

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS



Reducción del problema de Dirichlet para la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = f$ en una región del plano a un problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson, con suposiciones adicionales sobre el campo $\epsilon \nabla u$.

TESIS

que para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Presenta:

M.C. Emmanuel Abdias Romano Castillo

Directores de la tesis:

Dr. Alexandre I. Grebennikov y Dr. Andrés Fragueta Collar.

Puebla, Puebla.

Marzo 2016

Dedicatoria

Para ÉL;
quien me dotó de cuerpo, vida y pensamiento.

Para Abdias y Lea;
quienes se esforzaron siempre por mi educación.

Para Silvia;
quien me apoyó y me proporcionó tiempo.

Para Jafet David, Karen Abigail y César Gabriel;
quienes con sus necesidades y sueños me proveyeron de coraje.

Y para todas aquellas personas que depositaron su confianza en mí, contribuyendo así con la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla para la creación de un fruto más, que lleve sus semillas del conocimiento.

Agradecimientos

Estoy agradecido con los revisores de la tesis:

Dr. Alexandrov Kuteynikova Vladimir,
Dr. Slavisa Djordjevic,
Dr. José Jacobo Oliveros Oliveros,
Dra. María Monserrat Morín Castillo,
Dra. Juan Alberto Escamilla Reyna,
Dr. Alexandre Grebennikov,
Dr. Andrés Fraguela Collar,

por todas las observaciones realizadas a la misma.

Agradezco al CONACyT por el apoyo económico durante el desarrollo de la tesis porque, gracias a la estructura del programa de becas para el doctorado se ha hecho posible realizar la tesis.

Emmanuel Abdias Romano Castillo

Índice general

Presentación	7
Introducción	11
Planteamiento del problema	13
1. Solución del problema cuando ϵ depende sólo de r.	17
1.1. Caso en que ϵ depende sólo de r y f depende sólo de r	19
1.2. Caso en que ϵ depende sólo de r y f depende de (r, θ)	20
2. Solución del problema cuando ϵ depende de r y θ	23
2.1. Aproximación de F cuando ϵ es el producto de funciones de variables separables	25
2.2. Aproximación de $F(\epsilon)$ cuando ϵ es la suma de funciones de variables separables	27
2.3. Aproximación a $F(\epsilon)$ cuando ϵ depende sólo de x o sólo de y	28
3. Problema inverso de identificación de ϵ	31
3.1. Introducción	31
3.2. Planteamiento del problema inverso	33
3.3. Reducción de la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = f$	36
4. Uso de la transformada de Radon para resolver la ecuación de Laplace	39
4.1. Transformada de Radon de la derivada de una función	39
4.2. Laplaciano de una función en sentido generalizado	41
4.3. Transformada de Radon del laplaciano en sentido generalizado	43
4.4. Solución numérica de algunos problemas de Dirichlet para la ecuación de Laplace	44
4.4.1. Resultados numéricos para ilustrar la metodología	45

4.4.2.	Comparación de las soluciones exacta y las obtenidas numéricamente del problema de Dirichlet	49
4.5.	Problemas sintéticos para ϵ constante por partes.	51
4.5.1.	Problema Dirichlet para ϵ por partes en un dominio con inclusión	51
4.5.2.	Problema de Dirichlet para ϵ por partes en un dominio estratificado	54
	Conclusiones	59
	Bibliografía	61

Presentación

Algunos fenómenos que ocurren en el mundo que nos rodea, se pueden explicar mediante leyes que rigen su comportamiento. Por ejemplo, la Ley de Fick de difusión (concentración química), la Ley de Fourier (conducción de calor), Ley de Ohm (conducción eléctrica), etc. Las leyes citadas anteriormente tienen una representación en forma algebraica y las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) son parte de los medios para representarlas.

La ecuación $div(\epsilon \nabla u) = f$ es más general que las ecuaciones de Laplace o Poisson y se puede deducir de las ecuaciones de Maxwell o de las ecuaciones de medios continuos. Típicamente la función u puede representar densidad de una cantidad y el término de segundo orden $div(\epsilon \nabla u)$ representa la difusión de u ; el coeficiente ϵ describe alguna característica física del medio, por ejemplo en tomografía eléctrica representa la permitividad o conductividad. Cuando se conoce ϵ , existen dos problemas clásicos asociados con la ecuación: el problema de Dirichlet y el problema de Neumann. En la introducción se amplían detalles de lo que significa cada uno.

Una suposición importante que se puede hacer directamente sobre el campo $\epsilon \nabla u$ es que sea irrotacional, por ejemplo en el problema de la Tomografía de Capacitancia Eléctrica, el campo $\epsilon \nabla u$ representa el campo de velocidades del flujo, el cual no es rotacional en tuberías verticales (no se forman vórtices) y la mezcla sube en forma de filamentos o burbujas.

Este trabajo de investigación está enfocado en la determinación de condiciones que permitan reducir el problema de Dirichlet para la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = f$ en una región acotada del plano, a un problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson, con la suposición que $rot(\epsilon \nabla u) = 0$. Además de obtener su solución en forma explícita o de manera aproximada.

Resultados de la investigación

Entre los resultados más importantes podemos destacar los siguientes:

1. Sí ϵ y f dependen sólo de r , φ depende de θ y el campo $\epsilon \nabla u$ es irrotacional se obtuvo una forma explícita para la solución.
2. Sí ϵ dependen sólo de r , f depende de r y θ y φ depende sólo de θ se obtuvo un método numérico para aproximar a la solución u bajo la suposición $rot(\epsilon \nabla a_n) = 0$, $rot(\epsilon \nabla b_n) = 0$ y $rot(\epsilon \nabla a_0) = 0$; donde a_n , b_n y a_0 son los coeficientes de Fourier de la solución u .
3. Bajo la suposición de irrotacionalidad del campo $\epsilon \nabla u$ se da una expresión para la solución u que puede calcularse de forma explícita cuando ϵ pertenece al conjunto

$$\left\{ \epsilon \in C^2(\bar{\Omega}) : \epsilon(x, y) > M > 0, \nabla \epsilon \neq 0 \text{ y existe una función } F(\epsilon) \text{ tal que } \Delta \epsilon = |\nabla \epsilon|^2 F(\epsilon) \right\}. \quad (1)$$

y de forma aproximada cuando ϵ se escribe como la suma o producto de variables separables.

4. Se resuelve el problema inverso de identificación de ϵ considerando a $rot(\epsilon \nabla u) = 0$ como información apriori, la cual no es clásica. Para la solución del problema inverso se reduce el problema de Dirichlet para la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = f$ al problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson $\Delta E(u) = f$, donde $E(u)$ es la función potencial y una primitiva de la función $\epsilon(x, y)$.
5. Se plantea una metodología para resolver el problema de Dirichlet para la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = f$ la cual involucra la transformada de Radon, se realizan algunos experimentos numéricos que muestran la viabilidad de la metodología. Los resultados se comparan con el método de elemento finito y un resultado parcial de la justificación teórica que consiste en obtener la transformada de Radon del Laplaciano en sentido generalizado.

Estructura de la Tesis

La manera en que se distribuye el trabajo de investigación es la siguiente:

En Capítulo 1 se buscan soluciones analíticas del problema (8)- (9). Se comienza con el caso más simple mostrando que si ϵ depende sólo de r , entonces

u depende de r y solamente se puede suponer la condición de irrotacionalidad del flujo $\epsilon \nabla u$, cuando la función f depende sólo de r y la función φ es constante con respecto a r .

Además se muestra que si ϵ depende sólo de r y si la función f depende de r y θ , entonces u debe ser una función de r y θ y no tendría sentido suponer que se cumple $rot(\epsilon \nabla u) = 0$.

Sin embargo, como u depende de r y θ , entonces se busca en serie de Fourier, ello conduce a resolver un sistema de problemas de contorno en términos de los coeficientes de Fourier de u , f y φ ; en la que se puede suponer que $rot(\epsilon \nabla a_n) = 0$, $rot(\epsilon \nabla b_n) = 0$ y $rot(\epsilon \nabla a_0) = 0$; para $n = 1, 2, \dots$ y en los que se encuentra explícitamente los a_n , b_n y a_0 . Aportando así un método numérico de solución al problema de contorno (8)-(9).

En el Capítulo 2 se supone que $f \equiv 0$ y que ϵ depende de r y θ . Buscamos las condiciones que debe cumplir ϵ para que la solución u de la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = 0$ satisfaga $rot(\epsilon \nabla u) = 0$; además se muestra una forma explícita de la solución u que bajo ciertas condiciones se halla de forma exacta y bajo otras condiciones se halla de manera aproximada.

En el Capítulo 3 se resuelve el problema inverso de identificación de ϵ para la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = f$, considerando que $rot(\epsilon \nabla u) = 0$ es la información a priori.

En el Capítulo 4 se presenta una metodología para resolver el problema (8)-(9) en la que se usa la transformada de Radon. Se muestran ejemplos sintéticos que se comparan con el método de elemento finito. En este sentido también se expone un análisis sobre la justificación teórica sobre el uso de la transformada de Radon para la ecuación de Laplace.



Introducción

Debido a que el objetivo de este trabajo de investigación es reducir una ecuación elíptica a la ecuación de Laplace o de Poisson, comenzamos exponiendo información sobre dichas ecuaciones.

Entre las ecuaciones diferenciales más importantes se encuentran indudablemente la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega; \tag{2}$$

y la ecuación de Poisson

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

En ambas (2) y (3) la función desconocida es $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto dado. En (3) la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es también dada.

La ecuación de Laplace surge en una amplia variedad de contextos físicos. En una interpretación típica u denota la densidad de alguna cantidad en equilibrio (por ejemplo concentración química).

Así, si V es cualquier subregión suave contenida en Ω , el flujo neto de u a través de ∂V es cero; esto es:

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu \, ds = 0, \tag{4}$$

donde F denota la densidad de flujo y ν el vector unitario normal exterior a ∂V . Por el teorema de Gauss se cumple:

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu \, ds = \int_V \operatorname{div} F \, dx = 0, \tag{5}$$

por lo tanto,

$$\operatorname{div} F = 0, \quad \text{en } \Omega; \tag{6}$$

ya que V fue arbitraria. En muchos casos es físicamente razonable asumir que el flujo F es proporcional al gradiente ∇u pero que apunta en la dirección opuesta (ya que el flujo va de regiones con más alta concentración a regiones con más baja concentración). Esto es:

$$F = -a\nabla u, \text{ donde } a > 0; \quad (7)$$

sustituyendo (7) en (6), obtenemos la ecuación de Laplace

$$\operatorname{div}(F) = \Delta u = 0.$$

Si u denota la concentración química, la ecuación (7) es la Ley de Fick de difusión. Si u denota temperatura, la ecuación (7) es la Ley de Fourier de la conducción de calor. Si u denota potencial electrostático, la ecuación (7) es la Ley de Ohm de conducción eléctrica. Puede ver el capítulo 12 de [12] para una discusión más extensa de la importancia de la ecuación de Laplace en la Física Matemática.

Por su parte la ecuación $\operatorname{div}(\epsilon\nabla u) = f$ es más general que las ecuaciones de Laplace y Poisson; y se le puede deducir de las ecuaciones de Maxwell o de las ecuaciones de medios continuos ([22]).

Típicamente la función u representa densidad de una cantidad, digamos una concentración química en equilibrio dentro de una región Ω . El término de segundo orden $\operatorname{div}(\epsilon\nabla u)$ representa la difusión de u dentro de Ω , el coeficiente ϵ describe alguna característica física del medio Ω que generalmente es de naturaleza heterogénea y anisotrópica ([21]).

En tomografía eléctrica ϵ representa permitividad o conductividad del medio, u el potencial eléctrico y $f = 0$ debido a que no hay fuentes ni sumideros de corriente ([5]).

Cuando se conoce ϵ , existen problemas clásicos relacionados con la ecuación $\operatorname{div}(\epsilon\nabla u) = f$:

- a) El problema de Dirichlet para la ecuación $\operatorname{div}(\epsilon\nabla u) = f$, que consiste en hallar a u en algún espacio de funciones definidas sobre Ω , a partir del conocimiento de f y $u|_{\partial\Omega}$.
- b) El problema de Neumann para la ecuación $\operatorname{div}(\epsilon\nabla u) = f$, que consiste en hallar a u en algún espacio de funciones definidas sobre Ω , a partir del conocimiento de f y $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}$.

Cuando ϵ es desconocido, se puede plantear el llamado *problema inverso de identificación de coeficientes* en términos de la ecuación $\operatorname{div}(\epsilon \nabla u) = 0$ y las condiciones de Dirichlet y Neumann ([21]). Debido a que el problema inverso es mal planteado, todo método de solución propuesto se debe validar, y una forma de validación consiste en sustituir la solución obtenida ϵ y corroborar que satisface las problemas de Dirichlet o Neumann de las que partimos. De ahí que es importante tener una expresión para la solución del problema de Dirichlet para la ecuación $\operatorname{div}(\epsilon \nabla u) = f$.

Existen varios métodos teóricos y numéricos para resolver problemas de contorno de la ecuación de Poisson o de Laplace. Entre los métodos teóricos más importantes se encuentran el método de las funciones de Green, los de teoría del potencial, separación de variables; estos métodos generalmente presentan dificultades, por ejemplo, en cuanto a hallar las funciones de Green ([3],[4],[29]). Entre los métodos numéricos más importantes se encuentran los métodos de discretización y los métodos basados en Elemento Finito; cuya dificultad radica en resolver sistemas de ecuaciones que requieren mucho tiempo y memoria de la computadora.

