



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN OPTOELECTRÓNICA

TIEMPO DE RETARDO EN SUPERREDES DE FIBONACCI
BAJO LA ACCIÓN DE CAMPOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRÍA EN OPTOELECTRÓNICA

PRESENTA:

CLEMENTE AGUILAR GALICIA

DIRECCIÓN DE TESIS:

DRA. MARTHA ALICIA PALOMINO OVANDO

FCFM, BUAP

AGOSTO DE 2000 (AGOSTO DE 2017)

CONTENIDO

RESUMEN	2
INTRODUCCIÓN	3
CAPÍTULO 1: FORMALISMO	5
1.1. Ecuación de Schrödinger	5
1.2. Condiciones de frontera	6
1.3. Aplicación a superredes	7
1.4. Solución parcial de la ecuación de Schrödinger	12
1.5. Condiciones de frontera y matriz de transferencia	14
1.6. Tunelamiento	22
1.7. Tiempo de retardo	23
CAPÍTULO 2: SUPERREDES DE FIBONACCI	26
CAPÍTULO 3: APLICACIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS Y/O ELÉCTRICOS	31
3.1. Comparación de los estados ligados con los estados asociados al efecto túnel	31
3.2. Resultados cuando se aplica un campo magnético y/o un campo eléctrico	40
3.2.1. Algunos aspectos de la matriz de transferencia	40
3.2.2. Divergencia positiva o negativa del tiempo de retardo	43
3.2.3. Desplazamiento y pérdida de estados cuasiligados	46
3.2.4. Comportamiento de los máximos y mínimos relativos de $ T ^2$, t_v , τ y C_T	49
3.2.5. Un breve cálculo clásico sobre t_v y τ . Comparación con los resultados cuánticos	51
3.2.6. Gráficas representativas de este trabajo	52
CONCLUSIONES GENERALES	61

RESUMEN

En óptica, la descripción de una onda plana que pasa por un conjunto de capas de diferente índice de refracción, se ve afectada por un cambio de fase con respecto a una onda plana que no atraviesa el sistema de dichas capas. Tal cambio de fase contiene la información de un “tiempo de retardo”, de la primera onda con respecto a la segunda, para llegar a un punto determinado.

En mecánica cuántica tenemos una situación parecida. Por ejemplo, la descripción del paso de un electrón a través del potencial establecido por la estructura de bandas de los materiales de las capas que conforman una superred, se refleja en un cambio de amplitud y de fase de la función de onda (una onda plana), con respecto a la función de onda de un electrón que se mueve sin atravesar la superred. También en este caso el cambio de fase contiene la información de la diferencia (a la que llamaremos tiempo de retardo τ) entre el tiempo necesario para cruzar por la superred (al que denotaremos como t_v) y el tiempo empleado para recorrer la misma distancia pero libremente, es decir, sin pasar por la superred (al que denotaremos como t_l). Además, el cuadrado del valor absoluto de la amplitud de la función de onda transmitida (coeficiente de transmisión o tunelamiento), nos da la probabilidad de que el electrón incidente aparezca al otro lado de la superred.

El cálculo numérico de tiempos de retardo y de tunelamientos, en función de la energía total del electrón incidente, ya se ha tratado en superredes cuasiperiódicas de Fibonacci [1]. La variante de este trabajo consiste en la aplicación adicional de campos magnéticos y/o eléctricos:

Para conocer τ (t_v), es necesario resolver la ecuación tridimensional de Schrödinger y satisfacer las adecuadas condiciones de frontera. Los potenciales electromagnéticos que usaremos son tales que, es posible efectuar una separación de variables y reducir el problema a la solución de una ecuación de Schrödinger en una dimensión. Aún más, el perfil del potencial unidimensional resultante se aproxima por una configuración típica de integración. Por lo que respecta a las condiciones de frontera, estas se toman en cuenta a través del método de la matriz de transferencia. Precisamente, τ (t_v) se expresa mediante los elementos de dicha matriz de transferencia.

De acuerdo con lo último, se obtienen gráficas para el tunelamiento y el tiempo de retardo, y se da una explicación cualitativa de las características generales observadas. Por ejemplo, se aprecia un corrimiento de las gráficas hacia mayores energías, cuando se aplican campos magnéticos y/o eléctricos. También se hacen comparaciones con las superredes periódicas.

INTRODUCCIÓN

El reciente desarrollo sobre técnicas de crecimiento de películas delgadas, ha permitido fabricar estructuras en una amplia variedad de formas [2, 3, 4].

Por las propiedades físicas de transporte eléctrico que presentan han sido objeto de amplio estudio teórico y experimental [5, 6], las heteroestructuras formadas por capas de dos materiales diferentes y que se superponen alternadamente. A este tipo de estructuras se les denomina superredes. En estos sistemas los electrones se mueven bajo la influencia de un potencial interno en la dirección de crecimiento de la superred, debido a la estructura de bandas de los dos materiales, mientras que en las otras dos direcciones, en una primera aproximación, tienen un movimiento libre que es paralelo a las interfaces; esto puede modificarse por la presencia de campos externos. Las aplicaciones tecnológicas de estas heteroestructuras son amplias en la microelectrónica y optoelectrónica, como el caso del diodo túnel [7, 8].

Si pensamos en dos semiconductores que tengan anchos diferentes de energía prohibida, entonces se produce una estructura de pozos y barreras para la banda de conducción. A partir de la ecuación de Schrödinger, de la aproximación de masa efectiva [9, 10] y de las adecuadas condiciones de frontera en cada una de las interfaces, podemos determinar numéricamente la amplitud de la función de onda transmitida que corresponde a la incidencia de los electrones sobre un extremo de la superred. El conocimiento de la amplitud de transmisión es parte de la solución del problema de como calcular τ (t_v). Conocer τ (t_v) como función de la energía del electrón incidente es importante, ya que uno de los retos de la tecnología actual es generar dispositivos con un menor tiempo de respuesta [11].

Por otro lado, las heteroestructuras periódicas debido a sus propiedades de simetría han sido objeto de numerosas investigaciones [12, 13]. Sin embargo el estudio de las heteroestructuras cuasiperiódicas, como la de Fibonacci y la de Thue-Morse [12, 14], aunque también es amplio, está más limitado y el interés de éstas radica en que son un caso intermedio entre las periódicas y las completamente desordenadas.

En lo que corresponde a la estructura de la tesis, se procedió como a continuación se describe:

A) En el capítulo 1 se describe el formalismo básico necesario para la comprensión de los procesos cuánticos y operacionales que intervienen en nuestro trabajo. Entre los conceptos que aquí se mencionan, juegan un papel importante los tiempos t_v y τ asociados a los paquetes de ondas [15, 16].

B) El capítulo 2 está dedicado a las superredes de Fibonacci. Aquí podemos señalar la razón dorada, que liga los números de Fibonacci con la construcción de las superredes correspondientes.

C) En el capítulo 3 pueden distinguirse tres partes:

C₁) En la primera parte se supone cierta correspondencia física entre las características de los estados ligados y los estados no ligados, para energías donde clásicamente no existe el fenómeno de tunelamiento a través de una superred. Esto con el fin de tener un primer indicio sobre el comportamiento de t_v y τ .

C₂) La segunda parte consiste en una justificación analítica sencilla acerca del comportamiento de t_v y τ .

C₃) La tercera parte presenta gráficas obtenidas por cálculo numérico. Tales gráficas están de acuerdo con las características cualitativas generales obtenidas para t_v y τ .

D) Conclusiones.

CAPÍTULO 1

FORMALISMO

Bajo la aproximación básica de la masa efectiva como medio para tomar en cuenta el efecto del campo que tiene su origen en la disposición de los átomos que constituyen a la superred, los potenciales electromagnéticos externos que corresponden a campos eléctricos y magnéticos constantes en la dirección z de crecimiento de la superred, dan lugar a que en la ecuación de Schrödinger para este caso, pueda efectuarse una separación de todas las variables, espaciales y temporales, además de que se encuentran soluciones analíticas exactas, excepto para la ecuación que depende de la coordenada z .

Parte importante de las soluciones de la ecuación de Schrödinger, es la consideración de las condiciones de frontera, las cuales se toman en cuenta por el método de la matriz de transferencia.

A través del análisis de un paquete de ondas, se encuentra que la fase de la amplitud de la función de onda transmitida está relacionada con el tiempo que emplea un electrón para atravesar la superred.

1.1. ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

Consideremos una partícula de carga q y masa m , en los potenciales electromagnéticos escalar y vectorial que respectivamente son $\phi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, y en un potencial escalar adicional $V(\mathbf{r}, t)$. Para este sistema, la ecuación de Schrödinger es [15]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 + q\phi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.1)$$

donde ∇ es el operador gradiente y $\Psi(\mathbf{r}, t)$ es la función de onda asociada a la partícula.

En el desarrollo de este trabajo, emplearemos expresiones independientes del tiempo para los potenciales vectorial y escalares. Cuando esto ocurre podemos separar las variables \mathbf{r} y t , obteniendo

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-iEt/\hbar}, \quad (1.2)$$

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + q\phi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (1.3)$$

donde E representa la energía total de la partícula. La ecuación (1.3) es la llamada ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

1.2. CONDICIONES DE FRONTERA

Empleando la ecuación de Schrödinger (1.1) podemos obtener la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho &= \Psi^* \Psi, \\ \mathbf{J} &= \text{Re} \left[\Psi^* \left(\frac{\hbar}{im} \nabla - \frac{q}{m} \mathbf{A} \right) \Psi \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

La interpretación que daremos a $\rho = \Psi^* \Psi$ es la de una densidad de partículas y $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ es la densidad de corriente de partículas.

La forma integral de la ecuación de continuidad aclara su contenido de ley de conservación del número de partículas. En efecto, integrando la ecuación (1.4) en un volumen V limitado por la superficie S , y aplicando el teorema de la divergencia

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dv = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = - \oint_S \mathbf{J} \cdot ds. \quad (1.6)$$

De la última ecuación se deduce que el cambio del número de partículas por unidad de tiempo, dentro de V , sólo se debe al flujo de \mathbf{J} a través de S . Aunque ésta sea la situación física que tenemos, puede ocurrir que la descripción matemática no sea correcta si \mathbf{J} es discontinua. En otras palabras, si \mathbf{J} es discontinua puede ocurrir que el teorema de la divergencia (segunda ecuación (1.6)) no sea válido.

De manera que, no olvidando la interpretación de $\Psi^* \Psi$, las condiciones que podemos exigir, en principio, a las soluciones de la ecuación de Schrödinger son:

- a) Tanto Ψ como \mathbf{J} deben ser funciones finitas en todo punto.
- b) Tanto Ψ como \mathbf{J} deben ser funciones continuas en todo punto.

Como veremos, en este trabajo, la segunda condición se aplica básicamente en las “fronteras” de discontinuidad que presenta el potencial escalar $V(\mathbf{r})$.

1.3. APLICACIÓN A SUPERREDES

Aplicaremos la ecuación de Schrödinger al movimiento de un electrón dentro de un cristal. Bloch demostró [9] que las funciones de onda que son soluciones de la ecuación de Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_P(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (1.6a)$$

con potencial $V_P(\mathbf{r})$ cuyo período es igual al de la red, tienen la forma

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = U_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.6b)$$

donde $U_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ es una función con período igual al de la red. La función $U_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ depende del vector de onda \mathbf{k} , también depende de \mathbf{k} la energía del electrón $E(\mathbf{k})$.

La expresión para $E(\mathbf{k})$ en un pequeño entorno de \mathbf{k}_0 , puede limitarse a los tres primeros términos de la serie de Taylor. Si $E(\mathbf{k}_0)$ es un valor mínimo local de la energía del electrón, entonces el segundo término de la serie de Taylor se anula, por lo que podemos escribir

$$E(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k}_0) + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{m_{\alpha\beta}^*} (k_\alpha - k_{0\alpha})(k_\beta - k_{0\beta}), \quad (1.6c)$$

donde $\alpha(\beta) = x, y, z$, y el conjunto de elementos

$$\frac{1}{m_{\alpha\beta}^*} = \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \right)_{\mathbf{k}_0} \quad (1.6d)$$

constituyen el tensor de la masa efectiva inversa. Este tensor es simétrico, es decir $(1/m_{\alpha\beta}^*) = (1/m_{\beta\alpha}^*)$, puesto que $(\partial^2 E / \partial k_\alpha \partial k_\beta) = (\partial^2 E / \partial k_\beta \partial k_\alpha)$. Escogiendo el correspondiente sistema de coordenadas, el tensor simétrico puede reducirse a la forma $(1/m_{\alpha\beta}^*) = (1/m_{\alpha\beta}^*) \delta_{\alpha\beta}$. En este caso, la expresión (1.6c) se reduce a

$$E(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k}_0) + \frac{\hbar^2(k_x - k_{0x})^2}{2m_{xx}^*} + \frac{\hbar^2(k_y - k_{0y})^2}{2m_{yy}^*} + \frac{\hbar^2(k_z - k_{0z})^2}{2m_{zz}^*}. \quad (1.6e)$$

La expresión (1.6e) es el espectro energético de las soluciones de la ecuación (1.6a), en el entorno

del punto mínimo \mathbf{k}_0 . Podemos verificar rápidamente que este mismo espectro es proporcionado por las soluciones

$$\psi_0(\mathbf{r}) = A e^{i[(k_x - k_{0x})x + (k_y - k_{0y})y + (k_z - k_{0z})z]}, \quad (1.6f)$$

de la ecuación

$$\begin{aligned} & \left[E(\mathbf{k}_0) - \frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \right] \psi_0(\mathbf{r}) = \\ & = \left[E(\mathbf{k}_0) - \frac{\hbar^2}{2m_{xx}^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m_{yy}^*} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\hbar^2}{2m_{zz}^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_0(\mathbf{r}) = E_0 \psi_0(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.6g)$$

En el sentido que hemos argumentado, los operadores

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + E(\mathbf{k}_0) \quad \text{y} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_P(\mathbf{r}) \quad (1.6h)$$

son equivalentes. En otras palabras, el efecto del potencial periódico de la red $V_P(\mathbf{r})$, puede sustituirse por una masa efectiva m^* y un potencial constante $E(\mathbf{k}_0)$. Esto proporciona una justificación para que en nuestro trabajo, solamente tomemos en cuenta al potencial constante $E(\mathbf{k}_0)$ y a los potenciales externos $\phi(\mathbf{r})$ y $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, con tal de sustituir la masa real m del electrón, por su masa efectiva m^* . Aún más, para cristales con simetría cúbica como el *GaAs* y el $Al_xGa_{1-x}As$ que emplearemos, se encuentra que $m_{xx}^* = m_{yy}^* = m_{zz}^* = m^*$.

Como las masas efectivas que usaremos dependen de la función $E(\mathbf{k})$ para cada material, y del punto mínimo \mathbf{k}_0 correspondiente (ver (1.6d)), dichas masas serán diferentes. En el capítulo 2 (ecuación (2.7)) se da una expresión para las masas efectivas, en términos de la fracción molar x del aluminio.

Por otra parte, una superred se forma superponiendo alternadamente capas finísimas de materiales diferentes. Las capas varían su espesor de 10 a 500 Å (figura 1.1).

Podemos pensar en materiales que tengan anchos de energía prohibida E_{G1} y E_{G2} diferentes, produciendo para la banda de conducción un potencial $V(\mathbf{r})$ con estructura de pozos y barreras (figuras 1.2 y 1.3), a causa de que los potenciales constantes $E(\mathbf{k}_0)$ son diferentes para cada material.

Tomando como referencia las figuras 1.2 y 1.3, podemos mencionar respectivamente dos clases de superredes:

Superred tipo I. Aquí los perfiles de las bandas son tales que un tope de la banda de valencia y un fondo de la banda de conducción varían en direcciones opuestas. Alternativamente, podemos decir que una banda de energía prohibida contiene totalmente a la otra.

Superred tipo II. En este caso un tope de la banda de valencia y un fondo de la banda de conducción varían en la misma dirección. Alternativamente, puede decirse que una banda de energía prohibida contiene parcialmente a la otra.

De manera que en este trabajo, la aplicación de la ecuación de Schrödinger debe considerar dos supuestos:

- c) En cada capa debe sustituirse m por la masa efectiva respectiva m^* .
- d) El potencial $V(\mathbf{r})$, creado por las capas de distinto material, es un potencial de pozos y barreras.

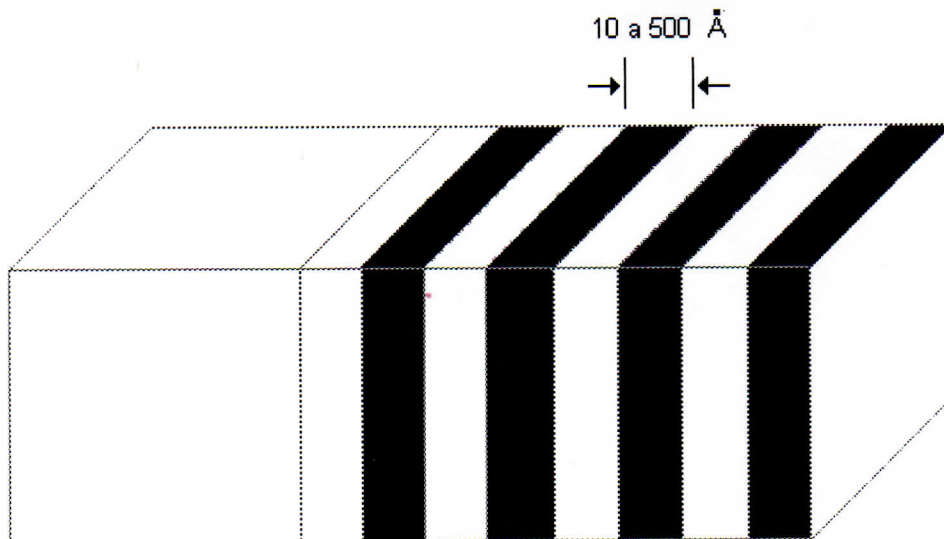


Figura 1.1. Capas finísimas de materiales diferentes superpuestas alternadamente forman una superred. Las capas son depositadas sobre un material base o sustrato.

