

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICAS



*Estudio del Problema de Plessner
en Dominios Reales No-Acotados*

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
Álvaro Hernández Cervantes

DIRECTOR DE TESIS:
Prof. Dr., Dr. Scient. Miguel Antonio Jiménez Pozo

PUEBLA, PUE.

JUNIO 2015

Dedicatoria

A mi familia, particularmente a mis padres
Hedilberto Hernández Vargas y
María Irma Cervantes Caballero,
quienes son toda mi vida.

Agradecimientos

A papá Hedilberto Hernández Vargas y a mamá María Irma Cervantes Caballero, quienes siempre me han apoyado a lo largo de mi vida con mucho amor y cariño; gracias por sus sabios consejos que me han conducido por el buen camino para lograr lo que ahora soy. A mis hermanos, a cada uno de ellos, Sandra, Hedilberto, José y Ulises; quienes mostraron siempre un cariño incondicional en los momentos más difíciles de mi formación académica y humana.

Quiero expresar mi gratitud a mi director de tesis el Dr. Miguel Antonio Jiménez Pozo, quien ha sido la persona que me ha guiado con sus consejos en estos años, por su paciencia y dedicación para poder concluir nuestro trabajo.

También agradezco a mis sinodales por el tiempo dedicado para revisar y complementar este trabajo con sus sugerencias y observaciones.

Quiero agradecer a mis compañeros y amigos por su apoyo y consejos, particularmente a Emilene Pliego Pliego por toda su confianza, por su apoyo tanto académico como moral y más aún por la hermosa sonrisa que siempre tiene para mí, la cual da sentido a todo, muchas gracias Emí.

Agradezco también al Cuerpo Académico de Análisis Matemático por haberme aceptado y permitirme ser parte de sus actividades académicas, tales como su seminario, también agradezco al Cuerpo Académico de Modelación Matemática por permitirme ser parte de su laboratorio.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (**CONACyT**), por la beca otorgada, que fue de gran ayuda para la realización de este trabajo.

También expreso mi agradecimiento a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado **VIEP**, por los apoyos económicos otorgados durante mi estancia como estudiante de maestría.

Introducción

Esta tesis esta fundamentada en los tres hechos siguientes:

I) La definición y estudio de las propiedades de funciones de Lipschitz, Hölder, Besov, etc., en espacios pesados definidos sobre dominios no acotados.

Como es conocido, existe una diferencia notable entre la continuidad de una función y su derivabilidad. Para compensar este salto se pueden introducir los espacios de funciones de Lipschitz y aún más general, los espacios de Hölder. Estos espacios y sus propiedades también se definen y estudian sustituyendo la norma uniforme por la de los espacios L^p , con $1 \leq p < \infty$. Aún más general, por el empleo de métricas mixtas, es decir, como es el caso de los espacios de Besov.

La evolución de estas ideas pasa por muchos puntos críticos a lo largo de su desarrollo, en particular los problemas asociados al operador de traslación que constituyen la esencia de esta tesis, como veremos después.

El lector interesado en la evolución histórica de estos conceptos, puede consultar de manera general los libros [12, Triebel H., 1978],[13, Triebel H., 1983],[14, Triebel H., 1992] y para el caso de la teoría de la aproximación el survey [1, Bustamante-Jiménez, 2001].

Un resumen amplio de las contribuciones de estos autores al estudio de la aproximación polinomial en espacios de Hölder puede consultarse en [2, Bustamante-Jiménez, 2013].

II) Problemas de Bernstein.

Los problemas de Bernstein son derivados del conocido teorema de Weierstrass, relativos a aproximar uniformemente por polinomios toda función continua, en este caso definida sobre \mathbb{R} o intervalos no acotados, por ejemplo, la semirecta real positiva \mathbb{R}^+ . Para lograr este objetivo se considera una función denominada peso de Bernstein; la cual posee cualidades especiales. Aquí es usual utilizar pesos exponenciales, como se usa en [6, Hernández C. A., 2013].

III) Aproximación en espacios de Hölder de funciones integrables con peso.

Aquí el trabajo principal al que haremos referencia es la tesis doctoral de José Margarito Hernández [7, Hernández M., J. M., 2012].

Cuando se consideran las funciones integrables sobre un intervalo acotado con un peso w , las situaciones de mayor interés se presentan cuando w se anula en uno o más puntos, porque esto amplía la clase de funciones integrables. Pero al trasladar una función integrable según el peso w con una singularidad en un punto donde w se anula, ocurre que ahora la función trasladada no es integrable. Para compensar esta situación, Hernández traslada simultáneamente la función y el peso.

Nosotros estamos interesados en la continuación del problema estudiado por Hernández en espacios de funciones p -integrables con $1 \leq p \leq \infty$, pero definidas sobre intervalos

no acotados. Uno de los objetivos proyectados a futuro es el estudio de la aproximación polinomial en estos espacios, este estudio se conecta con el problema de Bernstein. En tal caso el peso deberá ser de tipo exponencial. Para un peso exponencial del tipo e^x , el estudio de la traslación es relativamente sencillo porque para cualquier parámetro real t , la función exponencial cumple la sencilla relación

$$e^{x+t} = e^x e^t.$$

Continuando con estas ideas, como la función exponencial e^{-x} no tiene ceros excepto en el infinito, cuando consideramos al conjunto de los números reales ampliado \mathbb{R}^* , resulta que no es necesario trasladar la función junto con el peso.

Se tiene la intención de estudiar la aproximación polinomial en espacios de funciones de Hölder. Por lo que para sentar las bases de este estudio, en esta tesis consideraremos intervalos reales no acotados con pesos que tienden a cero en el infinito, pero que no tienen otros ceros en su interior.

Resumiendo y simplificando estas ideas, deseamos estudiar los espacios de Hölder en el espacio de funciones integrables $L^1(w)$, donde w es una función peso continua definida en el grupo aditivo de los números reales \mathbb{R} . Sea $0 < \Lambda < \infty$, una función $f \in L^1(w)$ satisface una condición de Hölder de orden α , $0 < \alpha \leq 1$, si

$$\sup_{\Lambda \geq |t| > 0} \int \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|^\alpha} w(x) dx < \infty.$$

Para ello es necesario, obviamente, que

$$\int |f(x+t) - f(x)| w(x) dx \rightarrow 0,$$

cuando $t \rightarrow 0$.