También existen diferentes métodos para resolver el problema directo de Dirichlet o de Neumann para la ecuación $\operatorname{div}(\epsilon \nabla u) = f$; entre los métodos analíticos también se encuentran el método de funciones de Green, los de la teoría del potencial, las transformaciones conformes, el método de las imágenes, etc. ([3],[4],[29]). Paquetes tales como EIDORS (Electrical Impedance an Diffuse Optica Reconstruction Software) que es una librería para MATLAB y Octave; se enfocan en la solución numérica de problemas directos e inversos para un conjunto limitado de problemas en 2 y 3 dimensiones..

Planteamiento del problema

A lo largo de este trabajo, salvo mención en contra, designamos por $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una región simplemente conexa y con frontera suave, vamos a suponer que $\epsilon(x, y)$ es una función de valores reales, de clase $C^2(\bar{\Omega})$ y que cumple $\epsilon(x, y) > M > 0$, para algún M .

Como se describió anteriormente; cuando el dominio Ω no es una región simple, no es sencillo encontrar la solución del problema de Neumann o de Dirichlet de forma explícita. Por lo anterior, resulta interesante analizar la via-

bilidad de resolver el problema de Neumann o de Dirichlet para la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = f$, mediante el uso de la transformada de Radon. Sin embargo, para utilizar la transformada de Radon primero se debe reducir la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = f$ a una ecuación con coeficientes constantes que puede ser la ecuación de Laplace o la ecuación de Poisson. Esto es, cuando ϵ , f y φ son funciones dadas; nos interesa reducir el problema:

$$div(\epsilon \nabla u) = f, \text{ en } \Omega; \quad (8)$$

$$u = \varphi, \text{ sobre } \partial\Omega; \quad (9)$$

a un problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson de la forma:

$$\Delta v = f, \text{ en } \Omega; \quad (10)$$

$$v = \tilde{\varphi}, \text{ sobre } \partial\Omega; \quad (11)$$

donde $\tilde{\varphi} \in C(\overline{\Omega})$ y $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. De manera que al resolver el problema (10)-(11), mediante algún procedimiento de inversión podamos recuperar la función u del problema (8)-(9).

Es importante mencionar que una suposición muy importante que se puede hacer sobre el campo $\epsilon \nabla u$, es que sea irrotacional; ya que tiene sentido físico sobre todo en problemas en los que la solución u represente potencial eléctrico o potencial de campo de velocidades de un fluido. Por ejemplo, en el problema de la Tomografía de Capacitancia Eléctrica, el campo $\epsilon \nabla u$ representa el campo de velocidades del flujo, el cual no es rotacional en tuberías verticales ya que no se forman vórtices, sino que la mezcla sube en forma de filamentos o burbujas ([27]).

Pero notemos también que si ϵ está dado en el problema de Dirichlet (8)-(9), entonces también está dado u , porque el problema tiene solución clásica única. Luego, sería un error suponer a priori que el campo $\epsilon \nabla u$ sea conservativo. Para ello mostramos el siguiente ejemplo

Ejemplo 1: Consideremos el problema de Dirichlet (8)-(9), donde Ω es el círculo unitario, $\epsilon(x, y) = x^2 + y^2$, $f(x, y) = 2x + 2x^2 + 6y^2$, $\varphi = \sin^2 \theta + \cos \theta$. Se puede ver que la solución u es $u(x, y) = x + y^2$, pero que el campo $\epsilon \nabla u$ no es conservativo ya que el $rot(\epsilon \Delta u) = (0, 0, 4xy - 2y)$, no es cero para todo $(x, y) \in \Omega$.

Así que, en general no es posible imponer que el campo $\epsilon \nabla u$ sea conservativo. Por ello, el objetivo del trabajo es analizar las condiciones adicionales que

deben cumplir los datos ϵ , f y φ , para que la solución del problema (8)-(9) sea tal que el campo $\epsilon \nabla u$ sea conservativo, y por tanto tenga sentido realizar la reducción mencionada.



Capítulo 1

Solución del problema cuando ϵ depende sólo de r .

En este capítulo realizamos un estudio del problema (8)-(9); esto es, buscamos el tipo de soluciones analíticas que se pueden obtener cuando se imponen condiciones adicionales sobre el flujo.

Comenzamos con el caso más simple mostrando que si ϵ depende sólo de r , entonces u depende de r y solamente se puede suponer la condición de irrotacionalidad del flujo $\epsilon \nabla u$, cuando la función f depende sólo de r y la función φ es constante con respecto a r .

Además mostramos que si ϵ depende sólo de r y si la función f depende de r y θ , entonces u debe ser una función de r y θ y no tendría sentido suponer que se cumple $\text{rot}(\epsilon \nabla u) = 0$.

Sin embargo, como u depende de r y θ , entonces la buscamos en serie de Fourier, ello conduce a resolver un sistema de problemas de contorno en términos de los coeficientes de Fourier de u , f y φ ; en la que se puede suponer que $\text{rot}(\epsilon \nabla a_n) = 0$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ y en los que se encuentra explícitamente los a_n . Aportando así un método numérico de solución al problema de contorno (8)-(9).

Comenzamos observando que si ϵ , f y φ se imponen de tal forma que el campo $\epsilon \nabla u$ resulta ser irrotacional entonces se deben satisfacer las siguientes

tres ecuaciones

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla u) = f, \text{ en } \Omega; \quad (1.1)$$

$$u = \varphi, \text{ sobre } \partial\Omega; \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot}(\epsilon \nabla u) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ en } \Omega; \quad (1.3)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una región simplemente conexa y con frontera suave. Obsérvese también que la condición de irrotacionalidad (1.3), para ϵ fija, puede verse como una ecuación diferencial parcial de primer orden en u ; y para u fija, como una ecuación diferencial de primer orden en ϵ ; en este sentido decimos que la ecuación (1.3) es simétrica con respecto a ϵ y u .

Para ϵ fija, la ecuación (1.3) se puede escribir en la forma

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (1.4)$$

donde $A(x, y) = -\frac{\partial \epsilon}{\partial y}$ y $B(x, y) = \frac{\partial \epsilon}{\partial x}$; y se puede resolver por el método de las características. Para ello, consideramos la curva inicial dada paramétricamente por

$$C(\tau) : x = x(\tau); y = y(\tau); u = u(\tau), \quad (1.5)$$

tal que:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\tau} & A \\ \frac{dy}{d\tau} & B \end{vmatrix} = \frac{dx}{d\tau} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \neq 0 \quad \forall \tau \in I. \quad (1.6)$$

La condición de transversalidad (1.6) significa que la curva inicial C no es una curva característica, ni es la envolvente de las curvas características (no es tangente a ninguna curva característica).

El sistema característico correspondiente y que tiene solución única es:

$$\frac{dx}{ds} = A(x, y); \quad \frac{dy}{ds} = B(x, y); \quad \frac{du}{ds} = 0.$$

$$x(0, \tau) = x(\tau); \quad y(0, \tau) = y(\tau); \quad u(0, \tau) = u(\tau).$$

para $\tau \in I \subset \mathbb{R}$.

La representación biparamétrica de la superficie solución en el espacio xyu que contiene a la curva inicial $C(\tau)$ y que es una solución particular de la ecuación (1.4), está dada por:

$$x = x(s, \tau); y = y(s, \tau); u = u(s, \tau), \quad (1.7)$$

de tal forma que cuando $s = 0$ tenemos la curva inicial $C(\tau)$. Así, cada punto de la superficie solución, viene dado por las coordenadas τ , que indica en qué curva característica está y la s que señala su localización en la curva característica.

Como $\frac{du}{ds} = 0$ entonces $u(s, \tau) = u(\tau)$; luego, u es constante sobre las curvas características.

Por otro lado, de las dos primeras ecuaciones se tiene que

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial y} dy + \frac{\partial \epsilon}{\partial x} dx = 0, \quad (1.8)$$

lo cual ocurre si y sólo si $\epsilon(x(s, \tau), y(s, \tau)) = L$, donde L es constante.

Esto último nos dice que las curvas características son las curvas de nivel de ϵ y como u es constante sobre las curvas características, entonces $u(x, y)$ depende sólo de ϵ .

Este análisis es importante ya que indica que si ϵ depende de r y si el campo $\epsilon \nabla u$ es conservativo, entonces u dependerá de r , por lo tanto f debe ser una función que dependa de r .

1.1. Caso en que ϵ depende sólo de r y f depende sólo de r

Vamos a desarrollar el caso en que ϵ es función sólo de r , que f depende de r y que la condición de contorno φ sólo depende de θ de tal forma que tenga sentido hacer la suposición de que el $rot(\epsilon \nabla u) = 0$.

Bajo los supuestos ya establecidos y de la condición de irrotacionalidad es de esperar que u dependa de r . Escribiendo el problema de contorno (1.1)-(1.2) en coordenadas polares se obtiene:

$$\frac{d}{dr} (\epsilon(r)u'(r)) + \left(\frac{\epsilon(r)u'(r)}{r} \right) = f(r) \quad (1.9)$$

$$u(R) = \varphi(\theta). \quad (1.10)$$

Bajo el cambio de variable,

$$\epsilon(r)u'(r) = w(r) \quad (1.11)$$

la ecuación presente en (1.9), se transforma en

$$\frac{dw}{dr} + \left(\frac{w(r)}{r} \right) = f(r), \quad (1.12)$$

que tiene como solución general

$$w(r) = \frac{1}{r} \int_0^r s f(s) ds + \frac{k}{r}. \quad (1.13)$$

Como las funciones $u'(r)$ y $\epsilon(r)$ están acotadas en $r = 0$, entonces $w(0)$ es acotada cuando $k = 0$. Así,

$$u(r) = \int_0^r \frac{1}{t \epsilon(t)} \left(\int_0^t s f(s) ds \right) dt + \tilde{k} \quad (1.14)$$

De la condición de frontera $u(R) = \varphi(\theta)$, se encuentra el valor de \tilde{k} , y por lo tanto la solución (1.14) resulta

$$u(r) = \varphi(\theta) - \int_r^R \frac{1}{t \epsilon(t)} \left(\int_0^t s f(s) ds \right) dt. \quad (1.15)$$

De lo anterior podemos concluir que cuando ϵ y f dependen sólo de r , y que la condición en la frontera es constante, tiene sentido suponer que el campo $\epsilon \nabla u$ es conservativo.

Más aún, en este caso es posible hallar a la solución $u(x, y)$ de forma explícita, sin la necesidad de reducir el problema de contorno de coeficientes variables a un problema de contorno de coeficientes constantes.

Este caso será de utilidad para resolver problemas más complicados en los que ϵ depende sólo de r y f depende de (r, θ) ; como se verá en la siguiente sección.

1.2. Caso en que ϵ depende sólo de r y f depende de (r, θ)

Como ya vimos en la sección anterior, al suponer que ϵ y f dependen de r , y que la condición en la frontera es constante, tiene sentido suponer que el campo $\epsilon \nabla u$ es conservativo.

En esta sección, vamos a considerar el problema:

$$\operatorname{div}(\epsilon(r)\nabla u) = f(r, \theta), \text{ en } \Omega; \quad (1.16)$$

$$u = \varphi(\theta), \text{ sobre } \partial\Omega \quad (1.17)$$

Como ϵ es función sólo de r , en este caso no tiene sentido considerar que $\operatorname{rot}(\epsilon(r)\nabla u) = 0$, pues conduce a que la solución u tendría que ser función sólo de r y por lo tanto f debe de ser una función sólo de r , que sería una contradicción. Por lo anterior, vamos a buscar a la función u en serie de Fourier:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta), \quad (1.18)$$

y vamos a escribir a f y φ en sus series de Fourier correspondientes:

$$f(r, \theta) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(r) \cos n\theta + B_n(r) \sin n\theta), \quad (1.19)$$

$$\varphi(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \quad (1.20)$$

donde α_0 , α_n y β_n son los coeficientes de Fourier de la función $\varphi(\theta)$ en la frontera, es decir, constantes que no dependen de r ni de θ .

Al considerar $\nabla \cdot (\epsilon \nabla u)$ en coordenadas polares y sustituir (1.18) y (1.19) en las ecuaciones (1.16) y (1.17), se obtiene la familia de problemas de contorno:

$$\operatorname{div}(\epsilon(r)\nabla a_0) = A_0(r); \quad (1.21)$$

$$a_0 = \frac{\alpha_0}{2}. \quad (1.22)$$

$$\operatorname{div}(\epsilon(r)\nabla a_n) = A_n(r); \quad (1.23)$$

$$a_n = \alpha_n. \quad (1.24)$$

y

$$\operatorname{div}(\epsilon(r)\nabla b_n) = B_n(r); \quad (1.25)$$

$$b_n = \beta_n, \quad (1.26)$$

donde A_n , B_n y A_0 dependen sólo de r ; por lo tanto tiene sentido suponer la condición de irrotacionalidad de los siguientes campos:

$$\epsilon(r)\nabla a_n(r), \quad \epsilon(r)\nabla b_n(r) \quad \text{y} \quad \epsilon(r)\nabla a_0(r),$$

y poder reducir este problema a la solución del caso trivial.

Por lo visto anteriormente los coeficientes de Fourier se pueden obtener en términos de la fórmula (1.15) (ver pág. 20):

$$a_0(r) = \alpha_0 - \int_r^R \frac{1}{t\epsilon(t)} \left(\int_0^t s A_0(s) ds \right) dt, \quad (1.27)$$

$$a_n(r) = \alpha_n - \int_r^R \frac{1}{t\epsilon(t)} \left(\int_0^t s A_n(s) ds \right) dt, \quad (1.28)$$

$$b_n(r) = \beta_n - \int_r^R \frac{1}{t\epsilon(t)} \left(\int_0^t s B_n(s) ds \right) dt. \quad (1.29)$$

De lo anterior concluimos que se puede utilizar la condición de irrotacionalidad sobre los coeficientes de Fourier de u para resolver un problema que no se puede resolver directamente. Como hemos podido ver, esta condición de irrotacionalidad es útil para obtener un método simplificado de solución en forma explícita.