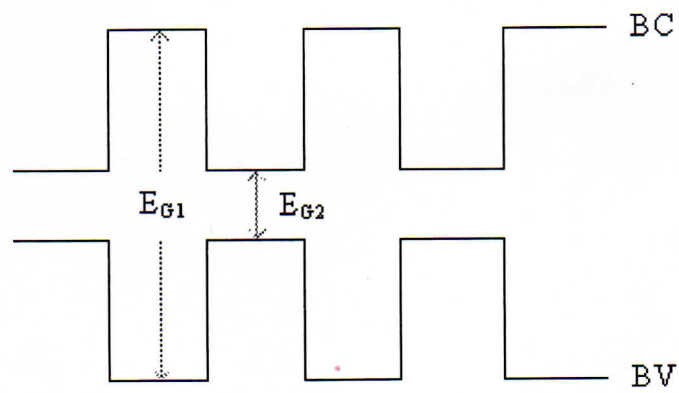
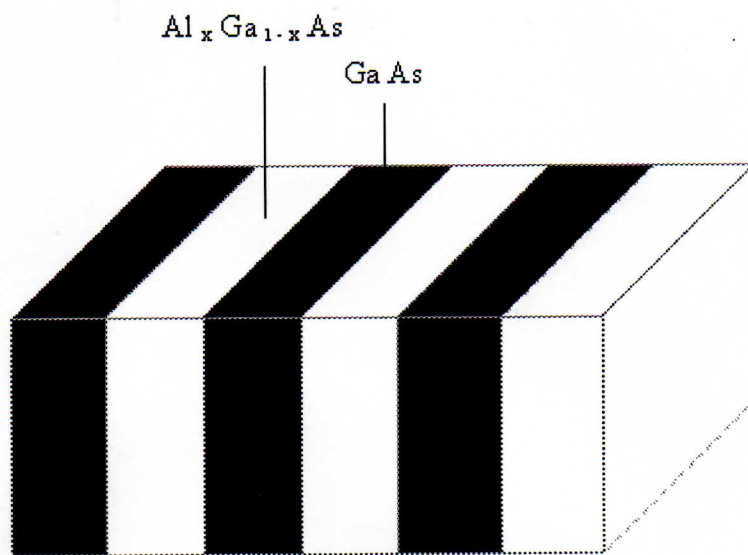


Figura 1.2. Superred tipo I.

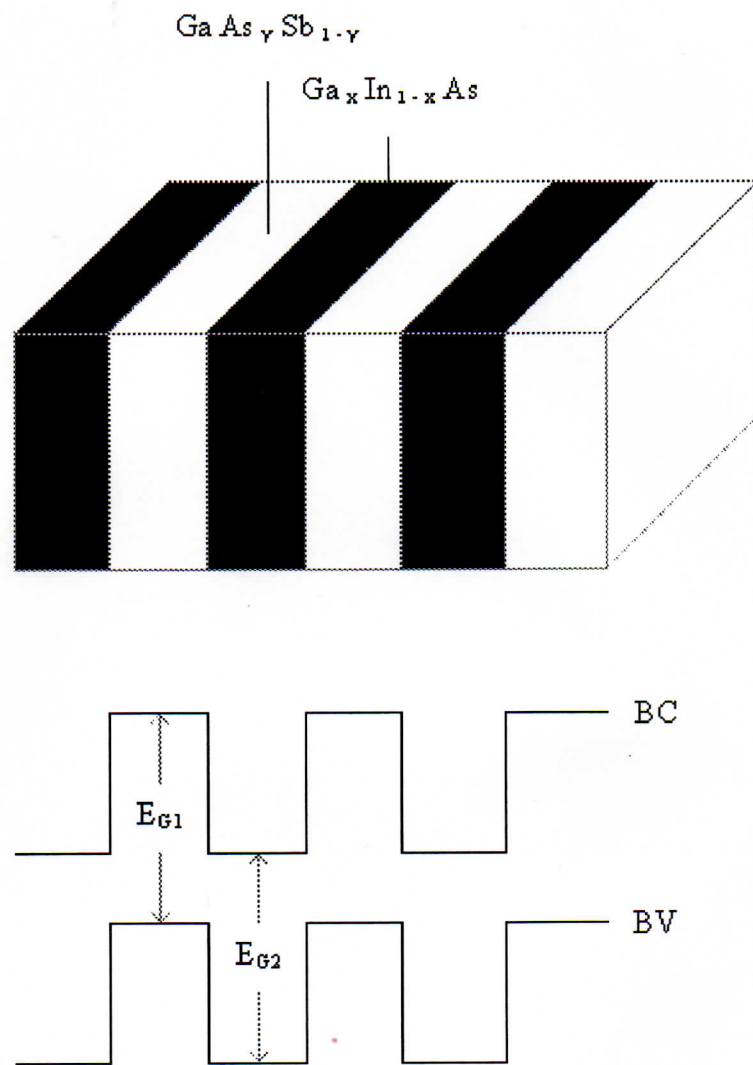


Figura 1.3. Superred tipo II.

1.4. SOLUCIÓN PARCIAL DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

Podemos tomar el eje de crecimiento de la superred como el eje z , con lo cual $V(\mathbf{r}) = V(z)$. Además estamos interesados en el efecto que se produce en el tiempo de transmisión bajo la acción de campos constantes, eléctrico \mathbf{E}_0 y magnético \mathbf{B}_0 , cuyas direcciones se eligen de tal forma que los potenciales correspondientes pueden escribirse como

$$\varphi = -E_0 z, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{A} = (-B_0 y, 0, 0). \quad (1.8)$$

Considerando la relación entre potenciales y campos electromagnéticos

$$\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_0), \quad (1.9)$$

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0). \quad (1.10)$$

Sustituyendo los potenciales que acabamos de especificar, en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (1.3), recordando que debe considerarse la masa efectiva y después de algunas operaciones

$$\left[\frac{1}{2m^*} \left(-\hbar^2 \nabla^2 + \frac{2\hbar q B_0}{i} y \frac{\partial}{\partial x} + q^2 B_0^2 y^2 \right) - q E_0 z + V(z) \right] \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}). \quad (1.11)$$

Podemos efectuar una separación de variables en (1.11), para obtener

$$\frac{1}{2m^*} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2\hbar q B_0}{i} y \frac{\partial}{\partial x} + q^2 B_0^2 y^2 \right) \psi_1(x, y) = E_1 \psi_1(x, y), \quad (1.12)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dz^2} - q E_0 z + V(z) \right] \psi_2(z) = E_2 \psi_2(z), \quad (1.13)$$

donde

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_1(x, y) \psi_2(z), \quad (1.14)$$

$$E = E_1 + E_2 . \quad (1.15)$$

Con k un parámetro continuo y real, podemos proponer

$$\psi_1(x, y) = e^{ikx} \phi_1(y) , \quad (1.16)$$

lo que nos conduce a

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{q^2 B_0^2}{2m^*} \left(y + \frac{\hbar k}{qB_0} \right)^2 \right] \phi_1(y) = E_1 \phi_1(y) . \quad (1.17)$$

La ecuación (1.17) es la correspondiente a un oscilador armónico, por lo cual [17]

$$E_{1L} = \left(L + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar |qB_0|}{m^*} , \quad (1.18)$$

$$\phi_{1L}(\xi) = C_L e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_L(\xi) ,$$

donde H_L es el polinomio de Hermite de orden L y

$$L = 0, 1, 2, \dots ,$$

$$\xi = \left(\frac{|qB_0|}{\hbar} \right)^{1/2} \left(y + \frac{\hbar k}{qB_0} \right) ,$$

$$C_L = \left[\left(\frac{\pi \hbar}{|qB_0|} \right)^{1/2} 2^n n! \right]^{-1/2} .$$

Debemos señalar que en nuestro trabajo, más que las funciones propias (1.16), lo importante son los valores propios correspondientes E_{1L} . De acuerdo con ésto, ya que E_{1L} no depende del valor de k , no nos preocuparemos por la elección de tal valor.

Después de la solución parcial que se ha encontrado, sólo falta por resolver la ecuación (1.13), que escribiremos bajo la forma

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dz^2} + V(z) + \left(L + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar |qB_0|}{m^*} - qE_0 z \right] \psi_2(z) = E \psi_2(z) , \quad (1.19)$$

donde hemos empleado las ecuaciones (1.15) y (1.18).

La ecuación (1.19) contiene esencialmente todos los elementos para la discusión de nuestro trabajo. Observemos que dicha ecuación no depende de k .

1.5. CONDICIONES DE FRONTERA Y MATRIZ DE TRANSFERENCIA

Observando la expresión para \mathbf{J} , ecuación (1.5), vemos que la condición de continuidad b), dentro de cualquiera de los materiales de la superred, se satisface si Ψ y $\nabla\Psi$ son continuas en todo punto. Claro está, suponemos que \mathbf{A} es continua. Sin embargo, en las coordenadas z que separan un material de otro, la continuidad de \mathbf{J} no se cumple debido a que las masas efectivas correspondientes son diferentes.

Debido a la diferencia de masas efectivas, parece que no hay manera de que la condición de continuidad b) pueda satisfacerse, pero si como en este caso $A_z = 0$, entonces al menos J_z es continua y el teorema de la divergencia aplicado a \mathbf{J} es válido en una caja rectangular con aristas paralelas a los ejes de coordenadas, si se cumple que:

b₁) Ψ es continua en todo punto.

b₂) $\frac{1}{m^*} \frac{\partial\Psi}{\partial z}$ es continua en todo punto.

Después de haber encontrado que

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{ikx} \phi_{1L}(y) \psi_2(z) e^{-iEt/\hbar}, \quad (1.20)$$

y suponiendo que k y L no cambian una vez que sus valores se han definido [16], la condición de continuidad b_{1,2}) se reduce a la siguiente condición unidimensional [24] para las soluciones de la ecuación (1.19):

b₃) $\psi_2(z)$ debe ser continua en todo punto.

b₄) $\frac{1}{m^*} \frac{d}{dz} \psi_2(z)$ debe ser continua en todo punto.

Ahora resolveremos aproximadamente la ecuación diferencial (1.19), sustituyendo el potencial

$$U(z) = V(z) + \left(L + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar |qB_0|}{m^*} - qE_0 z, \quad (1.21)$$

por un potencial de escalones rectangulares, que se ajuste en lo posible al perfil del primero. Las figuras 1.4, 1.5 y 1.6 muestran un esquema de la situación:

La parte superior de la figura 1.4a muestra el potencial de pozos y barreras $V(z)$ creado por la estructura de bandas de una superred tipo I; la altura de las barreras es V_0 . La parte inferior de la misma figura muestra el potencial $E_{1L}(z)$ dado por el segundo término del segundo miembro de la ecuación (1.21); en este potencial se mantiene fijo L , pero como las capas de la superred tienen masas efectivas diferentes, entonces también se obtiene una configuración de pozos y barreras. Los potenciales $V(z)$ y $E_{1L}(z)$ se han dibujado separados, pero con relación a un mismo sistema de coordenadas z - E y suponiendo que la masa efectiva en los pozos de $E_{1L}(z)$ (barreras de $V(z)$) es mayor que en las barreras (pozos) correspondientes.

La figura 1.4b es un esquema del potencial de pozos y barreras $V(z) + E_{1L}(z)$, donde se observa que la altura efectiva V_1 de sus barreras, es menor que V_0 , la altura efectiva de las barreras de $V(z)$.

La parte inferior de la figura 1.4c es el potencial $-qE_0 z$, y la parte superior de la misma figura representa el potencial $U(z) = V(z) + E_{1L}(z) - qE_0 z$, siendo $q = -e$ la carga del electrón.

Observemos que para el potencial eléctrico (1.7)

$$\begin{aligned} q\varphi(z) &= 0 & z < 0, \\ q\varphi(z) &= -qE_0 z & 0 < z < d, \\ q\varphi(z) &= -qE_0 d & d < z, \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde d es la longitud de la superred.

La figura 1.5 muestra a $U(z)$ y una configuración correspondiente de n regiones escalonadas, características de un proceso de integración. Los escalones tienen alturas U_j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$), y nos servirán para resolver aproximadamente en cada región j , la ecuación diferencial (1.19).

En la figura 1.6 se tiene la notación relacionada con la región j , así como con las regiones exteriores a la superred, a las que llamaremos 0 y $n + 1$. Con esta aclaración, podemos considerar que j varía de 0 a $n + 1$. En ocasiones también emplearemos a j como un índice de sumatoria, sin que necesariamente cambie de la misma forma.

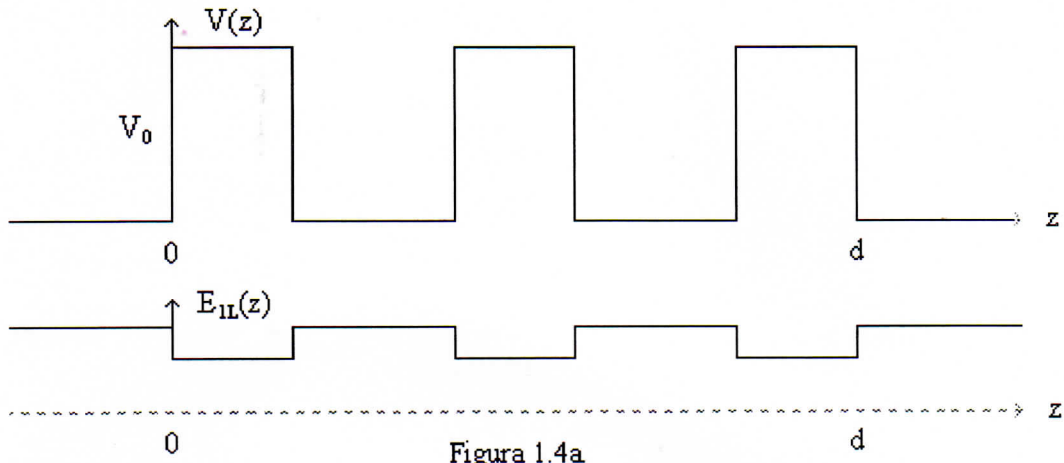


Figura 1.4a

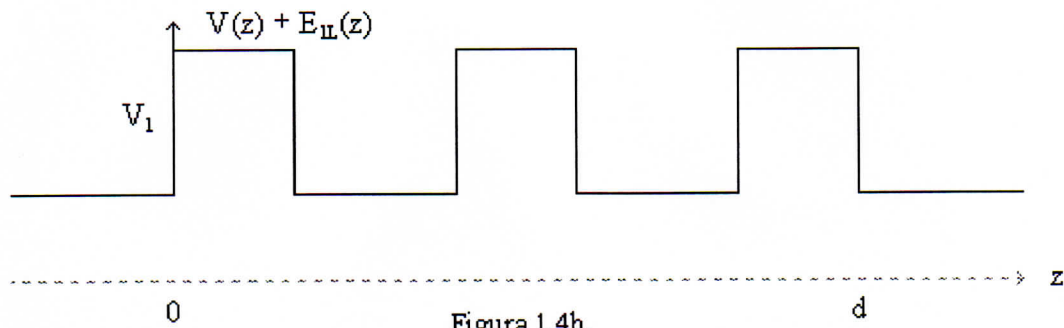


Figura 1.4b.

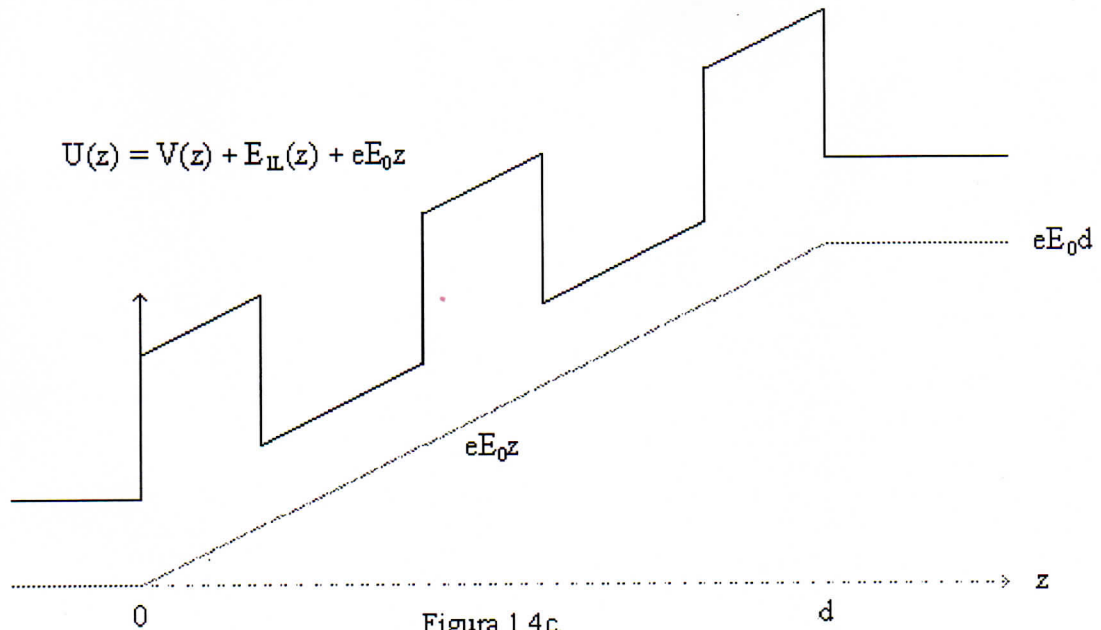


Figura 1.4c.

Figura 1.4. Componentes del potencial $U(z)$. (a) $V(z)$ es el potencial asociado a la estructura de bandas de una superred. $E_{II}(z)$ toma en cuenta el efecto del campo magnético. (b) $V_1 < V_0$, el efecto del campo magnético disminuye la altura efectiva original de las barreras. (c) El potencial eléctrico, gráfica inferior, origina una inclinación de los pozos y las barreras.

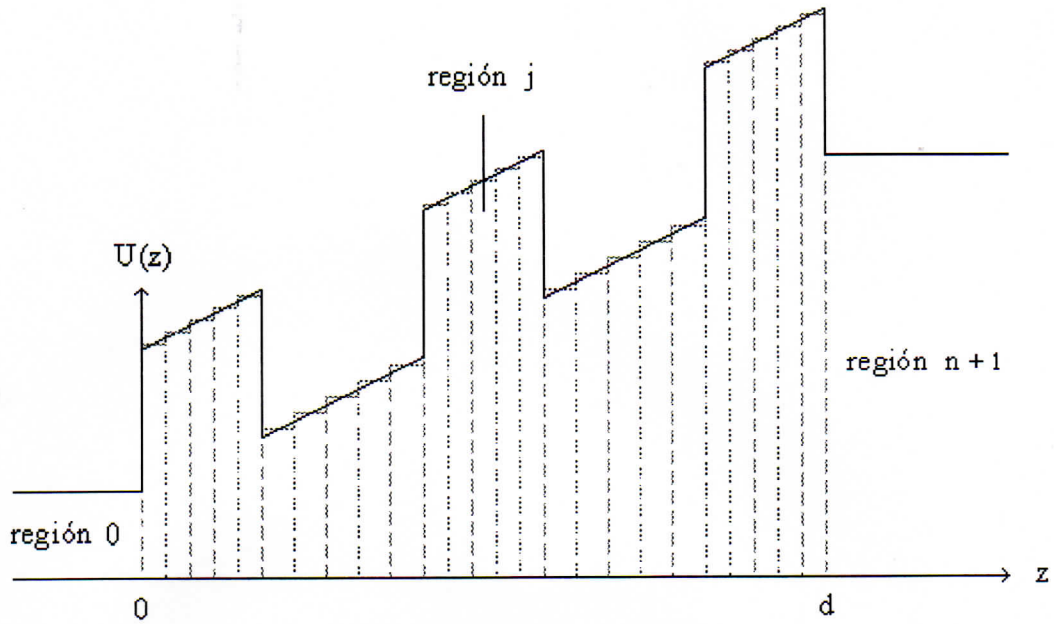


Figura 1.5. Aproximación de $U(z)$.