Verificar la continuidad del operador de traslación en un espacio dado, se conoce como Problema de Plessner. Vea [4, Dunford, 1935],[5, Gaiter D., 1992],[10, Plessner A., 1929].

Esto significa, que como nuestro interés se concentra en el estudio de los espacios de Hölder de $L^1(w)$, debemos comenzar por verificar si tenemos una respuesta positiva al problema de Plessner resultante en $L^1(w)$. Este estudio constituye el contenido fundamental de esta tesis de maestría, su aportación, hasta donde sabemos es novedosa.

Para el objetivo buscado podemos restringirnos a funciones definidas sobre $[1, \infty)$ e incrementos positivos de la función. Como deseamos aproximar polinomialmente en estos nuevos espacios de Hölder, nos interesaremos con énfasis en pesos de Bernstein, los cuales son funciones continuas positivas y decrecientes exponencialmente que satisfacen determinadas propiedades, a lo que regresaremos oportunamente.

En esta tesis también incluimos el estudio del problema de Plessner para pesos no exponenciales, con la idea de realizar un estudio más completo del problema de Plessner en \mathbb{R} . Esta ampliación en cuanto a pesos no exponenciales, se justifica al presentar una escala de los valores $p \in \mathbb{R}$, para los cuales los pesos $w(x) = x^p$ y $w(x) = \exp\{-x^p\}$, dan una respuesta positiva al problema en consideración. Así pues, el **objetivo general** de este trabajo es resolver el problema de Plessner resultante en $L^1(w)$, para $w(x) = x^p$ con $p \in \mathbb{R}$ y $w(x) = \exp\{-x^p\}$, con $p \geq 0$, $x \geq 1$ e incrementos positivos.

En el Capítulo I damos respuesta de manera general al problema, utilizando herramientas de análisis matemático. Extenderemos aquí los resultados para los grupos clásicos \mathbb{R}^k , \mathbb{T}^k , o \mathbb{R}^+ , y μ la medida de Haar correspondiente.

En el Capítulo II es donde nos restringimos a trabajar sobre los espacios de Banach $L^1(w)$, construidos a base de funciones peso del tipo algebraico (polinomial y racional) y del tipo exponencial, además verificamos en base a la teoría general que el problema de Plessner tiene respuesta positiva en algunos casos y en otros no, como lo muestra el Cuadro 2.1.

Finalmente, en el Capítulo III, definimos los espacios de Hölder en el contexto de $L^1(w)$. Por supuesto, tal definición puede darse en cualquier espacio normado E y para aquellos elementos f de E , para los que se tenga definida una traslación f_t . Pero los resultados previamente obtenidos aquí para $L^1(w)$, sobre el problema de Plessner, nos sitúan en posición ventajosa para concretar el estudio de tales espacios y, para los pesos de rápido decrecimiento, el problema correspondiente a la aproximación polinomial. Según nuestro proyecto, esto último será parte de una futura tesis doctoral.

Además, para el lector no familiarizado con el tema, hemos incluido un apéndice destinado a recordar algunos resultados fuertes utilizados en esta tesis.

Índice general

Introducción	1
1. Condiciones Generales para la Continuidad del Operador de Traslación en $L^1(w)$	7
2. Análisis de la Continuidad del Operador de Traslación para Pesos Específicos	12
2.1. Planteamiento del Problema	12
2.2. Caso Exponencial	17
2.3. Resumen sobre el Problema de Plessner en $L^1(w)$	21
3. Espacios de Hölder en $L^1(w)$	22
3.1. Definición General de Funciones de Hölder . .	22
3.2. Funciones de Hölder en $L^1(w)$	26
Conclusiones	28
Apéndice: Teoremas de Impacto Utilizados	29
Bibliografía	31

Capítulo 1

Condiciones Generales para la Continuidad del Operador de Traslación en $L^1(w)$

Los resultados siguientes pueden extenderse a grupos topológicos más generales. Sea (G, \circ) uno de los grupos clásicos \mathbb{R}^k , \mathbb{T}^k , o \mathbb{R}^+ , y μ la medida de Haar correspondiente. Para cada $t \in G$ fijo y $f \in L^1(G)$, se define el operador de traslación

$$\Lambda_t : L^1(G) \rightarrow L^1(G), \quad (1.1)$$

mediante $\Lambda_t f = f_t$, donde

$$f_t(x) = f(x \circ t). \quad (1.2)$$

Como se conoce del análisis armónico, Λ_t es una isometría lineal. Más aún, la función

$$\begin{aligned} G &\rightarrow L^1(G) \\ t &\rightsquigarrow f_t \end{aligned} \quad (1.3)$$

es continua para cada $f \in L^1(G)$.

La continuidad en (1.3) es una condición necesaria para introducir diferentes conceptos sobre regularidad, tales como las funciones de Hölder. Este resultado sobre continuidad es una consecuencia de las buenas propiedades topológicas de G y la propiedad de la invarianza de la traslación de μ . La nueva pregunta consiste en saber si se tienen de alguna forma resultados similares para $L^1(w)$, donde w es una función peso con valores reales positivos definida sobre G . Como la pregunta involucra propiedades de continuidad, es razonable suponer de manera temprana que w es una función continua.

Recordemos que $L^1(w)$ es el espacio de Banach de funciones μ -medibles f de valores complejos definidas sobre G , tales que $fw \in L^1(G)$, con la norma

$$\|f\|_w = \int_G |f(x)|w(x)d\mu(x). \quad (1.4)$$

Siguiendo la teoría de la integración nosotros consideraremos que dos funciones $f, g \in L^1(w)$ son iguales (i. e. que pertenecen a la misma clase de equivalencia) si y sólo si

$$\mu[fw \neq gw] = 0. \quad (1.5)$$

Pueden existir funciones μ -medibles $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen (1.5), mientras que $\mu[f \neq g] > 0$. Por otro lado, si $w(x_0) = 0$ en algún $x_0 \in G$, no es muy difícil construir $f \in L^1(w)$, tal que $f_t \notin L^1(w)$ para algún $t \in G$.

Observe que estos detalles y otros más desaparecen tan pronto como asumimos por hipótesis que $w(x) > 0$ para cada $x \in G$. Por supuesto, puede ocurrir que $w(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, cuando $G = \mathbb{R}^k$ o $G = \mathbb{R}^+$, pero esto sólo es un problema de notación porque $\in \notin G$.

