanchamiento de la tercera banda ya es notorio, mientras al cambiar el tamaño de la perturbación $\Delta = 4cm$ (b), la cuarta y tercera, banda están unidas, la única que mantiene su estructura es la primera.

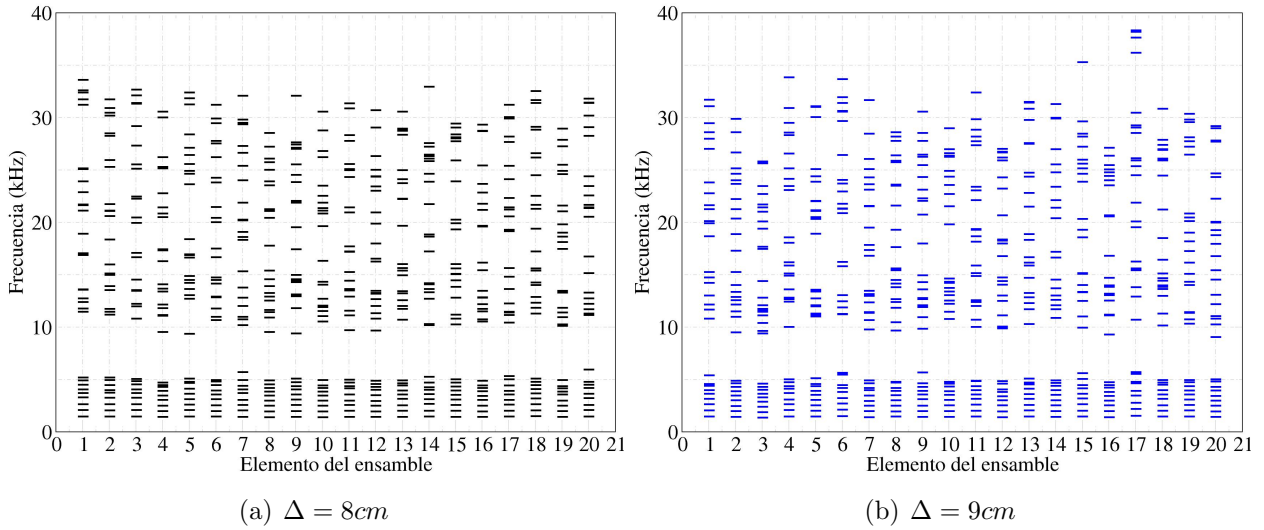


Figura 4.19: Para perturbaciones más grandes como en (a) $\Delta = 8cm$, como vemos la cuarta, tercera y segunda banda están unidas, de igual manera en (b) $\Delta = 9cm$.

Se puede observar que a mayor perturbación, en la longitud de los cuerpos, las bandas comienzan a unirse y la estructura empieza a romperse. En las Figuras 4.17-4.19, conforme el tamaño del desorden aumenta, las bandas de más alta frecuencia se destruyen rápidamente, que las bandas de más baja frecuencia. Teniendo determinadas las frecuencias propias del sistema, nos dimos a la tarea de calcular el PR de los primeros 30 modos normales para 1000 elementos del ensamble con un desorden (Δ) en específico, el cual resulta ser el inverso de la ecuación 3.32. Como se ve en la Figura 4.20, para determinar el número de replicas para realizar el análisis, se observó como

es el PR , aumentando el número de elementos, se realizaron 20, 50, 250, 500 y 1000 para una sola Δ , se decidió ocupar 1000 replicas para el estudio ya que para 500 y 1000, no se encuentra una diferencia entre las gráficas del PR .

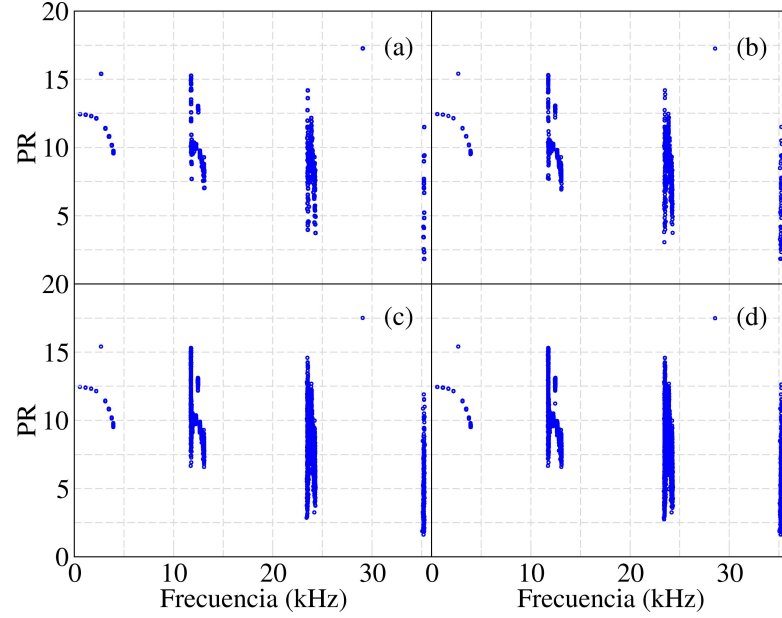


Figura 4.20: Se muestra el PR para un $\Delta = 1mm$, en (a) son las 3 primeras bandas del sistema, para 20 replicas, (b) corresponde a 50 replicas, (c) 250 y (d) 500 con la misma perturbación.

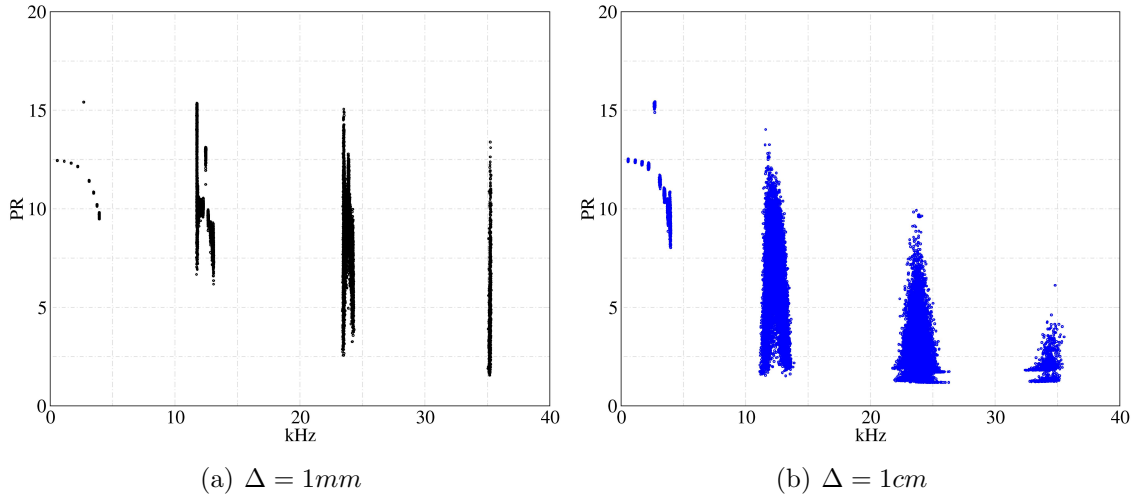


Figura 4.21: PR para mil replicas en donde (a) $\Delta = 1mm$, como en el caso de las frecuencias propias para este sistema, el PR dada esta perturbación, corresponde a un sistema periódico, mientras en (b) $\Delta = 1cm$ vemos como las bandas se ensanchan.

Mientras más aumenta el desorden en los sistemas las bandas llegan a juntarse más y las funciones de onda se empiezan a localizar, lo cual resulta en tener un PR cada vez más pequeño.

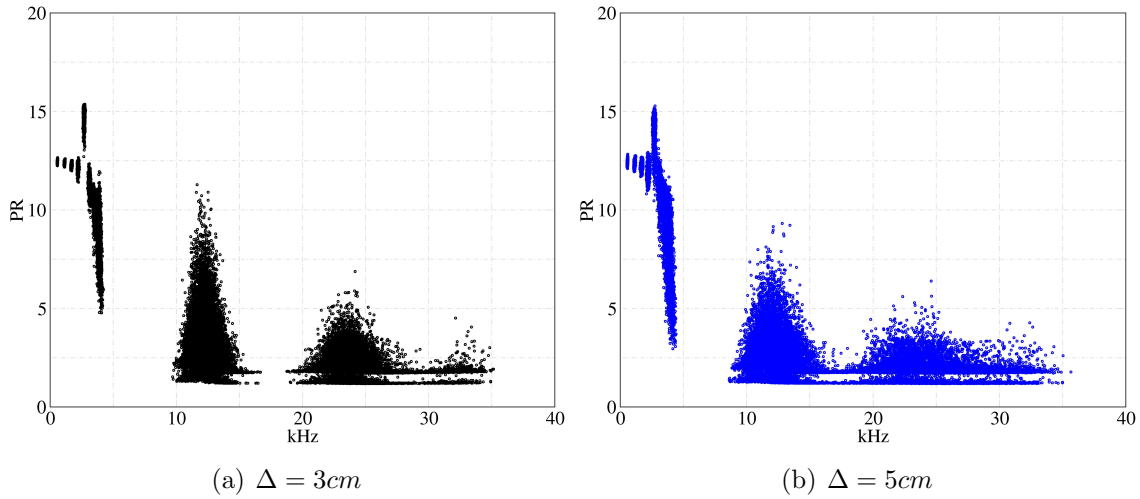


Figura 4.22: PR para mil replicas en donde (a) $\Delta = 3\text{ cm}$, para este desorden la tercera y cuarta banda se unen y muestran estados cada vez más localizados, mientras en (b) $\Delta = 5\text{ cm}$ vemos como ya las bandas 2 y 3 están unidas y que hay estados en la primera banda que aumentaron o disminuyeron su PR .

Por último mostramos el caso en el cual la perturbación sobre la longitud de los cuerpos es "muy grande", y como se imaginaba la unión entre todas las bandas es inminente. En la Figura 4.23, se puede notar que a pesar de que el tamaño del desorden es considerablemente grande, existen funciones de onda por debajo de 10 kHz, que tienen un PR muy grande, lo que implica que hay funciones que están extendidas. Esto se debe que para estas frecuencias la longitud de onda es grande y la onda no ve la estructura desordenada del sistema. Por otra parte en esta primera banda aparecen estados localizados, principalmente estos están asociados con los últimos modos normales de la banda.

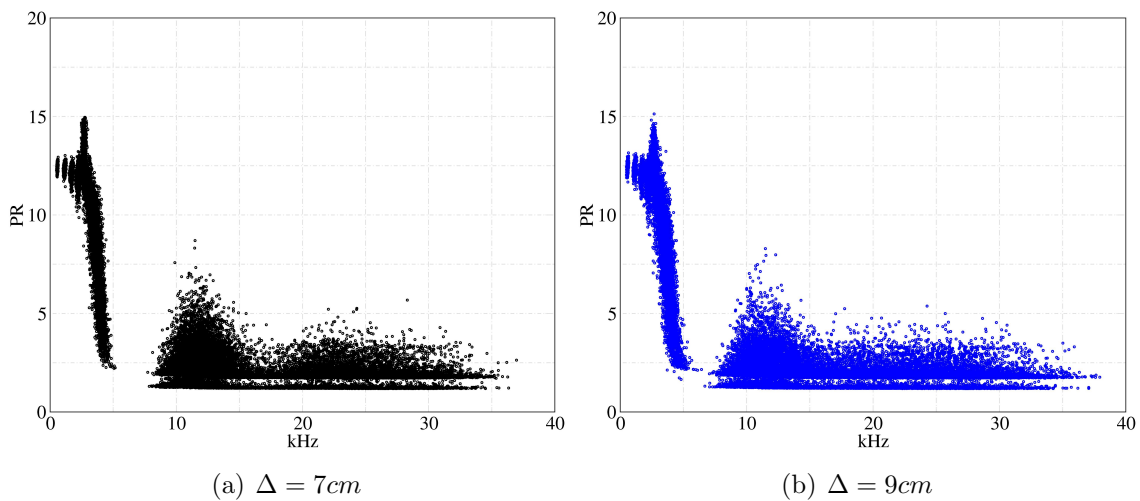


Figura 4.23: PR para mil replicas en donde (a) $\Delta = 7\text{ cm}$, la estructura de bandas se ha perdido, donde solo es posible reconocer la primera banda, mientras en (b) $\Delta = 9\text{ cm}$ de igual manera las bandas están prácticamente unidas y en donde los estados están más localizados.