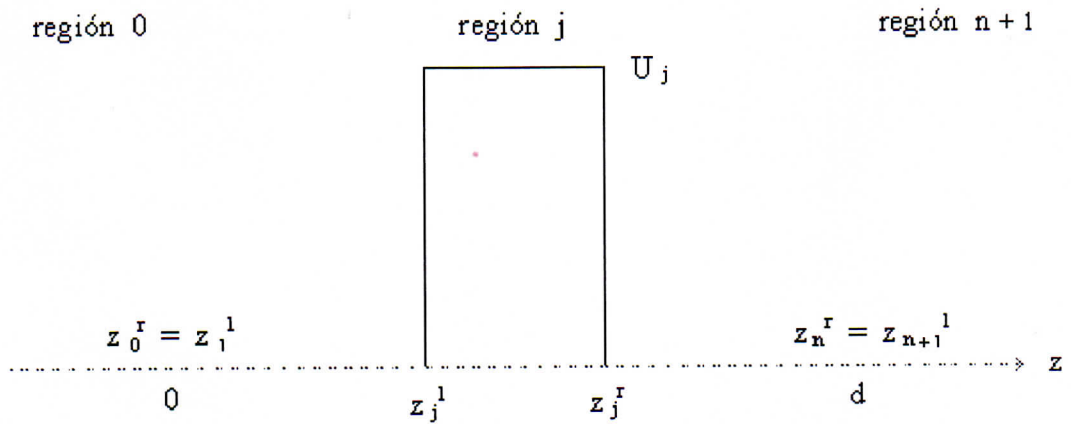


Figura 1.6. Ampliación de la anchura $d_j = z_j^r - z_j^l$ del escalón j .

Una vez que se ha planteado el esquema de aproximación de la figura 1.5, la condición de continuidad $b_{3,4}$, en las fronteras de los n escalones, se llevará a cabo por el método de la matriz de transferencia. A continuación se describe tal método.

Con los cambios de notación correspondientes, escribamos la ecuación (1.19) para la j -ésima región de la figura 1.5, cuyo ancho se amplía en la figura 1.6

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_j} \frac{d^2}{dz^2} + U_j\right)\alpha_j(z) = E\alpha_j(z), \quad (1.23)$$

donde claro está, $\alpha_j(z) = \psi_2(z)$ en dicha región.

La solución general de la ecuación (1.23) es

$$\alpha_j(z) = A_j^+ e^{ik_j z} + A_j^- e^{-ik_j z}, \quad (1.24)$$

con

$$k_j = \left[\frac{2m_j}{\hbar^2} (E - U_j) \right]^{1/2}. \quad (1.25)$$

Definamos

$$\beta_j(z) = \frac{1}{m_j} \frac{d}{dz} \alpha_j(z) = \frac{ik_j}{m_j} A_j^+ e^{ik_j z} - \frac{ik_j}{m_j} A_j^- e^{-ik_j z}. \quad (1.26)$$

Si consideramos a $\alpha_j(z)$ y $\beta_j(z)$ como las componentes de un vector columna, entonces

$$\begin{pmatrix} \alpha_j(z) \\ \beta_j(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{ik_j}{m_j} & -\frac{ik_j}{m_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j^+ e^{ik_j z} \\ A_j^- e^{-ik_j z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{ik_j}{m_j} & -\frac{ik_j}{m_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ik_j z} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j^+ \\ A_j^- \end{pmatrix} \\
&= S_j T_j(z) \begin{pmatrix} A_j^+ \\ A_j^- \end{pmatrix}, \tag{1.27}
\end{aligned}$$

donde es claro que

$$S_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{ik_j}{m_j} & -\frac{ik_j}{m_j} \end{pmatrix}, \tag{1.28}$$

$$T_j(z) = \begin{pmatrix} e^{ik_j z} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j z} \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

De acuerdo con la notación de la figura 1.6 y la ecuación (1.27), tenemos en las coordenadas extremas z_j^l (izquierda) y z_j^r (derecha) de la región j

$$\begin{pmatrix} \alpha_j(z_j^l) \\ \beta_j(z_j^l) \end{pmatrix} = S_j T_j(z_j^l) \begin{pmatrix} A_j^+ \\ A_j^- \end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_j(z_j^r) \\ \beta_j(z_j^r) \end{pmatrix} = S_j T_j(z_j^r) \begin{pmatrix} A_j^+ \\ A_j^- \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

Sustituyendo (1.29) en (1.31), la introducción de la matrix identidad bajo la forma $T_j(-z_j^l)T_j(z_j^l)$ y reasociando

$$\begin{pmatrix} \alpha_j(z_j^r) \\ \beta_j(z_j^r) \end{pmatrix} = S_j \begin{pmatrix} e^{ik_j z_j^r} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j z_j^r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j^+ \\ A_j^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= S_j \begin{pmatrix} e^{ik_j z_j^r} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j z_j^r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ik_j z_j^l} & 0 \\ 0 & e^{ik_j z_j^l} \end{pmatrix} \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} e^{ik_j z_j^l} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j z_j^l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j^+ \\ A_j^- \end{pmatrix} \\
&= S_j \begin{pmatrix} e^{ik_j(z_j^r - z_j^l)} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j(z_j^r - z_j^l)} \end{pmatrix} T_j(z_j^l) \begin{pmatrix} A_j^+ \\ A_j^- \end{pmatrix} \\
&= S_j T_j(d_j) T_j(z_j^l) \begin{pmatrix} A_j^+ \\ A_j^- \end{pmatrix}, \tag{1.32}
\end{aligned}$$

donde evidentemente $d_j = z_j^r - z_j^l$.

Si en la ecuación (1.32) utilizamos la (1.30)

$$\begin{pmatrix} \alpha_j(z_j^r) \\ \beta_j(z_j^r) \end{pmatrix} = S_j T_j(d_j) S_j^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_j(z_j^l) \\ \beta_j(z_j^l) \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} \alpha_j(z_j^l) \\ \beta_j(z_j^l) \end{pmatrix}, \tag{1.33}$$

donde naturalmente

$$M_j = S_j T_j(d_j) S_j^{-1}. \tag{1.34}$$

M_j es la matriz de transferencia correspondiente al escalón j -ésimo. Apliquemos alternadamente, la condición de continuidad $b_{3,4}$, CONTINUIDAD, así como la relación de transferencia (1.33), TRANSFERENCIA, a las fronteras de la sucesión de regiones $n + 1, n, \dots, 1, 0$, que aparecen en las figuras 1.5 y 1.6:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \alpha_{n+1}(z_{n+1}^1) \\ \beta_{n+1}(z_{n+1}^1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_n(z_n^r) \\ \beta_n(z_n^r) \end{pmatrix} &= M_n \begin{pmatrix} \alpha_n(z_n^1) \\ \beta_n(z_n^1) \end{pmatrix} \\
 &= M_n \begin{pmatrix} \alpha_{n-1}(z_{n-1}^r) \\ \beta_{n-1}(z_{n-1}^r) \end{pmatrix} &= M_n M_{n-1} \begin{pmatrix} \alpha_{n-1}(z_{n-1}^1) \\ \beta_{n-1}(z_{n-1}^1) \end{pmatrix} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &= M_n M_{n-1} \dots M_2 \begin{pmatrix} \alpha_1(z_1^r) \\ \beta_1(z_1^r) \end{pmatrix} = M_n M_{n-1} \dots M_2 M_1 \begin{pmatrix} \alpha_1(z_1^1) \\ \beta_1(z_1^1) \end{pmatrix} \\
 &= M_n M_{n-1} \dots M_2 M_1 \begin{pmatrix} \alpha_0(z_0^r) \\ \beta_0(z_0^r) \end{pmatrix}. \tag{1.35}
 \end{aligned}$$

Definiendo la matriz de transferencia M para la superred

$$M = M_n M_{n-1} \dots M_2 M_1, \tag{1.36}$$

y sustituyéndola junto con las coordenadas extremas z de la figura 1.6, en (1.35)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1}(d) \\ \beta_{n+1}(d) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_0(0) \\ \beta_0(0) \end{pmatrix}. \tag{1.37}$$

Para obtener M es necesario conocer

$$\begin{aligned}
 M_j = S_j T_j(d_j) S_j^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{ik_j}{m_j} & -\frac{ik_j}{m_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ik_j d_j} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j d_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{m_j}{2ik_j} \\ \frac{1}{2} & -\frac{m_j}{2ik_j} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos k_j d_j & \frac{m_j}{k_j} \operatorname{sen} k_j d_j \\ -\frac{k_j}{m_j} \operatorname{sen} k_j d_j & \cos k_j d_j \end{pmatrix}. \tag{1.38}
 \end{aligned}$$

1.6. TUNELAMIENTO

Las soluciones, de la ecuación (1.23), para las regiones exteriores a la superred pueden escribirse

$$\begin{aligned}
 \alpha_0(z) &= e^{ik_0 z} + R e^{-ik_0 z}, \\
 \alpha_{n+1}(z) &= T e^{ik_{n+1} z}, \tag{1.39}
 \end{aligned}$$

las cuales describen una onda incidente, una onda reflejada por las discontinuidades del potencial de aproximación, y una onda transmitida.

Sustituyendo (1.20) y (1.39) en (1.5)

$$\begin{aligned}
 J_{z_0} &= \frac{\hbar k_0}{m_0} (1 - |R|^2) |\phi_{1L}(y)|^2 & z < 0, \\
 J_{z_{(n+1)}} &= \frac{\hbar k_{n+1}}{m_0} |T|^2 |\phi_{1L}(y)|^2 & d < z. \tag{1.40}
 \end{aligned}$$

Puesto que hemos satisfecho la condición de continuidad $b_{3,4}$, el teorema de la divergencia nos conduce a $J_{z_0} = J_{z_{(n+1)}}$, de donde se obtiene

$$1 = |R|^2 + \frac{k_{n+1}}{k_0} |T|^2 = |R|^2 + C_T, \tag{1.41}$$

donde $|R|^2$ es el coeficiente de reflexión y $C_T = (k_{n+1}/k_0)|T|^2$ es el coeficiente de transmisión o tunelamiento. Observemos que debido a (1.41), nuestra interpretación inicial para $\Psi^*\Psi$, como una densidad de partículas, no se contrapone con una reinterpretación de una probabilidad de reflexión para $|R|^2$ y una probabilidad de transmisión para C_T .

Si sustituimos (1.26) y (1.39) en (1.37)

$$\begin{pmatrix} T e^{ik_{n+1}d} \\ \frac{ik_{n+1}}{m_0} T e^{ik_{n+1}d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + R \\ \frac{ik_0}{m_0} (1 - R) \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

de donde

$$T = \frac{\begin{vmatrix} M_{21} + \frac{ik_0 M_{22}}{m_0} & -M_{21} + \frac{ik_0 M_{22}}{m_0} \\ M_{11} + \frac{ik_0 M_{12}}{m_0} & -M_{11} + \frac{ik_0 M_{12}}{m_0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{ik_{n+1}}{m_0} e^{ik_{n+1}d} & -M_{21} + \frac{ik_0 M_{22}}{m_0} \\ e^{ik_{n+1}d} & -M_{11} + \frac{ik_0 M_{12}}{m_0} \end{vmatrix}}. \quad (1.43)$$

1.7. TIEMPO DE RETARDO

A partir de (1.20) y (1.39) podemos construir la aproximación clásica [15] del problema de transmisión de electrones que estamos tratando. Consideremos los paquetes de ondas incidente y transmitido

$$\Psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = e^{ikx} \phi_{1L}(y) \int c(k_0 - k'_0) e^{ik'_0 z - i\omega' t} dk'_0, \quad (1.44)$$

$$\Psi_{\text{trans}}(\mathbf{r}, t) = e^{ikx} \phi_{1L}(y) \int |T(k'_{n+1})| c(k_{n+1} - k'_{n+1}) e^{ik'_{n+1} z - i\omega' t + i\delta} dk'_{n+1}, \quad (1.45)$$

donde el superíndice primado por el momento no tiene el significado de una derivada sino de variable de integración, δ es la fase asociada al tunelamiento,

$$E' = \hbar\omega' = \frac{\hbar^2 k_j'^2}{2m_0} + U_j \quad j = 0, n+1$$

y $c(k_j - k_j')$ es una función real de k_j' , suficientemente regular y que presenta una cúspide muy pronunciada en el punto $k_j' = k_j$ (podemos pensar en una distribución rectangular de impulsos [17]). También hemos empleado el hecho de que $m_{n+1} = m_0$.

Ahora bien, las contribuciones más importantes a los paquetes de ondas incidente y transmitido, se obtienen cuando en el dominio de integración las fases se mantienen aproximadamente constantes. Esto permite definir los centros de los paquetes de ondas de acuerdo con la condición

$$\frac{\partial}{\partial k_0}(k_0 z - \omega t) = 0, \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial k_{n+1}}(k_{n+1} z - \omega t + \delta) = 0. \quad (1.47)$$

De (1.46) y (1.47) obtenemos

$$z = \frac{\partial \omega}{\partial k_0} t = \frac{\hbar k_0}{m_0} t, \quad (1.48)$$

$$z = \frac{\partial \omega}{\partial k_{n+1}} t - \frac{\partial \delta}{\partial k_{n+1}} = \frac{\hbar k_{n+1}}{m_0} t - \frac{\hbar^2 k_{n+1}}{m_0} \frac{\partial \delta}{\partial E}, \quad (1.49)$$

que son respectivamente los centros de los paquetes de ondas incidente y transmitido. Sabemos que estos centros pueden identificarse con la posición del electrón.

Observemos que el centro del paquete incidente llega a $z = 0$ en $t = 0$, mientras que el centro del paquete transmitido sale de la superred en $z = d$, para

$$t = t_v = \hbar \frac{\partial \delta}{\partial E} + \frac{m_0 d}{\hbar k_{n+1}} = \hbar \frac{\partial \delta}{\partial E} + \hbar d \frac{dk_{n+1}}{dE}, \quad (1.50)$$

donde hemos hecho una transformación de acuerdo con (1.25).

Podemos pensar en la construcción de paquetes de ondas correspondientes a cada una de las n regiones de potencial constante U_j , y debido a que la condición de continuidad b_3) también es

satisfecha por los paquetes de ondas, en cualquier instante, podemos interpretar a t_v como el tiempo que el electrón emplea en atravesar la superred, en el caso de que sea transmitido. No debemos olvidar que también existe la probabilidad de que el electrón sea reflejado.

Por otra parte, de (1.48) podemos ver que un electrón que se mueve libremente con la energía cinética $E - U_0$, sale de $z = d$ en el tiempo

$$t = t_1 = \frac{m_0 d}{\hbar k_0} = \hbar d \frac{dk_0}{dE}, \quad (1.51)$$

donde nuevamente hemos reescrito de acuerdo con (1.25).

Podemos definir un tiempo de retardo τ , con respecto a t_1 , para el paso del electrón por la superred. De acuerdo con (1.50) y (1.51)

$$\tau = t_v - t_1 = \hbar \frac{\partial \delta}{\partial E} + \hbar d \frac{dk_{n+1}}{dE} - \hbar d \frac{dk_0}{dE}. \quad (1.52)$$

Observemos que de no existir el campo eléctrico de la figura 1.4, entonces $k_{n+1} = k_0$ y en consecuencia $\tau = \hbar(\partial \delta / \partial E)$.

CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO 1

Bajo las condiciones que hemos establecido, el desarrollo teórico que hemos presentado bien puede aplicarse a cualquier ordenamiento de placas cristalinas, de dos o más materiales diferentes, efecto representado en forma general por el potencial $V(z)$. Queda entonces por señalar las características específicas de tal potencial.

CAPITULO 2

SUPERREDES DE FIBONACCI

Además de las superredes periódicas tipo I y II, bosquejadas en las figuras del capítulo 1, pueden crearse superredes tipo I y II con cualquier regularidad. Especialmente nos interesaremos en aquellas tipo I que tengan una cuasiperiodicidad determinada por la relación de recurrencia de Fibonacci, a las que llamaremos superredes de Fibonacci. Tal crecimiento fue realizado primeramente por Merlin et al [2], empleando la técnica “Epitaxia por Haces Moleculares” (MBE, Molecular Beam Epitaxy).

El formalismo del capítulo 1 se aplica a cualquier sucesión de barreras y pozos rectangulares de potencial, por lo que todo lo que allí se dijo es válido para toda superred, en particular para la de Fibonacci. De manera que en este capítulo nos concretaremos a la descripción de los aspectos relacionados con la construcción de las superredes de Fibonacci.

Si $F_0 = F_1 = 1$, se obtiene la sucesión de los llamados números de Fibonacci con la ecuación de recurrencia

$$F_N = F_{N-1} + F_{N-2}, \quad N = 2, 3, 4, \dots \quad (2.1)$$

La sucesión de Fibonacci de dos objetos cualesquiera $L = G_0$ y $S = G_1$, se define a través de la operación de “colocación”

$$G_N = G_{N-1} G_{N-2}, \quad N = 2, 3, 4, \dots, \quad (2.2)$$

cuyos primeros elementos y su relación con los números de Fibonacci son:

	$F_N = v(L, S)$	$F_{N-1} = v(S)$	$F_{N-2} = v(L)$
$G_0 = L$	1		
$G_1 = S$	1	1	
$G_2 = SL$	2	1	1
$G_3 = SLS$	3	2	1
$G_4 = SLSSL$	5	3	2
$G_5 = SLSSL SLS$	8	5	3,

donde para el elemento G_N , F_N es igual al número de objetos L y S , F_{N-1} es igual al número de objetos S y F_{N-2} es igual al número de objetos L .

Se conoce como razón dorada al cociente

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \frac{F_{N-1}}{F_{N-2}} = \frac{F_{N-2} + F_{N-3}}{F_{N-2}} = 1 + \frac{F_{N-3}}{F_{N-2}} \\ &= 1 + \frac{1}{\sigma_{N-1}}, \quad N = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Tomando el límite de la ecuación (2.3)

$$\begin{aligned} \sigma &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = 1 + \frac{1}{\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{N-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{\sigma}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

De la ecuación (2.4) se deduce

$$\sigma = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}), \quad (2.5)$$

aunque por la manera como se construye a los números de Fibonacci, sólo tiene sentido la raíz positiva.

Para construir la superred de Fibonacci, los objetos L y S son dos bloques como los mostrados en la figura 2.1. Los espesores de las capas de los bloques se escogen de tal forma que

$$\frac{D_S + D}{D_L + D} = \sigma. \quad (2.6)$$

La figura 2.2 muestra el potencial $V(z)$ asociado a las superredes de Fibonacci de órdenes más pequeños.