Para cerrar este capítulo, decimos que se está aportando un método numérico para obtener una expresión aproximada de la solución u . El método se puede extender a regiones estrelladas, es decir, a una región estrellada se le puede fijar un centro tal que la condición de contorno en la frontera dependa nada más del ángulo θ y que la función dentro de la región dependa de r y θ .

Capítulo 2

Solución del problema cuando ϵ depende de r y θ

En el Capítulo 1 se demostró que para que se cumpla la condición $rot(\epsilon \nabla u) = 0$, las funciones ϵ y f deben depender sólo de r y la función φ debe ser constante con respecto a r . También se demostró que si f depende de r y θ , si ϵ depende sólo de r y si φ depende sólo θ , entonces es posible hallar una expresión para la solución del problema de contorno (8)-(9).

En este Capítulo suponemos que $f \equiv 0$ y que ϵ depende de r y θ . Buscamos las condiciones que debe cumplir ϵ para que la solución u de la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = 0$ satisfaga $rot(\epsilon \nabla u) = 0$; además mostramos una forma explícita de la solución u que bajo ciertas condiciones se halla de forma exacta y bajo otras condiciones se halla de manera aproximada.

Cuando ϵ no depende de r , suponer que se cumple la condición de irrotacionalidad en general no tiene sentido; por que si fijamos ϵ , no tiene sentido que la función u satisfaga esa condición ya que la u viene dada en función de ϵ y de la condición de contorno. Pero si suponemos que se cumple la condición de irrotacionalidad; es decir, si se forzara que la función u satisfaga la condición $rot(\epsilon \nabla u) = 0$, entonces se debe asumir que la u debe ser función de ϵ (esto es un resultado general que se ha analizado en el Capítulo 1) y en ese caso, la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = 0$ se puede transformar como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial u(\epsilon)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial u(\epsilon)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon u'(\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon u'(\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(u'(\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) + u'(\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(u'(\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + u'(\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & \epsilon \left[u'(\epsilon) \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial \epsilon}{\partial x} u''(\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + u'(\epsilon) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right)^2 + \epsilon \left[u'(\epsilon) \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial y^2} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \frac{\partial \epsilon}{\partial y} u''(\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + u'(\epsilon) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \epsilon \left[u'(\epsilon) \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right)^2 u''(\epsilon) \right] + u'(\epsilon) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right)^2 + \epsilon \left[u'(\epsilon) \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial y^2} + \dots \right. \\ & \left. \dots + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right)^2 u''(\epsilon) \right] + u'(\epsilon) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

al factorizar la expresión obtenemos:

$$\epsilon |\nabla \epsilon|^2 u''(\epsilon) + \left(\epsilon \Delta \epsilon + |\nabla \epsilon|^2 \right) u'(\epsilon) = 0.$$

Así, si $|\nabla \epsilon| \neq 0$, se tiene una ecuación diferencial ordinaria de orden dos que se escribe:

$$u''(\epsilon) + F(\epsilon, \nabla \epsilon, \Delta \epsilon) u'(\epsilon) = 0, \quad (2.1)$$

donde

$$F(\epsilon, \nabla \epsilon, \Delta \epsilon) = \frac{\Delta \epsilon}{|\nabla \epsilon|^2} + \frac{1}{\epsilon}. \quad (2.2)$$

Observemos que si la función F dada en la expresión (2.2) es una función que depende sólo de ϵ , entonces la ecuación diferencial (2.1) se puede resolver de forma explícita y se encuentra que:

$$u(\epsilon) = C_1 \int e^{-\int F(\epsilon) d\epsilon} d\epsilon + C_2. \quad (2.3)$$

Sin embargo, cuando F no es una función sólo de ϵ , es complicado obtener una expresión para la solución u . En este trabajo exponemos el estudio de dos casos particulares: cuando $\epsilon(x, y) = \alpha(x) \beta(y)$, cuando $\epsilon(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$. La razón por la que analizamos estos dos casos, es porque las dos formas de ϵ tienen un significado práctico en algunas aplicaciones para la solución de problemas inversos.

Por ejemplo, en la Tomografía de Capacitancia Eléctrica, ϵ representa la permitividad del medio ([11]). En particular, en tuberías verticales se obtienen

imágenes tomográficas en las que se observan manchas, debido a que el flujo sube en forma de filamentos y no se forman vórtices. Estas manchas corresponden a la distribución de la permitividad del flujo y generalmente tienen forma circular o aproximada a ella.

2.1. Aproximación de F cuando ϵ es el producto de funciones de variables separables

Si postulamos que u satisfaga la condición adicional que $\text{rot}(\epsilon \nabla u) = 0$, y suponemos que $\epsilon(x, y) = xy$ entonces

$$|\nabla \epsilon|^2 = y^2 + x^2 \text{ y } \Delta \epsilon = 0.$$

Por lo que

$$F(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}. \quad (2.4)$$

Puede comprobarse que para la $F(\epsilon)$ encontrada, la solución exacta de (2.1) es

$$u(\epsilon) = C_1 \ln \epsilon + C_2.$$

Como el ejemplo anterior, se puede mostrar otras formas de ϵ para las cuales es posible expresar a F como función sólo de ϵ . El Cuadro 2.1 muestra algunas de ellas.

ϵ	$F(\epsilon)$
$k + ax^n, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}, k \in \mathbb{R}, x > 0,$	$\frac{n-1}{nx^n} = \frac{a(n-1)}{n\epsilon - kn}$
$k + by^n, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}, k \in \mathbb{R}, y > 0$	$\frac{n-1}{ny^n} = \frac{b(n-1)}{n\epsilon - kn}$
$ae^x + k, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{R}, x > 0$	$\frac{1}{e^x} = \frac{a}{\epsilon - k}$
$be^y + k, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{R}, y > 0$	$\frac{1}{e^y} = \frac{b}{\epsilon - k}$

Cuadro 2.1: Algunos casos en los que F se expresa como función sólo de ϵ

En general, cuando ϵ es una función de variables separables, si $\alpha(x) \in C^2([a, b])$ y $\beta(y) \in C^2([c, d])$ se definen por:

$$\alpha(x) := \begin{cases} \alpha(x), & \text{si } x \in [a, b] \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.5)$$

y

$$\beta(y) := \begin{cases} \beta(y), & \text{si } y \in [c, d] \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Al utilizar (2.5) y (2.6) se obtiene a ϵ en variables separables como el producto de funciones:

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} \alpha(x) \beta(y), & \text{si } (x, y) \in [a, b] \times [c, d], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.7)$$

El dominio de ϵ se muestra en la Figura 2.1.

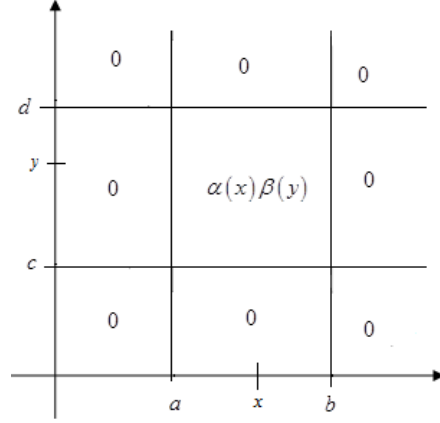


Figura 2.1: Esbozo del dominio de $\epsilon(x, y) = \alpha(x) \beta(y)$ en el plano.

Al suponer que $\epsilon = \alpha(x) \beta(y)$, de la expresión (2.2) se obtiene que

$$F(\epsilon, \nabla \epsilon, \Delta \epsilon) = \frac{\alpha''(x)\beta(y) + \beta''(y)\alpha(x)}{(\alpha'(x)\beta(y))^2 + (\beta'(y)\alpha(x))^2} + \frac{1}{\alpha(x)\beta(y)}. \quad (2.8)$$

Denotemos por $G(\alpha(x), \beta(y), \alpha'(x), \beta'(y), \alpha''(x), \beta''(y))$ al cociente

$$G(\alpha(x), \beta(y), \alpha'(x), \beta'(y), \alpha''(x), \beta''(y)) = \frac{\alpha''(x)\beta(y) + \beta''(y)\alpha(x)}{(\alpha'(x)\beta(y))^2 + (\beta'(y)\alpha(x))^2};$$

observamos que en general no es posible expresar a G como una función sólo de ϵ donde $\epsilon = \alpha(x) \beta(y)$, entonces se debe encontrar una función G que dependa sólo de ϵ y que aproxime a $G(\alpha(x), \beta(y), \alpha'(x), \beta'(y), \alpha''(x), \beta''(y))$.

Esta aproximación se puede realizar utilizando el método de mínimos cuadrados y tomando la base $\{\epsilon^k\}_{k=0}^m$ de m funciones del espacio P_m . Se busca la $G(\epsilon)$ que mejor aproxima a G como una combinación lineal de la forma:

$$G(\alpha(x) \beta(y)) = \sum_{j=0}^m \lambda_j \epsilon^j = \lambda_0 \epsilon^0 + \lambda_1 \epsilon^1 + \cdots + \lambda_m \epsilon^m. \quad (2.9)$$

Para hallar a las constantes λ_i en (2.9) se resuelve el problema de mínimos cuadrados:

$$\min_{\lambda_0 \leq \lambda_i \leq \lambda_n} \left\| \sum \lambda_i \epsilon^i (\alpha(x) \cdot \beta(y)) - G(\alpha(x) \cdot \beta(y)) \right\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (2.10)$$

Nota 2.1.1 Al minimizar (2.10) deben considerarse los siguientes aspectos:

- La cantidad de λ_i 's necesarios para aproximar depende del tipo de error cometido (error absoluto o error relativo) al fijar una tolerancia.
- La norma se toma en x e y y se minimiza en los λ_i 's.

2.2. Aproximación de $F(\epsilon)$ cuando ϵ es la suma de funciones de variables separables

Al utilizar α , β descritas en (2.5) y (2.6) se obtiene a ϵ en variables separables como la suma de funciones:

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} \alpha(x) + \beta(y), & \text{si } (x, y) \in [a, b] \times [c, d], \\ \alpha(x) + 0, & \text{si } x \in [a, b] \wedge y \notin [c, d], \\ 0 + \beta(y), & \text{si } x \notin [a, b] \wedge y \in [c, d], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.11)$$

El dominio de ϵ se muestra en la Figura 2.2.

Al suponer que $\epsilon(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$ de la expresión (2.2) se obtiene que

$$F(\epsilon, \nabla \epsilon, \Delta \epsilon) = \frac{\alpha''(x) + \beta''(y)}{(\alpha'(x))^2 + (\beta'(y))^2} + \frac{1}{\alpha(x) + \beta(y)}. \quad (2.12)$$

Denotemos por $M(\alpha(x), \beta(y), \alpha'(x), \beta'(y), \alpha''(x), \beta''(y))$ al cociente:

$$M(\alpha(x), \beta(y), \alpha'(x), \beta'(y), \alpha''(x), \beta''(y)) = \frac{\alpha''(x) + \beta''(y)}{(\alpha'(x))^2 + (\beta'(y))^2};$$

observemos que general no es posible expresar a M como una función sólo de ϵ donde $\epsilon = \alpha(x) + \beta(y)$ entonces se debe encontrar una función M que dependa sólo de ϵ y que aproxime a $M(\alpha(x), \beta(y), \alpha'(x), \beta'(y), \alpha''(x), \beta''(y))$.

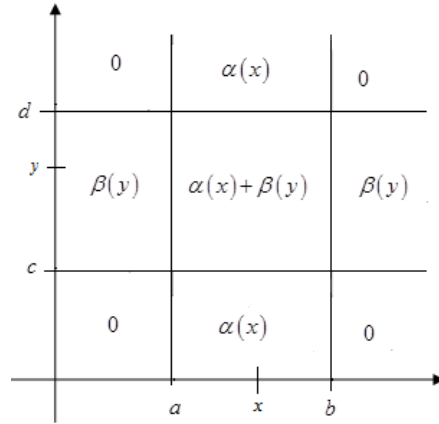


Figura 2.2: Esbozo del dominio de $\epsilon(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$ en el plano.

Esta aproximación se puede realizar utilizando el método de mínimos cuadrados y tomando la base $\{\epsilon^k\}_{k=0}^m$ de m funciones del espacio P_m . Se busca la $M(\epsilon)$ que mejor aproxima a M como una combinación lineal de la forma:

$$M(\alpha(x) + \beta(y)) = \sum_{j=0}^m \lambda_j \epsilon^j = \lambda_0 \epsilon^0 + \lambda_1 \epsilon^1 + \dots + \lambda_n \epsilon^n. \quad (2.13)$$

Para hallar las constantes λ_i en (2.13) se resuelve el problema de mínimos cuadrados:

$$\min_{\lambda_0 \leq \lambda_i \leq \lambda_n} \left\| \sum \lambda_i \epsilon^i (\alpha(x) + \beta(y)) - M(\alpha(x) + \beta(y)) \right\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (2.14)$$

Al minimizar (2.14) se debe tomar en cuenta la Nota 2.1.1.

2.3. Aproximación a $F(\epsilon)$ cuando ϵ depende sólo de x o sólo de y .

De los casos mostrados en el Cuadro 2.1 podemos observar que algunos corresponden a casos particulares en que $\epsilon(x, y)$ es una función sólo de x ó es una función sólo de y .