Otro aspecto en el cual estamos interesados, es saber como es el comportamiento del PR con respecto a como aumenta el desorden en los sistemas, por lo cual recurrimos a sacar un histograma del PR , es decir, dividimos el rango del PR en 1000 intervalos midiendo la frecuencia con la que tenemos el valor del PR en ese intervalo, con la opción de ajustar un *función de densidad de probabilidad*.

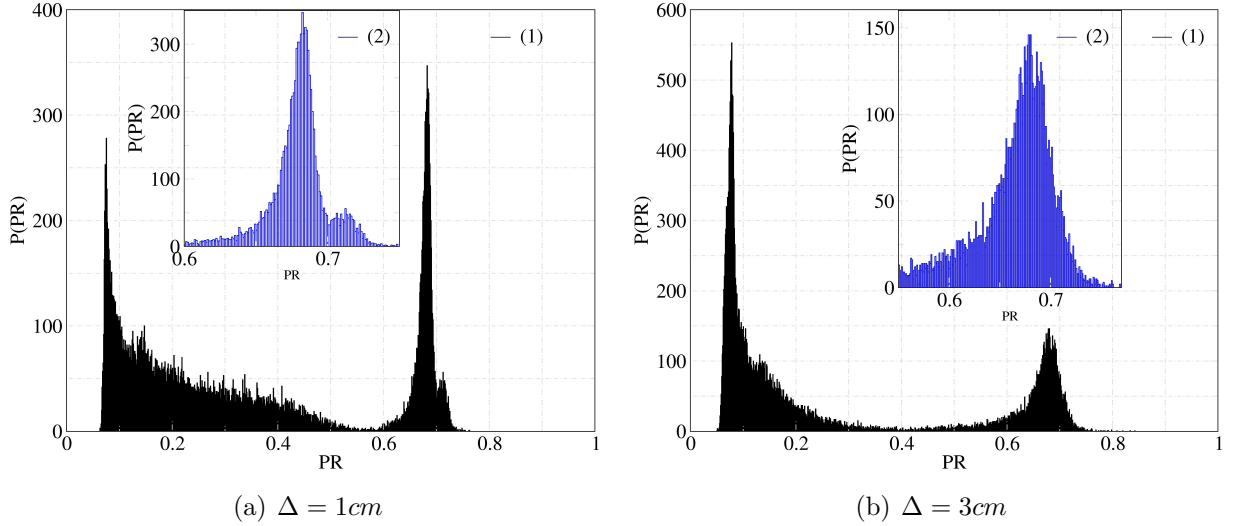


Figura 4.24: Se muestran dos histogramas del PR para diferente desorden, para $\Delta = 1\text{ cm}$ (a), vemos en (1) como hay más estados extendidos por lo cual su PR es "grande" (alrededor de 0.7), mientras al cambiar el tamaño de la perturbación $\Delta = 3\text{ cm}$ (b), los estados comienzan a localizarse, por lo cual tenemos más con PR "pequeño".

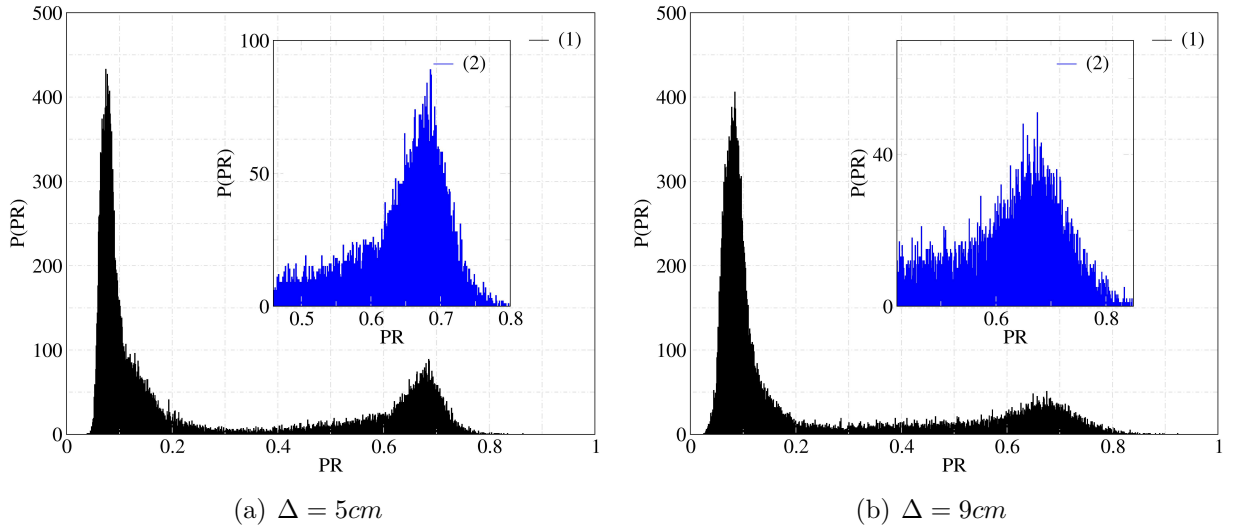


Figura 4.25: Se muestran dos histogramas del PR para diferente desorden, para $\Delta = 5\text{ cm}$ (a), vemos como los estados extendidos (alrededor de 0.7) empiezan a disminuir, mientras que para $\Delta = 9\text{ cm}$ (b), la gran mayoría de los estados están localizados.

En las figuras 4.24-4.25 en (1) corresponde al histograma completo de todo el PR , en (2) hacemos un zoom sobre los estados localizados, donde se ve claramente como estos estados extendidos

empiezan a disminuir mientras aumenta la perturbación Δ . Un estudio como este nos muestra como es que las poblaciones de los estados extendidos con PR grandes, disminuyen y como aumentan en la misma proporción la población de estados localizados, como lo muestra las Figuras 4.24 y 4.25 (a) y (b).

Para realizar el ajuste de dispuso a separar el histograma resultante del PR para cada Δ en dos, una parte correspondiente a estados localizados y otra a los estados más extendidos. Se busco que ajustara a la distribución de *Wigner-Dyson*, con la corrección de *Izrailev*, nos referiremos a esta distribución con el nombre de este último [21].

$$p_{\alpha}(s) = As^{\alpha}(1 + B\alpha s)^{f(\alpha)} \exp \left[-\frac{\pi^2}{16}\alpha s^2 - \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)s \right] \quad (4.26)$$

$$f(\alpha) = \frac{2^{\alpha}(1 - \frac{\alpha}{2})}{\alpha} - 0.16874$$

Una de las propiedades de esta distribución, para $\alpha = 0$, se reduce a la distribución de **Poisson**, mientras que para $\alpha = 1, 2, 4$ se aproxima mucho a las distribuciones **Gaussiana Ortogonal**, **Gaussiana Unitaria**, y **Gaussiana symplectica** respectivamente [21]. Por otra parte para los estados de la primera banda que son los más extendidos, el ajuste que se realizo con una **Normal**.

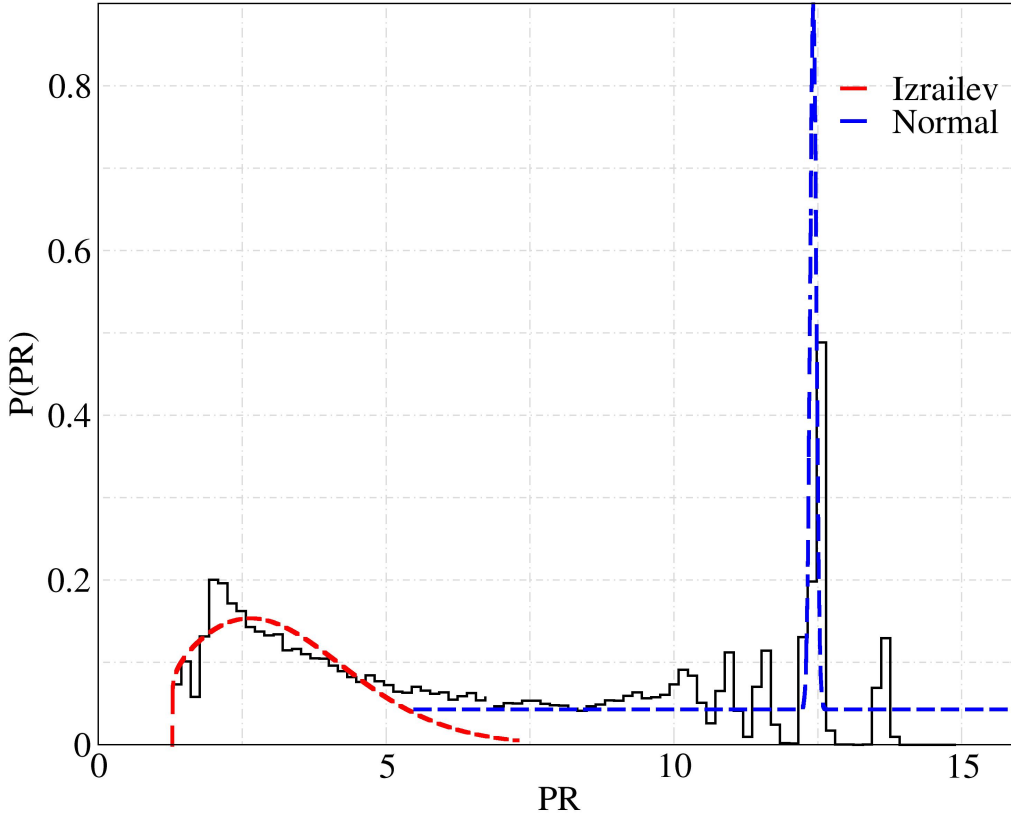


Figura 4.26: Para el ajuste del histograma del PR con $\Delta = 1cm$, vemos que para los estados extendidos la función que mejor se ajusta es una **Normal**, para los estados localizados, se uso la distribución **Izrailev** con un $\alpha = 0.18$.

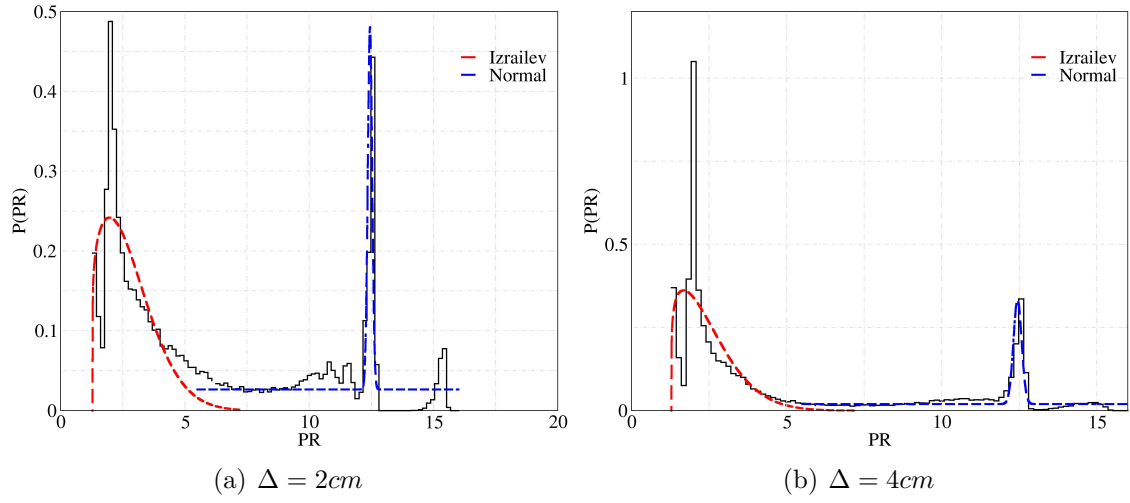


Figura 4.27: Para (a) $\alpha = 0.10$ mientras que en (b) $\alpha = 0.17$, ya se puede observar como la parte del histograma que corresponde a los estados extendidos, estos comienza a disminuir, y los localizados aumentan.

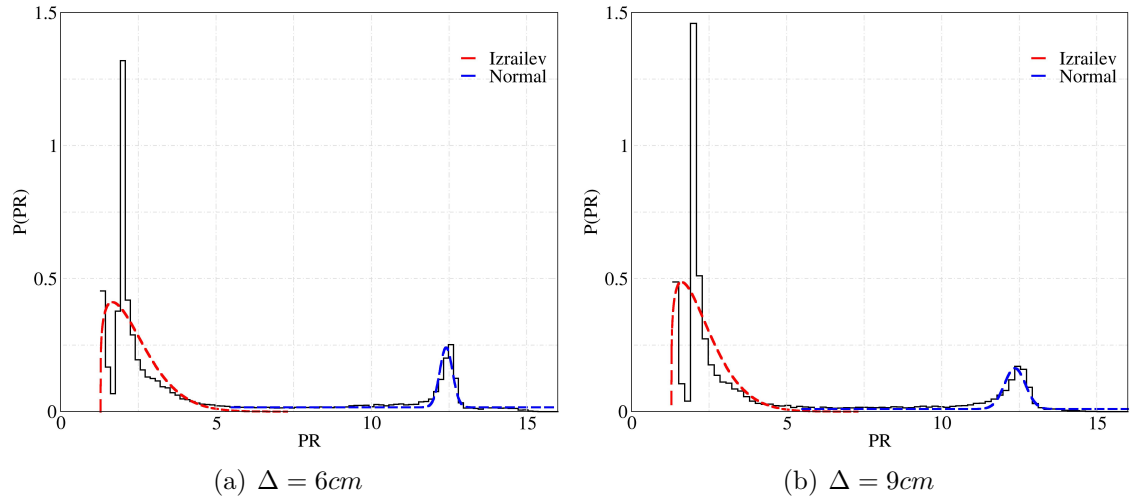


Figura 4.28: Vemos que en (a) $\alpha = 0.20$ y el valor correspondiente para (b) $\alpha = 0.16$, donde se aplica la perturbación más grande que realizamos al sistema.

Podemos ver que la distribución ajusta mejor conforme aumenta Δ , dado que utilizamos valores pequeños de α . A continuación mostramos la tabla de valores de las constantes y como este cambia respecto a Δ .

$$P_{\alpha}(x) = A(x - x_0)^{\alpha}(1 + B\alpha(x - x_0))^{f(\alpha)} \exp \left[-\frac{\pi^2}{16}\alpha(x - x_0)^2 - \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(x - x_0) \right] \quad (4.27)$$

Δ	A	B	α	$f(\alpha)$	x_0
1cm	0.112016	2.0183	0.10	10.0131	1.28
2cm	0.264004	1.57625	0.14	7.15106	1.28
3cm	0.392519	1.31739	0.16	6.25566	1.28
4cm	0.495028	1.14445	0.18	5.55864	1.28
5cm	0.554029	1.07882	0.20	5.0004	1.28
6cm	0.610712	1.01197	0.22	4.5413	1.28
7cm	0.791543	0.800746	0.23	4.3441	1.28
8cm	0.776244	0.784721	0.24	4.1615	1.28
9cm	0.785807	0.813636	0.24	4.1615	1.28

Tabla 4.3: Constantes del ajuste propuesto, con forme a la variación en la longitud.

Como se puede ver en las Figuras 4.26-4.28 (a) y (b) las distribuciones de los estados extendidos, parece una distribución **Normal**, por esta razón esta parte del histograma fue ajustado con esta función de distribución, con la siguiente ecuación.

$$P(PR) = a_0 + a(2\sqrt{\ln(2)\pi}/\sigma \times \exp(-4\ln(2)((PR - \mu)/\sigma)^2) \quad (4.28)$$

Como se puede ver en la Tabla 4.3 el coeficiente A , que corresponde a la altura de la distribución, aumenta con forme crece el tamaño del desorden. Por otra parte de la Tabla 4.4, se ve el coeficiente A_3 disminuye conforme aumenta Δ . Esto implica respectivamente el aumento de estados localizados y la disminución de estados extendidos.

Δ	a_0	μ	σ	a
1cm	0.112016	12.4159	0.115548	0.128355
2cm	0.0265905	12.442	0.208398	0.100818
3cm	0.0220492	12.4488	0.24554	0.101612
4cm	0.0198648	12.4434	0.311599	0.104163
5cm	0.017767	12.4221	0.413825	0.111609
6cm	0.0162905	12.4049	0.481152	0.115091
7cm	0.0151146	12.3876	0.56598	0.119612
8cm	0.0142777	12.3779	0.632837	0.120447
9cm	0.00986839	12.358	0.794304	0.129625

Tabla 4.4: Constantes del ajuste para la distribución **normal**, con forme a la variación en la longitud.

Otro análisis que se realizo fue el de estudiar el comportamiento de las bandas, se realizo un histograma para cada banda de frecuencias, y se ajusto una distribución de probabilidad, de igual manera se trabajo con **Izrailev** para la tercera y segunda banda y una distribución **Normal** para la primera. Usaremos ecuación 4.27. Es importante mencionar que el análisis de bandas se hizo hasta $\Delta = 7cm$, ya que para $\Delta = 8cm$ y $\Delta = 9cm$ la segunda y tercera banda están unidas. A continuación mostramos los histogramas con su respectivo ajuste para cada banda, se anexa la tabla de valores de las constantes de la distribución con respecto a Δ .

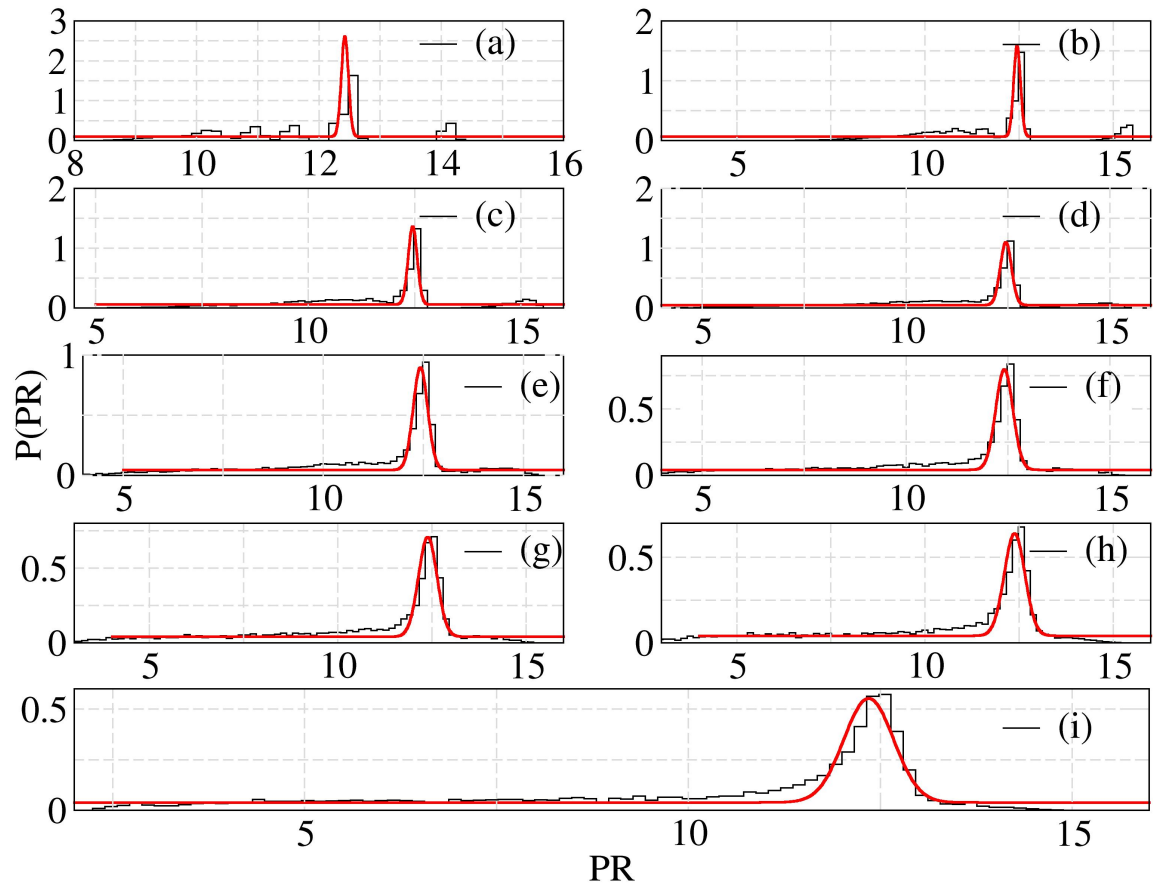


Figura 4.29: Ajustes de la distribución Normal para los histogramas de PR de la primera banda, donde (a) corresponde a $\Delta = 1cm$, (b) $\Delta = 2cm$ y así sucesivamente hasta llegar (i) con $\Delta = 9cm$, como vemos conforme aumenta Δ , el máximo disminuye y el histograma se extiende hacia valores pequeños.

Δ	A_0	A_1	A_2	A_3
1cm	0.1042400	12.4213	0.136993	0.366472
2cm	0.0679674	12.4431	0.214808	0.347374
3cm	0.0600421	12.4490	0.249639	0.346700
4cm	0.0512174	12.4419	0.323020	0.360806
5cm	0.0468528	12.4204	0.425881	0.385292
6cm	0.0433254	12.4035	0.494185	0.396910
7cm	0.0423835	12.3865	0.578509	0.410022
8cm	0.0423931	12.3767	0.643590	0.409888
9cm	0.0396399	12.3465	0.761837	0.416501

Tabla 4.5: Constantes del ajuste para la distribución **normal** que corresponde a la primera banda, con forme a la variación en la longitud.

En la Figura 4.29 se puede ver como en una misma banda, el número de estados extendidos disminuye y el de los estados localizados aumenta, esto se ve reflejado en la altura del pico de

las distribuciones , o bien, en la disminución del coeficiente A_3

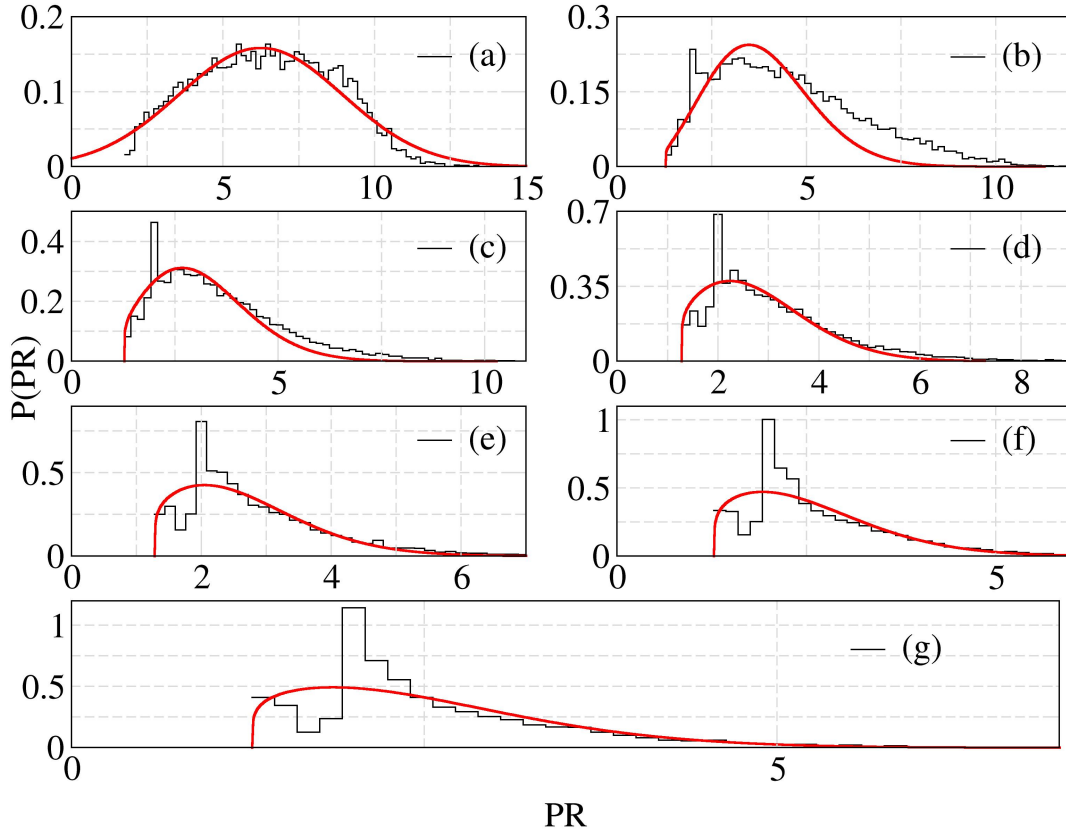


Figura 4.30: Histogramas correspondientes a la segunda banda, para esta banda se utilizo la distribución de Wigner-Dyson expresada en la ecuación 4.27. De igual manera (a) corresponde a $\Delta = 1cm$ hasta llegar a (g) donde $\Delta = 7cm$.

Como vemos en la Figura 4.30, conforme aumentaba la perturbación en el sistema el ajuste de la distribución es mucho mejor, de igual manera vemos que el PR esta disminuyendo eso quiere decir que los estados localizados están aumentando. Mostramos la tabla del comportamiento de las contantes de distribución con respecto a Δ .

Δ	A	B	α	$f(\alpha)$	x_0
1cm	0.185407	1.9769	0.35	2.83558	0.084
2cm	0.0469575	3.24235	0.12	8.344	1.28
3cm	0.185407	2.32757	0.14	7.151	1.28
4cm	0.337443	1.8863	0.16	6.2550	1.28
5cm	0.448881	1.67807	0.18	5.558	1.28
6cm	0.557216	1.49703	0.20	5.0004	1.28
7cm	0.614947	1.39694	0.20	5.0004	1.28

Tabla 4.6: Constantes del ajuste para la segunda banda, utilizando la distribución de **Izrailev**.

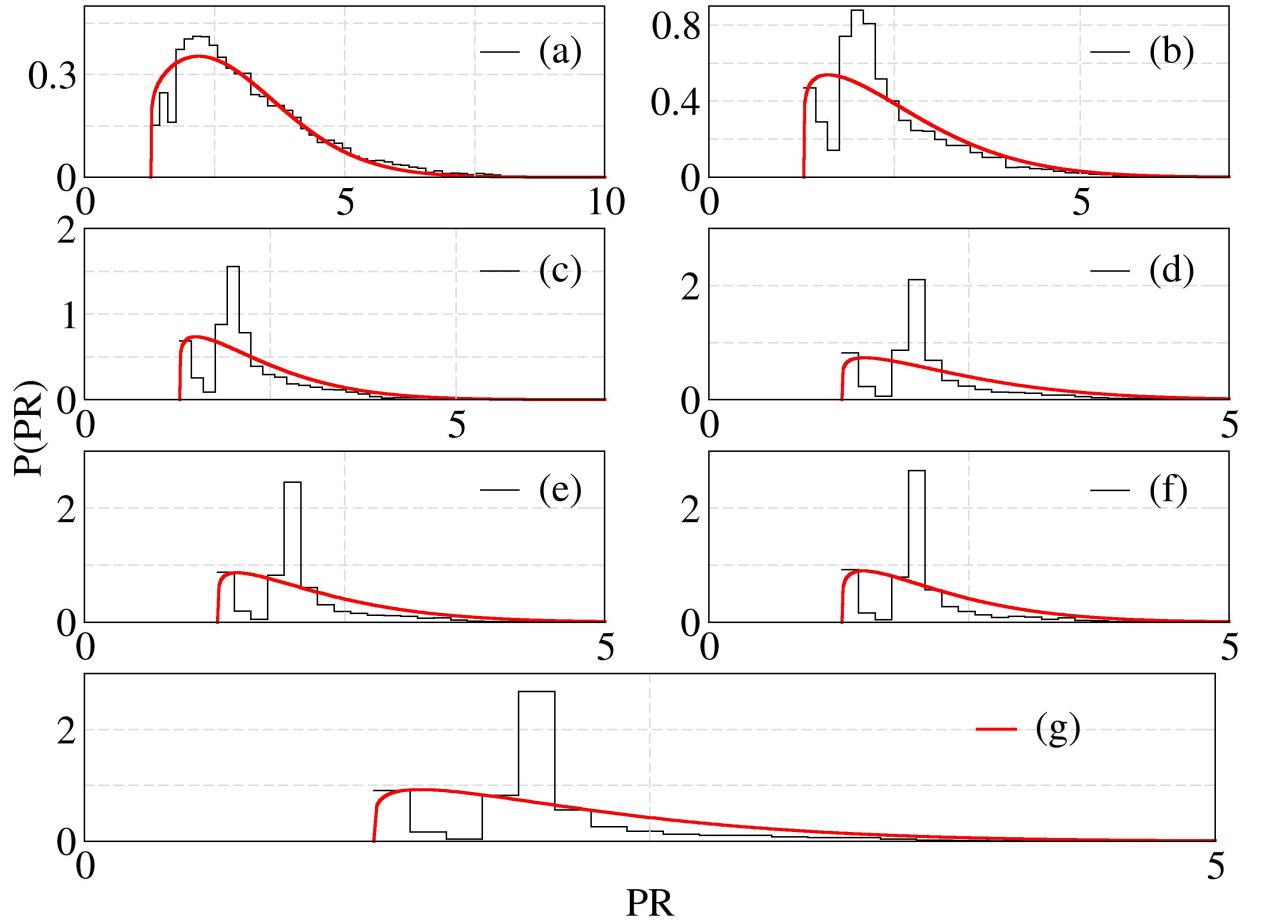


Figura 4.31: Histogramas correspondientes a la tercera banda, para esta banda se utilizo la distribución de Izrailev. De igual manera (a) corresponde a $\Delta = 1cm$ hasta llegar a (g) donde $\Delta = 7cm$, esta banda corresponde a los estados más localizados.

Δ	A	B	α	$f(\alpha)$	x_0
1cm	0.33449	1.76587	0.12	8.344	1.28
2cm	0.71084	1.14404	0.14	7.151	1.28
3cm	1.09267	0.77748	0.16	6.255	1.28
4cm	1.29836	0.61968	0.17	5.886	1.28
5cm	1.35978	0.58175	0.17	5.886	1.28
6cm	1.49175	0.513952	0.20	5.0004	1.28
7cm	1.5387	0.504259	0.20	5.0004	1.28

Tabla 4.7: Constantes del ajuste para la tercera banda.

Dadas las propiedades de la distribución de **Izrailev** se decidió a ajustar la suma de dos distribuciones, una **Normal** más **Gamma**.

$$y = A_3(2\sqrt{\ln(2)\pi/A_2} \times \exp(-4\ln(2)((x - A_1)/A_2)^2) + A_4\exp[-A_5(x - A_6)]x^{A_7} \quad (4.29)$$

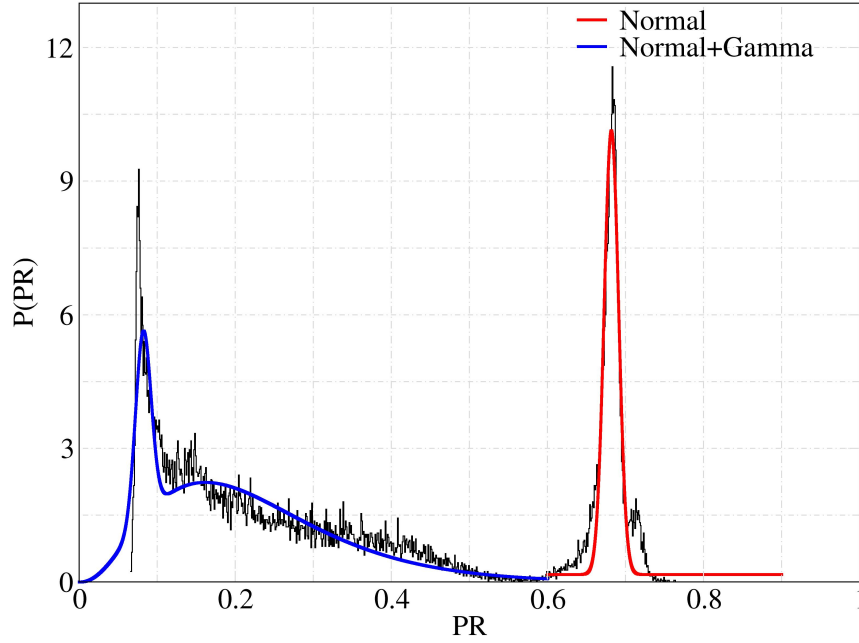


Figura 4.32: Ajuste con la suma de dos distribuciones, **Normal** y **Gamma** para $\Delta = 1cm$, el ajuste para los estados extendidos es el mismo.

De igual manera que sucede para distribución de **Izrailev** vemos que para perturbaciones "pequeñas" la distribución propuesta no ajusta del todo bien, salvo en el caso de Δ 's grandes, en donde se describe perfectamente el comportamiento. El único inconveniente es que la dependencia de la distribución, es que hay muchas variables involucradas.

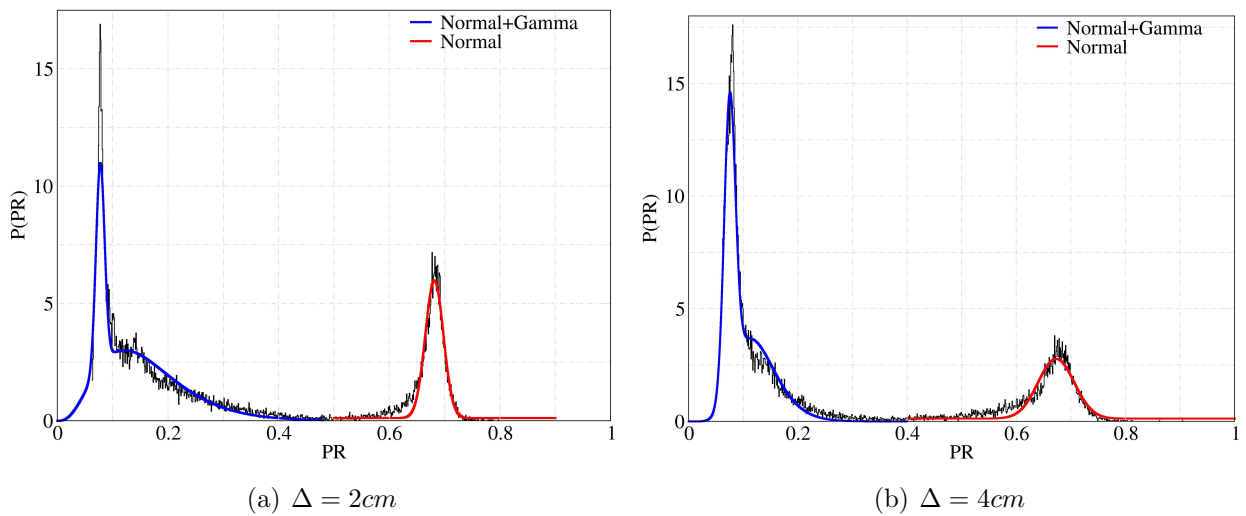


Figura 4.33: Vemos el ajuste con la distribución propuesta, conforme aumenta Δ , la distribución describe el comportamiento del histograma.

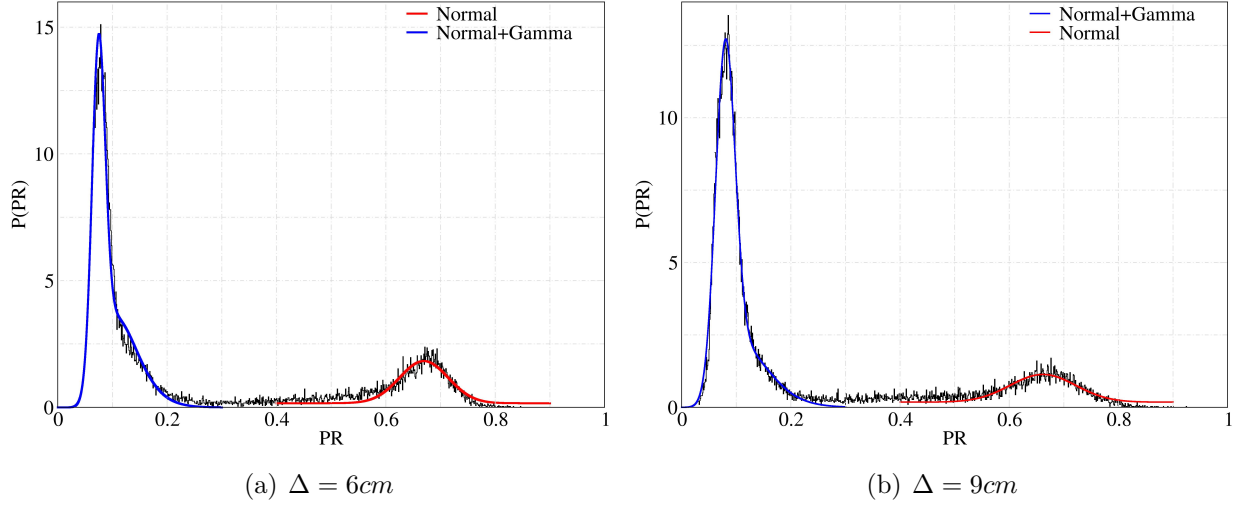


Figura 4.34: Ajuste de los histogramas con $\Delta = 6cm$ (a) y $\Delta = 9cm$ (b), como la distribución Normal más Gamma, ajustan muy bien al PR de los estados localizados.

Mostramos la tabla de los valores de las constantes involucradas en este ajuste, resaltamos que para los estados extendidos, se siguió manejando la misma distribución de ecuación 4.28, por lo cual los valores de las constantes son los mismo que la Tabla 4.4.

Δ	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1cm	0.346824	0.211669	0.222929	13143.6	0.0520961	28.2707	3.0341
2cm	0.0771797	0.0188179	0.179909	0.000568425	0.616935	37.8636	4.79057
3cm	0.0760846	0.0209952	0.237736	0.00568681	0.506404	44.1108	5.00154
4cm	0.0750503	0.0241328	0.324165	0.0007870239	0.473332	74.4396	8.4275
5cm	0.0743059	0.0253293	0.334781	0.000290962	0.46136	80.7955	8.55755
6cm	0.0744654	0.0282052	0.377766	5.70749×10^{-8}	0.560518	83.1951	8.85753
7cm	0.0749148	0.0315456	0.398864	6.8576×10^{-8}	0.562875	80.8844	8.58178
8cm	0.0784092	0.0379274	0.491749	1.76571×10^{-5}	0.524495	71.3687	8.07962
9cm	0.0798014	0.0421339	0.507694	3.09113×10^{-5}	0.537593	62.181	7.0246

Tabla 4.8: Constantes del ajuste para los estados localizados, vemos la evolución de las constantes respecto al desorden.

Al igual que la distribución de **Izrailev** se procedió a realizar el análisis de los histogramas de cada banda, con la suma de la distribución **Normal** y **Gamma**, para la primera banda los resultados son los mismos ya que esa distribución no se cambio, en la segunda y tercera es donde si se opto por esto.

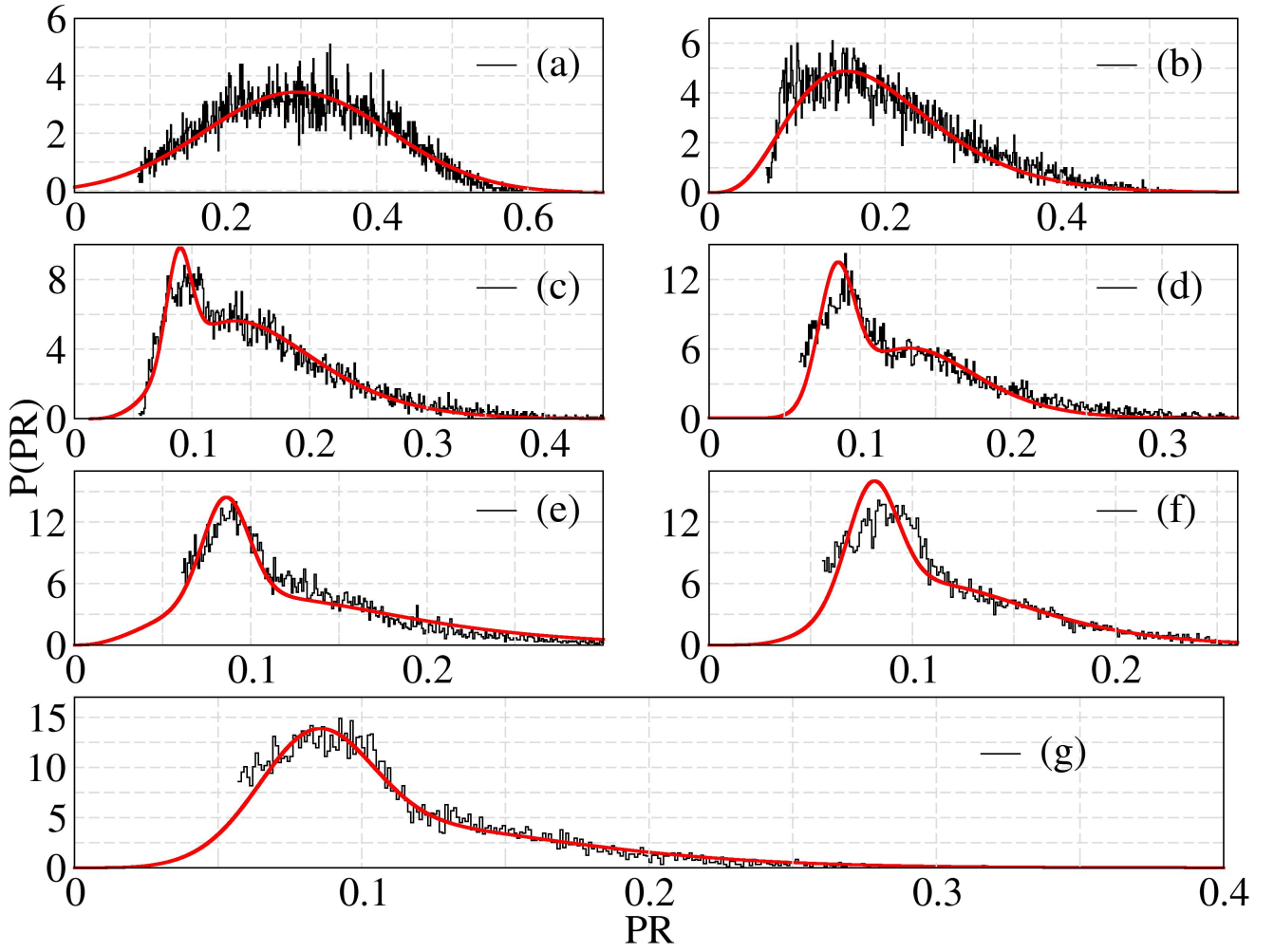


Figura 4.35: Histogramas correspondientes a la segunda banda, para esta banda se utilizó la suma de dos distribuciones. Tenemos casos particulares, (a) corresponde a $\Delta = 1\text{cm}$ donde solo es necesario ajustar una distribución **Normal**, mientras que en (b) $\Delta = 2\text{cm}$ fue con la distribución **Gamma**, para Δ 's mayores se usó la suma de estas.

Δ	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1cm	0.290107	0.299963	1.07861	0	0	0	0
2cm	0	0	0	2.92178×10^{-26}	2.87489	24.8531	3.87116
3cm	0.0886073	0.0245638	0.160304	4.83164×10^8	-0.0577004	39.1937	5.35074
4cm	0.0842675	0.0275637	0.32541	1.81525×10^9	0.164151	82.5383	10.9519
5cm	0.0857125	0.0307368	0.326375	19813.1	0.0200049	25.8479	2.72863
6cm	0.0803506	0.0286665	0.338048	2.41268×10^{-8}	0.020001	53.9036	5.73541
7cm	0.0839176	0.0450341	0.498656	7.53238×10^{-8}	43.9536	0.764475	4.95555

Tabla 4.9: Constantes del ajuste para los estados localizados, vemos la evolución de las constantes respecto al desorden.

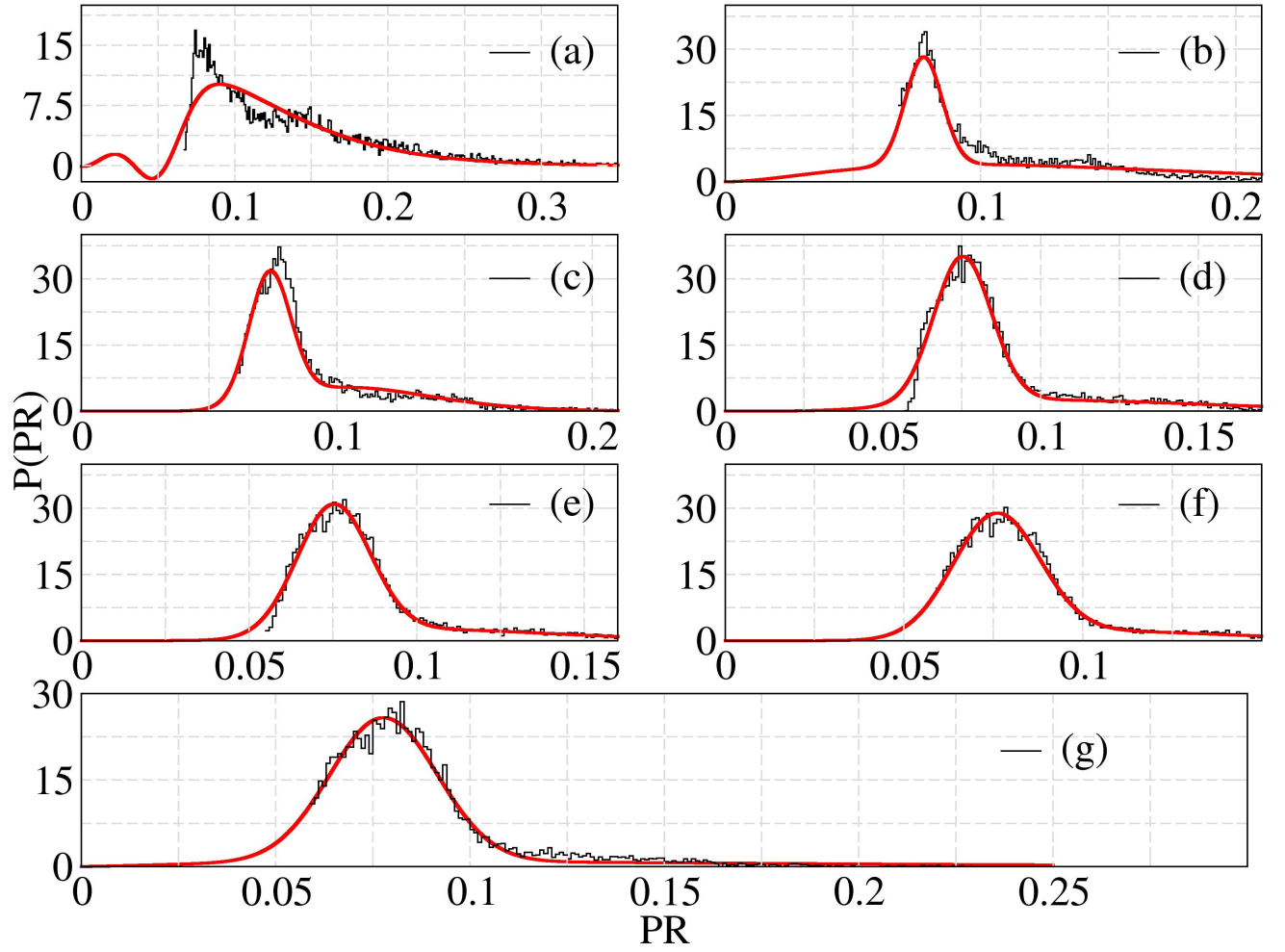


Figura 4.36: Histogramas correspondientes a la tercera banda. (a) $\Delta = 1\text{cm}$, (b) $\Delta = 2\text{cm}$ así sucesivamente hasta llegar a (g) $\Delta 7\text{cm}$, como vemos similar a la distribución de Wigner-Dyson esta ajusta mejor conforme aumenta Δ .

Δ	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1cm	0.0495735	-63.5845	1780.53	0.00030502	0.60642	30.4578	2.1911
2cm	0.0777042	138.086	8483.26	551.946	0.0782747	20.6242	1.95685
3cm	0.073745	0.019186	0.592373	2.51181×10^9	0.170532	117.188	12.2641
4cm	0.0752729	0.0215209	0.755482	3.38675×10^{-6}	49.8509	0.602329	3.002
5cm	0.0752038	0.0256231	0.797968	101.563	85.855	0.294088	8.84443
6cm	0.0758753	0.0284848	0.840155	242.71	99.8614	0.297778	10.653
7cm	0.0777371	0.0325721	0.866644	0.263514	16.0204	0.374229	1.41232

Tabla 4.10: Constantes del ajuste para los estados localizados, vemos la evolución de las constantes respecto al desorden.

De esta forma se tiene un análisis completo del PR , de una manera general analizando solo los estados extendidos y localizados, y un estudio por bandas de frecuencia.

4.5. Contraste entre matriz de transferencia, elemento finito y experimento.

En esta sección se compararan los resultados obtenidos mediante la simulación en **Fortran**, en donde aplicamos el *Método de la Matriz de Transferencia* (MMT), con el *Método de Elemento Finito* (FEM), para el cual utilizamos el software **COMSOL**, por último el siguiente paso fue comparar nuestro resultado de realizar el experimento y medir las frecuencias propias y las funciones de onda. El primer paso fue comparar el método de *elemento finito* y *matriz de transferencia*. A continuación mostramos el resultado obtenido del calculo del *PR* y de las frecuencias propias del sistema realizado, resaltamos que con Comsol solo se puede determinar un sistema a la vez, aunque los resultados soy muy completos ya que no solo se limita a calcular los modos normales si no otros fenómenos físicos. El sistema realizado mediante los tres métodos, fue un sistema de 10 cuerpos acoplados de 10 cm de largo, con una perturbación en su longitud de $\Delta = 4cm$, todas las propiedades físicas y geométricas generales del sistema están detalladas en la Tabla 4.2.

Cuerpo	Longitud (m)
1	0.1155
2	0.1105
3	0.0856
4	0.0668
5	0.070
6	0.1169
7	0.0936
8	0.1123
9	0.0889
10	0.0706
Total	0.9577

Tabla 4.11: Longitud de todos los cuerpos que conforman la barra, acoplados mediante muescas de 3mm de largo.

En la Tabla 4.11 mostramos las longitudes finales de los cuerpos con la que esta formada la viga de estudio. Esta viga corresponde a uno de los elementos del ensamble con perturbación $\Delta = 4cm$. Veremos a continuación las frecuencias propias para los dos métodos de simulación que se llevaron a cabo, es importante mencionar que para resolver por elemento finito al momento de realizar un trabajo en Comsol se define el nivel de precisión mediante un mallado, por lo cual entre más fino sea el mallado más precisos serán los resultados, pero esto implica un tiempo mayor de computo. Asumimos que el mallado que se utilizo es el necesario para calcular estos modos normales y las funciones propias de nuestra barra.

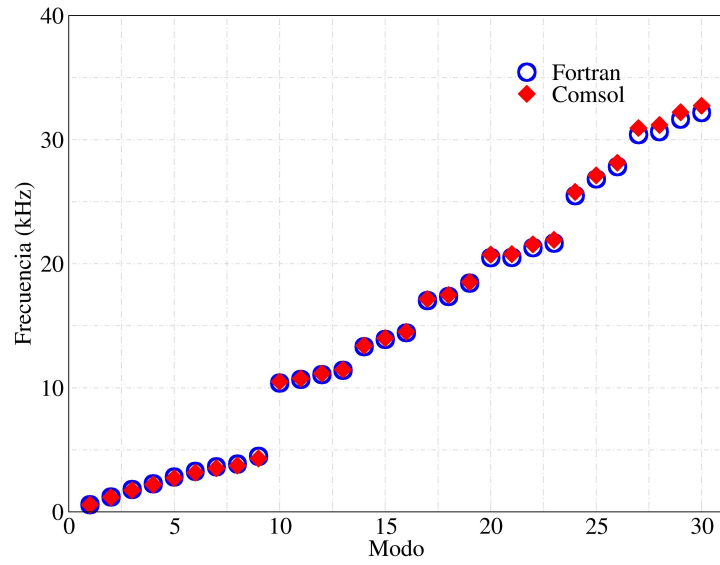


Figura 4.37: Frecuencias de los modos normales, comparamos los obtenidos por el método de matriz de transferencia (círculos azules) contra los obtenidos mediante elemento finito (rombos rojos).

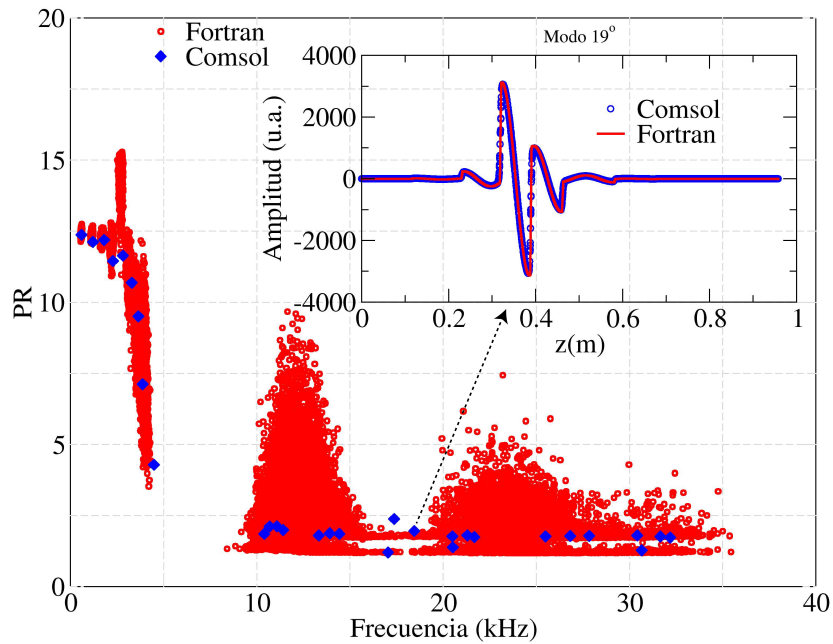


Figura 4.38: PR para un ensamble de 1000 replicas con $\Delta = 4cm$ (puntos rojos), se muestra también el PR del sistema simulado en Comsol (rombos azules).

En la Figura 4.37 mostramos las frecuencias propias de un elemento del ensamble con $\Delta = 4cm$. Aquí comparamos los resultados obtenidos por *elemento finito* y por *matriz de transferencia*, se puede ver que los resultados concuerdan. Mientras que en la Figura 4.38 mostramos el ensamble de 1000 replicas, puntos rojos, los rombos azules corresponde al PR de las funciones obtenidas mediante Comsol. Se muestra en el recuadro, el modo número 19, la función calculada con

Fortran (línea negra) y la función de onda de Comsol (círculos). vemos que reproducen la misma función de onda.

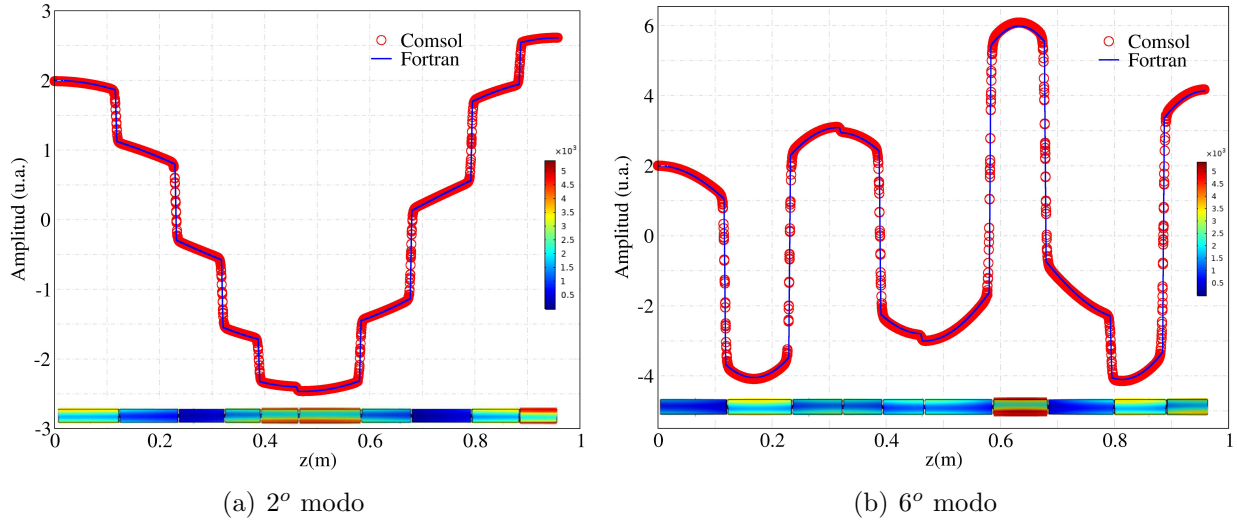


Figura 4.39: Funciones que corresponden a dos modos 2º y 6º, con línea continua *MMT* y círculos *FEM*.

Mostramos dos modos normales, en (a) vemos el segundo modo normal, la función con línea continua es obtenida mediante la *matriz de transferencia* $f_m = 1.204$ kHz, los puntos rojos son de *elemento finito* $f_c = 1.167$ kHz, de igual manera tenemos en (b) el sexto modo, con $f_m = 3.286$ kHz y $f_c = 3.1731$ kHz, por último vemos una simulación de como se deforma la barra dependiendo del modo. Las dos modos mostrados en la Figura 4.39, corresponden a modos de la primera banda, como se puede observar son modos extendidos en todo el sistema.

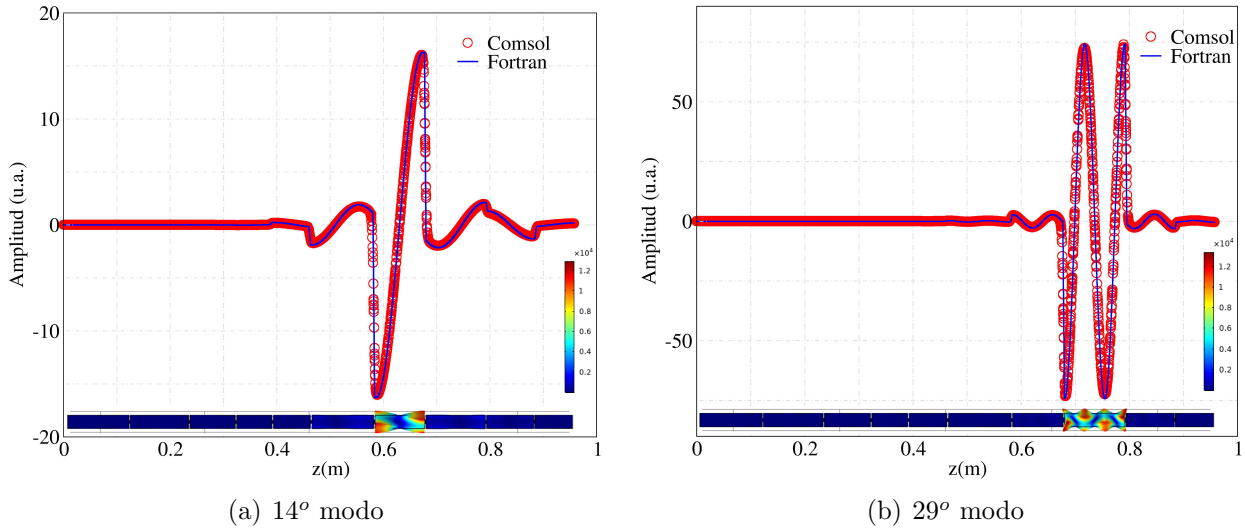


Figura 4.40: Funciones que corresponden a dos modos 14º y 29º, con línea continua *MMT* y círculos *FEM*.

Para frecuencias más altas vemos que las funciones de onda se empiezan a localizar, en la Figura

4.40 en (a) observamos el 14^o modo, con $f_m = 13.323$ kHz y $f_c = 13.390$ kHz, en (b) para el 29^o modo el cual corresponde al último modo de la tercera banda tenemos que $f_m = 31.659$ kHz y $f_c = 32.197$ kHz. Estos estados corresponde en (a) para la segunda banda y en (b) para la tercera.

El siguiente paso importante fue realiza las mediciones de nuestra barra, como se menciona en el método experimental. La viga propuesta es un elemento del ensamble. Para este caso solo se midieron ciertas funciones de onda, se trato de tener mínimo una función de onda correspondiente a cada banda, una vez obtenido la función de onda, se calculo el PR y se comparo con el ensamble de 1000 replicas con $\Delta = 4$ cm.

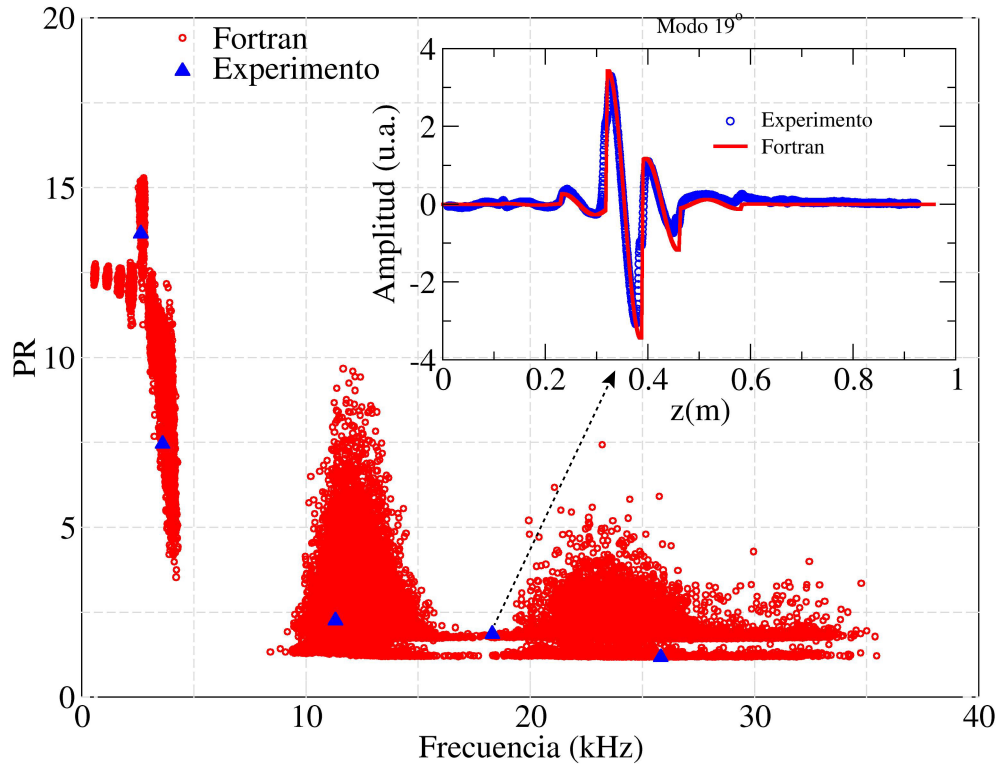


Figura 4.41: PR para un ensamble de 1000 replicas con $\Delta = 4$ cm representado por los círculos rojos, mientras que los rombos azules representan el PR de las funciones medidas por el método experimental. Por otra parte se muestra el modo normal 19^o, donde vemos que la función de onda que nos provee Fortran describe bien el comportamiento que sucede en la barra.

Como se mostró en la Figura 4.41, mediante el método de matriz de transferencia se reprodujo la onda torsional para este tipo de desorden. Por otra parte se midieron las frecuencias propias de la barra mediante el experimento, pero resulta que puede haber pequeñas desviaciones, lo cual depende de otros factores externos. Hablando concretamente de este modo, tenemos que $f_m = 18.448$ kHz y la experimental es de $f_{exp} = 18.302$ kHz.

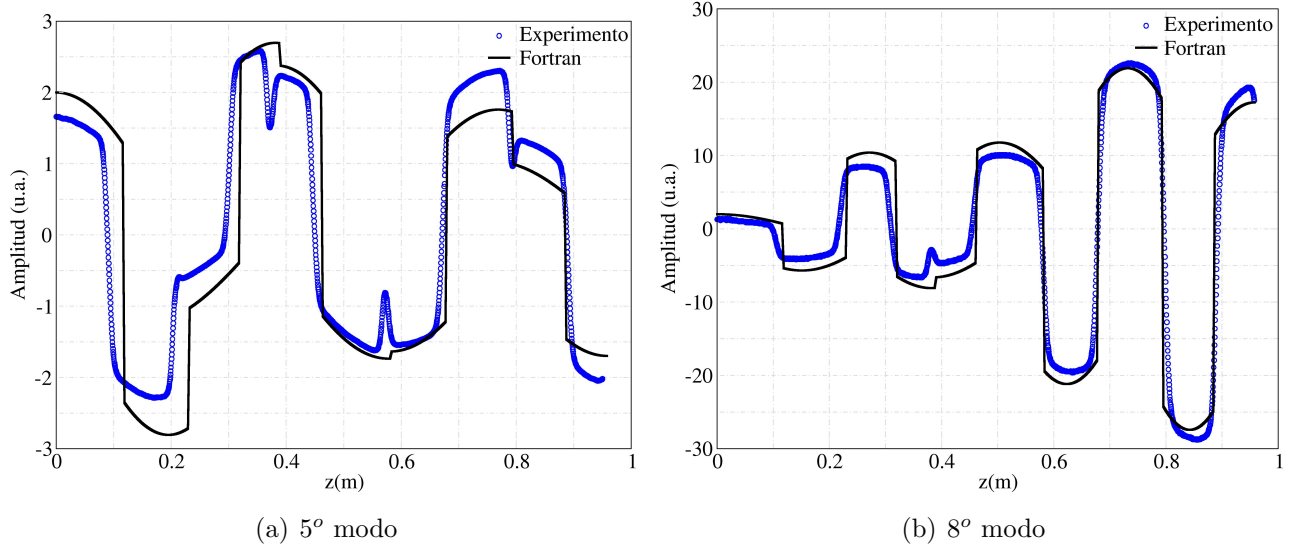


Figura 4.42: Funciones de onda de la primera banda, en (a) se presenta el 5º modo, En (b) tenemos el 8º modo, en ambos casos se representa la la función numérica (línea continua) y la medida experimentalmente (círculos azules).

En la Figura 4.42 en (a) se tiene el 5º modo normal con las siguientes frecuencias numérico y experimental, respectivamente, $f_m = 2.814$ kHz y $f_{exp} = 2.626$ kHz. Por otra parte en (b) para el 8º modo son $f_m = 3.869$ kHz y $f_{exp} = 3.5925$ kHz. Como se puede ver el cálculo ofrecido por el *Método de Matriz de Transferencia* nos ofrece un resultado que concuerda muy bien con los resultados experimentales, incluso para estados extendidos como estos.

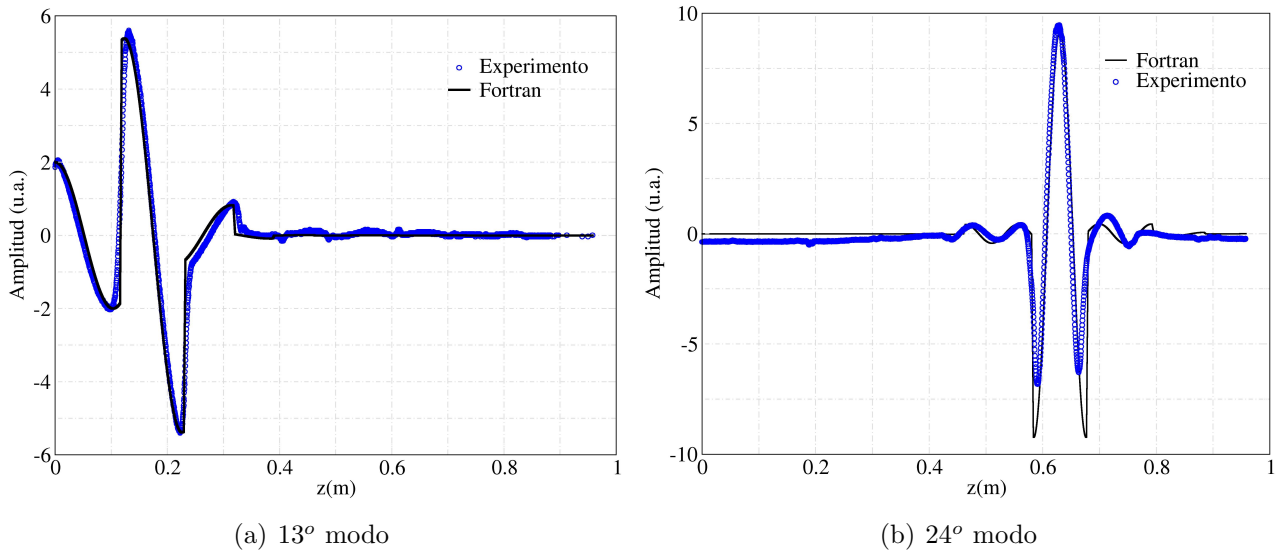


Figura 4.43: Se muestran el 13º en (a) y 24º modo en (b), tanto experimental y numérico.

En la Figura 4.43 se puede ver que las funciones de onda graficadas corresponden a estados localizados, en (a) se muestra un modo correspondiente a la 2 banda, también vemos que el comportamiento se reproduce mucho mejor, las frecuencias correspondientes son; $f_m = 11.414$

kHz y $f_{exp} = 11.305$ kHz. Mientras tanto en (b) tenemos un modo que corresponde a la tercera banda, de igual manera estamos tratando con un estado localizado, con las siguientes frecuencias $f_m = 25.4936$ kHz y $f_{exp} = 25.8150$ kHz.

De esta manera se observó el fenómeno de localización de Anderson en una barra con un desorden en específico, resaltando que esto se logró ver no solo en las simulaciones numéricas si no también en el sistema de la barra hecha con el Δ en específico.

Capítulo 5

Conclusiones.

El objetivo principal de esta tesis era observar el fenómeno de la localización de Anderson debido a una onda torsional, siendo aplicado a un sistema en donde las características físicas y geométricas tienen un papel importante al momento de obtener las funciones de onda y frecuencias propias. Para tener en cuenta todas estas características se optó por utilizar el *método de matriz de transferencia* (MMT) en cual fue implementado en una simulación numérica, este método resulta ser una gran herramienta a la hora de determinar las frecuencias propias del sistema. Uno de los primeros resultados fue el de simular el sistema de una *barra simple* con condiciones de Dirichlet (extremos libres) el objetivo de comparar la solución dada por la teoría y la determinada por la matriz de transferencia.

El estudio del sistema periódico, unos de los principales resultados como se ve en las Figuras 4.7 y 4.10, es el comportamiento de las primeras funciones de onda resulta ser muy similar al de la barra simple, pero para frecuencias más altas como se ve en las Figuras 4.9, 4.11, el comportamiento es diferente demostrando el efecto de las muescas. Se logró reproducir resultados ya reportados con lo cual se trabajó con un sistema periódico de sección transversal circular (ver Figura 4.12) [10], aunque de igual manera se trabaja con ondas torsionales, con velocidad constante, como se puede observar los resultados que se portan y los que obtenemos mediante nuestra simulación resultan ser las mismas.

El estudio del fenómeno de Anderson, se requirió realizar un ensamble de 1000 replicas, para modificar la longitud de los cuerpos, se requirió a sumar o restar un número Δ que se obtiene de una distribución normal, primero se analizó $\Delta = 1mm$, después aumenta Δ de 1cm en 1cm hasta llegar a $\Delta = 9cm$. Como se ve en la Figura 4.29 vemos que las bandas de las frecuencias están bien definidas y conforme aumenta Δ vemos como las bandas empiezan a juntarse o separarse gradualmente, perdiendo esa estructura.

Se calculó el PR , observando las Figuras 4.21-4.23, notamos que mediante aumenta Δ ; el PR de cada función empieza a disminuir y las bandas empiezan a unirse. Para un análisis cualitativo del PR se recurrió a realizar histogramas, de esta manera sabemos cuantos estados estarían localizados, conforme aumenta Δ , como se puede observar en las Figuras 4.24 y 4.25. Se decidió ajustar una distribución de densidad a estos histogramas, para lo cual usamos la distribución de **Izrailev** y comparar con la suma de dos distribuciones una **Normal** más **Gamma** para los estados localizados, mientras que para los extendidos ocupamos una distribución **Normal**, en las Figuras 4.26-4.28 vemos que α aumenta con respecto a Δ , de igual manera que A que lo asociamos directamente al número de población de estados localizados, este ajuste resulta ser

mejor para Δ 's más grandes. En las Figuras 4.32-4.34 el ajuste visualmente resulta ser mucho mejor, las constantes involucradas varían muy poco a excepción de A_4 , A_6 y A_7 pero resulta difícil asociar un parámetro directamente a la población de estados localizados. Para el caso de los estados extendidos, como se puede observar en la Tabla 4.4, las constantes que presentan cambios son A_2 y A_3 , para A_2 esta comienza a aumentar conforme aumenta Δ , mientras que para A_3 , esta asociada a la población de estados extendidos ya que disminuye.

Para el análisis de bandas vemos que para la primera (ver Figura 4.29 y la Tabla 4.5), al ajustar una distribución normal, estos estados disminuyen con forme Δ aumenta ya es aquí donde están las funciones más extendidas. Para la segunda y tercera banda, utilizando la distribución de *Izrailev* y aparte la suma de una *Normal* y una *Gamma*, para la segunda banda vemos que A y B aumentan conforme aumenta Δ , mientras α empieza a disminuir. Para la tercera banda, aunque el compartimento de A y B es similar a la segunda banda α aumenta con respecto a Δ , en ambos casos asociamos a A como una medida que nos indica la población de estados localizados.

Para el caso de la distribución *Normal* más *Gamma*, en ambas bandas aunque de manera general el ajuste resulta ser mucho mejor, como vemos en las Figuras 4.9-4.10, realmente las constantes A_1 , A_2 , A_3 los cambios resultan ser muy pequeños, aumentan muy lentamente, mientras que para A_4 los cambio resultan ser muy bruscos, A_5 parece fluctuar, mientras que A_6 y A_7 su tendencia es a la de aumentar.

Para comparar MMT con FEM, se tomo un elemento del ensamble para una $\Delta = 4cm$ como se ve en la Tabla 4.11. En la Figura 4.37 se presentan los valores de las frecuencias propias de la barra para los primeros 30 modos normales, como vemos los resultados obtenidos por los dos métodos concuerdan muy bien. Al determinar PR del sistema, en la Figura 4.38, vemos que el PR de las funciones de la barra escogida (asteriscos azules), siguen el comportamiento del ensamble, por otra parte mostramos una función de onda el modo 19° y en las Figuras 4.39- 4.40 podemos decir que las funciones de onda que son proporcionadas por MMT y FEM concuerdan muy bien.

Se midieron las funciones de onda correspondientes a modos torsionales, con esos datos se calculo el PR , como se ve en la Figura 4.41, en donde vemos el PR para 1000 elementos con el mismo $\Delta = 4cm$ (círculos rojos), mientras que los rombos azules corresponden al PR de las funciones experimentales, mostramos el modo 19° el determinado con MMT y el medido experimentalmente, podemos ver que el comportamiento experimental y el de la simulación concuerda muy bien con pequeñas variaciones. En las figuras 4.42 y 4.43 tenemos otras funciones medidas, en 4.42 para dos modos de la primera banda en (a) se midió el 5° modo normal, el comportamiento se puede decir que es el mismo, vemos caídas o subidas de amplitud que no se observan en la simulacion, aparecen cuando el detector pasa por la muesca, en (b) para el 8° modo normal, la presencia de las muescas no afecta demasiado en las mediciones, esto es un tendencia que se observe, ya que conforme aumentaba la frecuencia del modo, las funciones medidas concuerdan mucho mejor con las simulaciones, como se ve en la Figura 4.43 en donde tenemos un modo normal correspondiente a la segunda banda (a) y la tercera banda (b).

De esta manera vemos como se logra ver el fenómeno de localización de Anderson, en un sistema elástico, con la evolución del PR respecto al desorden Δ , y de puede ver una evolución determinada con la distribución de *Izrailev*, aunque en principio esta distribución es asociada a los niveles de energía mediante el parámetro de *repulsión de niveles* s creemos que hay una relación entre este parámetro s y el PR , con lo cual se puede ajustar esta distribución de manera general tomando estados extendidos y localizados o tomando en cuenta cada una de las bandas, por

último vemos que los resultados determinados ya sea por MMT o FEM y los medidos experimentalmente nos dan un grado de aceptación al saber que son concisos y que se puede observar este fenómeno de localización de Anderson.

5.1. Perspectivas del trabajo.

De acuerdo a los resultados obtenidos en este trabajo de investigación, se proponen las siguientes perspectivas:

- Realizar más replicas experimentales y comparar los resultados para cada grado de desorden.
- Análisis de espaciamiento de las frecuencias propias, así como estudiar las distribuciones del parámetro de repulsión de niveles.
- Calculo y análisis de la longitud de localización y sus distribuciones.
- Realizar un estudio similar para cuerpos con diferente sección transversal.
- Perturbación en más de una dimensión de los cuerpos acoplados, generar dos perturbaciones una para los cuerpos y otra para las muescas.
- Cambiar el tipo de perturbación que se propaga en el sistema, ya sea una onda Flexional o Compresioanal y trabajar por arriba de la frecuencia critica.
- Acoplar el sistema a dos diferentes desordenes, Anderson y Wannier.

Bibliografía

- [1] MONSIVÁIS GUILLERMO, MÉNDEZ SÁNCHEZ RAFAEL & DÍAZ DE ANDA ALFREDO, (2007). *Elastic Wannier-Stark Ladders in torsional waves*. Journal of Mechanics of Materials and Structures. Vol. 2, No. 8.
- [2] AD LAGENDIJK, BART VAN TIGGELEN, (2009). *Fifty years of Anderson localization*, World Scientific.
- [3] KARL F. GRAFF, (1975). *Wave motion in elastic solids*, Dover Publications. Oxford University Press.
- [4] ALEXANDER B SHVARTSBURG, ALEXEI A MARADUDIN, (2013). *Wave in gradient metamaterials*, The University of California, World Scientific Publishing.
- [5] VICTOR CHULAEVSKY, YURI SUHOV, (2014). *Multi-scale Analysis for Random Quantum Systems with Interaction*, Springer.
- [6] AD LAGENDIJK, BART VAN TIGGELEN, (2009). *Fifty years of Anderson localization*, World Scientific.
- [7] T. BRANDES, S. KETTEMANN, (2003). *Anderson Localization and Its Ramifications*, Springer.
- [8] Méndez Sánchez R. A., Gutiérrez L., Flores J. & Díaz de Anda A., (2013). Anderson Localization Phenomenon in One-Dimensional Elastic System. Acta Physica Polonica A, Vol. 124.
- [9] ANDERSON P. W., (1958). *Absence of diffusion in certain random lattices*. Physical review. 109, 1.
- [10] MORALES A., FLORES J. & GUTIERREZ L., (2002). *Compressional and torsional wave amplitudes in rods with periodic structures*. Acoustical Society of America. Vol. 112, No. 5.
- [11] WEAIRE D. & SRIVASTAVA V., (1977). *The Anderson localisation problem II. Some detailed numerical results*. Journal of Physics C: Solid State Physics, Volume 10, Number 21.
- [12] MCGURN A. R., CHRISTENSEN K. T. & MUELLER F. M., (1993). *Anderson Localisation in One-Dimensional Randomly Disordered Optical Systems that are periodic on average*. Physical review. B, Condensed matter, 47, 13120-12125.
- [13] PAYNE B., YAMILOV A. & SKIPETROV S. E, (2010). *Anderson localization as position-dependent diffusion in disordered waveguides*. Physical Review. 82, 024205

- [14] DÍAZ DE ANDA & FLORES J., (2013). *Emergence of acoustic and optical bands in elastic systems*. The Journal of the Acoustical Society of America 134, 4393.
- [15] CALLEJA ANGEL J., TORRES GUZMÁN J. C. & DÍAZ DE ANDA A., (2019). *Anderson localization of flexural waves in disordered elastic beams*. volume 9, Article number: 3572
- [16] R. LANDAUER,(1973). *Effective Medium Theory for the Hall Effect in Disordered Materials*.Physical Review Letters. Vol. 30, p. 696.
- [17] M. BUTTIKER, Y. IMRY, R. LANDAUER AND S. PINHAS, (1985). *Generalized many-channel conductance formula with application to small rings*, Physical. Review. B Vol. 31, p. 6207
- [18] BERNHARD KRAMER AND ANGUS MACKINNON, (1993) *Localization: theory and experiment*.Rep. Prog. Phys. 56 1469
- [19] A. DÍAZ DE ANDA, J. FLORES, L. GUTIÉRREZ, R.A. MÉNDEZ SÁNCHEZ, G. MONSIVAIS, A. MORALES, (2012) *Experimental study of the Timoshenko beam theory predictions*, Journal of Sound and Vibration.
- [20] J. FLORES, L. GUTIÉRREZ, R. A. MÉNDEZ-SÁNCHEZ, G. MONSIVAIS, P. MORA, AND A. MORALES, (2012). *Anderson Localization in Disordered Vibrating Rods*, EPL (Europhysics Letters), Vol. 101, Num. 6.
- [21] G CASATI, F IZRAILEV AND L. MOLINARI, (1991) *Scaling properties of the eigenvalue spacing distribution for band random matrices*, Journal of Physics, 24:4755.
- [22] MURPHY N. C,WORTIS R., & ATKINSON W. A., (2018) *Generalized Inverse Participation Ratio as a Possible Measure of Localization for Interacting Systems*, Phys. Rev. B 83.