



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS Y SU RELACIÓN
CON LA DINÁMICA COMPLEJA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

GUSTAVO PEDRO MEZA PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO

PUEBLA, PUE.

DICIEMBRE DE 2014

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	4
2.1. Variable Compleja	4
2.1.1. Módulo y forma polar de los números complejos	6
2.1.2. Fórmulas de De Moivre y Euler	8
2.1.3. Proyección Estereográfica	11
2.1.4. Conjuntos de Puntos	14
2.2. Funciones, Límite y Continuidad	16
2.3. Funciones Analíticas de Variable Compleja y Series de Potencias	19
2.4. Funciones Holomorfas de Variable Compleja	20
2.5. Funciones Conformes y Conjugación	23
2.5.1. Funciones Conformes	23
2.5.2. Conjugación Conforme	26
2.6. Fórmula Integral de Cauchy	28
2.7. Singularidades de una Función	29
3. El Grupo de las Transformaciones de Möbius	33
3.1. Grupos	33
3.2. Grupo Cíclico	35
3.3. Grupo Abelianó	36
3.4. Clases Laterales, Grupo Normal y Grupo Cociente	36
3.5. Homomorfismos e Isomorfismos entre Grupos	37
3.6. Transformaciones Elementales	38
3.7. El Grupo de las Transformaciones de Möbius	39

4. Algunos Resultados de las Transformaciones de Möbius	47
4.1. Propiedad Homocíclica	47
4.2. Las Transformaciones de Möbius son Conformes	51
4.3. La Razón Cruzada	52
4.4. Puntos Fijos de las Transformaciones de Möbius	52
5. Grupos $SL(2, \mathbb{C})$, $PSL(2, \mathbb{C})$ y de Klein	58
5.1. Los Grupos \mathcal{M} y $PSL(2, \mathbb{C})$	58
5.2. Los Subgrupos de $SL(2, \mathbb{C})$ y $PSL(2, \mathbb{C})$	61
5.3. Grupos de Klein	62
5.3.1. Los Conjuntos Ordinario y Límite de un Grupo de Klein	62
6. Dinámica de Funciones Racionales	65
6.1. Familias Normales	65
6.2. Puntos Fijos y su Clasificación	69
6.3. Funciones Racionales e Iteradas	70
6.4. Los Conjuntos de Fatou y Julia de Funciones Racionales . . .	71
7. Diccionario de Sullivan	74
7.1. Cuatro Analogías entre la Iteración de Funciones Racionales y los Grupos de Klein	74
7.2. Conclusiones	76
7.3. Aportaciones	76
Bibliografía	77

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis estudiamos las transformaciones de Möbius que llevan ese nombre en honor a August Ferdinand Möbius (1790-1868), matemático alemán, famoso por descubrir la banda que lleva su nombre.

Las transformaciones de Möbius de una variable compleja están definidas por el cociente de dos polinomios lineales, esto es:

$$\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde a, b, c, d son números complejos que cumplen $ad - bc \neq 0$. El conjunto de transformaciones de Möbius es un grupo que, con cierta condición sobre $ad - bc$, permite definir los grupos de Klein. En 1985, D. Sullivan mencionó [Sullivan, 1985] algunas analogías entre los grupos de Klein y la iteración de funciones racionales; ésta fue la primera versión de lo que hoy conocemos como el diccionario de Sullivan. En el libro *Holomorphic Dynamics* [Morosawa *et al.*, 2000] se presenta una versión muy completa del diccionario de Sullivan. Para establecer analogías entre los grupos de Klein y la dinámica de funciones racionales se tiene que estudiar la iteración de funciones racionales, el conjunto de Fatou, que se denota por $F(f)$, y el conjunto de Julia, denotado por $J(f)$, para funciones racionales. Estos conjuntos llevan estos nombres por los matemáticos franceses Pierre Fatou (1878-1929) y Gaston Julia (1893-1978), que investigaron, entre los años 1918 a 1920, la iteración de funciones racionales. También se tienen que estudiar los conjuntos ordinario y límite de un grupo de Klein; su nombre se debe al matemático alemán Félix Klein (1849-1925), fundador en 1895, de la *Gran Enciclopedia de las Matemáticas*. También, lleva su nombre la célebre botella de Klein.

Los objetivos de este trabajo son los siguientes:

- (a) Estudiar las transformaciones de Möbius y algunas de sus propiedades, así como demostrar que forman un grupo bajo la composición de funciones.
- (b) Definir el grupo de Klein e investigar algunas de sus propiedades.
- (c) Estudiar la dinámica de funciones racionales, definir los conjuntos de Fatou y Julia de funciones racionales e investigar algunas de sus propiedades.
- (d) Enunciar y demostrar algunas analogías entre los grupos de Klein y la dinámica compleja de funciones racionales del diccionario de Sullivan, véase [Morosawa *et al.*, 2000].

Esta tesis está organizada de la siguiente forma:

En el segundo capítulo se presentan los preliminares, es decir, la herramienta matemática que se va a requerir para llevar a cabo nuestro estudio, algunos ejemplos son: conceptos de variable compleja, la proyección estereográfica, funciones de variable compleja, límite y continuidad de una función de variable compleja, función conforme y conjugación, así como singularidades de una función y ejemplos.

En el tercer capítulo definimos lo que es un grupo y proporcionamos algunos ejemplos de grupos. Definimos las transformaciones fundamentales: reflexiones, rotaciones, homotecias e inversiones. Estudiamos las transformaciones de Möbius y enunciamos algunos ejemplos de dichas transformaciones; demostramos que las transformaciones de Möbius son composiciones de transformaciones fundamentales y que el conjunto de las transformaciones de Möbius, al que denotamos por \mathcal{M} , es un grupo bajo la composición de funciones.

En el capítulo cuatro estudiamos algunas propiedades de las transformaciones de Möbius, como son: la propiedad homocíclica y la razón cruzada. También demostramos que las transformaciones de Möbius son funciones conformes. Estudiamos los puntos fijos y la clasificación de las transformaciones de Möbius.

En el capítulo cinco se definen los grupos $SL(2, \mathbb{C})$ y $PSL(2, \mathbb{C})$. Relacionamos a \mathcal{M} con el grupo de matrices 2×2 con coeficientes complejos, $PSL(2, \mathbb{C})$, mediante un isomorfismo de grupos. Definimos los subgrupos

discretos de $SL(2, \mathbb{C})$ y $PSL(2, \mathbb{C})$, los grupos de Klein y se enuncian algunos ejemplos. También, definimos los conjuntos ordinario y límite de un grupo de Klein y estudiamos algunas de sus propiedades.

En el capítulo seis se define familia normal, función racional, iteración de funciones racionales, puntos fijos de funciones racionales y clasificación de puntos fijos. También, definimos los conjuntos de Fatou y Julia de funciones racionales, estudiamos algunas de sus propiedades y proporcionamos algunos ejemplos.

Finalmente, en el capítulo siete incluimos cuatro analogías entre la iteración de funciones racionales y los grupos de Klein que están en el diccionario de Sullivan, véase [Morosawa *et al.*, 2000]. Para concluir el trabajo de tesis escribimos las conclusiones, la aportación y las referencias citadas en este trabajo.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo enunciamos algunos conceptos básicos de variable compleja. Estos conceptos se pueden consultar en [Alfhors, 1979], [Churchill y Brown, 1987], [Conway, 1978], [Dettman, 1986] y [Palka, 1991].

2.1. Variable Compleja

Un número complejo z es un par ordenado (a, b) donde a, b son números reales, es decir, $z = (a, b)$. Denotamos al sistema de los números complejos por \mathbb{C} . Las operaciones de suma y producto se definen de la siguiente manera.

- (i) Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos números complejos, la suma se define por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
- (ii) El producto se define como $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Algunas propiedades de los números complejos son.

- (1) Si $b = 0$, entonces $z = (a, 0)$, que se puede ver como si fuese un número real, esto significa que el conjunto de los números reales puede verse como un subconjunto de los números complejos.
- (2) El número $i = (0, 1)$ es la unidad imaginaria que tiene la propiedad $i \cdot i = i^2 = -1$.
- (3) Si $a = 0$, entonces, $z = (0, b)$. Los números de esta forma son llamados imaginarios puros.

Con la unidad imaginaria podemos escribir al par ordenado (a, b) como $a + ib$. Así, definimos el conjunto de los números complejos como sigue:

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a \text{ y } b \in \mathbb{R}\},$$

para $z \in \mathbb{C}$, la parte real de z es a , que se denota por $Re\ z = a$, y la parte imaginaria de z es b , que se denota por $Im\ z = b$.

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$, donde $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, se definen las siguientes operaciones de suma y producto en \mathbb{C} como sigue:

(a) La suma de z_1 y z_2 es:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

(b) El producto de z_1 y z_2 es:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

El cociente de dos números complejos z_1 y $z_2 \neq 0$ es:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Con la suma y producto definidas en (a) y (b) se puede demostrar que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un campo.

El conjugado de un número complejo $z = x + iy$ se define por $\bar{z} = x - iy$.

Así, geoméricamente podemos interpretar la suma, producto y conjugado como en la Figura 2.1.

Algunas propiedades del conjugado de un número complejo son las siguientes:

- (1) Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
 - (2) Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ y $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, para $z_2 \neq 0$;
 - (3) Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $Re\ z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ y $Im\ z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
-

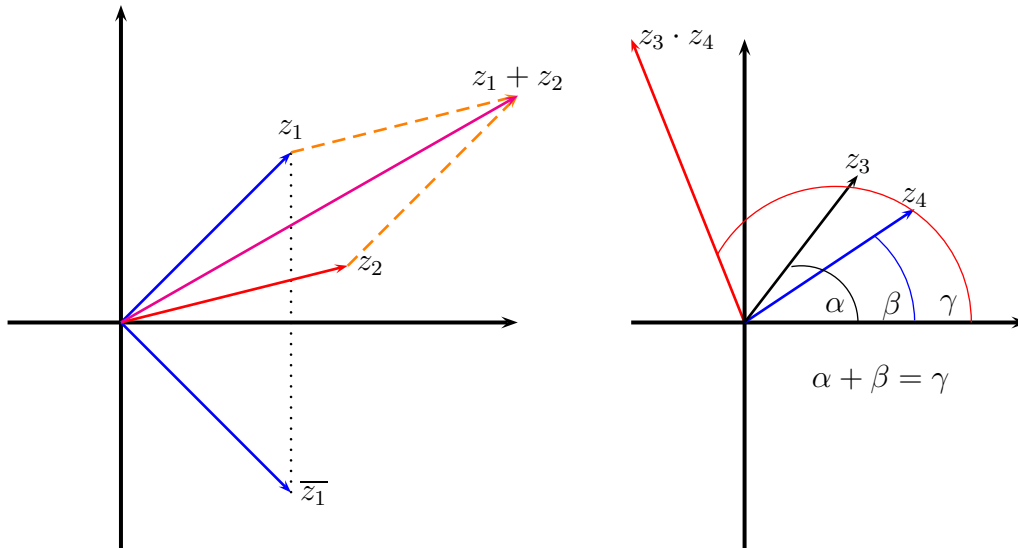


Figura 2.1: Geométricamente $z_1 + z_2$, $\overline{z_1}$ y $z_3 \cdot z_4$

2.1.1.1. Módulo y forma polar de los números complejos

En esta subsección estudiamos el módulo, el argumento y la forma polar de un número complejo. El primero es la distancia euclidiana del origen $(0, 0)$ al punto z ; el segundo es el ángulo que se forma respecto al eje positivo x y el vector z , se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj; y el tercero es la representación de un número complejo respecto a su módulo y argumento principal, estas definiciones se pueden encontrar en [Cohen, 2007] y [Silverman, 1974].

Definición 2.1 *El módulo $|z|$ de un número complejo $z = x + iy$ se define como: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

El módulo de $|z - w|$ con z y $w \in \mathbb{C}$ es la distancia entre los puntos en el plano complejo que corresponden a z y w .

El módulo de un número complejo tiene las siguientes propiedades:

- (1) El módulo de $z \in \mathbb{C}$ es un número mayor o igual que cero, esto es, $|z| \geq 0$.
- (2) La propiedad simétrica, $|z - w| = |w - z|$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

- (3) La desigualdad triangular, $|z + w| \leq |z| + |w|$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.
- (4) Consecuencia de la desigualdad del triángulo, $||z| - |w|| \leq |z - w|$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.
- (5) Propiedad del producto, $|z \cdot w| = |z||w|$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.
- (6) Propiedad del cociente, $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$, para $z \in \mathbb{C}$ y $w \neq 0$.

Si $z \neq 0$, entonces z queda unívocamente determinado por su distancia al origen, $r = |z|$ y un ángulo θ que forma el eje real con el vector z , véase la Figura 2.2.

Definición 2.2 El ángulo θ es el argumento de z y se denota por $\theta = \arg(z)$.

Los números r y θ se llaman coordenadas polares del complejo z . Un argumento θ no está determinado de manera única, porque el complejo z tiene infinitos argumentos si uno de ellos es θ , los otros están dados por la forma:

$$\theta + 2k\pi \quad k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

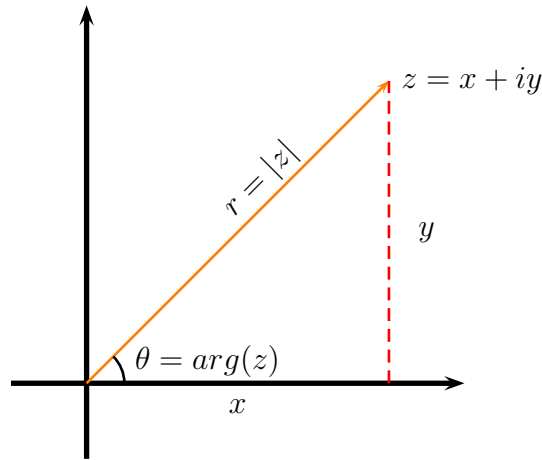


Figura 2.2: Argumento de un número complejo $z \in \mathbb{C}$.

Entre estos infinitos argumentos, se llama argumento principal al que cumple la condición: $-\pi < \theta \leq \pi$ y se denota por $\text{Arg}(z)$.

Definición 2.3 Podemos expresar al número complejo $z \in \mathbb{C}$ en términos de su módulo y su argumento, se define de la siguiente forma:

$$\operatorname{Re} z = x = |z| \cos \theta \text{ y } \operatorname{Im} z = y = |z| \operatorname{sen} \theta, \quad (2.2)$$

utilizando que $z = x + iy$, podemos reescribir a z como:

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \quad (2.3)$$

con $-\pi < \theta \leq \pi$.

La Ecuación (2.3) se la conoce como la forma polar del número complejo z y se puede escribir como $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, donde $r = |z|$.

2.1.2. Fórmulas de De Moivre y Euler

En este apartado se estudian las fórmulas de De Moivre y de Euler, el primero es famoso, además de su aportación a la matemática, por predecir el día de su muerte y el segundo por introducir la notación para definir la base de los logaritmos naturales.

Sean $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ dos números complejos escritos en su forma polar.

Tomando $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$, por las propiedades de la suma de ángulos para el *seno* y el *coseno*, tenemos lo siguiente:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)).$$

De esto observamos que $\operatorname{arg}(z_1 z_2) = \operatorname{arg} z_1 + \operatorname{arg} z_2$.

Si utilizamos inducción matemática, tenemos que $z_k = r_k(\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k)$ con $0 \leq k \leq n$, por lo tanto, $z_1 z_2 \dots z_n = r_1 \dots r_n (\cos(\theta_1 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \dots + \theta_n))$.

En particular cuando hacemos $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ veces}}$, tenemos:

$$z^n = r^n (\cos (n\theta) + i (\operatorname{sen} (n\theta))), \quad (2.4)$$

para todo entero $n \geq 0$.

Por otra parte, si $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \neq 0$, se tiene $z[r^{-1}(\cos (-\theta) + i \operatorname{sen} (-\theta))] = 1$; de modo que la Ecuación (2.4) se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}$,

siempre y cuando $z \neq 0$. Un caso especial de la Ecuación (2.4) es la *Fórmula de De Moivre*,

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta. \quad (2.5)$$

Para obtener las raíces n -ésimas de z , utilizamos la siguiente fórmula que es una consecuencia de la fórmula de De Moivre, esto es:

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right], k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.6)$$

Ejemplo 2.1

Calcular las raíces cuartas de $z = 1 - i$.

Solución: Primero escribimos a z en forma polar, esto es, $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right)$. Después aplicamos la Ecuación (2.6), de lo cual resulta:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{3\pi + 2k\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi + 2k\pi}{4} \right) \text{ donde } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Sustituyendo los valores de k podemos encontrar las raíces cuartas de $1 - i$.

La fórmula o relación de Euler, atribuida a Leonhard Euler, establece que para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ y

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y). \quad (2.7)$$

Geoméricamente la fórmula de Euler puede interpretarse con la ayuda de una circunferencia de radio uno en el plano complejo, graficada por la función $e^{i\theta}$ al variar θ sobre los números reales, (véase la Figura 2.3). Así, θ es el ángulo de una recta que conecta el origen del plano y un punto sobre la circunferencia unitaria con el eje positivo real que se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj y en radianes. La fórmula sólo es válida si también el seno y el coseno tienen sus argumentos en radianes.

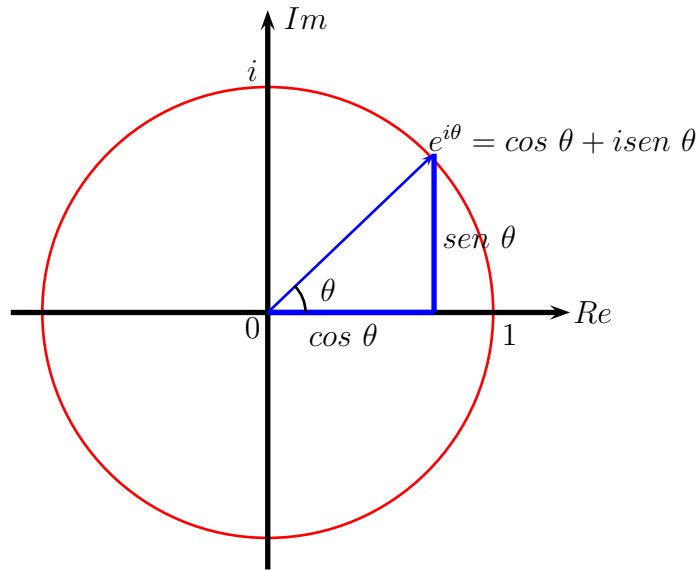


Figura 2.3: Fórmula de Euler.

Ejemplo 2.2

Si $z_1 = 0$, $z_2 = \pi i$ y $z_3 = i$, entonces $e^{z_1} = 1$, $e^{z_2} = -1$ y $e^{z_3} = \cos 1 + i \operatorname{sen} 1$.

En general, desarrollar la potencia de un número complejo requiere de muchos cálculos. Usando la forma exponencial, algunas propiedades del argumento y de la parte real e imaginaria, se puede hacer de una forma más sencilla. Si revisamos la Ecuación (2.7), entonces $z \in \mathbb{C}$ puede expresarse en la forma exponencial

$$z = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta}, \quad r = |z|,$$

entonces

$$z^n = |z|^n e^{in\theta} = r^n e^{in\theta}, \quad r = |z|, \quad (2.8)$$

y se tiene:

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|} e^{i(-\theta)} = \frac{1}{r} e^{i(-\theta)}, \quad r = |z|.$$

Así, la Ecuación (2.8) es válida para todo $n \in \mathbb{Z}$ y además $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

2.1.3. Proyección Estereográfica

La proyección estereográfica es la correspondencia entre el plano complejo y la esfera de radio 1, centrada en $(0, 0, 0)$. La proyección es muy importante porque podemos identificar cualquier punto del plano con un punto de la esfera. El plano extendido se denota por $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde ∞ es llamado el punto al infinito.

Demostremos que todos los puntos del plano tienen una representación en la esfera unitaria, $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Asociamos el punto $(0, 0)$ del plano complejo al punto $S = (0, 0, -1)$ de la esfera unitaria.

Sean $N = (0, 0, 1)$ el polo norte de S^2 , $P = (x_1, x_2, x_3)$ un punto diferente de N en la esfera. Vamos a mostrar que el punto P puede identificarse con un punto Q del plano complejo, con el fin de escribir las coordenadas de P , en términos de las coordenadas del punto Q ; para esto, tracemos una recta que pase por N y P e interseque al plano complejo en un punto $Q = (x, y, 0)$ (véase la Figura 2.4).

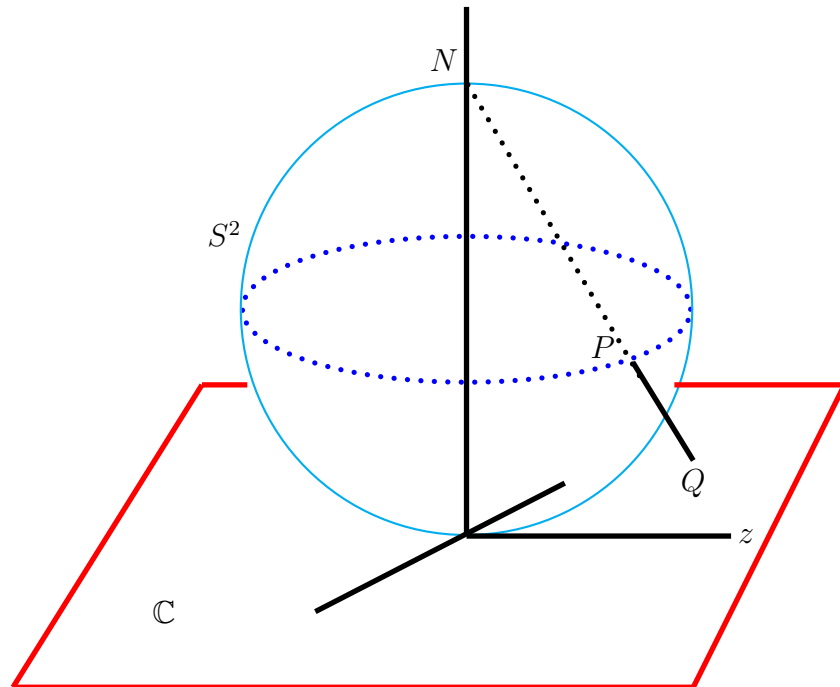


Figura 2.4: Proyección Estereográfica.

Como

$$P - N = (x_1, x_2, x_3 - 1) \text{ y } Q - N = (x, y, -1), \quad (2.9)$$

y N , P y Q están en la misma recta, entonces existe un escalar λ , tal que

$$(x_1, x_2, x_3 - 1) = \lambda(x, y, -1). \quad (2.10)$$

De la Ecuación (2.10) obtenemos las siguientes igualdades:

$$x_1 = \lambda x, \quad x_2 = \lambda y, \quad x_3 = 1 - \lambda. \quad (2.11)$$

Por ser (x_1, x_2, x_3) un punto en la esfera, cumple:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \quad (2.12)$$

Sustituyendo los valores en las Ecuaciones (2.11) en (2.12), se obtiene:

$$\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + (1 - \lambda)^2 = 1. \quad (2.13)$$

Haciendo operaciones en la Ecuación (2.13) obtenemos lo siguiente:

$$\lambda^2(x^2 + y^2 + 1) - 2\lambda = 0. \quad (2.14)$$

Factorizando a λ en la Ecuación (2.14), queda un producto igual a 0, esto es:

$$\lambda(\lambda(x^2 + y^2 + 1) - 2) = 0.$$

Si λ es igual a cero, tenemos que $P = N$, pero esto es una contradicción, porque $P \neq N$.

Si $\lambda(x^2 + y^2 + 1) - 2 = 0$, entonces

$$\lambda = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}. \quad (2.15)$$

Utilizando la Ecuación (2.11) en la Ecuación (2.15), se obtiene:

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}. \quad (2.16)$$

Hacemos $Q = z$, sabemos que $|z|^2 = x^2 + y^2$, también por propiedades del conjugado, $2\operatorname{Re} z = 2x = z + \bar{z}$, $2\operatorname{Im} z = 2y = (-i)(z - \bar{z})$. Sustituyendo estos valores en la Ecuación (2.16), llegamos al punto en el plano complejo que le corresponde a $P = (x_1, x_2, x_3)$, punto de la esfera unitaria..

$$P = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{(-i)(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right). \quad (2.17)$$

Si $(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$ el punto que le corresponde en el plano complejo está representado en la Ecuación (2.17). Además,

$$\lambda = 1 - x_3, \quad x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Por lo tanto,

$$z = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

La proyección estereográfica determina una correspondencia uno a uno entre la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 menos el punto $(0, 0, 1)$ y el plano complejo como sigue.

Para todo $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$, la proyección desde N está definida por:

$$\pi_N(\bar{x}) = z = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3},$$

para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\pi_N^{-1}(z) = (x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \\ x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \\ x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}. \end{cases}$$

La correspondencia puede ser completada si al punto a infinito le asociamos el punto $N = (0, 0, 1)$, el cual es llamado el polo norte de S^2 . Así, la esfera S^2 es una representación del plano complejo extendido.

Esto nos permite definir una métrica en $\hat{\mathbb{C}}$, definida a continuación.

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}},$$

y

$$d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

2.1.4. Conjuntos de Puntos

Cualquier colección de puntos en \mathbb{C} se llama conjunto de puntos y cada uno es llamado miembro o elemento del conjunto. A continuación enunciamos las siguientes definiciones, que se pueden consultar en [Spiegel *et al.*, 2009].

- (1) **Vecindad.** Una δ -vecindad de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < \delta$, denotada por $V_\delta(z_0)$. Una vecindad “agujereada” de un punto z_0 es el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$ y se denota por $V_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$.
- (2) **Punto Límite.** Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es llamado punto límite o punto de acumulación de un conjunto de puntos $S \subset \mathbb{C}$ si toda $V_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ contiene puntos de S .
- (3) **Conjunto Cerrado.** Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es cerrado si S contiene a todos sus puntos límite.
- (4) **Conjunto Acotado.** Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es acotado si podemos encontrar un número $M \geq 0$ tal que para todo $z \in S$ se tiene $|z| \leq M$.
- (5) **Conjunto Compacto.** Un conjunto que es cerrado y acotado es compacto.
- (6) **Clausura de un conjunto** Si al conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se le agregan todos sus puntos límite, entonces el nuevo conjunto es llamado la clausura de S el cual es un conjunto cerrado y se denota por $cl S$ o \bar{S} .
- (7) **Puntos Interior, Exterior y Frontera.** Un punto z_0 es llamado punto interior de $S \subset \mathbb{C}$ si existe $V_\delta(z_0)$ tal que todo $z \in V_\delta(z_0)$ está contenido en S , se denota por $z_0 \in int(S)$. Si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus S$, entonces z_0 es

un punto exterior de S , se denota por $z_0 \in \text{ext}(S)$. Si toda $V_\delta(z_0)$ es tal que $V_\delta(z_0) \cap S \neq \emptyset$ y $V_\delta(z_0) \cap \mathbb{C} \setminus S \neq \emptyset$, entonces z_0 es un punto frontera de S y se denota por $z_0 \in \partial S$.

- (8) **Conjunto Abierto.** Un conjunto abierto $S \subset \mathbb{C}$ contiene únicamente a sus puntos interiores.
- (9) **Conjuntos Disconexo y Conexos.** Un conjunto abierto $S \subset \mathbb{C}$ es disconexo si existen U y V abiertos no vacíos, tal que $S = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Si $S' \subset \mathbb{C}$ no es disconexo, entonces S' es conexo.
- (10) **Región o Dominio.** Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$, abierto y conexo se llama región o dominio.
- (11) **Cubierta Abierta.** Una colección de subconjuntos $\{A_i\}$ de un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es un recubrimiento o cubierta de S si la unión de los elementos de la colección $\{A_i\}$ es igual a S . La cubierta $\{A_i\}$ es llamada recubrimiento abierto de S si cada elemento de $\{A_i\}$ es un conjunto abierto de \mathbb{C} .
- (12) **Subcubierta Finita.** Si la colección $\{A_i\}$ es un conjunto finito, decimos que $\{A_i\}$ es una subcubierta finita de S si $S \subset \{A_i\}$.

Teorema 2.1 [Noguchi, 1993] *Las siguientes proposiciones son equivalentes para $A \subset \mathbb{C}$.*

- (i) A es compacto;
- (ii) A es cerrado y acotado;
- (iii) Si $A \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$, donde U_α es una cubierta abierta de A , entonces existe una subcubierta finita $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}$ de $U_{\alpha \in \Gamma}$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.

Demostración: La demostración (i) si, y sólo si (ii) se sigue del Teorema 2.2 (*Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente*). Demostremos ahora que (ii) implica (iii). Si $S = \{Re z / z \in A\}$, entonces S es un conjunto cerrado y acotado de \mathbb{R} , por lo tanto existe $\sigma = \min S$. Definimos $A[\sigma, \tau] = \{z \in A : \sigma \leq Re z \leq \tau\}$ para $\tau \geq \sigma$. Por lo tanto $A[\sigma, \sigma] = \{z \in A : Re z = \sigma\}$ es una subcubierta finita de U_{α_j} que es una cubierta de A , donde $1 \leq j \leq k$.

$$A[\sigma, \sigma] \subset \bigcup_{j=1}^k U_{\alpha_j}. \quad (2.18)$$

Por lo anterior se deduce que existe $\tau_1 > \sigma$, tal que $A[\sigma, \tau_1] \subset \bigcup_{j=1}^k U_{\alpha_j}$.

Sea τ_0 el supremo de los τ tal que $A[\sigma, \tau]$ es una cubierta finita de U_α . Supongamos que $\tau_0 < \text{máx } S$, por (2.18), $A[\tau_0, \tau_0]$ es una cubierta finita de U_α , entonces también lo es $A[\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$ para alguna δ .

Si $A[\sigma, \tau_0 - \delta]$ es una cubierta finita de U_α , entonces $A[\sigma, \tau_0 + \delta]$ también es una cubierta finita de U_α , pero esto contradice la elección de τ_0 , por lo tanto $\tau_0 = \text{máx } S$; por la misma razón $A = A[\sigma, \text{máx } S]$ es una cubierta finita de U_α .

Por último demostramos que (iii) implica (ii). Consideremos la cubierta abierta $\{\delta(a, 1) : a \in A\}$ de A . Supongamos que existen $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$, tal que $A \subset \delta(a_1, 1) \cup \dots \cup \delta(a_n, 1)$, luego A es un conjunto acotado.

Veamos que A es un conjunto cerrado. Sea a un punto de acumulación de A tal que $a \notin A$. Definamos $U_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a| < \frac{1}{2} \right\}$, y

$$U_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{n+2} < |z - a| < \frac{1}{n} \right\}, \text{ donde } n = 1, 2, \dots$$

Se sigue que $A \subset \mathbb{C} \setminus \{a\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$ y $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una cubierta abierta de A . Como a es un punto de acumulación de A , entonces A no tiene una cubierta finita de U_n , pero esto es una contradicción. Por lo tanto A es cerrado. ■

2.2. Funciones, Límite y Continuidad

En esta sección estudiamos las funciones de variable compleja y las funciones analíticas, así como sus propiedades, utilizando las propiedades de los números complejos descritas en secciones anteriores.

Definición 2.4 Sea $S \subset \mathbb{C}$. Una función $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ es una regla que asigna a cada elemento $z \in S$ un número complejo w . El número w es llamado el valor de f en z y se denota por $w = f(z)$. El conjunto S es el dominio de definición de f . La función $f(z)$ se puede escribir como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $u(x, y)$ es la parte real y $v(x, y)$ es la parte imaginaria de $f(z)$.

Los conceptos de límite y continuidad en funciones de variable compleja son muy parecidos a los de funciones de variable real, pero su interpretación topológica es diferente.

Definición 2.5 Sea $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que $f(z)$ tiene límite w_0 cuando z tiende a z_0 si, y sólo si para cualquier número positivo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$ se cumple $|f(z) - w_0| < \epsilon$. Escribimos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \text{ o } f \rightarrow w \text{ cuando } z \rightarrow z_0.$$

Geoméricamente la Definición 2.5 dice que para cualquier ϵ -vecindad de w_0 existe una vecindad “agujereada” $V_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ de z_0 , tal que para todo punto z que tiene de imagen a algún w que se encuentre en V_ϵ . Aunque todos los puntos de la vecindad agujereada sean considerados, sus imágenes no necesariamente están en la ϵ -vecindad. A continuación tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3

Si $f(z) = \frac{z^2 + 5iz - 6}{z + 2i}$, demostrar que $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = 4i$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - i| < \delta$, demostraremos que $|f(z) - 4i| < \epsilon$.

$$\begin{aligned} \text{Tomemos } |f(z) - 4i| &= \left| \frac{z^2 + 5iz - 6}{z + 2i} - 4i \right| = \left| \frac{(z + 2i)(z + 3i)}{z + 2i} - 4i \right| = \\ &= |z + 3i - 4i| = |z - i| < \delta. \end{aligned}$$

Tomando $\delta = \epsilon$ se tiene lo requerido.

Observación. Si $f(z) = w_0$ es una función constante, la imagen de z es siempre el centro de la ϵ -vecindad. Una vez hallado el valor de δ puede reemplazarse por un número positivo más pequeño como por ejemplo $\frac{\delta}{2}$.

Definición 2.6 Sea f una función definida en $S \subset \mathbb{C}$. Decimos que f es continua en un punto $z_0 \in S$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Escribimos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Ejemplo 2.4

Si $f(z) = z^2$, demostraremos que es continua en $z_0 \in \mathbb{C}$. Supongamos que $|z - z_0| < 1$, utilizando las propiedades del módulo obtenemos lo siguiente:

$$|z| - |z_0| \leq |z - z_0| < 1,$$

de modo que

$$|z| < 1 + |z_0|,$$

y en consecuencia

$$|z + z_0| \leq |z| + |z_0| < 2|z_0| + 1.$$

Al tomar $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{2|z_0| + 1}\right\}$, tenemos que si $|z - z_0| < \delta$, se cumple que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Así, $f(z)$ es continua en z_0 .

El siguiente ejemplo muestra una función que no es continua,

Ejemplo 2.5

Definamos la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1 + z^2}{z - i} & \text{si } z \neq i, \\ 4i & \text{si } z = i. \end{cases}$$

Calculando el límite, tenemos:

$$\lim_{z \rightarrow i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)(z + i)}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} (z + i) = 2i,$$

pero $f(i) = 4i$, por lo tanto f no es continua en $z = i$.

Definición 2.7 Una función f definida en $S \subset \mathbb{C}$, donde S es abierto, es continua en S si lo es en todo punto de S .

2.3. Funciones Analíticas de Variable Compleja y Series de Potencias

Una sucesión de números complejos se escribe como: $\{z_0, z_1, \dots\} = \{z_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Definición 2.8 Una sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un punto $a \in \mathbb{C}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $|z_n - a| < \epsilon$ para todo $n \geq N$, se denota por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, \text{ o } z_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

Como $\max\{|Re z|, |Im z|\} \leq |z| \leq |Re z| + |Im z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, la Ecuación (2.19) es equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta, \quad (2.20)$$

donde $z_n = x_n + iy_n$, y $a = \alpha + i\beta$. Una sucesión convergente $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es siempre acotada, es decir, que existe $M > 0$, tal que $|z_n| \leq M$ para todo n .

Teorema 2.2 [Noguchi, 1993] Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Definición 2.9 Una sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $|z_n - z_m| < \epsilon$ para todo $n, m \geq N$.

En este caso $\{Re z_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{Im z_n\}_{n=0}^{\infty}$ son sucesiones de Cauchy por la Ecuación (2.20).

Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión infinita de funciones definidas en $A \subset \mathbb{C}$. La suma $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ es llamada *serie de funciones*. Para un número $N = 0, 1, \dots$ la suma $\sum_{n=0}^N f_n$ es llamada la *N-ésima suma parcial o suma parcial*. La sucesión queda determinada por una función S , que tiene como dominio los naturales y contradominio el espacio de las funciones complejas. El N -ésimo término de la sucesión lo escribimos como S_N y denotamos a la sucesión como $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$.

Definición 2.10 Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión infinita de funciones definidas en $A \subset \mathbb{C}$. Si $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ converge en un punto $z \in A$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ se

dice que converge a z y se denota como $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. Si $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ converge para todos los puntos de A , entonces decimos que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge en A .

Para determinar la convergencia de una serie existen varios criterios, por ejemplo, de comparación, del cociente, de la raíz, de la integral, de Weierstrass, etc, que se pueden consultar en cualquier libro de variable compleja.

Definición 2.11 Sea $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión y $z_0 \in \mathbb{C}$. La serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ es llamada serie de potencias.

El siguiente teorema da condiciones para que una serie de potencias sea convergente.

Teorema 2.3 Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias. Existe un único número $R \geq 0$, posiblemente $+\infty$, llamado radio de convergencia, tal que si $|z - z_0| < R$, entonces la serie converge y si $|z - z_0| > R$, entonces la serie diverge. Además, la convergencia es uniforme y absoluta sobre cada disco cerrado en $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$.

Definición 2.12 Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. La función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es analítica si para cualquier $z_0 \in A$ existe $r > 0$ con $B(z_0, r) \subset A$ y una serie de potencias (centrada en z_0) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ que converge en $B(z_0, r) \subset A$, tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ para todo $z \in B(z_0, r)$.

Ejemplo 2.6

Tomando $z_0 = 0$ se puede verificar que las funciones e^z y $\sen z$ son analíticas para todo $z \in \mathbb{C}$.

2.4. Funciones Holomorfas de Variable Compleja

En este apartado presentamos un concepto muy importante de la variable compleja, el de función holomorfa; en la mayoría de los libros este concepto se relaciona con el de función analítica. A pesar de que se usan como sinónimos, se debe tener cuidado en el contexto en el que se esté trabajando.

Definición 2.13 Sea $S \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida en S . La función f es diferenciable en un punto $z_0 \in S$ si la fracción:

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \text{ donde } h \in \mathbb{C}, h \neq 0 \text{ y } z_0 + h \in S,$$

converge a un límite, cuando $h \rightarrow 0$. Si el límite existe, se denota por $f'(z_0)$ y se llama la derivada de f en z_0 , es decir,

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Definición 2.14 Una función $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en $S \subset \mathbb{C}$ abierto si es diferenciable en todo punto z_0 de S .

Definición 2.15 Una función $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en S si f es diferenciable para todo $z \in S$.

Algunos ejemplos de funciones holomorfas son los siguientes.

Ejemplo 2.7

- (1) Las funciones constantes son holomorfas.
- (2) La función $f(z) = z$ es holomorfa.
- (3) La función $f(z) = z^n$ es holomorfa para todo $z \in \mathbb{C}$ donde $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4 [Stein y Shakarchi, 2003]. Sea $S \subset \mathbb{C}$ un dominio; una condición necesaria para que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea holomorfa en S es que u y v satisfagan las siguientes ecuaciones, llamadas de Cauchy-Riemann (2.21).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ en todo punto } (x, y) \in S. \quad (2.21)$$

Es decir, que u y v tengan derivadas parciales de primer orden en todos los puntos de S y se satisfagan (2.21) en cada uno de dichos puntos.

Si las derivadas parciales en (2.21) son continuas en S , entonces las Ecuaciones de Cauchy-Riemann son una condición suficiente para que $f(z)$ sea holomorfa en S y la derivada de $f(z)$ es $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Las ecuaciones recibieron ese nombre en honor al matemático francés A. L. Cauchy (1789-1857), quien realizó importantes aportaciones en diversas áreas de las matemáticas, y también en honor al matemático alemán G. F. B. Riemann (1826-1866), quien realizó estudios sobre la teoría de funciones de una variable compleja.

Teorema 2.5 *Una función f es holomorfa si, y sólo si f es analítica.*

Un ejemplo de una función que no es holomorfa es la siguiente.

Ejemplo 2.8

Si $f(z) = \bar{z}$, (la función conjugada), la función no es holomorfa, porque no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

En efecto, tenemos que $f(z) = \bar{z}$, entonces $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = -y$, pero

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$, esto contradice el Teorema 2.21, por lo tanto $f(z)$ no es holomorfa lo que implica que $f(z)$ no es analítica en z .

De ahora en adelante utilizaremos la palabra analítica y holomorfa indistintamente. El siguiente Teorema está relacionado con la composición de funciones analíticas.

Teorema 2.6 *Sean A, B, C regiones de \mathbb{C} , si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son funciones analíticas, entonces $(g \circ f)$ es analítica.*

Demostración: Sea $f(z) = w$ una función que está definida para todo z en una δ -vecindad del punto z_0 , y sea $g(w) = y$ una función tal que $f(V_\delta) \subset B$. La composición $W = [g(f(z))]$ está definida para todo z en la vecindad $|z - z_0| < \delta$. Supongamos que $f(z)$ es analítica en z_0 y $g(w)$ es analítica en el punto $f(z_0)$, para todo $\epsilon > 0$ existe $\gamma > 0$ tal que $|g(f(z)) - g(f(z_0))| < \epsilon$ cuando $|f(z) - f(z_0)| < \gamma$, como $f(z)$ es analítica en z_0 , se asegura que la vecindad $|z - z_0| < \delta$ puede hacerse lo suficientemente pequeña para que la segunda desigualdad se cumpla. Por lo tanto la composición $g[f(z)]$ es analítica. ■

Observación. Si $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en un punto $a \in S$, entonces f es continua en a . En efecto, tenemos el siguiente límite:

$$\lim_{z \rightarrow a} (f(z) - f(a)) = \left[\lim_{z \rightarrow a} \frac{(f(z) - f(a))}{z - a} \right] \left[\lim_{z \rightarrow a} (z - a) \right] = [f'(a)][0] = 0.$$

2.5. Funciones Conformes y Conjugación

Las aplicaciones complejas que tienen la propiedad de preservar ángulos se llaman transformaciones conformes; en este apartado enunciamos algunas definiciones y resultados relacionados con esta propiedad, véase [Zill y Shanahan, 2003].

2.5.1. Funciones Conformes

Una curva es una línea continua de una dimensión que varía paulatinamente. De manera intuitiva una curva suave es aquella que no tiene puntos “angulosos” o “picos”; ejemplos de curvas suaves son el círculo, la elipse y la parábola.

Definición 2.16 *Formalmente una curva $C \in \mathbb{R}^2$, se representa por la ecuación paramétrica*

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

donde $z(t) = f(t) + ig(t)$, f y g son continuas, los puntos inicial y final de C son $A = (f(a), g(a))$ y $B = (f(b), g(b))$ y están definidas en un intervalo cerrado $I = [a, b]$.

- (i) La curva C es suave si f' y g' son continuas en el intervalo cerrado I y no son simultáneamente nulas en el intervalo abierto (a, b) .
- (ii) La curva C es suave a trozos si esta formada por un número finito de curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_n unidas en cada uno de sus puntos finales, es decir, el punto final de la curva C_k coincide con el punto inicial de la siguiente curva $C_{k+1}, k \in \mathbb{N}$.
- (iii) La curva C es simple si no se cruza consigo misma, excepto quizás en $t = a$ y $t = b$.
- (iv) La curva C es cerrada si los puntos inicial y final son el mismo, es decir, $A = B$.
- (v) La curva C es simple y cerrada si no se cruza consigo misma y $A = B$.

Sean C_1 y C_2 dos curvas suaves en el plano complejo que se intersecan en z_0 , el ángulo que se forma entre C_1 y C_2 cuyo centro es z_0 se denota por $\angle C_1, C_2$, se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj de la recta tangente a C_1 que pasa por z_0 a la recta tangente a C_2 que pasa también por z_0 .

Definición 2.17 Sea $f(z)$ una función de variable compleja, definida en una vecindad de z_0 . La función $f(z)$ es conforme en z_0 si $f(z)$ “preserva ángulos”, es decir, para cada par de curvas suaves C_1 y C_2 que se intersecan en z_0 , $\angle C_1, C_2 = \angle \Gamma_1, \Gamma_2$, donde $\Gamma_1 = f(C_1)$ y $\Gamma_2 = f(C_2)$ (véase la Figura 2.5).

Ejemplo 2.9

La función $f(z) = z^2$ no es conforme en el punto $z = 0$, porque el eje real bajo la función $f(z)$ resulta ser el eje real positivo y el eje imaginario bajo $f(z)$ tiene como imagen al eje real negativo. En los demás puntos del plano complejo $f(z)$ es conforme.

Teorema 2.7 [Bak y Newman, 2010]. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f(z) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función, se dice que $f(z)$ es conforme en un punto $a \in \Omega$ si es analítica en a y $f'(a) \neq 0$. La función $f(z)$ se dice conforme en Ω si $f(z)$ es conforme en todo punto $a \in \Omega$.

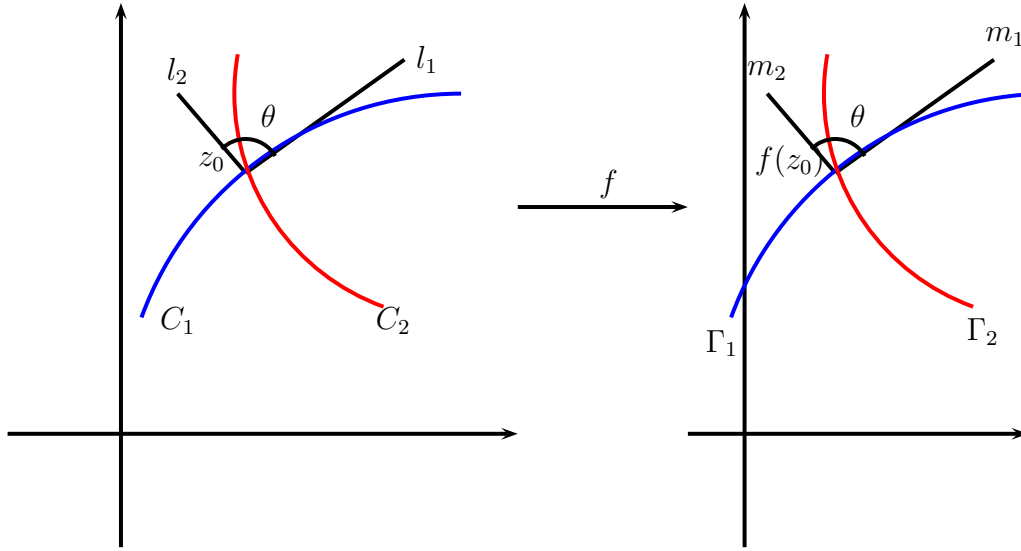


Figura 2.5: Función Conforme

Demostración: Sea $C : z(t) = x(t) + iy(t)$ una curva suave con $z(t_0) = z_0$. La recta tangente a C en el punto z_0 tiene la dirección de $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ de modo que su ángulo de inclinación con respecto al eje positivo de las equis es $\text{Arg } z'(t_0)$. Si el conjunto $\Gamma = f(C)$, entonces Γ está definida por $w(t) = f(z(t))$ y el ángulo de inclinación de esta recta tangente en $f(z_0)$ es igual a:

$$\text{Arg } w'(t_0) = \text{Arg}[f'(z_0)z'(t_0)] = \text{Arg } f'(z_0) + \text{Arg } z'(t_0),$$

por lo tanto, la función $f(z)$ transforma todas las curvas de z_0 de tal manera que los ángulos de inclinación se incrementan por la constante $\text{Arg } f'(z_0)$. Así, si C_1 y C_2 se intersecan en z_0 y Γ_1, Γ_2 son sus respectivas imágenes bajo $f(z)$, se sigue que $\angle \Gamma_1, \Gamma_2 = \angle C_1, C_2$ ■

Proposición 2.1 [Jones y Singerman, 2002]. La proyección estereográfica es una función conforme.

Demostración: Definamos a la proyección estereográfica por la función $\pi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$. Sea $P \in \mathbb{C}$, l_1 y l_2 dos rectas en \mathbb{C} que forman un ángulo θ en P , véase la figura 2.6. Si Π_j es el plano que pasa a través de N y l_j (para $j = 1, 2$), entonces $S^2 \cap \Pi_j$ es un círculo C_j en S^2 . Para todo

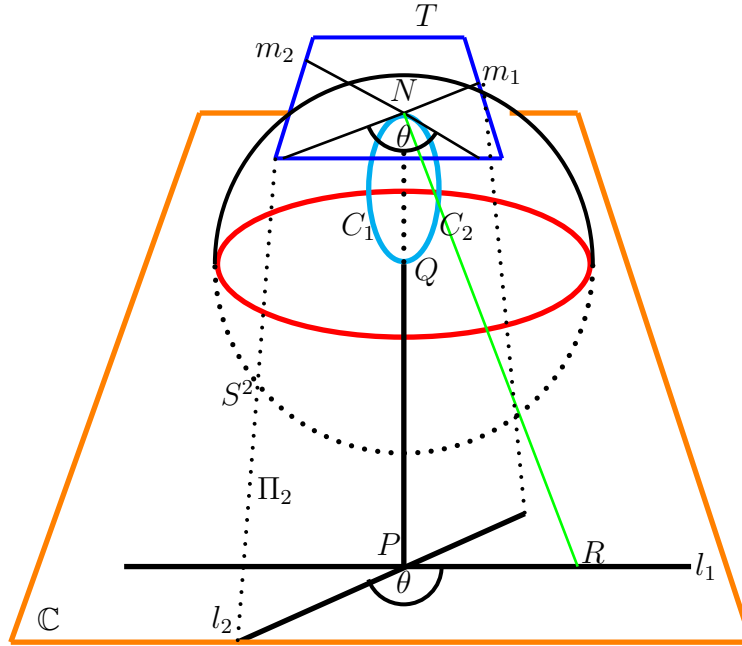


Figura 2.6: La proyección estereográfica es una función conforme.

R en l_j , la recta NR interseca a S^2 , entonces $\pi^{-1}(R) \in S^2 \cap \Pi_j$, de aquí se sigue que C_j es la proyección $\pi^{-1}(l_j) = C_j \setminus \{N\}$ del círculo $l_j \cup \{\infty\}$ en Σ (la esfera de Riemann). En particular C_1 y C_2 se intersecan en N y en Q , donde $Q = \pi^{-1}(P)$. El plano tangente T a S^2 en N es paralelo al plano ecuatorial \mathbb{C} de tal forma que las rectas $m_j = T \cap \Pi_j$ que se intersecan en N , son paralelas a $l_j = \mathbb{C} \cap \Pi_j$, por lo que se forma un ángulo θ en N . Los círculos C_j se intersecan con el mismo ángulo en sus puntos de intersección N y Q . Como C_1 y C_2 son transformadas en ellas mismas por la reflexión en el plano y biseca perpendicularmente al segmento QN , entonces m_j es tangente a C_j en N , este ángulo es θ , entonces $\pi^{-1}(l_1)$ y $\pi^{-1}(l_2)$ se intersecan con un ángulo θ en $Q = \pi^{-1}(P)$. ■

2.5.2. Conjugación Conforme

Definición 2.18 Sean U y V conjuntos abiertos en X . Decimos que $f : U \rightarrow U$ es conjugado de forma conforme a $g : V \rightarrow V$ si existe $\phi : U \rightarrow V$ aplicación conforme, tal que,

$$\phi \circ f = g \circ \phi. \quad (2.22)$$

La Ecuación (2.22) es llamada la ecuación de Schröder (véase la Figura 2.7).

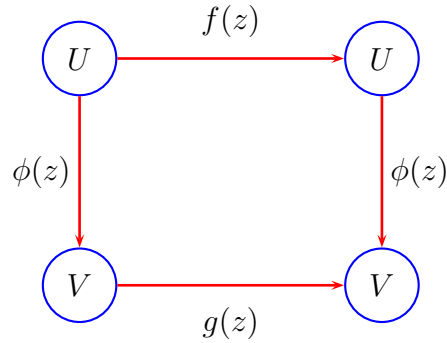


Figura 2.7: Si ϕ es conforme, entonces f y g son conformemente conjugadas.

Un ejemplo de funciones conformemente conjugadas es el siguiente:

Ejemplo 2.10

Afirmamos que el polinomio $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$ es conformemente conjugado a $g(z) = z^2 + c$.

En efecto, si $\phi(z) = Az + B$ es conforme, la función inversa $\phi^{-1}(z) = \frac{z - B}{A}$.

Ahora tomemos la siguiente composición:

$$(p \circ \phi^{-1})(z) = a_2 \left(\frac{z - B}{A} \right)^2 + a_1 \left(\frac{z - B}{A} \right) + a_0. \quad (2.23)$$

Aplicamos ϕ por la izquierda a la Ecuación (2.23) y tenemos:

$$(\phi \circ p \circ \phi^{-1})(z) = A \left[a_2 \left(\frac{z - B}{A} \right)^2 + a_1 \left(\frac{z - B}{A} \right) + a_0 \right] + B. \quad (2.24)$$

Por la Ecuación (2.24), la función $g(z)$ es de la siguiente forma:

$$g(z) = \frac{a_2}{A}z^2 - \frac{2Ba_2}{A}z + \frac{B^2a_2}{A} + a_1z - Ba_1 + Aa_0 + B.$$

Se sigue

$$z^2 + c = \left[\frac{a_2}{A} \right] z^2 + z \left[a_1 - \frac{2Ba_2}{A} \right] + \left[B + \frac{B^2a_2}{A} - Ba_1 + Aa_0 \right].$$

Así,

$$\frac{a_2}{A} = 1, \text{ así } a_2 = A.$$

Además,

$$a_1 - 2B = 0 \text{ implica } B = \frac{a_1}{2}, \quad \phi(z) = a_2z + \left(\frac{a_1}{2} \right),$$

y

$$B + \frac{B^2a_2}{A} - Ba_1 + Aa_0 = c.$$

Por lo tanto p y g son conformemente conjugadas.

2.6. Fórmula Integral de Cauchy

En esta sección enunciamos los teoremas de Cauchy-Goursat y la Fórmula Integral de Cauchy. Su demostración se puede encontrar en [Zill y Shanahan, 2003].

Teorema 2.8 (Cauchy-Goursat) *Supongamos que C, C_1, C_2, \dots, C_n son curvas cerradas simples con orientación positiva tales que C_1, C_2, \dots, C_n están en el interior de C pero el interior de cada C_k , con $k = 1, 2, \dots, n$ no tienen puntos en común. Si f es una función analítica en cada contorno y en cada punto interior de C pero es analítica en el exterior de cada C_k , con $k = 1, 2, \dots, n$, entonces*

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz. \quad (2.25)$$

Como consecuencia del Teorema 2.8 tenemos los siguientes resultados.

Corolario 2.1 *El valor de una función analítica f en un punto z_0 en un dominio simplemente conexo puede representarse por medio de una integral de línea.*

Corolario 2.2 *Si la función f es analítica en todos los puntos de una curva cerrada simple C , entonces $\oint_C f(z)dz = 0$.*

Ejemplo 2.11

Sea $f(z) = \frac{z}{2z+3}$ definida en la curva cerrada simple C , definida por el círculo unitario $|z| = 1$. La función f es analítica en todo C , el único punto donde f no es analítica es $z = \frac{-3}{2}$, pero $z \notin C$, luego por el Corolario 2.2, $\oint_C f(z)dz = 0$.

Si f es una función analítica en un dominio simplemente conexo D y z_0 es un punto de D , el cociente $\frac{f(z)}{z-z_0}$ no está definido en z_0 , por lo que no es analítica en D y no podemos concluir que la integral de $\frac{f(z)}{z-z_0}$ alrededor de una curva cerrada simple C que contiene a z_0 es cero por el Teorema 2.8. En su lugar, como veremos a continuación, la integral de $\frac{f(z)}{z-z_0}$ alrededor de C toma el valor de $2\pi i f(z_0)$.

Ahora enunciamos la Fórmula Integral de Cauchy.

Teorema 2.9 (Fórmula Integral de Cauchy) *Si f es una función analítica en un dominio simplemente conexo D y C es una curva cerrada simple contenida en D , entonces para cualquier punto $z_0 \in C$*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz. \quad (2.26)$$

Ejemplo 2.12

Evaluemos $\oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z+i} dz$, donde la curva cerrada simple C es el círculo $|z| = 2$.

Solución: Primero identifiquemos a $f(z) = z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$ y $z_0 = -i$ tal que $z_0 \in \text{int}(C)$. Luego, podemos observar que f es analítica en todos los puntos de C , excepto en la frontera. Por la Fórmula Integral de Cauchy obtenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Así,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0).$$

Sustituyendo en la segunda parte de la igualdad resulta $2\pi i(-i - 2)^2$. Haciendo operaciones tenemos

$$2\pi i(-1 + 4i + 4) = 2\pi i(3 + 4i) = 6\pi i - 8\pi = 2\pi(-4 + 3i).$$

Por lo tanto $\oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} = 2\pi(-4 + 3i)$.

2.7. Singularidades de una Función

En esta sección se estudian las funciones de variable compleja en los puntos de su dominio donde la función no es analítica; estos puntos se llaman singularidades y de manera particular aparecen cuando una función racional $\frac{f(z)}{g(z)}$ tiene ceros en el denominador (es decir, los puntos donde no está definida la función $g(z)$ serán las singularidades de esta función racional).

Definición 2.19 Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja, $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que f no es analítica en z_0 . Decimos que el punto z_0 es un punto singular o una singularidad de f .

Los puntos singulares se pueden clasificar en aislados y no aislados.

Definición 2.20 Una función f de variable compleja tiene una singularidad aislada en $z_0 \in \mathbb{C}$ si f no es analítica en z_0 y existe $\delta > 0$ tal que f está definida y es analítica en $V_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Si z_0 es una singularidad aislada de f , entonces z_0 se clasifica de la siguiente forma:

- (i) **Singularidad removible.** Una singularidad aislada z_0 de $f(z)$ es una singularidad removible si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe y pertenece a \mathbb{C} .
- (ii) **Polo.** Una singularidad aislada z_0 de $f(z)$ es un polo si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

- (iii) **Singularidad esencial.** Es una singularidad aislada que no es removible ni polo.

Definición 2.21 *La función f tiene un polo de orden n , con $n > 0$ en el punto z_0 si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot (z - z_0)^n$ existe y es diferente de cero. Tenemos que:*

- *El punto z_0 es un polo de orden n .*
- *Si $n = 1$, el punto z_0 es un polo simple.*
- *Si el punto z_0 es un polo de $g(z) = z$, entonces z_0 es un polo de $g^{-1}(z) = \frac{1}{z}$.*

A continuación se presentan algunos ejemplos de singularidades aisladas.

Ejemplo 2.13

Determinar las singularidades de las funciones: $f(z) = \frac{1}{z}$ y $g(z) = \frac{4z}{z^2 + 1}$.

La función $f(z)$ tiene una singularidad aislada en cero, porque para cualquier vecindad de cero, no existe otra singularidad de $f(z)$. La función $g(z)$ tiene un par de singularidades aisladas en i y en $-i$. Si tomamos $\delta = \frac{1}{2}$, entonces $|z - i| < \delta$ y $|z + i| < \delta$ no contienen ningún otro punto singular distinto a i y $-i$.

Ejemplo 2.14

Determinar las singularidades de la siguiente función:

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{z}}.$$

La función anterior tiene singularidades aisladas en $k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$. También, el origen es una singularidad de esta función, que es aislada.

Capítulo 3

El Grupo de las Transformaciones de Möbius

En este capítulo enunciamos las definiciones de grupo, transformaciones elementales y transformación de Möbius. Demostramos que el conjunto de las transformaciones de Möbius es un grupo. Estos temas se pueden consultar en [Fraleigh, 2003], [Herstein, 1996],[Lang, 2002] y [Rotman, 1995].

3.1. Grupos

Definición 3.1 Una operación binaria $*$ definida en un conjunto S es una función que va de $S \times S$ a S , tal que para todo $(a, b) \in S \times S$, el elemento $*((a, b)) = a * b$ pertenece a S y es único.

Ejemplo 3.1

La suma usual $(+)$ es una operación binaria en \mathbb{R} . La multiplicación usual (\times) es una operación binaria en \mathbb{R} .

Definición 3.2 Una estructura algebraica es el par $(X, *)$, donde X es un conjunto y $*$ es una operación binaria.

Definición 3.3 Un grupo $(G, *)$ es una estructura algebraica, donde la operación binaria cumple con las siguientes propiedades:

- (1) (Propiedad Asociativa). Para todo $x, y, z \in G$ tenemos que $(x * y) * z = x * (y * z)$.

- (2) (*Existencia de elemento neutro*). Existe un elemento $e \in G$ tal que para todo $x \in G$, $e * x = x * e = x$.
- (3) (*Elemento inverso*). Para todo $x \in G$ existe x' tal que $x \cdot x' = x' \cdot x = e$.

A continuación se presentan ejemplos de grupos.

Ejemplo 3.2

- (1) El conjunto de los números complejos \mathbb{C} con el producto usual es un grupo.
- (2) Sea $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ un conjunto con 4 elementos. El par $(\mathbb{Z}_4, +)$ es un grupo, donde la operación binaria $+$ está definida como se muestra en la Tabla 3.1:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabla 3.1: Grupo \mathbb{Z}_4

Definición 3.4 Sea $(G, *)$ un grupo y $H \subset G$. El subconjunto H es un subgrupo de $(G, *)$ si cumple con las siguientes condiciones:

- (a) H es diferente del vacío.
- (b) H preserva la operación binaria de G , es decir, $a * b \in H$ para todo $a, b \in H$.
- (c) $x^{-1} \in H$ para todo $x \in H$.

Definición 3.5 El producto a^n se define como: $a^n = \underbrace{a * a * a \dots * a}_{n \text{ veces}}$.

Ejemplo 3.3

Las n -raíces de la unidad denotadas por U_n forman un subgrupo del grupo de los números complejos diferentes de cero $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bajo la multiplicación usual en \mathbb{C} .

Ejemplo 3.4

El conjunto de matrices complejas de 2×2 con determinante igual a 1 con operación el producto de matrices es un grupo.

Teorema 3.1 [Fraleigh, 2003]. Si G es un grupo y $a \in G$, entonces $H = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de G , y H es el subgrupo más pequeño que contiene al elemento a .

3.2. Grupo Cíclico

Definición 3.6 Si G es un grupo y $a \in G$, entonces el subgrupo $\{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ de G es llamado el subgrupo cíclico de G generado por a , y se denota por $\langle a \rangle$.

Definición 3.7 Si G es un grupo y $a \in G$, entonces a es un generador de G si $\langle a \rangle = G$. Un grupo G es cíclico si existe $a \in G$ generador de G .

Ejemplo 3.5

Sea $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ un grupo. La tabla de \mathbb{Z}_4 es la siguiente:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabla 3.2: Grupo \mathbb{Z}_4

Tenemos que 1 y 3 son generadores, es decir, $\langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \mathbb{Z}_4$. Por lo tanto, \mathbb{Z}_4 es un grupo cíclico.

Ejemplo 3.6

Sea $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$ el grupo formado por las raíces cuartas de la unidad en \mathbb{C} con operación binaria y la multiplicación usual en \mathbb{C} . El grupo U_4 es un grupo cíclico porque i es un generador de G , esto es:

$$\begin{aligned}i \cdot i &= i^2 = -1, \\i \cdot i &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i, \\i \cdot i &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1, \\i \cdot i &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1 \cdot i = i.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\langle i \rangle = G$.

3.3. Grupo Abeliano

Definición 3.8 Sea $(G, *)$ un grupo. Decimos que G es un grupo abeliano si para todo $a, b \in G$ $a * b = b * a$.

A continuación tenemos algunos ejemplos de grupos abelianos.

Ejemplo 3.7

El par $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano.

Ejemplo 3.8

El grupo de matrices $n \times n$ con coeficientes reales o complejos y con operación binaria la suma de matrices es un grupo abeliano.

3.4. Clases Laterales, Grupo Normal y Grupo Cociente

Definición 3.9 Para un subgrupo H de un grupo G , definimos como clase lateral derecha de H en G el conjunto de todos los elementos de la forma ha , con $h \in H$ y $a \in G$. De manera análoga se define la clase lateral izquierda como el conjunto de todos los elementos de la forma ah , con $h \in H$ y $a \in G$.

Ejemplo 3.9

Sea $G = S_3$, el grupo de todas las aplicaciones biyectivas del conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ sobre sí mismo. El grupo G es de orden 6, sea H el subgrupo $\{e, \phi\}$. Existen tres clases laterales derechas de H en G y tres clases laterales izquierdas de H en G .

Derechas	Izquierdas
$H = \{e, \phi\}$	$H = \{e, \phi\}$.
$H\psi = \{\psi, \phi\psi\}$	$\psi H = \{\psi, \psi\phi = \phi\psi^2\}$
$H\psi^2 = \{\psi^2, \phi\psi^2\}$	$\psi^2 H = \{\psi^2, \psi^2\phi = \phi\psi\}$.

Tabla 3.3: Clases laterales de H

Definición 3.10 *Un subgrupo N de G se dice que es un subgrupo normal de G si para toda $g \in G$ y toda $n \in N$, $gng^{-1} \in N$.*

Lema 3.1 *Un subgrupo N de G es un subgrupo normal de G si y sólo si el producto de dos clases laterales derechas de N en G es de nuevo una clase lateral derecha de N en G .*

Definición 3.11 *La colección de clases laterales derechas de N en G es el grupo cociente o grupo factor de G por N y se denota por $\frac{G}{N}$.*

Teorema 3.2 *Si G es un grupo y N es un subgrupo normal de G , entonces $\frac{G}{N}$ es también un grupo.*

3.5. Homomorfismos e Isomorfismos entre Grupos

Definición 3.12 *Una función $\phi : G \rightarrow G'$ definida de un grupo G a otro grupo G' es un homomorfismo si cumple con la siguiente propiedad*

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \tag{3.1}$$

para todo $a, b \in G$.

Ejemplo 3.10

Sea G el grupo de los enteros con operación binaria la suma usual, tomemos $G = G'$. Para todo entero $x \in G$, definimos ϕ por $\phi(x) = 2x$. Definido de esta manera, ϕ es un homomorfismo, porque:
 $\phi(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = \phi(x) + \phi(y)$.

Definición 3.13 Sea $\phi : G \rightarrow G'$ un homomorfismo de grupos. El subgrupo $\phi^{-1}[\{e'\}] = \{x \in G : \phi(x) = e'\}$ es el núcleo de ϕ .

Definición 3.14 Sean G y G' grupos. Un homomorfismo $\phi : G \rightarrow G'$ es un isomorfismo si ϕ es uno a uno.

Definición 3.15 Dos grupos G y G' son isomorfos si existe un isomorfismo ϕ de G sobre G' , es decir, que la función ϕ , además de ser uno a uno, debe ser sobreyectiva. Y lo denotamos por $G \approx G'$.

Ejemplo 3.11

Los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y (\mathbb{R}, \cdot) son isomorfos bajo la función $\phi(x^{a+b}) = \phi(x^a)\phi(x^b)$.

3.6. Transformaciones Elementales

En este apartado definimos las transformaciones elementales, que son: la traslación, la rotación, la homotecia (contracción y expansión), la inversión compleja y la reflexión. A partir de las transformaciones elementales, definiremos en la Sección 3.7 a las transformaciones de Möbius.

- (1) La traslación: $T(z) = z + b$, con $b \neq 0$.
- (2) La rotación: es una transformación que fija un punto en el plano complejo y a partir de ahí se gira todo el plano un cierto ángulo θ . Se define por:

$$\mathcal{R}(x + iy) = x(\cos \theta, \sen \theta) + iy(-\sen \theta, \cos \theta),$$

que es igual a:

$$\mathcal{R}(x + iy) = x \cos \theta - y \sen \theta + i(x \sen \theta + y \cos \theta).$$

Otra forma de escribir una rotación es $\mathcal{R}(z) = az$, con $|a| = 1$. Como al multiplicar dos números complejos, se suman los argumentos y se multiplican las normas, en este caso las normas no cambian, pues $|a| = 1$ y esta función es una rotación por un ángulo igual al argumento de $a \in \mathbb{C}$. Utilizando la forma polar de un número complejo, una rotación se puede describir como: $z \mapsto e^{i\theta}z$.

(3) La homotecia: $\mathcal{H}(z) = az$ con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b = c = 0$ y $d = 1$. Como a es real, al multiplicar por z el argumento no cambia y la norma de z se multiplica por a . La función \mathcal{H} es una expansión uniforme del plano si $a > 1$ ó es una contracción si $0 < a < 1$. En general, la multiplicación por un número complejo $a \neq 0$, $z \rightarrow az$ es una homotecia y una rotación.

(4) La inversión compleja: $inv(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ es aquella donde el círculo unitario es llevado fuera bajo la función inv y el exterior del círculo es llevado al interior del círculo precisamente. La función $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida como $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ es una inversión respecto al círculo unitario con centro en el origen S^1 .

Si $z_1 \in \hat{\mathbb{C}}$ y $|z_1| < 1$, es decir, si z_1 es punto interior de S^1 , entonces $f(z_1) = w_1$ es un punto exterior de S^1 , si $z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ y $|z_2| > 1$, entonces $f(z_2) = w_2$ es un punto interior de S^1 , además $f(0) = \infty$ y $f(\infty) = 0$.

(5) La reflexión bajo el eje X no es más que la función conjugado, para $z \in \mathbb{C}$. $\mathcal{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{Re}(z) = \bar{z}$.

3.7. El Grupo de las Transformaciones de Möbius

En este apartado estudiamos lo que es una transformación de Möbius, demostraremos que bajo la composición de funciones, el conjunto de las transformaciones de Möbius es un grupo. También, presentamos algunos ejemplos que se pueden encontrar en [Seade, 2006] y [Zill y Shanahan, 2003].

Definición 3.16 Si $a, b, c, d, z \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$, entonces la función de variable compleja definida por:

$$\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (3.2)$$

es una transformación de Möbius.

El conjunto de las transformaciones de Möbius lo denotamos por \mathcal{M} y lo definimos de la siguiente forma:

$$\mathcal{M} = \left\{ z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Algunos ejemplos de transformaciones de Möbius son los siguientes:

Ejemplo 3.12

- (1) Sea $\mathcal{T}(z) = \frac{z - i}{iz - 1}$, tenemos que $1(-1) - (-i)(i) = -1 - (-i^2) = -2 \neq 0$, donde $a = 1, b = -i, c = i$ y $d = -1 \in \mathbb{C}$, por lo tanto $\mathcal{T} \in \mathcal{M}$.
- (2) Sea $\mathcal{T}(z) = 5z + 8$, $b = 8$. En este caso $a = 5, c = 0$ y $d = 1 \in \mathbb{C}$, por lo tanto $\mathcal{T} \in \mathcal{M}$.
- (3) Sea $\mathcal{T}(z) = az$, $|a| = 1$. Como al multiplicar dos números complejos se suman los argumentos y se multiplican las normas, estas no cambian, pues $|a| = 1$; en este caso $b = c = 0$ y $d = 1 \in \mathbb{C}$, por lo tanto $\mathcal{T} \in \mathcal{M}$.

Ejemplo 3.13

Encuentra las imagenes de los puntos $0, 1+i, i$ e ∞ bajo la transformación de Möbius $\mathcal{T}(z) = \frac{2z + 1}{z - i}$.

Solución: Para $z = 0$ y $z = 1 + i$ se tiene: $\mathcal{T}(0) = \frac{2(0) + 1}{(0) - i} = \frac{1}{-i} = i$ y

$$\mathcal{T}(1 + i) = \frac{2(1 + i) + 1}{(1 + i) - i} = \frac{3 + 2i}{1} = 3 + 2i.$$

$$\text{Para } z = i \text{ se tiene: } \mathcal{T}(i) = \frac{2(i) + 1}{(i) - i} = \frac{2i + 1}{0} = \infty.$$

Para $z = \infty$ se tiene: $\mathcal{T}(z) = \frac{2z + 1}{z - i}$, el valor de $a = 2, b = 1, c = 1$ y $d = -i$,

definimos $\mathcal{T}(\infty) = \frac{a}{c}$, entonces, $\mathcal{T}(\infty) = \frac{2}{1} = 2$.

Teorema 3.3 *Toda transformación de Möbius es una composición de las transformaciones elementales.*

Demostración: Si $\mathcal{T}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es una transformación de Möbius, entonces $\mathcal{T}(z)$ se puede expresar como la siguiente composición de funciones.

Si $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$, $\mathcal{R}(z) = c^2z$, $inv(z) = \frac{1}{z}$, $\mathcal{H}(z) = (bc - ad)(z)$, $T_2(z) = \frac{a}{c} + z$ son transformaciones elementales, entonces

$$\begin{aligned} (T_2 \circ \mathcal{H} \circ inv \circ \mathcal{R} \circ T_1)(z) &= T_2 \circ \mathcal{H} \circ inv \circ \mathcal{R}(T_1(z)) = T_2 \circ \mathcal{H} \circ inv \left(\mathcal{R} \left(z + \frac{d}{c} \right) \right) = \\ T_2 \circ \mathcal{H} \circ inv \left(c^2 \left(z + \frac{d}{c} \right) \right) &= T_2 \circ \mathcal{H} \circ inv(c^2z + dc) = T_2 \circ \mathcal{H} \left(\frac{1}{c^2z + dc} \right) = \\ T_2 \left(\frac{bc - ad}{c(cz + d)} \right) &= \frac{a}{c} + \left(\frac{bc - ad}{c(cz + d)} \right) = \frac{az + b}{cz + d}. \end{aligned}$$

■

Proposición 3.1 *La transformación de Möbius $\mathcal{T}(z)$ es una función biyectiva.*

Demostración: Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, tal que $ad - bc \neq 0$. Primero demostraremos que $\mathcal{T}(z)$ es inyectiva y después que $\mathcal{T}(z)$ es sobreyectiva.

(1) Supongamos que $\mathcal{T}(z_1) = \mathcal{T}(z_2)$, por demostrar que $z_1 = z_2$. Tomemos

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d},$$

aplicando los productos cruzados obtenemos:

$$(az_1 + b)(cz_2 + d) = (az_2 + b)(cz_1 + d),$$

$$acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd = acz_1z_2 + adz_2 + bcz_1 + bd.$$

Cancelando los términos semejantes e igualando a cero, obtenemos lo siguiente:

$$ad(z_1 - z_2) - bc(z_1 - z_2) = 0.$$

Factorizando el término $(z_1 - z_2)$, obtenemos:

$$(z_1 - z_2)(ad - bc) = 0,$$

pero sabemos que $ad - bc \neq 0$, así

$$z_1 - z_2 = 0,$$

entonces

$$z_1 = z_2.$$

Por lo tanto, $\mathcal{T}(z)$ es inyectiva.

- (2) Para demostrar que $\mathcal{T}(z)$ es sobreyectiva, tomemos $w \in \mathbb{C}$, debemos mostrar que existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{T}(z) = w$.

Si

$$\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d} = w,$$

entonces

$$az + b = czw + dw.$$

Igualando a cero y factorizando a z , obtenemos:

$$z(a - cw) + b - dw = 0.$$

Despejando a z , observamos que es de la forma:

$$z = \frac{-b + dw}{a - cw} \in \mathbb{C} \quad \text{con} \quad ad - bc \neq 0.$$

Por lo tanto, $\mathcal{T}(z)$ es sobreyectiva.

Como $\mathcal{T}(z)$ es inyectiva y sobreyectiva, se tiene que $\mathcal{T}(z)$ es biyectiva.

Proposición 3.2 Si $\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{bz + d}$ es una transformación de Möbius, entonces $\mathcal{T}^{-1}(w) = \frac{-b + dw}{a - cw}$ es la función inversa de $\mathcal{T}(z)$. ■

Demostración: Por (2) en la demostración de la Proposición 3.1, la función inversa de $\mathcal{T}(z)$ es:

$$\mathcal{T}^{-1}(w) = \frac{-b + dw}{a - cw} = z. \quad (3.3)$$

Proposición 3.3 La composición de dos transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius. ■

Demostración: Si $\mathcal{T}_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$ y $\mathcal{T}_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$ son transformaciones de Möbius, entonces: $a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$ y $a_2d_2 - b_2c_2 \neq 0$.

Tomemos la composición de \mathcal{T}_1 con \mathcal{T}_2 :

$$(\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2)(z) = \mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2(z)) = \mathcal{T}_1\left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}\right) = \frac{a_1\left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}\right) + b_1}{c_1\left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}\right) + d_1}.$$

Haciendo cálculos obtenemos:

$$(\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2)(z) = \frac{(a_1a_2z + a_1b_2) + b_1c_2z + b_1d_2}{c_2z + d_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}.$$

$$\frac{c_1a_2z + c_1b_2 + d_1c_2z + d_1d_2}{c_2z + d_2}$$

Asociamos términos y, tomando $a = (a_1a_2 + b_1c_2)$, $b = (a_1b_2 + b_1d_2)$, $c = (c_1a_2 + d_1c_2)$ y $d = (c_1b_2 + d_1d_2)$, demostraremos que $ad - bc \neq 0$. Si $(a_1a_2 + b_1c_2)(c_1b_2 + d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1d_2)(c_1a_2 + d_1c_2) = (a_1a_2c_1b_2 + a_1a_2d_1d_2) + (b_1c_2c_1b_2 + b_1c_2d_1d_2) - (a_1b_2c_1a_2 + a_1b_2d_1c_2) + (b_1d_2c_1a_2 + b_1d_2d_1c_2)$.

Eliminamos los términos $a_1a_2c_1b_2 - a_1b_2c_1a_2$ y $b_1c_2d_1d_2 - b_1d_2d_1c_2$ y obtenemos:

$$a_1a_2d_1d_2 + b_1c_2c_1b_2 - (a_1b_2d_1c_2 + b_1d_2c_1a_2),$$

asociando se obtiene:

$$a_1d_1(a_2d_2 - b_2c_2) - b_1c_1(a_2d_2 - b_2c_2) = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) \neq 0,$$

porque $a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$ y $a_2d_2 - b_2c_2 \neq 0$.

Así, $(\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2)(z)$ es una transformación de Möbius. ■

Se ha demostrado que la composición de transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius. A continuación demostraremos que el conjunto de las transformaciones de Möbius \mathcal{M} es un grupo bajo la composición de funciones.

Proposición 3.4 *El par (\mathcal{M}, \circ) es un grupo.*

Demostración: Por la Proposición 3.3, el conjunto (\mathcal{M}, \circ) es cerrado bajo la composición de funciones.

(1) (Propiedad Asociativa) Sean $\mathcal{T}_1(z), \mathcal{T}_2(z), \mathcal{T}_3(z)$ transformaciones de Möbius.

Tomemos la composición $[\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2] \circ \mathcal{T}_3$.

Desarrollando la parte entre corchetes:

$$\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2(z) = \mathcal{T}_1\left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}\right),$$

aplicando \mathcal{T}_1 a lo que está dentro del parentésis,

$$\frac{a_1\left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}\right) + b_1}{c_1\left(\frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}\right) + d_1},$$

realizando operaciones en el numerador y en el denominador de la fracción anterior, y asociando términos semejantes obtenemos:

$$\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_1 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}.$$

La composición anterior de \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 , es una transformación de Möbius por la Proposición 3.3, ahora falta hacer la composición con \mathcal{T}_3 .

$$[\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2] \circ \mathcal{T}_3 = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2) \left(\frac{a_3z + b_3}{c_3z + d_3} \right) + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_1 + d_1c_2) \left(\frac{a_3z + b_3}{c_3z + d_3} \right) + (c_1b_2 + d_1d_2)},$$

desarrollamos la fracción anterior y, asociando términos, obtenemos la siguiente transformación de Möbius:

$$\frac{(a_1a_2a_3 + b_1c_2a_3 + a_1b_2c_3 + b_1d_2c_3)z + (a_1a_2b_3 + b_1c_2b_3 + a_1b_2d_3 + b_1d_2d_3)}{(c_1a_2a_3 + d_1c_2a_3 + c_1b_2c_3 + d_1d_2c_3)z + (c_1a_2b_3 + d_1c_2a_3 + c_1b_2d_3 + d_1d_2d_3)}, \quad (3.4)$$

la Ecuación (3.4) es la composición $[\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2] \circ \mathcal{T}_3$. Ahora debemos demostrar que es igual a: $\mathcal{T}_1 \circ [\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_3]$.

Primero hagamos la composición de $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_3$:

$$\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_3 = \left(\frac{a_3z + b_3}{c_3z + d_3} \right).$$

Evaluando lo que está dentro del paréntesis bajo \mathcal{T}_2 , obtenemos:

$$\frac{a_2 \left(\frac{a_3z + b_3}{c_3z + d_3} \right) + b_2}{c_2 \left(\frac{a_3z + b_3}{c_3z + d_3} \right) + d_2}. \quad (3.5)$$

Desarrollamos la Ecuación (3.5), asociamos términos para obtener la siguiente transformación de Möbius:

$$\frac{(a_2a_3 + b_2c_3)z + (a_2b_3 + b_2d_3)}{(c_2a_3 + d_2c_3)z + (c_2b_3 + d_2d_3)}. \quad (3.6)$$

Ahora, aplicando \mathcal{T}_1 a la Ecuación (3.6), obtenemos:

$$\mathcal{T}_1 \circ [\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_3] = \frac{a_1 \frac{(a_2 a_3 + b_2 c_3)z + (a_2 b_3 + b_2 d_3)}{(c_2 a_2 + d_2 c_3)z + (c_2 b_3 + d_2 d_3)} + b_1}{c_1 \frac{(a_2 a_3 + b_2 c_3)z + (a_2 b_3 + b_2 d_3)}{(c_2 a_3 + d_2 c_3)z + (c_2 b_3 + d_2 d_3)} + d_1}.$$

Realizando los productos y asociando términos en z , se obtiene:

$$\frac{(a_1 a_2 a_3 + a_1 b_2 b_3 + b_1 c_2 a_3 + b_1 d_2 c_3)z + (a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 d_3 + b_1 c_2 b_3 + b_1 d_2 d_3)}{(c_1 a_2 a_3 + c_1 b_2 c_3 + d_1 c_2 a_3 + d_1 d_2 c_3)z + (c_1 a_2 b_3 + c_1 b_2 d_3 + d_1 c_2 b_3 + d_1 d_2 d_3)}. \quad (3.7)$$

La Ecuación (3.7) es igual a la Ecuación (3.4), por lo tanto (\mathcal{M}, \circ) es asociativa.

- (2) (Existencia de la identidad) La función $id(z) = z$ es una transformación de Möbius, basta tomar $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ y $d = 1$, $id(z)$ es la función identidad, ya que para $\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ es una transformación de Möbius, $id \circ \mathcal{T} = \mathcal{T} \circ id = \mathcal{T}$.
- (3) (Inverso) La existencia del inverso viene precedida por la Proposición 3.2. Si $\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ es una transformación de Möbius, entonces existe $\mathcal{T}^{-1}(w) = \frac{-b + dw}{a - cw}$ tal que $\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{T} = id$.

De (1), (2) y (3) se concluye que (\mathcal{M}, \circ) es un grupo. ■

A partir de ahora al par (\mathcal{M}, \circ) lo denotaremos solamente como \mathcal{M} y se entenderá que es un grupo bajo la composición de funciones.

Capítulo 4

Algunos Resultados de las Transformaciones de Möbius

En este capítulo estudiamos algunas propiedades de las transformaciones de Möbius, entre ellas (i) la propiedad homocíclica, es decir, bajo transformaciones de Möbius, rectas van a rectas o a circunferencias, y circunferencias van a rectas o a circunferencias y (ii) la conformidad. También, se estudian algunas conjugaciones, se define la razón cruzada y los puntos fijos de una transformación de Möbius. Los temas en este capítulo se pueden encontrar en [Zill y Shanahan, 2003], [Needham, 2000] y [Anderson, 1999].

4.1. Propiedad Homocíclica

Definición 4.1 *Una función $f(z)$ definida del plano extendido al plano extendido $f(z) : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, que lleve círculos a círculos (o rectas consideradas como círculos) se denomina una transformación circular u homocíclica.*

Teorema 4.1 *La transformación de Möbius $\mathcal{T} \in \mathcal{M}$ tiene la propiedad homocíclica (o circular).*

Demostración:

La ecuación general de una circunferencia en \mathbb{R}^2 está dada por la ecuación

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + d = 0. \quad (4.1)$$

- (1) Si $A = 0$, B y C no son simultáneamente cero, entonces la Ecuación (4.1) queda de la siguiente forma:

$$2Bx + 2Cy + D = 0. \quad (4.2)$$

La Ecuación (4.2) representa a una recta.

- (2) Si $A \neq 0$, la Ecuación (4.1) queda de la siguiente forma:

$$(Ax^2 + 2Bx) + (Ay^2 + Cy) + D = 0,$$

asociando x^2 y y^2 , completando cuadrados y agregando los elementos extra del otro lado de la igualdad, obtenemos:

$$\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{A}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 - AD}{A^2}. \quad (4.3)$$

Haciendo un cambio de variable en la Ecuación (4.3) y tomando $z = x + iy$, queda:

$$z\bar{z} = x^2 + y^2, \quad z + \bar{z} = 2x \quad y \quad -i(z - \bar{z}) = 2y.$$

Sustituyendo en la Ecuación (4.1), obtenemos lo siguiente:

$$A(z\bar{z}) + B(z + \bar{z}) + C(-i(z - \bar{z})) + D = 0. \quad (4.4)$$

Por la Ecuación (4.4) se tiene $E = B + iC$, $\bar{E} = B - iC$ tal que

$$Az\bar{z} + z\bar{E} + \bar{z}E + D = 0. \quad (4.5)$$

- (3) Si $A = 0$ y $E \neq 0$, la Ecuación (4.5) representa una recta.
 (4) Si $A \neq 0$ y $E \neq 0$, entonces la Ecuación (4.5) es una circunferencia.

Definamos la función inversión $inv : \mathbb{C}/\{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ como: $inv(z) = \frac{1}{z} = w$.

Obtengamos la imagen de una recta bajo inv , para tal fin, sustituyamos z por $\frac{1}{w}$ en la Ecuación (4.5), así:

$$A \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\bar{w}} + \frac{1}{w} \bar{E} + \frac{1}{\bar{w}} E + D = 0.$$

Donde

$$Dw\bar{w} + Ew + \bar{E}w + A = 0. \quad (4.6)$$

Las Ecuaciones (4.5) y (4.6) tienen la misma forma.

(5) Si $D = 0$, la Ecuación (4.6) representa una recta

(6) Si $D \neq 0$, entonces la Ecuación (4.6) es una circunferencia.

Lo anterior nos dice que la imagen de una recta o de una circunferencia bajo la inversión $\frac{1}{z} = w$ es una recta o una circunferencia.

Tomemos $\mathcal{T} \in \mathcal{M}$, tal que $\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. Hagamos la siguiente transformación:

$$\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}.$$

Esta transformación se puede ver como composición de tres transformaciones, las cuales son:

$$\mathcal{T}_1(z) = cz + d, \quad \mathcal{T}_2(z) = \frac{1}{z} \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_3(z) = \frac{a}{c} + z \left(\frac{bc - ad}{c} \right),$$

luego

$$\mathcal{T}(z) = \mathcal{T}_3 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1(z) = \mathcal{T}_3 \circ \mathcal{T}_2(cz + d) = \mathcal{T}_3 \left(\frac{1}{cz + d} \right) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}.$$

La imagen de una recta o una circunferencia bajo las transformaciones \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 y \mathcal{T}_3 es una recta o una circunferencia, la composición $\mathcal{T}_3 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1(z) = \mathcal{T}$ también cumple esta propiedad. Con esto la propiedad homocíclica queda demostrada. ■

El siguiente es un ejemplo de la propiedad homocíclica.

Ejemplo 4.1

Encuentre la imagen del círculo unitario $|z| = 1$, bajo la transformación de Möbius $\mathcal{T}(z) = \frac{z+2}{z-1}$. ¿Cuál es la imagen del interior de $|z| < 1$ de este círculo?

Solución: El polo de $\mathcal{T}(z)$ es $z = 1$, que está en el círculo unitario $|z| = 1$. Por el Teorema 4.1, su imagen es una recta, la cual puede ser determinada por dos de sus puntos, ya que: $\mathcal{T}(-1) = -\frac{1}{2}$ y $\mathcal{T}(i) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, vemos en la Figura 4.2 que la imagen es la recta $u = -\frac{1}{2}$. Para responder la segunda pregunta, notemos que la transformación \mathcal{T} es una función racional, por lo tanto es continua en su dominio de definición, como consecuencia, la imagen del interior de $|z| < 1$ el círculo unitario es el semiplano $u < -\frac{1}{2}$ o el semiplano $u > -\frac{1}{2}$; utilizando $z = 0$ como punto de prueba, vemos que $\mathcal{T} = -2$ que está a la izquierda de la recta $u = -1$ y su imagen es el semiplano $u < -\frac{1}{2}$; la Figura 4.2 muestra esta transformación. El círculo $|z| = 1$ está en la Figura 4.1 y su imagen $u = -\frac{1}{2}$ se muestra en la Figura 4.2.

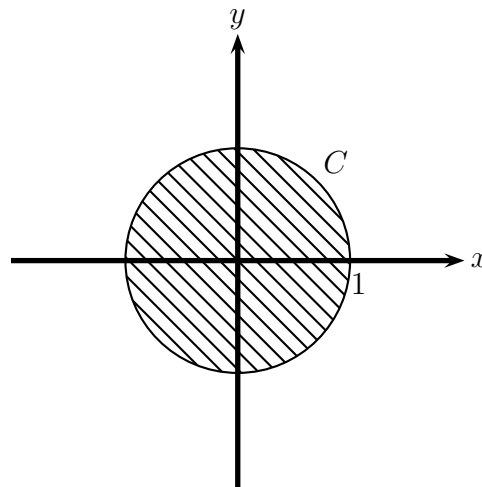


Figura 4.1: El círculo unitario $|z| = 1$ y el interior $|z| < 1$

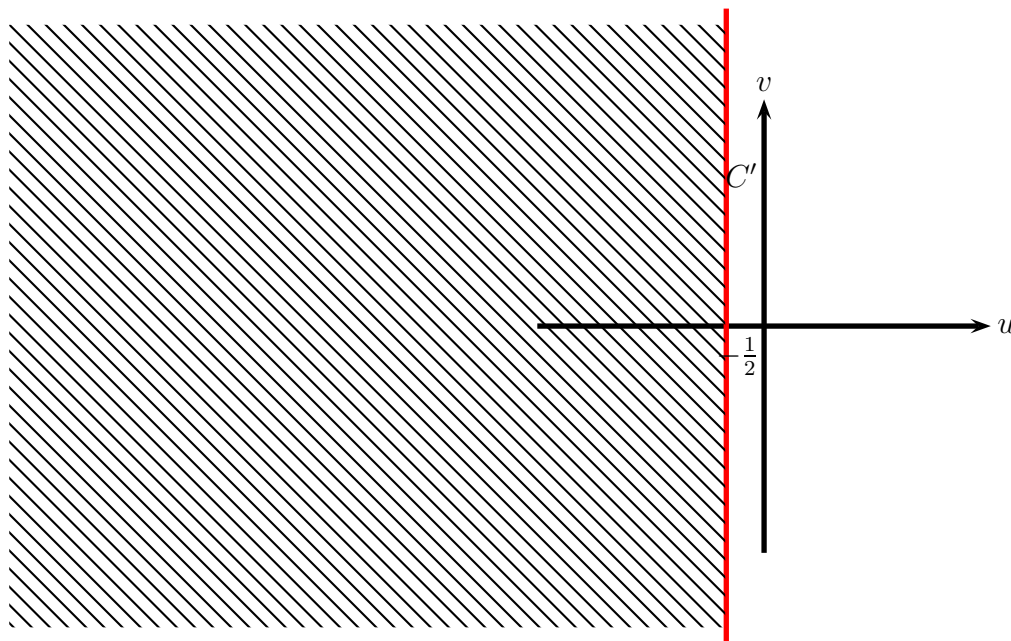


Figura 4.2: La transformación lineal $\mathcal{T}(z) = \frac{z+2}{z-1}$

4.2. Las Transformaciones de Möbius son Conformes

Si $\mathcal{T}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es una transformación de Möbius, la condición $ad-bc \neq 0$ asegura que \mathcal{T} no es igual a una constante y está bien definida.

Proposición 4.1 *Las transformaciones de Möbius son aplicaciones conformes.*

Demostración: Si $\mathcal{T}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es una transformación de Möbius, entonces $\mathcal{T}'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$, porque $ad-bc \neq 0$ y $\mathcal{T}(z)$ es analítica por ser una composición de funciones analíticas, (véase el Teorema 2.6 y el Teorema 3.3). ■

4.3. La Razón Cruzada

Las transformaciones de Möbius son aplicaciones conformes que podemos definir en un dominio D que esté acotado por círculos sobre un dominio D' que esté acotado por rectas. Sin embargo, con el fin de utilizarlas, debemos determinar de manera general un método para construir transformaciones de Möbius $\mathcal{T}(z) = w$, para ello tomamos tres puntos distintos, z_1, z_2 y $z_3 \in \partial D$, los cuales, bajo $\mathcal{T}(z)$ tienen como imagen a tres puntos diferentes w_1, w_2 y $w_3 \in \partial D'$. Esto se logra usando la razón cruzada que se define como sigue.

Definición 4.2 *Los puntos que satisfacen $\mathcal{T}(z) = z$ con $z \in \hat{\mathbb{C}}$ y $\mathcal{T}(z)$ una transformación de Möbius son puntos fijos de $\mathcal{T}(z)$.*

Definición 4.3 *La razón cruzada de los números complejos z, z_1, z_2 y z_3 es el número complejo:*

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad (4.7)$$

Cuando calculamos la razón cruzada, el orden de los números complejos en cuestión es muy importante, por lo que debemos tener cuidado. Por ejemplo, la razón cruzada de 0, 1, i y 2 se calcula como $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i$, pero la razón cruzada de 0, i , 1 y 2 es $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$, aquí radica la importancia del orden con que se toman los números complejos, pues a pesar de utilizar los mismos, se obtienen dos razones cruzadas diferentes.

Podemos extender el concepto de razón cruzada para puntos que estén en el plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}}$ usando la fórmula:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L \quad \text{si, y sólo si} \quad \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = L.$$

Por ejemplo, la razón cruzada de ∞, z_1, z_2 y z_3 es $\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \right)$.

4.4. Puntos Fijos de las Transformaciones de Möbius

Tomemos una transformación de Möbius $\mathcal{T} \in \mathcal{M}$, donde $\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. Si $\mathcal{T}(\xi) = \xi$, entonces la ecuación que debemos resolver para hallar los puntos

fijos de $\mathcal{T}(z)$ es la siguiente:

$$\frac{a\xi + b}{c\xi + d} = \xi. \quad (4.8)$$

Resolviendo la Ecuación (4.8), tenemos que:

$$a\xi + b = c\xi^2 + d\xi,$$

igualando a cero

$$c\xi^2 + (d - a)\xi - b = 0$$

y utilizando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado, obtenemos:

$$\xi_{\pm} = \frac{-(d - a) \pm \sqrt{(d - a)^2 - 4(c)(-b)}}{2c}.$$

Observemos que en general una transformación de Möbius tiene a lo más dos puntos fijos. Analicemos los diferentes caso que se pueden presentar.

- (i) Si $(d - a) = \pm 2i\sqrt{bc}$, entonces los dos puntos fijos ξ_{\pm} forman un solo punto fijo $\xi = (a - d)/2c$. En este caso la transformación de Möbius es llamada *parabólica*. Más adelante la analizaremos con mayor detalle.
- (ii) Si $c \neq 0$, entonces ambos puntos fijos están en el plano complejo \mathbb{C} .
- (iii) Si $c = 0$, entonces uno de los puntos fijos es el infinito y la transformación de Möbius toma la forma: $\mathcal{T}(z) = Az + B$.

Si escribimos

$$A = \rho e^{i\alpha}, \quad (4.9)$$

entonces podemos ver la transformación como la composición de una rotación centrada en el origen de α , una expansión centrada en el origen por ρ y una traslación de B . Ahora veamos cada una de las cuatro transformaciones en la esfera de Riemann, que denotamos por Σ .

De acuerdo a sus puntos fijos, toda transformación de Möbius, excepto la identidad, conjuga en \mathcal{M} a:

(I) **Transformación parabólica.**

Cuando $c = 0$ la Figura 4.3 muestra una traslación. Como las curvas invariantes en \mathbb{C} son la familia de rectas paralelas en dirección de la traslación, las curvas invariantes sobre Σ son la familia de circunferencias cuya tangente común es el ∞ . Un ejemplo de traslación es $\mathcal{T}(z) = z + 1$ con $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$, su único punto fijo es $z = \infty \in \hat{\mathbb{C}}$. Esta transformación es llamada *parabólica*.



Figura 4.3: Transformación Parabólica

(II) **Transformación elíptica.**

Si $c \neq 0$ y $\mathcal{T}(z) = \lambda z$, entonces $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, $\frac{a}{c} = \lambda \neq 1$, $b = 0$, $d = 0$ y los puntos fijos son: $\xi_1 = \frac{a}{c}$ y $\xi_2 = 0$.

Si $c = 0$ y $\alpha > 0$ en la Ecuación 4.9, entonces la rotación $z \rightarrow e^{i\alpha} z \in \mathbb{C}$ induce a una rotación igual de Σ alrededor del eje vertical alrededor de su centro. Los círculos horizontales sobre Σ giran sobre sí mismos. La Figura 4.4 muestra que los puntos fijos de esta rotación son el 0 y el ∞ . A dicha transformación se le llama *elíptica*.

(III) **Transformación hiperbólica**

Si $c \neq 0$ y $\mathcal{T}(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 1$, entonces la transformación es una expansión, tiene dos puntos fijos $\xi_1 = \frac{a}{c} = \lambda$ y $\xi_2 = 0$.

Si $c = 0$ y $\rho > 0$ en la Ecuación (4.9), entonces la transformación sobre Σ corresponde a una expansión con centro en el origen de \mathbb{C} , $z \rightarrow \rho z$ (veáse la Figura 4.5). Si $\rho < 1$, entonces la transformación sería una contracción y los puntos irían de norte a sur. Los puntos fijos son el



Figura 4.4: Transformación Elíptica

0 y el ∞ , pero los papeles de las dos familias de curvas de la Figura 4.4 se invierten: las curvas invariantes son los círculos más grandes que pasan a través de los puntos fijos, que resultan ser los polos. Los círculos horizontales ortogonales permutan entre ellos. Esta transformación es llamada *hiperbólica*.



Figura 4.5: Transformación Hiperbólica

(IV) **Transformación loxodrómica.**

El caso loxodrómico es similar al elíptico.

Si $c \neq 0$, entonces $\mathcal{T}(z) = \lambda z$, tiene dos puntos fijos, sólo que $\lambda \in \mathbb{C}$, $\frac{a}{c} = \lambda$ y $|\lambda| > 1$.

Cuando $c = 0$ la Figura 4.6 muestra la combinación de los efectos de la rotación y expansión de las Figuras 4.4 y 4.5. Aquí las curvas invariantes son “espirales”; sin embargo las dos familias de círculos en las Figuras 4.4 (ó 4.5) son invariantes como un todo, en el sentido

que los miembros de cada familia permutan entre ellas. Esta rotación y expansión es una transformación *loxodrómica*. Las transformaciones elíptica e hiperbólica son casos particulares.



Figura 4.6: Transformación Loxodrómica

Una transformación parabólica sólo tiene un punto fijo en $\hat{\mathbb{C}}$, una transformación elíptica, hiperbólica y loxodrómica tienen dos puntos fijos.

En general una transformación de Möbius tiene como punto fijo al ∞ si, y sólo si, es de la forma $\mathcal{T}(z) = az + b$. Además, el ∞ es el único punto fijo si, y sólo si, \mathcal{T} es una traslación $\mathcal{T}(z) = z + b$.

Las Figuras 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 se tomaron del libro [Needham, 2000].

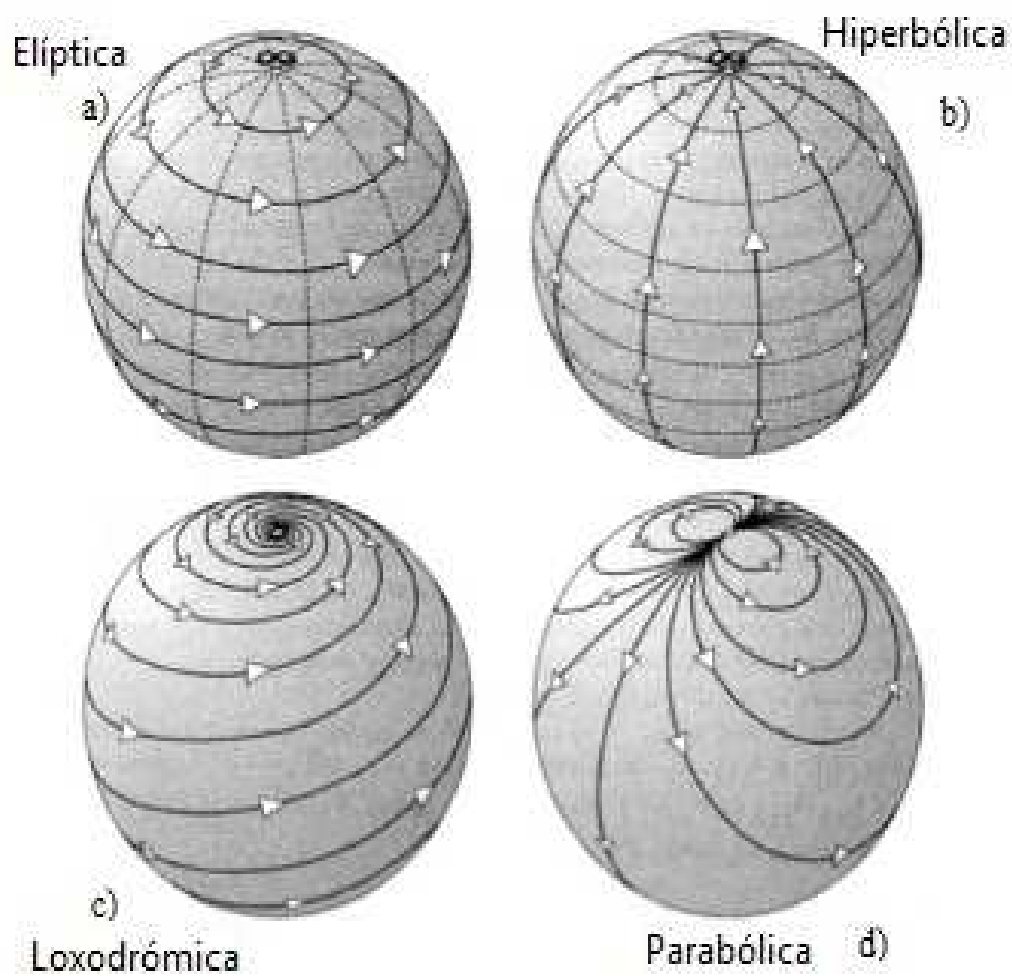


Figura 4.7: Clasificación de puntos fijos de una transformación de Möbius

Capítulo 5

Grupos $SL(2, \mathbb{C})$, $PSL(2, \mathbb{C})$ y de Klein

Una parte importante en este trabajo son los grupos de Klein, que recibieron ese nombre por Henry Poincaré a finales del siglo XIX en honor a Félix Klein, que había hecho grandes contribuciones a la geometría hiperbólica. Los temas expuestos en este capítulo se pueden consultar en [Hidalgo, 2006], [Beardon, 1983], [Zill y Shanahan, 2003], [Maskit, 1988], [Morosawa *et al.*, 2000], [Cruz, 2005] y [Sánchez, 1999].

Tomemos el grupo de matrices complejas 2×2 con determinante igual a 1 y operación el producto de matrices; denotemos este grupo como $SL(2, \mathbb{C})$.

Definimos el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ como el grupo cociente $PSL(2, \mathbb{C}) = \frac{SL(2, \mathbb{C})}{K}$, donde K es el núcleo de $SL(2, \mathbb{C})$.

5.1. Los Grupos \mathcal{M} y $PSL(2, \mathbb{C})$

Para toda $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, definimos $g_A \in \mathcal{M}$ como $g_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.

Asociaremos el grupo de las transformaciones de Möbius \mathcal{M} con el grupo $SL(2, \mathbb{C})$ por medio de un isomorfismo $\psi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$ con regla de correspondencia:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}. \quad (5.1)$$

Dado que $g_{AB} = \psi(AB) = \psi(A) \circ \psi(B) = g_A g_B$, tenemos un homomorfismo de grupos. Dicho homomorfismo es suprayectivo y el núcleo de ψ , que lo denotaremos por K' , consiste en las matrices $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $PSL(2, \mathbb{C}) = \frac{SL(2, \mathbb{C})}{K'} \approx \mathcal{M}$.

Observemos que cualquier matriz en K' conmuta con toda $A \in SL(2, \mathbb{C})$, por lo tanto $K' \subset K$. Por otra parte, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K$, la matriz debe conmutar, en particular con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo que implica que $c = 0$ y $a = d$. Ahora, también debe conmutar con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

por tanto, $b = 0$. Como el $\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a^2 = 1$, $a = \pm 1$, concluimos que $K' = K$, por lo tanto, $PSL(2, \mathbb{C}) \approx \mathcal{M}$. Debido a este isomorfismo, se suele identificar al grupo de transformaciones de Möbius \mathcal{M} con el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$.

Las transformaciones de Möbius pueden verse como matrices, lo que hace más fácil su uso. La asignación de la matriz en la Ecuación (5.1) no es única porque para e número complejo diferente de cero, la transformación de Möbius $\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ también está dada por $\mathcal{T}(z) = \frac{eaz + eb}{ecz + ed}$, sin embargo si $e \neq 1$, entonces las dos matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} ea & eb \\ ec & ed \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

son diferentes y representan la misma transformación de Möbius, por lo tanto, si $\alpha = ad - bc$, podemos dividir los coeficientes entre $\sqrt{\alpha}$, y obtener

$$g(z) = \frac{(a/\sqrt{\alpha})z + b/\sqrt{\alpha}}{(c/\sqrt{\alpha})z + d/\sqrt{\alpha}} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

con $a'd' - b'c' = 1$. Así siempre podemos suponer que $ad - bc = 1$.

Anteriormente demostramos que la composición de dos transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius. La representación matricial de la composición de dos transformaciones de Möbius, $\mathcal{T}_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$ y $\mathcal{T}_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$ se representa como el producto de las matrices:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

En la Ecuación (3.3) se muestra la inversa de una transformación de Möbius, de igual forma encontramos la representación matricial para la inversa de $\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, para ello tomemos la inversa de la matriz A en la Ecuación (5.1)

$$A^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Tomando $e = \frac{1}{ad - bc}$ en la Ecuación (5.2), tenemos que la inversa de la transformación $\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ es la matriz:

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

5.2. Los Subgrupos de $SL(2\mathbb{C})$ y $PSL(2, \mathbb{C})$

Definición 5.1 *Un subgrupo G de $SL(2, \mathbb{C})$ es discreto si, y sólo si, para cualquier sucesión de matrices $\{A_n\} \subset G$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ existe $n_0 > 0$ tal que $A_n = A$ para todo $n \geq n_0$.*

Los siguientes son ejemplos de subgrupos discretos.

Ejemplo 5.1

- (i) Todo grupo finito de \mathcal{M} es un grupo discreto.
- (ii) Todo grupo cíclico generado por una transformación parabólica o loxodrómica es discreto.
- (iii) Todo grupo cíclico generado por una rotación es discreto sí, y sólo si es de orden finito.

Proposición 5.1 *Un subgrupo G de $SL(2, \mathbb{C})$ es discreto si y sólo si para toda $k > 0$, el conjunto $A = \{g \in G : \|g\| \leq k\}$ es finito.*

La demostración se puede consultar en [Beardon, 1983]. Como consecuencia se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 5.1 *Si $G < SL(2, \mathbb{C})$ es discreto, entonces G es a lo más numerable.*

Corolario 5.2 *Si $G < SL(2, \mathbb{C})$ es discreto y no es finito, entonces para cualquier sucesión de matrices distintas $\{A_n\} \subset G$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| = \infty$.*

En el caso de $PSL(2, \mathbb{C})$ tenemos las siguientes definiciones.

Definición 5.2 *Un grupo $G < PSL(2, \mathbb{C})$ es discreto si y sólo si $\psi^{-1}(G) < SL(2, \mathbb{C})$ es discreto.*

Corolario 5.3 *Un grupo $G < PSL(2, \mathbb{C})$ es discreto si y sólo si para toda $k > 0$, el conjunto $B = \{g \in G : \|g\|^2 \leq k\}$ es finito.*

5.3. Grupos de Klein

Diremos que un subgrupo Γ de las transformaciones de Möbius \mathcal{M} es un grupo de Klein si es un subgrupo discreto del grupo $PSL(2, \mathbb{C})$.

Ejemplo 5.2 *El grupo Γ formado por todas las transformaciones γ de la forma:*

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$$

es un grupo de Klein.

5.3.1. Los Conjuntos Ordinario y Límite de un Grupo de Klein

De la definición de un grupo de Klein Γ es un conjunto numerable, es decir, sus elementos pueden ponerse en correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales o un subconjunto finito del mismo, y no contiene ningún elemento elíptico con orden infinito.

Definición 5.3 *Para un grupo de Klein Γ , decimos que z es un punto ordinario de Γ si Γ es una familia normal (véase Definición 6.4) en alguna vecindad de z . El conjunto de puntos ordinarios se llama conjunto ordinario de Γ y se denota por $\Omega(\Gamma)$.*

Definición 5.4 *Un punto z es un punto límite de Γ si z no es un punto ordinario. El conjunto de los puntos límite se llama el conjunto límite de Γ y se denota por $\Lambda(\Gamma)$.*

Teorema 5.1 *[Maskit, 1988] Si $x \in \Lambda(\Gamma)$, entonces existe $y \in \Lambda(\Gamma)$ y una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de Γ tal que $g_m(z) \rightarrow x$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{y\}$.*

Demostración: Tomemos $x \in \Lambda(\Gamma)$, existe $z_0 \in \Omega(\Gamma)$ y una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de Γ tal que $g_m \rightarrow x$. Normalicemos Γ de tal manera que $z_0 = \infty$. Ahora elijamos una subsucesión $\alpha_m = g^{-1}(\infty) \rightarrow y$; por lo anterior $y \in \Lambda(\Gamma)$. Escribimos a g_m como $r \circ q \circ p$, donde p es una reflexión en el círculo isométrico de g_m , q y r son transformaciones fundamentales. El

centro del círculo isométrico de g_m tiende a y ; g_m actúa como una inversión y lleva el exterior del círculo isométrico al interior del círculo isométrico y viceversa; el radio común entre g_m y g_m^{-1} tiende a 0; el centro del círculo isométrico de g_m^{-1} tiende a x . ■

Teorema 5.2 [Maskit, 1988] *Si $\{g_m\}$ es una sucesión de elementos distintos de un grupo de Klein Γ , entonces existe una subsucesión $\{g_{m_k}\}$ y existen x , y puntos límite, tal que $g_{m_k} \rightarrow x$ converge uniformemente sobre conjuntos compactos de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{y\}$.*

Demostración: Normalicemos Γ para que ∞ esté en el interior de Γ , tomemos una subsucesión $\{g_{m_k}\}$ tal que $g_{m_k}(\infty)$ converge a algún punto, llamémoslo x , de tal forma que $g_{m_k}^{-1}(\infty)$ converge a y y aplicamos el Teorema 5.1. ■

Teorema 5.3 [Maskit, 1988] *Los conjuntos $\Omega(\Gamma)$ y $\Lambda(\Gamma)$ son complementarios, es decir que son ajenos y su unión es todo $\hat{\mathbb{C}}$:*

$$\Omega(\Gamma) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(\Gamma).$$

Demostración: Si z es un punto límite, entonces cualquier vecindad U de z contiene infinitas traslaciones de algún punto, es decir, existen infinitos elementos distintos $g \in \Gamma$ tal que $g(U) \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto $\Omega(\Gamma) \cap \Lambda(\Gamma) = \emptyset$. Ahora supongamos que $x \notin \Omega(\Gamma)$. Entonces, para toda vecindad V de x existen infinitas traslaciones de V que se intersecan con V . Por lo tanto podemos encontrar una sucesión de elementos distintos $\{g_m\}$ de Γ y una sucesión de puntos $\{z_m\}$ tal que $z_m \rightarrow x$ y $g_m(z_m) \rightarrow x$. Por el Teorema 5.2 existe una subsucesión $g_m(z) \rightarrow w$ que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos del complemento de y , donde w y $y \in \Lambda(\Gamma)$. Si $x = y$, entonces $x \in \Lambda(\Gamma)$. Si $x \neq y$, entonces los puntos $\{z_m\}$ no son puntos de acumulación de y , luego $g_m(z_m) \rightarrow w$; es decir, $x = w \in \Lambda(\Gamma)$. ■

Los siguientes dos corolarios son consecuencia del Teorema 5.3

Corolario 5.4 *Sea Γ un grupo de Klein. El conjunto ordinario $\Omega(\Gamma)$ es un abierto Γ -invariante, es decir, $\gamma(\Omega(\Gamma)) = \Omega(\Gamma)$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Por lo que $\Lambda(\Gamma)$ es un conjunto cerrado Γ -invariante.*

Corolario 5.5 *Sea Γ un grupo de Klein. El conjunto $\tilde{\Gamma} = \gamma\Gamma\gamma^{-1}$ para todo $\gamma \in \mathcal{M}$. Entonces $\Omega(\tilde{\Gamma}) = \gamma(\Omega(\Gamma))$ y $\Lambda(\tilde{\Gamma}) = \gamma(\Lambda(\Gamma))$.*

Teorema 5.4 *Si Γ es un grupo de Klein no elemental, $z \in \Lambda(\Gamma)$ y $w \in \hat{\mathbb{C}}$, entonces existe una sucesión $\{\gamma_n\}$ de Γ tal que $\gamma_n(w) \rightarrow z$ cuando $n \rightarrow \infty$*

Proposición 5.2 [Morosawa et al., 2000] *Para un grupo de Klein Γ no elemental, su conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ es el conjunto cerrado Γ – no invariante, distinto del vacío más pequeño de Γ .*

Demostración: Solo mostraremos que para un grupo de Klein Γ , el conjunto $\Lambda(\Gamma)$ es el más pequeño con las características antes enunciadas. Sea $A \neq \emptyset$, un subconjunto de Γ , cerrado, y Γ -invariante, tomemos $z \in \Lambda(\Gamma)$, para $w \in A$, sea $\{\gamma_n\}$ una sucesión de Γ tal que $\gamma_n(w) \rightarrow z$ por el Teorema 5.4. Como A es cerrado, Γ -invariante, entonces $z \in A$. ■

Capítulo 6

Dinámica de Funciones Racionales

En este capítulo definimos los conceptos de familia normal, puntos fijos, clasificación de puntos fijos, los conjuntos de Fatou y Julia de funciones racionales y algunas propiedades de estos conjuntos. También se presentan ejemplos de familias normales y estudiamos algunas relaciones que se encuentran en el diccionario de Sullivan. Los conceptos utilizados en este capítulo pueden consultarse en [Morosawa *et al.*, 2000], [Devaney, 1988], [Noguchi, 1993] y [Bergweiler, 1995].

6.1. Familias Normales

Paul Montel (1876-1975) estudió las familias normales entre los años de 1911 a 1916. Fatou y Julia, alrededor de 1920, usaron la teoría de familias normales de Montel en su estudio de la iteración de funciones racionales. En esta sección se enuncian definiciones y teoremas relacionados con esta teoría.

Tomemos $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, una sucesión de funciones complejas definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$.

Recordemos que una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un punto $z \in A$ si la sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente. Si la sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge para todo $z \in A$, entonces $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente sobre A y denotamos el límite como $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ con $z \in A$, es decir, $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

Decimos que $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a f si para todo $\epsilon > 0$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se cumple $z \in A$ $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$, donde $z \in A$.

Teorema 6.1 [Noguchi, 1993] *Una sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ de funciones complejas definidas sobre $A \subset \mathbb{C}$ converge uniformemente si, y sólo si, para todo ϵ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \leq N$ y $z \in A$, $|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon$. además $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ es una función continua.*

Definición 6.1 *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida en \mathbb{C} es uniformemente acotada si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z)| < N$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Se dice que la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente acotada en $G \subset \mathbb{C}$ si existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $|f_n(z)| < N$ para todo $z \in G$ y todo $n \in \mathbb{N}$.*

Observación. Sea $G \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y (Ω, d) un espacio métrico completo, denotamos por $C(G, \Omega)$ al conjunto de todas las funciones continuas de G en Ω .

Definición 6.2 *Una familia $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$ es equicontinua en un punto $z_0 \in G$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $|z - z_0| < \delta$ implica que $d(f(z), f(z_0)) < \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.*

Definición 6.3 *Una familia $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$ es equicontinua en un conjunto $E \subset G$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $z_1, z_2 \in E$ con $|z_1 - z_2| < \delta$ implica que $d(f(z_1), f(z_2)) < \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.*

Proposición 6.1 [Conway, 1978] *Si $\mathcal{F} \subset C(G, \Omega)$ es equicontinua en cada punto de G , entonces \mathcal{F} es equicontinua en cada subconjunto compacto de G .*

Definición 6.4 *Sea \mathcal{F} una familia de funciones holomorfas definidas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. La familia \mathcal{F} es una familia normal si toda sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ contiene una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i=0}^{\infty}$ que converge uniformemente a f en cualquier conjunto compacto $D' \subset D$ con la métrica esférica d_{χ^2} , donde d_{χ^2} está definida como:*

$$d_{\chi^2} = \left(\frac{2}{1 + |z|^2} \right)^2 |dz|^2.$$

El teorema de Arzelá-Ascoli relaciona los conceptos de equicontinuidad y familias normales:

Teorema 6.2 (Arzelá-Ascoli) *Si $A \subset \mathbb{C}$ es compacto, $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ es una sucesión de funciones uniformemente acotada y equicontinua en A , entonces existe $\{f_{n_k}\}_{n=0}^\infty$ una subsucesión de $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ que converge uniformemente en A .*

Demostración: Si A es un conjunto finito, el teorema se cumple.

Supongamos que A es un conjunto infinito. Tomemos $E = \{z_v : v = 1, 2, \dots\}$ contenido en A tal que $\overline{E} = A$. Por el Teorema 2.1, el conjunto A es acotado, entonces existe $M > 0$ tal que $|Re z| \leq M$, $|Im z| < M$ para todo $z \in A$.

Definamos al siguiente conjunto $F_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |Re z| \leq M, |Im z| \leq M\}$. Dividimos cada lado de la clausura cuadrada de F_1 en dos partes iguales, obtenemos cuatro cuadrados cerrados $F_{2,1}, \dots, F_{2,4}$. Repetimos este proceso n veces para obtener 4^{n-1} cuadrados $F_{n,j}$ con $1 \leq j \leq 4^{n-1}$ y $A \subset F_1 = \bigcup_{j=1}^{4^{n-1}} F_{n,j}$.

Tomemos $z_{n,j} \in A \cap F_{n,j} \neq \emptyset$ tal que el conjunto $E_n = \{z_{n,j}\}$ es finito, entonces $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Así $\overline{E} = A$.

Para $z_1 \in E$, la sucesión $\{f_n(z_1)\}_{n=0}^\infty$ es acotada y por el Teorema 2.2, tiene una subsucesión convergente $\{g_{\mu(1)}\}_{\mu=0}^\infty$. Repitiendo lo anterior, obtenemos una subsucesión $\{g_{\mu(k)}\}_{\mu=0}^\infty$ de $\{f_n(z)\}_{n=0}^\infty$ convergente a z_1, z_2, \dots, z_k para $k = 1, 2, \dots$. Así obtenemos una subsucesión $\{g_\mu\}_{\mu=0}^\infty$ que converge sobre E , luego dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que la sucesión es equicontinua. Por el Teorema 2.1 el conjunto A tiene una cubierta finita $\Delta(a_j, \delta)$, con $a_j \in A$ y $1 \leq j \leq l$. Como $\overline{E} = A$, existe $z_{v(j)} \in \Delta(a_j, \delta) \cap E$ para todo j . Existe μ_0 tal que para todo $\mu, \mu' \geq \mu_0$

$$|g_\mu(z_{v(j)}) - g_{\mu'}(z_{v(j)})| < \epsilon, \quad 1 \leq j \leq l. \quad (6.1)$$

Si $a \in A$, entonces $a \in \Delta(a_j, \delta)$ para algún j por la Definición 6.3 y la Ecuación (6.1), $\mu, \mu' \geq \mu_0$, se sigue $|g_\mu(a) - g_{\mu'}(a)| \leq |g_\mu(a) - g_\mu(z_{v(j)})| + |g_\mu(z_{v(j)}) - g_{\mu'}(z_{v(j)})| + |g_{\mu'}(z_{v(j)}) - g_{\mu'}(a)| \leq 3\epsilon$.

Por el Teorema 6.1 se tiene que $\{g_\mu\}_{\mu=0}^\infty$ converge uniformemente sobre A . ■

Teorema 6.3 (Montel: 1927) *Una familia de funciones holomorfas \mathcal{F} sobre un abierto G de \mathbb{C} es normal si, y sólo si, \mathcal{F} está uniformemente acotada en cada conjunto compacto de G .*

Demostración: Sea $K \subset G$ un compacto arbitrario, la familia $\{U(f, K, 1) : f \in \overline{\mathcal{F}}\}$ es un recubrimiento por abiertos del conjunto compacto $\overline{\mathcal{F}}$, así que se puede extraer una subcubierta finita, es decir, existen $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n \in \overline{\mathcal{F}}$ tal que $\overline{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{k=1}^n U(f_k, K, 1)$.

Por la continuidad de los elementos de \mathcal{F} , para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ existe $M_j > 0$ tal que $|f_j(z)| \leq M_j$ para todo $z \in K$. Tomemos $M = 1 + \max\{M_1, \dots, M_n\}$. Para $f \in \mathcal{F}$ y $z \in K$ se tiene que existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $f \in U(f_j, K, 1)$ y $|f(z)| \leq |f(z) - f_j(z)| + |f_j(z)| < 1 + M_j \leq M$, de aquí que es uniformemente acotada en K .

Sea $K \subset G$ un conjunto compacto, la hipótesis nos dice que existe $M_k > 0$ tal que $|f(z)| < M_k$ para todo $z \in K$ y toda $f \in \mathcal{F}$. En particular, \mathcal{F} está puntualmente acotada en G . Sean $a \in G$ y $\epsilon > 0$, por hipótesis de uniformemente acotado sobre compactos, existen $\overline{B(a, r)} \subset G$ y $M > 0$ tal que $|f(\omega)| \leq M$ para todo $\omega \in C(a, r)$ y para toda $f \in \mathcal{F}$.