Al suponer que $\epsilon(x, y) = \alpha(x)$ de la expresión (2.2) se obtiene que

$$F(\epsilon, \nabla \epsilon, \Delta \epsilon) = \frac{\alpha''(x)}{(\alpha'(x))^2} + \frac{1}{\alpha(x)}. \quad (2.15)$$

Si denotamos por $H(\alpha(x), \alpha'(x), \alpha''(x))$ al cociente

$$H(\alpha(x), \alpha'(x), \alpha''(x)) = \frac{\alpha''(x)}{(\alpha'(x))^2}.$$

Ya que en general no es posible que H se exprese como una función sólo de ϵ donde $\epsilon = \alpha(x)$ entonces se debe encontrar una función H que dependa sólo de ϵ y que aproxime a $H(\alpha(x), \alpha'(x), \alpha''(x))$ y eso se puede realizar con el método de mínimos cuadrados.

Dicho problema de mínimos cuadrados se resolverá tomando la base $\{\epsilon^k\}_{k=0}^m$ de m funciones del espacio P_m y se busca la $H(\epsilon)$ que mejor aproxima como una combinación lineal de la siguiente manera:

$$H(\alpha(x)) = \sum_{j=0}^m \lambda_j \epsilon^j = \lambda_0 \epsilon^0 + \lambda_1 \epsilon^1 + \dots + \lambda_n \epsilon^n. \quad (2.16)$$

Para hallar las constantes λ_i 's en (2.16) se resuelve el problema de mínimos cuadrados:

$$\min_{\lambda_0 \leq \lambda_i \leq \lambda_n} \left\| \sum \lambda_i \epsilon^i(\alpha(x)) - H(\alpha(x)) \right\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (2.17)$$

Y el caso particular, cuando $\epsilon(x, y) = \beta(y)$ se analiza en forma similar al anterior.

Para concluir el Capítulo definamos la clase S como sigue:

$$S = \left\{ \epsilon \in C^2(\bar{\Omega}) : \epsilon(x, y) > M > 0, \nabla \epsilon \neq 0 \text{ y existe una función } F(\epsilon) \text{ tal que } \Delta \epsilon = |\nabla \epsilon|^2 F(\epsilon) \right\}. \quad (2.18)$$

Es claro que la clase $S \neq \emptyset$ ya que basta tomar a ϵ como alguno de los ejemplos dados en el Cuadro 2.1.

Notemos también que para caracterizar la clase S se debe encontrar la clase de funciones $F(\epsilon)$ para las cuales la ecuación no lineal $\Delta \epsilon = |\nabla \epsilon|^2 F(\epsilon)$ tiene solución. Este es un problema variacional que no se ha resuelto todavía en la teoría de las ecuaciones diferenciales elípticas no lineales.

Sin embargo si suponemos además que $\epsilon(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$ ó $\epsilon(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$ entonces no es posible demostrar que en general $\frac{\Delta \epsilon}{|\nabla \epsilon|^2}$ se puede escribir como función de ϵ , pero sí es posible aproximarlos por una función; y

con esta función aproximada se obtiene una solución aproximada a la solución.

Por lo anterior, se está dando un método numérico para obtener de forma aproximada a la solución; que no es un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales sino un método numérico para resolver un problema de optimización.

Lo anterior se resume en el siguiente resultado:

Teorema 2.3.1 *Si $\epsilon \in S$ y $\text{rot}(\epsilon \nabla u) = 0$, entonces la solución de la ecuación (8) es:*

$$u(\epsilon) = C_1 \int e^{-\int F(\epsilon) d\epsilon} d\epsilon + C_2. \quad (2.19)$$

donde C_1, C_2 son constantes arbitrarias y S se define como en (2.18). Más aún, si $\epsilon(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$, $\epsilon(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$, $\epsilon(x, y) = \alpha(x)$ ó $\epsilon(x, y) = \beta(y)$; entonces $F(\epsilon)$ se puede obtener de forma aproximada por lo que $u(\epsilon)$ se obtiene también de forma aproximada mediante la fórmula (2.19).

Un trabajo futuro consiste en analizar el error de aproximación a la solución de la ecuación diferencial (2.1) a partir del error de aproximación a la función $F(\epsilon)$.

Teorema 2.3.2 *Conjunto de ϵ que reducen la ecuación $\text{div}(\epsilon \nabla u) = f$ a la ecuación $\Delta v = f$.*

Si $\epsilon \in S$ y $\text{rot}(\epsilon \nabla u) = 0$, entonces el problema (8)-(9) se puede reducir al problema

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, \text{ en } \Omega; \\ v &= \varphi, \text{ sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, es abierto y simplemente conexo y $\nabla v = \epsilon \nabla u$.

Capítulo 3

Problema inverso de identificación de ϵ

En los Capítulos 1 y 2 se ha resuelto el problema de hallar a la solución u suponiendo conocido ϵ , mientras que en el presente Capítulo se resolverá el problema de identificación de ϵ .

3.1. Introducción

Como se ha mencionado anteriormente, la ecuación $\operatorname{div}(\epsilon \nabla u) = f$ aparece como modelo matemático en áreas como la Física, Ingeniería, Química, etc. El estudio teórico de la ecuación y de los problemas relacionados con ella, han llamado la atención de una gran cantidad de investigadores debido a sus aplicaciones principalmente en áreas como la Medicina (monitoreando la función pulmonar, la detección de cáncer de piel o cáncer de mama, la detección de anomalías en el cerebro, etc.) y en Geofísica (la localización de depósitos en el interior de la tierra, detección de fugas en los tanques de almacenamiento subterráneo, determinación de grietas en materiales, etc.). En el marco de estas aplicaciones, encontramos dos problemas importantes que se destacan por su gran utilidad y por su análisis teórico que presentan retos a los matemáticos puros y aplicados. Estos problemas son la Tomografía de Capacitancia Eléctrica y la Tomografía de Impedancia Eléctrica.

La Tomografía de Impedancia Eléctrica es una técnica de imagen médica, en la cual se determina una imagen de la conductividad de una parte del cuerpo a partir de mediciones eléctricas sobre su superficie. Típicamente, se colocan electrodos conductores sobre la piel del sujeto y se aplican pequeñas corrientes

a alguno o todos los electrodos del arreglo. Se miden los potenciales eléctricos resultantes y se repite el proceso para varias configuraciones.

Utilizando las ecuaciones de Maxwell se deduce el modelo y se obtiene la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = 0$ en Ω , donde ϵ representa la conductividad del cuerpo.

Existen varias posibilidades para modelar la información en la frontera de Ω . El modelo más simple es el modelo en el cual se conoce el potencial u y también la distribución de corriente $\psi = \epsilon \nabla u \cdot n = \epsilon \frac{\partial u}{\partial n}$ en la frontera de Ω . Puede ver las págs. 167 y 168 de [21], para una discusión más detallada de la deducción del modelo de conductividad.

Formalmente se puede plantear el problema directo como sigue:
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera suave, $\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\psi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. El problema directo consiste en determinar u tal que

$$\begin{aligned} div(\epsilon \nabla u) &= 0, \text{ en } \Omega; \\ \epsilon \frac{\partial u}{\partial n} &= \psi, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Se le llama problema directo debido a que se supone que la conductividad ϵ es conocida.

Cuando no se conoce a la función ϵ en la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = f$, se puede plantear el llamado problema inverso de identificación de coeficientes, que consiste en hallar a la función $\epsilon(x, y)$, a partir de conocimiento de información en la frontera.

Por su parte, la Tomografía de Capacitancia Eléctrica es una técnica de imagen usada en procesos industriales que involucran mezclas de componentes no conductores de electricidad. Utiliza un sensor formado por electrodos dispuestos en un arreglo circular, de forma equidistante en el exterior del tubo aislante por el cual fluye la mezcla y colocado alrededor de la sección transversal a examinar. Para evitar interferencia externa, se colocan también dos electrodos guardias cilíndricos conectados a tierra y una pantalla metálica exterior con conexión a tierra cubriendo todo el sistema. Se aplica un potencial conocido en el llamado electrodo de referencia y se mide la capacitancia mutua de cada uno del resto de los electrodos; este proceso se repite cambiando el electrodo de referencia.

Utilizando las ecuaciones de Maxwell también se puede deducir un modelo matemático que conduce a la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = 0$ en Ω , donde ϵ representa

la permitividad del medio.

También se pueden plantear diferentes formas de modelar la información en la frontera. El problema directo consiste en determinar las capacitancias mutuas denotadas por C_{ij} , dada una distribución de permitividad conocida ϵ dentro de la tubería. El problema inverso consiste en hallar una distribución de permitividad desconocida ϵ dentro de la tubería, a partir del conocimiento de las capacitancias mutuas C_{ij} . Puede ver [21] para una discusión más detallada de la deducción de este problema.

Estos dos problemas inversos se pueden plantear en términos del operador Neumann-Dirichlet y se puede ver que son mal planteados en sentido de Hadamard ([21]). Debido a este mal planteamiento es necesario proponer estrategias de regularización para resolver el problema, en las que se necesita dar información a priori acerca de la solución. Generalmente esta información a priori consiste en dar la mayor cantidad posible de los llamados pares de Cauchy $\left\{ u \Big|_{\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} \right\}$.

3.2. Planteamiento del problema inverso

Como se mencionó en la introducción, el problema de identificación del coeficiente ϵ , donde ϵ representa la conductividad (para la Tomografía de Impedancia Eléctrica) o donde ϵ representa permitividad (para la Tomografía de Capacitancia Eléctrica); es considerado como un problema inverso de identificación de coeficientes, a partir del conocimiento de todos los posibles pares de Cauchy $\left\{ u \Big|_{\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} \right\}$.

En este sentido, y continuando con el análisis realizado en los Capítulos anteriores, podemos plantear el problema inverso de identificación de ϵ como sigue:

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y simplemente conexo, en el que se cumple el problema

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\epsilon \nabla u) &= 0 \text{ en } \Omega, \\ u &= \varphi \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

con la condición adicional que la solución u del problema satisface la condición $\operatorname{rot}(\epsilon \nabla u) = 0$.

Observemos que en el planteamiento anterior estamos dando una condición adicional para resolver el problema inverso, que no es clásica, ya que no estamos dando condiciones adicionales de u sobre la frontera, sino que estamos dando condiciones sobre el campo que u genera, sobre una propiedad física del campo generado por u . Observemos que el imponer que esa propiedad se cumpla sobre u que a su vez involucra ϵ , permite buscar ϵ , si suponemos que ϵ es suma o producto de variables separables. Esto es lo fundamental de este trabajo ya que estamos resolviendo el problema de identificación de ϵ , dando información a priori para resolver el problema inverso que no es clásica, cuando los problemas inversos de conductividad o de permitividad que se demuestran para esta ecuación, todos presuponen conocimiento de los datos de Cauchy.

Como se mencionó anteriormente, la suma y producto tienen significado práctico. Por ejemplo, en los modelos de campo eléctrico, ϵ representa conductividad, y el producto significa que tenemos una conductividad no homogénea en algún rectángulo de la región. El problema de identificar ϵ consiste en el problema de identificar una inhomogeneidad.

En el Capítulo 1 se demostró que si la solución u cumple $rot(\epsilon \nabla u) = 0$, entonces u depende de ϵ y ϵ depende de u . En el Capítulo 2 se mostró que si u depende de ϵ , entonces la ecuación $div(\epsilon \nabla u) = 0$ se reduce a

$$u''(\epsilon) + \left(\frac{\Delta \epsilon}{|\nabla \epsilon|^2} + \frac{1}{\epsilon} \right) u'(\epsilon) = 0.$$

Hasta esta ecuación, no se sabe si ϵ tiene alguna de las formas propuestas: $\epsilon(x, y) = \alpha(x) \beta(y)$, $\epsilon(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$ u otra forma, en cualquiera de los casos el problema inverso consiste en hallar ϵ de forma que $\frac{\Delta \epsilon}{|\nabla \epsilon|^2}$ sea una función sólo de ϵ . Así que el problema se reduce a encontrar una aproximación $\tilde{F}(\epsilon)$ tal que:

$$\tilde{F}(\epsilon) \approx \frac{\Delta \epsilon}{|\nabla \epsilon|^2}. \quad (3.1)$$

Desde luego, la expresión $\frac{\Delta \epsilon}{|\nabla \epsilon|^2}$ se aproxima por medio de las mediciones $\lambda_i \varphi_i(\epsilon)$ donde la $\varphi_i(\epsilon)$ son datos conocidos a priori. Luego, hay que determinar las λ_i 's que representan los coeficientes de la aproximación. Una forma adecuada de resolver el problema es por medio de mínimos cuadrados en la norma de $L_2(\Omega)$. Esto es, el problema significa minimizar los λ_i 's que se lo denomina un problema *muy mal planteado*, pues es un problema de distancia mínima donde aparecen derivadas (conocido que los problemas de minimización y derivación

son mal planteados en sentido de Hadamard).

Para el caso en que $\epsilon(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$ el problema inverso significa aproximar el siguiente funcional:

$$\frac{\Delta\epsilon}{|\nabla\epsilon|^2} = \frac{\alpha''(x)\beta(y) + \beta''(y)\alpha(x)}{(\alpha'(x)\beta(y))^2 + (\beta'(y)\alpha(x))^2} \approx \tilde{F}(\epsilon) \quad (3.2)$$

pero ¿qué dificultades enfrentamos al aproximar a la función ϵ ? Primeramente, que no se conoce a la función y segundo que tampoco se sabe si es de las formas analizadas en el Capítulo 2.