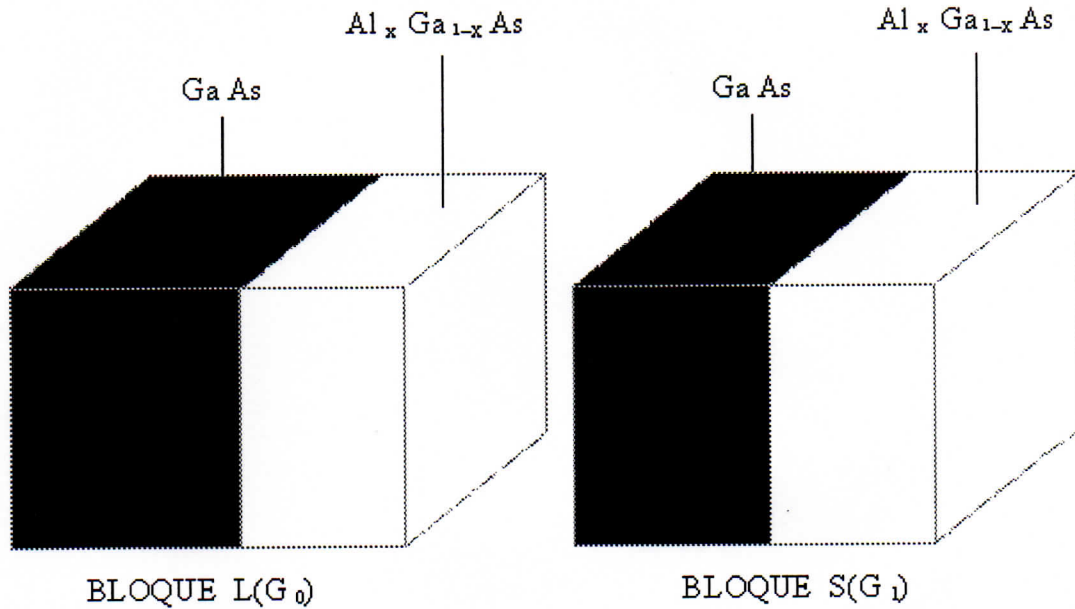


Figura 2.1a.

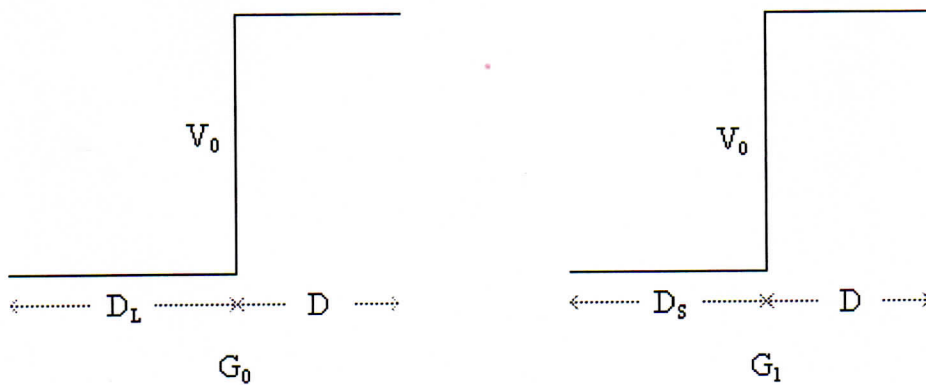


Figura 2.1b.

Figura 2.1. (a) Bloques L y S con los cuales se forma la superred de Fibonacci. (b) Diagramas de bandas y sus dimensiones. La diferencia entre los bloques sólo se debe al ancho de los “pozos”.

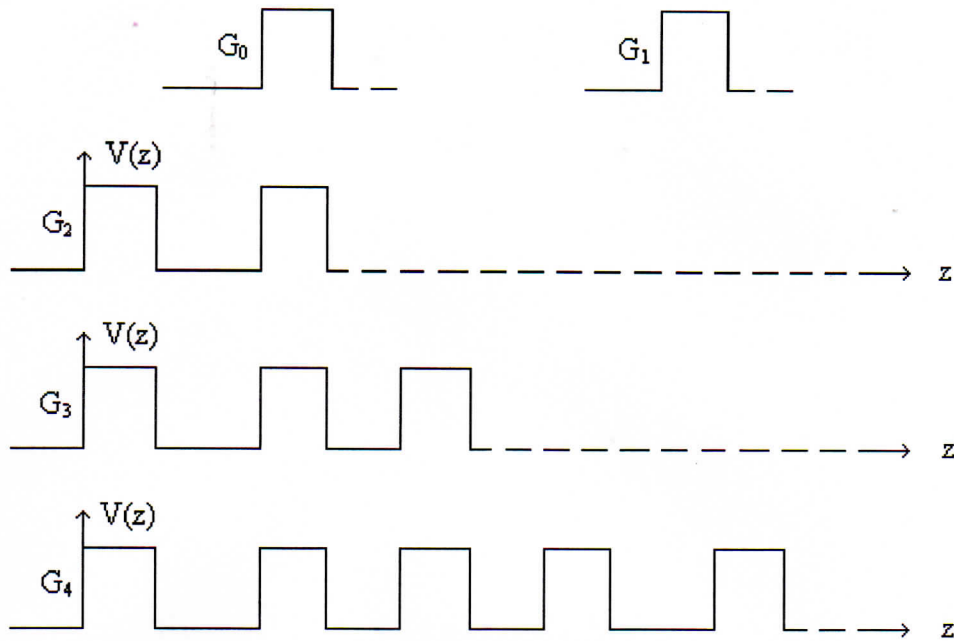


Figura 2.2. Potencial $V(z)$ para las superredes de Fibonacci de órdenes 2, 3 y 4. El eje z representa el eje de crecimiento de las superredes.

Una red construida de esta manera es cuasiperiódica, esto es, es un caso intermedio entre las redes periódicas y las completamente desordenadas. En el caso de las últimas puede observarse que un espectro de transmisión es completamente aleatorio, sin embargo en el caso de las superredes de Fibonacci han logrado observarse patrones de autosimilaridad con una periodicidad de 6 números de generación de Fibonacci [18,19,20]. Otro aspecto interesante de estudio es la localización de los estados que se presentan en estas estructuras cuasiperiódicas y que tiene como consecuencia una disminución en la altura de los picos de transmisión [21,22].

De acuerdo a Mendez [23], la masa efectiva para el electrón en el $GaAs$ y en el $Al_xGa_{1-x}As$, está dada por la expresión

$$m^* = (0.067 + 0.083 x) m_e, \quad (2.7)$$

donde x representa una fracción molar del Al .

La barrera de potencial para el valle Γ , también dada por Mendez, es en eV

$$E(\mathbf{k}_0^{\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}}) - E(\mathbf{k}_0^{\text{GaAs}}) =$$

$$E(\Gamma_{\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}}) - E(\Gamma_{\text{GaAs}}) = 0.7x,$$

$$0 < x < 0.45,$$
(2.8)

que corresponde a transiciones directas en el $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$, y

$$E(\Gamma_{\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}}) - E(\Gamma_{\text{GaAs}}) = 0.7x + 1.15(x - 0.45)^2,$$

$$0.45 < x < 1,$$
(2.9)

correspondiente a transiciones indirectas.

Por lo que señalamos en el capítulo 1, la aproximación de la masa efectiva pierde legitimidad a medida que la energía del electrón se aleja del fondo de la banda de conducción de cada material, por ello elegimos una barrera de potencial con la altura media dada por la ecuación (2.8). Así que para $x = 0.214$, se tienen los parámetros que emplearemos en este trabajo: una masa efectiva de $0.067 m_e$ en el GaAs , una masa efectiva de $0.084 m_e$ en el $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ y una barrera de potencial de $0.150 eV$.

CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO 2

Hemos llegado a un punto en el cual estamos preparados para obtener por cálculo numérico, gráficas de tunelamiento y de tiempo de retardo como funciones de la energía, para valores de los parámetros que dejaremos libres en este trabajo, a saber, el número de generación de Fibonacci N , el potencial eléctrico V , el campo magnético B y el número cuántico L .

CAPÍTULO 3

APLICACIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS Y/O ELÉCTRICOS

En este capítulo obtendremos algunas gráficas representativas de los efectos bajo la aplicación de campos eléctricos y/o magnéticos, pero el objetivo principal radica en poder explicar, cualitativamente, el origen de las características generales observadas en las citadas gráficas. Para ello realizaremos un análisis alrededor de la matriz de transferencia, sin tomar en cuenta si dicha matriz describe un determinado tipo de superred, interesándonos solamente aspectos globales como el ancho total de los pozos y el ancho total de las barreras. Desde luego, también señalaremos algunas particularidades de las superredes de Fibonacci.

3.1. COMPARACIÓN DE LOS ESTADOS LIGADOS CON LOS ESTADOS ASOCIADOS AL EFECTO TÚNEL

Desarrollando y simplificando (1.43), podemos escribir

$$T = |T|e^{i[\tan^{-1}(x_2/x_1) - k_{n+1}d]}, \quad (3.1)$$

donde

$$|T| = (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}, \quad (3.2)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_{n+1}}{k_0} M_{11} + M_{22} \right), \quad (3.3)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_{n+1}}{m_0} M_{12} - \frac{m_0}{k_0} M_{21} \right),$$

y también se ha empleado el hecho de que el determinante de la matriz de transferencia es uno, como se deduce de las expresiones (1.36) y (1.38).

De acuerdo con las relaciones (1.52) y (3.1), tenemos para el tiempo de retardo

$$\begin{aligned}
\tau &= t_v - t_1 = \left[\hbar \frac{\partial \delta}{\partial E} \right] + \left[\hbar d \frac{dk_{n+1}}{dE} - \hbar d \frac{dk_0}{dE} \right] \\
&= \left[\hbar (\tan^{-1}(x_2/x_1))' - \hbar dk'_{n+1} \right] + \left[\hbar dk'_{n+1} - \hbar dk'_0 \right] \\
&= \hbar |T|^2 (x'_2 x_1 - x_2 x'_1) - \hbar dk'_0, \tag{3.4}
\end{aligned}$$

donde, ahora si, el superíndice primado significa derivada con respecto a la energía total E . De aquí en adelante mantendremos este convenio.

De acuerdo con la discusión de la sección 1.7, el término

$$t_1 = \hbar dk'_0 \tag{3.5}$$

es el tiempo que emplea para recorrer la distancia d , un electrón de masa efectiva m_0 y que se mueve libremente con la energía cinética $E - U_0$.

Siguiendo la secuencia de las relaciones (3.4), tenemos para el tiempo total de viaje t_v o tiempo que emplea el electrón para atravesar la superred de longitud d

$$\begin{aligned}
t_v &= t_1 + \tau \\
&= \hbar [\tan^{-1}(x_2/x_1)]' = \hbar |T|^2 (x'_2 x_1 - x_2 x'_1). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Físicamente se requiere, y por lo tanto debemos esperar que $t_v > 0$. Observemos que aún cuando debe cumplirse que $t_v > 0$, la ecuación (3.4) no excluye la posibilidad de tiempos de retardo negativos, sobre todo en los mínimos relativos de $|T|^2$ (más adelante veremos que los valles de τ y $|T|^2$ ocupan aproximadamente la misma posición sobre el eje de la energía total E). En relación con esto, también la secuencia de las relaciones (3.4) nos indica que $\hbar(\partial\delta/\partial E) = t_v - \hbar dk'_{n+1}$; comparando esta igualdad con $\tau = t_v - \hbar dk'_0$, nos damos cuenta de que $\tau_{n+1} \equiv \hbar(\partial\delta/\partial E)$ es otra manera para definir un tiempo de retardo, con respecto a una partícula libre de energía cinética $E - U_{n+1}$. Como $k'_j = [m_j/2\hbar^2(E - U_j)]^{1/2}$, ver la ecuación (1.25), y por la forma de los potenciales de este trabajo (ver

las figuras 1.4 y 1.5), $(k'_{n+1} - k'_0) > 0$, por lo que $\tau_{n+1} = \tau - \hbar d(k'_{n+1} - k'_0)$ es menor que τ y aumenta su posibilidad de ser negativo (ver la figura 3.3, página 56). Ya señalamos en la sección 1.7 que si $U_{n+1} = U_0$ (ausencia de campo eléctrico), entonces $k_{n+1} = k_0$ y en consecuencia $\tau_{n+1} = \tau$.

Seguiremos haciendo un análisis esencialmente cualitativo, tomando como referencia los potenciales de la figura 1.4. Resulta más sencilla la descripción si en esta sección pensamos en un potencial que no incluye el eléctrico.

Para el número de generación de Fibonacci $N = 2$, tenemos la construcción G_2 de un pozo de potencial entre dos barreras de ancho finito (ver la figura 2.2). Hagamos

$$\left(\frac{2m_0\Delta E}{\hbar^2} \right)^{1/2} d_0 = k_0 d_0, \quad (3.7)$$

$$\left[\frac{2m_1(V_1 - \Delta E)}{\hbar^2} \right]^{1/2} d_1 = -ik_1 d_1 = \gamma_1 d_1, \quad (3.8)$$

donde $\Delta E = E - U_0$, d_0 es el ancho del pozo y V_1 , d_1 son la altura y el ancho de las barreras, respectivamente. Lo último y las relaciones (1.36), (1.38) nos permiten establecer la matriz de transferencia para $N = 2$ y $0 < \Delta E < V_1$

$$M = M_1 M_0 M_1, \quad (3.9)$$

donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cosh \gamma_1 d_1 & (m_1/\gamma_1) \operatorname{senh} \gamma_1 d_1 \\ (\gamma_1/m_1) \operatorname{senh} \gamma_1 d_1 & \cosh \gamma_1 d_1 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} \cos k_0 d_0 & (m_0/k_0) \operatorname{sen} k_0 d_0 \\ -(k_0/m_0) \operatorname{sen} k_0 d_0 & \cos k_0 d_0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

En este momento podemos mencionar la idea de estados cuasiligados [16]. Los estados cuasiligados corresponden a los picos del coeficiente de transmisión para energías donde tiene lugar el

efecto túnel, en este caso para el intervalo $0 < \Delta E < V_1$. Podemos mencionar dos razones que permiten hablar de estados cuasiligados: una es la notable similitud entre el espectro energético de los estados ligados, que se obtienen cuando las barreras son de ancho infinito, y el espectro energético de los picos de transmisión de los estados cuasiligados [14]; la otra razón es que para los picos de transmisión de los estados cuasiligados, se obtienen los mayores tiempos de retardo, significando que el paquete de ondas asociado al electrón, escapa lentamente del pozo con barreras de ancho finito [16].

A causa de que los elementos de la matriz de transferencia están incluidos en x_1 , x_2 y de que el coeficiente de transmisión

$$C_T = \frac{k_{n+1}}{k_0} |T|^2 = \frac{k_{n+1}}{k_0} (x_1^2 + x_2^2)^{-1} \quad (3.12)$$

depende de los cuadrados de x_1 y x_2 , entonces C_T depende de funciones seno y coseno de argumento $2k_0 d_0$ (estamos considerando el caso $N = 2$), por lo que puede esperarse que presente un número f de picos en el intervalo $0 < \Delta E < V_1$, cuando

$$k_0(\Delta E = V_1) d_0 = \left(\frac{2m_0 V_1}{\hbar^2} \right)^{1/2} d_0 = F\pi, \quad f-1 < F \leq f, \quad (3.13)$$

de donde obtenemos

$$V_1 d_0^2 = \frac{F^2 \pi^2 \hbar^2}{2m_0}, \quad f-1 < F \leq f. \quad (3.14)$$

La condición que hemos impuesto a F en el resultado (3.14), aunque tiene sentido, realmente se escogió para estar de acuerdo con el hecho conocido de que en un pozo de paredes infinitamente anchas, se tienen f estados ligados cuando

$$\frac{(f-1)^2 \pi^2 \hbar^2}{2m_0} < V_1 d_0^2 < \frac{f^2 \pi^2 \hbar^2}{2m_0}. \quad (3.15)$$

Las ecuaciones (3.14) o (3.15) nos señalan respectivamente que el número de los estados cuasiligados o ligados (según sea el grosor de las paredes, finito o infinito) de un sólo pozo depende de

las dimensiones de éste. Esto nos permite esperar que el número de estados cuasiligados o ligados. (según se considere el grosor de las barreras externas) de una superred [14], crezca con el número de pozos. Por ejemplo, para dos pozos del mismo tamaño los cuatro elementos de la matriz de transferencia dependen de funciones trigonométricas cuyo argumento es $2k_0d_0$ (para C_T existen argumentos $4k_0d_0$), o sea que se tiene una situación semejante a un sólo pozo cuyo ancho es la suma de los anchos de los pozos reales del sistema.

Expresando la situación de otra manera, el crecimiento del número de pozos $n_p(N)$, que depende del número de generación de Fibonacci N , implica el crecimiento o “desdoblamiento” del número de picos de tunelamiento.

La palabra “desdoblamiento” debe entenderse estrictamente como aumento, que puede ser o no al doble, pero el adjetivo es adecuado por el hecho de que a causa del crecimiento del carácter oscilatorio de la matriz de transferencia, el aumento de los picos debe situarse a uno y otro lado de los picos de configuraciones anteriores.

Veamos ahora que en ambas clases de estados, cuasiligados y ligados, podemos interpretar a t_v como la duración de su existencia o tiempo de vida. Para los estados ligados $t_v = \infty$ sólo para algún o algunos puntos del intervalo $0 < \Delta E < V_1$ y $t_v = 0$ para la región restante del mismo intervalo. Es claro que donde $t_v = \infty$ la probabilidad es uno y donde $t_v = 0$ la probabilidad es cero. Además, si empleamos la ecuación (3.6) para definir un tiempo de retardo en los estados ligados, encontramos que $\tau = \infty$ donde $t_v = \infty$, pero $\tau = -t_l$ donde $t_v = 0$. Esto significa que para los estados ligados los picos de probabilidad, t_v y τ coinciden entre si.

La similitud entre las ecuaciones (3.14) y (3.15) nos hace suponer que debe existir cierta correspondencia entre los estados cuasiligados y ligados. Por ejemplo, podemos esperar que también coincidan entre si los picos de C_T , t_v y τ , de los estados cuasiligados. Aún más, aceptando tal correspondencia y de acuerdo con el hecho de que $\tau = -t_l$ cuando la probabilidad es cero (en el caso de los estados ligados), entonces en los resultados numéricos que presentaremos más adelante (para los estados cuasiligados) debemos encontrar tiempos de retardo negativos, en las regiones cercanas a las energías que corresponden a los mínimos relativos de C_T .

Físicamente es razonable esperar que t_v crezca a medida que $n_p(N)$ lo hace. Por todo lo dicho y por el principio de incertidumbre (característico de los paquetes de ondas)

$$\Delta E_j t_{vj} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (3.16)$$

podemos afirmar que el ancho ΔE_j (común a los picos de C_{Tj} , t_{vj} y τ_j) disminuye con el efecto de desdoblamiento.