Organizando nuestras ideas, nos restringiremos a analizar el llamado problema de Plessner en los grupos particulares

$\mathbb{R}^k, \mathbb{T}^k$ y \mathbb{R}^+ , y funciones peso continuas estrictamente positivas. En esta situación $L^1(w)$ es exactamente $L^1(wd\mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue $dx = d(x_1, x_2, \dots, x_k)$ cuando $G = \mathbb{R}^k$, $dx/(2\pi)^k = d(x_1, x_2, \dots, x_k)/(2\pi)^k$ cuando $G = \mathbb{T}^k$, o dx/x cuando G es el grupo multiplicativo \mathbb{R}^+ .

En todos los casos, la medida considerada $wd\mu$ es regular, entonces por el teorema de Luzin, el espacio de funciones continuas de valores complejos definidas sobre G con soporte compacto $C_K(G)$, es un subespacio denso de $L^1(w)$.

Lema 1.1. Sea $u \in C_K(G)$, entonces

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & (C_K(G), \|\cdot\|_\infty) \\ t & \rightsquigarrow & u_t \end{array} \quad (1.6)$$

es un mapeo bien definido y continuo.

Demostración. Cada función continua de soporte compacto es uniformemente continua. \square

Lema 1.2. Sea $u \in C_K(G)$, entonces

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & (L^1(w), \|\cdot\|_w) \\ t & \rightsquigarrow & u_t \end{array} \quad (1.7)$$

es un mapeo bien definido y continuo.

Demostración. Sea $t_0 \in G$ y V una vecindad abierta de t_0 , cuya clausura \bar{V} es compacta.

Sea K el soporte de $u \in C_K(G)$, y

$$K' = \{x \circ t : x \in K, t \in \bar{V}\}.$$

Como K' es compacto, la cota

$$M = \sup_{y \in K'} w(y),$$

es finita. Sea $\epsilon > 0$ dado. Usando el Lema 1.1 obtenemos una vecindad abierta W de t_0 cuya clausura \overline{W} es compacta, y tal que

$$\sup_{t \in W} \|u_t - u_{t_0}\|_\infty < \epsilon.$$

Entonces para cada $t \in V \cap W$,

$$\int_G |u_t - u_{t_0}| w d\mu \leq M\mu(K')\epsilon.$$

□

Teorema 1.1. Supongamos, para cada $t \in G$, que los operadores lineales

$$\begin{aligned} \Lambda_t : L^1(w) &\rightarrow L^1(w) \\ f &\rightsquigarrow f_t \end{aligned} \quad (1.8)$$

están bien definidos y son continuos. Supongamos también que para cada $f \in L^1(w)$;

$$\sup_{t \in V} \|\Lambda_t f\|_w < \infty,$$

donde V es una vecindad acotada del elemento neutro $e \in G$. Entonces para cada $f \in L^1(w)$, el mapeo

$$\begin{aligned} G &\rightarrow L^1(w) \\ t &\rightsquigarrow f_t \end{aligned} \quad (1.9)$$

es continuo.

Demostración. Como $L^1(w)$ es un espacio de Banach, aplicando el teorema de “acotación uniforme”, existe un número $M \geq 0$ tal que

$$\sup_{t \in V} \|\Lambda_t\| \leq M.$$

Sea $f \in L^1(w)$ dada y $\epsilon > 0$. Elegimos $u \in C_K(G)$ tal que

$$\|f - u\|_w \leq \epsilon.$$

Sea $t_0 \in G$ dado. Usando el Lema 1.2 obtenemos una vecindad V de t_0 , tal que para todo $t \in V$,

$$\|u_t - u_{t_0}\|_w < \epsilon.$$

Entonces, para todo $t \in V$,

$$\begin{aligned} \|f_t - f_{t_0}\|_w &\leq \|f_t - u_t\|_w + \|u_t - u_{t_0}\|_w + \|u_{t_0} - f_{t_0}\|_w \\ &\leq 2M\|f - u\|_w + \|u_t - u_{t_0}\|_w \\ &\leq (2M + 1)\epsilon. \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Análisis de la Continuidad del Operador de Traslación para Pesos Específicos

2.1. Planteamiento del Problema

Nos concentraremos ahora en el caso del grupo aditivo $G = \mathbb{R}$. Aquí, los pesos usuales son del tipo

$$e^{-|x|^p}, \frac{1}{1+|x|^p},$$

con $p > 0$, y $p \in \mathbb{R}$ respectivamente. El estudio del problema de Plessner con estos pesos se puede realizar sobre \mathbb{R}^+ , sin embargo, nosotros para simplificar técnicamente tomaremos valores estrictamente positivos para x y para el incremento t . Además, para simplificar aún más los cálculos y sin perder generalidad, en lo sucesivo trabajaremos con funciones reales Lebesgue medibles definidas sobre $[1, \infty) \subseteq \mathbb{R}^+$. Así podemos sustituir, por ejemplo, el peso

$$\frac{1}{1+|x|^p} \text{ por } \frac{1}{x^p}.$$

En efecto, si bien en algunos problemas, el semiespacio \mathbb{R}^+ debe ser incluido, por ejemplo, en el peso exponencial, no obstante los resultados que siguen tienen igual validez, con la correspondiente adaptación al definir los pesos.

Sea $w \in C[1, \infty)$ estrictamente positiva. Definamos

$$L^1(w) = \{f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : f\text{-medible y } \int_1^\infty |f(x)|w(x)dx < \infty\},$$

con las operaciones usuales e identificando funciones iguales Lebesgue casi dondequiera:

1. $L^1(w)$ es un espacio lineal.
2. Para cada $f \in L^1(w)$, $\|f\|_w \doteq \int_1^\infty |f(x)|w(x)dx$.
3. La función $\|\cdot\|_w$ es una norma.
4. $(L^1(w), \|\cdot\|_w)$ es un espacio de Banach.

Si $f \in L^1(w)$ y $0 < t \leq 1$, definamos $f_t(x) = f(x + t)$.

Los resultados del Capítulo 1 son fácilmente adaptados a este contexto. Para analizar el problema de Plessner en $L^1(w)$, necesitamos primeramente verificar que si $f \in L^1(w)$, también $f_t \in L^1(w)$. Observamos que así planteado el problema se muestra demasiado general. Existen funciones para las cuales lo anterior es cierto y funciones para las que su traslación no está en $L^1(w)$, esto es consecuencia de w .

Para las aplicaciones, como ya fue señalado, los pesos de más interés en espacios de funciones sobre subconjuntos no acotados de \mathbb{R} , son las funciones exponenciales, polinomiales y racionales de tipo algebraico. En lo sucesivo consideraremos sólo tales pesos. Teniendo presente que $L^1(w)$ es un espacio de

Banach, recordemos que el problema de Plessner es la determinación de funciones $f \in L^1(w)$, para las cuales la traslación $t \in (0, 1] \rightsquigarrow f_t \in L^1(w)$ es continua.

Por otra parte, si $1 < b < \infty$, $f \in L^1(w)$ y $0 < t$, resulta claro de la positividad estricta y la continuidad de w , que

$$\int_1^b |f_t(x)|w(x)dx < \infty. \quad (2.1)$$

Luego, para verificar que $f_t \in L^1(w)$, sólo bastará con probar que:

$$\int_b^\infty |f_t(x)|w(x)dx < \infty. \quad (2.2)$$

Más tarde utilizaremos esta observación.

Proposición 2.1. Sea la función peso $w(x) = x^p, p \in \mathbb{R}$. Si $f \in L^1(w)$ y $t > 0$, entonces $f_t \in L^1(w)$.

Demostración. Como $p \in \mathbb{R}$ y $w(x) = x^p$, utilizaremos la ley de tricotomía de los reales.

- Caso I: $p = 0$.

Si $p = 0$, entonces $w(x) = 1$ y nos encontramos en el caso bien conocido $L^1(w) = L^1(\mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R} restringida a $[1, \infty)$. Así

$$\begin{aligned} \|f_t\|_w &= \int_1^\infty |f_t(x)|w(x)dx = \int_1^\infty |f(x+t)|dx \\ &= \int_{1+t}^\infty |f(u)|du \leq \int_1^\infty |f(u)|du < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $f_t \in L^1(w)$.

- Caso II: $p > 0$.

Si $p > 0$, entonces $w(x)$ es creciente en $x \in [1, \infty)$. Así

$$\begin{aligned} \|f_t\|_w &= \int_1^\infty |f_t(x)|w(x)dx = \int_1^\infty |f(x+t)|x^p dx \\ &= \int_{1+t}^\infty |f(u)|(u-t)^p du \leq \int_{1+t}^\infty |f(u)|u^p du \\ &\leq \int_1^\infty |f(u)|u^p du < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $f_t \in L^1(w)$.

- Caso III: $p < 0$.

Tomemos $-p = s > 0$, $1 \leq x < \infty$, entonces $1 = 1^s \leq x^s < \infty$. Hagamos $u = x + t$ con $0 < t$, $x = u - t$, $1^s \leq (u - t)^s < \infty$, así $1/(u - t)^s \leq 1$. Como $1 = u^s/u^s$, si tomamos $M \in \mathbb{N}$ de tal manera que $M \geq u^s$, M suficientemente grande, tenemos $1/(u - t)^s \leq M/u^s$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|f_t\|_w &= \int_1^\infty |f_t(x)|w(x)dx = \int_1^\infty |f(x+t)|x^p dx \\ &= \int_1^\infty |f(x+t)|x^{-s} dx = \int_1^\infty |f(x+t)|\frac{1}{x^s} dx \\ &= \int_{1+t}^\infty |f(u)|\frac{1}{(u-t)^s} du \leq \int_{1+t}^\infty |f(u)|\frac{1}{u^s} M du \\ &= M \int_{1+t}^\infty |f(u)|u^{-s} du = M \int_{1+t}^\infty |f(u)|u^p du \\ &\leq M \int_1^\infty |f(u)|u^p du < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $f_t \in L^1(w)$.

Los tres casos anteriores prueban que para cada $f \in L^1(w)$ y $t > 0$, se tiene que $f_t \in L^1(w)$. \square

Nota 1. El caso de pesos crecientes que ocurre cuando $p > 0$, se ha incluido para completar el estudio de todos los casos; pero es de un interés menor en Teoría de la Aproximación. Observe que la misma demostración sería válida para otros pesos crecientes, como $w(x) = e^x$; con igual comentario sobre su utilidad práctica.

Continuando en esta línea, si $w(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \dots + a_n$ es un polinomio estrictamente positivo definido sobre $[1, \infty)$, con $a_0 \neq 0$ y p un exponente natural; tenemos que $w(x) \approx x^p$ asintóticamente. En particular, existe $b > 1$ tal que para todo $x \geq b$, $w(x) \leq 2a_0x^p$, mientras que, aplicando (2.1) tendremos:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty |f_t(x)|w(x)dx &= \int_1^b |f_t(x)|w(x)dx + \int_b^\infty |f_t(x)|w(x)dx \\ &\leq cte + \int_b^\infty |f_t(x)|w(x)dx. \end{aligned}$$

Se deduce que cuando w es un polinomio positivo, $f_t \in L^1(w)$ si y sólo si para algún $b > 1$, se cumple que:

$$\int_b^\infty |f_t(x)|x^p dx < \infty. \quad (2.3)$$

Análogamente, si $w(x)$ es una fracción racional algebraica estrictamente positiva definida sobre $[1, \infty)$, de la forma:

$$w(x) = (b_0x^q + b_1x^{q-1} + \dots + b_q) / (a_0x^p + a_1x^{p-1} + \dots + a_p), \quad (2.4)$$

con $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, y $p \leq q$, el análisis de la integrabilidad de la función f_t con $f \in L^1(w)$ y $t > 0$, se reduce a la condición (2.2).

Proposición 2.2. Sean $p \in \mathbb{R}$ y $w(x) = x^p$. Para cada $f \in L^1(w)$ y $1 \geq t > 0$, se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f_t - f\|_w = 0.$$

Demostración. Basta verificar las hipótesis del Teorema 1.1 en este espacio, con el peso x^p . \square

2.2. Caso Exponencial

Sea $1 \leq x < \infty$, definamos $w : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $w(x) = e^{-x}$. Con este peso $L^1(w)$ es el espacio de Banach:

$$L^1(w) = \{f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ medible y } \int_1^\infty |f(x)|e^{-x} dx < \infty\},$$

con las operaciones usuales e identificando funciones iguales Lebesgue casi dondequiera, y con la norma

$$\|f\|_w = \int_1^\infty |f(x)|e^{-x} dx.$$

Proposición 2.3. Sea $w(x) = e^{-x}$. Si $f \in L^1(w)$ y $t > 0$, entonces $f_t \in L^1(w)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \|f_t\|_w &= \int_1^\infty |f_t(x)|w(x)dx = \int_1^\infty |f(x+t)|e^{-x} dx \\ &= \int_{1+t}^\infty |f(u)|(e)^{-u+t} du = e^t \int_{1+t}^\infty |f(u)|e^{-u} du \\ &\leq e^t \int_1^\infty |f(u)|e^{-u} du < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $f_t \in L^1(w)$. □

Proposición 2.4. Sea $w(x) = e^{-x}$. Para cada $f \in L^1(w)$ y $1 \geq t > 0$, se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f_t - f\|_w = 0.$$

Demostración. Es una aplicación particular del Teorema 1.1. Sin embargo, de manera directa, si $u = x + t$.

$$\int_1^\infty |f(x+t)|e^{-x} dx = e^t \int_{1+t}^\infty |f(u)|e^{-u} du \rightarrow \int_1^\infty |f(u)|e^{-u} du,$$

cuando $t \rightarrow 0$. □

Consideremos ahora un caso particular de la exponencial con $0 < p < 1$. Sea $1 \leq x < \infty$, definamos $w : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $w(x) = e^{-x^p}$. Con este peso definimos el espacio de Banach:

$$L^1(w) = \{f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : f\text{-medible y } \int_1^\infty |f(x)|e^{-x^p} dx < \infty\},$$

y con norma:

$$\|f\|_w = \int_1^\infty |f(x)|e^{-x^p} dx.$$

Proposición 2.5. Sea la función peso $w(x) = e^{-x^p}$, $0 < p < 1$. Si $f \in L^1(w)$ y $t > 0$, entonces $f_t \in L^1(w)$.

Demostración. Por hipótesis,

$$\int_1^\infty |f(x)|w(x)dx = \int_1^\infty |f(x)|e^{-x^p} dx < \infty.$$

Sea $t > 0$ arbitrario,

$$\int_1^\infty |f_t(x)|e^{-x^p} dx = \int_1^\infty |f(x+t)|\frac{dx}{e^{x^p}}. \quad (2.5)$$

Sea $g(x)$ de tal manera que $e^{x^p} \cdot g(x) = e^x$, entonces

$$g(x) = \frac{e^x}{e^{x^p}} = e^x \cdot e^{-(x^p)} = e^{x-x^p} = e^{x \cdot (1-x^{p-1})}.$$

Como $0 < p < 1$, entonces $g(x)$ es creciente, positiva y $g(x) \neq 0$ para todo $x \in [1, \infty)$. Así, la integral de la derecha en (2.5) será:

$$\int_1^\infty |f(x+t)|\frac{dx}{e^{x^p}} = \int_1^\infty |f(x+t)|g(x)\frac{dx}{e^x}. \quad (2.6)$$

Por hipótesis,

$$\int_1^\infty |f(x)|g(x)\frac{dx}{e^x} = \int_1^\infty |f(x)|\frac{dx}{e^{x^p}} < \infty.$$

Por tanto, $f \cdot g \in L^1(e^{-x})$. Por la Proposición 2.3, para $t > 0$, se tiene que $(f \cdot g)_t \in L^1(e^{-x})$, donde:

$$(f \cdot g)_t(x) = f_t(x) \cdot g_t(x) = f(x+t) \cdot g(x+t).$$

Por ser g creciente y positiva tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x+t)g(x+t)| &= |f(x+t)|g(x+t) \\ &\geq |f(x+t)|g(x) \\ &= |f_t(x)|g(x). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Utilizando (2.6) y (2.7) tenemos:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty |f(x+t)g(x)| \frac{dx}{e^x} &\leq \int_1^\infty |f(x+t)g(x+t)| \frac{dx}{e^x} \\ &= \int_1^\infty |(f \cdot g)_t(x)| \frac{dx}{e^x} < \infty, \end{aligned} \quad (2.8)$$

pues en $L^1(e^{-x})$ la traslación está bien definida. Luego $f_t \in L^1(w)$. \square

Proposición 2.6. Sea $w(x) = e^{-x^p}$ con $0 < p < 1$. Para cada $f \in L^1(w)$ y $1 \geq t > 0$, se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f_t - f\|_w = 0.$$

Demostración. Bastará verificar las hipótesis del Teorema 1.1 teniendo presente que la acotación uniforme de $\|\Lambda_t f\|_w$, $0 < t \leq 1$, se obtiene de la propiedad monótona de g . \square

Analicemos finalmente lo que ocurre con el peso exponencial, si $p > 1$. Para $x \geq 1$ y $p > 1$, definamos $w(x) = e^{-x^p}$ y $f(x) = e^{x^p}/x^2$. Obviamente, $f \in L^1(w)$, pues

$$\int_1^\infty |f(x)|w(x)dx = \int_1^\infty \frac{e^{x^p}}{x^2} e^{-x^p} dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty.$$

Sin embargo, para cualquier $t > 0$ que fijemos, aseguramos que $f_t \notin L^1(w)$.

Para demostrar esta aseveración, desarrollamos la serie de Taylor de la función auxiliar $g(u) = u^p$, $u \geq 1$, $p > 0$, con resto de Lagrange. Se tiene:

$$g'(u) = pu^{p-1}$$

y

$$g''(u) = p(p-1)u^{p-2}.$$

Sean $u_0 = x \geq 1$ y $u = u_0 + t$, con $t > 0$ fijo. Entonces

$$(x+t)^p = x^p + ptx^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}\xi^{p-2}t^2, \quad (2.9)$$

donde $\xi \in (x, x+t)$. Siendo el último término de (2.9) estrictamente positivo, se obtiene que:

$$(x+t)^p > x^p + ptx^{p-1},$$

aplicando ahora que la función exponencial es estrictamente creciente

$$e^{(x+t)^p} > e^{x^p} \cdot e^{ptx^{p-1}}.$$

Regresando a nuestra aseveración de que $f_t \notin L^1(w)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty |f_t(x)|w(x)dx &= \int_1^\infty \frac{e^{(x+t)^p}}{(x+t)^2} \frac{dx}{e^{x^p}} \\ &\geq \int_1^\infty \frac{e^{x^p} \cdot e^{ptx^{p-1}}}{(x+t)^2} \frac{dx}{e^{x^p}} \\ &= \int_1^\infty \frac{e^{ptx^{p-1}}}{(x+t)^2} dx = \infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

□

2.3. Resumen sobre el Problema de Plessner en $L^1(w)$

Presentamos una tabla que resume los casos tratados en este Capítulo. Así, se tiene, en función de $p \in \mathbb{R}$, pesos w definidos en $[1, \infty)$ y $t > 0$, la tabla siguiente sobre el problema de Plessner:

Peso	Exponente	$f \in L^1(w) \Rightarrow f_t \in L^1(w)$	Continuidad de la traslación
$w(x) = x^p$	$p \in \mathbb{R}$	<i>Si</i>	<i>Si</i>
$w(x) = e^{-(x^p)}$	$0 \leq p \leq 1$	<i>Si</i>	<i>Si</i>
$w(x) = e^{-(x^p)}$	$p > 1$	<i>No</i>	-----

Cuadro 2.1. Resumen del análisis.

Capítulo 3

Espacios de Hölder en $L^1(w)$

Como fue mencionado en la Introducción, en este capítulo definiremos los espacios de Hölder sobre \mathbb{R} , a partir del espacio de Banach $L^1(w)$, donde w es un peso de Bernstein. Comenzamos por mencionar algunas definiciones y resultados básicos de los espacios clásicos de Hölder.

3.1. Definición General de Funciones de Hölder

Definición 3.1. Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos no triviales. Una función $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ se llama de Lipschitz si existe una constante $0 \leq M < \infty$ tal que

$$\rho(f(p), f(q)) \leq Md(p, q),$$

para todos los $p, q \in X$. El ínfimo de todos estos M , es llamado el número de Lipschitz de f y aquí lo denotamos por $\theta(f)$. Además, si f es invertible y ambas f y f^{-1} son de Lipschitz, entonces decimos que f es bi-Lipschitz o una casi-isometría.

Alternativamente, $\theta(f)$ puede ser definido por

$$\theta(f) = \sup \left\{ \frac{\rho(f(p), f(q))}{d(p, q)} : p, q \in X, p \neq q \right\}.$$

O de forma equivalente

$$\theta(f) = \sup \left\{ \theta(f, \delta) : 0 < \delta \right\},$$

donde

$$\theta(f, \delta) = \sup \left\{ \frac{\rho(f(p), f(q))}{d(p, q)} : p, q \in X, 0 < d(p, q) \leq \delta \right\}.$$

De acuerdo con lo anterior, f es de Lipschitz si $\theta(f) < +\infty$, de otra forma (si $\theta(f) = \infty$) se dice que f no es de Lipschitz. Como se puede ver, la condición de Lipschitz simplemente establece que estas funciones expanden distancias por no más de un factor universal.

Proposición 3.1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $0 < \alpha < 1$, entonces $d^\alpha(x, y) \doteq (d(x, y))^\alpha$ es también una métrica.

Obviamente $d^1 = d$ si incluimos $\alpha = 1$ [7, Hernández M., J. M., 2012].

Definición 3.2. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $0 < \alpha < 1$. Si $f : (X, d^\alpha) \rightarrow (Y, \rho)$ es de Lipschitz, se dice que f es de Hölder de orden α .

Como en definitiva ser de Hölder significa de Lipschitz con una nueva métrica, con el tiempo se han utilizado como sinónimos, indistintamente las denominaciones de función de Lipschitz o de Hölder.

Sean d y ρ las métricas de X e Y respectivamente. Por $\theta^\alpha(f)$ denotamos la constante de Lipschitz de orden $0 < \alpha \leq 1$, $(\theta(f)) = (\theta^1(f))$ y por $Lip^\alpha(X, Y)$ al conjunto de todas las funciones que sean de Lipschitz. Si $Y = \mathbb{R}$, simplemente escribiremos $Lip^\alpha(X)$.

Existe abundante teoría sobre los espacios de Lipschitz. Por ejemplo, puede consultar [1, Bustamante-Jiménez, 2001], [3, DeVore-Lorentz, 1993],[8, Lorentz, 1996],[15, Weaver, 1999].

Observación 3.1. También se pueden considerar espacios de Hölder (o de Lipschitz) de orden superior $Lip^\alpha(B)$ contenidos en un espacio de Banach B , del tipo $C(A)$ o $L_p(A)$, siendo $A = [a, b]$, \mathbb{R}^+ , \mathbb{R} o $\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, con \mathbb{Z} el grupo de números enteros. Estos espacios están formados por aquellas funciones f para las cuales $\theta^\alpha(f) < +\infty$, donde $\theta^\alpha(\cdot)$ es el supremo de la familia de seminormas

$$\theta^\alpha(\cdot, \delta)_B = \sup \left\{ \frac{\|\Delta_t^r(\cdot)\|_B}{|t|^\alpha} : 0 < |t| \leq \delta \right\}; \text{ con } \delta > 0,$$

donde r es un número natural y Δ_t^r una diferencia de orden superior que precisaremos enseguida, B cualquiera de los espacios ya mencionados y $\|\cdot\|_B$ la norma en este espacio [3, DeVore-Lorentz, 1993].

Sea $f_t : A \rightarrow \mathbb{R}$ la función trasladada, o sea $f_t(x) = f(x + t)$. El incremento $\Delta_t^r f$ se define por $\Delta_t^1 f(x) = \Delta_t f(x) = (f_t - f)(x)$, y los incrementos de orden superior $\Delta_t^r f = \Delta_t(\Delta_t^{r-1} f)$ por inducción. Para la definición de θ^α se toma $r = [\alpha] + 1$; donde $[\cdot]$ representa la función parte entera.

Si A no es un grupo, como por ejemplo, $A = [a, b]$; el incremento $x + t$ no pertenece a A necesariamente. En estos casos se toman definiciones alternativas.

Teorema 3.1. Sea $0 < \alpha \leq 1$, $a \in \mathbb{R}$ y $f, g \in Lip^\alpha(A)$; entonces

1. $\theta^\alpha(af) = |a|\theta^\alpha(f)$.
2. $\theta^\alpha(f + g) \leq \theta^\alpha(f) + \theta^\alpha(g)$.

$Lip^\alpha(B)$ es un subespacio lineal del espacio normado B , que se norma mediante

$$\|f\|_{Lip^\alpha} = \|f\|_B + \theta^\alpha(f).$$

Si B es de Banach, entonces

$$\left(Lip^\alpha(B), \|\cdot\|_{Lip^\alpha} \right)$$

es un espacio de Banach.