Resulta que esto es un problema de optimización, y en tanto se debe obtener los λ_i 's y obtener el ϵ ; y como tal, el problema se traduce en minimizar en λ_i y ϵ en una cierta clase el funcional:

$$\min_{\lambda_i, \epsilon} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(\epsilon) - \tilde{F}(\epsilon) \right\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (3.3)$$

Cuando se habla de ϵ en una cierta clase, significa que hay que tener información a priori de la clase a que pertenece el ϵ , es decir, tiene que ser una función suave. Entonces hay que tomar las $\lambda_i(\epsilon)$, pero a su vez las ϵ deben proponerse de la siguiente forma:

$$\sum_{i,j=1}^n (\lambda_{ij} \varphi_i(x) \alpha_j(y)), \quad (3.4)$$

y éstas también se conocen, consecuentemente (3.4) representa un problema de optimización doble, pues es suficiente determinar la función ϵ y resolver el problema directo usando la metodología anterior para encontrar u luego el problema inverso es muy complicado.

Este problema es interesante porque es una nueva manera de resolver el problema inverso, con la información adicional $rot(\epsilon \nabla u) = 0$.

El problema inverso conduce al planteamiento de un problema de optimización, que involucra la minimización de λ y en ϵ . Pero este problema de optimización es mal planteado porque el problema de minimizar en ϵ involucra las operaciones: $\Delta\epsilon$ y $\nabla\epsilon$ lo que constituye un problema de inestabilidad en sentido de Hadamard. La pregunta que sigue es: ¿cómo regularizar este funcional para que esto sea un método que permita obtener ϵ ? Este es un problema abierto.

3.3. Reducción de la ecuación $\operatorname{div}(\epsilon \nabla u) = f$

En la determinación de ϵ a partir de la condición $\operatorname{rot}(\epsilon \nabla u) = 0$ como información a priori. La restricción mencionada tiene sentido en la tomografía de capacitancias bajo ciertos regimenes de extracción, pues se sabe que esa condición se cumple. Es decir, se está imponiendo una restricción a ϵ que se conoce. Pero en general, no se tiene idea alguna de que ϵ se representa como una suma o producto de funciones en variables separables u otra forma. Por ello, en el siguiente teorema se da una forma de cómo obtener ϵ y posteriormente a u .

Teorema 3.3.1 *Si ϵ depende de u y $\epsilon \nabla u$ es conservativo entonces el problema:*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\epsilon \nabla u) &= f \text{ en } \Omega; \\ u &= \varphi \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

se puede reducir a:

$$\begin{aligned} \Delta E(u) &= f \text{ en } \Omega, \\ E(u) &= E(\varphi) \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde $E(u) = \int_0^u \tilde{\epsilon}(t) dt$ y $\tilde{\epsilon}(u) = \epsilon(x, y)$.

Demostración 1

Sea $E(z) = \int_0^z \tilde{\epsilon}(t) dt$; observe que

$$\frac{d(E(u))}{du} = \frac{d}{du} \left(\int_0^u \tilde{\epsilon}(t) dt \right) = \tilde{\epsilon}(u) = \epsilon(x, y);$$

además

$$\frac{\partial(E(u))}{\partial x} = \frac{d(E(u) \frac{\partial u}{\partial x})}{du} = \tilde{\epsilon}(u) \frac{\partial u}{\partial x};$$

luego:

$$\frac{\partial\left(\tilde{\epsilon}(u) \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E(u)}{\partial x} \right);$$

de manera similar se tiene que

$$\frac{\partial\left(\tilde{\epsilon}(u) \frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E(u)}{\partial y} \right).$$

Por lo que finalmente se cumple:

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla u) = \Delta E(u) = f.$$

Entonces la ecuación $\operatorname{div}(\epsilon \nabla u) = f$ con coeficientes variables ϵ que depende de u se reduce a la ecuación

$$\Delta E(u) = f,$$

donde $E(u) = \int_0^u \tilde{\epsilon} dt$ y con $\tilde{\epsilon} = \epsilon(x, y)$; bajo la suposición de que $\epsilon \nabla u = \nabla E(u)$, observe que el valor de $E(u)$ en la frontera ($\partial\Omega$) es:

$$E(u)\Big|_{\partial\Omega} = E\left(u\Big|_{\partial\Omega}\right) = E(\varphi).$$

Y conjuntamente forman el problema

$$\Delta E(u) = f, \text{ en } \Omega,$$

$$E(u) = E(\varphi), \text{ sobre } \partial\Omega.$$

donde $E(u) = \int_0^u \tilde{\epsilon} dt$ es la función potencial.

Dado el problema a resolver

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla u) = f, \text{ en } \Omega; \tag{3.5}$$

$$u = \varphi, \text{ sobre } \partial\Omega; \tag{3.6}$$

en el que se desconoce ϵ y u ; bajo la condición que ϵ depende de u y que $\operatorname{rot}(\epsilon \nabla u) = 0$, se puede reducir a resolver el siguiente problema con coeficientes constantes

$$\Delta E(u) = f, \text{ en } \Omega; \tag{3.7}$$

$$E(u) = E(\varphi), \text{ sobre } \partial\Omega; \tag{3.8}$$

donde $E(\varphi)$ se encuentra resolviendo una ecuación diferencial parcial con coeficientes variables por el método de las características.

La solución del problema (3.7)-(3.8) nos dará la función $\epsilon(x, y)$. Con esta función $\epsilon(x, y)$ encontrada podemos hallar a la función $u(x, y)$. posteriormente a la solución u .



Capítulo 4

Uso de la transformada de Radon para resolver la ecuación de Laplace

En este capítulo presentamos una metodología para resolver el problema (8)-(9) en la que se usa la transformada de Radon. Presentamos ejemplos sintéticos en los que el resultado numérico de la metodología se compara con la solución exacta y con el método de elemento finito. En ese sentido, también exponemos un análisis sobre la justificación teórica sobre el uso de la transformada de Radon para la ecuación de Laplace.

4.1. Transformada de Radon de la derivada de una función

No hace falta presentar de definición de la transformada de Radon en el plano y tampoco todas sus propiedades que cumple, pero se pueden consultar en las siguientes referencias ([1],[18],[8],[25],[28]).

A continuación se presenta una proposición que reúne las propiedades de la transformada de Radon sobre una función en los siguientes casos: derivada de la función, gradiente de la función, derivadas mixtas, etc. En adelante se utiliza el símbolo \mathcal{R} para denotar la transformada de Radon.

Proposición 4.1.1 *Dada $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y los vectores $\boldsymbol{\xi}$, \mathbf{a} y \mathbf{b} en \mathbb{R}^n ; $|\boldsymbol{\xi}| = 1$, se cumple:*

-
1. $\mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \xi_k \frac{\partial \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p}$.
 2. $\mathcal{R} \left(\sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\xi} \frac{\partial \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p}$.
 3. $\mathcal{R} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \right) = \xi_l \xi_k \frac{\partial^2 \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p^2}$.
 4. $\mathcal{R} \left(\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_l b_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \right) = (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\xi})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^2 \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p^2}$.

Demostración 2 Sólo se probará el primer inciso ya que los demás se prueban de manera similar. Para ello note que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f \left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k \cdot \frac{\varepsilon}{\xi_k} \right) - f(\mathbf{x})}{\frac{\varepsilon}{\xi_k}}. \quad (4.1)$$

Aplicando la transformada de Radon a (4.1) y usando la propiedad de traslación de la transformada de Radon, con $\mathbf{a} = \mathbf{e}_k \cdot \frac{\varepsilon}{\xi_k}$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) &= \int \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f \left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k \cdot \frac{\varepsilon}{\xi_k} \right) - f(\mathbf{x})}{\frac{\varepsilon}{\xi_k}} \right) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) dx \\ &= \xi_k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\check{f}(p + \varepsilon, \boldsymbol{\xi}) - \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\varepsilon} \\ &= \xi_k \frac{\partial \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.2 Considere el punto 4 de la Proposición 4.1.1 pero ahora suponga que

$$a_l b_k = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{si } l = k \\ 0, & \text{si } l \neq k. \end{cases}$$

En este caso, la transformada de Radon de dicho argumento se reduce a la transformada de Radon del Laplaciano ($\Delta_{\mathbf{x}}$) de la función f .

Así,

$$\mathcal{R} (\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})) = |\boldsymbol{\xi}|^2 \frac{\partial^2 \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p^2},$$

para $|\boldsymbol{\xi}| = 1$.

Note que en lo anteriormente descrito, se ha considerado que la función $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$; sin embargo, en el caso de los problemas de contorno, las funciones que nos interesan están definidas en dominios acotados y en los que se tiene información de la función sobre la frontera de la región.

Por ejemplo, considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{si } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Con base en el Ejemplo 4.1.2, se debe cumplir que

$$\mathcal{R}(\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})) = |\boldsymbol{\xi}|^2 \frac{\partial^2 \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{\partial p^2}.$$

Por un lado se tiene que:

$$\mathcal{R}\{\Delta_{\mathbf{x}} f(x, y)\} = \mathcal{R}\{4\} = 8\sqrt{1-p^2}.$$

Por otra parte, dado que $\check{f}(p, \phi) = \frac{2}{3}\sqrt{1-p^2}(1+2p^2)$, se sigue que:

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} \check{f}(p, \phi) = \frac{2 - 12p^2 + 8p^4}{(1-p^2)^{3/2}},$$

lo cual muestra que no se satisface la igualdad. Este problema sencillo prueba que la Proposición 4.1.1 no se cumple en general para dominios acotados.

Lo que se describió anteriormente se debe a que la función f no es derivable en la frontera de la región; por ello, analizamos la posibilidad de utilizar la transformada de Radon de funciones generalizadas.

4.2. Laplaciano de una función en sentido generalizado

Por lo que hemos revisado en la sección anterior, resulta necesario hablar de la derivada de una función en sentido generalizado, ello nos lleva a obtener su laplaciano en sentido generalizado para que tenga sentido aplicar la transformada de Radon.

Consideremos a Ω una región en el plano, acotada por una curva suave por partes S y sea $f \in C^2(\Omega_1) \cap C^2(\overline{\Omega})$, donde $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$.

Como $f \in C^2(\Omega_1) \cap C^2(\overline{\Omega})$, puede ocurrir que $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ o que f tenga un salto finito en S .

En el caso en que $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, ocurre que siempre es posible calcular $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$; para $i = 1, 2$.

Es claro que la función f no es derivable en \mathbb{R}^2 , por tal motivo vamos a considerar la derivada en sentido generalizado.

Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, por la fórmula de Green y la definición de potencial de capa simple se tiene:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= - \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= - \int f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= \int \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \varphi(x) dx + \int_S [f]_S(x) \cos(nx_i) \varphi(x) ds \\ &= \left\langle \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S(x) \cos(nx_i) \delta_S, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Así, la derivada generalizada de f es:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S(x) \cos(nx_i) \delta_S \quad (4.2)$$

donde $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\}$ denota la derivada parcial clásica de f , $[f]_S(x) \cos(nx_i) \delta_S$ denota el potencial de capa simple sobre S con densidad $[f]_S(x) \cos(nx_i)$.

Al derivar la ecuación (4.2) con respecto a x_j se obtiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} ([f]_S(x) \cos(nx_i) \delta_S) + \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_S \cos(nx_i) \delta_S \quad (4.3)$$

Al tomar $i = j$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \{\Delta f\} + \frac{\partial}{\partial x_1} ([f]_S(x) \cos(nx_1) \delta_S) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x_2} ([f]_S(x) \cos(nx_2) \delta_S) + \\ &\quad \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\} \right]_S \cos(nx_1) \delta_S + \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\} \right]_S \cos(nx_2) \delta_S \end{aligned} \quad (4.4)$$

Observamos además que:

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} ([f]_S \cos(nx_1) \delta_S) + \frac{\partial}{\partial x_2} ([f]_S \cos(nx_2) \delta_S), \varphi \right\rangle = \\ &-\left\langle [f]_S \cos(nx_1) \delta_S, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle - \left\langle [f]_S \cos(nx_2) \delta_S, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\rangle = \\ &-\int_S [f]_S \cos(nx_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} ds - \int_S [f]_S \cos(nx_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} ds = \\ &\quad - \int_S [f]_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cos(nx_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cos(nx_2) \right) ds = \\ &\quad - \int_S [f]_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \left\langle \frac{\partial}{\partial n} ([f]_S \delta_S), \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene

$$\left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\} \right]_S \cos(nx_1) \delta_S + \left[\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\} \right]_S \cos(nx_2) \delta_S = \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S$$

Por lo anterior se tiene:

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial n} ([f]_S \delta_S) \quad (4.5)$$

Para el caso en que $f = 0$ para $x \in \Omega_1$, obtenemos:

$$\Delta f = \{\Delta f\} - \frac{\partial f}{\partial n} \delta_S - \frac{\partial}{\partial n} (f \delta_S). \quad (4.6)$$

4.3. Transformada de Radon del laplaciano en sentido generalizado

Ahora consideraremos la transformada de Radon de la relación (4.6). Como todas las funciones que intervienen son de soporte compacto, entonces podemos

calcular su transformada de Radon, así:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \{\Delta f\} - \frac{\partial f}{\partial n} \delta_S - \frac{\partial}{\partial n} (f \delta_S) \\ \mathcal{R}(\Delta f) &= \mathcal{R}(\{\Delta f\}) - \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial n} \delta_S\right) - \mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial n} (f \delta_S)\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

El estudio de la ecuación (4.7) se deja como un trabajo futuro debido al tiempo que requiere su análisis, sin embargo, estamos seguros que nos conducirá a la Justificación teórica de la metodología que se propone en este capítulo, para resolver el problema directo.