En la teoría de Schrödinger todos los estados ligados tienen $t_v = \infty$ (lo mismo ocurre con τ , según hemos establecido). No obstante, los estados de mayor energía son los más débilmente ligados. Esto en el caso de los estados cuasiligados, debe manifestarse como una disminución de t_v (y τ) a medida que aumenta la energía, lo que es físicamente razonable. Para energías mucho mayores que el potencial en la superred, la disminución de t_v y τ con el aumento de la energía, puede argumentarse con ayuda de (1.25).

En la proxima sección ampliaremos la discusión sobre el comportamiento de los picos de C_T , t_v y τ .

Por otra parte, mencionaremos un resultado que se argumentará en la subsección 3.2.2. Cuando ΔE tiende a cero, la expresión (3.4) para τ se escribe

$$\begin{aligned}\tau &= \hbar dk'_0 \left(\frac{M_{11}+M_{22}}{dm_0 M_{21}} - 1 \right) \\ &= d \left(\frac{m_0}{2\Delta E} \right)^{1/2} \left(\frac{M_{11}+M_{22}}{dm_0 M_{21}} - 1 \right), \quad k_{n+1} = k_0.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Se observa en (3.17) que el tiempo de retardo puede divergir cuando ΔE tiende a cero, pero aunque el primer sumando del segundo miembro (t_v) debe ser positivo, esto no impide la posibilidad de que la divergencia sea hacia más infinito o hacia menos infinito.

Ejemplo: Barrera de potencial (Número de generación de Fibonacci $N = 1$).

La estructura G_0 o G_1 de las figuras 2.1 y 2.2, da origen al problema de un electrón de masa efectiva $m_0 = 0.067m_e$ que encuentra una barrera de potencial, de altura $V_1 = 150meV$, donde su masa efectiva es $m_1 = 0.084m_e$.

En este caso la matriz de transferencia está dada por la expresión (3.10). También se emplearán las relaciones (3.7) y (3.8). De acuerdo con esto y con las ecuaciones (3.3), obtenemos

$$\begin{aligned}x_1 &= \cosh \gamma_1 d_1, & \Delta E < V_1, \\ x_1 &= \cos k_1 d_1, & \Delta E > V_1,\end{aligned}\quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{\text{senh}\gamma_1 d_1}{2} \left(\frac{m_1 k_0}{m_0 \gamma_1} - \frac{m_0 \gamma_1}{m_1 k_0} \right), & \Delta E < V_1, \\
x_2 &= \frac{\text{sen}k_1 d_1}{2} \left(\frac{m_1 k_0}{m_0 k_1} + \frac{m_0 k_1}{m_1 k_0} \right), & \Delta E > V_1.
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

Podemos verificar que x_1 y x_2 satisfacen la condición de que t_v sea positivo en todo el intervalo $0 \leq \Delta E < \infty$.

Sustituyendo los elementos de la matriz de transferencia en (3.17), se tiene

$$\tau = d_1 \left(\frac{m_0}{2\Delta E} \right)^{1/2} \left(\frac{2m_1}{m_0 \gamma_{10} d_1 \tanh \gamma_{10} d_1} - 1 \right),
\tag{3.20}$$

donde $\gamma_{10} = \gamma_1(\Delta E = 0)$.

La ecuación (3.20) nos indica que existe un ancho de la barrera que separa los valores divergentes negativos de los positivos. Este valor debe estar entre 40\AA y 50\AA , ya que entonces respectivamente

$$\tau = +0.114 d_1 \left(\frac{m_0}{2\Delta E} \right)^{1/2},
\tag{3.21}$$

$$\tau = -0.120 d_1 \left(\frac{m_0}{2\Delta E} \right)^{1/2}.
\tag{3.22}$$

Al menos para este caso, es un hecho que los tiempos de retardo negativos están inmersos en la teoría. La ecuación (3.6) nos indica que con respecto al viaje como partícula libre, un tiempo de retardo positivo debe interpretarse como un viaje más lento a través del potencial, mientras que un tiempo de retardo negativo debe estar asociado con un viaje más rápido. Pueden imaginarse situaciones (enseguida veremos un efecto relacionado con las masas) u otros potenciales para los cuales no sería extraño este resultado, pero para los potenciales de este trabajo sí llama la atención un tiempo de retardo negativo.

Trabajando con las expresiones límite que se obtienen de (3.18) y (3.19), para $\Delta E \gg V_1$, no es difícil obtener

$$t_1 = \hbar d_1 k'_0 = d_1 \left(\frac{m_0}{2\Delta E} \right)^{1/2},
\tag{3.23}$$

$$C_T = \left(1 + \frac{(m_1 - m_0)^2 \sin^2 k_1 d_1}{4m_0 m_1} \right)^{-1}, \quad (3.24)$$

$$t_v = \frac{m_0 + m_1}{2m_0} C_T t_1, \quad (3.25)$$

$$\tau = \left(\frac{m_0 + m_1}{2m_0} C_T - 1 \right) t_1, \quad (3.26)$$

de acuerdo con (3.5), (3.6), (3.7) y (3.12).

En la ecuación (3.24) se observa un efecto interesante. Si las masas efectivas fueran iguales, para $\Delta E \gg V_1$, C_T sería prácticamente uno. La diferencia de masas ocasiona que C_T oscile continuamente con la energía, entre el mínimo

$$\left(1 + \frac{(m_1 - m_0)^2}{4m_0 m_1} \right)^{-1} = 0.987 \quad (3.27)$$

y el máximo uno. De acuerdo con estos valores extremos de C_T , tenemos

$$\frac{m_1 - m_0}{m_1 + m_0} \leq \left(\frac{m_1 + m_0}{2m_0} C_T - 1 \right) \leq \frac{m_1 - m_0}{2m_0}, \quad (3.28)$$

Como $m_0 < m_1$, las ecuaciones (3.26) y (3.28) implican que para $\Delta E \gg V_1$ todos los tiempos de retardo son positivos. De hecho un estudio más detallado revela que los tiempos de retardo negativos sólo pueden presentarse para $\Delta E < V_1$. Según (2.7) no es posible, pero como simple suposición matemática, observemos que si $m_1 < m_0$, entonces las ecuaciones (3.26) y (3.28) implican tiempos de retardo negativos, lo cual tiene sentido ya que la velocidad del electrón sería mayor en la región de la barrera (para $\Delta E \gg V_1$, la energía cinética del electrón se mantiene prácticamente constante e igual a ΔE).

Con base en las ecuaciones (3.25) y (3.26), podríamos argumentar sobre la casi congruencia de los picos de C_T , t_v y τ , pero preferimos reservar la discusión para la siguiente sección, donde trataremos el problema de manera más general.

La figura 3.1 está relacionada con el ejemplo que acabamos de discutir.

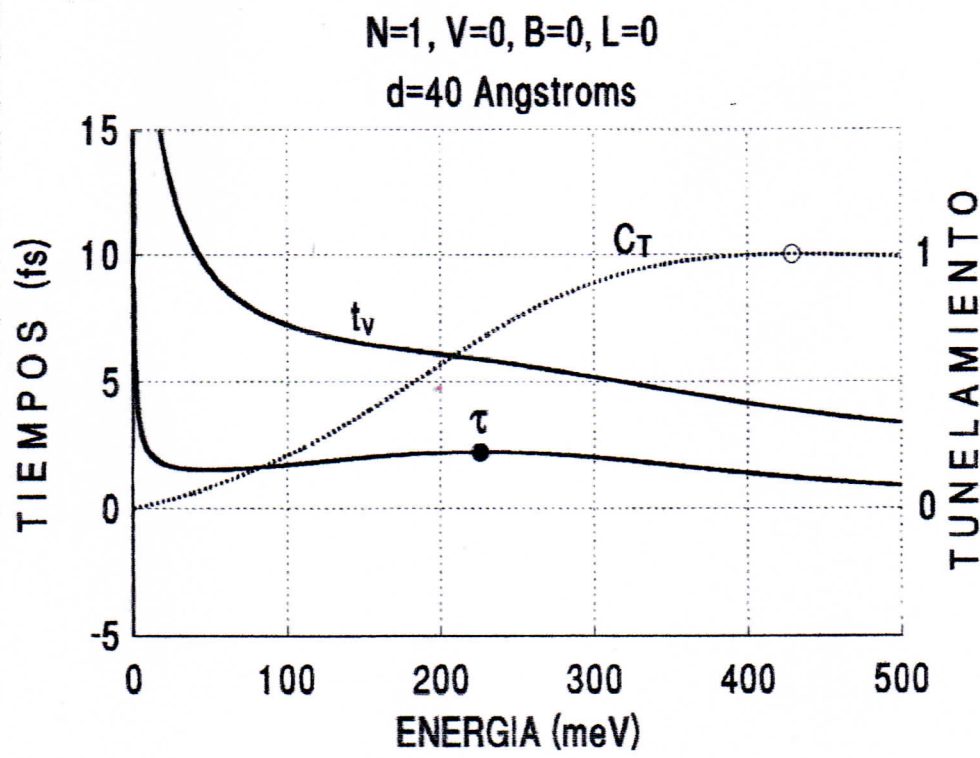
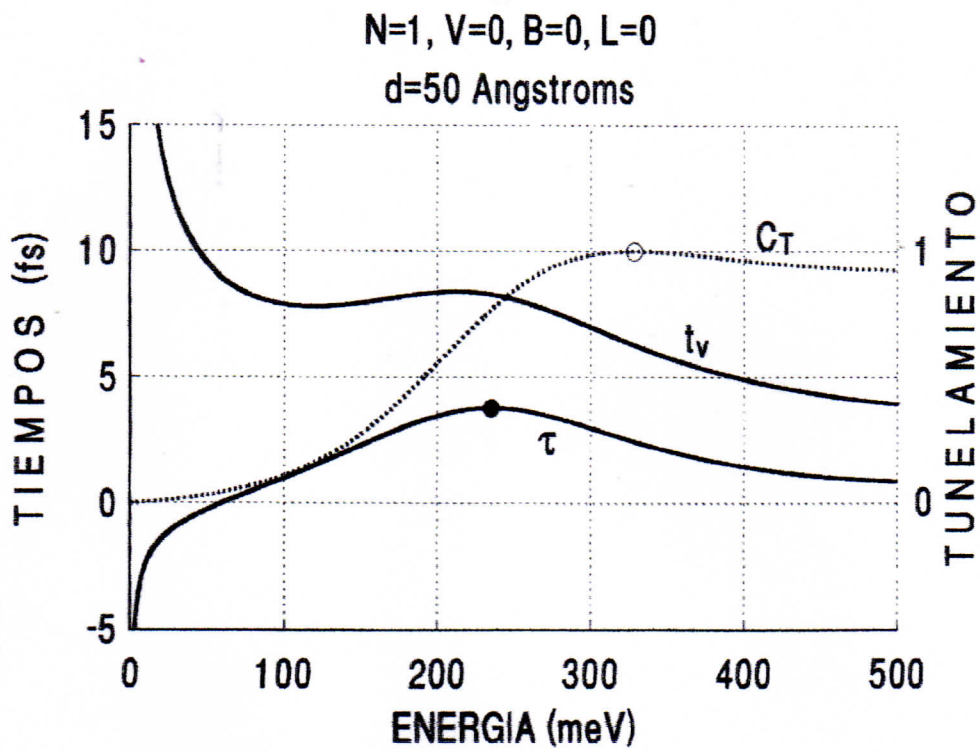


Figura 3.1. Tiempo de retardo τ , tiempo total de viaje t_v y tunelamiento C_T , para barreras de potencial.

3.2. RESULTADOS CUANDO SE APLICA UN CAMPO MAGNÉTICO Y/O UN CAMPO ELÉCTRICO

En esta sección argumentaremos sobre nuevas situaciones, pero también ampliaremos la discusión acerca de algunos resultados que ya se presentaron.

3.2.1. ALGUNOS ASPECTOS DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

La matriz de transferencia presenta dos características que emplearemos más adelante:

1) Todos los elementos de la matriz M_j , ecuación (1.38), tienen primeras derivadas continuas en todo el intervalo $0 \leq \Delta E < \infty$. En consecuencia, puede decirse lo mismo de la matriz M , ecuación (1.36).

Bosquejaremos la demostración, tomando como referencia a las ecuaciones (1.25) y (1.38). Podemos obtener

$$M'_{j11} = M'_{j22} = -\frac{m_j d_j^2}{\hbar^2} \frac{\text{sen} k_j d_j}{k_j d_j} = -\frac{m_j d_j^2}{\hbar^2} \left[1 - \frac{1}{6} (k_j d_j)^2 + \dots \right], \quad (3.28a)$$

$$M'_{j12} = \frac{m_j^2 d_j}{\hbar^2 k_j^2} \left(\cos k_j d_j - \frac{\text{sen} k_j d_j}{k_j d_j} \right) = \frac{m_j^2 d_j}{\hbar^2 k_j^2} \left[-\frac{1}{3} (k_j d_j)^2 + \frac{1}{30} (k_j d_j)^4 - \dots \right], \quad (3.28b)$$

$$M'_{j21} = -\frac{d_j}{\hbar^2} \left(\cos k_j d_j + \frac{\text{sen} k_j d_j}{k_j d_j} \right) = -\frac{d_j}{\hbar^2} \left[2 - \frac{2}{3} (k_j d_j)^2 + \dots \right], \quad (3.28c)$$

donde se ha efectuado un desarrollo en serie de Taylor, alrededor de $k_j d_j = 0$. Por (1.25) y la forma de las tres últimas expresiones, nos damos cuenta de que la única singularidad para la primera derivada de los elementos de M_j , se encuentra en $E = U_j$. Sin embargo esta singularidad es evitable, de manera que podemos considerar que tales derivadas son realmente funciones continuas para todo valor de E . Podemos concluir que lo mismo ocurre para la matriz M , si tenemos en mente el proceso de multiplicación de matrices, así como los teoremas de cálculo sobre derivadas y continuidad de productos y sumas de funciones.

2) Resulta útil tener una imagen de la forma de los elementos de M . Para ello bastará con tener claridad sobre el producto $M_3M_2M_1$ que forma parte de $M = M_n \dots M_3M_2M_1$. De acuerdo con algunos cambios a la notación de la ecuación (1.38)

$$M_2M_1 = \begin{pmatrix} a_2 \cos k_2 d_2 & b_2 \text{sen} k_2 d_2 \\ -c_2 \text{sen} k_2 d_2 & d_2 \cos k_2 d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \cos k_1 d_1 & b_1 \text{sen} k_1 d_1 \\ -c_1 \text{sen} k_1 d_1 & d_1 \cos k_1 d_1 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

siendo evidentemente

$$\begin{aligned} a_j &= d_j = 1, \\ b_j &= m_j/k_j, \\ c_j &= k_j/m_j. \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} (M_2M_1)_{11} &= a_2 a_1 \cos k_2 d_2 \cos k_1 d_1 - b_2 c_1 \text{sen} k_2 d_2 \text{sen} k_1 d_1 \\ &= \frac{1}{2}(a_2 a_1 + b_2 c_1) \cos(k_2 d_2 + k_1 d_1) + \frac{1}{2}(a_2 a_1 - b_2 c_1) \cos(k_2 d_2 - k_1 d_1) \\ &= a_S \cos(k_2 d_2 + k_1 d_1) + a_D \cos(k_2 d_2 - k_1 d_1), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} (M_2M_1)_{12} &= b_2 d_1 \text{sen} k_2 d_2 \cos k_1 d_1 + a_2 b_1 \cos k_2 d_2 \text{sen} k_1 d_1 \\ &= \frac{1}{2}(b_2 d_1 + a_2 b_1) \text{sen}(k_2 d_2 + k_1 d_1) + \frac{1}{2}(b_2 d_1 - a_2 b_1) \text{sen}(k_2 d_2 - k_1 d_1) \\ &= b_S \text{sen}(k_2 d_2 + k_1 d_1) + b_D \text{sen}(k_2 d_2 - k_1 d_1), \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} (M_2M_1)_{21} &= -c_2 a_1 \text{sen} k_2 d_2 \cos k_1 d_1 - d_2 c_1 \cos k_2 d_2 \text{sen} k_1 d_1 \\ &= -\frac{1}{2}(c_2 a_1 + d_2 c_1) \text{sen}(k_2 d_2 + k_1 d_1) - \frac{1}{2}(c_2 a_1 - d_2 c_1) \text{sen}(k_2 d_2 - k_1 d_1) \\ &= -c_S \text{sen}(k_2 d_2 + k_1 d_1) - c_D \text{sen}(k_2 d_2 - k_1 d_1), \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} (M_2M_1)_{22} &= d_2 d_1 \cos k_2 d_2 \cos k_1 d_1 - c_2 b_1 \text{sen} k_2 d_2 \text{sen} k_1 d_1 \\ &= \frac{1}{2}(d_2 d_1 + c_2 b_1) \cos(k_2 d_2 + k_1 d_1) + \frac{1}{2}(d_2 d_1 - c_2 b_1) \cos(k_2 d_2 - k_1 d_1) \\ &= d_S \cos(k_2 d_2 + k_1 d_1) + d_D \cos(k_2 d_2 - k_1 d_1), \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde se han empleado identidades trigonométricas conocidas.

De acuerdo con (3.31)-(3.34), podemos escribir

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a_3 \cos k_3 d_3 & b_3 \operatorname{sen} k_3 d_3 \\ -c_3 \operatorname{sen} k_3 d_3 & d_3 \cos k_3 d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_S \cos(k_2 d_2 + k_1 d_1) & b_S \operatorname{sen}(k_2 d_2 + k_1 d_1) \\ -c_S \operatorname{sen}(k_2 d_2 + k_1 d_1) & d_S \cos(k_2 d_2 + k_1 d_1) \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} a_3 \cos k_3 d_3 & b_3 \operatorname{sen} k_3 d_3 \\ -c_3 \operatorname{sen} k_3 d_3 & d_3 \cos k_3 d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_D \cos(k_2 d_2 - k_1 d_1) & b_D \operatorname{sen}(k_2 d_2 - k_1 d_1) \\ -c_D \operatorname{sen}(k_2 d_2 - k_1 d_1) & d_D \cos(k_2 d_2 - k_1 d_1) \end{pmatrix} \\
 & = M_3 M_2 M_1 . \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

De hecho, las ecuaciones (3.31)-(3.35) nos dan una idea de la forma de los elementos de la matriz de transferencia M . En cada elemento aparecen funciones trigonométricas con argumentos que son combinaciones de la forma $\pm k_1 d_1 \pm k_2 d_2 \pm \dots \pm k_n d_n = \pm k_j d_j$. En particular, no es difícil ver que siempre existe la combinación $k_1 d_1 + k_2 d_2 + \dots + k_n d_n = k_j d_j$.

3) Dentro de la combinación $k_j d_j$, que en general es compleja según (1.25) y las figuras 1.5, 3.2 (página 46), podemos reconocer tres agrupaciones:

3a) La suma de los argumentos hiperbólicos (imaginarios), que se dan en las regiones de masa efectiva $0.084m_e$, si la energía es menor que el potencial U_j .

3b) La suma de los argumentos trigonométricos (reales), que se obtienen en las regiones de masa efectiva $0.084m_e$, si la energía es mayor que el potencial U_j .

3c) La suma de los argumentos trigonométricos de las regiones de masa efectiva $0.067m_e$, donde la energía siempre es mayor que el potencial U_j .

Para energías arriba de $U_{n+1} + V_1$ (ver la figura 3.2, página 46), según podemos inducir de (1.25) y (3.31)-(3.35), los coeficientes y argumentos de los elementos de M son reales, y los coeficientes de las funciones trigonométricas de argumento $k_j d_j$, manifiestan cierto dominio sobre otros coeficientes.

Por lo señalado sobre el coeficiente mayoritario, es razonable esperar que los argumentos de las

clases 3b) y 3c) sean representativos del carácter oscilatorio de la matriz de transferencia, para toda energía posible. En otras palabras, suponemos que el carácter oscilatorio de M crece o disminuye por el aumento o disminución de los argumentos de las clases 3b) y 3c), aún sin poder establecer una relación precisa.

Con esta manera de razonar pretendemos establecer cierta lógica en los resultados numéricos que se presentan más adelante.

3.2.2. DIVERGENCIA POSITIVA O NEGATIVA DEL TIEMPO DE RETARDO

Reescribiendo las ecuaciones (3.3) y derivando con respecto a la energía total E , obtenemos

$$2x_1 = \frac{k_{n+1}}{k_0} M_{11} + M_{22}, \quad (3.36)$$

$$2x'_1 = \frac{k'_{n+1}k_0 - k_{n+1}k'_0}{k_0^2} M_{11} + \frac{k_{n+1}}{k_0} M'_{11} + M'_{22}, \quad (3.37)$$

$$2x_2 = \frac{k_{n+1}}{m_0} M_{12} - \frac{m_0}{k_0} M_{21}, \quad (3.38)$$

$$2x'_2 = \frac{k'_{n+1}}{m_0} M_{12} + \frac{k_{n+1}}{m_0} M'_{12} + \frac{m_0 k'_0}{k_0^2} M_{21} - \frac{m_0}{k_0} M'_{21}. \quad (3.39)$$

Cuando se aplica un campo magnético y/o un campo eléctrico, las soluciones de partícula libre en la región $n + 1$ (ver las figuras 1.4 y 1.5) se obtienen para $E > U_{n+1}$. Se ha dicho que los elementos de la matriz de transferencia tienen primeras derivadas continuas en todo el intervalo $0 \leq \Delta E < \infty$, por lo que si $U_{n+1} \neq U_0$ las ecuaciones (3.37) y (3.39) presentan una singularidad en $E = U_{n+1}$ debido sólo a k'_{n+1} ($k'_j = [m_j/2\hbar^2(E - U_j)]^{1/2}$, ver la ecuación (1.25)). Cuando E tiende a U_{n+1} , por la derecha, k_{n+1} tiende a cero, por lo que sustituyendo los términos dominantes de las ecuaciones (3.36)-(3.39) en la ecuación (3.4), se tiene

$$\tau = \left[\frac{m_0}{2(E - U_{n+1})} \right]^{1/2} \frac{\hbar^2 m_0 M_{11} M_{21} + 2(U_{n+1} - U_0) M_{22} M_{12}}{\hbar^2 m_0^2 M_{21}^2 + 2m_0(U_{n+1} - U_0) M_{22}^2} - \left[\frac{m_0}{2(E - U_0)} \right]^{1/2} d, \quad (3.40)$$

$$U_{n+1} \neq U_0.$$

La ecuación anterior se dedujo suponiendo que $U_{n+1} \neq U_0$ y tomando en consecuencia sólo los

términos dominantes, por lo que no es válida cuando $U_{n+1} = U_0$. Repitiendo el procedimiento para el último caso, se obtiene la ecuación (3.17), la que reescribimos

$$\tau = \left[\frac{m_0}{2(E-U_0)} \right]^{1/2} \left(\frac{M_{11}+M_{22}}{m_0 M_{21}} - d \right), \quad U_{n+1} = U_0. \quad (3.41)$$

Observemos que en la ausencia de un campo eléctrico, $U_{n+1} = U_0$, aunque puede estar presente un campo magnético, la ecuación (3.41) admite la posibilidad de divergencias positivas o negativas en $E = U_0$. Esto ya se argumentó numéricamente para el caso $N = 1$. Aunque sólo sea desde el punto de vista matemático, ya que trataremos a la longitud de las barreras como una cantidad que puede tomar cualquier valor mayor que cero, demostraremos las dos posibilidades mencionadas para cualquier N .

Las matrices (3.10) y (3.11) son una referencia útil para lo que sigue. Cuando $\Delta E = E - U_0$ y d_1 tienden a cero, podemos escribir respectivamente para las barreras y pozos

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & m_1 d_1 \\ \frac{\gamma_{10}^2}{m_1} d_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

$$M_{0j} = \begin{pmatrix} 1 & m_0 d_{0j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

donde lo único nuevo es d_{0j} , y representa los anchos de los pozos.

A partir de (3.42), (3.43) y conservando sólo los términos de valor dominante, no es difícil encontrar que la matriz de transferencia, para cualquier $N > 1$, es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m_0 d_p \\ \frac{\gamma_{10}^2}{m_1} d_b & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

donde d_b y d_p son respectivamente, el ancho total de las barreras y el ancho total de los pozos.

Sustituyendo los elementos de (3.44) en (3.41), se llega a

$$\tau = \left[\frac{m_0}{2(E-U_0)} \right]^{1/2} \left(\frac{\hbar^2}{m_0 V_1 d_b} - d_b - d_p \right). \quad (3.45)$$

Ya que d_1 tiende a cero, y en consecuencia d_b , vemos en (3.45) que τ diverge positivamente en $E = U_0$.

Cuando d_1 no tiende a cero, aunque ΔE sí, la matriz (3.42) debe sustituirse por

$$\begin{pmatrix} \cosh \gamma_{10} d_1 & (m_1/\gamma_{10}) \operatorname{senh} \gamma_{10} d_1 \\ (\gamma_{10}/m_1) \operatorname{senh} \gamma_{10} d_1 & \cosh \gamma_{10} d_1 \end{pmatrix} = \cosh \gamma_{10} d_1 \begin{pmatrix} 1 & (m_1/\gamma_{10}) \tanh \gamma_{10} d_1 \\ (\gamma_{10}/m_1) \tanh \gamma_{10} d_1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Ahora bien, para $\gamma_{10} d_1 \geq 2$ podemos considerar buena la aproximación

$$\cosh \gamma_{10} d_1 \begin{pmatrix} 1 & (m_1/\gamma_{10}) \tanh \gamma_{10} d_1 \\ (\gamma_{10}/m_1) \tanh \gamma_{10} d_1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \cosh \gamma_{10} d_1 \begin{pmatrix} 1 & m_1/\gamma_{10} \\ \gamma_{10}/m_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

aproximación que mejora con el aumento de $\gamma_{10} d_1$.

No es difícil convencerse de que, si a partir de (3.43) y (3.47) construimos la matriz de transferencia para $N > 1$, entonces al efectuar la sustitución respectiva en (3.41), obtenemos

$$\tau = \left[\frac{m_0}{2(E-U_0)} \right]^{1/2} [pp(m_0, m_1, \gamma_{10}, d_{0j}) - d_b - d_p], \quad (3.48)$$

donde $pp(m_0, m_1, \gamma_{10}, d_{0j})$ es un parámetro positivo que no depende de d_1 .

Si ahora hacemos crecer d_1 , y en consecuencia d_b , es claro que en (3.48) podemos obtener divergencias negativas para τ , en $E = U_0$.

Las matrices (3.42) y (3.47) nos permiten argumentar similarmente el caso $N = 1$.

Por otra parte, de acuerdo a la condición $t_v > 0$ y a la ecuación (3.40), en el caso $U_{n+1} \neq U_0$ que aparece cuando se aplica un campo eléctrico, sólo puede estar presente la divergencia por valores positivos, en $E = U_{n+1}$.

3.2.3. DESPLAZAMIENTO Y PÉRDIDA DE ESTADOS CUASILIGADOS

Ya se dijo en la sección 3.2.2 que cuando se aplica un campo magnético y/o un campo eléctrico, las soluciones de partícula libre en la región $n + 1$ se obtienen para $E > U_{n+1}$. Esto significa que, con respecto a la ausencia de campos, las gráficas de tunelamiento y tiempo de retardo no comienzan en $E = 0$, sino en $E = U_{n+1}$. En otras palabras, las gráficas correspondientes a la aplicación de campos sufren un desplazamiento sobre el eje de la energía. Veremos que este desplazamiento, en general debe ir acompañado de una disminución del número de estados cuasiligados. La pérdida de estados cuasiligados se debe a la disminución efectiva de la altura de las barreras, cuando se aplica un campo magnético, y/o a la inclinación del potencial de la superred cuando se aplica un campo eléctrico. Por una u otra razón, de hecho los estados cuasiligados pueden desaparecer. El hecho de que se puedan anular los estados cuasiligados, no significa que las oscilaciones del tunelamiento y del tiempo de retardo no existan en el intervalo $U_{n+1} \leq E \leq U_{n+1} + V_1$ (ver la figura 3.2), significa simplemente que no hay manera de que las oscilaciones se lleven a cabo dentro de un subintervalo donde dichos estados puedan presentarse. Con objeto de tener mayor claridad sobre la pérdida de estados cuasiligados, haremos un cálculo sencillo en analogía con la obtención de la ecuación (3.13).

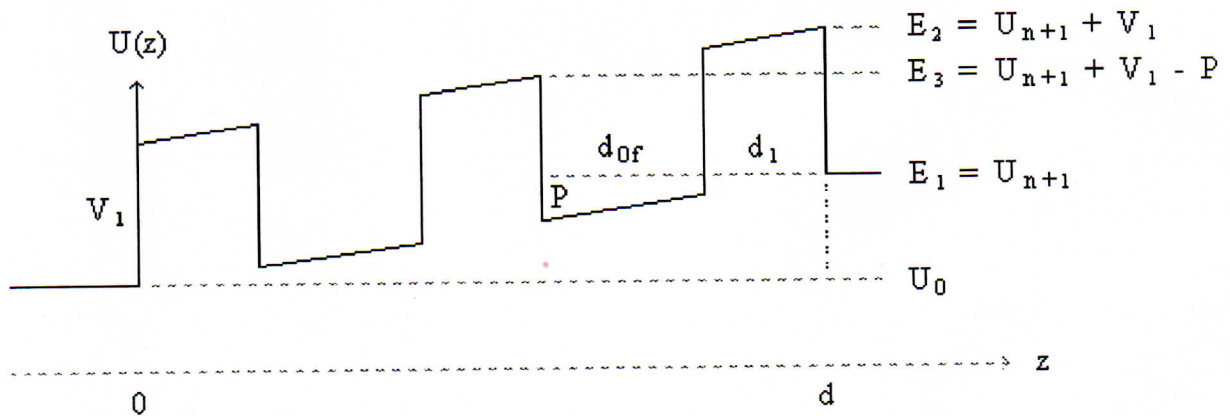


Figura 3.2. Desplazamiento y pérdida de estados cuasiligados.

Tomaremos como referencia las figuras 1.4, 1.5 y 3.2. El análogo de la ecuación (3.13), para los picos del tunelamiento asociados con estados cuasiligados en el intervalo $E_1 < E < E_3$, puede escribirse

$$F\pi = \sum_{j=1}^{n_{3c}} \left[\left(\frac{2m_0}{\hbar^2} (E_3 - U_j) \right)^{1/2} d_j - \left(\frac{2m_0}{\hbar^2} (E_1 - U_j) \right)^{1/2} d_j \right] + \dots ,$$

$$f-1 < F \leq f, \quad (3.49)$$

donde n_{3c} es el número de regiones o argumentos de la clase 3c). El carácter oscilatorio de la matriz de transferencia está determinado por los argumentos de las clases 3b) y 3c), pero debido a que el número de los primeros se incrementa paulatinamente en el intervalo $E_1 < E < E_2$, su contribución únicamente se indica con el signo más. También, en el intervalo $E_1 < E < E_2$ existe un total de g picos, asociados y no con estados cuasiligados, tales que

$$G\pi = \sum_{j=1}^{n_{3c}} \left[\left(\frac{2m_0}{\hbar^2} (E_2 - U_j) \right)^{1/2} d_j - \left(\frac{2m_0}{\hbar^2} (E_1 - U_j) \right)^{1/2} d_j \right] + \dots ,$$

$$g-1 < G \leq g. \quad (3.50)$$

De acuerdo con la figura 3.1, (3.49) y (3.50) pueden reescribirse como

$$F\pi = \left(\frac{2m_0}{\hbar^2} \right)^{1/2} P_{31} d_p \left[(E_2 - E_1) - \frac{d_{0f} + d_1}{d} (U_{n+1} - U_0) \right] + \dots , \quad (3.51)$$

$$G\pi = \left(\frac{2m_0}{\hbar^2} \right)^{1/2} P_{21} d_p (E_2 - E_1) + \dots , \quad (3.52)$$

donde d_{0f} es el ancho del pozo al final de la superred (suponemos que los electrones inciden de izquierda a derecha), d_1 como de costumbre es el ancho de las barreras, hemos supuesto que las d_j son iguales, d_p como ya sabemos es el ancho total de los pozos, y donde aparecen los promedios

$$P_{21} = \frac{1}{n_{3c}} \sum_{j=1}^{n_{3c}} \frac{1}{(E_2 - U_j)^{1/2} + (E_1 - U_j)^{1/2}} , \quad (3.53)$$

$$P_{31} = \frac{1}{n_{3c}} \sum_{j=1}^{n_{3c}} \frac{1}{(E_3 - U_j)^{1/2} + (E_1 - U_j)^{1/2}} . \quad (3.54)$$

El factor que contiene a $V_1 = E_2 - E_1$ y $U_{n+1} - U_0$ en (3.51), es el único que puede anularse y en consecuencia el que determina la pérdida de estados cuasiligados. Siendo V_0 la altura de las barreras en ausencia de un campo magnético, el efecto de éste último se manifiesta en $V_1 < V_0$ (ver las figuras 1.4). El efecto del campo eléctrico aparece en $U_{n+1} - U_0$. Observemos en (3.51) y (3.52) que para V_1 diferente de cero, f puede anularse por acción del campo eléctrico, pero no g .

Como para $U_{n+1} - U_0$ y V_1 fijos el promedio P_{21} debe mantenerse más o menos estable para toda N , entonces podemos decir que G crece, y por lo tanto g , cuando $d_p(N)$ crece. Aún más, cuando $E_2 > E_1 > U_{n+1} + V_1$, la contribución de los argumentos de la clase 3b), origina que

$$G\pi = \left(\frac{2m_0}{\hbar^2} \right)^{1/2} P_{21} d_p(E_2 - E_1) + \left(\frac{2m_1}{\hbar^2} \right)^{1/2} B_{21} d_b(E_2 - E_1), \quad (3.55)$$

siendo d_b el ancho total de las barreras y B_{21} el promedio, de la forma (3.53), sobre las n_{3b} regiones de la clase 3b). Las ecuaciones (3.52) y (3.55) señalan que el “desdoblamiento” ocurre en cualquier intervalo de energía.

Si de acuerdo con (3.52) y la figura 3.2, mantenemos fijos los parámetros de una superred pero variamos $U_{n+1} - U_0$, podemos ver con ayuda de (3.53) que G disminuye, y por lo tanto g , cuando $U_{n+1} - U_0$ crece. Si enseguida y de acuerdo con (3.55), mantenemos nuevamente fijos los parámetros de la superred incluyendo a $U_{n+1} - U_0$ y $E_2 - E_1$, pero variamos E_1 , similarmente llegaremos a la conclusión de que g disminuye cuando E_1 crece. Una expresión sencilla de las dos situaciones anteriores se obtiene diciendo que la densidad de picos g , $\rho_g = g/(E_2 - E_1)$, disminuye cuando la energía total E del electrón incidente crece con respecto a U_0 , es decir, ρ_g disminuye cuando $E - U_0 = \Delta E$ crece.

Un razonamiento análogo nos lleva a comprender que ρ_g también disminuye con el aumento del factor $(L + 1/2)|B_0|$ de la primera de las ecuaciones (1.18), ya que dicho factor disminuye la altura efectiva de las barreras.

Debemos mencionar que el desdoblamiento es equivalente a un aumento de ρ_g .

3.2.4. COMPORTAMIENTO DE LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS DE $|T|^2$, t_v , τ y C_T .

4a) Coincidencia de la posición de los picos

En términos de los vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (x_1, x_2, 0), \\ \mathbf{v} &= (x'_1, x'_2, 0),\end{aligned}\tag{3.56}$$

el tiempo total de viaje (3.6) puede reescribirse

$$t_v = \hbar|T|^2 \hat{\mathbf{x}}_3(x'_2 x_1 - x_2 x'_1) = \hbar|T|^2 \mathbf{r} \times \mathbf{v}.\tag{3.57}$$

Por nuestro conocimiento de \mathbf{v} en cálculo vectorial, vemos en (3.57) que la condición $t_v > 0$ exige que \mathbf{r} gire en dirección contraria a las manecillas de un reloj. Esto significa que x_2/x_1 oscila entre $-\infty$ y $+\infty$, pasando discontinuamente de valores divergentes positivos a valores divergentes negativos en la vecindad de $x_1 = 0$. De manera que $x_2(E)/x_1(E)$ es una función creciente discontinua de E , sin embargo $\tan^{-1}[x_2(E)/x_1(E)]$ es una función creciente continua de E . Esta situación se deduce por el hecho de que $t_v = \hbar[\tan^{-1}(x_2(E)/x_1(E))]'$ debe existir y ser positivo (se excluye la divergencia en $E = U_{n+1}$).

Si $x_1(E_{11})$ y $x_1(E_{12})$ son dos ceros consecutivos cualesquiera de $x_1(E)$, entonces teniendo en mente la forma aproximada de la gráfica de la función $[x_2(E)/x_1(E)]'$ en $E_{11} < E < E_{12}$, llegamos a la conclusión de que es aceptable escribir

$$t_v(E) \approx \hbar \left[1 + \frac{x_2^2(E)}{x_1^2(E)} \right]^{-1} \frac{x'_2(E_{13})x_1(E_{13}) - x_2(E_{13})x'_1(E_{13})}{x_1^2(E)},$$

$$t_v(E) \approx \hbar|T(E)|^2 [x'_2(E_{13})x_1(E_{13}) - x_2(E_{13})x'_1(E_{13})],$$

$$E_{11} < E < E_{12},\tag{3.58}$$

donde E_{13} es el valor de la energía para el cual $[x_2(E)/x_1(E)]'$ alcanza su mínimo en el intervalo $E_{11} < E < E_{12}$.

La expresión (3.58) nos indica que sobre el eje de la energía total E , las posiciones de los picos y valles de $t_v(E)$ coinciden aproximadamente con las respectivas posiciones de los picos y valles de $|T(E)|^2$. Una apreciación geométrica de la derivada, sobre la forma aproximada de la función $\tan^{-1}[x_2(E)/x_1(E)]$, señala que los mínimos relativos consecutivos deben estar en la vecindad de E_{11} y E_{12} . Este comportamiento debe involucrar a los picos y valles de τ y C_T , ya que de acuerdo con (3.4), (3.12) y (3.58) las dos últimas cantidades sólo pueden oscilar por $|T(E)|^2$.

4b) Altura de los picos

Podemos seguir formando un conjunto de argumentaciones en las que intervienen la relación (3.4), el principio de incertidumbre y la densidad ρ_g determinada por las condiciones mencionadas al final de la sección 3.2.3. Pero en lugar de seguir adelante con la discusión, sólo mencionaremos los resultados esperados en promedio.

4b1) Las alturas de los picos de t_v y τ deben crecer con el desdoblamiento, es decir, con el aumento de N .

4b2) Las alturas de los picos de t_v y τ deben disminuir con el aumento de la energía cinética del electrón incidente, $E - U_0$.

4b3) Las alturas de los picos de t_v y τ deben disminuir con el aumento de la intensidad del campo eléctrico.

4b4) Las alturas de los picos de t_v y τ deben disminuir con el aumento del producto $(L + 1/2)|B_0|$.

4c) Agrupamiento de los picos

Hasta el momento hemos supuesto que la combinación $k_j d_j$ es representativa del comportamiento oscilatorio de la matriz de transferencia, sin pensar en el efecto adicional de otras combinaciones.

En particular, si pensamos en masas efectivas iguales y en pozos iguales, entonces a medida que la longitud de la superred crezca, debemos acercarnos a la solución del conocido modelo de Kronig-Penney [10], es decir, a la obtención de bandas de energías permitidas y prohibidas. Esto significa que los picos de tunelamiento deben tender a situarse de manera tal que se presentan en grupos fácilmente identificables cuando el número de pozos crece.

Ocupándonos de las superredes de Fibonacci, es razonable esperar que también se presente una configuración de grupos de picos.

Como todas las consecuencias obtenidas a partir de la combinación $k_j d_j$ han sido cualitativas, no parece haber razones para modificarlas drásticamente ante el conocimiento actual de que los picos se presentan en grupos. Lo único que hay que tener presente es que la representatividad del carácter oscilatorio de la matriz de transferencia por la combinación $k_j d_j$, sólo es válida para ciertos intervalos de energía.

3.2.5. UN BREVE CÁLCULO CLÁSICO SOBRE t_v Y τ . COMPARACIÓN CON LOS RESULTADOS CUÁNTICOS

Obtendremos τ (t_v) desde el punto de vista clásico, bajo la acción del potencial (1.21), para realizar una comparación con nuestro trabajo.

Usando la expresión para la conservación de la energía y la figura 3.2 del potencial (1.21), podemos deducir que

$$\begin{aligned}
 \tau &= t_v - t_1 \\
 &= \sum_{j=1}^{n_b} \int_{z_{b_j}^l}^{z_{b_j}^r} \left[\frac{m_1}{2(\Delta E - V_1 - \frac{\Delta U}{d} z)} \right]^{1/2} dz + \sum_{j=1}^{n_p} \int_{z_{p_j}^l}^{z_{p_j}^r} \left[\frac{m_0}{2(\Delta E - \frac{\Delta U}{d} z)} \right]^{1/2} dz \\
 &\quad - \left(\frac{m_0}{2\Delta E} \right)^{1/2} d \\
 &= (2m_1)^{1/2} d_b P_b + (2m_0)^{1/2} d_p P_p - \left(\frac{m_0}{2\Delta E} \right)^{1/2} d \\
 &\quad E > U_{n+1} + V_1, \tag{3.59}
 \end{aligned}$$

donde $\Delta E = E - U_0$, $\Delta U = U_{n+1} - U_0$, se conserva la notación ya empleada y además

$$P_b = \sum_{j=1}^{n_b} \frac{n_b^{-1}}{\left(\Delta E - V_1 - \frac{\Delta U}{d} z_{b_j}^i\right)^{1/2} + \left(\Delta E - V_1 - \frac{\Delta U}{d} z_{b_j}^l\right)^{1/2}}, \quad (3.60)$$

$$P_p = \sum_{j=1}^{n_p} \frac{d_{0j}}{d_p \left[\left(\Delta E - \frac{\Delta U}{d} z_{p_j}^i\right)^{1/2} + \left(\Delta E - \frac{\Delta U}{d} z_{p_j}^l\right)^{1/2} \right]}. \quad (3.61)$$

Ahora no podemos hablar de tunelamiento, pero en cuanto a los valores de t_v y τ para $E > U_{n+1} + V_1$, una argumentación geométrica sencilla nos conduce a las apreciaciones 4b1)-4b4).

Una apreciación física o la misma argumentación geométrica nos permite ver que en la perspectiva clásica (3.59) y para nuestro trabajo, todos los tiempos de retardo son positivos. Esto ocurre porque hemos tomado la opción $\tau = t_v - \hbar dk'_0$; de haber elegido $\tau_{n+1} = t_v - \hbar dk'_{n+1}$ y por ejemplo para un campo eléctrico suficientemente intenso, estarían presentes los tiempos de retardo negativos. En este aspecto, lo verdaderamente importante es t_v y la referencia para la definición de un tiempo de retardo.

3.2.6. GRÁFICAS REPRESENTATIVAS DE ESTE TRABAJO

El conjunto de figuras 3.1, 3.3-3.7 están de acuerdo con lo expresado a lo largo de este capítulo. Existe una estimulante concordancia entre lo obtenido numéricamente y su explicación cualitativa. Cada uno de los elementos de tal conjunto de gráficas, es parcialmente representativo de un comportamiento global que puede resumirse en cinco puntos:

4d1) Las gráficas presentan un corrimiento, hacia mayores energías, de la mínima energía total E para el electrón incidente.

De acuerdo con la solución de partícula libre requerida en la región $n + 1$ (para la ecuación (1.19), ver también la figura 1.5) y la notación de las gráficas, dicho corrimiento es $U_{n+1} = (L + 1/2)\hbar eB/m_0^* + V$, siendo ahora B el campo magnético y V el potencial eléctrico, aplicados a la superred.

4d2) Las gráficas muestran la coincidencia aproximada, sobre el eje de la energía total E , de la posición de los picos y valles de t_v , τ y C_T .

En este sentido, la figura 3.1 no es afortunada en el número de oscilaciones debido a que las “superredes” carecen de pozos y son muy delgadas, pero las estructuras se determinaron con el objeto de apreciar la transición en las divergencias positivas y negativas para τ , que se presentan en una barrera de potencial. No obstante, la figura 3.3 (para t_v y τ) y las figuras 3.4 a 3.6 (para τ y C_T), muestran claramente la coincidencia aproximada que hemos señalado para picos y valles.

4d3) Las gráficas se ajustan aceptablemente a la descripción que se expresa en 4b1)-4c).

El principio de incertidumbre $\Delta E t_v \geq \hbar/2$ nos da un criterio de relación inversa entre el ancho y la altura de los picos de t_v . Por lo que hemos argumentado, como la extensión de los picos de t_v es prácticamente igual a la extensión de los picos de C_T , y por el hecho de que el crecimiento de t_v (para determinada energía) esta ligado al crecimiento de τ , entonces el principio de incertidumbre nos indica que las alturas (valores) de los picos de t_v y τ crecen con la disminución de los anchos de los picos de tunelamiento. Esto nos permite apreciar indirectamente en la figura 3.7, que las alturas de los picos de t_v y τ crecen con el efecto de desdoblamiento.

De manera directa o indirecta, vemos que en cada una de las gráficas de las figuras 3.3 a 3.7, las alturas de los picos de t_v y τ disminuyen en promedio con el aumento de la energía cinética $E - U_0$, del electrón incidente.

En la figura 3.4 se aprecia que la altura del pico de τ (t_v), de menor energía, disminuye con el aumento del potencial eléctrico V .

La figura 3.5 muestra que la altura del pico de τ (t_v), de menor energía, disminuye perceptiblemente con el aumento del campo magnético B .

En la figura 3.6 se nota que la altura del pico de τ (t_v), de menor energía, disminuye perceptiblemente con el aumento del número cuántico L .

La figura 3.7 compara el desdoblamiento del tunelamiento en superredes cuasiperiódicas de Fibonacci y en superredes periódicas. La presencia de grupos de picos puede observarse en ambos tipos de superredes.

Siguiendo con la figura 3.7, también puede apreciarse en las superredes de Fibonacci, para $N > 2$, la existencia de máximos relativos de tunelamiento menores que uno. Esto debe ocurrir por la diferencia en las longitudes de los pozos, ya que si pensamos en un modelo muy simplificado de una secuencia de pozos simples ($N = 2$) muy alejados entre si, la diferencia de longitudes entre ellos da lugar a funciones individuales diferentes de probabilidad de transmisión $C_T(E)$, ocasionando que la probabilidad global para atravesar la totalidad de los pozos, pueda presentar máximos relativos menores que uno. Esta situación no ocurre en superredes periódicas.

4d4) Las gráficas cumplen con la condición $t_v > 0$.

Esta situación se muestra particularmente en las figuras 3.1 y 3.3.

En la figura 3.3 también puede observarse que $\tau_{n+1} < \tau$, y la presencia de valores negativos para τ en la vecindad de las energías correspondientes a los mínimos relativos.

4d5) Las gráficas para los tiempos, tienen una divergencia positiva o negativa en la mínima energía total del electrón incidente, $E = U_{n+1}$.

La divergencia para t_v siempre es positiva (figuras 3.1 y 3.3). La divergencia para τ puede ser positiva o negativa sólomente en ausencia de un campo eléctrico (figura 3.1 y gráfica inferior de la figura 3.4). Cuando se aplica un campo eléctrico, la divergencia para τ sólo es positiva (figuras 3.3 a 3.6, con excepción de la gráfica inferior de la figura 3.4).

Llama la atención la parte baja de la figura 3.4. En ella aparece el estado cuasiligado de mayor tiempo de retardo para nuestras gráficas. Como ya mencionamos, esto es congruente con el hecho de que los estados ligados de menor energía son los más fuertemente ligados. Obviamente, el tiempo de retardo es consecuencia de los procesos que experimenta el electrón dentro de la superred. Entre tales procesos podemos mencionar el efecto de la variación de masas efectivas, y las múltiples reflexiones, en las interfaces, del paquete de ondas asociado al electrón. Las reflexiones múltiples en los estados cuasiligados de menor energía, deben contribuir de manera importante en la obtención de tiempos de retardo relativamente grandes.

Finalmente mencionaremos que de acuerdo con (2.5), (2.6) y la parte final del capítulo 2 (ver también la figura 2.1), los parámetros que se utilizan en los cálculos numéricos para las gráficas de las figuras 3.2 a 3.7 son:

$$D = 20\text{\AA}, \quad \textit{proporciona el ancho } d_1 \textit{ de las barreras ,}$$

$$D_L = 67.93\text{\AA}, \quad \textit{proporciona los anchos } d_{0j} \textit{ de los pozos ,}$$

$$D_S = 122.27\text{\AA}, \quad \textit{proporciona los anchos } d_{0j} \textit{ de los pozos ,}$$

$$m_1^* = 0.084m_e, \quad \textit{en el } Al_xGa_{1-x}As \textit{ ,}$$

$$m_0^* = 0.067m_e, \quad \textit{en el } GaAs \textit{ ,}$$

$$V_0 = 150meV, \quad \textit{altura de las barreras en ausencia de campos externos .}$$

En la figura 3.7 se anexa una gráfica de tunelamiento en superredes periódicas, por lo que se toma en cuenta la variante $D_S = D_L = 67.93\text{\AA}$.

CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO 3

El análisis cualitativo alrededor de la matriz de transferencia, ha sido determinante para la obtención de la mayoría de los resultados de este trabajo.

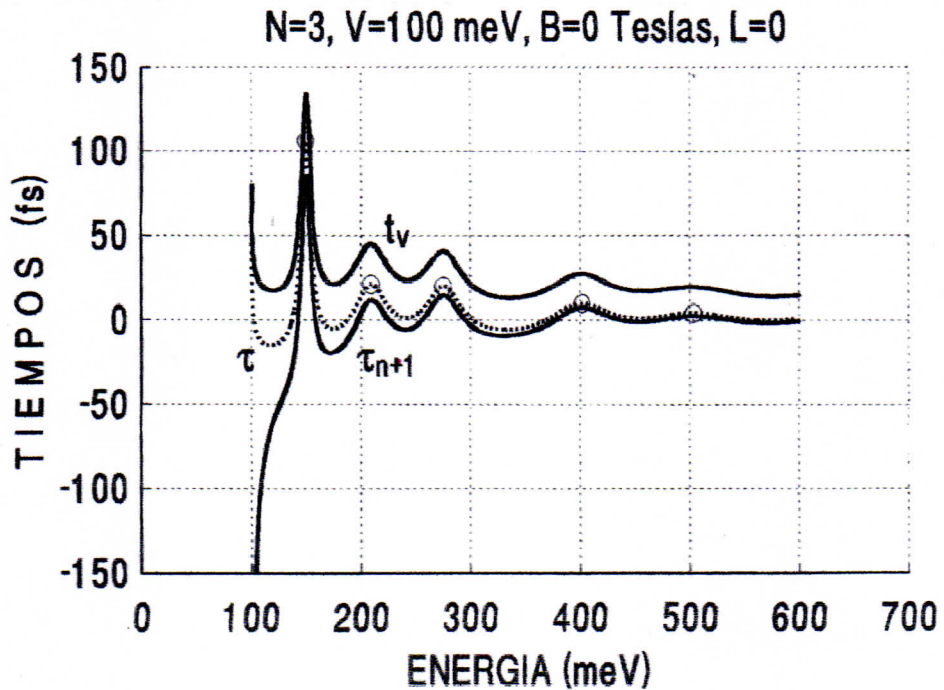
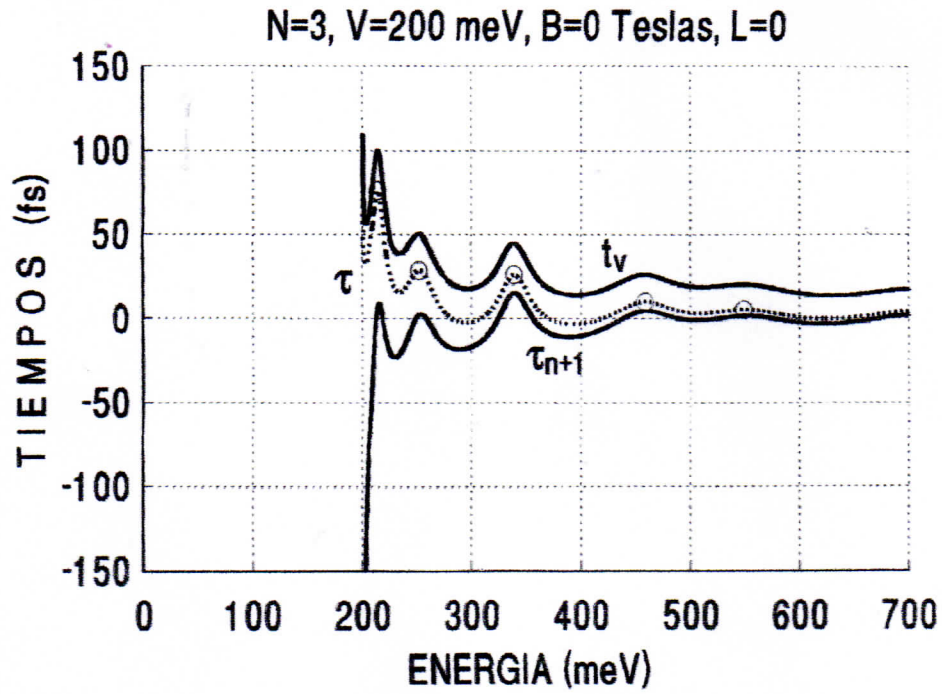


Figura 3.3. Dos posibles definiciones: τ_{n+1} es el tiempo de retardo con respecto a $\hbar dk'_{n+1}$ y τ lo es con respecto a $\hbar dk'_0$. t_v es el tiempo total de viaje.

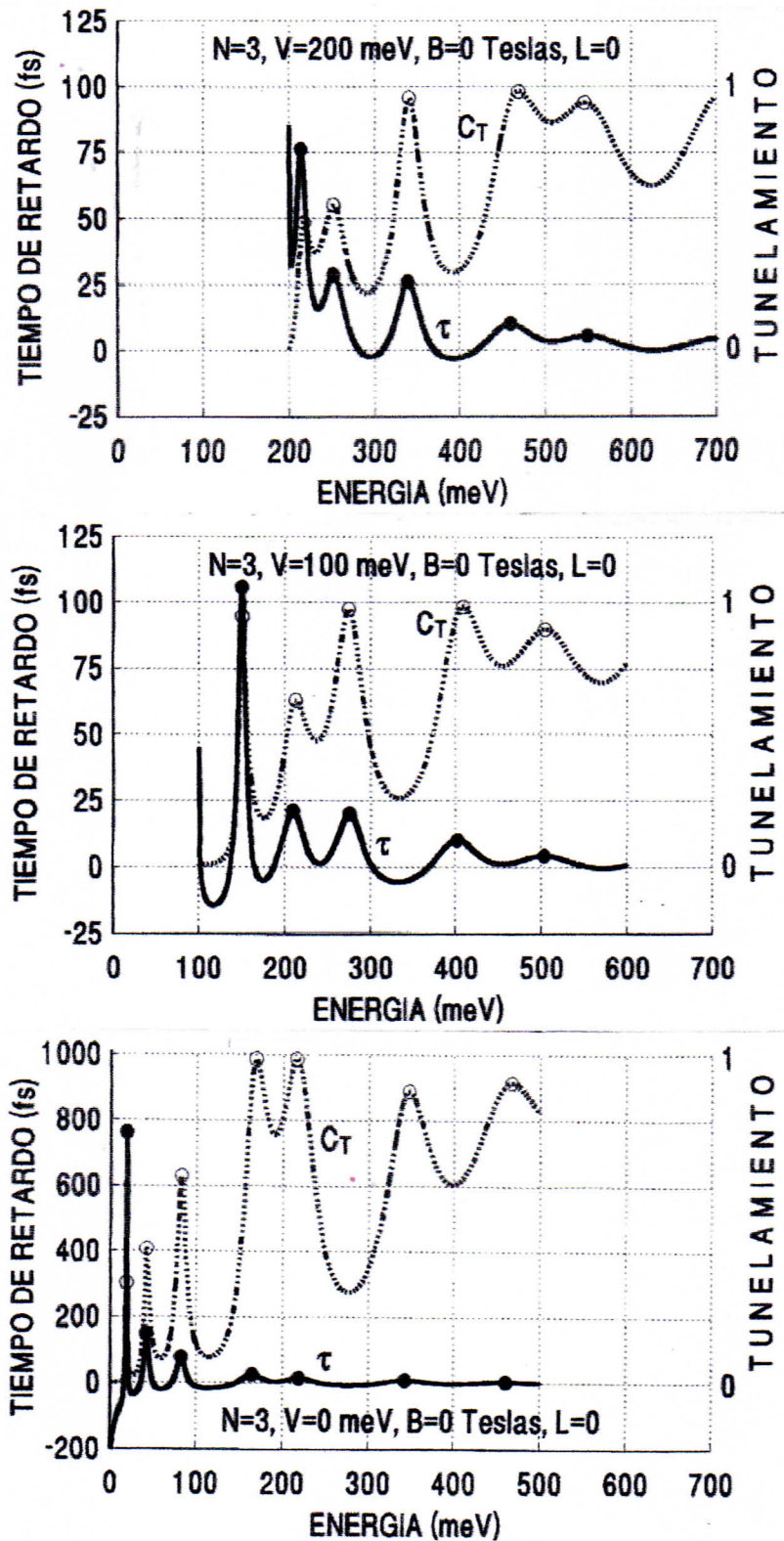


Figura 3.4. Tunelamiento C_T y tiempo de retardo τ . La altura del pico de τ , de menor energía, disminuye perceptiblemente con el aumento del potencial eléctrico V .

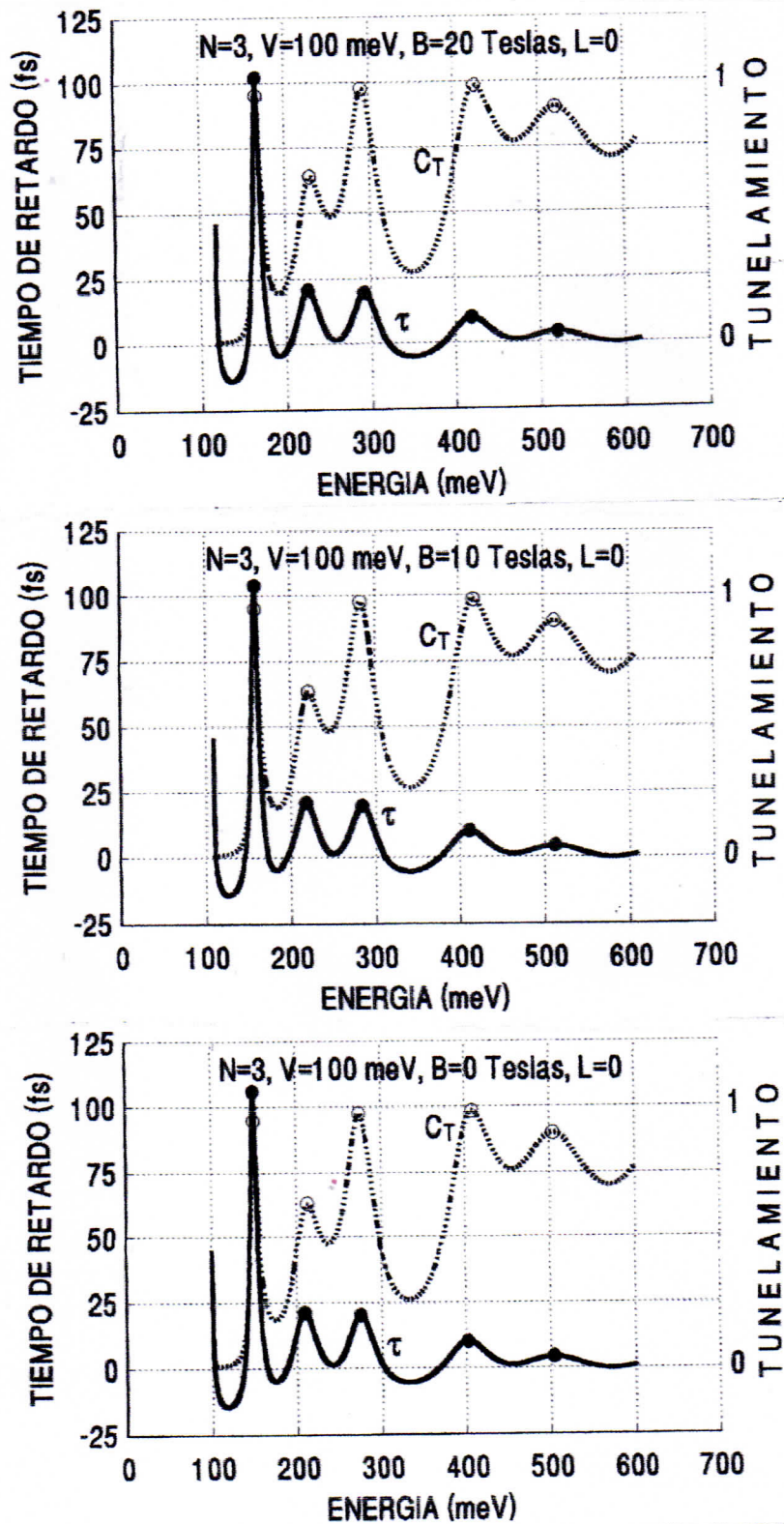


Figura 3.5. Tunelamiento C_T y tiempo de retardo τ . La altura del pico de τ , de menor energía, disminuye perceptiblemente con el aumento del campo magnético B .

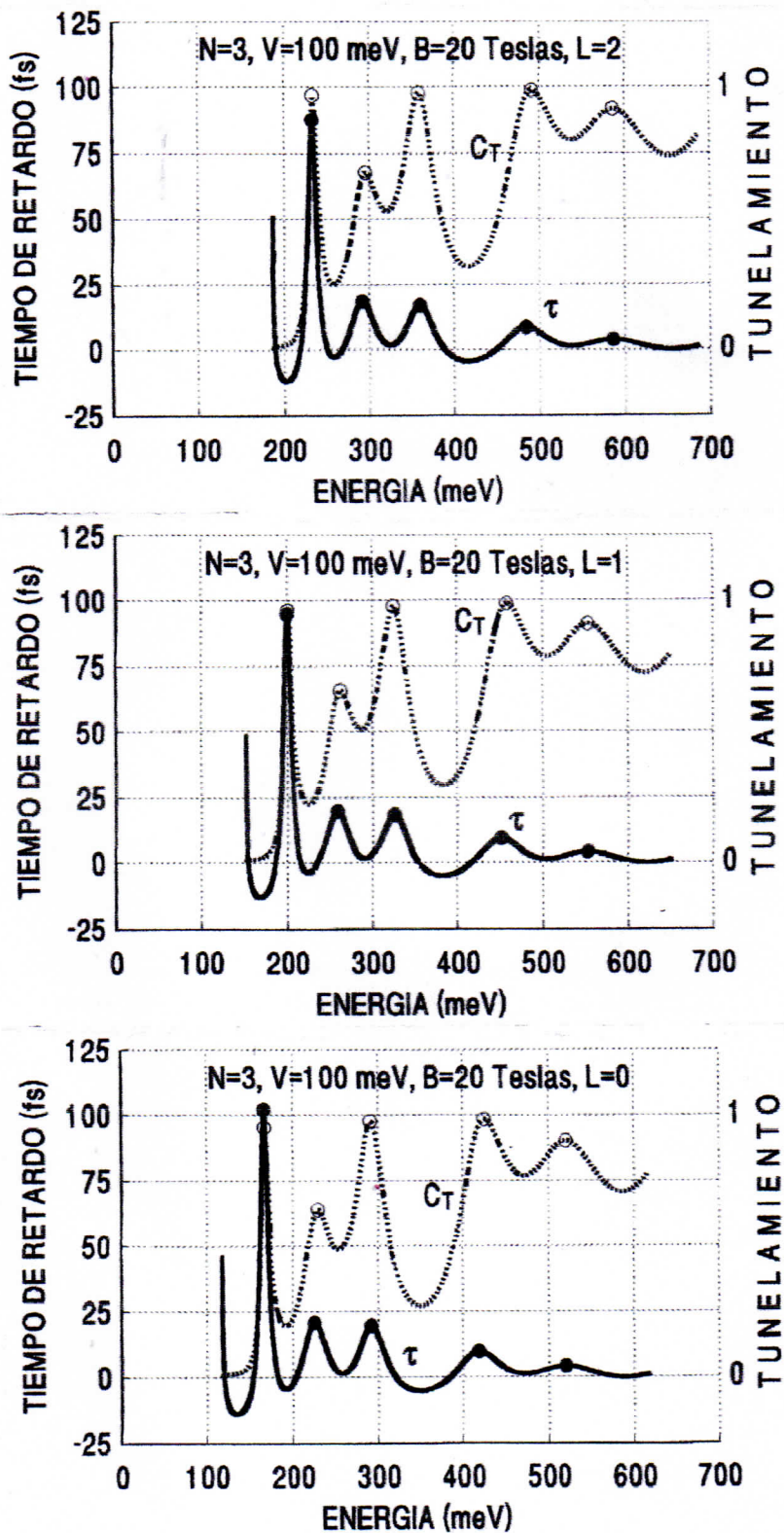


Figura 3.6. Tunelamiento C_T y tiempo de retardo τ . La altura del pico de τ , de menor energía, disminuye perceptiblemente con el aumento del número cuántico L .

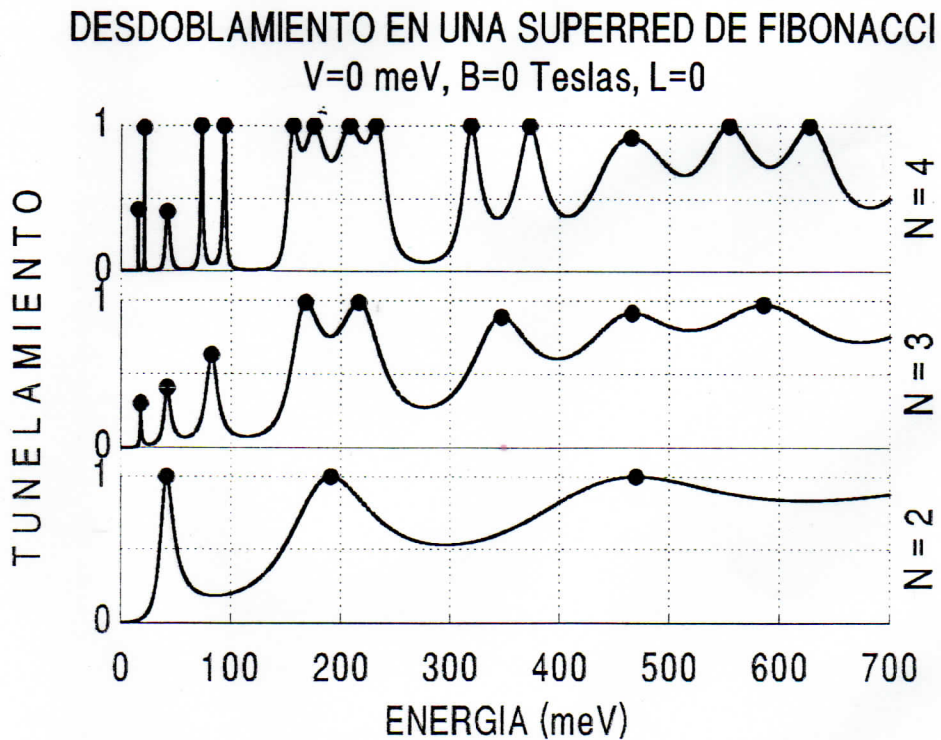
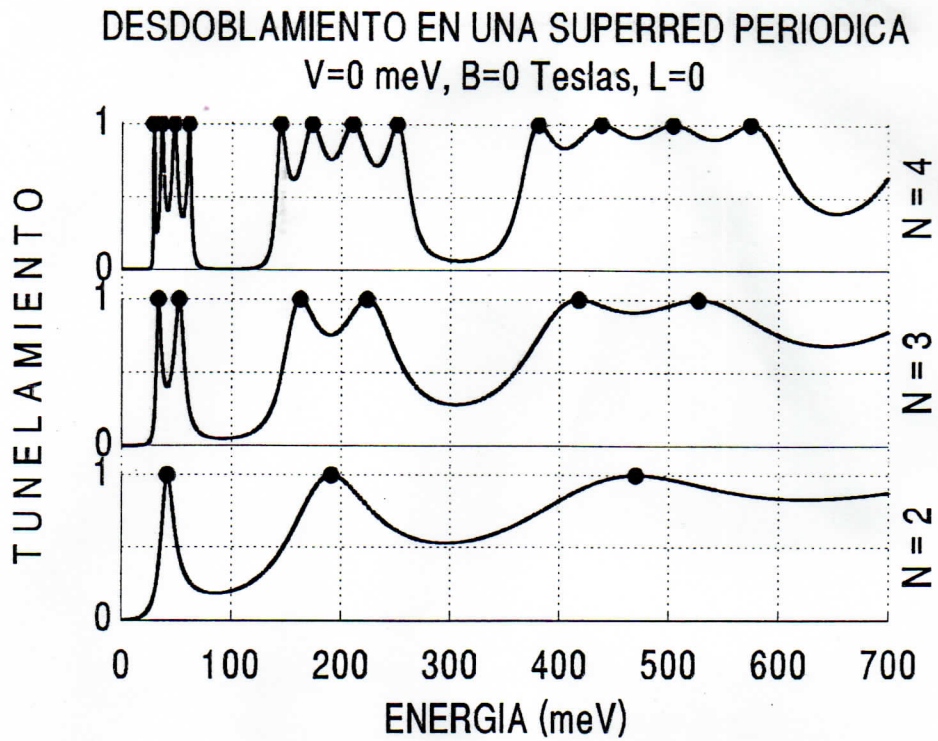


Figura 3.7. Comparación del desdoblamiento en superredes cuasiperiódicas de Fibonacci y en superredes periódicas. Puede observarse en ambos tipos de superredes, la presencia de grupos de picos. En el caso de la superred periódica tenemos $D = 20\text{\AA}$ y $D_S = D_L = 67.93\text{\AA}$.

CONCLUSIONES GENERALES

§ Los máximos relativos de tunelamiento ocurren para energías donde aproximadamente también se presentan los máximos relativos de tiempo de retardo. Esto es consistente con la idea de estados cuasiligados, aunque tales estados sólo existen para energías donde tiene lugar el efecto túnel.

§ Con el incremento del número de generación de Fibonacci N , se tiene un desdoblamiento de los picos en torno a los picos de los pozos simples ($N = 2$). Esta situación se presenta por el crecimiento del carácter oscilatorio de la matriz de transferencia, debido al aumento en la longitud de la superred.

§ Hemos empleado un campo eléctrico cuya acción sobre la heteroestructura recorre hacia mayores energías los picos de tunelamiento, y por consiguiente los de tiempo de retardo. Similarmente, tenemos un desplazamiento hacia energías mayores por efecto del campo magnético. Dicho corrimiento es necesario para la obtención de soluciones físicamente aceptables en nuestro trabajo.

§ En superredes cuasiperiódicas de Fibonacci, para $N > 2$, existen máximos relativos de tunelamiento menores que uno. Esto debe ocurrir por la diferencia en las longitudes de los pozos.

§ La presencia de tiempos de retardo negativos, para potenciales que clásicamente son desaceleradores, es un hecho que debe analizarse con más cuidado, aunque estos tiempos se encuentren en algunas regiones vecinas a las energías correspondientes a los mínimos relativos de tunelamiento.

REFERENCIAS

- [1] M. Palomino, Tesis Doctoral, IFUAP, (1998).
- [2] R. Merlin, K. Bajema, and R. Clarke, *Phys. Rev. Lett.* 55, 1768 (1985).
- [3] G. Sollner, W. D. Goodhue, P. E. Tannenwald, C. D. Parker, and D. D. Peck, *Appl. Phys. Lett.* 43, 588 (1983).
- [4] H. S. Cho and P. R. Prucnal, *Phys. Rev.* 152, 683 (1966).
- [5] R. Tsu and L. Esaki, *Appl. Phys. Lett.* 19, 246 (1971).
- [6] L. L. Chang, L. Esaki, and R. Tsu, *Appl. Phys. Lett.* 24, 593 (1974).
- [7] H. C. Liu, *Superlattices and Microstructures* 3, 749 (1987).
- [8] H. Mizuta, T. Tanoue, and S. Takahashi, *IEEE Transactions on Electron Devices* 35, 1951 (1988).
- [9] FÍSICA DE LOS SEMICONDUCTORES, K. V. SHALÍMOVA, Mir, Moscú, 1975.
- [10] Física del Estado Sólido y de Semiconductores, J. P. McKelvey, Limusa, México, 1976.
- [11] Ch. Spielmann, R. Szipöcs, A. Stingl, and F. Krausz, *Phys. Rev. Lett.* 73, 2308 (1994).
- [12] M. Singh, Z. C. Tao, and B. Y. Tong, *Phys. Stat. Sol. (b)*, 172, 583 (1992).
- [13] R. Tsu and L. Esaki, *Appl. Phys. Lett.* 22, 562 (1973).
- [14] Nian-Hua Liu, Wei-Guo Feng, and Xiang Wu, *Commun. Theor. Phys.* 20, 257 (1993).
- [15] Mécanique Quantique, A. Messiah, Vol. I, Dunod, Paris, 1959.
- [16] E. E. Mendez and K. Von Klitzing (Ed.),
Physics and Applications of Quantum Wells and Superlattices, (Plenum Press, New York
1989).

- [17] Introducción a la Mecánica Cuántica, L. de la Peña, Cecsca, México, 1979.
- [18] M. Kohmoto, B. Sutherland, and C. Tang, Phys. Rev. B 35, 1020 (1987).
- [19] D. toet, M. Patemski, Y. Y. Wang, J. C. Maan, L. Tapfer, and K. Ploog, Phys. Rev. Lett. 66, 2128 (1991).
- [20] M. Kohmoto, L. P. Kadanoff, and C. Tang, Phys. Rev. Lett. 50, 1870 (1983).
- [21] F. Nori and J. P. Rodriguez, Phys. Rev. B 34, 7367 (1986).
- [22] S. D. Gupta and D. S. Ray, Phys. Rev. B 38, 3628 (1988).
- [23] E. E. Mendez, E. Calleja, and W. I. Wang, Phys. Rev. B 34, 6026 (1986).
- [24] G. Bastard, Phys. Rev. B 24, 5693 (1981); 25, 7584 (1982).