Por la fórmula de Cauchy para derivadas, si $z \in B\left(a, \frac{R}{2}\right)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \left|f(z) - f(a)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, R)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, R)} \frac{f(\omega)}{\omega - a} d\omega\right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C(a, R)} \frac{f(\omega)(z - a)}{(\omega - z)(\omega - a)} d\omega \right| \leq \frac{2\pi R M |z - a|}{2\pi R \frac{R}{2}} = \frac{2M|z - a|}{R}. \end{aligned}$$

■

A continuación se presentan un par de ejemplos de familias normales que se pueden encontrar en [Devaney, 1988].

Ejemplo 6.1

Sea $f(z) = az$ con $|a| < 1$ y $f_n(z) = f^{\circ n}(z)$ la n -ésima iterada de f . Entonces $\{f_n\}$ forma una familia normal de funciones en cualquier dominio de \mathbb{C} , pues f_n converge uniformemente a la función constante 0 para todo conjunto compacto.

Ejemplo 6.2

Si $f(z) = az$ con $|a| > 1$, entonces la familia $f_n(z) = f^{\circ n}(z)$ para cualquier dominio que no contenga al cero es normal, porque la normalidad falla para dominios que contengan al cero. En efecto, para cualquier vecindad del cero, digamos U_0 , existe z_0 para la que $|f^{\circ n}(z_0)|$ es arbitrariamente grande para alguna n , esto es, $|f^{\circ n}(z_0)| \geq M$ para $M \in \mathbb{N}$.

Definición 6.5 *La familia $\{\mathcal{F}_n\}$ no es normal en z_0 si la familia $\{\mathcal{F}_n\}$ no es normal en toda vecindad de z_0 .*

Observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.3

Sea $f(z) = az$ donde $z = |z|e^{i\theta}$ y $|a| = 1$, la familia $\{\mathcal{F}\}$ de iteradas de f no es normal porque para toda vecindad de z , toda sucesión $\{f_n\}$ de \mathcal{F} no es una familia normal, ya que no tiene subsucesiones convergentes f_{n_i} tal que $z = |z|e^{i\theta}$ converge a f .

6.2. Puntos Fijos y su Clasificación

Los puntos fijos juegan un papel muy importante en sistemas dinámicos. En particular en la dinámica holomorfa.

Definición 6.6 *Decimos que z_0 es un punto periódico de periodo n de la función analítica $f(z)$ si n es el menor número natural que cumple: $f^{\circ n}(z_0) = z_0$. Cuando $n = 1$, z_0 es llamado punto fijo de la función $f(z)$.*

Definición 6.7 *Sea $f(z)$ una función analítica, z_0 un punto periódico de periodo n . Se define el multiplicador de la siguiente forma:*

$$\lambda = (f^{\circ n})'(z_0),$$

Observación. Sea $f(z)$ una función analítica y $z_0 = \infty$. Se define el multiplicador de la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{1}{f^{(n)}\left(\frac{1}{z_0}\right)}.$$

De acuerdo al multiplicador, los puntos fijos se pueden clasificar de la siguiente forma. Sea $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ es un punto fijo de $f(z) \in \hat{\mathbb{C}}$.

1. Si $|\lambda| < 1$, entonces z_0 es un punto atractor.
2. Si $|\lambda| = 0$ ó $0 < |\lambda| < 1$, entonces z_0 es un punto superatractor.
3. Si $|\lambda| > 1$, entonces z_0 es un punto repulsor.
4. Si $|\lambda| = 1$, entonces z_0 es un punto indiferente.

6.3. Funciones Racionales e Iteradas

En esta sección definimos las funciones racionales y la iteración de ellas.

Definición 6.8 Una función racional $\mathcal{R} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es de la siguiente forma.

$$\mathcal{R}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios no ambos cero. Si $P(z)$ es igual a cero, entonces $\mathcal{R}(z)$ es la función constante cero. Si $Q(z)$ es cero, entonces $\mathcal{R}(z)$ es la función constante ∞ , además $\deg(\mathcal{R}) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$, que es el máximo de los grados usuales para los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$. Al conjunto de funciones racionales lo denotaremos por \mathcal{R} .

A continuación damos algunos ejemplos de funciones racionales.

- (1) Las transformaciones de Möbius son funciones racionales.
- (2) La función $f(z) = \frac{z^3 + 2z + 1}{4z^2 - 1}$ es una función racional.

Definición 6.9 Si $f \in \mathcal{R}$. Definimos la n -ésima iterada de $f(z)$ como la composición de la función n -veces, esto es;

$$f^{on}(z) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}}$$

Teorema 6.4 [Beardon, 2000] La transformación $\text{deg} : \mathcal{R} \rightarrow \{0, 1, \dots\}$ es continua. En particular, si la función racional R_n converge uniformemente en la esfera compleja a la función R , entonces R es racional y para una n suficientemente grande, $\text{deg}(R_n) = \text{deg}(R)$.

6.4. Los Conjuntos de Fatou y Julia de Funciones Racionales

En este apartado se definen los principales conjuntos en la dinámica de funciones racionales. Estos conjuntos dividen a la esfera en dos conjuntos llamados estable e inestable.

Definición 6.10 Tomemos $D = \hat{\mathbb{C}}$ y $f \in \mathcal{R}$, el conjunto de Fatou de la función f esta definido por:

$$F(f) = \{z \in D \mid \{f^n\}_{n=1}^\infty \text{ es normal en alguna vecindad de } z\}.$$

El complemento del conjunto de Fatou $F(f)$ de la función $f(z)$ en D es el conjunto de Julia y lo denotamos por $J(f)$.

Observación. El conjunto de Fatou es un conjunto abierto y como consecuencia el conjunto de Julia es cerrado.

Un ejemplo de los conjuntos de Fatou y Julia es el siguiente.

Ejemplo 6.4

Sea $f_c : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, definida por: $f_c(z) = z^2 + c$, la familia cuadrática. Si $c = 0$, entonces $f_0(z) = z^2$, que es el caso “más simple” de esta familia.

- (1) Si $|z| < 1$, entonces $f^{on}(z) \rightarrow 0$.
 - (2) Si $|z| > 1$, entonces $f^{on}(z) \rightarrow \infty$.
-

En este caso, los puntos $0, \infty$ son superatractores (véase la Figura 6.1). Los puntos donde $|z| = 1$ son los que están en S^1 y bajo iteración de $f_0(z)$ se quedan en el círculo unitario. Para la función $f_0(z) = z^2$, el conjunto de Julia es S^1 y el conjunto de Fatou es $\hat{\mathbb{C}} \setminus S^1$.

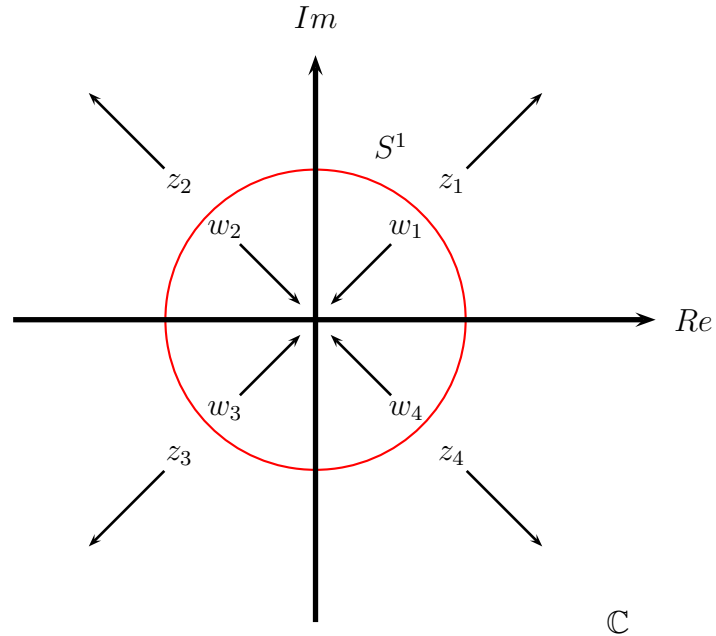


Figura 6.1: Los conjuntos de Fatou y Julia de la función $f_0(z) = z^2$

Los siguientes dos teoremas se pueden consultar en [Morosawa *et al.*, 2000].

Teorema 6.5 *Sea \mathcal{R} una función racional. El conjunto de Julia $J(\mathcal{R})$ no es vacío.*

Demostración: Si $J(\mathcal{R})$ es vacío, entonces la familia $\{\mathcal{R}^n\}$ es normal en toda la esfera compleja y, por el Teorema 6.4, existe una subsucesión de \mathcal{R}^n en la que cada aplicación tiene el mismo grado. Sin embargo $\deg(\mathcal{R}^n) = [\deg(\mathcal{R})]^n$, lo cual implica que \mathcal{R} tiene grado uno, contradiciendo nuestra suposición. ■

Teorema 6.6 *Si $f(z)$ es una función racional, entonces los conjuntos de Fatou y Julia son completamente invariantes. Es decir,*

$$f(J(f)) = J(f) \text{ y } f(F(f)) = F(f).$$

Demostración: Si $z_0 \in F(f)$, entonces $\{f^n\}$ es equicontinua en una vecindad U de z_0 , por la continuidad de f , la familia $\{f^n\}$ está cerca de todo punto de $f^{-1}(z_0)$. Ahora supongamos que $z_0 \in F(f)$, entonces $\{f^n\}$ es equicontinua en una vecindad V de z_0 , así también lo es en alguna vecindad V' de $f(z_0)$ por ser f una función abierta. Por lo tanto $f(z_0) \in F(f)$. ■

La siguiente proposición se encuentra en [Devaney, 1988].

Proposición 6.2 *Sea f una función analítica definida en un dominio D del plano complejo y supongamos que z_0 es un punto periódico repulsor para f . Entonces la familia de iteradas de f no es normal en z_0 .*

Demostración: Como $f^n(z_0) \rightarrow \infty$, existe $\{f^{n_k}\}$ subsucesión de $\{f^n\}$ que converge uniformemente a una función G en D . Por lo tanto $|(f^{n_k}(z_0))'| \rightarrow |G'(z_0)|$, pero $|(f^{n_k}(z_0))'| \rightarrow \infty$ por ser punto repulsor, así tenemos una contradicción. Por lo tanto la familia $\{f^n\}$ no es normal. ■

Corolario 6.1 *Sea f una función analítica. La familia de iteradas $\{f^n\}$ no es normal en ningún punto del conjunto de Julia $J(f)$.*

Capítulo 7

Diccionario de Sullivan

En las matemáticas del siglo XIX los grupos discretos tuvieron mucha atención en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y en la teoría de funciones modulares. Al final del siglo XIX Klein creó una teoría general de grupos discretos de transformaciones de Möbius y obtuvo algunos resultados fundamentales. Recordemos que un grupo de Klein es un grupo discreto de transformaciones de Möbius del plano complejo.

Fatou y Julia que estudiaban la dinámica de funciones racionales no observaron ninguna relación con la teoría de los grupos de Klein.

El matemático D. Sullivan en los 80 se encontraba estudiando el teorema de finitud de Ahlfors, que es un teorema en la teoría de los grupos de Klein, observó que existen analogías entre la teoría de iteración de funciones racionales y los grupos de Klein; así surgió la primera versión del diccionario de Sullivan.

En este capítulo vamos a enumerar algunas propiedades análogas entre la iteración de funciones racionales y los grupos de Klein (véase [Sullivan, 1985]), los conceptos pueden consultarse en [Morosawa *et al.*, 2000].

7.1. Cuatro Analogías entre la Iteración de Funciones Racionales y los Grupos de Klein

En esta sección se muestran cuatro analogías del diccionario de Sullivan entre la iteración de funciones racionales y la acción de los grupos de Klein.

En la Tabla 7.1 se encuentran las siguiente analogías.

- (1) El conjunto de Julia $J(f)$ de una función racional $f(z)$ es análogo al conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ de un grupo de Klein Γ por las Definiciones 5.4 y 6.10
- (2) El conjunto de Fatou $F(f)$ de una función racional $f(z)$ es análogo al conjunto ordinario $\Omega(\Gamma)$ de un grupo de Klein Γ por las Definiciones 5.3 y 6.10.
- (3) La propiedad $J(\mathcal{R}) \neq \emptyset$ es análoga a que $\Lambda(\Gamma) \neq \emptyset$ por la Proposición 5.2 y el Teorema 6.5.
- (4) Los conjuntos $F(f)$ y $J(f)$ son completamente invariantes y son análogos a los conjuntos $\Omega(\Gamma)$ y $\Lambda(\Gamma)$ también completamente invariantes por el Teorema 5.3 y el Teorema 6.6.

Teoría de la Dinámica de Función Racionales $f(z)$ (grado ≥ 2)	Teoría de Grupos de Klein Γ no elemental
(1) El conjunto de Julia $J(f)$	El conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$
(2) El conjunto de Fatou $F(f)$	El conjunto ordinario $\Omega(\Gamma)$
(3) $J(f) \neq \emptyset$	$\Lambda(\Gamma) \neq \emptyset$
(4) $F(f)$ y $J(f)$ completamente invariantes	$\Omega(\Gamma)$ y $\Lambda(\Gamma)$ completamente invariantes

Tabla 7.1: Diccionario de Sullivan

7.2. Conclusiones

1. Se estudiaron las transformaciones de Möbius \mathcal{M} que satisfacen las siguientes propiedades: son homocíclicas, son funciones conformes y forman un grupo bajo la composición de funciones.
2. Se estudiaron los grupos de Klein, esto es, grupos discretos de aplicaciones de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$ de la forma $\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, donde $a, b, c, d, z \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.
3. Se estudiaron los grupos de Klein, sus conjuntos ordinario y límite y dos propiedades, que son los Teoremas 5.3 y 5.4.
4. En esta tesis se estudiaron funciones racionales de la forma $\mathcal{R}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, donde $P(z), Q(z)$ son polinomios de grado ≥ 2 .
5. Se estudió la iteración de funciones racionales en $\mathcal{R}(z)$, sus conjuntos de Fatou y Julia y dos de sus propiedades, que son los Teoremas 6.5 y 6.6.
6. Se establecieron cuatro analogías, véase Tabla 7.1, entre las propiedades de los conjuntos de Fatou y Julia de una función racional y los conjuntos ordinario y límite de un grupo de Klein.

7.3. Aportaciones

Se obtuvo un documento tipo introductorio para los alumnos que realizan estudios de dinámica holomorfa y su relación con los grupos de Klein, de la licenciatura en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Bibliografía

- Alfhors, L. V. (1979). *Complex analysis*. McGraw Hill.
- Anderson, J. W. (1999). *Hyperbolic geometry*. Springer.
- Bak, J. y Newman, D. J. (2010). *Complex analysis*. Springer Science.
- Beardon, A. F. (1983). *The geometry of discrete groups*. Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, New York.
- Beardon, A. F. (2000). *Iteration of rational functions*. Springer Verlag.
- Bergweiler, W. (1995). *An introduction to complex dynamics*. Textos de Matemática Serie B, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.
- Churchill, R. V. y Brown, J. W. (1987). *Variable compleja y aplicaciones*. McGraw Hill.
- Cohen, H. (2007). *Complex analysis with applications in science and engineering*. Springer Science.
- Conway, J. B. (1978). *Functions of one complex variable*. Springer-Verlag.
- Cruz, M. (2005). *Dinámica de grupos kleinianos*. Facultad de Matemáticas, Universidad de Guanajuato.
- Dettman, J. W. (1986). *Introduction to linear algebra and differential equations*. Dover Publications, Inc.
- Devaney, R. L. (1988). *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison Wesley.

-
- Fraleigh, J. B. (2003). *A first course in abstract algebra*. Pearson Education, Inc.
- Herstein, I. N. (1996). *Abstract algebra*. Prentice-Hall, Inc.
- Hidalgo, R. A. (2006). Breve introducción a los grupos Kleinianos y variedades hiperbólicas. Departamento de Matemática. Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile.
- Jones, G. y Singerman, D. (2002). *Complex functions*. Cambridge University Press.
- Lang, S. (2002). *Algebra*. Springer-Verlag.
- Maskit, B. (1988). *Kleinian groups*. Springer Verlag.
- Morosawa, S., Nishimura, T., Taniguchi, M., y Ueda, T. (2000). *Holomorphic dynamics*. Cambridge University Press.
- Needham, T. (2000). *Visual complex analysis*. Clarendon Press Oxford.
- Noguchi, J. (1993). *Introduction to complex analysis*. American Mathematical Society.
- Palka, B. P. (1991). *An introduction to complex function theory*. Springer.
- Rotman, J. J. (1995). *An introduction to theory of groups*. Springer-Verlag.
- Sánchez, J. (1999). Grupos Kleinianos elementales y no elementales.
- Seade, J. (2006). Grupos Kleinianos: geometría y dinámica. Escuela de Matemáticas de América Latina y el Caribe. Cuernavaca, México.
- Silverman, R. A. (1974). *Complex analysis with applications*. Dover Publications Inc.
- Spiegel, M. R., Lipschutz, S., Schiller, J. J., y Spellman, D. (2009). *Complex variables with an introduction to conformal mapping and its applications*. McGraw Hill.
- Stein, E. M. y Shakarchi, R. (2003). *Complex analysis*. Princeton University Press.
-

Sullivan, D. (1985). *Quasiconformal homeomorphism and dynamics I: solution of Fatou-Julia problem on wandering domains*. Ann of Math (2).

Zill, D. G. y Shanahan, P. D. (2003). *A first course of complex analysis with applications*. Jones and Bartlett Publishers.