En el caso de funciones continuas, se tendría

$$\|f\|_{Lip^\alpha} = \|f\|_\infty + \theta^\alpha(f).$$

Como se ha mencionado, la constante de Lipschitz $\theta^\alpha(f)$ con $0 < \alpha \leq 1$, es caracterizada de la manera siguiente:

$$\theta^\alpha(f) = \sup \left\{ \theta^\alpha(f, \delta) : \delta > 0 \right\},$$

donde:

$$\theta^\alpha(f, \delta) = \sup \left\{ \frac{\|f(p) - f(q)\|_B}{d(p,q)^\alpha} : p, q \in A, 0 < d^\alpha(p, q) \leq \delta \right\}.$$

De importancia significativa en la teoría de espacios de Hölder son los llamados espacios Lipschitz pequeños, que introducimos a continuación con la ayuda de $\theta^\alpha(f, \delta)$.

Definición 3.3. Sea $B = C(A)$ o $L^p(A)$, con $A = [0, 1]$ o $A = \mathbb{T}$, $0 < \alpha \leq 1$ y $f \in Lip^\alpha(B)$. Entonces f es una función Lipschitz pequeña si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left(0 < |t|^\alpha \leq \delta \right) \Rightarrow \left(\|f(p) - f(q)\|_B \leq \epsilon |t|^\alpha \right).$$

Esto es equivalente a

$$\theta^\alpha(f, \delta) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \delta \rightarrow 0. \tag{3.1}$$

El espacio Lipschitz pequeño $lip^\alpha(B)$ es el formado por cada una de las funciones en $Lip^\alpha(B)$, que satisfacen (3.1). Su importancia queda de manifiesto en cuanto sabemos que en los casos clásicos, $Lip^\alpha(B)$ no es separable, en tanto que el espacio $lip^\alpha(B)$ sí lo es. Por tanto, la aproximación polinomial de $f \in Lip^\alpha(B)$, $B = C(\mathbb{T})$ o $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, por ejemplo, sólo es posible si $f \in lip^\alpha(B)$.

3.2. Funciones de Hölder en $L^1(w)$

Estamos en condiciones de definir los espacios de Hölder en $B = L^1(w)$, de manera tal que sepamos cuando la definición es satisfactoria. Esto pone de manifiesto la relevancia de los resultados de esta tesis.

Sean $0 < \alpha \leq 1$, $0 < t \leq 1$ y $L^1(w)$ el espacio de Banach construido en el capítulo anterior en dependencia de un peso w . Basándonos en la teoría clásica de espacios de Hölder definiremos estos subespacios de $L^1(w)$ de la manera siguiente:

$$Lip^\alpha(w) = Lip^\alpha(L^1(w)) \doteq \{f \in L^1(w) : \theta^\alpha(f)_w < \infty\},$$

donde

$$\theta^\alpha(f)_w \doteq \sup\{\theta^\alpha(f, \delta)_w : 0 < \delta\},$$

y

$$\theta^\alpha(f, \delta)_w \doteq \sup\left\{\frac{\|f_t - f\|_w}{t^\alpha} : 0 < t \leq \delta\right\}.$$

Lo anterior, siempre y cuando w sea uno de los pesos donde f_t esté bien definida. Como demuestra el cuadro 2.1, esto ocurre para $w(x) = x^p$, $p \in \mathbb{R}$ o $w(x) = \exp\{-x^p\}$, para $0 \leq p \leq 1$. Para el estudio de la aproximación polinomial en estos espacios, si nos restringimos a que w sea un peso de Bernstein, este debe ser de la forma $w(x) = \exp\{-x^s\}$ con $s \geq 1$. Se puede consultar [9, Lubinsky, 2007] para ver los casos de la aproximación uniforme como para los espacios L^p , con $1 \leq p < \infty$. Esto nos deja sólo el caso $w(x) = e^{-x}$.

El funcional $\theta^\alpha(f)_w$ es una seminorma. Por otro lado, de los resultados clásicos tenemos que

$$Lip^\alpha(w)$$

es un espacio normado, con norma

$$\|f\|_{Lip^\alpha(w)} = \|f\|_{Lip^\alpha(L^1(w))} = \|f\|_w + \theta^\alpha(f)_w.$$

Definimos los espacios de Hölder pequeños como:

$$lip^\alpha(w) \doteq \{f \in Lip^\alpha(w) : \theta^\alpha(f, \delta)_w \rightarrow 0 \text{ cuando } \delta \rightarrow 0\}.$$

El estudio de estos espacios en el contexto de la Teoría de la Aproximación, será un estudio que pretendemos llevar a cabo en mis estudios de doctorado.

Conclusiones

Esta tesis consiste en el estudio del problema de Plessner para dominios no acotados de \mathbb{R} , en el espacio de Banach $L^1(w)$, donde w es una función peso.

En el primer Capítulo, analizamos y damos respuesta afirmativa a este problema de manera general para funciones sobre ciertos grupos clásicos.

En el Capítulo 2, hemos resuelto favorablemente el problema de Plessner para pesos polinomiales y funciones racionales del tipo algebraico. Para pesos exponenciales sobre el dominio \mathbb{R}^+ , de la forma $w(x) = e^{-x^p}$ la respuesta al problema de Plessner es afirmativa sólo si $0 \leq p \leq 1$.

En el tercer y último Capítulo hemos empleado los resultados previos, para definir los espacios de Hölder de interés práctico para la aproximación de funciones, en el espacio de Banach $L^1(w)$.

Apéndice: Teoremas de Impacto Utilizados

Teorema: [*Luzin*]. Supongamos que f es una función medible con valores complejos definida sobre X , A un conjunto medible tal que $\mu(A) < \infty$, $f(x) = 0$ si $x \notin A$, y $\epsilon > 0$. Entonces existe $g \in C_K(X)$ tal que $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon$. Además, puede definirse g de manera que:

$$\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Vea ([11]).

Teorema: [*Banach-Steinhaus*]. Supongamos que X es un espacio de Banach, Y es un espacio normado y $\{\Lambda_\alpha\}$ es una colección de operadores lineales acotados de X en Y , donde α toma valores sobre un conjunto no vacío de índices A . Si

$$\sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha x\| < \infty$$

para todo $x \in X$; entonces existe $M < \infty$ tal que

$$\sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha\| \leq M.$$

Teorema: [*Representación de Riesz*]. Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, y sea Λ un funcional lineal positivo definido sobre $C_K(X)$. Entonces existe una σ -álgebra Σ en X que contiene todos los conjuntos de Borel en X ,

y una medida positiva μ definida sobre Σ que representa a Λ en el sentido que:

$$\Lambda f = \int_X f d\mu, \text{ para cada } f \in C_K(X).$$

Además, hay una única medida representativa de Λ tal que:

1. $\mu(K) < \infty$ para cada conjunto $K \subset X$ compacto.
2. Para cada $E \in \Sigma$, se cumple:

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ abierto}\}.$$

3. La relación

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}$$

es válida para cada conjunto abierto E y para cada $E \in \Sigma$ que sea σ -compacto.

4. Si $E \in \Sigma$, $A \subset E$, y $\mu(E) = 0$, entonces $A \in \Sigma$.

Una medida μ definida sobre la σ -álgebra de todos los conjuntos de Borel de un espacio localmente compacto de Hausdorff X , es llamada medida de Borel sobre X .

Una medida μ es llamada regular si satisface las propiedades 2 y 3 del teorema de Representación de Riesz.

Una medida de Haar sobre un grupo abeliano localmente compacto G es una medida regular positiva de Borel μ que es finita sobre compactos e invariante bajo traslaciones de G , es decir,

- $\mu(E) < \infty$, si E es compacto.
- $\mu(E + x) = \mu(E)$ para todo conjunto medible $E \subset G$ y para todo $x \in G$.

La medida de Haar siempre existe y es única salvo multiplicación por una constante positiva.

Bibliografía

- [1] Bustamante J. y Jiménez-Pozo M. A., *Trends in Hölder Approximation*, Marc Lassonde, Physica-Verlag, pp. 81-96, 2001.
- [2] Bustamante J. y Jiménez-Pozo M. A., *Contributions to the study of polynomial approximation in Hölder spaces*, FCFM-BUAP, Matemáticas y sus Aplicaciones 3, textos científicos, Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, ISBN: 978 607 487 659 8., pp. 5-24. Puebla, México., 2013.
- [3] DeVore R. A. y Lorentz G. G., *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, ISBN: 3-540-50627-6. 1993.
- [4] Dunford N., *On a Theorem of Plessner*, Brown University, pp. 356-358. June 1935.
- [5] Gaiter D., *Abraham Ezechiel Plessner (1900-1961), His Work and His Life*, The Mathematical Intelligencer, vol. 14, No. 13, pp. 31-36. Springer-verlag, New York, 1992.
- [6] Hernández C. A., *Espacios de Hölder con Pesos tipo Bernstein*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, BUAP, Puebla, México, 2013.

-
- [7] Hernández M., J. M., *Espacios de Lipschitz con normas asimétricas*, Tesis Doctoral en Matemáticas, Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, BUAP, Puebla, México, 2012.
- [8] Lorentz G. G.; Golitschek V. M. y Makovoz Y., *Constructive Approximation (Advanced Problems)*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, ISBN: 3-540-57028-4. 1996.
- [9] Lubinsky D. S., *A Survey of Weighted Polynomial Approximation with Exponential*, Surveys in Approximation Theory, ISSN 1555-578X. Volume 3. pp. 1-105. 2007.
- [10] Plessner A. E., *Eine Kennzeichnung der totalstetigen Funktionen*, Von A. Plessner in Gießen, Journal für Mathematik, J. Reine Angew Math., vol. 160, pp. 26-32, 1929. JB 55, 143.
- [11] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Third Edition, ISBN: 0-07-054234-1. 1987.
- [12] Triebel H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, Friedrich Schiller University of Jena, German Democratic Republic, VEB Deutscher verlag der Wissenschaften, ISBN: 0 7204 2450x. Berlin, 1978.
- [13] Triebel H., *Theory of Function Spaces*, Monographs in Mathematics, vol. 78, Birkhäuser verlag, Basel-Boston-Stuttgart, ISBN: 3-7643-1381-1. 1983.
- [14] Triebel H., *Theory of Function Spaces II*, Monographs in Mathematics, vol. 84, Birkhäuser verlag, Basel-Boston-Berlin, ISBN: 3-7643-2639-5. 1992.
- [15] Weaver N., *Lipschitz Algebras*, World Scientific Publishing Co., ISBN: 9810238738. 1999.

Simbología

Símbolos	Definición
$L^p, 0 < p < \infty$	Espacios Lebesgue integrables, con $0 < p < \infty$.
\mathbb{R}	El conjunto de los números reales.
\mathbb{R}^+	El conjunto de los números reales positivos.
$[1, \infty)$	Subconjunto de los números reales.
\mathbb{R}^*	El conjunto de los números reales extendido.
$L^1(w)$	Espacio Integrable en dependencia del peso w .
$L^1(G)$	Espacio Integrable asociado al grupo G .
μ	Medida de Haar.
$\ \cdot\ _w$	Norma asociada al espacio $L^1(w)$.
E	Espacio Normado.
G	Grupo.
f_t	Traslación aditiva de la función f .
(G, \circ)	Grupo asociado con operación binaria \circ .
$L^1(e^{-x})$	Espacio Integrable en dependencia del peso e^{-x} .
Λ_t	Operadores de Traslación.
\mathbb{T}	El conjunto de los números complejos módulo 1.
\mathbb{R}_k	El producto cartesiano de k copias de \mathbb{R} .
\mathbb{T}_k	El producto cartesiano de k copias de \mathbb{T} .
$C_K(G)$	El espacio de funciones continuas con soporte compacto definidas sobre un grupo G .
—	
$C([1, \infty))$	El espacio de funciones continuas definidas sobre el intervalo $[1, \infty)$.
—	

Índice Alfabético

Métricas Mixtas 1
Espacios de Besov 1
Problema de Plessner 4, 14
Operador de Traslación 7
Teorema de Luzin 9, 29
Teorema de Acotación Uniforme 10, 19, 29
Fórmula de Taylor 20
Resto de Lagrange 20
Lipschitz 22
Número de Lipschitz 22
Bi-Lipschitz 22
Función trasladada 24
Funciones Lipschitz pequeñas 25
Espacio Lipschitz pequeño 25
Teorema de Representación de Riesz 29
Medida de Borel 30
Medida Regular 30
Medida de Haar 30, 30