4.4. Solución numérica de algunos problemas de Dirichlet para la ecuación de Laplace

A continuación se presenta una metodología de solución al problema de Dirichlet para la ecuación (8)-(9). En un paso específico de la metodología se utiliza la transformada de Radon.

Consideremos la región Ω como el disco de radio $M > 0$ centrado en el origen y el siguiente problema de Dirichlet:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \left[\epsilon(x, y) \nabla u(x, y) \right] &= \Psi(x, y) \text{ en } \Omega, \\ u(x, y) &= g(x, y) \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

donde $\epsilon \in C^2(\Omega)$ con $\epsilon \geq \mu > 0$, $\Psi \in C(\overline{\Omega})$ y $g \in C(\partial\Omega)$.

La metodología que se propone para resolver el problema (4.8) consiste en los siguientes pasos:

- Paso 1:** Reducir el problema de Dirichlet (4.8) con ϵ variable en un problema de Dirichlet auxiliar con condición en la frontera nula, por medio del cambio de variable $u_0(x, y) = u(x, y) - g(x, y)$.
- Paso 2:** Reducir el problema de Dirichlet auxiliar obtenido en el paso anterior, a un problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace.
- Paso 3:** Aplicar la Transformada de Radon para resolver el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace, obtenido en el paso anterior ([2]).
- Paso 4:** Recuperar la solución $u(x, y)$ del problema (4.8) en términos del cambio de variable y de la solución obtenida en los pasos anteriores.

El paso 2 se puede cumplir bajo la condición de irrotacionalidad del campo $\epsilon \nabla u$; el paso 3 no se justifica teóricamente y se deja como trabajo futuro. Se realizan ejemplos sintéticos que confirman que la metodología es buena; al comparar los errores que se cometen entre la aproximación y la solución exacta para todos los puntos de la discretización.

4.4.1. Resultados numéricos para ilustrar la metodología

A continuación se presentan tres problemas sintéticos, en los cuales se refleja la implementación de la metodología para obtener un resultado numérico. Además, el resultado numérico del primer problema se compara con el resultado obtenido del método de elemento finito (MEF) y la solución exacta del mismo.

Para el resto de los problemas se hace una modificación de la metodología y consiste en que ϵ es constante a trozos. Y en este caso, el resultado numérico del segundo y tercer problema de Dirichlet se compara con su respectiva solución exacta.

Los resultados numéricos se obtuvieron con un equipo de cómputo portátil de las siguientes características: Intel Core 2 Duo con procesador 1.5 Ghz, memoria RAM de 4Gb y sistema operativo Windows Vista Ultimate.

Problema sintético para ϵ no constante

Dado el siguiente problema de Dirichlet se resuelve numéricamente, primero se aplica la metodología y después el MEF del software MATLAB. Es preciso aclarar que, apriori la solución exacta del problema sintético nos facilitara las cosas, en general es desconocida.

En primer lugar, se hace una comparación de la solución exacta y la solución obtenida por la metodología. En segundo lugar, se hace una comparación de la solución exacta y las soluciones numéricas.

Comenzamos diciendo que la región Ω igual al círculo unitario, tiene definido el siguiente problema de Dirichlet

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} [\epsilon(x, y) \nabla u(x, y)] &= 0 \text{ en } \Omega, \\ u(x, y) &= g(x, y) \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

donde $\epsilon(x, y) = \frac{1}{\cos(x+y)+2}$ y $g(x, y) = \sin(x + y) + 2(x + y)$.

Observamos que se cumple que $\varepsilon \in C^2(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$; y se puede comprobar que la solución exacta del problema de Dirichlet (4.9) con esos datos, es $u(x, y) = \sin(x + y) + 2(x + y)$.

El primer paso de la metodología, se hace el cambio de variable $u_0(x, y) = u(x, y) - g(x, y)$, así el problema (4.9) se reduce al siguiente

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \left[\varepsilon(x, y) \nabla u_0(x, y) \right] &= \psi_0(x, y) \text{ en } \Omega \\ u_0(x, y) &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

donde $\psi_0(x, y)$ es de la forma

$$\psi_0(x, y) = -\operatorname{div} \left[\varepsilon \nabla \left(r^2 \left(\sin(\cos \theta + \sin \theta) + 2(\cos \theta + \sin \theta) \right) \right) \right]. \quad (4.11)$$

El segundo paso de la metodología consiste en reducir el problema (4.10) como un problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson:

$$\left. \begin{aligned} \Delta v(x, y) &= \psi_0(x, y), \text{ en } \Omega \\ v(x, y) &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Observe que ψ_0 en (4.11) corresponde a coordenadas polares y es mejor cambiar a coordenadas cartesianas para facilitar la implementación de los programas, resultando:

$$\psi_0 = -\operatorname{div} \left(\varepsilon \nabla \left[\left(x^2 + y^2 \right) \left[\sin \left(\frac{(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) + 2 \left(\frac{(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right] \right] \right) \quad (4.13)$$

dado que (4.13) es muy compleja, no implica que la solución $v(x, y)$ exacta (explícita) del problema de Dirichlet (4.12) no exista.

Como alternativa es la solución numérica mediante los programas escritos en MATLAB; y que sirve para recuperar en forma constructiva la solución $u_0(x, y)$ del problema de Dirichlet (4.10) con ε no constante.

A continuación se presentan los resultados numéricos de la metodología aplicada al problema de Dirichlet (4.9) en la Figura 4.1 y la Figura 4.2.

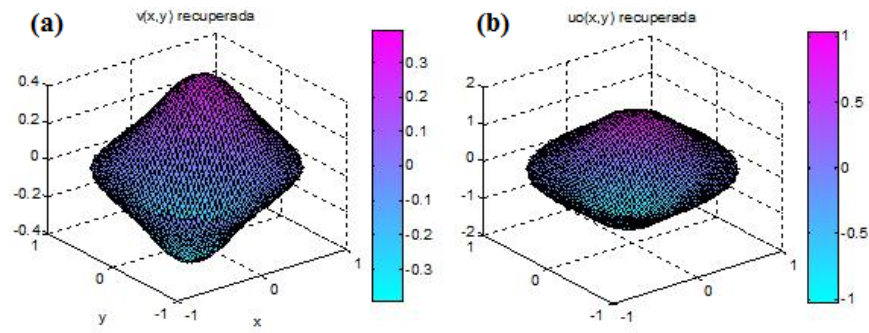


Figura 4.1: Soluciones $v(x, y)$ y $u_0(x, y)$ aproximadas de los problemas de Dirichlet (4.12) y (4.10).

La Figura 4.1 (a) representa la solución $v(x, y)$ aproximada del problema de Dirichlet (4.12) y para obtenerla se realizan los siguientes pasos: se aplica la transformada de Radon, se resuelve numéricamente la familia de EDO y se aplica el método de retroproyección filtrada (transformada inversa de Radon) en forma numérica; observe que v satisface la condición de contorno.

En la Figura 4.1 (b) se muestra la solución u_0 aproximada del problema (4.10) y que satisface las condición de contorno. En seguida, la solución u_0 se sustituye para obtener la solución $u(x, y)$ aproximada del problema de Dirichlet (4.9).

Finalmente, se realiza una comparación de la solución exacta y de la aproximada del problema de Dirichlet (4.9).

En la Figura 4.2 (a)-(b) se utilizan 1681 nodos en la discretización mientras que en la Figura 4.2 (c)-(d) se utilizan 6561 nodos.

La Figura 4.2 (a)-(c) representan la solución exacta del problema (4.9) mientras que la Figura 4.2 (b)-(d) representan la solución aproximada del problema (4.9) aplicando la metodología.

Y en cuanto a la eficiencia de la recuperación a cargo de la metodología, se miden los errores que se cometen entre la solución exacta y la aproximada punto a punto. De este modo, $dmáx$ mide el error máximo y dsc mide el error promedio en media cuadrática.

En la Tabla 4.1 se muestran los valores de los errores cometidos y el tiempo

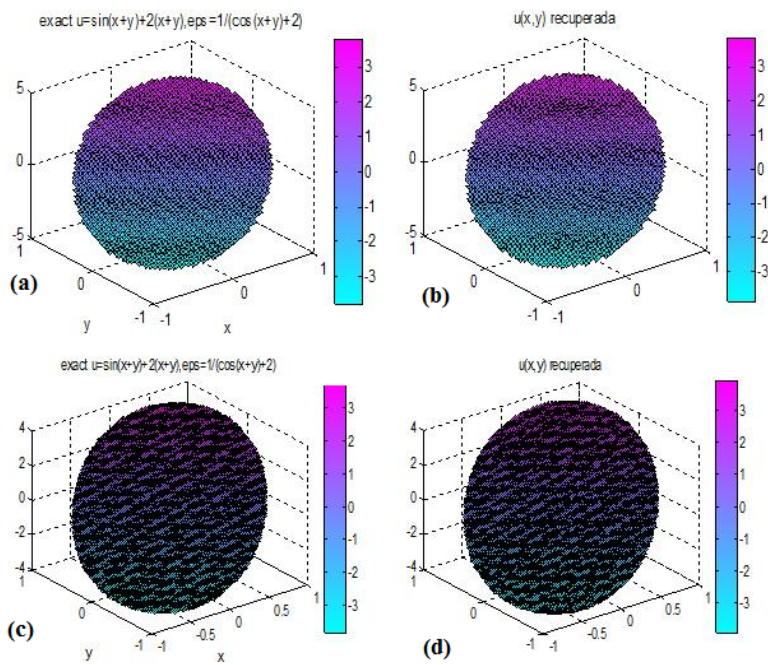


Figura 4.2: Comparación de la soluciones: exacta y aproximada para n^2 nodos en la discretización.

de procesamiento de la metodología en la obtención de la aproximación.

Nodos	Propuesta	d_{max}	d_{sr}
41	0.193832 s	0.3714	0.0793
81	0.763417 s	0.2666	0.0523

Cuadro 4.1: Eficiencia de la metodología al aproximar la solución del problema (4.9)

Cuando se analizan los resultados de la Tabla 4.1, se concluye que con la metodología aplicada en la obtención de la solución del problema es buena, pues al aumentar el número de nodos se disminuye el error máximo y el error promedio en media cuadrática.

4.4.2. Comparación de las soluciones exacta y obtenidas numéricamente del problema de Dirichlet

Tomando en consideración que los datos del problema de Dirichlet son: $\epsilon = \frac{1}{\cos(x+y)+2}$ y la condición de contorno $g(x, y) = \sin(x + y) + 2(x + y)$ se obtienen dos aproximaciones de la solución al problema (4.9).

La primera corresponde al MEF en el *pdetool* del sistema MATLAB para n^2 nodos en la malla de discretización. Y, la segunda aplicando la metodología se obtienen las aproximaciones para los mismos valores de n^2 nodos en la malla.

En cuanto a la eficiencia de la recuperación del MEF y de la metodología, se miden los errores que se cometen entre la solución exacta y la aproximada punto a punto. De este modo, *dmáx* mide el error máximo y *dscr* mide el error promedio en media cuadrática.

En la Tabla 4.2 se muestran los valores de los errores cometidos y el tiempo de procesamiento en la obtención de las aproximaciones.

Nodos en la malla	<i>MEF</i>	Metodología	<i>dmax</i>	<i>dscr</i>
196	0.90234 s	0.32455 s	0.6555	0.1713
784	0.869951 s	0.097181 s	0.4917	0.1076
1764	2.387995 s	0.204518 s	0.3985	0.0819

Cuadro 4.2: Eficiencia del MEF vs la metodología al aproximar la solución del problema (4.9).

En la Figura 4.3 se muestran las aproximaciones obtenidas del problema de Dirichlet (4.9); las columnas nos indican la cantidad n^2 de nodos en la discretización: izquierda 196, central 784 y derecha 1764.

Y los renglones representan: el superior corresponde a las soluciones exactas, el central corresponde a la aproximación por MEF y el inferior corresponde a la aproximación de la metodología.

Al analizar los resultados de la Tabla 4.2, se concluye que aproximación obtenida de la metodología es buena, pues al aumentar el número de nodos se disminuyen: el error máximo, el error promedio en media cuadrática y el tiempo de procesamiento.

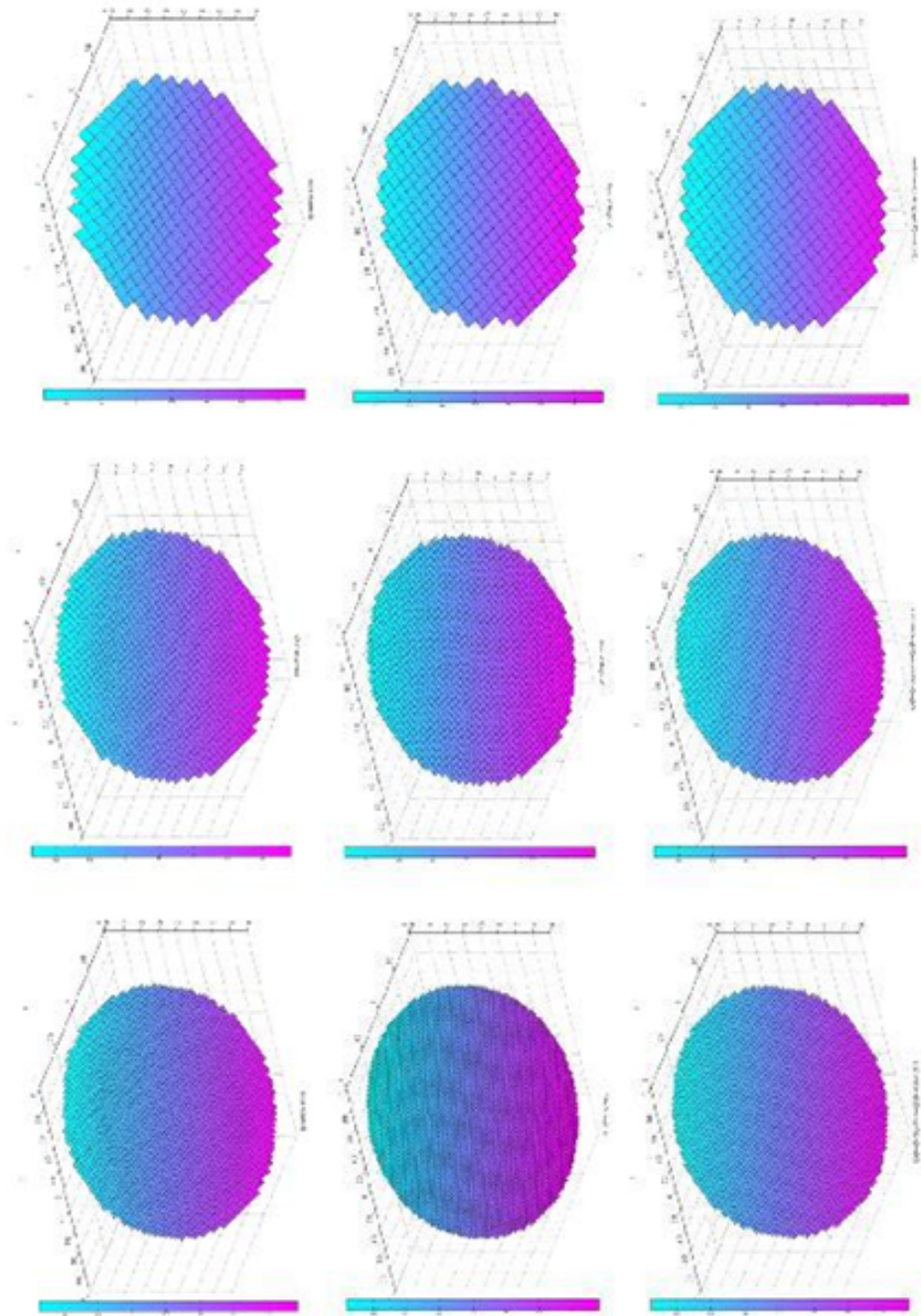


Figura 4.3: Solución exacta del problema y sus aproximaciones.

4.5. Problemas sintéticos para ϵ constante por partes.

A continuación se presentan los problemas sintéticos del problema de Dirichlet para ϵ constante a trozos. Las aproximaciones numéricas obtenidas son el resultado de modificar la metodología presentada en la pág. 44.

El primer problema sintético se resuelve para un tipo de dominio denominado inclusión mientras que el segundo problema sintético se resuelve en un dominio estratificado. En ambos problemas los datos de entrada son: ϵ constante por partes, condiciones de contorno y condiciones de conjugación (también conocidas por condiciones de transmisividad).

Hay que señalar que para los datos específicos de entrada, apriori se conoce la solución exacta y se obtiene la aproximación numérica; entonces se realiza una comparación de las superficies y de las curvas de nivel punto a punto. Y de paso señalar que la aplicación *pdetool* del software MATLAB no tiene la capacidad para trabajar con ϵ constante a trozos.

4.5.1. Problema Dirichlet para ϵ por partes en un dominio con inclusión

Considere el problema de Dirichlet

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 \Delta u_3 &= \frac{1}{r} \text{ en } \Omega_1, \\ u_3(x, y) &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega_1, \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

donde $\epsilon_1 = 1$ y la ecuación

$$\epsilon_2 \Delta u_2 = \frac{1}{r} \text{ en } \Omega_2, \quad (4.15)$$

donde $\epsilon_2 = 2$ y cumple que $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$. Bajo las siguientes condiciones de conjugación:

$$u_3 = u_2 \text{ en } \partial\Omega_2, \quad (4.16)$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial u_3}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \text{ en } \partial\Omega_2, \quad (4.17)$$

Y la región de estudio se forma de dos partes: Ω_2 acotado por la frontera del círculo de radio $R = 1$ y el anillo $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ acotado por la frontera del círculo de radio $R = 2$.

En primer lugar, se presenta la solución exacta del problema sintético para ϵ constante a trozos

$$u_*(r) = \begin{cases} \frac{r-3}{2} & \text{en } \Omega_2, \\ r-2 & \text{en } \Omega_1. \end{cases} \quad (4.18)$$

Se comprueba que cada solución de (4.18) satisface la ecuación en su respectiva región y que la solución $u_*(r) = r - 2$ para $r = 2$ satisface la cond. de contorno en $\partial\Omega_1$. Por otro lado, la solución (4.18) satisface las condiciones de conjugación (4.16)-(4.17) en $r = 1$ como sigue:

$$u_3(1) = u_2(1) = -1. \quad (4.19)$$

Luego de realizar las siguientes operaciones:

$$\epsilon_1 \frac{\partial u_3}{\partial r} = 1 \quad \text{y} \quad \epsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} = 1, \quad (4.20)$$

se obtiene la relación de acoplamiento (4.17):

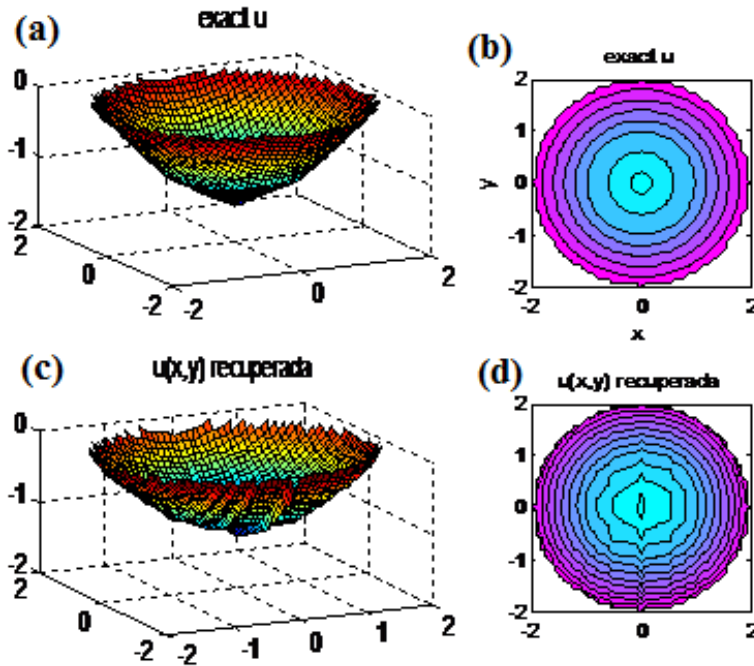


Figura 4.4: Solución exacta y aproximada del problema sintético para ϵ constante a trozos.

$$\epsilon_1 \frac{\partial u_3}{\partial r} = \epsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} = 1. \quad (4.21)$$

Para los siguientes los datos de entrada: $R = 2$, $q = 1$, $\epsilon_1 = 2$, $\epsilon_2 = 1$, cond. de contorno y conjugación se modifica la metodología y se obtiene una aproximación de la solución del problema de Dirichlet para ϵ constante a trozos.

En la Figura 4.4 (a) se muestra la solución exacta y la Figura 4.4 (c) muestra la aproximación de la solución. Y las curvas de nivel representan, en la Figura

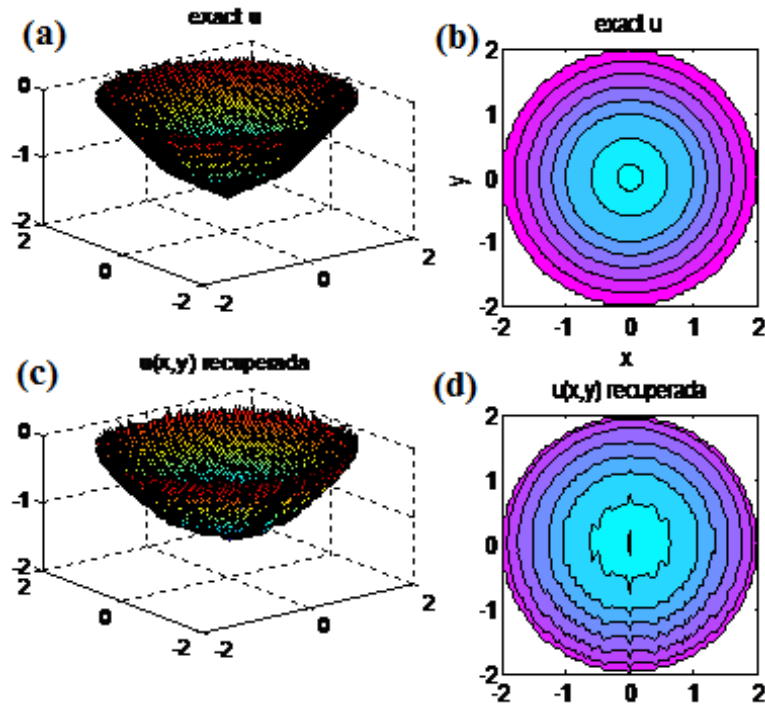


Figura 4.5: Solución exacta y aproximada del problema sintético para ϵ constante a trozos.

4.4 (b) la solución exacta y en la Figura 4.4 (d) la solución aproximada; los resultados corresponden a 900 nodos en la discretización. Y cuando se tienen 3600 nodos en la discretización, los comentarios de la Figura 4.5 (a),(b),(c) y (d) son similares.

Al analizar las superficies y las curvas de nivel, se dice que la aproximación es buena y se refleja en el comportamiento de las curvas de nivel a medida que aumenta la cantidad de nodos.

4.5.2. Problema de Dirichlet para ϵ por partes en un dominio estratificado

Sean los siguientes problemas de Dirichlet

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 \Delta u_1(x, y) &= 0 \text{ en } \Omega_1, \\ u_1(x, y) &= x + y \text{ sobre } \partial\Omega_1, \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

donde $\epsilon_1 = 2$ y

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_2 \Delta u_2(x, y) &= 0 \text{ en } \Omega_2, \\ u_2(x, y) &= 2(x + y) \text{ sobre } \partial\Omega_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

donde $\epsilon_2 = 1$ y se cumple $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$. Bajo las condiciones de conjugación de la forma

$$u_1 = u_2 \text{ en } y = -x, \quad (4.24)$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \text{ en } y = -x, \quad (4.25)$$

que significan la continuidad del potencial y la continuidad de la componente normal del vector de la inducción eléctrica. Y cuya solución exacta de los problemas sintéticos para ϵ constante a trozos es

$$u(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{en } \Omega_1, \\ 2(x + y) & \text{en } \Omega_2. \end{cases} \quad (4.26)$$

Se comprueba que cada solución de (4.26) satisface la ecuación en su respectiva región; así mismo la solución $u_1(x, y) = x + y$ en $R = 1$ satisface la cond. de contorno en $\partial\Omega_1$ y la solución $u_2(x, y) = 2(x + y)$ en $R = 1$ satisface la cond. de contorno en $\partial\Omega_2$.

Y se comprueba que la solución (4.26) satisface las condiciones de conjugación (4.24)-(4.25) en $y = -x$ como sigue:

$$u_1(x, y) = u_2(x, y) = 0, \quad (4.27)$$

y respecto a la derivada se hacen las operaciones

$$\epsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \epsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = 2, \quad (4.28)$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = \epsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = 2, \quad (4.29)$$

que se sustituyen en las relaciones de acoplamiento (4.25):

$$\epsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \epsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad (4.30)$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \epsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad (4.31)$$

y que representa el acoplamiento de transmisividad de flujo respecto a la normal:

$$\epsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} = \epsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}}. \quad (4.32)$$

Para los datos de entrada: $\epsilon_1 = 2$, $\epsilon_2 = 1$, las cond. de contorno y cond. de conjugación se modifica la metodología y se obtiene la aproximación de la solución del problema de Dirichlet para ϵ constante a trozos.

La Figura 4.6(a) muestra la solución exacta y la Figura 4.6(c) muestra la solución aproximada; los resultados corresponden a 441 nodos en la discretización.

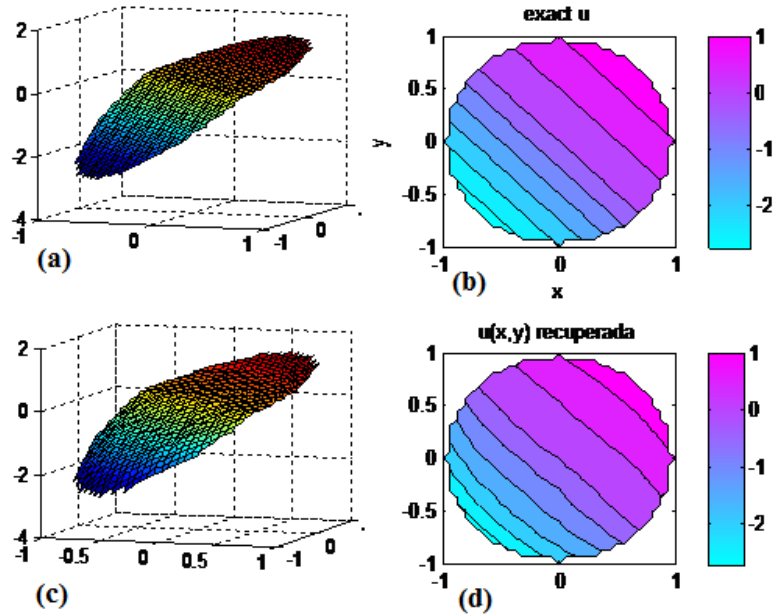


Figura 4.6: Solución exacta y aproximada del problema sintético para ϵ constante a trozos.

Y en tanto las curvas de nivel representan, en la Figura 4.6(b) la sol. exacta y en la Figura 4.6(d) la sol. aproximada. Y cuando ocurren, 2601 y 10201 nodos en la discretización, no hace falta poner explicar los incisos de la Figura 4.7 y

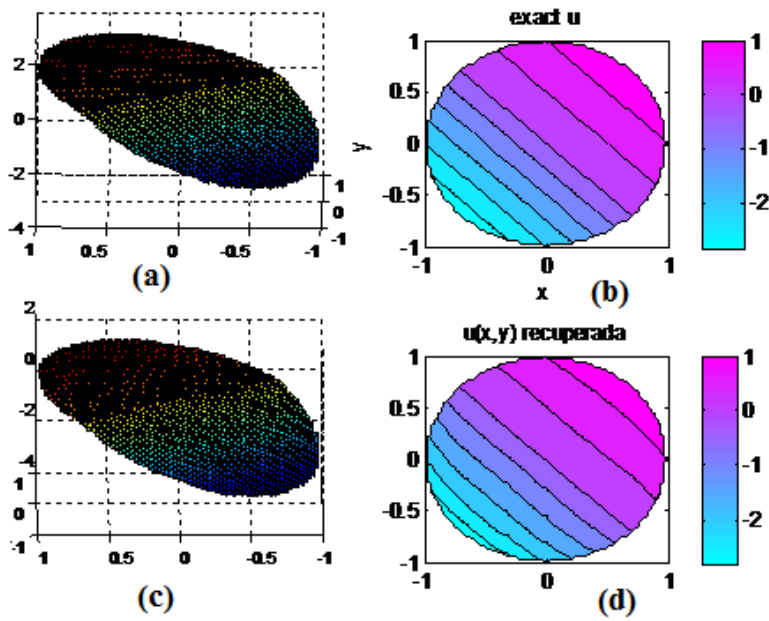


Figura 4.7: Solución exacta y aproximada del problema sintético para ϵ constante a trozos.

Figura 4.8 pues se valen los comentarios de los incisos ya citados. En la Figura 4.8 se hace una rotación de la superficie de la solución exacta y la solución aproximada.

Y con respecto a la exactitud de la recuperación al utilizar la metodología, se miden los errores que se cometen entre la solución exacta y la aproximada punto a punto. De modo que, $dmáx$ mide error máximo y dsr el error promedio en media cuadrática.

En la Tabla 4.3 se muestran los valores de los errores cometidos al aumentar la cantidad de nodos en la malla de discretización.

Nodos en la malla	$dmáx$	dsr
441	0.90234	0.3492
2601	0.869951	0.2351
10201	0.1771	0.0352

Cuadro 4.3: Errores cometidos al aproximar la solución para n^2 nodos en la malla.

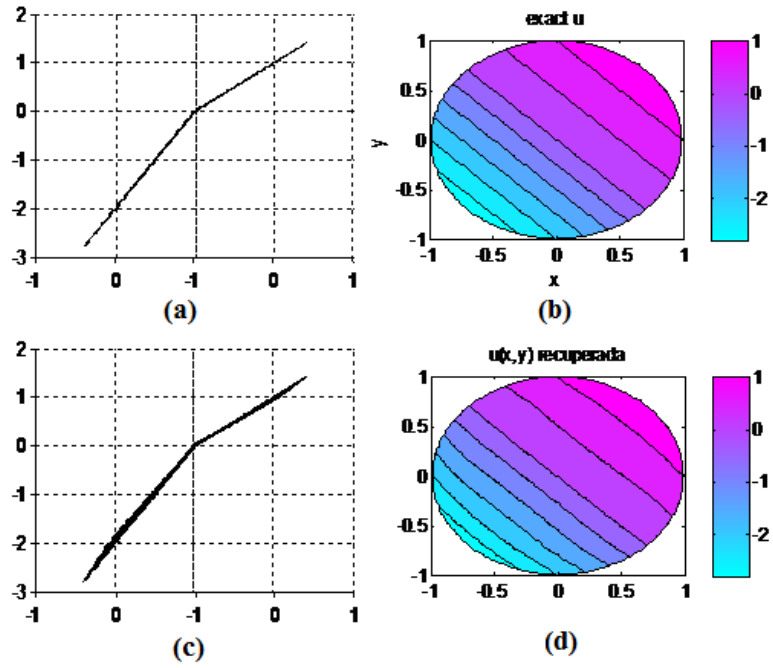


Figura 4.8: Solución exacta y aproximada del problema sintético para ϵ constante a trozos.

En primer lugar, al analizar las superficies y las curvas de nivel, se dice que la aproximación es buena y se refleja en el comportamiento de las curvas de nivel a medida que aumenta la cantidad de nodos.

Y en segundo lugar, al analizar los resultados de la tabla, se concluye que la aproximación obtenida por medio de la metodología es buena, pues al aumentar la cantidad de nodos se disminuye los errores cometidos.



Conclusiones

Las conclusiones del trabajo de investigación, se presentan como sigue:

- Dependiendo de las propiedades de la característica física representada por el campo \vec{F} que depende de ϵ , $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ puede ser irrotacional o puede no serlo; esto lleva siempre a un sistema para ϵ y u dado por las ecuaciones: $div(\epsilon \nabla u) = 0$ y $rot(\vec{F}) = g$ donde g puede en algunos casos ser cero.
- En la búsqueda de soluciones expresadas en forma analítica, se estudio el planteamiento del problema bajo suposiciones adicionales sobre el campo y entonces se identificaron dos casos, el primer caso constituye el cimiento de la formulación y solución del segundo caso.
- Una primera simplificación del problema consistio en suponer que $\epsilon(r)$, $f(r)$, $\varphi(\theta)$ y que $\epsilon \nabla u$ sea un campo conservativo entonces se obtiene una expresión explícita de la solución en la forma:

$$u(r) = \varphi(\theta) - \int_r^R \frac{1}{t\epsilon(t)} \left(\int_0^t s f(s) ds \right) dt.$$

- La segunda simplificación consistio en representar en serie de Fourier a las funciones $\epsilon(r)$, $f(r, \theta)$ y $\varphi(\theta)$ que al sustituir en el problema se obtiene una familia de problemas de contorno y en los cuales se cambia ligeramente la condición $\epsilon \nabla u$ por las siguientes $\epsilon(r) \nabla a_n(r)$, $\epsilon(r) \nabla b_n(r)$ y $\epsilon(r) \nabla a_0(r)$ donde la solución de la familia permite expresar la solución:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta \right),$$

- Dado que el planteamiento del problema, desde el punto de vista de los problemas inversos nos enfocamos en la identificación de ϵ ; pues no se

tiene idea alguna de que pueda representarse como suma o producto de variables separables. Se incluye la siguiente restricción $rot(\epsilon \nabla u) = 0$ y $\epsilon \nabla u = \nabla v$ lo que permite reducir el planteamiento en un problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson y que se resuelve para ϵ .

- Para el operador de Laplace definido en todo el plano, es conocido que al aplicar la transformada de Radon se reduce en una familia de EDO de orden dos. Sin embargo cuando actúa el operador de Laplace sobre una función de soporte compacto, no se puede aplicar la transformada de Radon y en la tesis se muestra con un ejemplo. Esto nos motivó a estudiar el operador de Laplace en sentido generalizado, primero se debe pasar por el concepto de derivada en sentido generalizado. Finalmente se obtuvo que el operador de Laplace en sentido generalizado para una función de soporte compacto se escribe como $\Delta f = \{\Delta f\} - \frac{\partial f}{\partial n} \delta_S - \frac{\partial}{\partial n} (f \delta_S)$.
- Se presenta una metodología que permite aproximar la solución del problema de Dirichlet (8)-(9) y que al reducir en la ecuación de Poisson se debería tratar en sentido generalizado pero abusando del operador le aplicamos la transformada de Radon y truncamos para quedarnos con la familia de EDO.
- Los problemas sintéticos permiten comparar las aproximaciones obtenidas de la metodología, pues a priori se cuenta con la solución exacta y se establece el comportamiento de los errores que se cometen al aproximar al aumentar la cantidad de nodos.

Los siguientes puntos se consideran las perspectivas de trabajos futuros.

- Estudiar el problema inverso de identificación de ϵ , pues hace necesario investigar todos los métodos de regularización conocidos cuando en el planteamiento las mediciones de u , φ , f tienen errores y se desconocen la magnitud de los mismos. Y también estudiar el problema de identificación de u , pues en el planteamiento las mediciones que corresponden a ϵ , f y φ datos que contienen errores y se desconoce la magnitud. En ambos casos la problemática conduce a temas de investigación.
- Analizar en qué se simplifica la transformada de Radon del operador de Laplace generalizado, pues es claro que la transformada se debe aplicar a dos términos adicionales y determinar la familia de EDO resultante.

Bibliografía

- [1] A. G. Ramm, *Radon Transform on Distributions*, Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci., Vol. 71, No. 9 (1995), 202-206.
- [2] A. I. Grebennikov, *General Ray Method for Solution of Boundary Value Problems for Elliptic Partial Differential Equations*. APLIEMATH, Memorias del Congreso Internacional en Matemáticas Aplicadas, Instituto Politécnico Nacional, México, pp. 200-209, Año 2007.
- [3] A. P. S. Selvadurai, *Partial Differential Equations in Mechanics 1, Fundamentals, Laplace's Equation, Diffusion Equation, Wave Equation*, Springer (2000).
- [4] A. P. S. Selvadurai, *Partial Differential Equations in Mechanics 2, The Biharmonic Equation, Poisson's Equation*, Springer (2000).
- [5] Astala, K.; Päivärinta, L. *Calderón's inverse Conductivity Problem in the Plane*, Annals of Mathematics No.163 (2006), 265-299.
- [6] Axter Sheldon, Bourdon Paul, Ramey Wade, *Harmonic Function Theory*, Springer-Verlag (2010).
- [7] DiBenedetto, Emmanuele., *Partial Differential equations*. Second Edition, Birkhäuser, Boston o Basel Berlin, 2010.
- [8] Durrani, T. S. and Bisset, D., *The Radon Transform and its Properties*. Geophys. 49, 1180-1187, 1984.
- [9] Romano C. E. A., Alexandre I. Grebennikov, *Justificación analítica y numérica del método de solución del problema directo $\operatorname{div}(\epsilon \nabla u) = 0$, con coeficiente variable y condición de contorno tipo Dirichlet*, Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación ISSN 1728-6042 RNPS 2017. Número 1, Volumen 9, pp.33-46, Año 2011.

-
- [10] Romano C. E. A., Reyes M. Silvia, *Condiciones bajo las cuales se reduce la ecuación $\operatorname{div}(\epsilon \nabla u) = 0$ a una ecuación de Poisson*, Memorias del Primer Congreso de Investigación y Vinculación para el Desarrollo. Universidad de la Sierra Sur, Miahuatlán Oaxaca. ISSN: 978-607-9584122. pp. 917-923. Noviembre de 2013.
- [11] Fraguela A., Oliveros J., Cervantes L., Morín M., Gómez S., *Un algoritmo no iterativo para la tomografía de capacitancia eléctrica*. Revista Mexicana de Física, No. 51 (3), pp. 236-242. 2005.
- [12] Feynman Richard P., Leighton Robert B., Stands Matthew, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley (1963).
- [13] García F. Gabriel, Tesis de Maestría: *Teoremas de extensión armónica para funciones y distribuciones*, Universidad de Sonora (2006).
- [14] Gel'fand, I.M., Graev M.I., and Vilenkin, N.Ya., *Generalized Functions, Integral Geometry and Representation Theory*, Vol. 5, Academic Press, N.Y. 1966.
- [15] Gilbarg D., Trudinger Neil S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag (2001).
- [16] Glasko, Vladlen Borisovich, *Inverse Problem of Mathematics Physics*. American Institute of Physics, Moscow University Publishing, 1984.
- [17] Heinz W. Engl, C.W. Groetsch, *Inverse and Ill-Posed Problems*, Notes and Reports in Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, Vol. 4., 1987.
- [18] Helgason, S., *The Radon Transform*, Birkhauser, Boston, 1999.
- [19] Isakov, Victor, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 127, Springer.
- [20] Jost, Jürgen., *Partial Differential Equations*. 3th, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2013.
- [21] Kirsch, Andreas, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Second Edition (2011).
- [22] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Vol. 19., Second Edition (2010).

-
- [23] Markowich, Peter A., *Applied Partial Differential Equations: a visual approach*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [24] Mijáilov V.P., *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Ed. MIR, Moscu, 1982.
- [25] Natterer, F., *The Mathematics of Computerized Tomography*. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, 2001.
- [26] San Martín Jiménez, Luis René, Tesis de Licenciatura: *El problema L^p Dirichlet para la ecuación de Laplace*, Universidad de Sonora (2011).
- [27] Sosa S. Sergio A., *Aplicación de modelos mecánicos para la optimización del diámetro de tuberías flexibles como sartas de velocidad*. Tesis Ingeniero Petrolero. México. Univ. Autónoma de México, 185 págs. Año 2010.
- [28] Stanley R., Deans, *The Radon Transform and Some of Its Applications*, Dover, 2007.
- [29] