



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO

MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

**EL TEOREMA DE WEYL PARA ALGUNAS
CLASES DE OPERADORES EN LOS ESPACIOS
DE HILBERT**

T E S I S

*PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS*

PRESENTA

MANUEL FEBRONIO RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. SLAVISA DJORDJEVIC

PUEBLA, PUE.

24 DE JUNIO DE 2015

Dedicatoria

A mis padres, que me han apoyado a lo largo de todos mis estudios y me han animado a seguir adelante. Con todo mi cariño y admiración.

Agradecimientos

A CONACYT, por haberme otorgado la beca que me ha permitido realizar este posgrado.

A todos mis profesores de la Maestría y en particular a mi director, Dr. Slavisa Djordjevic y al Dr. Gabriel Kantún por sus sugerencias en pro de una mejora del trabajo.

A la Dr. Helena F. Carcedo, por su revisión gramatical y de estilo.

A Lupita García por ser parte de mi vida y por su apoyo incondicional.

A mis hermanos que siempre han estado conmigo en los momentos malos y buenos de mi vida.

A mis amigos que siempre me han apoyado a seguir adelante, gracias por la amistad a cada uno de ellos.

A todos, muchas gracias.

Introducción

Un operador $T \in B(X)$, X un espacio de Banach, se dice que satisface el teorema de Weyl si el complemento del espectro de Weyl en el espectro del operador es el conjunto de todos los puntos aislados del espectro que son valores propios de multiplicidad geométrica finita. Para operadores k -paranormales en los espacios de Hilbert, Yuan y Gao en [25] probaron una parte de la igualdad $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$, y que el teorema de Weyl es cierto para $f(T)$ cuando f es analítica en un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ que contiene el espectro de T , para $k = 1$. El objetivo principal de este trabajo es demostrar que el teorema de Weyl es cierto para $f(T)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y si T es k -paranormal y λ es un punto aislado no cero del espectro de T , entonces la proyección espectral P de T con respecto a λ satisface que $R(P) = N(\lambda I - T) = N(\bar{\lambda}I - T^*)$ y P es auto-adjunta. Además, probaremos que el teorema de la aplicación espectral para el espectro esencial, el espectro de Browder y el espectro de Weyl son ciertos para T , y que T es polaroide.

El estudio de los operadores que satisfacen el teorema de Weyl lo inició el matemático Hermann Weyl en 1909, y probó que para un operador auto-adjunto T definido en un espacio de Hilbert satisface que $\lambda \in \sigma_w(T)$, precisamente cuando λ no es un punto aislado de multiplicidad finita en $\sigma(T)$ (véase [24]). Posteriormente, en 1966, el matemático L. A. Coburn (v. [6]) llamó esta propiedad el teorema de Weyl en honor a Hermann Weyl, y extendió el teorema de Weyl para operadores hponormales. En años más recientes muchos matemáticos se han interesado en esta propiedad, entre los que destacan B.P. Duggal, S. V. Djordjevic, P. Aiena, entre otros, y han obtenido una gran cantidad de resultados sobre esta propiedad (v. [9], [7], [8], [2] y [4]). Cabe señalar que los resultados que actualmente conocemos del teorema de Weyl se deben principalmente a la teoría espectral local, particularmente, con el estudio de la propiedad de extensión univaluada (SVEP).

En este trabajo inicialmente probamos resultados más generales para operadores en los espacios de Banach y, con base en ellos, obtuvimos resultados para clases de operadores especiales en los espacios de Hilbert. Específicamente, probamos resultados para la proyección espectral, el teorema de la aplicación espectral de los espectros que se derivan de la Teoría de Operadores de Fredholm, caracterizaciones del teorema de Weyl y el teorema de Weyl para operadores polaroides, respectivamente. Usando estos resultados, demostramos que los operadores k -paranormales satisfacen las propiedades mencionadas al principio de esta parte del trabajo.

Organizamos la exposición en tres capítulos. En el primero empezamos presentando propiedades básicas de operadores en los espacios de Banach y, en especial, en los espacios de Hilbert. En seguida incluimos una propiedad de suma importancia para operadores en los espacios de Banach, la SVEP. Relacionamos dicha propiedad con la parte casi-nilpotente, el ascenso y descenso de un operador, respectivamente. También, presentamos resultados para puntos aislados del espectro de un operador y relacionamos estos puntos con la SVEP. Para finalizar este capítulo, introducimos los operadores semi-Fredholm, Fredholm, Weyl y Browder, con sus respectivos espectros. El material de este primer capítulo se incluye para facilitar la lectura del resto del trabajo.

El segundo capítulo lo dedicamos al estudio de las propiedades espectrales de las clases especiales de operadores en los espacios de Hilbert. Empezamos introduciendo los operadores normales e hiponormales, con sus respectivas propiedades; vemos que los operadores normales son subclases de los operadores hiponormales; la restricción de un operador hiponormal a un subespacio invariante es hiponormal, mientras que los operadores normales no satisfacen esta propiedad, y caracterizamos estos operadores mediante el espectro. Luego, introducimos los operadores p -hiponormales, clase A , paranormales y k -paranormales y probamos que las siguientes contenciones son propias en el sentido de conjuntos:

$$\begin{aligned} normal &\subseteq hiponormal \subseteq p - hiponormal \subseteq clase\ A \\ &\subseteq paranormal \subseteq k - paranormal. \end{aligned}$$

Mostramos también que los operadores k -paranormales son isoloides. Terminamos el capítulo dos introduciendo a los operadores $*$ -clase A , $*$ -paranormal y k - $*$ -paranormal y probamos que las siguientes contencio-

nes también son ciertas en el sentido de conjuntos:

$$\begin{aligned} normal &\subseteq hiponormal \subseteq * - clase\ A \\ &\subseteq * - paranormal \subseteq k - * - paranormal. \end{aligned}$$

Por otra parte, probamos que los operadores $*$ -paranormales son independientes de los operadores paranormales. Además, probamos que los operadores k - $*$ -paranormales son isoloides.

Finalmente, en el tercer capítulo estudiamos las proyecciones espectrales de las clases especiales de operadores en los espacios de Hilbert introducidas en el capítulo dos. A continuación presentamos el teorema de la aplicación espectral para ciertos espectros generados por los operadores semi-Fredholm. Por otra parte, introducimos el teorema de Weyl, damos algunas caracterizaciones del mismo y demostramos que existe una gran cantidad de operadores que lo satisfacen. Principalmente, probamos que los operadores polaroides que tienen la SVEP satisfacen el teorema de Weyl. Como resultados particulares, obtuvimos que los operadores k -paranormales y k - $*$ -paranormales satisfacen el teorema de Weyl; el teorema de la aplicación espectral es cierto para los espectros superiormente semi-Weyl, inferiormente semi-Weyl y de Weyl para estas clases de operadores, respectivamente. Además, probamos que son polaroides.

Índice general

Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Operadores acotados en los espacios de Banach	1
1.2. Operadores acotados en los espacios de Hilbert	8
1.3. La propiedad de extensión univaluada	18
1.4. El ascenso y descenso de un operador	23
1.5. Puntos aislados del espectro de $T \in B(X)$	26
1.6. Operadores de Fredholm	28
2. Clases especiales de operadores en los espacios de Hilbert	37
2.1. Operadores normales e hponormales	37
2.2. Operadores k -paranormales	46
2.2.1. Las relaciones de inclusión y ejemplos	47
2.2.2. Representación matricial	56
2.2.3. Propiedades espectrales	61
2.3. Operadores k -*-paranormales	65
3. Proyección espectral, teorema de la aplicación espectral y el teorema de Weyl	69
3.1. Proyección espectral para clases de operadores en los espacios de Hilbert	69
3.2. Teoremas de la aplicación espectral	73
3.2.1. Teoremas de la aplicación espectral para clases de operadores en los espacios de Hilbert	85
3.3. Teorema de Weyl	87
3.3.1. Caracterizaciones del teorema de Weyl	87
3.3.2. Operadores que satisfacen el teorema de Weyl	95
Conclusiones	101

Apéndice: Funciones analíticas	103
Referencias	106

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo damos los conceptos y resultados básicos que nos permitan desarrollar los capítulos posteriores del presente trabajo. Las pruebas de los resultados aquí expuestos no se incluirán para no extendernos mucho en nuestra exposición. Por ello, solo ilustraremos con algunos ejemplos con detalles de estos resultados que creamos convenientes, con el fin de lograr una mejor comprensión. Más detalle de tales resultados se pueden encontrar en [17] y [15] para las primeras tres secciones; para las secciones restantes, en [1] y [3].

1.1. Operadores acotados en los espacios de Banach

En esta sección se estudian ciertas propiedades de operadores acotados en los espacios de Banach; de paso asociaremos con cada operador lineal acotado su adjunto, y veremos cómo ciertas propiedades de dicho operador se reflejan en el comportamiento de su adjunto. También se introduce el espectro de un operador lineal acotado que es clave para el estudio de la teoría de operadores en los espacios de Banach, ya que define el comportamiento de un operador en general. De manera natural se estudian ciertos subconjuntos del espectro de un operador que serán fundamentales en las clases de operadores que se estudiarán en este trabajo.

Comencemos nuestra exposición con algo de notaciones. Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ denotan los conjuntos de los números naturales, números naturales con el cero, números enteros, números reales y números

complejos, respectivamente. Los símbolos $|\lambda|$ y $\bar{\lambda}$ denotan el módulo y el conjugado del número complejo λ , respectivamente. La frontera y la clausura de un subconjunto A de $\mathbb{C}$, se denotan por ∂A y $\bar{A}$, respectivamente. Por otra parte, si A y B son subconjuntos de cualquier espacio de Banach X , $A \setminus B$ denota el complemento de B en A ; y si $x \in X$, $d(x, A)$ denota la distancia del punto x al conjunto A .

Definición 1. Un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ es un conjunto no vacío X provisto de dos operaciones llamadas suma y multiplicación por escalares, respectivamente. Tales operaciones se interpretan como aplicaciones $+: X \times X \rightarrow X$ tal que $+(x, y) = x + y$ para cada par de elementos $x, y \in X$ y $*: \mathbb{C} \times X \rightarrow X$ tal que $*(\alpha, x) = \alpha x$ para cada $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, y que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $x + y = y + x$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3. existe $0 \in X$ tales que $x + 0 = 0 + x = x$;
4. existe $-x \in X$ tales que $x + (-x) = (-x) + x = 0$;
5. $1x = x$;
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Definición 2. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una función $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma en X si satisface las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$;
2. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Un espacio normado es un par ordenado $(X, \|\cdot\|)$, donde X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma en X . Por comodidad, nos referiremos a menudo a un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ diciendo simplemente que X es un espacio normado, sin mencionar explícitamente la norma $\|\cdot\|$ que equipa el espacio vectorial X . Todo espacio normado X induce una métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

para cada $x, y \in X$. Por lo tanto, tiene sentido hablar de la completitud de tales espacios. Formalizando la idea, tenemos:

Definición 3. Un espacio de Banach es un espacio normado completo. Es decir, un espacio de Banach es un espacio normado que es completo como un espacio métrico con respecto a la métrica definida anteriormente.

Definición 4. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un subconjunto M no vacío de X es un subespacio vectorial de X , si es un espacio vectorial con respecto a las operaciones de suma y multiplicación por escalares de X restringido a sus elementos. Equivalentemente, M es un subespacio vectorial de X si:

1. $x + y \in M$ y
2. $\alpha x \in M$

para cualesquiera $x, y \in M$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Sea M un subconjunto de un espacio normado X . Diremos que M es un subespacio si es un subespacio vectorial cerrado en X .

Sean M y N subespacios vectoriales de un espacio vectorial X . La suma de M y N se define por $M + N = \{x + y : x \in M, y \in N\}$, y es un subespacio vectorial de X . Diremos que X es una suma directa de M y N si $X = M + N$ y $M \cap N = \{0\}$. Equivalentemente, si para cada $x \in X$ existen $u \in M$ y $v \in N$ únicos tales que $x = u + v$. Escribiremos a X como $X = M \oplus N$ si X es la suma directa de M y N . A veces también diremos que M y N es una descomposición de X si $X = M \oplus N$.

Continuemos nuestra exposición con la noción de operadores acotados.

Sean X e Y espacios vectoriales. Una función $T : X \rightarrow Y$ es una transformación lineal si para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad y \quad T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Sean X e Y espacios normados. Recordemos que una transformación lineal $T : X \rightarrow Y$ es acotada si existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq \alpha\|x\|$$

para cada $x \in X$. Equivalentemente, si T mapea subconjuntos acotados de X en subconjuntos acotados de Y . Además, no es complicado probar que la acotación de una transformación lineal es equivalente a su continuidad. Denotaremos por $B(X, Y)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales y acotadas $T : X \rightarrow Y$. Si $X = Y$, usaremos la notación $B(X)$ para $B(X, X)$ y a los elementos de $B(X)$ les llamaremos operadores. También, recordemos que si $T \in B(X, Y)$, la norma de T se define por:

$$\|T\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Por lo tanto, si $T \in B(X, Y)$, tenemos que $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ para todo $x \in X$. Se conoce que $B(X, Y)$ es un espacio normado con respecto a la norma definida arriba. Más aún, es un espacio de Banach, si Y es un espacio de Banach. El operador identidad sobre X será denotado por I . Dada una transformación lineal $T \in B(X, Y)$, definimos el núcleo de T como el conjunto

$$N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

y el rango de T se denota por $R(T)$ y se define por

$$T(X) = \{Tx : x \in X\}.$$

Fácilmente se demuestra que el núcleo y el rango de $T \in B(X, Y)$ son subespacios vectoriales de X e Y , respectivamente. Además, es obvio que $N(T)$ es cerrado por la continuidad de T .

Definición 5. Sea X un espacio vectorial, y sea $T : X \rightarrow X$ una transformación lineal. Si M es un subespacio vectorial de X , se dice que M es T -invariante si $T(M) \subseteq M$.

Sea T una transformación lineal en X . El núcleo y el rango de T , ambos, son T -invariantes.

A partir de este momento, y hasta el final de este trabajo, X e Y serán espacios de Banach de dimensión infinita sobre el campo de los números complejos, a menos que digamos lo contrario.

Uno de los teoremas más importantes en la teoría de los espacios de Banach es el teorema de la aplicación abierta, que asegura la continuidad de la inversa de una transformación lineal acotada entre espacios de Banach.

Teorema 1. (*Teorema de la aplicación abierta*). Si $T \in B(X, Y)$ es biyectiva, entonces $T^{-1} \in B(Y, X)$.

El espacio dual de X es $X^* = B(X, \mathbb{C})$. Ahora vamos a asociar con cada $T \in B(X, Y)$ su adjunto, un operador $T^* \in B(Y^*, X^*)$, y veremos cómo ciertas propiedades de T se reflejan en el comportamiento de T^* .

Teorema 2. Sean X e Y espacios normados. Si $T \in B(X, Y)$, entonces existe un único $T^* \in B(Y^*, X^*)$ tal que

$$T^*(y^*)x = y^*(Tx)$$

para todo $y^* \in Y^*$ y todo $x \in X$. Además, T^* satisface que $\|T\| = \|T^*\|$.

El parámetro que a continuación describiremos permite, entre otras cosas, caracterizar cuando el rango de un operador es cerrado, condición que se le exigirá a muchas clases importantes de operadores con las que trataremos.

Definición 6. El módulo minimal reducido de $T \in B(X, Y)$, denotado por $\gamma(T)$, viene dado por la expresión:

$$\gamma(T) = \inf_{x \notin N(T)} \frac{\|Tx\|}{d(x, N(T))}$$

si T no es cero; si $T = O$, entonces tomaremos $\gamma(T) = \infty$.

En el siguiente teorema, veremos la relación existente entre el módulo minimal y el rango de un operador.

Teorema 3. Sea $T \in B(X)$ un operador no nulo. Entonces, $R(T)$ es cerrado si y solo si $\gamma(T) > 0$.

Dado un operador T en X , se puede demostrar que $\gamma(T) = \gamma(T^*)$. Según esto, y por el teorema 3,

$$R(T) \text{ es cerrado} \Leftrightarrow R(T^*) \text{ es cerrado.}$$

Sea M cualquier subconjunto de X . El anulador de M es un subconjunto de X^* que se define como:

$$M^\circ = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \text{ para cada } x \in M\}.$$

Mientras que el preanulador de un subconjunto N de X^* se define como:

$${}^\circ N = \{x \in X : x^*(x) = 0 \text{ para cada } x^* \in N\}.$$

El anulador de $M \subseteq X$ es un subespacio de X^* y el preanulador de $N \subseteq X^*$ es un subespacio de X .

Observación 1. Las siguientes relaciones entre los núcleos y los rangos asociados de una transformación $T \in B(X, Y)$ y su adjunto $T^* \in B(Y^*, X^*)$ se conocen bien

- (1) Si M es un subespacio de X , entonces ${}^\circ(M^\circ) = M$.
- (2) Si M y N son subespacios de X , entonces $(M + N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ$.
- (3) $N(T) = {}^\circ R(T^*)$ y $N(T^*) = R(T)^\circ$.
- (4) Si $R(T)$ es cerrado, entonces $R(T) = {}^\circ N(T^*)$ y $R(T^*) = N(T)^\circ$.
- (5) Si M y N son subespacios de X tales que $X = M \oplus N$, entonces $X^* = M^\circ \oplus N^\circ$.

En lo que resta de esta sección introduciremos el espectro $\sigma(T)$ de un operador $T \in B(X)$ y también describiremos ciertas partes de dicho conjunto.

Definición 7. Sea $T \in B(X)$. El espectro de T se define como el conjunto

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es biyectivo}\}.$$

El complemento de $\sigma(T)$ se llama conjunto resolvente de T y lo denotaremos por $\rho(T)$. Si $T \in B(X)$, definimos el radio espectral de T por:

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Se conoce bien que $r(T) \leq \|T\|$. El resultado que sigue demuestra que $r(T)$ está bien definido.

Teorema 4. Para cada $T \in B(X)$ se tiene que $\sigma(T)$ es un subconjunto no vacío y compacto de $\mathbb{C}$ y, además, $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$

Por definición, el espectro de un operador acotado $T \in B(X)$ puede ser dividido en subconjuntos disjuntos, lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 8. Sea $T \in B(X)$.

- (a) El espectro puntual de T , denotado por $\sigma_p(T)$, se define como todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales $\lambda I - T$ no es injectivo.
- (b) El espectro sobreyectivo de T se define como:

$$\sigma_s(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es sobreyectivo}\}.$$

Nótese que el espectro puntual de un operador acotado T en X es el conjunto de todos sus valores propios.

Definición 9. Sea $T \in B(X)$.

- (a) Se dice que T es acotado por debajo si existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha\|x\| \leq \|Tx\|$, para cada $x \in X$.
- (b) Se define el espectro puntual aproximado de T como:

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es acotado por debajo}\}.$$

Es obvio que si $T \in B(X)$ es acotado por debajo, entonces T es injectivo. De esto se obtiene que $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$.

Teorema 5. Sea $T \in B(X)$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (a) T es acotado por debajo.
- (b) $N(T) = \{0\}$ y $R(T)$ es cerrado.

En el siguiente teorema se dan algunas relaciones de interés entre las nociones de operadores acotado por debajo y sobreyectivo.

Teorema 6. Sea $T \in B(X)$. Entonces

- (a) T es sobreyectivo si y solo si T^* es acotado por debajo.
- (b) T es acotado por debajo si y solo si T^* es sobreyectivo.
- (c) T es acotado por debajo si y solo si $\lambda I - T$ es acotado por debajo para todo $|\lambda| < \gamma(T)$.
- (d) T es sobreyectivo si y solo si $\lambda I - T$ es sobreyectivo para todo $|\lambda| < \gamma(T)$.

Nótese que $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_s(T)$ y, por el Teorema anterior, se obtiene que $\sigma_s(T) = \sigma_{ap}(T^*)$ y $\sigma_{ap}(T) = \sigma_s(T^*)$. Además, $\sigma(T) = \sigma(T^*)$, ya que

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_s(T) = \sigma_s(T^*) \cup \sigma_{ap}(T^*) = \sigma(T^*).$$

Teorema 7. Si $T \in B(X)$, entonces $\sigma_{ap}(T)$ y $\sigma_s(T)$ son subconjuntos no vacíos y compactos de $\mathbb{C}$. Además, $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$ y $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_s(T)$.

1.2. Operadores acotados en los espacios de Hilbert

En esta sección estudiamos las propiedades básicas de operadores en los espacios de Hilbert. En especial, estudiamos las propiedades de los operadores auto-adjuntos, positivos, proyecciones ortogonales y unitarios. Dichos operadores serán pieza clave para introducir ciertas clases de operadores que se tratarán en este trabajo.

En este trabajo H y K serán espacios de Hilbert de dimensión infinita sobre $\mathbb{C}$, con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 10. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ es un producto interior o un producto interno (o producto escalar) sobre X si satisface las siguientes propiedades:

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, donde la barra denota el conjugado de $\langle y, x \rangle$;
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$;
5. $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$;

para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Un espacio con producto interno es un par ordenado $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde X es un espacio vectorial y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en X . Un espacio con producto interno $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ a menudo será denotado simplemente por X , sin mencionar explícitamente el producto interno definido en X .

Sea X un espacio con producto interno. Si $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$, entonces las siguientes propiedades son ciertas:

- (i) Desigualdad de Schwarz: Para todo $x, y \in X$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

- (ii) Desigualdad triangular: Para todo $x, y \in X$,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Por (ii), todo espacio con producto interno induce una norma en X , definida por $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, todo espacio con producto interno es un espacio normado y por lo tanto un espacio métrico, con la métrica dada por:

$$d(x, y) = \langle x - y, x - y \rangle^{\frac{1}{2}},$$

para cada par de elementos $x, y \in X$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 11. Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno completo. En otras palabras, un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno que es completo como un espacio métrico con respecto a la métrica definida en la observación anterior.

Sea X un espacio con producto interno. Sean A y B subconjuntos de X y consideremos $x, y \in X$. Diremos que x y y son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$; x es ortogonal a A si $\langle x, y \rangle = 0$ para cada $y \in A$. También diremos que A y B son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$ para cada $x \in A$ y para cada $y \in B$. Finalmente, diremos que A es un conjunto ortogonal si x y y son ortogonales para cualesquiera $x, y \in A$ distintos.

Sean A y B subconjuntos de un espacio con producto interno X . Si A y B son ortogonales, escribiremos $A \perp B$.

Teorema 8. Sea H un espacio de Hilbert. Si M y N son subespacios de H tales que $M \perp N$, entonces $M + N$ es un subespacio de H .

Si M y N son subespacios de H , por el teorema anterior, $M + N$ es un espacio de Hilbert.

Sea X un espacio con producto interno. Sea A un subconjunto de X , se define el complemento ortogonal de A como:

$$A^\perp = \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0 \text{ para cada } y \in A\}.$$

El complemento ortogonal de A es un subespacio vectorial de X cerrado por la continuidad del producto escalar. Sean M y N subespacios vectoriales de X . Las siguientes proposiciones son consecuencias inmediatas de la definición del complemento ortogonal de un subconjunto arbitrario de X .

- (i) $M \perp M^\perp$ y $M \cap M^\perp = \{0\}$.
- (ii) Si $M \perp N$, entonces $M \cap N = \{0\}$.
- (iii) $M \perp N$ si y sólo si $N \perp M$.

- (iv) $M \perp N$ si y sólo si $M \subseteq N^\perp$.
- (v) Si $M \subseteq N$, entonces $N^\perp \subseteq M^\perp$. Además, $M^{\perp\perp} = \overline{M}$.
- (vi) $M^\perp = \{0\}$ si y solo si $\overline{M} = H$.

Sea X un espacio con producto interno. Diremos que X es una suma directa ortogonal de M y N , si $M \perp N$ y $X = M + N$, y será denotado por $X = M \oplus_\perp N$, para distinguirlo de la suma directa ordinaria $X = M \oplus N$ introducida en la sección 1.1.

El resultado que presentamos a continuación se conoce como el teorema de la proyección ortogonal, que es el teorema central de la geometría de cualquier espacio de Hilbert y que justifica la palabra complemento.

Teorema 9. Si M es un subespacio de H , entonces $H = M \oplus_\perp M^\perp$.

Teorema 10. (El teorema de representación de Riesz). Si $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es una funcional lineal acotada, entonces existe un único $y \in H$ tal que

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

para todo $x \in H$. Además, $\|f\| = \|y\|$.

Sea $T \in B(H, K)$. Para cada $y \in K$ fijo, la funcional $f_y : X \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_y(x) = \langle Tx, y \rangle$ para todo $x \in H$ es claramente lineal y acotada. Luego, por el teorema de representación de Riesz, existe un único $z_y \in H$ tal que $\langle Tx, y \rangle = f_y(x) = \langle x, z_y \rangle$ para todo $x \in H$. Este define una función $T^* : K \rightarrow H$ tal que $T^*(y) = z_y$ para cada $y \in K$, y por lo tanto para todo $x \in H$ y todo $y \in K$,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle. \quad (1.1)$$

Se conoce bien que $T^* \in B(K, H)$ y es la única transformación lineal acotada que satisface la ecuación (1.1). La transformación lineal acotada T^* se llama el adjunto de T .

Entre otras propiedades básicas del adjunto de una transformación lineal acotada, tenemos, para cualesquiera $S, T \in B(H, K)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$,

1. $(S + T)^* = S^* + T^*$.
2. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.
3. $(ST)^* = T^* S^*$.

4. $T^{**} = T$.
5. $\|T\| = \|T^*\|$ y $\|T\|^2 = \|TT^*\|$

Además, si $H = K$, tenemos:

6. $O^* = O$ y $I^* = I$.
7. $T^{*n} := (T^*)^n = (T^n)^* = T^{n*}$ para algún $n \in \mathbb{C}$.
8. Si T es invertible, entonces $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Las partes (1) y (2) muestran que la aplicación $T \mapsto T^*$ es lineal conjugada. Mientras que si T^* es como en el teorema 2, la aplicación $T \rightarrow T^*$ es lineal.

Nota: No confundir el operador T^* definido arriba con el operador del teorema 2. En el contexto nos daremos cuenta de qué tipo de adjunto hablamos. En su debido momento veremos que el operador adjunto de esta sección y del adjunto del teorema 2 tienen propiedades similares. Por el momento, tenemos que las partes (a) y (b) del teorema 6 son ciertas si T^* es como en esta sección.

Para comprender mejor de lo expuesto hasta ahora, veamos un ejemplo de un operador particular con su respectivo espectro.

En el siguiente ejemplo y como en el resto de este trabajo, $\mathbb{D}(\lambda, \epsilon)$ denotará el disco abierto en $\mathbb{C}$ con centro en λ y radio ϵ . Además, recordemos que $l_2 = \{\{x_n\} : x_n \in \mathbb{C} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$. Se conoce bien que l_2 es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

para cada $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in l_2$.

Ejemplo 1. Consideremos el espacio de Hilbert l_2 y definamos a $R : l_2 \rightarrow l_2$ por $R(x) = (0, x_1, x_2, \dots)$ para cada $x = \{x_n\} \in l_2$. Es obvio que $R \in B(l_2)$ y el adjunto de R viene dado por $L(x) = (x_2, x_3, \dots)$ para cada $x = \{x_n\}$. Al operador R se le conoce como el operador de desplazamiento a la derecha, mientras que L se llama el operador de desplazamiento a la izquierda.

Es claro que $\lambda I - R$ es inyectivo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, de lo cual se sigue que $\sigma_p(R) = \emptyset$. Por otro lado, $Lx = \lambda x$ si y solo si $x_{n+1} = \lambda x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $x = \{x_n\}$. Pongamos $x_1 = 1$, entonces $x_{n+1} = \lambda^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que $x = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$. Ahora, $x \in l_2$ si y solo si $|\lambda| < 1$. Por lo tanto, cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 1$ es un valor propio de L , así $\mathbb{D}(0, 1) \subseteq \sigma_p(L)$. Por otra parte, si $|\lambda| = 1$, entonces λ no es un valor propio de L , puesto que $x = (1, \lambda, \lambda^2, \dots) \notin l_2$ si $|\lambda| \geq 1$, y por lo tanto $\sigma_p(L) = \mathbb{D}(0, 1)$. Ahora, calculemos $\sigma(L)$; puesto que $\sigma(L)$ es cerrado, se tiene que $\overline{\mathbb{D}(0, 1)} \subseteq \sigma(L)$. También, notemos que $\|Rx\| = \|x\|$ para cada $x \in l_2$, por inducción se tiene que $\|R^n x\| = \|x\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de aquí se obtiene que $\|R^n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que $r(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|R^n\|^{\frac{1}{n}} = 1$. Luego, $r(L) = \overline{r(R)} = 1$, y por lo tanto $\sigma(L) \subseteq \overline{\mathbb{D}(0, 1)}$. En consecuencia, $\sigma(L) = \overline{\mathbb{D}(0, 1)}$. De paso también se obtiene que $\sigma(R) = \overline{\mathbb{D}(0, 1)}$.

Finalmente, calculemos $\sigma_{ap}(R)$ y $\sigma_s(L)$. Como $N(R) = \{0\}$ y $\|Rx\| = \|x\|$, entonces para $0 \neq x \in l_2$ se tiene que $d(x, \{0\}) = \|x\| = \|Rx\|$, y por lo tanto,

$$\gamma(R) = \inf \left\{ \frac{\|Rx\|}{d(x, \{0\})} : x \neq 0 \right\} = 1.$$

Luego, por el teorema 6, $\sigma_{ap}(R) \subseteq \partial\mathbb{D}(1, 0)$. Por otra parte, como $\partial\mathbb{D}(0, 1) = \partial\sigma(R) \subseteq \sigma_{ap}(R)$, entonces $\sigma_{ap}(R) = \partial\mathbb{D}(0, 1)$. Por lo tanto, $\sigma_s(L) = \sigma_{ap}(R) = \partial\mathbb{D}(0, 1)$.

El siguiente resultado relaciona los núcleos y los rangos de un operador con su adjunto. En particular, demuestra que $N(T^*)^\perp$ y $R(T^*)^\perp$ también son T -invariantes.

Proposición 1. *Si T es un operador en H , entonces*

- (a) $N(T) = R(T^*)^\perp = N(T^*T)$.
- (b) $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp = \overline{R(TT^*)}$.

Entre las clases de operadores más conocidas en los espacios de Hilbert y que serán fundamentales para introducir ciertas clases de operadores que trataremos en este trabajo, se hallan las que se presentan a continuación:

Definición 12. Sea $T \in B(H)$ un operador acotado. Entonces,

- (a) T es auto-adjunto si $T = T^*$.
- (b) T es no negativo si T es auto-adjunto y $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para cada $x \in H$.

- (c) T es positivo si T es auto-adjunto y existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha\|x\|^2 \leq \langle Tx, x \rangle$ para cada $x \in H$.

Una buena caracterización de los operadores auto-adjuntos que será de mucha utilidad es la que se presenta a continuación:

Teorema 11. *Un operador $T \in B(H)$ es auto-adjunto si y sólo si $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$.*

En esta parte y como en el resto de este trabajo el símbolo i denota el número complejo $(0, 1)$.

Teorema 12. *Si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ y $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|}$ para cada $\lambda = i\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces T es auto-adjunto.*

Sea $Q \in B(H)$, usaremos la notación $Q \geq O$ si Q es no negativo y con $Q > O$ si Q es positivo. Sean $Q, R \in B(H)$. Si $Q - R$ es auto-adjunto y $O \leq Q - R$, entonces lo escribiremos como $R \leq Q$. De aquí que $R \leq O$ si $O \leq -R$. También escribiremos $R < Q$, si $Q - R$ es auto-adjunto y $O < Q - R$.

Entre las propiedades más importantes de los operadores no negativos y positivos se encuentran:

Teorema 13. *Sean $Q, R, T \in B(H)$ y $\alpha \geq 0$.*

- (a) *Si $Q \geq R$, entonces $\alpha Q \geq \alpha R$.*
- (b) *Si $Q \geq R$, entonces $T^*QT \geq T^*RT$.*
- (c) *Si $Q \geq O$ y $R \geq O$ ($Q \geq O$ y $R > O$), entonces $Q + R \geq O$ ($Q + R > O$).*
- (d) *Si $Q \geq R$ ($Q > R$), entonces $Q + T \geq R + T$ ($Q + T > R + T$).*
- (e) *Si $Q \geq O$ ($Q > O$), entonces $Q^n \geq O$ ($Q^n > O$) para cada entero $n \geq 0$.*

Teorema 14. *Sean $Q, R \in B(H)$. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (a) *Si $Q \geq O$ es invertible, entonces $Q > O$.*
- (b) *Si $Q > O$, entonces Q es invertible.*
- (c) *Si $Q > O$, entonces $Q^{-1} > O$.*

(d) Si $O < Q \leq R$, entonces $O < R^{-1} \leq Q^{-1}$.

Para un operador $T \in B(H)$, si existe un operador $S \in B(H)$ tal que $S^2 = T$, entonces diremos que S es una raíz cuadrada de T .

Teorema 15. *Todo operador no negativo $Q \in B(H)$ tiene una única raíz cuadrada no negativa $Q^{\frac{1}{2}}$. Además, si $R \in B(H)$ tal que $QR = RQ$, entonces $Q^{\frac{1}{2}}R = RQ^{\frac{1}{2}}$.*

Si $T \in B(H)$, entonces $(TT^*)^* = (T^*)^*T^* = TT^*$ y $\langle TT^*x, x \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle = \|T^*x\|^2 \geq 0$ para cada $x \in H$. Por lo tanto, TT^* es un operador no negativo. Análogamente, se obtiene que T^*T también es un operador no negativo. Entonces tiene sentido definir $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, que se conoce como el valor absoluto de T . Por el teorema 15, $|T| \in B(H)$ y $|T|^2 = T^*T$.

Para las raíces cuadradas de un operador no negativo, tenemos:

Teorema 16. *Sean $Q, R \in B(H)$.*

(a) Si $Q > O$, entonces $Q^{\frac{1}{2}} > O$.

(b) Si $Q \geq R \geq O$ y $Q > O$, entonces $\|R^{\frac{1}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}\| \leq 1$.

Teorema 17. *(Desigualdad de Furuta). Si $Q \geq R \geq O$, entonces para cada $r \geq 0$, $(R^{\frac{r}{2}}Q^pR^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (R^{\frac{r}{2}}R^pR^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$ es cierto para $p \geq 0$ y $q \geq 1$ con $(1+r)q \geq p+r$.*

Pasemos ahora definir las proyecciones ortogonales:

Definición 13. Sea X un espacio con producto interno. Un operador $P \in B(X)$ es una proyección ortogonal si $P = P^2$ y $R(P) \perp N(P)$.

Luego, si P es una proyección ortogonal, es fácil demostrar que $I - P$ también lo es. El rango de una proyección es el conjunto de todos sus puntos fijos, esto es,

$$R(P) = \{x \in X : Px = x\}.$$

Además, $R(P) = N(I - P)$ y $N(P) = R(I - P)$, y por lo tanto $R(P)$ es cerrado. La interpretación geométrica de las proyecciones ortogonales permite demostrar que si $M = R(P)$ y $N = N(P)$, entonces $M^\perp = N$ y por lo tanto $H = M \oplus_\perp N$; este hecho las hace tan importantes y simples de usarlas.

Una proyección es una transformación lineal $P : X \rightarrow X$ tal que $P = P^2$. Se sabe bien que $P \in B(X)$.

Teorema 18. Sea $P \in B(H)$ una proyección diferente del nula. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) P es una proyección ortogonal.
- (b) P es auto-adjunto.
- (c) P es no negativo.
- (d) $\|P\| = 1$.

Otra manera de enunciar el Teorema de la proyección, ahora en su forma analítica es como sigue:

Teorema 19. Para cada subespacio M de H existe una única proyección ortogonal $P \in B(H)$ tal que $R(P) = M$.

Sea M un subespacio de H . Entonces la única proyección ortogonal $P \in B(H)$ para la cual $R(P) = M$ se llama proyección ortogonal sobre M .

Sean M y N subespacios de X . El producto cartesiano $M \times N = \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$ de M y N es un espacio vectorial con las operaciones de la suma de vectores y la multiplicación por escalares definidas como sigue:

$$x + y = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ y } \alpha x = (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

para cada $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2) \in M \times N$ y para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Se conoce que $M \times N$ es un espacio de Banach con la norma definido por $\|x\|_2 = \sqrt{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2}$ para cada $x = (x_1, x_2) \in M \times N$. Más aún, si X es un espacio de Hilbert, entonces $M \times N$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por $\langle x, y \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle$ para cada $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2) \in M \times N$ y que este induce la norma $\|\cdot\|_2$.

Sean X e Y espacios normados. Una isometría es una función $T : X \rightarrow Y$ tal que $\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in X$. Es obvio que toda isometría lineal es acotada e inyectiva. Si X e Y son espacios con productos internos, diremos que $T : X \rightarrow Y$ es una transformación unitaria si es una isometría lineal y sobreyectiva. Si $X = Y$, diremos que T es un operador unitario. También diremos que X e Y son equivalentemente unitarios si existe una transformación unitaria entre ellos.

Lema 1. Sean M y N son subespacios de X .

- (a) Si $X = M \oplus N$, entonces existe un isomorfismo topológico (homeomorfismo lineal) entre $M \times N$ y X .

(b) Si X es un espacio de Hilbert y $X = M \oplus_{\perp} N$, entonces existe una transformación unitaria entre $M \times N$ y X .

Cuando escribimos a X como $X = M \oplus N$ o $X = M \oplus_{\perp} N$ (si X es un espacio de Hilbert) podemos pensar a X como $M \times N$.

Lema 2. Sean M y N subespacios de X y consideremos $Z = M \times N$.

(a) Si $T_{11} \in B(M)$, $T_{12} \in B(N, M)$, $T_{21} \in B(M, N)$ y $T_{22} \in B(N)$, entonces la aplicación $T : Z \rightarrow Z$ definida por:

$$T(x_1, x_2) = (T_{11}x_1 + T_{12}x_2, T_{21}x_1 + T_{22}x_2) \quad (1.2)$$

para cada $(x_1, x_2) \in Z$ es un elemento de $B(Z)$.

(b) Recíprocamente, supongamos que $T \in B(Z)$. Para cada $x_1 \in M$, $T(x_1, 0) = (T_{11}x_1, T_{21}x_1) \in Z$, donde T_{11} es una aplicación de M en M y T_{21} es una aplicación de M en N . Similarmente, para cada $x_2 \in N$, $T(0, x_2) = (T_{12}x_2, T_{22}x_2) \in Z$, donde T_{12} es una aplicación de N en M y T_{22} es una aplicación de N en N . Entonces $T_{11} \in B(M)$, $T_{12} \in B(N, M)$, $T_{21} \in B(M, N)$ y $T_{22} \in B(N)$.

Por el Lema 2, existe una correspondencia uno a uno (biyección) entre cada $T \in B(Z)$ y cada matriz de 2×2 de transformaciones lineales acotadas $[T_{ij}]$, que es representado por el mismo símbolo T , es escrito por $T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$ y que está definida como en (1.2). Además, si X

es un espacio de Hilbert, entonces $T^* = \begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^* \end{bmatrix}$ y $T^* \in B(Z)$.

Proposición 2. Sean M y N subespacios de H tales que $H = M \oplus N$ y sea $T \in B(H)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) M es T -invariante.

(b) $T = \begin{bmatrix} T|_M & T_{12} \\ O & T_{22} \end{bmatrix}$.

Sea $T \in B(H)$, si M y su complemento ortogonal $M^{\perp}$ son ambos T -invariantes, entonces diremos que M reduce a T .

Teorema 20. Sea M un subespacio de H . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) M reduce a T .

$$(b) \quad T = T|_M \oplus T|_{M^\perp} = \begin{bmatrix} T|_M & O \\ O & T|_{M^\perp} \end{bmatrix} \text{ en } B(M \oplus_\perp M^\perp).$$

(c) $PT = TP$, donde P es la proyección ortogonal sobre M .

(d) M es T -invariante y T^* -invariante. En este caso $(T|_M)^* = T^*|_M$.

Este teorema sugiere que si M reduce a T , la investigación de T se reduce a la investigación de operadores más pequeños, $T|_M$ y $T|_{M^\perp}$, lo cual justifica la terminología “subespacio reductor”.

Sea M un subespacio de H . Si M es T -invariante, con $T \in B(H)$, entonces $T(M) \subseteq M$, y por lo tanto $T|_M \in B(M)$, pero $T^*(M)$ no necesariamente es subconjunto de M . Para ver esto, basta con tomar a M distinto de cualquier subespacio que reduce a T . Entonces, si queremos devolver a M en sí mismo mediante T^* , debemos proyectar $T^*(M)$ en M .

Teorema 21. *Sea M un subespacio de H y tomemos $T \in B(H)$. Si M es T -invariante, entonces $(T|_M)^* = PT^*|_M$ en $B(M)$, donde $P \in B(H)$ es la proyección ortogonal sobre M .*

Continuemos ahora con el estudio de los operadores unitarios. En primer lugar caracterizaremos a las isometrías lineales en términos de sus adjuntos.

Proposición 3. *Un operador $V \in B(H)$ es una isometría si y solo si $V^*V = I$.*

A continuación enlistamos las propiedades más importantes de las transformaciones unitarias, las cuales serán de mucha utilidad en el resto de este trabajo.

Teorema 22. *Sea $U \in B(H)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) U es unitario.
- (b) $U^*U = UU^* = I$ ($U^{-1} = U^*$).
- (c) $\|U^*x\| = \|Ux\| = \|x\|$ para cada $x \in H$.

Definición 14. Una isometría parcial es un operador que actúa isométricamente en el complemento ortogonal de su núcleo. Esto es, $U \in B(H)$ es una isometría parcial si $U : N(U)^\perp \rightarrow H$ es una isometría.

Usando la notación de la definición anterior, $N(U)^\perp$ y $R(U)$ se llaman espacio inicial y final de la isometría parcial U , respectivamente.

Teorema 23. (*Descomposición polar*). Si $T \in B(H)$, existe una isometría parcial $U \in B(H)$ con espacio inicial $N(T)^\perp$ y espacio final $\overline{R(T)}$ tal que $T = U|T|$ y $N(U) = N(|T|)$. Más aún, si $T = ZQ$, donde Q es un operador no negativo y Z es una isometría parcial con $N(Z) = N(Q)$, entonces $Q = |T|$ y $Z = U$.

Teorema 24. Sea $T = U|T|$ la descomposición polar de T . Entonces $T^* = U^*|T^*|$ es la descomposición polar de T^* .

Teorema 25. Sean $Q \geq 0$ y $T = U|T|$ la descomposición polar de T . Entonces, para cada $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, las siguientes igualdades son ciertas:

$$(a) \quad |T|^\alpha = U^*|T^*|^\alpha U.$$

$$(b) \quad (U^*|T^*|^\beta Q|T^*|^\beta U)^\alpha = U^* (|T^*|^\beta Q|T^*|^\beta) U.$$

1.3. La propiedad de extensión univaluada

En esta sección introducimos una propiedad muy importante para operadores acotados en los espacios de Banach, llamada la propiedad de extensión univaluada, abreviada SVEP, la cual tiene su origen en la teoría espectral local. Esta propiedad apareció por primera vez en los trabajos de Dunford ([11] y [12]) en los años 1952 y 1954. En estos últimos años muchos matemáticos se han interesado en dicha propiedad debido a la utilidad que tiene en la teoría espectral local y que satisface una gran variedad de operadores acotados, entre estos matemáticos destacan Laursen y Newmann, entre otros.

Sea T un operador acotado en X . La función resolvente de T es la función $R(\cdot, T) : \rho(T) \rightarrow B(X)$ definida por

$$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}.$$

Se conoce bien que esta función es analítica en $\rho(T)$.

Dado un operador $T \in B(X)$ y un elemento $x \in X$, estamos interesados en hallar una solución analítica $f : U \rightarrow X$ de la ecuación

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = x \tag{1.3}$$

sobre un subconjunto adecuado U de $\mathbb{C}$. Sobre el conjunto resolvente $\rho(T)$ del operador T , la solución se obtiene fácilmente, aplicando $(\lambda I - T)^{-1}$ en ambos lados de la ecuación (1.3) y nos conduce a la única solución:

$$f(\lambda) = R(\lambda, T)x$$

la cual es válida para cada $\lambda \in \rho(T)$. Sin embargo, para un cierto $x \in X$, también es posible encontrar una solución analítica de la ecuación (1.3), sobre conjuntos abiertos que contienen puntos del espectro de T . Por ejemplo, sea $T \in B(X)$ tal que el espectro $\sigma(T)$ tiene un subconjunto espectral no vacío $\Lambda \neq \sigma(T)$. Sea $P = P(\Lambda, T)$ la proyección espectral de T asociado con Λ (Λ y P serán definidos en la sección 1.5), y sea M el rango de P . Entonces $\sigma(T|_M) = \Lambda$ (véase el Teorema 41). Así, la restricción $(\lambda I - T)|_M$ es invertible para todo $\lambda \notin \Lambda$. Sea $x \in M$. Entonces la ecuación (1.3) tiene la solución analítica:

$$g(\lambda) = (\lambda I - T|_M)^{-1}x \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$

Esta propiedad motiva los siguientes conceptos:

Definición 15. Sean $T \in B(X)$ y $x \in X$. Una extensión analítica de $R(\cdot, T)x$ es una función analítica $f : U \rightarrow X$ en un conjunto abierto U que contiene $\rho(T)$ y satisface la ecuación (1.3) para todo $\lambda \in U$.

Las soluciones analíticas de la ecuación (1.3) no necesariamente son únicas y por lo tanto también las extensiones de $R(\lambda, T)x$, tal como demuestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. Sea $H = l_2$ y sea L como en el ejemplo 1. Si $f : \mathbb{D}(0, 1) \rightarrow H$ se define por $f(\lambda) = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$, entonces f es analítica. Además, por un cálculo simple se obtiene que $(\lambda I - L)f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{D}(0, 1)$. Por otra parte, la función $g = \frac{1}{2}f$ es analítica y también satisface la ecuación $(\lambda I - L)g(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{D}(0, 1)$.

Para garantizar la unicidad de las soluciones analíticas de la ecuación (1.3) es necesario definir una propiedad adicional, que no satisface el operador L del ejemplo 2.

Definición 16. Un operador $T \in B(X)$ tiene la SVEP si para cada abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, la única función analítica $f : U \rightarrow X$ que satisface la ecuación

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0$$

para todo $\lambda \in U$ es la función $f = 0$.

Aunque en gran parte de nuestra exposición usaremos la propiedad de extensión univaluada de una versión local, formulada por J. Kenneth Finch [14] en el año 1975. Esta definición local de la SVEP juega un papel importante en la teoría espectral local y ha sido estudiada en artículos recientes, por ejemplo [2], [4] y [5].

Definición 17. Sea $T \in B(X)$. Diremos que T tiene la SVEP en λ_0 , si para cada vecindad abierta U de λ_0 , la única función analítica $f : U \rightarrow X$ que satisface la ecuación

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0 \quad (1.4)$$

para todo $\lambda \in U$ es la función $f = 0$.

Nótese que $T \in B(X)$ tiene la SVEP, si T tiene la SVEP en todo punto λ_0 de $\mathbb{C}$. Obviamente, si $\lambda_0 \in \rho(T)$, entonces T tiene la SVEP en λ_0 .

Teorema 26. *Las extensiones de $R(\cdot, T)x$ son únicas para todo $x \in X$ si y solo si T verifica la SVEP.*

Sea $A \subseteq \mathbb{C}$. En lo que sigue, $isoA$ y $accA$ denotarán los puntos aislados y los puntos de acumulación del conjunto A , respectivamente. Propiedades básicas de la SVEP se recopilan en el siguiente teorema.

Teorema 27. *Sea $T \in B(X)$.*

- (a) *Si $\lambda_0 \in \overline{\rho(T)}$, entonces T tiene la SVEP en λ_0 .*
- (b) *Si $\lambda_0 \in \partial\sigma(T)$, entonces T tiene la SVEP en λ_0 , ya que $\partial\sigma(T) \subseteq \overline{\rho(T)}$.*
- (c) *Si $\lambda_0 \notin acc\sigma_p(T)$, entonces T tiene la SVEP en λ_0 .*
- (d) *Si $\lambda_0 \in iso\sigma(T)$, entonces T y T^* ambos tienen la SVEP en λ_0 .*
- (e) *Si $int(\sigma_p(T)) = \emptyset$, entonces T tiene la SVEP. En particular, si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, entonces T tiene la SVEP.*

El siguiente resultado demuestra que si T es sobreyectivo y tiene la SVEP en 0, entonces 0 está en el resolvente $\rho(T)$.

Teorema 28. *Sean $T \in B(X)$ y $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.*

- (a) *Si $\lambda_0 I - T$ es inyectivo, entonces T tiene la SVEP en λ_0 .*
- (b) *Si $\lambda_0 I - T$ es sobreyectivo. Entonces T tiene la SVEP en λ_0 si y sólo si $\lambda_0 I - T$ es inyectivo.*

Presentamos un ejemplo de un operador que tiene la SVEP.

Ejemplo 3. Sean H , R y L como en el ejemplo 1. Como $\lambda_0 I - R$ es inyectivo para cada $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, entonces R tiene la SVEP. Del ejemplo 2, L no tiene la SVEP. Específicamente, L no tiene la SVEP en 0, en efecto, sabemos que L es sobreyectivo pero no inyectivo, y por lo tanto L no tiene la SVEP en 0, por el teorema 28.

El ejemplo 2 muestra que T^* no tiene SVEP en cada $\lambda \in \mathbb{D}(0, 1)$, donde $T = R$ y $T^* = L$.

Dos subespacios lineales muy importantes en la teoría espectral local y que también están relacionados con la SVEP son el núcleo analítico y la parte casi nilpotente de un operador $T \in B(X)$, respectivamente. El núcleo analítico $K(T)$ es el conjunto de todos los $x \in X$ tales que existe una sucesión $\{x_n\}$ en X y una constante $c > 0$ tal que $x_0 = x$, $Tx_{n+1} = x_n$ y $\|x_n\| \leq c^n \|x\|$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Mientras que la parte casi-nilpotente de T está definida por:

$$H_0(T) = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0\}.$$

Claramente, $H_0(T)$ es un subespacio lineal de X . En el siguiente resultado se exponen algunas de las propiedades básicas del núcleo analítico.

Teorema 29. *Sea $T \in B(X)$. Entonces*

- (a) $K(T)$ es un subespacio lineal de X y $K(T) \subseteq R(T^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $T(K(T)) = K(T)$.
- (c) Si M es un subespacio de X tal que $T(M) = M$, entonces $M \subseteq K(T)$.

Por (c) del teorema anterior, tenemos que si $T \in B(X)$ es sobreyectivo, entonces $K(T) = X$. Recordemos que $T \in B(X)$ es casi-nilpotente si $r(T) = 0$. En este caso, $\sigma(T) = \{0\}$, y por lo tanto T tiene la SVEP, por el teorema 27.

Teorema 30. *Sea $T \in B(X)$. Entonces*

- (a) $N(T^n) \subseteq H_0(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) T es casi-nilpotente si y solo si $H_0(T) = X$.

Teorema 31. Sea $T \in B(X)$. Si $H_0(\lambda_0 I - T)$ es cerrado, entonces T tiene la SVEP en λ_0 .

Dado $T \in B(X)$, denotemos por $H(\sigma(T))$ a la colección de las funciones f a valores en $\mathbb{C}$ que son analíticas sobre algún conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\sigma(T) \subseteq U$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica sobre un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\sigma(T) \subseteq U$, la compacidad del espectro $\sigma(T)$ garantiza que $\sigma(T) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ y $\sigma(T) \cap \Omega_i \neq \emptyset$ para cada $i = 1, \dots, n$, donde Ω_i son componentes conexas del abierto U . Así, existen un número finito de curvas cerradas y rectificables Γ_i contenidas en $U \setminus \sigma(T)$, de modo que el contorno o ciclo $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n\}$ encierra al espectro $\sigma(T)$, es decir, está contenido en el interior de Γ , $\Gamma \subseteq U \setminus \sigma(T)$ y $\mathbb{C} \setminus U$ está en el exterior de Γ .

Definición 18. Sea $T \in B(X)$ y sea $f \in H(\sigma(T))$ con dominio U tal que $\sigma(T) \subseteq U$. Se define el operador $f(T)$ por:

$$f(T) = \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda,$$

donde $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n\}$ es un contorno o ciclo, como en la observación anterior, positivamente orientado.

La integral en la definición anterior es una integral de contorno a lo largo de Γ a valores en $B(X)$. Como la función resolvente del operador T es analítica, la definición de $f(T)$ no depende del contorno o ciclo $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n\}$ elegido, por el teorema integral de Cauchy (v. apéndice).

Teorema 32. La aplicación $H(\sigma(T)) \mapsto B(X)$, dada por $f \mapsto f(T)$ satisface las siguientes propiedades:

- (a) $f(T)^* = f(T^*)$;
- (b) $(\mu f)(T) = \mu f(T)$ y $(f + g)(T) = f(T) + g(T)$;
- (c) $(fg)(T) = f(T)g(T)$;
- (d) Si $f(\lambda) = \lambda$ y $g(\lambda) = 1$, entonces $f(T) = T$ y $g(T) = I$.
- (e) $f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(T)$ si y solo si $f(T)$ es invertible en $B(X)$;
- (f) $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$;

para todo $\mu \in \mathbb{C}$ y todo $f, g \in H(\sigma(T))$. La parte (f) se llama el teorema de la aplicación espectral.

Para cada operador arbitrario $T \in B(X)$, sea

$$\Xi(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T \text{ no tiene la SVEP en } \lambda\}.$$

Teorema 33. Sean $T \in B(X)$ y $f \in H(\sigma(T))$ una función analítica en un subconjunto abierto U tal que $\sigma(T) \subseteq U$.

- (a) Si T tiene la SVEP, entonces $f(T)$ tiene la SVEP.
- (b) Si f no es constante sobre cada componente conexa de U , entonces T tiene la SVEP si y solo si $f(T)$ tiene la SVEP. Además, $f(\Xi(T)) = \Xi(f(T))$.

El siguiente resultado establece que el teorema de la aplicación espectral también es cierto para el espectro puntual aproximado y el espectro sobreyectivo.

Teorema 34. Sea $T \in B(X)$ y sea $f \in H(\sigma(T))$. Entonces

$$\sigma_s(f(T)) = f(\sigma_s(T)) \text{ y } \sigma_{ap}(f(T)) = f(\sigma_{ap}(T))$$

1.4. El ascenso y descenso de un operador

En el capítulo 3 veremos que la propiedad de extensión univaluada jugará un papel muy importante. Por esta razón es útil encontrar las condiciones para que un operador satisfaga dicha propiedad. En esta parte, veremos que estas condiciones se relacionan con la finitud de algunas cantidades clásicas asociadas con un operador. Estas cantidades son el ascenso y descenso de un operador y serán los ladrillos básicos para la construcción de nuestra teoría.

Definición 19. Sea T un operador acotado en X .

- (a) Diremos que T tiene ascenso finito si existe un entero no negativo n tal que $N(T^n) = N(T^{n+1})$. El mínimo entero no negativo $p = p(T)$ que satisface la condición antes mencionada se llama el ascenso de T . Si tal entero no existe, definimos $p(T) = \infty$.
- (b) Análogamente, diremos que T tiene descenso finito si existe un entero no negativo m tal que $R(T^m) = R(T^{m+1})$. El mínimo entero no negativo $q = q(T)$ que satisface la condición antes mencionada se denomina el descenso de T . Si tal entero no existe, definimos $q(T) = \infty$.

Nótese que T es inyectivo si y solo si $p(T) = 0$, y T sobreyectivo si y solo si $q(T) = 0$. Además, si $p(T) = n < \infty$, entonces $N(T^m) = N(T^n)$ para todo $m \geq n$, y si $q(T) = n < \infty$, entonces $R(T^m) = R(T^n)$ para todo $m \geq n$.

Teorema 35. *Si $p(T) < \infty$ y $q(T) < \infty$, entonces $p(T) = q(T)$.*

El siguiente ejemplo muestra que existen operadores con ascenso finito y descenso infinito.

Ejemplo 4. Sean H , R y L como en el ejemplo 3. Puesto que R es inyectivo, entonces $p(R) = 0$. Además, $q(R) = \infty$; en efecto, si $q(R) < \infty$, entonces $q(R) = 0$, por el teorema 35, luego R es sobreyectivo, lo cual es una contradicción. Por otra parte, L es sobreyectivo, así que $q(L) = 0$. Nuevamente, por el teorema 35, tenemos $p(L) = \infty$.

La finitud del ascenso y descenso de un operador lineal T está relacionada con una cierta descomposición de X .

Teorema 36. *Sea $T \in B(X)$. Si $p = p(T) = q(T) < \infty$, entonces*

$$(a) \ X = R(T^p) \oplus N(T^p).$$

$$(b) \ 0 \text{ es un punto aislado de } \sigma(T).$$

Recíprocamente, si $X = R(T^n) \oplus N(T^n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $p(T) = q(T) \leq n$. En este caso, $T|_{R(T^p)}$ es biyectivo.

Como ya hemos mencionado anteriormente, la función resolvente $R(\lambda, T)$ del operador $T \in B(X)$ es analítica en $\rho(T)$. Sea $\lambda_0 \in \text{iso}\sigma(T)$ y consideremos la serie de Laurent de $R(\lambda, T)$ en una vecindad de λ_0 , digamos $\mathbb{D}(\lambda_0, r)$. Considerando el teorema de la expansión en serie de Laurent (v. apéndice), la expresión de Laurent de $R(\lambda, T)$ tiene la forma:

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{(\lambda - \lambda_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n (\lambda - \lambda_0)^n$$

con $P_n, Q_n \in B(X)$, para todo $0 < |\lambda - \lambda_0| < r$, los coeficientes se calculan de acuerdo a las fórmulas

$$P_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda, T) (\lambda - \lambda_0)^{n-1} d\lambda \text{ y } Q_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(\lambda, T)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda$$

y Γ es la frontera de un disco, suficientemente pequeño, orientado positivamente alrededor del punto λ_0 . Se conoce bien que si λ_0 es un punto

aislado del espectro $\sigma(T)$, entonces λ_0 o es un polo de $R(\lambda, T)$ o es una singularidad esencial de $R(\lambda, T)$.

Ahora, veamos que el ascenso y descenso de $\lambda I - T$ están íntimamente relacionados con los polos de la función resolvente de T .

Teorema 37. *Sea $T \in B(X)$. Entonces $\lambda_0 \in \text{iso}\sigma(T)$ es un polo de $R(\lambda, T)$ si y solo si $0 < p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T) < \infty$. Más aún, si $p = p(\lambda_0 I - T) = q(\lambda_0 I - T)$, entonces p es el orden del polo.*

Si el ascenso de T es finito, entonces T tiene la SVEP en 0. Algo similar pasa con el descenso de T , el cual se resume en el siguiente teorema.

Teorema 38. *Sea $T \in B(X)$ y $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.*

- (a) *Si $p(\lambda_0 I - T) < \infty$, entonces T tiene la SVEP en λ_0 .*
- (b) *Si $q(\lambda_0 I - T) < \infty$, entonces T^* tiene la SVEP en λ_0 .*

Veamos que la recíproca de la parte (a) del teorema anterior, generalmente, no se cumple.

En el siguiente ejemplo y como en el resto de este trabajo, para cada $n \in \mathbb{N}$, e_n denotará al elemento de l_2 cuya n -ésima coordenada es 1 y 0 en las otras coordenadas.

Ejemplo 5. Sea $H = l_2$ y sea $T : H \rightarrow H$ definido por:

$$Tx = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots \right), \text{ para cada } x = \{x_n\} \in H.$$

Sea $x = \{x_n\} \in H$ de norma uno. Por un cálculo sencillo, se tiene que:

$$T^k(x) = \left(\frac{x_{k+1}}{(k+1)!}, \frac{x_{k+2}}{(3)(4) \cdots (k+2)}, \frac{x_{k+3}}{(4)(5) \cdots (k+3)}, \dots \right).$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|T^k x\| &= \left(\left| \frac{x_{k+1}}{(k+1)!} \right|^2 + \left| \frac{x_{k+2}}{(3)(4) \cdots (k+1)(k+2)} \right|^2 + \dots \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{(k+1)!} (|x_{k+1}|^2 + |x_{k+2}|^2 + |x_{k+3}|^2 + \dots)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{(k+1)!} \|x\| = \frac{1}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Así, $\|T^k\| \leq \frac{1}{(k+1)!}$. Por otro lado, es claro que $T^k(e_{k+1}) = (\frac{1}{(k+1)!}, 0, \dots)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. De esta manera, $\frac{1}{(k+1)!} \leq \|T^k\|$, por lo cual $\|T^k\| = \frac{1}{(k+1)!}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. De lo cual se sigue que $r(T) = 0$, es decir, T es casi-nilpotente. Por lo tanto, T tiene la SVEP, en particular, T tiene la SVEP en 0. Sin embargo, $p(T) = \infty$. En efecto, nótese que $N(T^k) = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots) : x_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, k\}$. De esta manera, $e_{k+1} \in N(T^{k+1})$, mientras que $e_{k+1} \notin N(T^k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$; así, $p(T) = \infty$.

1.5. Puntos aislados del espectro de $T \in B(X)$

En esta parte estudiamos los puntos aislados del espectro de un operador $T \in B(X)$. Para estudiar estos puntos definimos lo que llamamos proyección espectral de T asociada a uno de estos puntos, digamos λ_0 . Vimos que el rango y el núcleo de esta proyección descompone en suma directa al espacio X y son subespacios T invariantes de X . Ahora, presentamos un resultado que asegura que el rango y el núcleo de esta proyección espectral es la parte casi-nilpotente y el núcleo analítico del operador $\lambda_0 I - T$, respectivamente.

Teorema 39. *Sea $T \in B(X)$. Si M y N son subespacios T -invariantes de X tales que $X = M \oplus N$, entonces $\sigma(T) = \sigma(T|_M) \cup \sigma(T|_N)$.*

Si M , N y T son como en el Teorema 39, en general, $\sigma(T|_M)$ y $\sigma(T|_N)$ pueden no ser ajenos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6. Sean M y N subespacios de H tales que $X = M \oplus N$. Si $T : X \rightarrow X$ está definido por:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & O \\ O & \mu \end{bmatrix},$$

entonces M y N son T -invariantes. Además, el espectro de $T|_M$ es ajeno al de $T|_N$ si y solo si $\lambda \neq \mu$.

Nuestro objetivo ahora es encontrar M y N subespacios de X con $X = M \oplus N$ y tales que las restricciones $T|_M$ y $T|_N$ tengan espectro ajeno. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 20. Sea $T \in B(X)$. Un subconjunto Λ de $\sigma(T)$ tal que Λ y $\sigma(T) \setminus \Lambda$ son cerrados en $\mathbb{C}$ se llama un conjunto espectral de T .

Puesto que $\sigma(T)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{C}$, entonces un subconjunto Λ del espectro $\sigma(T)$ es un conjunto espectral de T si y solo si es abierto y cerrado en $\sigma(T)$. Ahora, pasemos a definir lo que llamaremos un dominio de Cauchy.

Un dominio elemental de Cauchy es un subconjunto abierto acotado y conexo de $\mathbb{C}$ cuya frontera es la unión de un número finito de curvas de Jordan que no se intersecan. Una unión finita de dominios elementales de Cauchy con clausuras ajenos se llama un dominio de Cauchy.

Sea D un dominio de Cauchy. Si cada curva de Jordan involucrada en la frontera de D está orientada de tal manera que los puntos de D están a la izquierda de la curva según se traza, entonces la frontera orientada de D se denomina un contorno de Cauchy. Sea C un contorno de Cauchy; se definen el interior y el exterior de C como los conjuntos $\text{intt}(C) = D$ y $\text{ext}(C) = \mathbb{C} \setminus (D \cup C)$, respectivamente. Sean $E, F \subseteq \mathbb{C}$ tales que $E \subseteq \text{intt}(C)$ y $F \subseteq \text{ext}(C)$, entonces diremos que C separa E de F .

Lema 3. *Sea E un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y sea F un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$. Si $E \cap F = \emptyset$, entonces existe un contorno de Cauchy C que separa E de F . Además, existe un contorno de Cauchy que separa $E \cup C$ de F , y existe un contorno de Cauchy que separa E de $F \cup C$.*

Por el lema 3, para cada conjunto espectral Λ de T , existe un contorno de Cauchy C que separa Λ de $\sigma(T) \setminus \Lambda$. Si Λ es un conjunto espectral de T , el conjunto de todos los contornos de Cauchy que separan Λ de $\sigma(T) \setminus \Lambda$ será denotado por $\mathcal{C}(T, \Lambda)$.

Sea Λ un conjunto espectral de $T \in B(X)$ y $C \in \mathcal{C}(T, \Lambda)$, definamos

$$P(T, \Lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C R(\lambda, T) d\lambda,$$

que es la integral de contorno a lo largo de C de la función $R(\lambda, T)$ a valores en $B(X)$ de la variable compleja λ . El operador $P(T, \Lambda)$ está bien definido y por el teorema integral de Cauchy (v. apéndice), no depende de la elección particular de $C \in \mathcal{C}(T, \Lambda)$.

Teorema 40. *Sean Λ un conjunto espectral de T y $P = P(T, \Lambda)$. Entonces $P \in B(X)$ es una proyección y conmuta con T . Además, si $Q \in B(X)$ es cualquier proyección que conmuta con T y $R(Q) = R(P)$, entonces $Q = P$.*

Sea Λ un conjunto espectral de $T \in B(X)$. La proyección $P(T, \Lambda)$ se conoce como la proyección espectral de T asociada con Λ . Nótese que si $\lambda \in \sigma(T)$ es un punto aislado, entonces es claro que $\{\lambda\}$ es un conjunto espectral de T . En este caso, $P(T, \lambda)$ denotará la proyección espectral de T asociada con $\{\lambda\}$.

Teorema 41. *Sea Λ un conjunto espectral de $T \in B(X)$. Si $P = P(T, \Lambda)$ es la proyección espectral de T asociada con Λ , entonces:*

- (a) $X = R(P) \oplus N(P)$;
- (b) $R(P)$ y $N(P)$ son subespacios de X , T -invariantes y $f(T)$ -invariantes para cada $f \in H(\sigma(T))$;
- (c) $\sigma(T|_{R(P)}) = \Lambda$ y $\sigma(T|_{N(P)}) = \sigma(T) \setminus \Lambda$.

Corolario 1. *Sean $T \in B(X)$, Λ un conjunto espectral de T y $P = P(T, \Lambda)$ la proyección espectral de T asociada con Λ . Entonces,*

- (a) $P = 0$ si y solo si $\Lambda = \emptyset$.
- (b) $P = I$ si y solo si $\Lambda = \sigma(T)$.

Sea λ un punto aislado de $\sigma(T)$ y sea $P = P(T, \lambda)$. El siguiente resultado establece que si $0 < p = p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$, entonces $R(P)$ puede ser escrito como el núcleo de $(\lambda I - T)^p$, mientras que $N(P)$ es el rango de $(\lambda I - T)^p$.

Teorema 42. *Sean $T \in B(X)$ y λ_0 un punto aislado de $\sigma(T)$. Si P es la proyección espectral de T asociada con $\{\lambda_0\}$, entonces,*

- (a) $R(P) = H_0(\lambda_0 I - T)$ y $N(P) = K(\lambda_0 I - T)$.
- (b) *En particular, si λ_0 es un polo del resolvente de T de orden p , entonces*
 - (i) $R(P) = H_0(\lambda_0 I - T) = N(\lambda_0 I - T)^p$,
 - (ii) $N(P) = K(\lambda_0 I - T) = R(\lambda I - T)^p$.

1.6. Operadores de Fredholm

Comencemos esta sección con algo de notaciones. Sea M un subespacio de X , X/M denota el espacio cociente de X módulo M . Sea T un operador acotado en X . La dimensión de $N(T)$ y la dimensión de $X/R(T)$, se denotan por $\alpha(T)$ y $\beta(T)$, respectivamente. Note que si la dimensión de $N(T)$ ($X/R(T)$) es mayor o igual al cardinal $\aleph_0$ entonces $\alpha(T) = +\infty$ ($\beta(T) = +\infty$).

Definición 21. Sea $T \in B(X)$ tales que $\alpha(T)$ o $\beta(T)$ es finito. Se define el índice de T por

- (i) $\text{ind}(T) = \alpha(T) - \beta(T)$ si $\alpha(T)$ y $\beta(T)$ son finitos;
- (ii) $\text{ind}(T) = +\infty$ si $\alpha(T) = +\infty$;
- (iii) $\text{ind}(T) = -\infty$ si $\beta(T) = +\infty$.

Proposición 4. Sea $T \in B(X)$. Si $R(T)$ es cerrado, entonces $\alpha(T) = \beta(T^*)$ y $\beta(T) = \alpha(T^*)$.

El siguiente resultado se conoce como el teorema de índices.

Teorema 43. Si $T, S \in B(X)$ son tales que $\alpha(T)$, $\beta(T)$, $\alpha(S)$ y $\beta(S)$ son finitos, entonces $\text{ind}(ST) = \text{ind}(T) + \text{ind}(S)$.

El teorema que sigue establece las relaciones básicas entre las cantidades $\alpha(T)$, $\beta(T)$, $p(T)$ y $q(T)$.

Teorema 44. Sea $T \in B(X)$. Las siguientes propiedades son ciertas:

- (a) Si $p(T) < \infty$, entonces $\alpha(T) \leq \beta(T)$.
- (b) Si $q(T) < \infty$, entonces $\beta(T) \leq \alpha(T)$.
- (c) Si $p(T) = q(T) < \infty$, entonces $\alpha(T) = \beta(T)$ (posiblemente infinitos).
- (d) Si $\alpha(T) = \beta(T) < \infty$ y se cumple que $p(T) < \infty$ o $q(T) < \infty$, entonces $p(T) = q(T)$.

Se sabe que la condición $\beta(T) < \infty$ implica que $R(T)$ es cerrado. Pasemos ahora a definir las siguientes clases de operadores.

Definición 22. Un operador $T \in B(X)$ es:

- (a) superiormente semi-Fredholm si

$$T \in \Phi_+(X) = \{T \in B(X) : R(T) \text{ es cerrado y } \alpha(T) < \infty\};$$

- (b) inferiormente semi-Fredholm si

$$T \in \Phi_-(X) = \{T \in B(X) : \beta(T) < \infty\};$$

- (c) semi-Fredholm si $T \in \Phi_\pm(X) = \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$;

- (d) Fredholm si $T \in \Phi(X) = \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X)$.

Definición 23. Sea A un álgebra de Banach. Un subconjunto J de A es un ideal si satisface (i) y (ii):

- (i) J es un subespacio (subespacio lineal y cerrado) de A .
- (ii) si $x \in A$ y $y, z \in J$, entonces $xy \in J$ y $zx \in J$.

Por las observaciones hechas en la sección 1.1, $B(X)$ es un álgebra de Banach. Un operador acotado $T \in B(X)$ es compacto si para cada subconjunto acotado A de X se tiene que $\overline{T(A)}$ es compacto en X . Denotemos por $K(X)$ el conjunto de todos los operadores compactos de $B(X)$. Se conoce bien que $K(X)$ es un ideal de $B(X)$.

Teorema 45. $T \in \Phi(X)$ si y solo si T es invertible en $B(X)$ módulo $K(X)$.

Los operadores superiormente semi-Fredholm e inferiormente semi-Fredholm son mutuamente duales, en el sentido siguiente:

- (i) $T \in \Phi_+(X)$ si y sólo si $T^* \in \Phi_-(X^*)$.
- (ii) $T \in \Phi_-(X)$ si y sólo si $T^* \in \Phi_+(X^*)$.

Teorema 46. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (a) Si $S, T \in \Phi_-(X)$, entonces $ST \in \Phi_-(X)$.
- (b) Si $S, T \in \Phi_+(X)$, entonces $ST \in \Phi_+(X)$.
- (c) Si $S, T \in \Phi(X)$, entonces $ST \in \Phi(X)$.
- (d) Si $S, T \in B(X)$ y $ST \in \Phi_+(X)$, entonces $T \in \Phi_+(X)$.
- (e) Si $S, T \in B(X)$ y $ST \in \Phi_-(X)$, entonces $S \in \Phi_-(X)$.
- (f) Si $T \in \Phi_\pm(X)$, entonces $p(T) = q(T^*)$ y $q(T) = p(T^*)$.

Teorema 47. $\Phi_+(X)$, $\Phi_-(X)$ y $\Phi(X)$ son semi-grupos abiertos de $B(X)$.

Teorema 48. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (a) Si $T \in \Phi_+(X)$ y $S \in K(X)$, entonces $T + K \in \Phi_+(X)$.
- (b) Si $T \in \Phi_-(X)$ y $S \in K(X)$, entonces $T + K \in \Phi_-(X)$.
- (c) Si $T \in \Phi_\pm(X)$ y $S \in K(X)$, entonces $\text{ind}(T + K) = \text{ind}(T)$.

Definición 24. Sea $T \in B(X)$.

(a) El espectro esencial o espectro de Fredholm de T se define por:

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es Fredholm}\}.$$

(b) El espectro superiormente semi-Fredholm de T es:

$$\sigma_{uf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_+(X)\}.$$

(c) El espectro inferiormente semi-Fredholm de T es:

$$\sigma_{lf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_-(X)\}.$$

(d) El espectro semi-Fredholm de T está definido por:

$$\sigma_{sf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es semi-Fredholm}\}.$$

Observación 2. Sea $T \in B(X)$. Por definición de los espectros definidos arriba y las propiedades duales de los operadores semi-Fredholm, tenemos:

- (i) $\sigma_{sf}(T) = \sigma_{uf}(T) \cap \sigma_{lf}(T)$.
- (ii) $\sigma_e(T) = \sigma_{uf}(T) \cup \sigma_{lf}(T)$.
- (iii) $\sigma_{uf}(T) = \sigma_{lf}(T^*)$ y $\sigma_{lf}(T) = \sigma_{uf}(T^*)$.

Se conoce bien que $\sigma_e(T)$ y $\sigma_{sf}(T)$ son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{C}$. Más aún, $\sigma_e(T)$ es compacto. En particular, por la parte (i) de la observación 2, tenemos que $\sigma_{uf}(T)$ y $\sigma_{lf}(T)$ también son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{C}$.

Definición 25. Sea $T \in B(X)$. Diremos que T es:

(a) superiormente semi-Weyl si

$$T \in W_+(X) = \{T \in \Phi_+(X) : ind(T) \leq 0\}.$$

(b) inferiormente semi-Weyl si

$$T \in W_-(X) = \{T \in \Phi_-(X) : ind(T) \geq 0\}.$$

(c) un operador de Weyl si

$$T \in W(X) = W_+(X) \cap W_-(X) = \{T \in \Phi(X) : ind(T) = 0\}.$$

La clase de operadores de la definición anterior generan los siguientes espectros:

- (i) el espectro superiormente semi-Weyl, definido por:

$$\sigma_{uw}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W_+(X)\}$$

- (ii) el espectro inferiormente semi-Weyl del operador T , definido por:

$$\sigma_{lw}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W_-(X)\}$$

- (iii) el espectro de Weyl, definido por:

$$\sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W(X)\}.$$

Nótese que $\sigma_{uw}(T) \subseteq \sigma_a(T)$ y $\sigma_{lw}(T) \subseteq \sigma_s(T)$. En la literatura, los espectros superiormente semi-Weyl e inferiormente semi-Weyl del operador $T \in B(X)$ también se conocen como espectro aproximado puntual de Weyl y espectro sobreactivo de Weyl, respectivamente.

Observación 3. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (i) $\sigma_w(T) = \sigma_{uw}(T) \cup \sigma_{lw}(T)$.
- (ii) $\sigma_{uw}(T) = \sigma_{lw}(T^*)$ y $\sigma_{lw}(T) = \sigma_{uw}(T^*)$.
- (iii) $\sigma_{uf}(T) \subseteq \sigma_{uw}(T)$ y $\sigma_{lf}(T) \subseteq \sigma_{lw}(T)$.
- (iv) $\sigma_e(T) \subseteq \sigma_w(T)$.

Se sabe que $\sigma_{uw}(T)$ y $\sigma_{lw}(T)$ son subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Por lo tanto, la parte (iii) de la observación 3 concluimos que $\sigma_{uw}(T)$ y $\sigma_{lw}(T)$ son compactos no vacíos de $\mathbb{C}$. De (iv) de la misma observación, también se obtiene que $\sigma_w(T)$ es no vacío, ya que $\sigma_e(T)$ es no vacío.

Otra clase de operadores muy conocidos por muchos autores son las que se definen a continuación:

La clase de los operadores superiormente semi-Browder, definida por:

$$\mathbb{B}_+(X) = \{T \in \Phi_+(X) : p(T) < \infty\}$$

y la clase de los operadores inferiormente semi-Browder, definida por:

$$\mathbb{B}_-(X) = \{T \in \Phi_-(X) : q(T) < \infty\}.$$

La clase de operadores de Browder, definida por:

$$\mathbb{B}(X) = \mathbb{B}_+(X) \cap \mathbb{B}_-(X) = \{T \in \Phi(X) : p(T), q(T) < \infty\}.$$

Observación 4. Las siguientes contenciones son ciertas:

- (i) $\mathbb{B}_+(X) \subseteq W_+(X)$ y $\mathbb{B}_-(X) \subseteq W_-(X)$;
- (ii) $\mathbb{B}(X) \subseteq W(X)$

Los operadores superiormente semi-Browder e inferiormente semi-Browder son mutuamente duales:

$$T \in \mathbb{B}_+(X) \Leftrightarrow T^* \in \mathbb{B}_-(X^*) \text{ y } T \in \mathbb{B}_-(X) \Leftrightarrow T^* \in \mathbb{B}_+(X^*)$$

Sea $T \in B(X)$. Los conjuntos $\sigma_{ub}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \mathbb{B}_+(X)\}$ y $\sigma_{lb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \mathbb{B}_-(X)\}$ son los espectros superiormente semi-Browder e inferiormente semi-Browder de T , respectivamente. Mientras que el espectro de Browder de T es definido por

$$\sigma_b(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \mathbb{B}(X)\}.$$

Observación 5. Sea $T \in B(X)$.

- (i) $\sigma_b(T) = \sigma_{ub}(T) \cup \sigma_{lb}(T)$;
- (ii) $\sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T)$;
- (iii) $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{uf}(T) \cup \Xi(T)$ y $\sigma_{lb}(T) = \sigma_{lf}(T) \cup \Xi(T)$

Como $\sigma_w(T)$ es no vacío, por la parte (ii) de la observación anterior tenemos que $\sigma_b(T)$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$.

Proposición 5. Sean M y N subespacios T -invariantes de X . Si $X = M \oplus N$, entonces:

- (a) $T \in \mathbb{B}_+(X) \Leftrightarrow T|_M \in \mathbb{B}_+(M)$ y $T|_N \in \mathbb{B}_+(N)$, y por lo tanto,

$$\sigma_{ub}(T) = \sigma_{ub}(T|_M) \cup \sigma_{ub}(T|_N).$$

- (b) $T \in \mathbb{B}_-(X) \Leftrightarrow T|_M \in \mathbb{B}_-(M)$ y $T|_N \in \mathbb{B}_-(N)$, y por lo tanto,

$$\sigma_{lb}(T) = \sigma_{lb}(T|_M) \cup \sigma_{lb}(T|_N).$$

- (c) $T \in \mathbb{B}(X) \Leftrightarrow T|_M \in \mathbb{B}(M)$ y $T|_N \in \mathbb{B}(N)$, y por lo tanto,

$$\sigma_b(T) = \sigma_b(T|_M) \cup \sigma_b(T|_N).$$

Teorema 49. Si $\lambda I - T \in \Phi_{\pm}(T)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) T tiene la SVEP en λ ;
- (b) $H_0(\lambda I - T)$ es cerrado;
- (c) $p(\lambda I - T) < \infty$;
- (d) $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita.

Recordemos que si M y N son subespacios lineales de X tales que $X = M \oplus N$, entonces diremos que N es un complemento algebraico de M . La codimensión de M es la dimensión del complemento algebraico N de M , o equivalentemente la dimensión del espacio cociente X/M .

Teorema 50. *Si $\lambda I - T \in \Phi_{\pm}(T)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) T^* tiene la SVEP en λ ;
- (b) $q(\lambda I - T) < \infty$;
- (c) $K(\lambda I - T)$ es de codimensión finita.

Teorema 51. *Sea $T \in B(X)$. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (a) $\sigma_{uw}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T)$ y $\sigma_{lw}(T) \subseteq \sigma_{lb}(T)$;
- (b) $\sigma_b(T) = \sigma_b(T^*)$, $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{lb}(T^*)$ y $\sigma_{lb}(T) = \sigma_{ub}(T^*)$;
- (c) $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{uw}(T) \cup \text{acc}\sigma_{ap}(T)$;
- (d) $\sigma_{lb}(T) = \sigma_{lw}(T) \cup \text{acc}\sigma_s(T)$;
- (e) $\sigma_b(T) = \sigma_w(T) \cup \text{acc}\sigma(T)$.

También se puede demostrar que $\sigma_{ub}(T)$ y $\sigma_{lb}(T)$ son subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ y, por el inciso (a) del teorema 51, no son vacíos.

Observación 6. En resumen, tenemos que las siguientes contenciones son ciertas:

- (i) $\sigma_e(T) \subseteq \sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T)$;
- (ii) $\sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_{uf}(T) \subseteq \sigma_{uw}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T) \subseteq \sigma_b(T)$;
- (iii) $\sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_{lf}(T) \subseteq \sigma_{lw}(T) \subseteq \sigma_{lb}(T) \subseteq \sigma_b(T)$.

Teorema 52. *Sea $T \in B(X)$.*

(a) Si T tiene la SVEP, entonces

$$\sigma_{sf}(T) = \sigma_{uf}(T) = \sigma_{ub}(T) \text{ y } \sigma_{lb}(T) = \sigma_b(T) = \sigma_w(T).$$

(b) Si T^* tiene la SVEP, entonces

$$\sigma_{sf}(T) = \sigma_{lf}(T) = \sigma_{lb}(T) \text{ y } \sigma_{ub}(T) = \sigma_b(T) = \sigma_w(T).$$

Teorema 53. Sea $T \in B(X)$. Si T o T^* tiene la SVEP, entonces

$$\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T) \text{ y } \sigma_{lw}(T) = \sigma_{lb}(T).$$

Capítulo 2

Clases especiales de operadores en los espacios de Hilbert

En este capítulo presentamos algunas propiedades de los operadores k -paranormales, en especial sus propiedades espectrales. Empezamos analizando las propiedades básicas de los operadores normales e hiponormales. Luego, introducimos los operadores k -paranormales con sus respectivas subclases. Damos las relaciones exactas que hay entre estas subclases de operadores. Por otra parte, probamos que los operadores k -paranormales son isoloides. Terminamos este capítulo estudiando las propiedades espectrales de los operadores k -*-paranormales. Probamos que los operadores k -*-paranormales son independientes de los operadores k -paranormales y que también son isoloides.

2.1. Operadores normales e hiponormales

En esta sección solo damos una breve introducción de los operadores hiponormales, debido a que en las siguientes secciones vamos a obtener más propiedades de estos operadores como casos particulares de los resultados obtenidos para los operadores k -paranormales y k -*-paranormales.

Definición 26. Sea $T \in B(H)$. Diremos que

- (a) T es un operador normal si $TT^* = T^*T$.

- (c) T es un operador casi-normal si $T^*TT = TT^*T$.
- (b) T es un operador hiponormal si $TT^* \leq T^*T$.

Es claro que todo operador auto-adjunto es un operador normal y que todo operador normal es un operador casi-normal. Ahora, probemos que los operadores hiponormales contienen a los operadores casi-normales.

Teorema 54. *Si $T \in B(H)$ es casi-normal, entonces T es hiponormal.*

Demostración. Por el teorema 9, $H = N(T^*) \oplus_{\perp} N(T^*)^{\perp}$. De la proposición 1, tenemos que $\overline{R(T)} = N(T^*)^{\perp}$. Así, $H = N(T^*) \oplus_{\perp} \overline{R(T)}$. Ahora, tomemos $x \in H$ tal que $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in N(T^*)$ y $x_2 \in \overline{R(T)}$. Entonces existe una sucesión $\{z_n\} \in R(T)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x_2$. Sea $D = T^*T - TT^*$. Puesto que $x_1 \in N(T^*)$, resulta que:

$$\begin{aligned} \langle Dx_1, x_1 \rangle &= \langle (T^*T - TT^*)x_1, x_1 \rangle = \langle T^*Tx_1, x_1 \rangle - \langle TT^*x_1, x_1 \rangle \\ &= \langle T^*Tx_1, x_1 \rangle = \langle Tx_1, Tx_1 \rangle = \|Tx_1\|^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Como T es casi-normal, entonces $DT = O$. Dado que cada $z_n \in R(T)$, tenemos que $Dz_n = 0$, entonces $\langle x_1, Dz_n \rangle = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $\langle Dx_1, x_2 \rangle = \langle Dx_1, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Dx_1, z_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_1, Dz_n \rangle = 0$. De manera similar se demuestra que $\langle Dx_2, x_1 \rangle = 0$ y $\langle Dx_2, x_2 \rangle = 0$. Por lo tanto, de estas igualdades y de la ecuación (2.1), resulta que:

$$\begin{aligned} \langle Dx, x \rangle &= \langle Dx, x_1 \rangle + \langle Dx, x_2 \rangle = \langle Dx_1, x_1 \rangle + \langle Dx_2, x_1 \rangle + \langle Dx_1, x_2 \rangle \\ &+ \langle Dx_2, x_2 \rangle = \langle Dx_1, x_1 \rangle = \|Tx_1\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

En consecuencia $D \geq O$, es decir, $T^*T \geq TT^*$. Por lo tanto, T es hiponormal. ■

En seguida, pasemos a caracterizar tanto los operadores normales como los hiponormales.

Teorema 55. *Sea $T \in B(H)$. Entonces,*

- (a) T es normal si y solo si $\|T^*x\| = \|Tx\|$ para cada $x \in H$.
- (b) T es hiponormal si y solo si $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ para cada $x \in H$.

Demostración. (a) Si T es normal, entonces para cada $x \in H$,

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle = \|T^*x\|^2.$$

Ahora, probemos la implicación recíproca. Para probar esta implicación, primero demostremos la siguiente afirmación:

Afirmación: Si $\langle Tx, x \rangle = 0$ para cada $x \in H$, entonces $T = O$.

Sean $x, y \in H$. Puesto que $\langle T(x+y), x+y \rangle = 0$, vemos que

$$\langle Tx, y \rangle + \langle Ty, x \rangle = 0. \quad (2.2)$$

Si y es remplazado por iy en la ecuación (2.2), el resultado es

$$-i\langle Tx, y \rangle + i\langle Ty, x \rangle = 0. \quad (2.3)$$

Multiplicando la ecuación (2.3) por i , resulta que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle Ty, x \rangle. \quad (2.4)$$

De las ecuaciones (2.2) y (2.4), tenemos que $\langle Tx, y \rangle = 0$. En particular, si $y = Tx$ nos da $\|Tx\|^2 = 0$. Por lo tanto, $Tx = 0$ para todo $x \in H$. Así, $T = O$. Esto prueba la Afirmación.

Ahora, si $\|T^*x\| = \|Tx\|$ para cada $x \in H$, entonces $\langle (TT^* - T^*T)x, x \rangle = 0$. Por lo tanto, $TT^* = T^*T$, por la Afirmación.

(b) T es hiponormal si y solo si $0 \leq \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle = \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2$ para todo $x \in H$. Esto completa la prueba. ■

A continuación usaremos el resultado previo para probar que los operadores del siguiente ejemplo son normal, casi-normal o bien hiponormal.

Ejemplo 7. En este ejemplo H será l_2 y $R : H \rightarrow H$ denotará el operador de desplazamiento a la derecha. Recordemos que R está definido por $R(x) = (0, x_1, x_2, \dots)$ para cada $x = (x_1, x_2, \dots) \in H$.

1. Sea $T : H \rightarrow H$ definido por:

$$T(x) = ((1+3i)x_1, (1-i)x_2, x_3, x_4, \dots)$$

para cada $x = \{x_n\}$ en H . Es claro que $T \in B(H)$ y el adjunto de T viene dado por:

$$T^*(x) = ((1-3i)x_1, (1+i)x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Entonces, para cada $x = \{x_n\} \in H$,

$$TT^*(x) = (10x_1, 2x_2, x_3, \dots) = T^*T(x).$$

Por lo tanto, T es un operador normal.

2. Veamos que R^* es casi-normal. Del ejemplo 1, R^* es el operador de desplazamiento a la izquierda. Entonces, para cada $x = \{x_n\} \in H$,

$$RR^*R(x) = RR^*(0, x_1, x_2, \dots) = R(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots) \text{ y}$$

$$R^*RR(x) = R^*R(0, x_1, x_2, \dots) = R^*(0, 0, x_1, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Por lo tanto, $RR^*R = R^*RR$. Así, R^* es casi-normal.

3. Sea $T = R^* + 2R$. Entonces, para cada $x = \{x_n\} \in H$,

$$T(x) = (x_2, x_3 + 2x_1, x_4 + 2x_2, x_5 + 2x_3, \dots).$$

Ahora calculemos el adjunto de T . Como $T^* = (R^* + 2R)^* = R + 2R^*$ entonces

$$T^*(x) = (2x_2, x_1 + 2x_3, x_2 + 2x_4, x_3 + 2x_5, \dots).$$

para cada $x = \{x_n\} \in H$. Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned} Qx &= |x_2|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} |x_{n+1} + 2x_{n-1}|^2 - 4|x_2|^2 - \sum_{n=2}^{\infty} |x_{n-1} + 2x_{n+1}|^2 \\ &= -3|x_2|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (|x_{n+1} + 2x_{n-1}|^2 - |x_{n-1} + 2x_{n+1}|^2) \\ &= -3|x_2|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-3|x_{n+1}|^2 + 3|x_{n-1}|^2) \\ &= -3|x_2|^2 + 3|x_1|^2 + 3|x_2|^2 \\ &= 3|x_1|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

donde $Qx = \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2$. Por lo tanto, $\|Tx\|^2 \geq \|T^*x\|^2$, es decir, T es hiponormal (véase el Teorema 55).

Sabemos que todo operador normal es casi-normal. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que existen operadores casi-normales que no son normales.

Ejemplo 8. 1. Un ejemplo de un operador casi-normal que no es normal.

Sea S el operador de desplazamiento a la derecha. Sabemos que S^* es casi-normal (véase el Ejemplo 7). Nótese que $S(e_1) = (0, 1, 0, \dots)$, en consecuencia $\|S(e_1)\| = 1$. Por otra parte, $S^*(e_1) = (0, 0, \dots)$, esto implica que $\|S^*(e_1)\| = 0$. Así, $1 = \|S(e_1)\| \neq \|S^*(e_1)\| = 0$. Por lo tanto, T no es normal, por el Teorema 55.

2. Un ejemplo de un operador hiponormal que no es casi-normal.

Sea T como en la parte 3 del Ejemplo 7. Entonces T es hiponormal. Además, para cada $x = \{x_n\} \in H$,

$$TT^*T(x) = (2x_4 + 5x_2, 2x_5 + 9x_3 + 10x_1, 2x_6 + 9x_4 + 12x_2, \dots) \text{ y}$$

$$T^*TT(x) = (2x_3 + 4x_1, 2x_5 + 9x_3 + 10x_1, 2x_6 + 9x_4 + 12x_2, \dots).$$

Nótese que $(0, 10, 0, \dots) = TT^*T(e_1) \neq T^*TT(e_1) = (4, 10, 0, \dots)$. Por lo tanto, T no es casi-normal.

En lo que sigue, probaremos las propiedades principales de los operadores normales e hiponormales.

Teorema 56. *Sea M un subespacio de H y T -invariante.*

- (a) *Si T es hiponormal, entonces $T|_M$ es hiponormal.*
- (b) *Si T es hiponormal y $T|_M$ es normal, entonces M reduce a T .*
- (c) *Si T es normal, entonces $T|_M$ es normal si y sólo si M reduce a T .*

Demostración. (a) Como M es T -invariante, entonces $T|_M \in B(M)$. Sea P la proyección ortogonal sobre M , entonces $(T|_M)^* = PT^*|_M$ en $B(H)$, por el Teorema 21. Por lo tanto, para cada $x \in M$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|(T|_M)^*x\| &= \|PT^*|_Mx\| \\ &\leq \|P\|\|T^*|_Mx\| \\ &= \|T^*|_Mx\| \\ &\leq \|T|_Mx\|, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es por la hiponormalidad de T . Luego, por el Teorema 55, $T|_M$ es hiponormal.

(b) Como M es T -invariante, por la Proposición 2, $T = \begin{bmatrix} T|_M & R \\ O & S \end{bmatrix}$ en $M \oplus_\perp M^\perp$. Así, $T^* = \begin{bmatrix} (T|_M)^* & O \\ R^* & S^* \end{bmatrix}$ en $M \oplus_\perp M^\perp$. Sea $N = T|_M$, puesto que N es normal, entonces

$$\begin{aligned} T^*T - TT^* &= \begin{bmatrix} N^*N & N^*R \\ R^*N & R^*R + S^*S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} NN^* + RR^* & RS^* \\ SR^* & SS^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -RR^* & N^*R - RS^* \\ R^*N - SR^* & R^*R + S^*S - RS^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sean $u \in M$, $x = (u, 0) \in M \oplus_{\perp} M^{\perp}$ y $D = T^*T - TT^*$. Entonces

$$\begin{aligned} Dx &= \begin{bmatrix} -RR^* & N^*R - RS^* \\ R^*N - SR^* & R^*R + S^*S - RS^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (-RR^*u, (R^*N - SR^*)u) \end{aligned}$$

en $M \oplus_{\perp} M^{\perp}$. Puesto que T es hiponormal, resulta que

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle Dx, x \rangle &= \langle (-RR^*u, (R^*N - SR^*)u), (u, 0) \rangle \\ &= -\langle RR^*u, u \rangle + \langle (R^*N - SR^*)u, 0 \rangle \\ &= -\langle RR^*u, u \rangle = -\langle R^*u, R^*u \rangle \\ &= -\|R^*u\|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $R^* = O$, y en consecuencia $R = O$. Por lo tanto, la representación matricial de T es $\begin{bmatrix} T|_M & O \\ O & S \end{bmatrix}$ en $M \oplus_{\perp} M^{\perp}$. Luego, por el Teorema 20, M es un subespacio que reduce a T .

(c) Es consecuencia inmediata del inciso (b). ■

Ahora que sabemos que la restricción de un operador hiponormal a cualquier subespacio invariante sigue siendo hiponormal, vale la pena preguntarse que si la restricción de un operador normal a un subespacio invariante sigue siendo normal. La respuesta a esta pregunta es negativa, tal como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9. Sean M un espacio de Hilbert y $M_n = M$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. El siguiente conjunto definido por:

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n = \{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : x_n \in M_n, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty \}$$

es un espacio lineal con las operaciones de la suma de vectores y la multiplicación por escalares definidas por:

1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} + \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{x_n + y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y
2. $\alpha \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\alpha x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$

para cada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Más aún, $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle x_n, y_n \rangle,$$

para todo $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$. En esta definición $\mathbb{Z}$ puede ser remplazado por $\mathbb{N}$ o por $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$, donde $M_n = M$ para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Consideremos el operador $T : H \rightarrow H$, dado por:

$$T(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots),$$

para cada $(x_0, x_1, x_2, \dots) \in H$. También, definamos U en $K = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$, donde $M_n = M$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, dado como:

$$U(\dots, x_{-2}, x_{-1}, [x_0], x_1, x_2, \dots) = (\dots, x_{-2}, [x_{-1}], x_0, x_1, x_2, \dots),$$

donde $[]$ es usado para localizar la posición de la coordenada cero. Que T y U sean acotados es sencillo de probar. Por otro lado, el adjunto de U es $U^*(\dots, x_{-2}, x_{-1}, [x_0], x_1, x_2, \dots) = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, [x_1], x_2, \dots)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} U^*U(\dots, x_{-2}, x_{-1}, [x_0], x_1, x_2, \dots) &= U^*(\dots, x_{-2}, [x_{-1}], x_0, x_1, \dots) \\ &= (\dots, x_{-2}, x_{-1}, [x_0], x_1, \dots). \end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned} UU^*(\dots, x_{-2}, x_{-1}, [x_0], x_1, x_2, \dots) &= U(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, [x_1], \dots) \\ &= (\dots, x_{-2}, x_{-1}, [x_0], x_1, \dots). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $UU^* = U^*U = I$, es decir, U es unitario. En consecuencia U es normal. Ahora, si H es identificado con el subespacio $\dots \bigoplus \{0\} \bigoplus H$ de K , entonces H es un subespacio de K . Además, H es U -invariante y $T = U|_H$. Sin embargo,

$$T^*T(x_0, x_1, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots) \text{ y } TT^*(x_0, x_1, \dots) = (x_0, x_1, x_2, \dots),$$

de donde se obtiene que T no es normal.

Continuemos con el estudio de las propiedades de los operadores hiponormales, probando el siguiente resultado.

Teorema 57. *Si $T \in B(H)$ es hiponormal e invertible, entonces T^{-1} es hiponormal.*

Demostración. Si T es invertible, entonces T^* es invertible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Esto implica que $TT^* \in B(H)$ es invertible, y como $TT^* \geq 0$,

resulta que $TT^* > O$. Si T es hiponormal, entonces $O < TT^* \leq T^*T$, por el Teorema 14, se obtiene que $(T^*T)^{-1} \leq (TT^*)^{-1}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T^{-1}(T^{-1})^* &= T^{-1}(T^*)^{-1} \\ &= (T^*T)^{-1} \leq (TT^*)^{-1} \\ &= (T^*)^{-1}T^{-1} = (T^{-1})^*T^{-1}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $T^{-1}(T^{-1})^* \leq (T^{-1})^*T^{-1}$, es decir, T^{-1} es hiponormal. ■

Teorema 58. Si $T \in B(H)$ es hiponormal, entonces $\lambda I - T$ es hiponormal para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración. Si T es hiponormal, entonces
 $(\lambda I - T)^*(\lambda I - T) - (\lambda I - T)(\lambda I - T)^*$
 $= (\bar{\lambda}I - T^*)(\lambda I - T) - (\lambda I - T)(\bar{\lambda}I - T^*)$
 $= |\lambda|^2 I - \bar{\lambda}T - \lambda T^* + T^*T - |\lambda|^2 I + \lambda T^* + \bar{\lambda}T - TT^*$
 $= T^*T - TT^* \geq O$. Por lo tanto, $\lambda I - T$ es hiponormal. ■

El siguiente Teorema caracteriza a las clases de operadores hiponormales introducidas en esta sección en términos del espectro.

Teorema 59. Sea Γ la frontera del disco unitario. Si $T \in B(H)$ es un operador hiponormal, entonces

- (a) T es auto-adjunto si y sólo si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.
- (b) T es unitario si y sólo si $\sigma(T) \subseteq \Gamma$.
- (c) T es no negativo si y sólo si $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$.
- (d) T es positivo si y sólo si $\sigma(T) \subseteq [\alpha, \infty)$, para algún $\alpha > 0$.
- (e) T es una proyección ortogonal no trivial si y sólo si $\sigma(T) = \{0, 1\}$.

Demostración. Primero probemos la siguiente afirmación.

Afirmación. Si T es normal, entonces $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.

Usando los cálculos del Teorema 58, tenemos que $\lambda I - T$ es normal para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, y por el Teorema 55, $N(\lambda I - T) = N(\bar{\lambda}I - T^*)$. Ahora, supongamos que $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$. Luego, por el Teorema 5, $\lambda I - T$ es inyectivo y tiene rango cerrado. En consecuencia, $R(\lambda I - T) = \overline{R(\lambda I - T)} = N(\bar{\lambda}I - T^*)^\perp = \{0\}^\perp = H$, por la Proposición 1. Por lo tanto, $\lambda I - T$ es invertible. Así, $\lambda \notin \sigma(T)$. Esto prueba que $\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$. Por lo tanto,

$\sigma_{ap}(T) = \sigma(T)$, ya que la contención contraria siempre es cierta.

(a) Supongamos que T es auto-adjunto y que $\lambda \in \sigma(T)$. Sean $\lambda = \alpha + i\beta$ y $S = \lambda I - T$. Por un simple cálculo tenemos que $\|Sx\|^2 = \|\alpha x - Sx\|^2 + \beta^2 \|x\|^2$, así que $\|Sx\| \geq |\beta| \|x\|$. Si $\beta \neq 0$, se sigue que S es invertible, por la Afirmación. Así, $\lambda \notin \sigma(T)$. Esto prueba que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Probemos la implicación recíproca. Sea $\lambda = \alpha i$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\lambda \notin \sigma(T)$, de lo cual se sigue que $\lambda I - T$ es invertible. Por el Teorema 57, $(\lambda I - T)^{-1}$ es hiponormal, y por lo tanto $(\lambda I - T)^{-1}$ es normaloide (veáse el Teorema 60). De esta manera, $\|(\lambda I - T)^{-1}\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma((\lambda I - T)^{-1})\}$. Por otro lado, por el Teorema de la aplicación espectral, tenemos que $\sigma((\lambda I - T)^{-1}) = \{(\lambda - \mu)^{-1} : \mu \in \sigma(T)\}$. En consecuencia, $\|(\lambda I - T)^{-1}\| = \sup\{|\lambda - \mu|^{-1} : \mu \in \sigma(T)\} \leq \frac{1}{|\lambda|}$, porque $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Por lo tanto, T es auto-adjunto (veáse el Teorema 12).

(b) Supongamos que T es unitario. Por el Teorema de la aplicación espectral, para cada $\lambda \in \sigma(T)$ tenemos que $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$. Por otro lado, por el Teorema 22, $\|T\| = \|T^*\| = 1$ ($T^* = T^{-1}$), y como $r(T^*) = r(T) \leq \|T\|$, tenemos que para cada $\lambda \in \sigma(T)$ implica que $|\lambda| \leq 1$ y $|\lambda^{-1}| \leq 1$. Por lo tanto, $|\lambda| = 1$. Recíprocamente, supongamos que $\sigma(T) \subseteq \Gamma$. Como T es hiponormal, entonces T es normaloide (veáse Teorema 60), de lo cual se sigue que $\|T\| = 1$. Por otra parte, por hipótesis, $0 \notin \sigma(T)$, en consecuencia T es invertible. Por el Teorema 58, T^{-1} es hiponormal, así que T^{-1} es normaloide. Ahora, como $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T)\} \subseteq \Gamma$, tenemos que $\|T^{-1}\| = 1$. En consecuencia, $\|Tx\| \leq \|x\|$ y $\|T^{-1}x\| \leq \|x\|$ para cada $x \in H$. De esta manera, $\|Tx\| = \|x\| = \|T^{-1}x\|$. Por lo tanto, T es unitario.

(c) Supongamos que T es no negativo. Entonces $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para cada $x \in H$, y $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Por otra parte, notemos que $\|(\lambda I - T)x\|^2 = |\lambda|^2 \|x\|^2 - 2\lambda \langle Tx, x \rangle + \|Tx\|^2$. De esta manera, si $\lambda < 0$, tenemos que $\|(\lambda I - T)x\|^2 \geq |\lambda|^2 \|x\|^2$ para cada $x \in H$, de lo cual se sigue que $\lambda I - T$ es invertible (por la Afirmación). Así, $\lambda \notin \sigma(T)$. En consecuencia, $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$. Recíprocamente, si $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$, entonces T es auto-adjunto, por (a). Por el Teorema 12.23 de W. Rudin [22] y el Teorema 6.47 de C. Kubrusly [17], resulta que existe una única medida espectral P en los subconjuntos borelianos de $\sigma(T)$ tal que

$$\langle Tx, x \rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda dP(\lambda).$$

Es bien conocido que para cada $x \in H$, P_x definido por $P_x(\Delta) = \langle P(\Delta)x, x \rangle$

es una medida positiva, para cada conjunto boreliano $\Delta \subseteq \sigma(T)$. De esta manera, si $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$, resulta que $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para cada $x \in H$. Por lo tanto, T es no negativo.

(d) Supongamos que T es positivo. Por (c), $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$, y por el Teorema 14, $0 \notin \sigma(T)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \subseteq [\alpha, \infty)$ para algún $\alpha > 0$. Recíprocamente, supongamos que $\sigma(T) \subseteq [\alpha, \infty)$ para algún $\alpha > 0$. Por (c), T es no negativo. Por otra parte, como $0 \notin \sigma(T)$, tenemos que T es invertible. Luego, por el Teorema 14, T es positivo.

(e) Supongamos que T es una proyección. Entonces $I - T$ es una proyección, $R(I - T) = N(T)$ y $R(T) = N(I - T)$. Si $0 \notin \sigma_p(T)$, entonces $R(I - T) = N(T) = \{0\}$, así que $T = I$. Similarmente, si $1 \notin \sigma_p(T)$, entonces $R(T) = N(I - T) = \{0\}$, así que $T = O$. Por lo tanto, si T es una proyección tal que $O \neq T \neq I$, entonces $0, 1 \in \sigma_p(T)$. Además, si $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $0 \neq \lambda \neq 1$, entonces $(\lambda I - T)(\frac{1}{\lambda}I + \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}T) = I = (\frac{1}{\lambda}I + \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}T)(\lambda I - T)$, lo cual implica que $\lambda I - T$ es invertible, y así $\lambda \in \rho(T)$. Recíprocamente, supongamos que $\sigma(T) = \{0, 1\}$. Por (a), T es auto-adjunto. Por otro lado, $T^2 = \int_{\sigma(T)} \lambda^2 P(\lambda) = \int_{\sigma(T)} \lambda P(\lambda) = T$. Luego, por el Teorema 18, T es una proyección ortogonal. ■

Cabe señalar que este Teorema, en particular, también es cierto si H es de dimensión finita.

2.2. Operadores k -paranormales

En esta sección introducimos ciertas clases de operadores que generalizan a los operadores hiconormales y por lo tanto de los operadores normales. Esta clase de operadores la constituyen los operadores p -hiconormal para algún $0 < p \leq 1$, clase A , paranormal, clase $A(k)$ y k -paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$. Estudiamos las relaciones que existen entre estas clases de operadores y especialmente estudiamos sus propiedades espectrales. Además, damos varios ejemplos de estas clases de operadores.

Cabe señalar que los resultados aquí expuestos son resultados originales de S. Panayappan, N. Jayanthi y D. Sumathi en el artículo titulado "Weyl and Weyl Type Theorems for k -Paranormal and Algebraically k -Paranormal Operators", que fue publicado en el año 2012 en la revista *Int. Journal of Math. Analysis* (véase [20]). Para más referencias de estas clases de operadores, véase los artículos [25], [16] y [21].

2.2.1. Las relaciones de inclusión y ejemplos

Comencemos nuestra exposición definiendo las clases de operadores que generalizan a los operadores normales.

Definición 27. Sea $T \in B(H)$. Diremos que

1. T es p -hiponormal si $(TT^*)^p \leq (T^*T)^p$ para algún $0 < p \leq 1$. Cuando $p = 1$, T pertenece a la clase de los operadores hiponormales.
2. T es de clase A si $|T|^2 \leq |T^2|$.
3. T es paranormal si $\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|$ para todo $x \in H$.
4. T es k -paranormal si $\|Tx\|^{k+1} \leq \|T^{k+1}x\|\|x\|^k$ para todo $x \in H$ y para algún $k \in \mathbb{N}$. Nótese que si $k = 1$, entonces T es paranormal.
5. T es de clase $A(k)$ si $|T|^2 \leq |T^{k+1}|^{\frac{2}{k+1}}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Si $k = 1$, entonces la clase $A(k)$ coincide con la clase de los operadores de clase A .
6. T es normaloide si $r(T) = \|T\|$.

En seguida vamos a probar las relaciones que existen entre las clases de operadores definidos arriba, pero antes enunciemos los siguientes dos resultados auxiliares, muy conocidos en la teoría de operadores. Las pruebas de estos resultados se pueden ver en [15].

Lema 4. (*Desigualdad de Löwner-Heinz*). Si $Q, R \in B(H)$ son operadores no negativos tales que $Q \geq R$, entonces $Q^\alpha \geq R^\alpha$ para $0 \leq \alpha \leq 1$.

Lema 5. (*Desigualdad de Hölder-McCarthy*). Sea $Q \in B(H)$ tal que $Q \geq O$. Entonces las siguientes desigualdades son ciertas:

- (a) $\langle Q^r x, x \rangle \geq \langle Qx, x \rangle^r \|x\|^{2(1-r)}$ para todo $r > 1$ y todo $x \in H$.
- (b) $\langle Q^r x, x \rangle \leq \langle Qx, x \rangle^r \|x\|^{2(1-r)}$ para todo $0 \leq r \leq 1$ y todo $x \in H$.

Teorema 60. Las siguientes implicaciones son ciertas:

$$\begin{aligned} \text{hiponormal} &\Rightarrow p\text{-hiponormal} \Rightarrow \text{clase } A \Rightarrow \text{paranormal} \\ &\Rightarrow k\text{-paranormal} \Rightarrow \text{normaloide}. \end{aligned}$$

Demostración. Probemos que hiponormal implica p -hiponormal. Si $T \in B(H)$ es hiponormal, entonces $TT^* \leq T^*T$. Por el Lema 4, $(TT^*)^p \leq (T^*T)^p$ para $0 < p \leq 1$. Por lo tanto, T es p -hiponormal.

Veamos que p -hiponormal implica clase A . Sea $T = U|T|$ la descomposición polar de T . Por el Teorema 24, la descomposición polar de T^* es $T^* = U^*|T^*|$. Así, $T = |T^*|U$. Como T es p -hiponormal, entonces $|T|^{2p} \geq |T^*|^{2p}$. Aplicando el Teorema 17 a $|T|^{2p}$ y $|T^*|^{2p}$ para $(1 + \frac{1}{p})\frac{2}{1+p} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{p}$, y teniendo en cuenta también el Teorema 25,

$$\begin{aligned} |T^2|^{1+p} &= (T^*(T^*T)T)^{\frac{1+p}{2}} = (U^*|T^*|T^*T|T^*|U)^{\frac{1+p}{2}} \\ &= U^*((|T^*|^{2p})^{\frac{1}{2p}}(|T|^{2p})^{\frac{1}{p}}(|T^*|^{2p})^{\frac{1}{2p}})^{\frac{1+p}{2}}U \\ &\geq U^*((|T^*|^{2p})^{\frac{1}{2p}}(|T^*|^{2p})^{\frac{1}{p}}(|T^*|^{2p})^{\frac{1}{2p}})^{\frac{1+p}{2}}U \\ &= U^* (|T^*|^{2p})^{\frac{1+p}{p}}U = U^*|T^*|^{2(1+p)}U = |T|^{2(1+p)}. \end{aligned}$$

Así, $|T^2|^{1+p} \geq |T|^{2(1+p)}$. Luego, por el Lema 4, resulta que $|T^2| \geq |T|^2$. Por lo tanto, T es clase A .

Demostremos que clase A implica paranormal. Tomemos x en H de norma uno. Si T es de clase A , entonces $\langle |T^2|x, x \rangle \geq \langle |T|^2x, x \rangle$. Usando la desigualdad de Hölder-McCarthy, resulta que:

$$\begin{aligned} \|T^2x\|^2 &= \langle T^{*2}T^2x, x \rangle = \langle |T^2|^2x, x \rangle \\ &\geq \langle |T^2|x, x \rangle^2 \geq \langle |T|^2x, x \rangle^2 = \|Tx\|^4. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|T^2x\|^2 \geq \|Tx\|^4$ para cada $x \in H$ de norma uno. Esto prueba que T es paranormal.

Probemos que paranormal implica k -paranormal. Sea $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$. Si $T \in B(H)$ es paranormal, entonces $\|T^2x\| \geq \|Tx\|^2$. Ahora, supongamos que $\|T^n x\| \geq \|Tx\|^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Así que:

$$\begin{aligned} \|T^{n+1}x\| &= \|Tx\| \|T^n(\frac{Tx}{\|Tx\|})\| \geq \|Tx\| \|T(\frac{Tx}{\|Tx\|})\|^n \\ &= \|Tx\|^{1-n} \|T^2x\|^n \geq \|Tx\|^{1-n} \|Tx\|^{2n} \\ &= \|Tx\|^{n+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por inducción se tiene que $\|T^n x\| \geq \|Tx\|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, si $n = k+1$, entonces $\|T^{k+1}x\| \geq \|Tx\|^{k+1}$ para todo $x \in H$ de norma uno. En consecuencia, T es k -paranormal.

Finalmente, veamos que k -paranormal implica normaloide. Sea $O \neq T$ k -paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\|Tx\|^{k+1} \leq \|T^{k+1}x\| \|x\|^k$ para todo $x \in H$. Tomemos cualquier entero $i \geq 1$. Si reemplazamos x

por $T^{i-1}x$, se obtiene que $\|T^i x\|^{k+1} \leq \|T^{k+i}x\| \|T^{i-1}x\|^k$ para todo $x \in H$. De manera que $\|T^i\|^{k+1} \leq \|T^{k+i}\| \|T^{i-1}\|^k$. Ahora, supongamos que $\|T^i\| = \|T\|^i$ para algún $i \geq 1$. Por la desigualdad anterior, $\|T\|^{(k+1)i} = (\|T^i\|)^{k+1} = \|T^i\|^{k+1} \leq \|T^{k+i}\| \|T^{i-1}\|^k \leq \|T^{k+i}\| \|T\|^{(i-1)k}$, y por lo tanto $\|T\|^{k+i} \leq \|T^{k+i}\|$. Además, como $\|T\|^{k+i} \geq \|T^{k+i}\|$, entonces

$$\|T\|^{k+i} = \|T^{k+i}\|.$$

Luego, por inducción, resulta que $\|T\|^{ik+1} = \|T^{ik+1}\|$ para $i \geq 1$. Esto nos da una subsucesión $\{T^{n_i}\}$ de $\{T^n\}$, digamos $T^{n_i} = T^{ik+1}$, tal que $\|T\|^{n_i} = \|T^{n_i}\|$, en consecuencia,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|T^{n_i}\|^{\frac{1}{n_i}} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\|T\|^{\frac{1}{n_i}})^{\frac{1}{n_i}} = \|T\|.$$

Puesto que $\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}\}$ es una sucesión convergente que converge a $r(T)$, y como tiene una subsucesión que converge a $\|T\|$, se sigue que $r(T) = \|T\|$, lo cual nos dice que T es normaloide. ■

Probemos las relaciones que hay entre las clases de operadores que pertenecen en la clase $A(k)$ y k -paranormales para algún $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 61. *Si $T \in B(H)$ es de clase $A(k)$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces T es k -paranormal.*

Demostración. Si T es de clase $A(k)$, entonces $|T|^2 \leq |T^{k+1}|^{\frac{2}{k+1}}$. Usando la desigualdad de Hölder-McCarthy, resulta que:

$$\begin{aligned} \|Tx\|^{2(k+1)} &= \langle Tx, Tx \rangle^{k+1} = \langle |T|^2 x, x \rangle^{k+1} \leq \langle |T^{k+1}|^{\frac{2}{k+1}} x, x \rangle^{k+1} \\ &\leq \langle (|T^{k+1}|^{\frac{2}{k+1}})^{k+1} x, x \rangle = \langle |T^{k+1}|^2 x, x \rangle \\ &= \langle T^{*k+1} T^{k+1} x, x \rangle = \|T^{k+1} x\|^2 \end{aligned}$$

para todo $x \in H$ de norma uno. De lo cual se sigue que $\|Tx\|^{k+1} \leq \|T^{k+1}x\|$ para todo $x \in H$ de norma uno. Por lo tanto, T es k -paranormal. ■

Continuemos con nuestra exposición caracterizando a los operadores k -paranormales para algún $k \in \mathbb{N}$. Usaremos esta caracterización para probar algunas propiedades de las clases de operadores de la definición 27. En particular, para hallar ejemplos de dichos operadores.

Lema 6. *(Desigualdad generalizada de la media aritmética-geométrica). Sean a y b números reales positivos. Entonces $a^\lambda b^\mu \leq \lambda a + \mu b$ para $\lambda > 0$ y $\mu > 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$.*

Teorema 62. Para cada entero positivo k , T es k -paranormal si y sólo si $T^{*k+1}T^{k+1} - (k+1)\mu^k T^*T + k\mu^{k+1} \geq O$ para todo $\mu > 0$.

Demostración. Por definición, $\|T^{k+1}x\|^{\frac{1}{k+1}} \|x\|^{\frac{k}{k+1}} \geq \|Tx\|$ para cada $x \in H$ si y sólo si T es k -paranormal. Por el Lema 6, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \langle T^*Tx, x \rangle &\leq \langle T^{*k+1}T^{k+1}x, x \rangle^{\frac{1}{k+1}} \langle x, x \rangle^{\frac{k}{k+1}} \\ &= \langle \mu^{-k}T^{*k+1}T^{k+1}x, x \rangle^{\frac{1}{k+1}} \langle \mu x, x \rangle^{\frac{k}{k+1}} \\ &\leq \frac{1}{k+1} \langle \mu^{-k}T^{*k+1}T^{k+1}x, x \rangle + \frac{k}{k+1} \langle \mu x, x \rangle, \end{aligned}$$

para cada $x \in H$. Así, $\langle (T^{*k+1}T^{k+1} - (k+1)\mu^k T^*T + k\mu^{k+1})x, x \rangle \geq 0$. Por lo tanto, $T^{*k+1}T^{k+1} - (k+1)\mu^k T^*T + k\mu^{k+1} \geq O$.

Recíprocamente, si $x \in H$ con $\langle T^{*k+1}T^{k+1}x, x \rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle (T^{*k+1}T^{k+1} - (k+1)\mu^k T^*T + k\mu^{k+1})x, x \rangle \\ &= -(k+1)\mu^k \langle T^*Tx, x \rangle + k\mu^{k+1} \langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

Así, $(k+1)\mu^k \langle T^*Tx, x \rangle \leq k\mu^{k+1} \langle x, x \rangle$. Multiplicando esta desigualdad por μ^{-k} , resulta que $(k+1)\langle T^*Tx, x \rangle \leq k\mu \langle x, x \rangle$, entonces $(k+1)\langle T^*Tx, x \rangle \leq 0$ si $\mu \rightarrow 0$, en consecuencia $\langle T^*Tx, x \rangle = 0$, y por lo tanto $\|Tx\|^{k+1} \leq \|T^{k+1}x\| \|x\|^k$ para cada $x \in H$. Ahora, supongamos que $x \in H$ con

$\langle T^{*k+1}T^{k+1}x, x \rangle > 0$, y sea $\mu = \left(\frac{\langle T^{*k+1}T^{k+1}x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right)^{\frac{1}{k+1}}$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle (T^{*k+1}T^{k+1} - (k+1)\mu^k T^*T + k\mu^{k+1})x, x \rangle = \langle |T^{k+1}|^2 x, x \rangle \\ &\quad - (k+1) \left(\frac{\langle |T^{k+1}|^2 x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right)^{\frac{k}{k+1}} \langle T^*Tx, x \rangle + k \frac{\langle |T^{k+1}|^2 x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \langle x, x \rangle \\ &= (k+1) \langle |T^{k+1}|^2 x, x \rangle - (k+1) \left(\frac{\langle |T^{k+1}|^2 x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right)^{\frac{k}{k+1}} \langle T^*Tx, x \rangle. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\left(\frac{\langle |T^{k+1}|^2 x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right)^{\frac{k}{k+1}} \langle T^*Tx, x \rangle \leq \langle |T^{k+1}|^2 x, x \rangle$, de

lo cual se sigue que $\langle T^*Tx, x \rangle \leq \langle |T^{k+1}|^2 x, x \rangle^{\frac{1}{k+1}} \langle x, x \rangle^{\frac{k}{k+1}}$ para cada $x \in H$. De esta manera, $\|Tx\|^{k+1} \leq \|T^{k+1}x\| \|x\|^k$ para cada $x \in H$. Por lo tanto, T es k -paranormal. ■

Proposición 6. Sea $K = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} H_n$, donde $H_n = H$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Para operadores no negativos A y B en H , definamos el operador $T_{A,B}$ en K como sigue:

$$T_{A,B} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & B & [0] & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

donde $[]$ muestra el lugar $(0,0)$ de la matriz. Entonces

- (i) $T_{A,B}$ es haponormal si y sólo si $A^2 \geq B^2$.
- (ii) $T_{A,B}$ es p -hiponormal si y sólo si $A^{2p} \geq B^{2p}$ para $0 < p \leq 1$.
- (iii) $T_{A,B}$ es de clase A si y sólo si $(BA^2B)^{\frac{1}{2}} \geq B^2$.
- (vi) $T_{A,B}$ es paranormal si y sólo si $BA^2B - 2\mu B^2 + \mu^2 \geq 0$ para todo $\mu > 0$.

Demostración. (i) Sea $x = (\cdots, x_{-1}, [x_0], x_1, x_2, \cdots) \in K$. Notemos que

$$T_{A,B}x = (\cdots, Bx_{-2}, [Bx_{-1}], Bx_0, Ax_1, Ax_2, \cdots)$$

y el adjunto de $T_{A,B}$ viene dado por:

$$T_{A,B}^*x = (\cdots, Bx_{-1}, Bx_0, [Bx_1], Ax_2, Ax_3, \cdots).$$

En consecuencia, tenemos que:

$$T_{A,B}T_{A,B}^*x = (\cdots, B^2x_{-1}, [B^2x_0], B^2x_1, A^2x_2, A^2x_3, \cdots) \quad \text{y} \quad (2.6)$$

$$|T_{A,B}|^2x = T_{A,B}^*T_{A,B}x = (\cdots, B^2x_{-1}, [B^2x_0], A^2x_1, A^2x_2, \cdots) \quad (2.7)$$

Por lo tanto, $T_{A,B}^*T_{A,B} \geq T_{A,B}T_{A,B}^*$ si y sólo si $A^2 \geq B^2$.

(ii) Por las ecuaciones (2.6) y (2.7), resulta que:

$$(T_{A,B}T_{A,B}^*)^p x = (\cdots, B^{2p}x_{-1}, [B^{2p}x_0], B^{2p}x_1, A^{2p}x_2, A^{2p}x_3, \cdots) \quad \text{y}$$

$$(T_{A,B}^*T_{A,B})^p x = (\cdots, B^{2p}x_{-2}, B^{2p}x_{-1}, [B^{2p}x_0], A^{2p}x_1, A^{2p}x_2, \cdots).$$

Por lo tanto, $(T_{A,B}^* T_{A,B})^p \geq (T_{A,B} T_{A,B}^*)^p$ si y sólo si $A^{2p} \geq B^{2p}$.

(iii) Por un simple cálculo tenemos que:

$$T_{A,B}^{*2} T_{A,B}^2 x = (\cdots, B^4 x_{-2}, B^4 x_{-1}, [(BA^2 B)x_0], A^4 x_1, A^4 x_2, \cdots). \quad (2.8)$$

De lo cual se sigue que:

$$|T_{A,B}^2| x = (\cdots, B^2 x_{-2}, B^2 x_{-1}, [(BA^2 B)^{\frac{1}{2}} x_0], A^2 x_1, A^2 x_2, \cdots).$$

Por lo tanto, de este último y de la ecuación (2.7), obtenemos que $|T_{A,B}^2| \geq |T_{A,B}|^2$ si y sólo si $(BA^2 B)^{\frac{1}{2}} \geq B^2$, es decir, $T_{A,B}$ es de clase A si y sólo si $(BA^2 B)^{\frac{1}{2}} \geq B^2$.

(vi) Para cada $\mu > 0$, sea $X(\mu) = T_{A,B}^{*2} T_{A,B}^2 - 2\mu T_{A,B}^* T + \mu^2$. Por las ecuaciones (2.8) y (2.7), se obtiene que:

$$\begin{aligned} X(\mu)x &= (\cdots, (B^4 - 2\mu B^2 + \mu^2)x_{-1}, [(BA^2 B - 2\mu B^2 + \mu^2)x_0], \\ &\quad (A^4 - 2\mu A^2 + \mu^2)x_1, (A^4 - 2\mu A^2 + \mu^2)x_2, \cdots). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X(\mu) \geq O$ si y sólo si $BA^2 B - 2\mu B^2 + \mu^2 \geq O$. Por el Teorema 62, $T_{A,B}$ es paranormal si y sólo si $BA^2 B - 2\mu B^2 + \mu^2 \geq O$. ■

Lema 7. Si A y B son operadores invertibles, entonces

$$(BAA^*B^*)^\lambda = BA(A^*B^*BA)^{\lambda-1}A^*B^*$$

para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Por el Teorema 60, tenemos que las siguientes contenciones son ciertas:

$$\begin{aligned} \text{hiponormal} &\subseteq p\text{-hiponormal} \subseteq \text{clase } A \subseteq \text{paranormal} \\ &\subseteq k\text{-paranormal} \subseteq \text{normaloide}. \end{aligned}$$

Usaremos la Proposición 6 para dar varios ejemplos que demuestren que estas contenciones son propias en el sentido de conjuntos.

Ejemplo 10. Sea $K = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} H_n$, donde $H_n = \mathbb{R}^2$. Para matrices no negativas A, B en $\mathbb{R}^2$, definamos el operador $T_{A,B}$ en K como (2.5) en la Proposición 6. Tenemos los siguientes ejemplos.

Recordemos que la traza de una matriz X se denota por trX , mientras que el determinante de una matriz X se denota por $detX$.

1. Un ejemplo de un operador $\frac{1}{2}$ -hiponormal que no es hiponormal.

$$\text{Sean } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Claramente, A y B son auto-adjuntos. Los valores propios de A son $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Por el Teorema 59, se obtiene que $A > O$. Los valores propios de B son 1 y 2, entonces $B > O$. Por un cálculo simple tenemos que:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observemos que $A - B$ es auto-adjunto y sus respectivos valores propios son 2 y 0. De esta manera, $A \geq B$ (véase el Teorema 59). Luego, de la Proposición 6, $T_{A,B}$ es $\frac{1}{2}$ -hiponormal.

Por otro lado, tenemos que:

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de $A^2 - B^2$ son $\frac{10+\sqrt{104}}{2}$ y $\frac{10-\sqrt{104}}{2}$. Como $\frac{10-\sqrt{104}}{2}$ es negativo, entonces $A^2 \not\geq B^2$. Por lo tanto, $T_{A,B}$ no es hiponormal (véase la Proposición 6).

2. Un ejemplo de un operador de clase A que no es $\frac{1}{4}$ -hiponormal.

$$\text{Sean } A = \begin{bmatrix} 17 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 338 & 154 \\ 154 & 74 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Es claro que A y B son auto-adjuntos. Los valores propios de A son $408,8299 \dots$ y $3,17 \dots$. Por el Teorema 59, tenemos que $A > O$. Además, los valores propios de B son 1 y 16, entonces $B > O$. Por un cálculo simple tenemos que:

$$A^4 - AB^2A = \begin{bmatrix} 1,774592876 \times 10^{10} & 9282772268 \\ 9282772268 & 4876395996 \end{bmatrix}$$

Es obvio que $A^4 - AB^2A$ es auto-adjunto, y como los valores propios de $A^4 - AB^2A$ son $5,117695776 \times 10^{20}$ y $5,117695775 \times 10^{20}$, entonces $A^4 - AB^2A > O$. Luego, por el Lema 4, resulta que $A^2 > (AB^2A)^{\frac{1}{2}}$. Así,

$(AB^2A)^{-\frac{1}{2}} > A^{-2}$. Como A y B son positivos, entonces

$$\begin{aligned}(BA^2B)^{\frac{1}{2}} &= BA(AB^2A)^{-\frac{1}{2}}AB \\ &\geq BAA^{-2}AB = B^2,\end{aligned}$$

(véase el Lema 7). Por lo tanto, $T_{A,B}$ es de clase A , por (iii) de la Proposición 6.

Por otro lado, $A^{\frac{1}{2}} - B^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ es auto-adjunto y sus valores propios son $18,75 \dots$ y $-1,7591 \dots$, entonces $A^{\frac{1}{2}} \not\geq B^{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, $T_{A,B}$ no es $\frac{1}{4}$ -hiponormal, por (ii) de la Proposición 6.

3. Un ejemplo de un operador paranormal que no es de clase A .

Consideremos las siguientes matrices en $\mathbb{R}^2$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{23} \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Es claro que A y B son positivos, ya que los valores propios de A son $70,979 \dots$ y $63,387 \dots$ y los valores propios de B son 5 y 1 , que son positivos. Para $\mu > 0$, definamos $X(\mu)$ como sigue:

$$X(\mu) = BA^2B - 2\mu B^2 + \mu^2 = \begin{bmatrix} 404 - 26\mu + \mu^2 & -576 + 24\mu \\ -576 + 24\mu & 844 - 26\mu + \mu^2 \end{bmatrix}.$$

Sea $p(\mu) = \text{tr} X(\mu)$ y $q(\mu) = \det X(\mu)$, entonces

$$\begin{aligned}p(\mu) &= 2\mu^2 - 52\mu + 1248 \\ &= 2(\mu - 13)^2 + 910 > 0 \text{ y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q(\mu) &= (404 - 26\mu + \mu^2)(844 - 26\mu + \mu^2) - (-576 + 24\mu)^2 \\ &= \mu^4 - 52\mu^3 + 1348\mu^2 - 4800\mu + 9200.\end{aligned}$$

Luego, la derivada de $q(\mu)$ es:

$$\begin{aligned}q'(\mu) &= 4\mu^3 - 156\mu^2 + 2696\mu - 4800 \\ &= 4(\mu - 2)(\mu^2 - 37\mu + 600) \\ &= 4(\mu - 2) \left(\left(\mu - \frac{37}{2} \right)^2 + \frac{1031}{4} \right).\end{aligned}$$

Así, $q'(\mu) = 0$ si y sólo si $\mu = 2$. Además, como $q''(2) = 2120 > 0$, entonces $q(\mu) \geq q(2) = 4592 > 0$ para todo $\mu > 0$. Esto implica que $\text{tr}X(\mu) = p(\mu) > 0$ y $\det X(\mu) = q(\mu) > 0$ para todo $\mu > 0$. De lo cual se sigue que $X(\mu) \geq O$ para todo $\mu > 0$. Por lo tanto, $T_{A,B}$ es paranormal, por (iv) de la Proposición 6.

Por otro lado, como $(BA^2B)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 13,1747\cdots & -15,1798\cdots \\ -15,1747\cdots & 24,77\cdots \end{bmatrix}$, entonces

$$(BA^2B)^{\frac{1}{2}} - B^2 = \begin{bmatrix} 0,17472\cdots & -3,1798\cdots \\ -3,1798\cdots & 11,770\cdots \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de $(BA^2B)^{\frac{1}{2}} - B^2$ son $12,585\cdots$ y $-0,64001\cdots$. Entonces $(BA^2B)^{\frac{1}{2}} \not\geq B^2$. Por lo tanto, $T_{A,B}$ no es de clase A , por (iii) de la Proposición 6.

Ejemplo 11. 1. Un ejemplo de un operador 3-paranormal pero que no es un operador paranormal.

Sea $T : l_2 \rightarrow l_2$ definido por:

$$T(x) = (0, \frac{1}{2}x_1, \frac{1}{4}x_2, x_3, x_4, \cdots)$$

para cada $x = \{x_n\} \in l_2$. Entonces, $T \in B(l_2)$ y el adjunto de T está dado por:

$$T^*(x) = (\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{4}x_3, x_4, x_5, \cdots)$$

para cada $x = \{x_n\} \in l_2$. Para $\mu > 0$, definamos $X(\mu) = T^{*4}T^4 - 4\mu^3T^*T + 3\mu^4$. Entonces

$$X(\mu)(x) = ((\frac{1}{64} - \mu^3 + 3\mu^4)x_1, (\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\mu^3 + 3\mu^4)x_2, (1 - 4\mu^3 + 3\mu^4)x_3, \cdots).$$

para cada $x = \{x_n\}$. Luego, $X(\mu) \geq O$ si y sólo si

$$\begin{aligned} \langle X(\mu)(x), x \rangle &= (\frac{1}{64} - \mu^3 + 3\mu^4)|x_1|^2 + (\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\mu^3 + 3\mu^4)|x_2|^2 \\ &+ (1 - 4\mu^3 + 3\mu^4)|x_3|^2 + (1 - 4\mu^3 + 3\mu^4)|x_4|^2 + \cdots \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Esto equivale a que $f(\mu) = \frac{1}{64} - \mu^3 + 3\mu^4 \geq 0$, $g(\mu) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4}\mu^3 + 3\mu^4 \geq 0$ y $h(\mu) = 1 - 4\mu^3 + 3\mu^4 \geq 0$ no sean negativos en $(0, \infty)$. Como $f'(\frac{1}{4}) = 0$

y $f''(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4} > 0$, entonces el mínimo de f alcanza en $\mu = \frac{1}{4}$, y por lo tanto $f(\mu) \geq f(\frac{1}{4}) = \frac{3}{256} > 0$ para cada $\mu > 0$. También, notemos que $g'(\frac{1}{16}) = 0$ y $g''(\frac{1}{16}) = \frac{3}{64} > 0$, esto implica que $g(\mu) \geq g(\frac{1}{16}) = \frac{4095}{65536} > 0$ para todo $\mu > 0$. De manera similar se demuestra que $h(\mu) \geq 0$. Por lo tanto, $T^{*4}T^4 - 4\mu^4T^*T + 3\mu^4 \geq 0$ para cada $\mu > 0$. Por el Teorema 63, T es 3-paranormal.

Por otro lado, $Te_1 = (0, \frac{1}{2}, 0, \dots)$ y $T^2e_1 = (0, 0, \frac{1}{8}, 0, \dots)$. Así, $\frac{1}{4} = \|Te_1\|^2 \not\leq \|T^2e_1\| = \frac{1}{8}$. Por lo tanto, T no es paranormal.

2. Ejemplo de un operador normaloide que no es un operador 3-paranormal.

Sea $T : l_2 \rightarrow l_2$ definido por:

$$T(x) = (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, x_3, x_4, \dots)$$

para cada $x = \{x_n\}$. Por inducción, se tiene que:

$$T^n x = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-\text{ceros}}, \frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, x_3, \dots)$$

para cada $x = \{x_n\}$ y cada $n \in \mathbb{N}$. Para $x = \{x_n\}$ de norma uno,

$$\begin{aligned} \|T^n x\|^2 &= \langle (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-\text{ceros}}, \frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, x_3, \dots), (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-\text{ceros}}, \frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, x_3, \dots) \rangle \\ &= \frac{1}{4}|x_1|^2 + \frac{1}{4}|x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + \dots \\ &\leq |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + \dots = \|x\| = 1, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $\|T^n\| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, $T^n(e_3) = e_{n+2}$, esto implica que $1 = \|T^n(e_3)\| \leq \|T^n\|$, y por lo tanto $\|T^n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 1 = \|T\|$. Por lo tanto T es normaloide.

Sin embargo, T no es 3-paranormal. En efecto, $T(e_1) = (0, 1, 0, \dots)$ y $T^4(e_1) = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, \dots)$. En consecuencia, $1 = \|T(e_1)\|^4 \not\leq \|T^4(e_1)\| = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, T no es 3-paranormal.

2.2.2. Representación matricial

En esta parte estudiamos la representación matricial de un operador k -paranormal T con respecto a la suma directa ortogonal de $N(T - \lambda I)$ y

su complemento ortogonal, donde λ es un valor propio no cero de T . Dicha representación se usará para demostrar que los valores propios aislados no ceros de T son normales. También estudiaremos la representación matricial de ese mismo operador, pero ahora con respecto a la suma directa ortogonal de $\overline{R(T)}$ y su complemento ortogonal. Usamos esta última representación para probar que la restricción de un operador k -paranormal a un subespacio invariante también es un operador k -paranormal.

Lema 8. Sean M y N subespacios de H tales que $H = M \oplus_{\perp} N$. Sea $T = \begin{bmatrix} R & Q \\ Q^* & S \end{bmatrix}$ en H . Entonces, $T \geq O$ si y sólo si $R, S \geq O$ y $Q = R^{\frac{1}{2}}WS^{\frac{1}{2}}$ para alguna contracción W .

Teorema 63. Si T es un operador k -paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$, $0 \neq \lambda \in \sigma_p(T)$ y $T = \begin{bmatrix} \lambda & T_2 \\ O & T_3 \end{bmatrix}$ en $N(T - \lambda I) \oplus_{\perp} N(T - \lambda I)^{\perp}$, entonces

1. $T_2 \left(\frac{T_3}{\lambda} + \left(\frac{T_3}{\lambda} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{T_3}{\lambda} \right)^k \right) = kT_2$,
2. $\|T_3^{k+1}x\|^{\frac{2}{k+1}} \|x\|^{\frac{2k}{k+1}} \geq \|T_2x\|^2 + \|T_3x\|^2$ para cada $x \in N(T - \lambda I)^{\perp}$,
3. T_3 es k -paranormal en $N(T - \lambda I)^{\perp}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda = 1$. Si T es k -paranormal, entonces

$$T^{*k+1}T^{k+1} - (k+1)\mu^k T^*T + k\mu^{k+1} \geq O \text{ para todo } \mu > 0. \quad (2.9)$$

Por un cálculo sencillo, tenemos que

$$T^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T_2 \left(\sum_{i=0}^k T_3^i \right) \\ 0 & T_3^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$T^{*k+1}T^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T_2 \left(\sum_{i=0}^k T_3^i \right) \\ \left(\sum_{i=0}^k T_3^i \right)^* T_2^* & \left(\sum_{i=0}^k T_3^i \right)^* T_2^* T_2 \left(\sum_{i=0}^k T_3^i \right) + T_3^{*k+1} T_3^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Sea $\mu = 1$ en (2.9). Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &\leq T^{*k+1}T^{k+1} - (k+1)T^*T + k\mu \\ &= \begin{bmatrix} 0 & T_2 \left(\sum_{i=1}^k T_3^i - k \right) \\ \left(\sum_{i=1}^k T_3^i - k \right)^* T_2^* & Y \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $Y = \left(\sum_{i=0}^k T_3^i \right)^* T_2^* T_2 \left(\sum_{i=0}^k T_3^i \right) + T_3^{*k+1}T^{k+1} - (k+1)(T_2^*T_2 + T_3^*T_3) + k$. Luego, por el Lema 8, resulta que $\left(\sum_{i=0}^k T_3^i - k \right) = O$. Esto prueba la parte 1 del Teorema.

Ahora, probemos la parte 2 del Teorema. Si $T_3 = O$, entonces $T_2 = O$, por la parte 1. Si $T_3 \neq O$, entonces

$$T^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & (k+1)T_2 \\ 0 & T_3^{k+1} \end{bmatrix},$$

nuevamente, por la parte 1 del Teorema. Entonces

$$\begin{aligned} O &\leq T^{*k+1}T^{k+1} - (k+1)\mu^k T^*T + k\mu^{k+1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - (k+1)\mu^k + k\mu^{k+1} & (k+1)(1 - \mu^k)T_2 \\ (k+1)(1 - \mu^k)T_2^* & Y(\mu) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $Y(\mu) = (k+1)^2 T_2^* T_2 + T_3^{*k+1} T_3^{k+1} - (k+1)\mu^k (T_2^* T_2 + T_3^* T_3) + k\mu^{k+1}$. Por el Lema 8, para cada $\mu \neq 1$ existe una contracción $D(\mu)$ tal que $(k+1)(1 - \mu^k)T_2 = (1 - (k+1)\mu^k + k\mu^{k+1})^{\frac{1}{2}} D(\mu) Y(\mu)^{\frac{1}{2}}$. Esto implica que $Y(\mu)^{\frac{1}{2}} D(\mu)^* D(\mu) Y(\mu)^{\frac{1}{2}} = X(\mu)^{-1} (k+1)^2 (1 - \mu^k)^2 T_2^* T_2$, donde $X(\mu) = 1 - (k+1)\mu^k + k\mu^{k+1}$. Ahora, como $D(\mu)$ es una contracción, tenemos:

$$\begin{aligned} \langle Y(\mu)^{\frac{1}{2}} D(\mu)^* D(\mu) Y(\mu)^{\frac{1}{2}} x, x \rangle &= \langle D(\mu) Y(\mu)^{\frac{1}{2}} x, D(\mu) Y(\mu)^{\frac{1}{2}} x \rangle \\ &= \|D(\mu) Y(\mu)^{\frac{1}{2}} x\|^2 \\ &\leq \|Y(\mu)^{\frac{1}{2}} x\|^2 = \langle Y(\mu) x, x \rangle. \end{aligned}$$

Así, $Y(\mu) \geq Y(\mu)^{\frac{1}{2}} D(\mu)^* D(\mu) Y(\mu)^{\frac{1}{2}} = X(\mu)^{-1} (k+1)^2 (1 - \mu^k)^2 T_2^* T_2$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
T_3^{*k+1}T_3^{k+1} &= (k+1)\mu^k(T_2^*T_2 + T_3^*T_3) + k\mu^{k+1} \\
&= Y(\mu) - (k+1)^2T_2^*T_2 \\
&\geq X(\mu)^{-1}(k+1)^2(1-\mu^k)^2T_2^*T_2 - (k+1)^2T_2^*T_2 \\
&= \frac{(1-\mu^k)^2 - X(\mu)}{X(\mu)}(k+1)^2T_2^*T_2.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Sea $f(\mu) = (1-\mu^k)^2 - X(\mu)$ en $(0, \infty)$. Si $k = 1$, entonces $f(\mu) = 0$. Si $k \geq 2$, entonces $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$ y $f''(1) = k(k-1) > 0$. Luego, 0 es el mínimo de f , así que $f(\mu) \geq 0$ en $(0, \infty)$, y por lo tanto $\frac{(1-\mu^k)^2 - X(\mu)}{X(\mu)}(k+1)^2T_2^*T_2 \geq 0$. En consecuencia, de esta desigualdad y por (2.10) resulta que

$$T_3^{*k+1}T_3^{k+1} - (k+1)\mu^k(T_2^*T_2 + T_3^*T_3) + k\mu^{k+1} \geq 0, \tag{2.11}$$

para $\mu \neq 1$. Si $\mu \rightarrow 1$ en (2.11), entonces $T_3^{*k+1}T_3^{k+1} - (k+1)(T_2^*T_2 + T_3^*T_3) + k \geq 0$. Por lo tanto, (2.11) es cierto para todo $\mu > 0$. Esto prueba la parte 2 del Teorema. La parte 3 es consecuencia inmediata de la parte 2. ■

Teorema 64. Si T es un operador k -paranormal para un entero positivo k , $\lambda \in \sigma_p(T)$ y $T = \begin{bmatrix} \lambda & T_2 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix}$ en $N(T - \lambda I) \oplus_\perp N(T - \lambda I)^\perp$, entonces $N(T_3 - \lambda I) = \{0\}$.

Demostración. Notemos que si T es k -paranormal, $N(T) = N(T^{k+1})$. Sea $x \in N(T_3 - \lambda I)$. Si $\lambda = 0$, entonces

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_2x \\ T_3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_2x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que $Tx = T_2x \in N(T)$. Así, $x \in N(T^2) = N(T)$. En consecuencia, $x \in N(T) \cap N(T)^\perp = \{0\}$, y por lo tanto $N(T_3) = \{0\}$.

Si $\lambda \neq 0$, entonces $T_2x = 0$ (véase la parte 2 del Teorema 63). Por otro lado, como $(T - \lambda)x = T_2x$, tenemos que $\|(T - \lambda)x\| = \|T_2x\| = 0$. Esto implica que $x \in N(T - \lambda I) \cap N(T - \lambda I)^\perp = \{0\}$. Por lo tanto, $N(T_3 - \lambda I) = \{0\}$. ■

Lema 9. Sean M y N subespacios de H tales que $H = M \oplus_\perp N$. Sea $T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix}$ en $H = M \oplus_\perp N$. Entonces $\sigma(T_1) \cup \sigma(T_3) = \sigma(T) \cup \Delta$,

donde $\triangle$ es la unión de los agujeros de $\sigma(T)$ que son subconjuntos de $\sigma(T_1) \cap \sigma(T_3)$.

De la Proposición 1, $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$. Así, $H = \overline{R(T)} \oplus_\perp N(T^*)$, por el Teorema 9.

Teorema 65. Si T es un operador k -paranormal para algún k , T no tiene rango denso y T tiene la siguiente representación:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ O & T_3 \end{bmatrix}$$

en $H = \overline{R(T)} \oplus_\perp N(T^*)$, entonces T_1 es k -paranormal en $\overline{R(T)}$ y $T_3 = O$. Además, $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \{0\}$.

Demostración. Por un cálculo sencillo, tenemos que:

$$T^{k+1} = \begin{bmatrix} T_1^{k+1} & \sum_{i=0}^k T_1^i T_2 T_3^{k-i} \\ 0 & T_3^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$T^{*k+1} T^{k+1} = \begin{bmatrix} T_1^{*k+1} T_1^{k+1} & T_1^{*k+1} \left(\sum_{i=0}^k T_1^i T_2 T_3^{k-i} \right) \\ \left(\sum_{i=0}^k T_1^i T_2 T_3^{k-i} \right)^* T_1^{k+1} & A \end{bmatrix},$$

donde $A = \left(\sum_{i=0}^k T_1^i T_2 T_3^{k-i} \right)^* \left(\sum_{i=0}^k T_1^i T_2 T_3^{k-i} \right) + T_3^{*k+1} T_3^{k+1}$. Como T es k -paranormal, entonces

$$\begin{aligned} O &\leq T^{*k+1} T^{k+1} - (k+1)\mu^k T^* T + k\mu^{k+1} \\ &= \begin{bmatrix} T_1^{*k+1} T_1^{k+1} - (k+1)\mu^k T_1^* T_1 + k\mu^{k+1} & B \\ \left(\sum_{i=0}^k T_1^i T_2 T_3^{k-i} \right)^* T_1^{k+1} - (k+1)\mu^k T_2^* T_1 & C \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $B = T_1^{*k+1} \left(\sum_{i=0}^k T_1^i T_2 T_3^{k-i} \right) - (k+1)\mu^k T_1^* T_2$ y $C = A - (k+1)\mu^k (T_2^* T_2 + T_3^* T_3) + k\mu^{k+1}$. Luego, por el Lema 8, $T_1^{*k+1} T_1^{k+1} - (k+1)\mu^k T_1^* T_1 + k\mu^{k+1} \geq O$, esto es, T_1 es k -paranormal.

Sea P la proyección ortogonal sobre $\overline{R(T)}$. Para cada, $z = (x, y) \in H = \overline{R(T)} \oplus_{\perp} N(T^*)$,

$$\begin{aligned}\langle T_3 y, y \rangle &= \langle T_3(I - P)z, (I - P)z \rangle = \langle T(I - P)z, (I - P)z \rangle \\ &= \langle (I - P)z, T^*(I - P)z \rangle = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $T_3 = O$. Finalmente, probaremos que $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \{0\}$. Por el Lema 9, $\sigma(T_1) \cup \sigma(T_3) = \sigma(T) \cup \Delta$, donde Δ es la unión de ciertos de los agujeros en $\sigma(T)$ que resultan ser subconjuntos de $\sigma(T_1) \cap \sigma(T_3)$. Como T no tiene rango denso, entonces $0 \in \sigma(T)$, esto es, 0 no es un agujero de $\sigma(T)$. Ahora, como $\sigma(T_3) = \{0\}$, se tiene que $\Delta = \emptyset$. Por lo tanto, $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \{0\}$. ■

Corolario 2. Si $T \in B(H)$ es un operador k -paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$, M es un subespacio de H y T -invariante, entonces la restricción $T|_M$ es k -paranormal.

Demostración. Como M es T -invariante, entonces $T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix}$ en $M \oplus_{\perp} M^{\perp}$ y $T_1 = T|_M$ (véase la Proposición 2). Por los cálculos hechos en el Teorema 65, tenemos $T_1^{*k+1}T^{k+1} - (k+1)\mu^k T_1^* T_1 + k\mu^{k+1} \geq O$. Por lo tanto, T_1 es k -paranormal. ■

2.2.3. Propiedades espectrales

En esta parte mostramos que los valores propios no ceros de un operador que pertenece en la clase $A(k)$ son normales y damos un ejemplo de un operador de clase A que tiene a 0 como un valor propio no normal. Además, demostramos que los operadores k -paranormales son isoloides y que sus valores propios aislados no ceros son normales.

Diremos que un número complejo λ es un valor propio normal de $T \in B(H)$ si $N(\lambda I - T) \subseteq N(\bar{\lambda}I - T^*)$. Observemos que si λ es un valor propio normal de T , entonces $N(\lambda I - T)$ reduce a T . En efecto, si λ es un valor propio normal de T y $Tx = \lambda x$, entonces $T^*x = \bar{\lambda}x$. Así, $\lambda T^*x = \lambda \bar{\lambda}x = \bar{\lambda}\lambda x = \bar{\lambda}Tx = T\bar{\lambda}x = TT^*x$, en consecuencia $T^*x \in N(\lambda I - T)$. De esta manera $N(\lambda I - T)$ es T^* -invariante y como es claro que $N(\lambda I - T)$ también es T -invariante, concluimos que $N(\lambda I - T)$ reduce a T (véase el Teorema 20).

Probaremos que los valores propios no ceros de un operador que pertenece a la clase $A(k)$ son normales.

Teorema 66. Sea $T \in B(H)$ un operador de clase $A(k)$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Si $Tx = \lambda x$ para $\lambda \neq 0$ y $x \in H$, entonces $T^*x = \bar{\lambda}x$.

Demostración. Supongamos que T es clase $A(k)$. Usando las desigualdades de Hölder-McCarthy y de Schwarz, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\lambda|^2 \|x\|^2 &= \|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x \rangle \\
&\leq \langle |T^{k+1}|^{\frac{2}{k+1}} x, x \rangle \\
&\leq \langle |T^{k+1}| x, x \rangle^{\frac{2}{k+1}} \|x\|^{\frac{2(k-1)}{k+1}} \\
&\leq \| |T^{k+1}| x \|^{\frac{2}{k+1}} \|x\|^{\frac{2k}{k+1}} \\
&= (|\lambda|^{2(k+1)} \|x\|^2)^{\frac{1}{k+1}} \|x\|^{\frac{2k}{k+1}} \\
&= |\lambda|^2 \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $|\lambda|^2 \langle x, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \langle |T^{k+1}|^{\frac{2}{k+1}} x, x \rangle$. Ahora, como $|T^{k+1}|^{\frac{2}{k+1}} x$ y x son linealmente dependientes, entonces $|T^{k+1}|^{\frac{2}{k+1}} x = |\lambda|^2 x$. Por otro lado, puesto que $\|(|T^{k+1}|^{\frac{2}{k+1}} - T^*T)^{\frac{1}{2}} x\|^2 = \langle (|T^{k+1}|^{\frac{2}{k+1}} - T^*T)x, x \rangle = 0$, resulta que $T^*Tx = |T^{k+1}|^{\frac{2}{k+1}} x = |\lambda|^2 x$. Por lo tanto, $\lambda T^*x = \lambda \bar{\lambda}x$, es decir, $T^*x = \bar{\lambda}x$. ■

A continuación probaremos que los valores espectrales aislados de un operador k -paranormal son valores propios. De paso también demostraremos que el Teorema previo no es cierto si $\lambda = 0$, es decir, si T de clase $A(k)$ y $Tx = 0$ no implica que $T^*x = 0$.

Lema 10. Supongamos que $T \in B(X)$ es invertible y que $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|T^n\| < \infty$. Entonces $\sigma(T) = \{1\}$ si y sólo si $T = I$ es el operador identidad.

Teorema 67. Si $T \in B(H)$ es un operador k -paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$ y $\sigma(T) = \{\lambda\}$ para $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $T = \lambda I$.

Demostración. Si $\lambda = 0$, entonces $T = O$, ya que T es normaloide. Supongamos que $\lambda \neq 0$ y que $S = \frac{1}{\lambda}T$. Por el Teorema de la aplicación espectral, resulta que $\sigma(S) = \{1\}$, y por lo tanto T es invertible. Ahora, como T es normaloide, entonces S es un operador normaloide (los operadores normaloides son cerrados bajo multiplicación por escalares no ceros) y $\sigma(S^{-1}) = \{1\}$. Luego, $\|S\| = r(S) = 1 = r(S^{-1}) = \|S^{-1}\|$, esto implica que $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|S^n\| \leq 1$. Aplicando el Lema 10, se sigue que $S = I$. En consecuencia, $T = \lambda I$. ■

Teorema 68. Si $T \in B(H)$ es un operador k -paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$, entonces $R(P) = N(T - \lambda I)$, donde P es la proyección espectral de T asociada con λ .

Demostración. Es suficiente probar que $R(P) \subseteq N(T - \lambda I)$, puesto que la contención contraria es cierta para cualquier operador, por el Teorema 42. Como $R(P)$ es un subespacio de X y T -invariante, entonces $T|_{R(P)}$ es k -paranormal, por el Corolario 2. Ahora, como $\sigma(T|_{R(P)}) = \{\lambda\}$, entonces $T|_{R(P)} = \lambda I$, por el Teorema 67. Por lo tanto, $R(P) \subseteq N(T - \lambda I)$. ■

Un operador $T \in B(X)$ es *isolóide* si todos los puntos aislados de $\sigma(T)$ son valores propios de T .

Corolario 3. Si $T \in B(H)$ es k -paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces T es *isolóide*.

Demostración. Sean $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$ y P la proyección espectral de T asociada con λ . Por el Teorema 68, $R(P) = N(\lambda I - T)$. Luego, por el Corolario 1, tenemos que $N(\lambda I - T) \neq \{0\}$. Por lo tanto, λ es un valor propio de T . Así, T es *isolóide*. ■

El siguiente ejemplo muestra que existen operadores $T \in B(H)$ que pertenecen a la clase A tales que si 0 es valor propio de T y si $Tx = 0$ no implica que $T^*x = 0$, es decir, $N(T) \not\subseteq N(T^*)$. En consecuencia, los valores propios ceros de un operador que pertenece a la clase A no necesariamente son normales.

Ejemplo 12. Sean U el operador de desplazamiento a derecha en l_2 , $A = 2 + U$ y $S = (A^*A - AA^*)^{\frac{1}{2}}$. Si

$$T = \begin{bmatrix} A & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

en $H = l_2 \oplus l_2$, entonces T es de clase A y $R(P) = N(T) \not\subseteq N(T^*)$, donde P es la proyección espectral de T asociada con 0 . Por supuesto, con abuso de notación, estamos suponiendo que l_2 es $l_2 \times \{0\}$ en el lado izquierdo y $\{0\} \times l_2$ en el lado derecho en la representación de H como una suma directa ortogonal, respectivamente.

Puesto que U es una isometría, entonces $A^*A - AA^* = I - UU^* \geq 0$. Así, S está bien definido. Veamos que T pertenece a la clase A . Sea $R = T^{*2}T^2 - (T^*T)^2$. Por un cálculo simple tenemos:

$$\begin{aligned}
R &= \begin{bmatrix} A^{*2}A^2 - (A^*A)^2 - A^*S^2A & A^{*2}AS - A^*AA^*S - A^*S^3 \\ SA^*A^2 - SAA^*A - S^3A & SA^*AS - SAA^*S - S^4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A^*(A^*A - AA^*)A - A^*S^2A & A^{*2}(A^*A - AA^*)S - A^*S^3 \\ S(A^*A - AA^*)A - S^3A & S(A^*A - AA^*)S - S^4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A^*S^2A - A^*S^2A & A^*S^2S - A^*S^3 \\ SS^2A - S^3A & SS^2S - S^4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} O & O \\ O & O \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $|T^2| - |T|^2 = O$, es decir, T es de clase A . Finalmente, veamos que $N(T) \not\subseteq N(T^*)$. Los núcleos de T y T^* son:

$$N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -(2+U)^{-1}Sy \\ y \end{pmatrix} : y \in l_2 \right\} \text{ y } N(T^*) = \{0\} \oplus l_2,$$

respectivamente. Además, $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp = l_2 \oplus \{0\}$, que no es denso en H . Por otra parte, sabemos que $\sigma(U) = \mathbb{D}(0, 1)$ es el disco cerrado con centro en el origen y de radio 1 (véase el Ejemplo 1). Si $p(\lambda) = 2 + \lambda$ es un polinomio, entonces $A = p(U)$ y $\sigma(A) = p(\sigma(U)) = \mathbb{D}((2, 0), 1)$ es el disco cerrado con centro en $(2, 0)$ y de radio 1. Luego, por el Teorema 65, resulta que $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \{0\} = \mathbb{D}((2, 0), 1) \cup \{0\}$. Así, 0 es un punto aislado de $\sigma(T)$. La proyección espectral de T asociada con 0 es:

$$P = \begin{bmatrix} O & X \\ O & 1 \end{bmatrix},$$

donde $X(x_1, x_2, x_3 \dots) = (-\frac{1}{2}x_1, (-\frac{1}{2})^2x_1, (-\frac{1}{2})^3x_1, \dots)$. Por lo tanto, $R(P) = N(T) \not\subseteq N(T^*)$ (véase el Teorema 68) y P no es auto-adjunto.

Finalizamos esta sección probando que los valores propios aislados no ceros de un operador k -paranormal son normales.

Teorema 69. *Sea $T \in B(H)$ un operador k -paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$ y sea $\lambda \neq 0$ un punto aislado de $\sigma(T)$. Si $Tx = \lambda x$, entonces $T^*x = \bar{\lambda}x$, más aún, $N(T - \lambda I) = N(T^* - \bar{\lambda}I)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda = 1$. Sea $T = \begin{bmatrix} 1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix}$ en $N(T - \lambda I) \oplus_\perp N(T - \lambda I)^\perp$. Por el Teorema 63, resulta que $T_2(T_3 + T_3^2 + \dots + T_3^k - kI) = O$ y T_3 es k -paranormal. Como $1 \in \text{iso}\sigma(T)$, entonces $1 \in \text{iso}\sigma(T_3)$ o $1 \notin \sigma(T_3)$. Si $1 \in \text{iso}\sigma(T_3)$, entonces

$1 \in \sigma_p(T_3)$, ya que T_3 es isoloide, que contradice que $N(T_3 - \lambda I) = \{0\}$ (veáse el Teorema 64). Por lo tanto, $1 \notin \sigma(T_3)$. Así, $p(1) \notin \sigma(p(T_3))$, donde $p(t) = t + t^2 + \dots + t^k$ es un polinomio. En consecuencia, $T_3 + T_3^2 + \dots + T_3^k - kI$ es invertible, y como $T_2(T_3 + T_3^2 + \dots + T_3^k - kI) = O$, resulta que $T_2 = O$. Por lo tanto, $T - I = 0 \oplus (T_3 - I)$ en H . Puesto que $T_3 - I$ es invertible, entonces $N(T - I) = N(T^* - I)$. ■

Un operador T es totalmente paranormal si $\lambda I - T$ es paranormal para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Es claro que los operadores totalmente paranormales son paranormales, y por el Teorema 58, todo operador hiconormal es totalmente paranormal.

2.3. Operadores k -*-paranormales

En esta parte probamos que si T es k -*-paranormal, sus valores propios son normales, tiene la SVEP y es isoloide. Cabe señalar que los resultados aquí expuestos son resultados originales de [20] y de [13].

Definición 28. Sea $T \in B(H)$. Diremos que:

- (a) T es *-clase A si $|T^*|^2 \leq |T^2|$.
- (b) T es *-clase $A(k)$ si $|T^*|^2 \leq |T^{k+1}|^{\frac{2}{k+1}}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Si $k = 1$, entonces *-clase $A(k)$ coincide con *-clase A .
- (c) T es *-paranormal si $\|T^*x\| \leq \|T^2x\|\|x\|$ para cada $x \in H$.
- (d) T es k -*-paranormal si $\|T^*x\|^{k+1} \leq \|T^{k+1}x\|\|x\|^k$ para cada $x \in H$ y para algún $k \in \mathbb{N}$. Nótese que si $k = 1$, entonces T es *-paranormal.

Las siguientes implicaciones son ciertas:

$$\begin{aligned} \text{hiconormal} &\Rightarrow * - \text{clase } A \Rightarrow * - \text{paranormal} \Rightarrow k - * - \text{paranormal} \\ &\Rightarrow \text{normaloide, y} \end{aligned}$$

$$* - \text{clase } A(k) \Rightarrow k - * - \text{paranormal}$$

Omitiremos las pruebas de estas implicaciones, ya que son similares a las pruebas de los Teoremas 60 y 61.

Por el Teorema 62, T es paranormal si y sólo si $T^{*2}T^2 - 2\mu TT^* + \mu^2 \geq O$ para todo $\mu > 0$. Análogamente, T es *-paranormal si y sólo si $T^{*2}T^2 - 2\mu T^*T + \mu^2 \geq O$ para todo $\mu > 0$. El siguiente ejemplo muestra que existen operadores *-paranormales que no son paranormales.

Ejemplo 13. Sea T en l_2 definido por $T(x) = (0, \sqrt{2}x_1, x_2, 2x_3, 2x_4, \dots)$ para cada $x = \{x_n\} \in l_2$. Entonces, para cada $x = \{x_n\} \in l_2$,

$$T^{2*}T^2(x) = (2x_1, 4x_2, 16x_3, 16x_4, \dots), \quad TT^*(x) = (0, 2x_2, x_3, 4x_4, 4x_5, \dots)$$

y $T^*T(x) = (2x_1, x_2, 4x_3, 4x_4, \dots)$. Sea $X(\mu) = T^{*2}T^2 - 2\mu TT^* + \mu^2$ y $Y(\mu) = T^{*2}T^2 - 2\mu T^*T + \mu^2$ para $\mu > 0$. De esta manera, tenemos que:

$$\begin{aligned} X(\mu)(x) &= ((2 + \mu^2)x_1, (4 - 4\mu + \mu^2)x_2, (16 - 2\mu + \mu^2)x_3, \\ &\quad (16 - 8\mu + \mu^2)x_4, (16 - 8\mu + \mu^2)x_5, \dots) \\ &= ((2 + \mu^2)x_1, (\mu - 2)^2x_2, [(\mu - 1)^2 + 15]x_3, \\ &\quad (\mu - 4)^2x_4, (\mu - 4)^2x_5, \dots), \end{aligned}$$

para todo $\mu > 0$. De lo cual se sigue que $X(\mu) > 0$ para todo $\mu > 0$. Por lo tanto, T es $*$ -paranormal. Sin embargo, como

$$\begin{aligned} Y(\mu)(x) &= ((2 - 4\mu + \mu^2)x_1, (4 - 2\mu + \mu^2)x_2, (16 - 8\mu + \mu^2)x_3, \\ &\quad (16 - 8\mu + \mu^2)x_4, (16 - 8\mu + \mu^2)x_5, \dots) \\ &= ([(\mu - 2)^2 - 2]x_1, [(\mu - 1)^2 + 3]x_2, (\mu - 4)^2x_3, \\ &\quad (\mu - 4)^2x_4, (\mu - 4)^2x_5, \dots), \end{aligned}$$

entonces $Y(\mu) \not\geq 0$ para $\mu = 2$. En consecuencia, T no es paranormal.

Teorema 70. Sea $T \in B(H)$ k - $*$ -paranormal. Si $Tx = \lambda x$, entonces $T^*x = \bar{\lambda}x$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración. Como T es k - $*$ -paranormal, entonces $\|T^{k+1}x\|^{\frac{1}{k+1}} \geq \|T^*x\|$ para cada vector unitario $x \in H$. Si $Tx = \lambda x$, entonces $|\lambda|^2 = \|T^{k+1}x\|^{\frac{2}{k+1}} \geq \|T^*x\|^2$. Por lo tanto, $\langle (T - \lambda)^*x, (T - \lambda)^*x \rangle = \|T^*x\|^2 - \langle x, \bar{\lambda}Tx \rangle - \langle \bar{\lambda}Tx, x \rangle + |\lambda|^2 \leq |\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$. De esta manera, $\|T^*x - \bar{\lambda}x\| = 0$, y por lo tanto $T^*x = \bar{\lambda}x$. ■

El Teorema 70, en particular, muestra que el operador del Ejemplo 12 no es $*$ -paranormal. Por lo tanto, de esta observación y del Ejemplo 13, tenemos que los operadores k - $*$ -paranormales y k -paranormales son independientes.

Teorema 71. Si T es k - $*$ -paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces T tiene la SVEP.

Demostración. Por el Teorema 70, tenemos que $N(\lambda I - T) \subseteq N(\bar{\lambda}I - T^*)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Demostremos por inducción que $N(\lambda I - T) = N((\lambda I - T)^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $N(\lambda I - T) = N((\lambda I - T)^n)$

para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in N((\lambda I - T)^{n+1})$. Entonces $(\lambda I - T)^{n+1}x = 0$, y en consecuencia $(\lambda I - T)x \in N((\lambda I - T)^n)$. Luego, por hipótesis de inducción, resulta que $(\lambda I - T)x \in N(\lambda I - T)$. De esta manera, $(\lambda I - T)^*(\lambda I - T)x = 0$. Así, $\|(\lambda I - T)x\|^2 = \langle (\lambda I - T)^*(\lambda I - T)x, x \rangle = 0$. En consecuencia, $(\lambda I - T)x = 0$. Esto demuestra que $N((\lambda I - T)^{n+1}) \subseteq N(\lambda I - T)$, y por lo tanto, $N(\lambda I - T) = N((\lambda I - T)^{n+1})$, ya que la contención contraria siempre es cierta. Por lo tanto, $p(\lambda I - T) < \infty$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego, por el Teorema 38, T tiene la SVEP. ■

Teorema 72. *Si T es k -*-paranormal para algún $n \in \mathbb{N}$ y $\sigma(T) = \{\lambda\}$, entonces $T = \lambda I$.*

Demostración. Si T es k -*-paranormal, entonces T es normaloide. Ahora, siguiendo la prueba del Teorema 67, se obtiene que $T = \lambda I$. ■

Al igual que los operadores k -paranormales, también tenemos que la restricción de un operador k -*-paranormal a un subespacio invariante también es k -*-paranormal y su prueba es similar a la prueba del Corolario 2.

Teorema 73. *Si $T \in B(H)$ es un operador k -*-paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$, entonces $R(P) = N(T - \lambda I)$, donde P es la proyección espectral de T asociada con λ .*

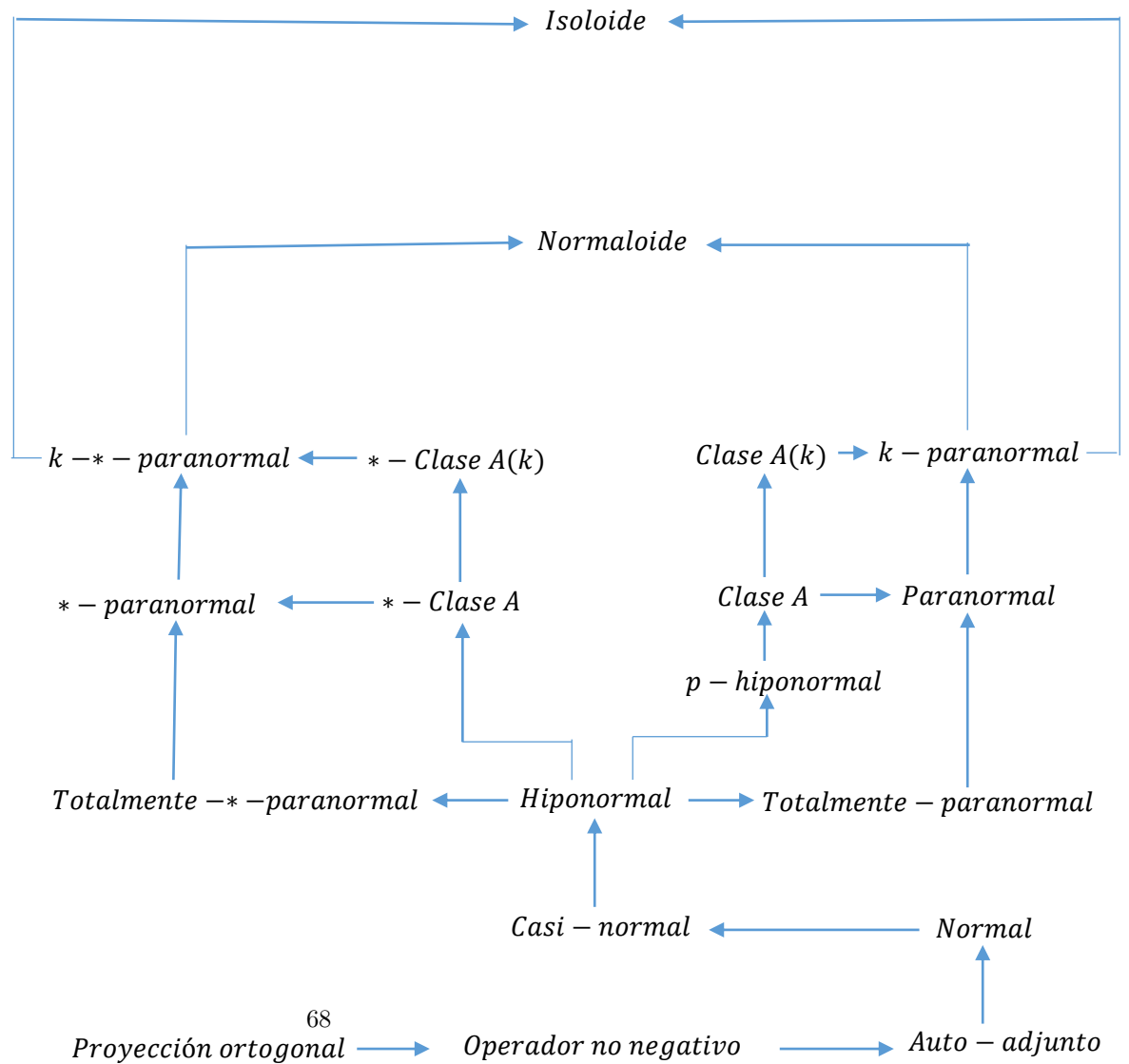
Demostración. Es suficiente probar que $R(P) \subseteq N(T - \lambda I)$, por el Teorema 42. Como $R(P)$ es un subespacio de H y T -invariante, entonces $T|_{R(P)}$ es k -*-paranormal. Ahora, como $\sigma(T|_{R(P)}) = \{\lambda\}$, entonces $T|_{R(P)} = \lambda I$ (véase el Teorema 72). Por lo tanto, $R(P) \subseteq N(T - \lambda I)$. ■

Corolario 4. *Si T es k -*-paranormal, entonces T es isoloide.*

Demostración. Supongamos que T es k -*-paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$. Sean $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$ y P la proyección espectral de T asociada con λ . Por el Teorema 73, $R(P) = N(\lambda I - T)$. Luego, por el Corolario 1, tenemos que $N(\lambda I - T) \neq \{0\}$. Por lo tanto, λ es un valor propio de T . ■

Un operador T es totalmente *-paranormal si $\lambda I - T$ es *-paranormal para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Es claro que los operadores totalmente *-paranormales son *-paranormales, y por el Teorema 58, todo operador hiponormal es totalmente *-paranormal.

Figura 2.1: El siguiente diagrama muestra las relaciones existentes entre las clases de operadores introducidas en este capítulo.



Capítulo 3

Proyección espectral, teorema de la aplicación espectral y el teorema de Weyl

En este capítulo estudiamos las proyecciones espectrales de operadores k -paranormales y k -*-paranormales. Este problema de determinar puntos aislados λ de $\sigma(T)$ tal que la proyección espectral P sea auto-adjunta ha sido considerado por un número de autores, véase por ejemplo [20], [19], [8], [9] y [23]. También estudiamos el Teorema de la aplicación espectral para los espectros introducidos en la sección 1.6 y el Teorema de Weyl para clases de operadores en los espacios de Hilbert. Esta última propiedad es el objetivo principal del presente trabajo.

3.1. Proyección espectral para clases de operadores en los espacios de Hilbert

En esta sección, probamos un resultado que da condiciones bajo las cuales la proyección espectral de un operador arbitrario T asociada a un valor espectral aislado λ es auto-adjunta y tal que $R(P) = N(\lambda I - T) = N(\bar{\lambda}I - T^*)$. Como aplicación de éste, probamos que si T es k -paranormal y $0 \neq \lambda \in \text{iso}\sigma(T)$, entonces la proyección espectral de T asociada con λ es auto-adjunta. También probamos que si T es k -*-paranormal

y $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$, entonces la proyección espectral de T asociada con λ es auto-adjunta.

Recordemos que un valor propio $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$ es un polo simple del resolvente de T si $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) = 1$. Nótese que por el Teorema 36, tenemos que λ es un polo simple del resolvente de T si y sólo si $X = N(\lambda I - T) \oplus R(\lambda I - T)$.

Teorema 74. Sean $T \in B(H)$ y $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$. Si λ es un polo simple del resolvente de T y normal, entonces la proyección espectral P de T asociada con λ es auto-adjunta y $R(P) = N(T - \lambda I) = N(T^* - \bar{\lambda}I)$.

Demostración. Sean $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$ un polo simple del resolvente $R(\lambda, T)$ y P la proyección espectral de T asociada con λ . Por el Teorema 42 y Teorema 41, tenemos que $R(P) = N(T - \lambda I)$, $N(P) = R(T - \lambda I)$, $\sigma(T|_{R(P)}) = \{\lambda\}$ y $\sigma(T|_{N(P)}) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$. En particular,

$$H = N(T - \lambda I) \oplus R(T - \lambda I)$$

y $T|_{N(P)} - \lambda I|_{N(P)}$ es invertible. Como $N(T - \lambda I)$ es un subespacio de H y T -invariante, por la Proposición 2, T tiene la siguiente representación:

$$T = \begin{bmatrix} T|_{R(P)} & S \\ O & T|_{N(P)} \end{bmatrix} \text{ en } H = N(T - \lambda I) \oplus R(T - \lambda I).$$

Notemos que $x = (x_1, x_2) \in N(T - \lambda I)$ si y sólo si $(T|_{N(P)} - \lambda I|_{N(P)})x_2 = 0$, $(T|_{R(P)} - \lambda I|_{R(P)})x_1 + Sx_2 = 0$ si y sólo si $x_1 \in N(T|_{R(P)} - \lambda I|_{R(P)})$ y $x_2 = 0$, ya que $T|_{N(P)} - \lambda I|_{N(P)}$ es invertible. Usemos esta observación para probar que $S = O$. Sea $x_1 \in N(T|_{R(P)} - \lambda I|_{R(P)})$, entonces $x = (x_1, 0) \in N(T - \lambda I)$, por hipótesis, $x \in N(T^* - \bar{\lambda}I)$ (λ es un valor propio normal del operador T). En consecuencia, $S^*x_1 = 0$ para todo $x_1 \in N(T|_{R(P)} - \lambda I|_{R(P)})$, de lo cual $S^* = O$ y por lo tanto $S = O$.

También observemos que para cada $x \in N(T - \lambda I)$, $Tx = \lambda x$. Así, $T|_{R(P)} = \lambda I|_{R(P)}$. Por lo tanto, T y T^* tienen la siguiente representación:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & O \\ O & T|_{N(P)} \end{bmatrix} \text{ y } T^* = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} & O \\ O & (T|_{N(P)})^* \end{bmatrix}$$

en $H = N(T - \lambda I) \oplus R(T - \lambda I)$.

Veamos que $N(T^* - \bar{\lambda}I) \subseteq N(T - \lambda I)$. Sea $x = (x_1, x_2) \in H$ tal que $(T^* - \bar{\lambda}I)x = 0$. Entonces $0 = (T^* - \bar{\lambda}I)x = (0, (T|_{N(P)} - \lambda I|_{N(P)})^*x_2)$. Así que $(T|_{N(P)} - \lambda I|_{N(P)})^*x_2 = 0$, y como $T|_{N(P)} - \lambda I|_{N(P)}$ es invertible,

resulta que $x_2 = 0$. Por lo tanto, $x = (x_1, 0)$ y $(T - \lambda I)x = 0$. Esto prueba que $N(T^* - \bar{\lambda}I) \subseteq N(T - \lambda I)$. Por lo tanto, $N(T - \lambda I) = N(T^* - \bar{\lambda}I)$.

Finalmente, probemos que P es auto-adjunta. De la Proposición 1, tenemos que $R(T - \lambda I) = N(T^* - \bar{\lambda}I)^\perp$, y puesto que $N(T^* - \bar{\lambda}I) = N(T - \lambda I)$, resulta que $R(T - \lambda I) = N(T - \lambda I)^\perp$. En consecuencia, $N(P) = R(T - \lambda I) = N(T - \lambda I)^\perp = R(P)^\perp$. Así, $R(P) \perp N(P)$. En consecuencia, P es una proyección ortogonal. Por lo tanto, P es auto-adjunta. ■

Un operador $T \in B(X)$ se dice que es polaroide si $iso\sigma(T)$ es vacío o todo punto aislado de $\sigma(T)$ es un polo del resolvente de T .

Teorema 75. *Un operador $T \in B(X)$ es polaroide si y sólo si existe $p = p(\lambda)$ tal que $H_0(\lambda I - T) = N((\lambda I - T)^p)$ para todo $\lambda \in iso\sigma(T)$.*

Demostración. Supongamos que T es polaroide y λ es un punto aislado de $\sigma(T)$. Por definición de un operador polaroide, λ es un polo del resolvente de T y si p es su orden, entonces $H_0(\lambda I - T) = N((\lambda I - T)^p)$, por el Teorema 42.

Recíprocamente, supongamos que existe $p = p(\lambda)$ ($p \in \mathbb{N}$) tal que $H_0(\lambda I - T) = N((\lambda I - T)^p)$ para todo $\lambda \in iso\sigma(T)$. Puesto que $\lambda \in iso\sigma(T)$ (véase el Teorema 42), resulta que:

$$X = H_0(\lambda I - T) \bigoplus K(\lambda I - T) = N((\lambda I - T)^p) \bigoplus K(\lambda I - T).$$

Ahora, aplicando el Teorema 29, se obtiene que:

$$(\lambda I - T)^p(X) = O \bigoplus (\lambda I - T)^p(K(\lambda I - T)) = K(\lambda I - T).$$

Por lo tanto,

$$X = N((\lambda I - T)^p) \bigoplus (\lambda I - T)^p(X).$$

Luego, por el Teorema 36, $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) \leq p$. Además, puesto que $\lambda \in \sigma(T)$, tenemos que $p(\lambda I - T) > 0$. En caso contrario, $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) = 0$, esto implica que $\lambda I - T$ es invertible, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Por lo tanto, por el Teorema 37, λ es un polo del resolvente de T , es decir, T es polaroide. ■

A continuación aplicaremos el Teorema 74 para clases de operadores en los espacios de Hilbert.

Teorema 76. *Si $T \in B(H)$ es k -paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces T es polaroide. Además, si $\lambda \in iso\sigma(T)$, entonces λ es un polo simple del resolvente de T .*

Demostración. Sean $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$ y P la proyección espectral de T asociada con λ . Por el Teorema 42, $R(P) = H_0(\lambda I - T)$, y por el Teorema 68, $R(P) = N(\lambda I - T)$. Por lo tanto, $H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)$. Ahora, aplicando el Teorema 75, obtenemos que T es polaroide. Por otro lado, como $H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)$, siguiendo la prueba del Teorema 75, se tiene que $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) = 1$, esto implica que λ es un polo simple del resolvente de T . ■

Sabemos que existen operadores T que pertenece a la clase A tales que su proyección espectral P asociada a un valor propio aislado $\lambda = 0$ no es auto-adjunta y que $R(P) = N(T) \not\subseteq N(T^*)$ (véase el Ejemplo 12). Vamos a probar que para los valores espectrales no ceros se cumple que P es auto-adjunta y, además, se da la igualdad $N(\lambda I - T) = N(\bar{\lambda}I - T^*)$.

Corolario 5. *Sean $T \in B(H)$ y $0 \neq \lambda \in \text{iso}\sigma(T)$. Si T es k -parnormal para algún $k \in \mathbb{N}$ y P es la proyección espectral de T asociada con λ , entonces P es auto-adjunta y $R(P) = N(\lambda I - T) = N(\bar{\lambda}I - T^*)$.*

Demostración. Si T es k -paranormal y $0 \neq \lambda \in \text{iso}\sigma(T)$, entonces λ es un polo simple del resolvente de T (véase el Teorema 76). Además, por el Teorema 69, resulta que λ es un valor propio normal de T . Por lo tanto, aplicando el Teorema 74, concluimos que P es auto-adjunta y $R(P) = N(\lambda I - T) = N(\bar{\lambda}I - T^*)$. ■

Teorema 77. *Si $T \in B(H)$ es k -*-paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces T es polaroide. Además, si $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$, entonces λ es un polo simple del resolvente de T .*

Demostración. Sean $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$ y P la proyección espectral de T asociada con λ . Por el Teorema 42, $R(P) = H_0(\lambda I - T)$, y por el Teorema 73, $R(P) = N(\lambda I - T)$. Por lo tanto, $H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)$, y por el Teorema 75 se sigue que T es polaroide. Por otro lado, como $H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)$, siguiendo la prueba del Teorema 75, se tiene que $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) = 1$, esto implica que λ es un polo simple del resolvente de T . ■

Corolario 6. *Sean $T \in B(H)$ y $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$. Si T es k -*-parnormal para algún $k \in \mathbb{N}$ y P es la proyección espectral de T asociada con λ , entonces P es auto-adjunta y $R(P) = N(\lambda I - T) = N(\bar{\lambda}I - T^*)$.*

Demostración. Si T es k -*-paranormal y $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$, entonces λ es un polo simple del resolvente de T , por el Teorema 77. Además, por el Teorema 70, λ es un valor propio normal de T . Por lo tanto, aplicando el

Teorema 74, concluimos que P es auto-adjunta y $R(P) = N(\lambda I - T) = N(\bar{\lambda}I - T^*)$. ■

3.2. Teoremas de la aplicación espectral

En esta parte mostramos que el Teorema de la aplicación espectral es cierto para muchos de los espectros introducidos en la sección 1.6. Empezamos con un resultado preliminar, probando que el Teorema de la aplicación espectral es cierto para el espectro generado por Φ -semigrupos en álgebras de Banach abstracto. Este resultado proporciona una herramienta unificadora con el fin de establecer el Teorema de la aplicación espectral para algunos de los espectros introducidos en la sección antes mencionada.

Sea A un álgebra de Banach complejo con identidad e y J un ideal (véase la definición 23) en A . Sea ϕ el homomorfismo canónico de A sobre $\hat{A} = A/J$. Además, denotemos por $\hat{G}$ el grupo de todos los elementos invertibles de $\hat{A}$.

Para cada $a \in A$, el espectro de a es definido por $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \text{ no es invertible en } A\}$, y es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ tal que $\sigma(a) \subseteq U$. Entonces, se define el operador $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e - a)^{-1} d\lambda$, donde Γ es como en la definición 18. Si $\sigma(T)$, $B(X)$ y $f(T)$ son remplazados por $\sigma(a)$, A y $f(a)$ en el Teorema 32, respectivamente, entonces los incisos (a)-(f) de tal Teorema siguen siendo válidos.

Definición 29. Un semigrupo abierto S de un álgebra de Banach A es un Φ -semigrupo si satisface las siguientes propiedades:

- (i) Si $a, b \in A$ y $ab = ba \in S$, entonces $a \in S$ y $b \in S$;
- (ii) Existe un ideal J y un semigrupo abierto $\hat{R}$ en $\hat{A} = A/J$ tales que $\hat{G} \subseteq \hat{R}$, $\hat{R} \setminus \hat{G}$ es abierto y $S = \phi^{-1}(\hat{R})$.

Observemos que un Φ -semigrupo S contiene todos los elementos invertibles de A y $S + J \subseteq S$. Un índice en un Φ -semigrupo S es definido como un homomorfismo de semigrupos localmente constante de J en $\mathbb{Z}$. Así, si $i : S \rightarrow \mathbb{Z}$ es un índice, entonces $i(a+b) = i(a)$ para todo $a \in S$ y $b \in J$.

Para cada $T \in B(X)$, $B(T, \epsilon)$ denota la bola en $B(X)$ con centro en el punto T y de radio ϵ .

Ejemplo 14. $\Phi(X)$, $\Phi_+(X)$ y $\Phi_-(X)$ son Φ -semigrupos de $B(X)$.

Por el Teorema 47, tenemos que $\Phi(X)$, $\Phi_+(X)$ y $\Phi_-(X)$ son semigrupos abiertos en $B(X)$. Ahora, tomemos $S, T \in B(X)$ tales que $ST = TS \in \Phi(X)$, entonces $ST = TS \in \Phi_+(X)$ y $ST = TS \in \Phi_-(X)$. Así, por las partes (d) y (e) del Teorema 46, se tiene que $S, T \in \Phi_+(X)$ y $S, T \in \Phi_-(X)$, esto implica que $S, T \in \Phi(X) = \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X)$. Por lo tanto, $\Phi(X)$ satisface la condición (i) de la definición 29. De manera similar se obtiene que $\Phi_+(X)$ y $\Phi_-(X)$ también satisface la condición (i).

Recordemos que $K(X)$ es un ideal de $B(X)$. Sea $\hat{A} = B(X)/K(X)$ y denotemos por $\hat{G}$ el conjunto de todos los elementos invertibles de $\hat{A}$. Sabemos que $\hat{G}$ es un semigrupo abierto en $\hat{A}$. Además, por el Teorema 45, $\Phi(X) = \phi^{-1}(\hat{G})$. Así, $\Phi(X)$ también satisface la condición (ii). Por lo tanto, $\Phi(X)$ es un Φ -semigrupo de $B(X)$.

Ahora, veamos que $\Phi_+(X)$ también satisface la condición (ii). Sea $\hat{R} = \phi(\Phi_+(X))$. Claramente, $\hat{R}$ es semigrupo, y como ϕ es una aplicación abierta, tenemos que $\hat{R}$ es abierto en $\hat{A}$. En consecuencia, $\hat{R}$ es un semigrupo abierto de $\hat{A}$.

Afirmamos que $\hat{R} \setminus \hat{G} = \phi(\Phi_+(X) \setminus \Phi(X))$. Sea $\hat{T} \in \phi(\Phi_+(X) \setminus \Phi(X))$, entonces $\hat{T} = \phi(T)$ para algún $T \in \Phi_+(X)$ tal que $T \notin \Phi(X)$. Así, por el Teorema 45, $\hat{T} = \phi(T)$ para algún $T \in \Phi_+(X)$ tal que $\hat{T} \notin \hat{G}$, esto implica que $\hat{T} \in \hat{R} \setminus \hat{G}$. Esto prueba que $\phi(\Phi_+(X) \setminus \Phi(X)) \subseteq \hat{R} \setminus \hat{G}$. Por lo tanto,

$$\hat{R} \setminus \hat{G} = \phi(\Phi_+(X) \setminus \Phi(X)), \quad (3.1)$$

ya que la contención contraria siempre es cierta. Observemos que

$$\Phi_+(X) \setminus \Phi(X) = \{T \in \Phi_+(X) : \text{ind}(T) = -\infty\}$$

es abierto. En caso contrario, para cada $\epsilon > 0$ existe $T \in \Phi_+(X) \setminus \Phi(X)$ tal que $B(T, \epsilon) \not\subseteq \Phi_+(X) \setminus \Phi(X)$. Entonces existe $S \in B(T, \epsilon)$ tal que $S \notin \Phi_+(X) \setminus \Phi(X)$. En consecuencia, $S \in \Phi(X)$ o $S \notin \Phi(X)$. Si $S \in \Phi(X)$, entonces $S \in \Phi_+(X)$ lo cual es imposible. Si $S \notin \Phi(X)$, entonces $\|S - T\| < \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, tenemos que $S = T$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\Phi_+(X) \setminus \Phi(X)$ es abierto. De la igualdad (3.1) y teniendo en cuenta que ϕ es un homomorfismo abierto, tenemos que $\hat{R} \setminus \hat{G}$ es abierto. Finalmente, notemos que $\Phi_+(X) = \phi^{-1}(\hat{R})$. En efecto, por el Teorema 48, se sigue que $\Phi_+(X) \subseteq \phi^{-1}(\hat{R}) = \Phi_+(X) + K(X) \subseteq \Phi_+(X)$. Así, $\Phi_+(X)$ satisface la condición (ii) de la definición 29. Por lo tanto, $\Phi_+(X)$ es un Φ -semigrupo de $B(X)$. Usando argumentos similares

dados anteriormente, se obtiene que $\Phi_-(X)$ también es un Φ -semigrupo de $B(X)$.

Para cada $a \in A$ y un Φ -semigrupo S de A , sea:

$$\sigma_S(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \notin S\}.$$

Teorema 78. *Sea A un álgebra de Banach con identidad e y S cualquier Φ -semigrupo. Supongamos que $i : S \rightarrow \mathbb{Z}$ es un índice tal que $i(b) = 0$ para todos los elementos invertibles $b \in A$. Si f es una función analítica en un conjunto abierto U que contiene $\sigma(a)$, $\sigma(a)$ el espectro de a con respecto de A , entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (a) $f(a) \in S$ si y sólo si $f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma_S(a)$;
- (b) $\sigma_S(f(a)) = f(\sigma_S(a))$.

Demostración. (a) Supongamos que $f(a) \in S$ y $f(\lambda_0) = 0$. Entonces existe una función g analítica en U tales que $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m g(\lambda)$ y $g(\lambda_0) \neq 0$, donde m es la multiplicidad de λ_0 . Así, $(a - \lambda_0 e)^m g(a) = g(a)(a - \lambda_0 e)^m = f(a) \in S$. De la propiedad (i) de la definición 29 tenemos que $(a - \lambda_0 e)^m \in S$. Nótese que $(a - \lambda_0 e)(a - \lambda_0 e)^{m-1} = (a - \lambda_0 e)^{m-1}(a - \lambda_0 e) = (a - \lambda_0 e)^m \in S$, aplicando nuevamente la propiedad (i) de la definición 29, tenemos que $a - \lambda_0 e \in S$, y por lo tanto $\lambda_0 \notin \sigma_S(a)$.

Recíprocamente, supongamos que $f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma_S(a)$. Consideremos primero el caso de que f no se anula idénticamente en cualquier componente de U . Entonces f solamente tiene un número finito de ceros en $\sigma(a)$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los ceros con multiplicidades $m_1, m_2, \dots, m_n$, respectivamente. Entonces existe una función analítica g en U tales que:

$$f(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{m_i} g(\lambda)$$

y $g(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(a)$. Así, $g(a)$ es invertible en A , y por lo tanto $g(a) \in S$. Además, como $f(\lambda_i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$, obtenemos que $\lambda_i \notin \sigma_S(a)$, es decir, $a - \lambda_i e \in S$ para $i = 1, 2, \dots, n$, esto implica que $\prod_{i=1}^n (a - \lambda_i e)^{m_i} \in S$, ya que S es semigrupo. Usando nuevamente que S es semigrupo, tenemos que

$$f(a) = \prod_{i=1}^n (a - \lambda_i e)^{m_i} g(a) \in S.$$

Ahora, supongamos que f se anula idénticamente en al menos una componente Ω de U . Sea $\sigma = \sigma(a) \cap \Omega$, puesto que U es abierto, entonces σ es un conjunto espectral de a . Sea p la proyección espectral de a con respecto a σ :

$$p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda e - a)^{-1} d\lambda,$$

donde Γ es una curva de Jordan en $\Omega \setminus \sigma$.

Afirmamos que $p \in J$, donde J es el ideal dado por (ii) de la definición 29. De la condición (ii) de la definición 29, tenemos $S = \phi^{-1}(\widehat{R})$. Así, $\phi(S) = \widehat{R}$ porque ϕ es sobreyectivo. Por otra parte, como f se anula idénticamente en Ω , entonces $\lambda \notin \sigma_S(a)$, esto es, $\lambda e - a \in S$ para todo $\lambda \in \Omega$, así que $\{\lambda e - a : \lambda \in \Omega\} \subseteq S$. Esto implica que el conjunto:

$$\widehat{B} = \{\lambda \phi(e) - \phi(a) : \lambda \in \Omega\} \subseteq \phi(S) = \widehat{R},$$

Puesto que Ω es un conexo abierto y ϕ es continua, entonces $\widehat{B}$ es conexo. Además, para $\lambda_0 \in \Omega \setminus \sigma$, tenemos que $\lambda_0 e - a$ es invertible en A y $\lambda_0 \phi(e) - \phi(a) \in \widehat{B}$, esto implica que $\lambda_0 \phi(e) - \phi(a) \in \widehat{B} \cap \widehat{G}$. Así, $\widehat{B} \subseteq \widehat{G}$. En efecto, si $\widehat{B} \not\subseteq \widehat{G}$, entonces por la propiedad (ii) de la definición 29, tenemos que $\widehat{B} = (\widehat{B} \cap \widehat{G}) \cup [(\widehat{R} \setminus \widehat{G}) \cap \widehat{B}]$ es una unión disjunta de abiertos, lo cual es una contradicción, ya que $\widehat{B}$ es conexo.

Finalmente, consideremos la función $\lambda \mapsto (\lambda \phi(e) - \phi(a))^{-1}$. Esta función está bien definida (porque $\widehat{B} \subseteq \widehat{G}$), es analítica en Ω y

$$\phi(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda \phi(e) - \phi(a))^{-1} d\lambda = 0 \in A/J,$$

esto implica que $p \in N(p)$, es decir, $p \in J$.

Para concluir la prueba, sea

$$g(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda) & \text{en las componentes de } U \text{ donde } f \neq 0, \\ 1 & \text{en las componentes de } U \text{ donde } f = 0, \end{cases}$$

y sea $h(\lambda) = g(\lambda) - f(\lambda)$. La compacidad de $\sigma(a)$ garantiza que existe un número finito de componentes conexas Ω_i de U tales que $\sigma(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ y $\sigma(a) \cap \Omega_i \neq \emptyset$. Así, los conjuntos espectrales $\sigma_i = \sigma(a) \cap \Omega_i$ donde f se anula idénticamente en Ω_i es finito. En particular, f se anula en σ_i para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces, $h(a)$ es la suma finita de proyecciones correspondientes a los conjuntos espectrales donde f se anula idénticamente,

esto implica que $h(a) \in J$. Además, por definición, g no se anula idénticamente en cualquier componente de U , así $g(a) \in S$. De esto concluimos que:

$$f(a) = g(a) - h(a) \in S + J \subseteq S,$$

lo cual completa la prueba de la equivalencia (a).

(b) Claramente, $\mu \notin f(\sigma_S(a))$ si y sólo si $\mu - f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma_S(a)$. De la parte (i) esto es cierto si y sólo si $\mu e - f(a) \in S$, o equivalentemente, $\mu \notin \sigma_S(f(a))$. ■

Corolario 7. Sea $T \in B(X)$. Si $f \in H(\sigma(T))$, entonces las siguientes igualdades son ciertas:

$$(a) f(\sigma_e(T)) = \sigma_e(f(T));$$

$$(b) f(\sigma_{uf}(T)) = \sigma_{uf}(f(T));$$

$$(c) f(\sigma_{lf}(T)) = \sigma_{lf}(f(T)).$$

Demostración. Sabemos que $B(X)$ es un álgebra de Banach con identidad I . Claramente, los elementos invertibles de $B(X)$ tienen índice cero. Por el Ejemplo 14, tenemos que $\Phi(X)$, $\Phi_+(X)$ y $\Phi_-(X)$ son Φ -semigrupos. Además,

$$\sigma_{\Phi(X)}(T) = \sigma_e(T), \quad \sigma_{\Phi_+(X)}(T) = \sigma_{uf}(T) \quad \text{y} \quad \sigma_{\Phi_-(X)}(T) = \sigma_{lf}(T).$$

por definición. Ahora, si $f \in H(\sigma(T))$, entonces

$$f(\sigma_e(T)) = \sigma_e(f(T)), \quad f(\sigma_{uf}(T)) = \sigma_{uf}(f(T)) \quad \text{y} \quad f(\sigma_{lf}(T)) = \sigma_{lf}(f(T)),$$

por el Teorema 78. Por lo tanto, los incisos (a), (b) y (c) del Corolario son ciertos. ■

Sea $a \in A$ y S un Φ -semigrupo de A con índice i . Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definamos:

$$\sigma_n = \{\lambda \in \sigma(a) : i(\lambda e - a) = n\}.$$

Lema 11. Sean $a \in A$, S un Φ -semigrupo y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en un subconjunto abierto U de $\mathbb{C}$ que contiene $\sigma(a)$. Supongamos que $f(a) \in S$ y sea α_n el número de ceros de f en σ_n , contando de acuerdo a sus multiplicidades, ignorando componentes de σ_n donde f es idénticamente cero. Entonces,

$$\text{ind}(f(a)) = \sum_n n \alpha_n.$$

Demostración. Si $f(a) \in S$, entonces f no se anula en $\sigma_S(a)$ (véase el Teorema 78). Primero supongamos que f tiene un número finito de ceros en $\sigma(a)$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, sea λ_{ni} , $i = 1, \dots, k_n$, los ceros de la función f en σ_n con multiplicidades α_{ni} . Entonces existe una función analítica q en U tal que:

$$f(\lambda) = \prod_{n,i} (\lambda - \lambda_{ni})^{\alpha_{ni}} q(\lambda)$$

y $q(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma(a)$. Entonces $q(a)$ es invertible en A , y por lo tanto $i(q(a)) = 0$. De esto obtenemos:

$$\begin{aligned} i(f(a)) &= i\left(\prod_{n,i} (a - \lambda_{ni}e)^{\alpha_{ni}} q(a)\right) = i\left(\prod_{n,i} (a - \lambda_{ni}e)^{\alpha_{ni}}\right) + i(q(a)) \\ &= \sum_{n,i} n\alpha_{ni} = \sum_n n\alpha_n, \text{ donde } \alpha_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{n,i}. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que f tiene un número infinito de ceros en $\sigma(a)$. Definamos f y g como en la prueba del Teorema 78. Entonces $f(\lambda) = g(\lambda) - h(\lambda)$, donde g tiene un número finito de ceros en $\sigma(a)$ y $h(a) \in J$. Así,

$$i(f(a)) = i(g(a) - h(a)) = i(g(a))$$

y por lo tanto $i(f(a)) = \sum_n n\alpha_n$ por el primer caso. ■

Teorema 79. Sea $T \in B(X)$. Si $f \in H(\sigma(T))$, entonces las siguientes inclusiones son ciertas:

- (a) $f(\sigma_{sf}(T)) \subseteq \sigma_{sf}(f(T))$;
- (b) $\sigma_w(f(T)) \subseteq f(\sigma_w(T))$.

Demostración. (a) Del Corolario 7, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sigma_{sf}(f(T)) &= \sigma_{uf}(f(T)) \cap \sigma_{lf}(f(T)) = f(\sigma_{uf}(T)) \cap f(\sigma_{lf}(T)) \\ &\supseteq f(\sigma_{uf}(T)) \cap \sigma_{lf}(T) = f(\sigma_{sf}(T)). \end{aligned}$$

(b) Para cada $n \in \mathbb{Z}$, sean $\Phi_n(X) = \{T \in \Phi(X) : \text{ind}(T) = n\}$ y $\Omega_n = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda I - T \in \Phi_n(X)\}$. Obviamente, por definición,

$$\sigma_w(T) = \sigma_e(T) \cup \left(\bigcup_{n \neq 0} \Omega_n \right). \quad (3.2)$$

Si $\mu \notin f(\sigma_w(T))$, entonces $\mu - f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma_w(T)$, esto es, $\mu - f(\lambda)$ no tiene ceros en $\sigma_w(T)$, y en particular no tiene ceros en $\sigma_e(T)$. Aplicando la parte (a) del Teorema 78 al Φ -semigrupo $\Phi(X)$, concluimos que $\mu I - f(T) \in \Phi(X)$. Por el Lema 11,

$$\text{ind}(\mu I - f(T)) = \sum_{n \neq 0} n \alpha_n,$$

donde α_n es el número de ceros aislados de $\mu - f(\lambda)$ en Ω_n , contando de acuerdo a sus multiplicidades. Como $\mu - f(\lambda)$ no tiene ceros en $\sigma_w(T)$, de la igualdad (3.2), en particular no tiene ceros en Ω_n para cada $n \neq 0$. Así, tenemos que $\alpha_n = 0$ para cada $n \neq 0$. Por lo tanto, $\text{ind}(\mu I - f(T)) = 0$. En consecuencia $\mu \notin \sigma_w(f(T))$. ■

El siguiente Ejemplo demuestra que en general las inclusiones (a) y (b) del Teorema 79 son propias.

Ejemplo 15. Consideremos un operador $T \in B(X)$, para el cual $R(I+T)$ es cerrado y tal que:

$$\alpha(I+T) < \infty, \quad \beta(I+T) = \infty, \quad \alpha(I-T) = \infty \quad \text{y} \quad \beta(I-T) < \infty.$$

Claramente, $I+T \in \Phi_+(X)$ y $I-T \in \Phi_-(X)$, así $\{1, -1\} \not\subseteq \sigma_{sf}(T)$. Definamos $f(\lambda) = (1+\lambda)(1-\lambda)$ en $\mathbb{C}$. Es claro que f es analítica en $\mathbb{C}$ y que tiene raíces únicas 1 y -1. También, nótese que $f(T) = (I+T)(I-T)$, $N(I-T) \subseteq N(f(T))$ y $R(f(T)) \subseteq R(I+T)$. Entonces $\alpha(f(T)) = \beta(f(T)) = \infty$, ya que $\alpha(I-T) = \beta(I+T) = \infty$. Así, $0 \in \sigma_{sf}(f(T))$. Por otro lado, es claro que $0 \notin f(\sigma_{sf}(T))$, ya que las raíces de f no pertenecen a $\sigma_{sf}(T)$. Esto demuestra que la contención (a) del Teorema 79 no da la igualdad.

Para demostrar que la inclusión (b) del Teorema 79 generalmente es propia, consideremos un operador $T \in \Phi(X)$ tal que $\text{ind}(\lambda I + T) = -1$ y $\text{ind}(\lambda I - T) = 1$. Entonces,

$$\text{ind}(f(T)) = \text{ind}[(\lambda I + T)(\lambda I - T)] = \text{ind}(\lambda I + T) + \text{ind}(\lambda I - T) = 0,$$

así que $f(T) \in W(X)$, es decir, $0 \notin \sigma_w(f(T))$, donde, como antes, $f(\lambda) = (1+\lambda)(1-\lambda)$. Por otro lado, como $\{1, -1\} \subseteq \sigma_w(T)$, entonces $0 \in f(\sigma_w(T))$.

Teorema 80. Sean $T \in B(X)$ y $f \in H(\sigma(T))$. Entonces,

$$\sigma_{uw}(f(T)) \subseteq f(\sigma_{uw}(T)) \quad \text{y} \quad \sigma_{lw}(f(T)) \subseteq f(\sigma_{lw}(T)).$$

Demostración. Veamos que $\sigma_{uw}(f(T)) \subseteq f(\sigma_{uw}(T))$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, sea

$$\Omega_n = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda I - T \in \Phi_+(X), \text{ ind}(\lambda I - T) = n\}.$$

Claramente, por definición del espectro superiormente semi-Weyl,

$$\sigma_{uw}(T) = \sigma_{uf}(T) \cup \left(\bigcup_{n \geq 1} \Omega_n \right). \quad (3.3)$$

Si $\mu \notin f(\sigma_{uw}(T))$, entonces $\mu - f(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \sigma_{uw}(T)$, es decir, $\mu - f(\lambda)$ no tiene ceros en $\sigma_{uw}(T)$, en particular no tiene ceros en $\sigma_{uf}(T)$. Así, por la parte (a) del Teorema 78, tenemos que $\mu I - f(T) \in \Phi_+(X)$. Luego, aplicando el Lema 11 al Φ -semigrupo $\Phi_+(X)$, resulta que:

$$\text{ind}(\mu I - f(T)) = \sum_n n \alpha_n,$$

donde, como en el Lema 11, α_n es el número de ceros aislados de $\mu - f(\lambda)$ en Ω_n , contando de acuerdo a sus multiplicidades. Puesto que $\mu - f(\lambda)$ no tiene ceros en $\sigma_{uw}(T)$, entonces de la igualdad (3.3), en particular no tiene ceros en Ω_n para cada $n \geq 1$. Así, $\alpha_n = 0$ para cada $n \geq 1$, y por lo tanto $\text{ind}(\mu I - f(T)) \leq 0$. Esto implica que $\mu \notin \sigma_{uw}(f(T))$.

Probemos que $\sigma_{lw}(f(T)) \subseteq f(\sigma_{lw}(T))$. Como $f(T)^* = f(T^*)$ y $\sigma_{lw}(T) = \sigma_{uw}(T^*)$, entonces, por la primera parte de la demostración,

$$\begin{aligned} \sigma_{lw}(f(T)) &= \sigma_{uw}(f(T)^*) = \sigma_{uw}(f(T^*)) \\ &\subseteq f(\sigma_{uw}(T^*)) = f(\sigma_{lw}(T)). \end{aligned}$$

■

Mediante un ejemplo probaremos que en general las inclusiones del Teorema 80 son propias.

Ejemplo 16. Sea $f(\lambda) = (1 + \lambda)(1 - \lambda)$ y consideremos $T \in \Phi(X)$ tal que $\text{ind}(\lambda I + T) = 1$ y $\text{ind}(\lambda I - T) = -1$. Entonces,

$$\text{ind}(f(T)) = \text{ind}(\lambda I + T) + \text{ind}(\lambda I - T) = 0,$$

así $f(T) \in W(X)$. Esto implica que $0 \notin \sigma_{uw}(f(T))$ y $0 \notin \sigma_{lw}(f(T))$. Por otro lado, como $\lambda I + T \notin W_+(X)$ y $\lambda I - T \notin W_-(X)$, entonces $\{1, -1\} \subseteq \sigma_{uw}(T)$ y $\{1, -1\} \subseteq \sigma_{lw}(T)$. Por lo tanto, $0 \in f(\sigma_{uw}(T))$ y $0 \in f(\sigma_{lw}(T))$. Esto completa la prueba de que las contenciones del Teorema 80 son propias.

Lema 12. Sea $T \in B(X)$ y supongamos que $f \in H(\sigma(T))$ es constante en cada componente conexa de un conjunto abierto U que contiene $\sigma(T)$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ub}(T)) &= f(\sigma_{lb}(T)) = f(\sigma_b(T)) = f(\sigma(T)) \\ &= \sigma_{ub}(f(T)) = \sigma_{lb}(f(T)) = \sigma_b(f(T)) = \sigma(f(T)). \end{aligned}$$

Demostración. Primero probemos la igualdad $\sigma_{ub}(f(T)) = f(\sigma_{ub}(T))$.

Como $\sigma(T)$ es compacto, existen $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ componentes conexas de U tales que $\sigma(T) \subseteq \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$. Podemos suponer que $\sigma_i = \Omega_i \cap \sigma(T) \neq \emptyset$ para cada $i = 1, \dots, m$. Puesto que U es abierto, entonces Ω_i es abierto y cerrado en U . Más aún, Ω_i es abierto en $\mathbb{C}$. Así, σ_i y $\sigma(T) \setminus \sigma_i$ son cerrados en U , esto es, σ_i es un conjunto espectral de T para cada $i = 1, 2, \dots, m$. Sea $f(\lambda) = c_i$ para cada $\lambda \in \Omega_i$ y denotemos por χ_i la función característica de Ω_i . Es bien conocido que $P_i = \chi_i(T)$ es la proyección espectral de T asociada con σ_i y que la descomposición $X = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_m$ es cierta, donde $M_i = R(P_i)$. Los subespacios M_i son T -invariantes y $f(T)$ -invariantes. Además, notemos que:

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^m \chi_i(\lambda) \text{ y } f(T) = \sum_{i=1}^m c_i P_i,$$

así que $f(T)|_{M_i} = c_i I_i$, donde I_i es la identidad en M_i . Obviamente,

$$\sigma_{ub}(f(T)|_{M_i}) = \sigma(f(T)|_{M_i}) = \{c_i\}.$$

Luego, de la Proposición 5, resulta que:

$$\sigma(f(T)) = \sigma_{ub}(f(T)) = \{c_1, \dots, c_m\}.$$

Por otro lado, la contención $\sigma_{ub}(T) \subseteq \sigma(T)$ implica que:

$$f(\sigma_{ub}(T)) \subseteq f(\sigma(T)) = \{c_1, \dots, c_m\}. \quad (3.4)$$

La inclusión recíproca de (3.4) también es cierto, pues cada Ω_i contiene algún punto λ de $\sigma_{ub}(T|_{M_i})$, ya que este último conjunto es no vacío, y por lo tanto,

$$c_i = f(\lambda) \in f(\sigma_{ub}(T|_{M_i})) \subseteq f(\sigma_{ub}(T)) \text{ para todo } i = 1, \dots, m.$$

Por lo tanto, $f(\sigma_{ub}(T)) = \sigma_{ub}(f(T)) = f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$.

Veamos que $\sigma_{lb}(f(T)) = f(\sigma_{lb}(T)) = \sigma(f(T))$. Puesto que $\sigma_{lb}(T) = \sigma_{ub}(T^*)$ y $f(T)^* = f(T^*)$, entonces

$$\sigma_{lb}(f(T)) = \sigma_{ub}(f(T)^*) = \sigma_{ub}(f(T^*)) = f(\sigma_{ub}(T^*)) = f(\sigma_{lb}(T)).$$

Por otro lado,

$$\sigma_{lb}(f(T)) = \sigma_{ub}(f(T^*)) = \sigma_{ub}(f(T)^*) = \sigma(f(T)^*) = \sigma(f(T)).$$

Esto completa la prueba de las igualdades deseadas. De manera similar se prueba que las igualdades $\sigma_b(f(T)) = f(\sigma_b(T)) = \sigma(f(T))$ son ciertas. ■

Teorema 81. Sean $T \in B(X)$ y $f \in H(\sigma(T))$. Entonces,

$$\sigma_{ub}(f(T)) = f(\sigma_{ub}(T)) \text{ y } \sigma_{lb}(f(T)) = f(\sigma_{lb}(T)).$$

Demostración. Probemos la inclusión $f(\sigma_{ub}(T)) \subseteq \sigma_{ub}(f(T))$.

Primero supongamos que f no es constante en cada componente conexa de U , donde U es el dominio de f , es abierto y $\sigma(T) \subseteq U$. Entonces, por la Observación 5, Corolario 7 y Teorema 33, resulta que:

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ub}(T)) &= f(\sigma_{uf}(T) \cup \Xi(T)) \subseteq f(\sigma_{uf}(T)) \cup f(\Xi(T)) \\ &= \sigma_{uf}(f(T)) \cup \Xi(f(T)) = \sigma_{ub}(f(T)). \end{aligned}$$

Queda por demostrar la inclusión opuesta $\sigma_{ub}(f(T)) \subseteq f(\sigma_{ub}(T))$. Supongamos que $\lambda \in \sigma_{ub}(f(T))$. Por el Teorema 51, se tiene que $\sigma_{ub}(f(T)) = \sigma_{uw}(f(T)) \cup \text{acc } \sigma_{ap}(f(T))$, así que $\lambda \in \sigma_{uw}(f(T))$ o $\lambda \in \text{acc } \sigma_{ap}(f(T))$.

Supongamos que $\lambda \in \sigma_{uw}(f(T))$. En este caso, $\lambda \in f(\sigma_{uw}(T))$, por el Teorema 80, y de la inclusión $\sigma_{uw}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T)$ se sigue que $\lambda \in f(\sigma_{ub}(T))$.

Supongamos que $\lambda \in \text{acc } \sigma_{ap}(f(T))$. Existe una sucesión λ_n de puntos de $\sigma_{ap}(f(T))$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$. De la igualdad $\sigma_{ap}(f(T)) = f(\sigma_{ap}(T))$ (véase Teorema 34), se sigue que existe una sucesión $\{\mu_n\} \subseteq \sigma_{ap}(T)$ tal que $f(\mu_n) = \lambda_n$. Como $\sigma_{ap}(T)$ es compacto, la sucesión μ_n es acotada, por lo tanto tiene una subsucesión convergente y podemos suponer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu \in \sigma_{ap}(T)$. Entonces, $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\mu_n) = f(\mu)$, así que $\lambda \in f(\text{acc } \sigma_{ap}(T))$, y por el Teorema 51, resulta que $\lambda \in f(\sigma_{ub}(T))$. Esto completa la prueba de la igualdad $f(\sigma_{uw}(T)) = \sigma_{uw}(f(T))$ en el caso de que f no es constante en cada componente conexa de U .

Ahora, consideremos la otra posibilidad, es decir, f es constante en alguna componente de U . Como $\sigma(T)$ es compacto, existen $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ componentes conexas de U tales que $\sigma(T) \subseteq \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$ y $\Omega_i \cap \sigma(T) \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que los primeros $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ con $n \leq m$ son las componentes conexas de U , donde f es constante, digamos $f(\lambda) = c_i$ para $\lambda \in \Omega_i$. Definamos:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i \text{ y } \sigma = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i, \text{ donde } \sigma_i = \sigma(T) \cap \Omega_i.$$

Nótese que cada σ_i es un conjunto espectral de T , así que σ también lo es. También, observe que Ω_i es abierto y cerrado en U , ya que U es abierto. Así, Ω es abierto y cerrado en U , esto implica que $U \setminus \Omega$ es abierto en U . Si P es la proyección espectral de T asociada con σ , se sigue del Teorema 41 que $X = M \oplus N$ y los subespacios M y N son T -invariantes y $f(T)$ -invariantes, donde $M = R(P)$ y $N = N(P)$. Además, $\sigma(T|_M) = \sigma \subseteq \Omega$ y $\sigma(T|_N) = \sigma(T) \setminus \sigma \subseteq U \setminus \Omega$.

Sea g la restricción de f en Ω y h la restricción de f en $U \setminus \Omega$. Las funciones g y h son analíticas en un conjunto abierto que contiene $\sigma(T|_M)$ y $\sigma(T|_N)$, respectivamente. Por definición, g es constante en cada componente conexa de Ω , es decir, en cada Ω_i para $i = 1, \dots, n$, mientras que h no es constante en cada componente conexa de $U \setminus \Omega$. De las igualdades $g(T|_M) = f(T)|_M$ y $h(T|_N) = f(T)|_N$, y tomando en cuenta el Lema 12, la Proposición 5 y la primera parte de la prueba, tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{ub}(f(T)) &= \sigma_{ub}(f(T)|_M) \cup \sigma_{ub}(f(T)|_N) = \sigma_{ub}(g(T|_M)) \cup \sigma_{ub}(h(T|_N)) \\ &= g(\sigma_{ub}(T|_M)) \cup h(\sigma_{ub}(T|_N)) = f(\sigma_{ub}(T|_M)) \cup f(\sigma_{ub}(T|_N)) \\ &= f(\sigma_{ub}(T|_M) \cup \sigma_{ub}(T|_N)) = f(\sigma_{ub}(T)), \end{aligned}$$

en la quinta igualdad se debe a que $\sigma_{ub}(T|_M)$ y $\sigma_{ub}(T|_N)$ son disjuntos. Esta última igualdad completa la prueba de la primera igualdad del Teorema.

Ahora, probemos la segunda igualdad del Teorema. Como $\sigma_{lb}(T) = \sigma_{ub}(T^*)$, $f(T)^* = f(T^*)$ y teniendo en cuenta lo probado anteriormente, tenemos:

$$\sigma_{lb}(f(T)) = \sigma_{ub}(f(T)^*) = \sigma_{ub}(f(T^*)) = f(\sigma_{ub}(T^*)) = f(\sigma_{lb}(T)).$$

■

Teorema 82. Sean $T \in B(X)$ y $f \in H(\sigma(T))$. Entonces

$$\sigma_b(f(T)) = f(\sigma_b(T)).$$

Demostración. Del Teorema 81, resulta que:

$$\begin{aligned} f(\sigma_b(T)) &= f(\sigma_{ub}(T) \cup \sigma_{lb}(T)) \subseteq f(\sigma_{ub}(T)) \cup f(\sigma_{lb}(T)) \\ &= \sigma_{ub}(f(T)) \cup \sigma_{lb}(f(T)) = \sigma_b(f(T)). \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $\lambda \in \sigma_b(f(T))$. Por el Teorema 51, $\sigma_b(f(T)) = \sigma_w(f(T)) \cup \text{acc } \sigma(f(T))$, así $\lambda \in \sigma_w(f(T))$ o $\lambda \in \text{acc } \sigma(f(T))$.

Si $\lambda \in \sigma_w(f(T))$, entonces $\lambda \in f(\sigma_w(T))$ (véase la parte (b) del Teorema 79), esto implica que $\lambda \in f(\sigma_b(T))$, ya que $\sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T)$. Consideremos la otra posibilidad, esto es, $\lambda \in \text{acc } \sigma(f(T))$. En este caso, existe una sucesión $\{\lambda_n\}$ de elementos de $\sigma(f(T))$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$. De la igualdad $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ se sigue que existe una sucesión $\{\mu_n\} \subseteq \sigma(T)$ tal que $f(\mu_n) = \lambda_n$. Como $\sigma(T)$ es compacto, la sucesión $\{\mu_n\}$ es acotada, existe una subsucesión que converge a un cierto $\mu \in \sigma(T)$. Podemos asumir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$, así $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\mu_n) = f(\mu)$, esto es, $\lambda = f(\mu) \in f(\text{acc } \sigma(T))$. De la parte (e) del Teorema 51 concluimos que $\lambda \in f(\sigma_b(T))$. ■

Teorema 83. Sea $T \in B(X)$. Si T o T^* tiene la SVEP, entonces,

$$\sigma_{sf}(f(T)) = f(\sigma_{sf}(T)).$$

Demostración. Primero supongamos que T tiene la SVEP. Entonces $f(T)$ tiene la SVEP (véase el Teorema 33). Así, por Teorema 52 y Corolario 7, resulta que:

$$\sigma_{sf}(f(T)) = \sigma_{uf}(f(T)) = f(\sigma_{uf}(T)) = f(\sigma_{sf}(T)).$$

Si T^* tiene la SVEP, entonces $f(T^*)$ tiene la SVEP. Como $\sigma_{sf}(T) = \sigma_{sf}(T^*)$ y tomando en cuenta la primera parte de la prueba, tenemos que:

$$\sigma_{sf}(f(T)) = \sigma_{sf}(f(T^*)) = f(\sigma_{sf}(T^*)) = f(\sigma_{sf}(T)).$$

■

Teorema 84. Sea $T \in B(X)$. Si T o T^* tiene la SVEP, entonces

$$\begin{aligned} \sigma_{uw}(f(T)) &= \sigma_{ub}(f(T)), \quad \sigma_{lw}(f(T)) = \sigma_{lb}(f(T)) \quad y \\ \sigma_w(f(T)) &= \sigma_b(f(T)). \end{aligned}$$

Demostración. Primero supongamos que T tiene la SVEP. Entonces $f(T)$ tiene la SVEP, por el Teorema 33. Del Teorema 53 se sigue que $\sigma_{uw}(f(T)) = \sigma_{ub}(f(T))$, y $\sigma_{lw}(f(T)) = \sigma_{lb}(f(T))$.

Ahora, supongamos que T^* tiene la SVEP. Entonces $f(T)^* = f(T^*)$ tiene la SVEP. Así, por el Teorema 81 y teniendo en cuenta la primera parte de la prueba, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \sigma_{uw}(f(T)) &= \sigma_{lw}(f(T)^*) = \sigma_{lw}(f(T^*)) = \sigma_{lb}(f(T^*)) \\ &= f(\sigma_{lb}(T^*)) = f(\sigma_{ub}(T)) = \sigma_{ub}(f(T)). \end{aligned}$$

La prueba de la igualdad $\sigma_{lw}(f(T)) = \sigma_{lb}(f(T))$ es análoga. Finalmente,

$$\begin{aligned}\sigma_w(f(T)) &= \sigma_{uw}(f(T)) \cup \sigma_{lw}(f(T)) \\ &= \sigma_{ub}(f(T)) \cup f(\sigma_{lb}(T)) = \sigma_b(f(T)).\end{aligned}$$

■

Corolario 8. *Si T o T^* tiene la SVEP y $f \in H(\sigma(H))$, entonces*

$$\begin{aligned}\sigma_w(f(T)) &= f(\sigma_w(T)), \quad \sigma_{uw}(f(T)) = f(\sigma_{uw}(T)) \\ \text{y} \quad \sigma_{lw}(f(T)) &= f(\sigma_{lw}(T)).\end{aligned}$$

Además, las siguientes igualdades también son válidas:

$$\sigma_w(f(T)) = \sigma_b(f(T)) = f(\sigma_w(T)) = f(\sigma_b(T)).$$

Demostración. Por el Teorema 84, el Teorema 82 y el Teorema 52, tenemos:

$$\sigma_w(f(T)) = \sigma_b(f(T)) = f(\sigma_b(T)) = f(\sigma_w(T)).$$

Por otro lado, por el Teorema 84, el Teorema 81 y el Teorema 53 tenemos:

$$\begin{aligned}\sigma_{uw}(f(T)) &= \sigma_{ub}(f(T)) = f(\sigma_{ub}(T)) = f(\sigma_{uw}(T)) \quad \text{y} \\ \sigma_{lw}(f(T)) &= \sigma_{lb}(f(T)) = f(\sigma_{lb}(T)) = f(\sigma_{lw}(T)).\end{aligned}$$

■

3.2.1. Teoremas de la aplicación espectral para clases de operadores en los espacios de Hilbert

En esta parte aplicaremos los resultados ya obtenidos en esta sección para probar algunos Teoremas de la aplicación espectral para clases de operadores en los espacios de Hilbert. Específicamente, probaremos que si $T \in B(X)$ es k -paranormal o k -*-paranormal, entonces el Teorema de la aplicación espectral es cierto para $\sigma_{sf}(T)$, $\sigma_{uw}(T)$, $\sigma_{lw}(T)$ y para $\sigma_w(T)$, respectivamente.

Comencemos nuestra exposición probando los siguientes dos resultados preliminares.

Teorema 85. *Si $T \in B(H)$ es k -paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $p(\lambda I - T) \leq 1$.*

Demostración. Si $\lambda \notin \sigma_p(T)$, entonces $\lambda I - T$ es inyectivo, y por lo tanto $p(\lambda I - T) = 0$. Ahora, supongamos que $\lambda \in \sigma_p(T)$. Probaremos que $N(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^2$. Es suficiente demostrar que $N(\lambda I - T)^2 \subseteq N(\lambda I - T)$, ya que la contención contraria es clara. Supongamos que $\lambda = 0$. Sea $x \in N(T^2)$. Entonces $T^2x = 0$, y como T es k -paranormal, entonces $\|Tx\|^{k+1} \leq \|T^{k+1}x\|\|x\|^k = \|T^{k-1}(T^2x)\|\|x\|^k = 0$. En consecuencia, $Tx = 0$, es decir, $x \in N(T)$. Esto prueba que $N(T^2) \subseteq N(T)$. Finalmente, supongamos que $\lambda \neq 0$. Sean $x = x_1 \oplus x_2 \in N(\lambda I - T)^2$ y

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & T_2 \\ O & T_3 \end{bmatrix}$$

en $N(T - \lambda I) \oplus_\perp N(T - \lambda I)^\perp$. Entonces

$$\begin{aligned} (\lambda I - T)^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} O & T_2 \\ O & \lambda - T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & T_2 \\ O & \lambda - T_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} O & T_2(\lambda - T_3) \\ O & (\lambda - T_3)^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_2(\lambda - T_3)x_2 \\ (\lambda - T_3)^2 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta igualdad se obtiene que $(\lambda I - T_3)^2 x_2 = 0$. Por el Teorema 64, se tiene que $N(\lambda I - T_3) = \{0\}$, entonces $(\lambda I - T_3)x_2 = 0$. Así, $x_2 = 0$. Entonces

$$(\lambda I - T) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} O & T_2 \\ O & \lambda - T_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así que $x \in N(\lambda I - T)$. En consecuencia, $N(\lambda I - T)^2 \subseteq N(\lambda I - T)$. Por lo tanto, $p(\lambda I - T) \leq 1$. ■

Corolario 9. Si $T \in B(H)$ es k -paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces T tiene la SVEP.

Demostración. Si T es k -paranormal, entonces $p(\lambda I - T) < \infty$ (véase el Teorema 85). Luego, por el Teorema 38, resulta que T tiene la SVEP. ■

A continuación probaremos algunos Teoremas de la aplicación espectral para clases de operadores en los espacios de Hilbert.

Teorema 86. Si $T \in B(H)$ es k -paranormal o k -*-paranormal, entonces $\sigma_{sf}(f(T)) = f(\sigma_{sf}(T))$.

Demostración. Si T es k -paranormal, entonces T tiene la SVEP, por el Corolario 9. Por el Teorema 83, $\sigma_{sf}(f(T)) = f(\sigma_{sf}(T))$. Ahora, si T es k -*-paranormal, entonces T tiene la SVEP (véase el Teorema 71). Nuevamente, por el Teorema 83, $\sigma_{sf}(f(T)) = f(\sigma_{sf}(T))$. ■

Teorema 87. Si $T \in B(H)$ es k -paranormal y $f \in H(\sigma(T))$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma_w(f(T)) &= f(\sigma_w(T)), \quad \sigma_{uw}(f(T)) = f(\sigma_{uw}(T)) \\ y \quad \sigma_{lw}(f(T)) &= f(\sigma_{lw}(T)). \end{aligned}$$

Demostración. Si T es k -paranormal, entonces T tiene la SVEP, por el Corolario 9. Por lo tanto, del Corolario 8, se sigue que el Teorema de la aplicación espectral es cierto para $\sigma_w(T)$, $\sigma_{uw}(T)$ y para $\sigma_{lw}(T)$. ■

Para finalizar esta sección probaremos el siguiente:

Teorema 88. Si $T \in B(H)$ es k -*-paranormal y $f \in H(\sigma(T))$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma_w(f(T)) &= f(\sigma_w(T)), \quad \sigma_{uw}(f(T)) = f(\sigma_{uw}(T)) \\ y \quad \sigma_{lw}(f(T)) &= f(\sigma_{lw}(T)). \end{aligned}$$

Demostración. Si T es k -*-paranormal, entonces T tiene la SVEP (véase el Teorema 71). Por lo tanto, del Corolario 8 se sigue que el Teorema de la aplicación espectral es cierto para $\sigma_w(T)$, $\sigma_{uw}(T)$ y para $\sigma_{lw}(T)$. ■

3.3. Teorema de Weyl

3.3.1. Caracterizaciones del teorema de Weyl

En esta sección caracterizamos el Teorema de Weyl. Principalmente relacionamos el Teorema de Weyl con la SVEP y con la parte casinilpotente del operador $\lambda I - T$ para $\lambda \in \mathbb{C}$.

Comencemos nuestra exposición con algunas definiciones y observaciones, y probando algunas propiedades básicas relacionados con el Teorema de Weyl.

Definición 30. Para cada $T \in B(X)$, definamos los siguientes conjuntos:

- (a) $p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda I - T \in \mathbb{B}(X)\}.$
- (b) $\pi_{00}(T) = \{\lambda \in \text{iso}\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}$

Para un valor propio aislado λ de T , diremos que tiene multiplicidad geométrica finita si la dimensión de $N(\lambda I - T)$ es finita. De esta manera, el conjunto $\pi_{00}(T)$ está constituido por los puntos aislados del espectro de T , que son valores propios de multiplicidad geométrica finita.

Observemos que si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$, entonces $\lambda I - T \in W(X)$, y como $\lambda \in \sigma(T)$, se sigue que $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) > 0$, así que:

$$\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \in W(X), 0 < \alpha(\lambda I - T)\}.$$

Esta observación la usaremos en lo que resta de este capítulo.

Proposición 7. *Si $T \in B(X)$, entonces:*

(a) $p_{00}(T) = p_{00}(T^*)$.

(b) $p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$.

(c) $p_{00}(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$.

Demostración. (a) Basta con observar que $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ y $\lambda I - T \in \mathbb{B}(X)$ si y sólo si $\lambda I^* - T^* \in \mathbb{B}(X^*)$.

(b) Sea $\lambda \in p_{00}(T)$. Entonces $\lambda \in \sigma(T)$ y $\lambda I - T \in \mathbb{B}(X)$. Por lo tanto, $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ y $\alpha(\lambda I - T) < \infty$. Como $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $0 < p(\lambda I - T)$. En caso contrario, $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) = 0$, esto implica que $\lambda I - T$ es invertible, es decir, $\lambda \in \rho(T)$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Así, λ es un valor propio de T , es decir, $0 < \alpha(\lambda I - T)$, y por el Teorema 36, $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$. Por lo tanto, $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Esto prueba que $p_{00}(T) \subseteq \pi_{00}(T)$.

(c) Si $\lambda \in p_{00}(T)$, entonces $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Como $\lambda I - T \in \mathbb{B}(X)$, entonces $\lambda I - T \in W(X)$. Además, $0 < \alpha(\lambda I - T)$, ya que en caso contrario, por el Teorema 44, tendríamos que $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) = 0$, en consecuencia, $\lambda \notin \sigma(T)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, de la Observación anterior tenemos que $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. ■

De la prueba de la Proposición previa tenemos que $\lambda \in p_{00}(T)$ si y sólo si $\lambda \in \pi_{00}(T)$, $\lambda I - T \in \Phi(X)$ y $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. De esta equivalencia, y por el Teorema 42 y también el Teorema 49, tenemos que si $\lambda \in p_{00}(T)$, entonces λ es un valor propio aislado de T de multiplicidad algebraica finita, es decir, la dimensión del rango de la proyección espectral de T asociada con λ es finita.

Ahora probaremos que, en general, los conjuntos $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$ y $\pi_{00}(T)$ son distintos.

Ejemplo 17. Sea $T : l_2 \rightarrow l_2$, definido por $T(x_1, x_2, \dots) = (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$. El adjunto de T es $T^*(x_1, x_2, \dots) = (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, \dots)$. En el Ejemplo 5, demostramos que T es casi-nilpotente, y por lo tanto $\sigma(T) = \{0\}$. Claramente, 0 es el único punto aislado de $\sigma(T)$. Además, $N(T) = \{(\lambda, 0, 0, \dots) :$

$\lambda \in \mathbb{C}\}$, esto implica que $\alpha(T) = 1$, entonces $\pi_{00}(T) = \{0\}$. Por otra parte, es obvio que T^* es inyectivo, así que $N(T^*) = \{0\}$, esto implica que $\alpha(T^*) = 0$. De la igualdad $\alpha(T^*) = \beta(T)$ se sigue que $\beta(T) = 0$. En consecuencia, $\alpha(T) \neq \beta(T)$, luego $T \notin W(X)$, es decir, $0 \in \sigma_w(T)$. Ahora, como $\sigma_w(T) \subseteq \sigma(T)$, tenemos que $\sigma_w(T) = \{0\}$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \emptyset \neq \pi_{00}(T)$.

Introducimos una propiedad que ha sido estudiada por muchos autores, llamada el Teorema de Weyl. Esta propiedad asegura la igualdad de los conjuntos $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$ y $\pi_{00}(T)$. Siguiendo la notación de Coburn (véase [6]), tenemos la siguiente definición.

Definición 31. Diremos que $T \in B(X)$ satisface el Teorema de Weyl si $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$.

Si T es como en el Ejemplo 17, entonces T no satisface el Teorema de Weyl. Además, como $\alpha(T^*) = 0$, tenemos que $\pi_{00}(T^*) = \emptyset$ y como $p_{00}(T^*) \subseteq \pi_{00}(T^*)$, se sigue que $p_{00}(T^*) = \emptyset$, esto implica que $p_{00}(T) = \emptyset$. Por lo tanto, $p_{00}(T) \neq \pi_{00}(T)$. Esto prueba que la contención de la parte (b) de la Proposición 7 generalmente es propia. En particular, hemos probado que la condición $p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$ no implica el Teorema de Weyl. Es decir, la condición $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$ no implica el Teorema de Weyl.

Ahora probaremos que si T satisface el Teorema de Weyl, entonces los respectivos conjuntos $p_{00}(T)$ y $\pi_{00}(T)$ coinciden.

Teorema 89. Sea $T \in B(X)$. Si T satisface el Teorema de Weyl, entonces $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$.

Demostración. Por la Proposición 7, es suficiente probar que $\pi_{00}(T) \subseteq p_{00}(T)$. Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Entonces $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$, esto implica que T tiene la SVEP en λ . Dado que T satisface el Teorema de Weyl tenemos que $\pi_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$, así que $\lambda I - T \in W(X)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T)$. Entonces $\lambda I - T \in \Phi(X)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$. Luego, por el Teorema 49, $p(\lambda I - T) < \infty$. Aplicando el Teorema 44, tenemos que $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Así, $\lambda \in p_{00}(T)$. Esto prueba que $\pi_{00}(T) \subseteq p_{00}(T)$. ■

La condición $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$ no implica el Teorema de Weyl, tal como lo demuestra el siguiente Ejemplo.

Ejemplo 18. Denotemos por R y L el operador de desplazamiento a la derecha y el operador de desplazamiento a la izquierda, respectivamente.

Recordemos que $\sigma(R) = \sigma(L) = \overline{\mathbb{D}(0,1)}$. Además, R y L son definidos por:

$$R(x) = (0, x_1, x_2, \dots) \text{ y } L(x) = (x_2, x_3, \dots)$$

para todo $x = \{x_n\} \in l_2$.

Consideremos el operador $T = L \oplus R \in B(H)$ definido por:

$$T(x, y) = (Lx, Ry) \text{ con } x, y \in l_2,$$

donde $H = l_2 \oplus l_2$. Claramente, el adjunto de T es $T^*(x, y) = (Rx, Ly)$.

Sean $M = l_2 \oplus \{0\}$ y $N = \{0\} \oplus l_2$. Entonces M y N , ambos, son T -invariantes. Además, $T|_M = R$ y $T|_N = L$, respectivamente. Del Teorema 39, se sigue que $\sigma(T) = \mathbb{D}(0,1)$.

Nótese que $\text{iso}\sigma(T) = \emptyset$, y por lo tanto $p_{00}(T) = \pi_{00}(T) = \emptyset$. Ahora, veamos que $0 \notin \sigma_w(T)$. Observemos que $N(T) = \{(x, 0) : x_n = 0 \text{ si } n \geq 2, \text{ donde } x = \{x_n\}\} = \{\lambda(e_1, 0) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ y $N(T^*) = \{(0, y) : y_n = 0 \text{ si } n \geq 2, \text{ donde } y = \{y_n\}\} = \{\lambda(0, e_1) : \lambda \in \mathbb{C}\}$. Por lo tanto, $\alpha(T) = \alpha(T^*) = 1$. Ahora, de la igualdad $\alpha(T^*) = \beta(T)$ se obtiene que $\beta(T) = 1$. Por lo tanto, T es un operador de Fredholm de índice cero, es decir, T es un operador de Weyl. Así, $0 \notin \sigma_w(T)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) \neq \emptyset$, y puesto que $\pi_{00}(T) = \emptyset$, tenemos que T no satisface el Teorema de Weyl.

En seguida pasemos a caracterizar la condición $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$.

Teorema 90. *Sea $T \in B(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$;
- (b) $\sigma_w(T) \cap \pi_{00}(T) = \emptyset$;
- (c) $\sigma_{sf}(T) \cap \pi_{00}(T) = \emptyset$;
- (d) $R(\lambda I - T)$ es cerrado para todo $\lambda \in \pi_{00}(T)$;
- (e) $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita para todo $\lambda \in \pi_{00}(T)$;
- (f) $K(\lambda I - T)$ es de codimensión finita para todo $\lambda \in \pi_{00}(T)$;
- (g) $\beta(\lambda I - T) < \infty$ para todo $\lambda \in \pi_{00}(T)$;
- (h) $q(\lambda I - T) < \infty$ para todo $\lambda \in \pi_{00}(T)$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Como $p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$, entonces $p_{00}(T) \cap \sigma_b(T) = \emptyset$. Ahora, puesto que $\sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T)$, tenemos que $p_{00}(T) \cap \sigma_w(T) = \emptyset$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Como $\sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_w(T)$, entonces $\sigma_{sf}(T) \cap \pi_{00}(T) \subseteq \sigma_w(T) \cap \pi_{00}(T) = \emptyset$. Por lo tanto, $\sigma_{sf}(T) \cap \pi_{00}(T) = \emptyset$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Si $\lambda \in \pi_{00}(T)$, por hipótesis $\lambda \notin \sigma_{sf}(T)$, es decir, $\lambda I - T$ es semi-Fredholm, y por lo tanto $R(\lambda I - T)$ es cerrado.

(d) $\Rightarrow$ (e) Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Entonces $\alpha(\lambda I - T) < \infty$, y por hipótesis $R(\lambda I - T)$ es cerrado. En consecuencia, $\lambda I - T \in \Phi_+(X)$. Como $\lambda \in \pi_{00}(T) \subseteq \text{iso}\sigma(T)$, se sigue que T tiene la SVEP en λ . Luego, por el Teorema 49, $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita.

(e) $\Rightarrow$ (f) Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Como $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$ es un punto aislado, entonces $X = H_0(\lambda I - T) \oplus K(\lambda I - T)$ (véase el Teorema 42). En consecuencia, si $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita, se sigue que $K(\lambda I - T)$ es de codimensión finita.

(f) $\Rightarrow$ (g) Como $K(\lambda I - T) \subseteq R(\lambda I - T)$, entonces $\beta(\lambda I - T) < \infty$.

(f) $\Rightarrow$ (a) Bastará probar que $\pi_{00}(T) \subseteq p_{00}(T)$. Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Entonces $\alpha(\lambda I - T) < \infty$, y por hipótesis $\beta(\lambda I - T) < \infty$, así, $\lambda I - T \in \Phi(X)$. Puesto que $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$, se sigue que T y T^* tienen la SVEP en λ . Luego, por el Teorema 49 y el Teorema 50, tenemos que $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Por lo tanto, $\lambda \in p_{00}(T)$. Esto prueba que $\pi_{00}(T) \subseteq p_{00}(T)$.

(a) $\Rightarrow$ (h) Si $\lambda \in \pi_{00}(T) = p_{00}(T)$, entonces $\lambda I - T \in \mathbb{B}(X)$. Entonces, en particular, $q(\lambda I - T) < \infty$.

(h) $\Rightarrow$ (g) Sea $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Entonces $\alpha(\lambda I - T) < \infty$, y por hipótesis $q(\lambda I - T) < \infty$. Del Teorema 44 se sigue que $\beta(\lambda I - T) \leq \alpha(\lambda I - T) < \infty$. $\blacksquare$

A continuación, vamos a caracterizar el Teorema de Weyl usando los resultados ya obtenidos anteriormente. En especial, vamos a destacar el papel de la parte casi-nilpotente del operador $\lambda I - T$ para $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorema 91. *Sea $T \in B(X)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) T satisface el Teorema de Weyl;

(b) $\sigma_w(T) = \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)$;

(c) $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$ y $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$;

(d) $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita para todo $\lambda \in \pi_{00}(T) \cup \Delta(T)$, donde $\Delta(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$;

(e) $K(\lambda I - T)$ es de codimensión finita para todo $\lambda \in \pi_{00}(T) \cup \Delta(T)$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Como T satisface el Teorema de Weyl, entonces $\pi_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T) &= \sigma(T) \setminus (\sigma(T) \setminus \sigma_w(T)) = \sigma(T) \cap (\mathbb{C} \setminus \sigma(T) \cup \sigma_w(T)) \\ &= \sigma(T) \cap \sigma_w(T) = \sigma_w(T), \text{ porque } \sigma_w(T) \subseteq \sigma(T).\end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que $\sigma_w(T) = \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)$. Entonces

$$\begin{aligned}\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) &= \sigma(T) \setminus (\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)) = \sigma(T) \cap (\mathbb{C} \setminus \sigma(T) \cup \pi_{00}(T)) \\ &= \sigma(T) \cap \pi_{00}(T) = \pi_{00}(T), \text{ porque } \pi_{00}(T) \subseteq \sigma(T).\end{aligned}$$

De esta igualdad se sigue que T satisface el Teorema de Weyl.

(a) $\Rightarrow$ (c) Si T satisface el Teorema de Weyl, entonces $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$ (véase el Teorema 89). Ahora veamos que $\sigma_b(T) = \sigma_w(T)$. Si $\lambda \notin \sigma_w(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma(T)$ o $\lambda \in \sigma(T)$, ya que $\sigma_w(T) \subseteq \sigma(T)$. Si $\lambda \notin \sigma(T)$, entonces $\lambda \in \rho(T)$, así, $\lambda \notin \sigma_b(T)$. Si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T) = p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$, esto implica que $\lambda \notin \sigma_b(T)$. Esto prueba que $\sigma_b(T) \subseteq \sigma_w(T)$. Por lo tanto, $\sigma_b(T) = \sigma_w(T)$, ya que la contención contraria siempre es cierta.

(c) $\Rightarrow$ (a) Si (c) es cierto, entonces $\pi_{00}(T) = p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Por lo tanto, T satisface el Teorema de Weyl.

(a) $\Rightarrow$ (d) Si T satisface el Teorema de Weyl, entonces $\pi_{00}(T) = p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \Delta(T)$, y por lo tanto $\pi_{00}(T) \cup \Delta(T) = \Delta(T) = \pi_{00}(T)$. Se sigue del Teorema 90, que $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita para todo $\lambda \in \pi_{00}(T) \cup \Delta(T)$.

(d) $\Rightarrow$ (c) Como $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita para todo $\lambda \in \pi_{00}(T) \cup \Delta(T)$, en particular, $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita para todo $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Por el Teorema 90, $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$. Por otro lado, si $\lambda \notin \sigma_w(T)$, se tiene que $\lambda \notin \sigma(T)$ o $\lambda \in \sigma(T)$. Claramente, si $\lambda \notin \sigma(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_b(T)$. Ahora, si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \Delta(T) \subseteq \pi_{00}(T) \cup \Delta(T)$, lo cual implica que $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita. Como $\lambda \in \Delta(T)$, se tiene que $\lambda I - T \in \Phi(X)$ y

$\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$. Por Teorema 49, tenemos que $p(\lambda I - T) < \infty$. Aplicando el Teorema 44, resulta que $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Por lo tanto, $\lambda \notin \sigma_b(T)$, así, $\sigma_b(T) \subseteq \sigma_w(T)$. Como $\sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T)$ siempre es cierta para cualquier operador, tenemos que $\sigma_b(T) = \sigma_w(T)$.

(d) $\Rightarrow$ (e). Sea $\lambda \in \pi_{00}(T) \cup \Delta(T)$. Como $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita, entonces $H_0(\lambda I - T)$ es cerrado, lo cual implica que T tiene la SVEP en λ . Dado que $\lambda \in \pi_{00}(T) \cup \Delta(T)$, entonces $\lambda \in \pi_{00}(T)$ o $\lambda \in \Delta(T)$. Claramente, si $\lambda \in \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$. Ahora, si $\lambda \in \Delta(T)$, tenemos que $\lambda I - T \in \Phi(X)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$. Por Teorema 49, tenemos que $0 < p(\lambda I - T) < \infty$. Aplicando el Teorema 44, resulta que $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Luego, por Teorema 35, $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$. Esto demuestra que si $\lambda \in \pi_{00}(T) \cup \Delta(T)$, entonces $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$. Por el Teorema 42, $X = H_0(\lambda I - T) \oplus K(\lambda I - T)$. En consecuencia, como $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita, concluimos que $K(\lambda I - T)$ es de codimensión finita.

(e) $\Rightarrow$ (d) Si $\lambda \in \pi_{00}(T) \cup \Delta(T)$, entonces $\lambda \in \pi_{00}(T)$ o $\lambda \in \Delta(T)$. Si $\lambda \in \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$. Ahora, si $\lambda \in \Delta(T)$, entonces $\lambda I - T \in \Phi(X)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$. Puesto que $K(\lambda I - T)$ es de codimensión finita y $\lambda I - T \in \Phi(X)$, se sigue del Teorema 50, que $q(\lambda I - T) < \infty$. Por el Teorema 44, tenemos que $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$, lo cual implica que $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$. Esto demuestra que si $\lambda \in \pi_{00}(T) \cup \Delta(T)$, entonces $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$. Entonces $X = H_0(\lambda I - T) \oplus K(\lambda I - T)$ (véase el Teorema 42). Como $K(\lambda I - T)$ es de codimensión finita por hipótesis, se tiene que $H_0(\lambda I - T)$ es de dimensión finita. ■

A continuación probaremos que si T tiene la SVEP, entonces la condición $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$ y el Teorema de Weyl son equivalentes.

Teorema 92. *Supongamos que $T \in B(X)$ o T^* tiene la SVEP. Entonces T satisface el Teorema de Weyl si y sólo si una de las condiciones equivalentes (a)-(h) del Teorema 90 es cierta.*

Demostración. Por el Teorema 52, si T o T^* tiene la SVEP, entonces $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$. Si T satisface el Teorema de Weyl, entonces

$$\pi_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = p_{00}(T),$$

así, la condición (i) del Teorema 90 se satisface. Recíprocamente, supongamos que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$. Entonces

$$\pi_{00}(T) = p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T).$$

■

Probaremos el siguiente resultado, que también relaciona el Teorema de Weyl con la SVEP.

Teorema 93. *Sea $T \in B(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) T satisface el Teorema de Weyl;
- (b) T tiene la SVEP en todo $\lambda \notin \sigma_w(T)$ y $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que T satisface el Teorema de Weyl, es decir, $\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T)$. Si $\lambda \notin \sigma_w(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma(T)$ o $\lambda \in \sigma(T)$. Si $\lambda \notin \sigma(T)$, entonces T tiene la SVEP en λ . Mientras que si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T) \subseteq \text{iso}\sigma(T)$, en consecuencia, T tiene la SVEP en λ . Por otro lado, se sigue del Teorema 89 que $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$.

$\Leftarrow$] Veamos que $\pi_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Sea $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Entonces $\lambda \notin \sigma_w(T)$, luego por hipótesis, T tiene la SVEP en λ y además, $\lambda I - T \in W(X)$. Así, por el Teorema 49, $p(\lambda I - T) < \infty$. Dado que $\lambda I - T \in W(X)$, entonces $\text{ind}(\lambda I - T) = 0$, esto es, $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$. Por el Teorema 44, $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Así, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = p_{00}(T)$, y puesto que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$, tenemos que $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Recíprocamente, si $\lambda \in \pi_{00}(T) = p_{00}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T)$, entonces $\lambda \notin \sigma_b(T)$, lo cual implica que $\lambda \notin \sigma_w(T)$. Por lo tanto, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_w(T)$. Esto completa la prueba. ■

Del Teorema 93 se sigue que T satisface el Teorema de Weyl si y sólo si T tiene la SVEP en todo punto $\lambda \notin \sigma_w(T)$ y satisface una de las condiciones equivalentes del Teorema 90.

Finalizamos esta sección probando que la SVEP no implica el Teorema de Weyl y que si T satisface el Teorema de Weyl no implica que T^* satisface dicha propiedad.

Ejemplo 19. La SVEP no implica el Teorema de Weyl.

Sea $T : l_2 \rightarrow l_2$, definido por $T(x_1, x_2, \dots) = (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$. Recorde-mos que T es casi-nilpotente y por lo tanto T tiene la SVEP. Sin embargo, por el Ejemplo 17, T no satisface el Teorema de Weyl.

Ejemplo 20. Si un operador satisface el Teorema de Weyl, entonces no implica que su adjunto satisface la misma propiedad.

Consideremos el adjunto del Ejemplo anterior. Como $r(T^*) = r(T) = 0$, tenemos que T^* también es casi-nilpotente. Por lo tanto T^* tiene la SVEP. Sabemos que $p_{00}(T^*) = \pi_{00}(T^*) = \emptyset$. Por lo tanto, por el Teorema 93, T^* satisface el Teorema de Weyl, mientras que $T^{**} = T$ no satisface el Teorema de Weyl.

3.3.2. Operadores que satisfacen el teorema de Weyl

En esta parte probamos que si T es k -paranormal o k -*-paranormal y $f \in H(\sigma(T))$, entonces el Teorema de Weyl es cierto para $f(T)$ y para $f(T^*)$. En particular, T y T^* satisfacen el Teorema de Weyl. Cabe señalar que estos resultados los obtuvimos a partir de los resultados obtenidos del Teorema de Weyl para operadores polaroides.

Denotemos por $P_0(X)$ el conjunto de todos los $T \in B(X)$ que satisfacen que para cada $\lambda \in \pi_{00}(T)$ existe $p = p(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$H_0(\lambda I - T) = N((\lambda I - T)^p).$$

Teorema 94. $T \in P_0(X)$ si y sólo si $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$. En particular, si T tiene la SVEP, entonces T satisface el Teorema de Weyl si y sólo si $T \in P_0(X)$.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $T \in P_0(X)$. Para cada $\lambda \in \pi_{00}(T)$ existe $p = p(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = N((\lambda I - T)^p)$. Veamos que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$. Si $\lambda \in \pi_{00}(T)$, entonces $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Puesto que $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$, entonces $X = H_0(\lambda I - T) \oplus K(\lambda I - T)$ (véase el Teorema 42). Así, $X = N((\lambda I - T)^p) \oplus K(\lambda I - T)$. En consecuencia,

$$(\lambda I - T)^p(X) = O \oplus (\lambda I - T)^p(K(\lambda I - T)) = K(\lambda I - T).$$

Por lo tanto, $X = N((\lambda I - T)^p) \oplus (\lambda I - T)^p(X)$. Luego, por el Teorema 36, $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) \leq p$. Ahora, como $\alpha(\lambda I - T) < \infty$, entonces $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$ (véase el Teorema 44). Por lo tanto, $\lambda I - T \in \mathbb{B}(X)$, es decir, $\lambda \notin \sigma_b(T)$. Esto implica que $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = p_{00}(T)$. Esto prueba que $\pi_{00}(T) \subseteq p_{00}(T)$. Luego, por la Proposición 7, concluimos que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T)$ y $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Entonces $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Luego, por el Teorema 42, tenemos que $H_0(\lambda I - T) = N((\lambda I - T)^p)$. Por lo tanto, $T \in P_0(X)$.

La segunda afirmación es clara. En efecto, si T satisface el Teorema de Weyl, se sigue del Teorema 89, que $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$, así, $T \in P_0(X)$.

Recíprocamente, si $T \in P_0(X)$ y tiene la SVEP, entonces T satisface el Teorema de Weyl, por el Teorema 93. ■

Corolario 10. *Si $T \in B(X)$ es polaroide, entonces $T \in P_0(X)$.*

Demostración. Nótese que $\pi_{00}(T) \subseteq \text{iso}\sigma(T)$. Si T es polaroide y $\lambda \in \pi_{00}(T)$, entonces existe $p = p(\lambda) \in \mathbb{C}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = N((\lambda I - T)^p)$, por el Teorema 75. Por lo tanto, $T \in P_0(X)$. ■

La implicación recíproca del Corolario previo no necesariamente es cierta.

Ejemplo 21. Un ejemplo de un operador que pertenece a la clase $P_0(X)$ que no es polaroide.

Supongamos que T^* es como en el Ejemplo 20. Entonces $T^* \in P_0(X)$ y $p(T^*) = 0$, ya que T^* es inyectivo. Sin embargo, $q(T^*) = \infty$, pues en caso contrario (véase el Teorema 35), $q(T^*) = 0$, esto implica que T^* es sobreyectivo, lo cual es imposible, ya que $\sigma(T^*) = \{0\}$. Por lo tanto, T^* no es polaroide.

Notemos que existen operadores polaroides que no satisfacen el Teorema de Weyl. En efecto, consideremos T del Ejemplo 18, entonces T no satisface el Teorema de Weyl. Sin embargo, T es polaroide, ya que $\text{iso}\sigma(T) = \emptyset$. De aquí también se obtiene que si $T \in P_0(X)$, no implica que T satisface el Teorema de Weyl.

Continuemos con nuestra exposición probando algunos resultados del Teorema de Weyl para operadores polaroides.

Lema 13. *Si $T \in B(X)$ es polaroide, entonces $T^* \in B(X^*)$ es polaroide.*

Demostración. Sea $\lambda \in \text{iso}\sigma(T^*)$. Puesto que T es polaroide e $\text{iso}\sigma(T) = \text{iso}\sigma(T^*)$, entonces λ es un polo del resolvente de T . Así, $0 < p = p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Del Teorema 42 se sigue que $R(\lambda I - T)$ es cerrado y $X = N((\lambda I - T)^p) \oplus R((\lambda I - T)^p)$. Luego, de la Observación 1, obtenemos:

$$\begin{aligned} X^* &= N((\lambda I - T)^p)^\circ \oplus R((\lambda I - T)^p)^\circ \\ &= R((\lambda I^* - T^*)^p) \oplus N((\lambda I^* - T^*)^p). \end{aligned}$$

Por el Teorema 36, $0 < p(\lambda I^* - T^*) = q(\lambda I^* - T^*) \leq p$. Por lo tanto, λ es un polo del resolvente de T^* , es decir, T^* es polaroide. ■

Aplicaremos el Lema anterior para probar el siguiente teorema.

Teorema 95. *Si $T \in B(X)$ es polaroide y satisface el Teorema de Weyl, entonces T^* satisface el Teorema de Weyl.*

Demostración. Si T es polaroide, entonces T^* es polaroide (véase el Lema 13). Por el Corolario 10 se sigue que $T \in P_0(X)$ y $T^* \in P_0(X^*)$, y por lo tanto $p_{00}(T) = \pi_{00}(T)$ y $p_{00}(T^*) = \pi_{00}(T^*)$, por el Teorema 94. Aplicando la Proposición 7, tenemos que $\pi_{00}(T) = p_{00}(T) = p_{00}(T^*) = \pi_{00}(T^*)$. Como T satisface el Teorema de Weyl, $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ y $\sigma_w(T) = \sigma_w(T^*)$, entonces:

$$\sigma(T^*) \setminus \sigma_w(T^*) = \sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T) = \pi_{00}(T^*).$$

Por lo tanto, T^* satisface el Teorema de Weyl. ■

Corolario 11. *Sea $T \in B(X)$. Si T es polaroide y T o bien T^* tiene la SVEP, entonces T y T^* satisfacen el Teorema de Weyl.*

Demostración. Supongamos que T tiene la SVEP. Como T es polaroide, entonces $T \in P_0(X)$, esto implica que T satisface el Teorema de Weyl, por el Teorema 94. Ahora, del Teorema 95, se sigue que T^* también satisface el Teorema de Weyl.

Ahora supongamos que T^* tiene la SVEP. Claramente, T^* satisface el Teorema de Weyl, ya que T^* es polaroide. Finalmente, veamos que T satisface el Teorema de Weyl. Puesto que T y T^* , ambos, son polaroides, tenemos que $\pi_{00}(T) = \pi_{00}(T^*)$, como en la prueba del Teorema 95. Luego, como T^* satisface el Teorema de Weyl, tenemos:

$$\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \sigma(T^*) \setminus \sigma_w(T^*) = \pi_{00}(T^*) = \pi_{00}(T).$$

De aquí se obtiene que T también satisface el Teorema de Weyl. ■

Recordemos que $T \in B(X)$ es isoloide si todo punto aislado de $\sigma(T)$ es un valor propio de T . Es claro que todo operador polaroide es isoloide. En efecto, si T es polaroide, entonces todo punto aislado λ de $\sigma(T)$ es un polo del resolvente de T . Así, $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$, de lo cual λ es un valor propio de T , es decir, T es isoloide. Sin embargo, existen operadores isoloides que no son polaroides.

Ejemplo 22. Un ejemplo de un operador isoloide que no es polaroide.

Sea T como en el Ejemplo 17. Entonces $\alpha(T) = 1$, esto implica que 0 es un valor propio de T , y por lo tanto T es isoloide. Por otro lado, por el Ejemplo 21, $q(T^*) = \infty$. De la igualdad $p(T) = q(T^*)$ se sigue que $p(T) = \infty$. Por lo tanto, T no es polaroide. En particular, también obtenemos que existen operadores isoloides que no satisfacen el Teorema de Weyl, ya que T no satisface dicha propiedad.

En general, entre los operadores de clase $P_0(X)$ y los operadores isoloides no hay una buena relación. En efecto, si T es como en el Ejemplo anterior, entonces T es isoloide. Pero T no es de clase $P_0(X)$, ya que $\emptyset = p_{00}(T) \neq \pi_{00}(T) = \{0\}$. Por otro lado, $T^* \in P_0(X)$, mientras que T^* no es isoloide.

Observación 7. Si T es isoloide y $f \in H(\sigma(T))$, entonces

$$\sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)) = f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)).$$

La prueba de esta Observación se puede encontrar en el Lema 3.89 de Aiena [3]. Usaremos esta Observación para probar el siguiente teorema.

Teorema 96. *Supongamos que T es polaroide y $f \in H(\sigma(T))$. Si T o T^* tiene la SVEP, entonces $f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen el Teorema de Weyl.*

Demostración. Supongamos que T es polaroide. Entonces T^* es polaroide y por lo tanto T y T^* , ambos, son isoloides. De la Observación 7, tenemos que $\sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)) = f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T))$ y $\sigma(f(T^*)) \setminus \pi_{00}(f(T^*)) = f(\sigma(T^*) \setminus \pi_{00}(T^*))$. Si T o T^* tiene la SVEP, entonces $\sigma_w(f(T)) = f(\sigma_w(T))$ y $\sigma_w(f(T^*)) = f(\sigma_w(T^*))$ (véase el Corolario 8). Usando nuevamente la condición de que T o T^* tiene la SVEP, y teniendo en cuenta el Corolario 11, tenemos que T y T^* satisfacen el Teorema de Weyl. Así, $\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T) = \sigma_w(T)$ y $\sigma(T^*) \setminus \pi_{00}(T^*) = \sigma_w(T^*)$. Por lo tanto,

$$\sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)) = f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)) = f(\sigma_w(T)) = \sigma_w(f(T)), \text{ y}$$

$$\sigma(f(T^*)) \setminus \pi_{00}(f(T^*)) = f(\sigma(T^*) \setminus \pi_{00}(T^*)) = f(\sigma_w(T^*)) = \sigma_w(f(T^*)).$$

En consecuencia, $f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen el Teorema de Weyl. ■

Los siguientes Teoremas son consecuencias inmediatas de los resultados obtenidos para operadores polaroides.

Teorema 97. *Si T es k -paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen el Teorema de Weyl. En particular, T y T^* satisfacen el Teorema de Weyl.*

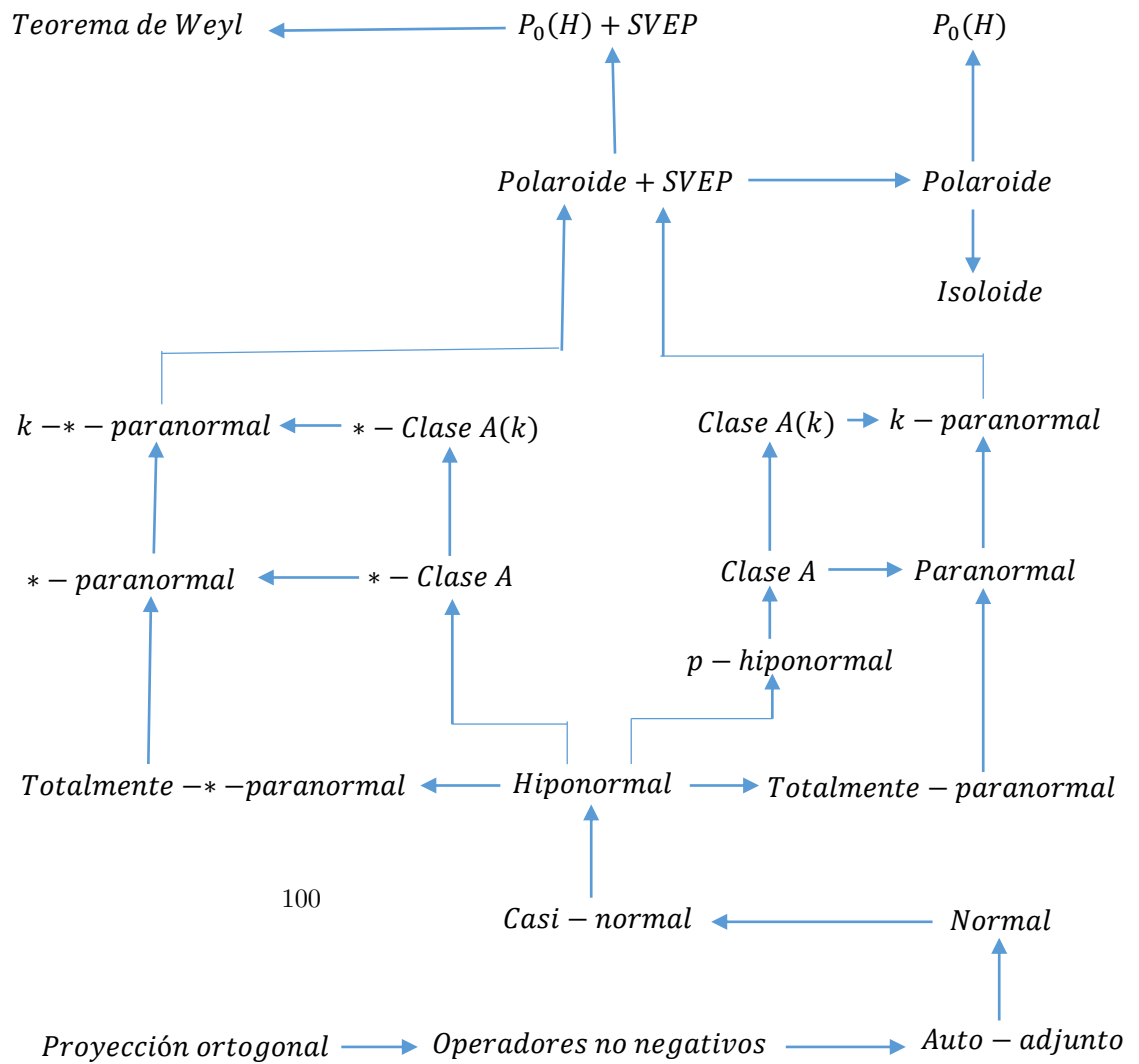
Demostración. Supongamos que T es k -paranormal. Por el Teorema 76, T es polaroide, y por el Corolario 9, T tiene la SVEP. Luego, por el Teorema 96, $f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen el Teorema de Weyl. ■

También probaremos que los operadores k -*-paranormales satisfacen el Teorema de Weyl.

Teorema 98. *Si T es k -*-paranormal para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen el Teorema de Weyl. En particular, T y T^* satisfacen el Teorema de Weyl.*

Demostración. Supongamos que T es k -*-paranormal. Por el Teorema 71, T tiene la SVEP, y por el Teorema 77, T es polaroide. Luego, por el Teorema 96, $f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen el Teorema de Weyl. ■

Figura 3.1: Para finalizar, presentamos un resumen mediante un diagrama que muestra las relaciones que existen entre las clases de operadores introducidas en este trabajo. En particular, muestra las clases de operadores que satisfacen el Teorema de Weyl según los resultados obtenidos en esta sección.



Conclusiones

En el presente trabajo inicialmente analizamos las relaciones existentes entre las clases de operadores especiales en los espacios de Hilbert tales, como operadores normales, hiponormales, clase A y paranormales, entre otros. Principalmente, estudiamos sus propiedades espectrales y la proyección espectral para estas clases de operadores.

Por otra parte, hemos considerado el Teorema de la aplicación espectral para los espectros generados a las clases de operadores en los espacios de Banach de tipo Fredholm, Browder y Weyl, entre otros.

También, caracterizamos el Teorema de Weyl, relacionamos esta propiedad con la SVEP, dimos resultados principales de esta misma propiedad para operadores polaroides en los espacios de Banach y clasificamos clases de operadores que lo satisfacen.

Además, mostramos ejemplos para justificar las relaciones que no son verdaderas. Cabe señalar que en varios de estos ejemplos no aparece su demostración en las fuentes originales. Al final de cada sección del capítulo tres fuimos aplicando los resultados obtenidos en el caso general de operadores actuando en los espacios de Banach para clases especiales de operadores en los espacios de Hilbert. Específicamente, que dados $T \in B(H)$ y $f \in H(\sigma(T))$, probamos:

- (a) Si T es k -paranormal y $0 \neq \lambda \in \text{iso}\sigma(T)$, entonces P es auto-adjunta, donde P es la proyección espectral de T asociada con λ .
- (b) Si T es k -*-paranormal y $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$, entonces P es auto-adjunta, donde P es la proyección espectral de T asociada con λ .
- (c) Si T es k -paranormal o k -*-paranormal, entonces:
 - 1. T y T^* son polaroides y por lo tanto isoloides.

2. $\sigma_e(f(T)) = f(\sigma_e(T))$, $\sigma_b(f(T)) = f(\sigma_b(T))$ y $\sigma_w(f(T)) = f(\sigma_w(T))$.
3. $f(T)$ y $f(T^*)$ satisfacen el Teorema de Weyl.

Apéndice: Funciones analíticas

En este apéndice damos los resultados más importantes sobre las funciones analíticas $F : U \rightarrow X$, donde U es un subconjunto abierto del plano complejo y X es un espacio de Banach. Los detalles de lo aquí expuesto pueden verse en [1].

Definición 32. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Diremos que $F : U \rightarrow X$ es analítica en U si para todo $\lambda_0 \in U$, existe el límite

$$F'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}.$$

En tal caso, la función F' es llamada la derivada de F . Si $x^*F : U \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica, para cada $x^* \in X^*$, entonces $F : U \rightarrow X$ se dice débilmente analítica en U .

Las derivadas de orden superior $F^{(n)}(\lambda_0)$ de la función F en el punto λ_0 son definidas de forma recursiva. También es bien conocido que $F : U \rightarrow X$ es analítica en U si y sólo si F es débilmente analítica en U .

Una curva en $\mathbb{C}$ es definida como una función continua $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, donde $[a, b]$ es un intervalo en $\mathbb{R}$. Se dice que es cerrado si $\Gamma(a) = \Gamma(b)$. Una curva cerrada Γ se llama una curva simple si para todo $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 < t_2$ y $\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2)$ implica que $t_1 = a$ y $t_2 = b$. En este caso identificamos Γ con su imagen $\Gamma([a, b])$. Una curva Γ es rectificable si el supremo del conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^n |\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \right\}$$

es finito. Una curva de Jordan es una curva simple, cerrada y rectificable.

El Teorema de la curva de Jordan establece que si Γ es una curva simple cerrada, entonces $\mathbb{C} \setminus \Gamma([a, b])$ tiene dos componentes conexas, una acotada y otra no acotada. El interior de una curva de Jordan Γ es la componente acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma([a, b])$ y se denota por $int(\Gamma)$. El exterior de una curva de Jordan Γ es la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma([a, b])$ y se denota por $ext(\Gamma)$. Una curva de Jordan Γ se dice que está orientada positivamente si $int(\Gamma)$ se encuentra a la izquierda según se traza la curva.

Un dominio en $\mathbb{C}$ es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$. Un dominio Ω es simplemente conexo si el complemento de Ω en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es un conjunto conexo.

Como en el análisis clásico complejo, otra noción relacionada con las funciones analíticas a valores en un espacio de Banach X es la integral de una función a valores en X .

Definición 33. Sea $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva rectificable en $\mathbb{C}$. Si $F : \Gamma([a, b]) \rightarrow X$ es continua, entonces definimos su integral de contorno como el límite de sumas de Riemann-Stieltjes:

$$\int_{\Gamma} F(\lambda) d\lambda = \int_a^b F(\Gamma(t)) d\Gamma(t) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\Gamma(s_i)) [\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})],$$

donde $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ es una partición de $[a, b]$, $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $\|\Delta\| = \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$.

Sea Γ una curva rectificable en $\mathbb{C}$. Para funciones continuas $F, G : \Gamma([a, b]) \rightarrow X$ tenemos:

- (a) $\int_{\Gamma} \mu F(\lambda) d\lambda = \mu \int_{\Gamma} F(\lambda) d\lambda;$
- (b) $\int_{\Gamma} (F(\lambda) + G(\lambda)) d\lambda = \int_{\Gamma} F(\lambda) d\lambda + \int_{\Gamma} G(\lambda) d\lambda;$
- (c) $\|\int_{\Gamma} F(\lambda) d\lambda\| \leq (\max_{\lambda \in \Gamma([a, b])} \|F(\lambda)\|) L_{\Gamma},$ donde L_{Γ} es la longitud de Γ .
- (d) $x^*(\int_{\Gamma} F(\lambda) d\lambda) = \int_{\Gamma} x^* F(\lambda) d\lambda;$
- (e) $T(\int_{\Gamma} F(\lambda) d\lambda) = \int_{\Gamma} TF(\lambda) d\lambda;$

para cualesquiera $\mu \in \mathbb{C}$, $x^* \in X^*$ y $T \in B(X)$.

Sea U un dominio en $\mathbb{C}$ y sean $\Gamma_1, \Gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dos curvas contenidas en U con los mismos extremos, esto es, $\Gamma_1(a) = \Gamma_2(a)$ y $\Gamma_1(b) = \Gamma_2(b)$, o bien dos curvas cerradas contenidas en U . Diremos que Γ_1 y Γ_2 son homotópicas en U si Γ_1 se puede deformar continuamente hasta transformarse en Γ_2 sin salirse de U .

A continuación presentamos algunos resultados fundamentales para funciones analíticas $F : U \rightarrow X$, donde U es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, similares a los ya conocidos en el análisis complejo clásico.

Teorema 99. (*integral de Cauchy*) Sea U un dominio en $\mathbb{C}$. Si F es analítica en U y Γ_1, Γ_2 son curvas rectificables y homotópicas en U , entonces

$$\int_{\Gamma_1} F(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_2} F(\lambda) d\lambda.$$

En particular, si U es simplemente conexo, entonces $\int_{\Gamma} F(\lambda) d\lambda = 0$ para cada curva de Jordan en U .

Teorema 100. (*fórmula integral de Cauchy*) Sea U un dominio en $\mathbb{C}$. Si U es simplemente conexa y F es analítica en U , entonces F tiene derivadas de cualquier orden en cada $\lambda_0 \in U$ y éstas vienen dadas por la fórmula:

$$F^n(\lambda_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda \quad \text{para } n = 0, 1, \dots,$$

donde Γ es cualquier curva de Jordan positivamente orientado en U y $\lambda_0 \in \text{int}(\Gamma)$.

Teorema 101. (*de Taylor*) Sean U un dominio en $\mathbb{C}$ y $F : U \rightarrow X$ una función analítica. Sean $\lambda_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $D(\lambda_0, r) \subseteq U$. Si $\lambda \in D(\lambda_0, r)$, entonces

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n,$$

donde

$$a_n = \frac{F^n(\lambda_0)}{n!} \in X \quad \text{para } n = 0, 1, \dots$$

Teorema 102. (*expansión en serie de Laurent*) Sea $F : D(\lambda_0, r) \setminus \{\lambda_0\} \rightarrow X$ una función analítica en el anillo o disco agujerado $D(\lambda_0, r) \setminus \{\lambda_0\} =$

$\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \lambda_0| < r\}$. Entonces, F admite un desarrollo en serie de Laurent

$$F(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(\lambda - \lambda_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n$$

sobre dicho anillo, donde los coeficientes están dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda \quad y \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(\lambda) (\lambda - \lambda_0)^{n-1} d\lambda,$$

donde $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = \delta\}$, con $0 < \delta < r$.

Suponiendo el teorema anterior, se tienen las siguientes expresiones:

- (i) λ_0 es una singularidad de F si $b_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) λ_0 es un polo de orden p de F si $b_p \neq 0$ y $b_n = 0$ para todo $n > p$.
- (iii) λ_0 es una singularidad esencial de F , si $b_n \neq 0$ para infinitos n .

Finalmente, presentamos el Teorema de Liouville:

Teorema 103. (de Liouville) Si $F : \mathbb{C} \rightarrow X$ es acotada y analítica entonces F es una función constante.

Los resultados dados aquí se pueden demostrar exactamente de la misma manera que se hacen las demostraciones de los resultados correspondientes a las funciones complejas de una variable compleja.

Referencias

- [1] Ahues, M., Largillier, A., Limaye, B.V., “*Spectral computations for bounded operators*”, Chapman y Hall, 1-58488-196-8, 2001.
- [2] Aiena, P., Biondi, M.T., “Browder’s theorems trough localized SVEP”, *Mediterranean J. Math.*, Vol. 2, 137-151, 2005.
- [3] Aiena, P., “*Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers*”, Kluwer Acad, Publishers, 1-4020-2525-4, 2004.
- [4] Aiena, P., Miller, T.L., Neumann, M.M., “On a localized single-valued extension property”, *Proc. Royal Irish Ac.*, Vol. 1, 17-34, 2004.
- [5] Aiena, P., Rosas, E., “The sigle-valued extension property at the points of the aproximate point spectrum”, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 279, 180-188, 2003.
- [6] Coburn, L.A., “Weyl’s theorem for non-normal operators, Michigan”, *Maht. J.*, Vol. 13, 285-288, 1966.
- [7] Duggal, B.P., Djordjevic, S.V., “Weyl’s theorem through finite ascent property”, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, Vol. 10, 139-147, 2004.
- [8] Duggal,, B.P., “Hereditarily Normaloid Operators”, *E. Math.*, Vol. 20, 203-217, 2005.
- [9] Duggal, B.P., “Polaroid operators satisfying Weyl’s theorem”, *Lin. Alg. Appl.*, Vol. 414, 271-277, 2006.
- [10] Duggal, B.P., “Riesz projections for a class of Hilbert space operators”, *Lin. Alg. Appl.*, Vol. 407, 140-148, 2005.
- [11] Dunford, N., “Spectral operators”, *Pacific J. Math.*, Vol. 4, 321-354, 1954.

- [12] Dunford, N., "Spectral theory II. Resolution of the identity", *Pacific J. Math.*, Vol. 2, 559-614, 1952.
- [13] Fei, Z., Junli, S., "A note on $*$ - n -paranormal Operators", *S. Math.*, Vol. 42, 153-158, 2013.
- [14] Finch, J.K., "The single valued extension property on a Banach space", *Pacific J. Math.*, Vol. 58, 61-69, 1975.
- [15] Furuta, T., "*Invitation to Linear Operators*", Taylor & Francis London, 0-415-26799-4, 2001.
- [16] Kubrusly, C.S., Duggal B.P., "A note on k -paranormal operators", *Operators and Matrices*, Vol. 4, 213-223, 2010.
- [17] Kubrusly, C.S., "*Elements of Operator Theory*". Birkhauser Boston. 0-8176-4174-2. 2000.
- [18] Laursen, K.B., Newmann, M.N., "*Introduction to Local Spectral Theory*", Clarendon Press, Oxford, 0-19-852381-5, 2000.
- [19] Panayappan, S., Jayanthi, N., Sumathi, D., "Generalised Weyl and Weyl type theorems for algebraically k - $*$ -paranormal operators", *Scientia Magna*, Vol. 8, 111-121, 2012.
- [20] Panayappan, S., Jayanthi, N., Sumathi, D., "Weyl and Weyl Type Theorems for k -paranormal and Algebraically k -paranormal Operators", *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 6, 1953-1964, 2012.
- [21] Panayappan, S., Jayanthi, N., Sumathi, D., "Weyl's Theorem and Tensor Product for Class A_k Operators", *P. Math. Sciences*, Vol. 1, 13-23, 2012.
- [22] Rudin, W., "*Functional Analysis*", 2d ed. McGraw Hill, Boston, Massachusetts, 0-07-054236-8, 1991.
- [23] Stampfli, J.G., "Hyponormal operators and spectral density", *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 117, 469-476, 1965.
- [24] Weyl, H., "Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollsteig ist", *Rend. Cir. Math. Palermo*, Vol. 27, 373-392, 1909.
- [25] Yuan, J., Gao, Z., "Weyl Spectrum of Class $A(n)$ and n -Paranormal Operators", *Integr. Equat. Oper.*, Vol. 60, 289-298, 2008.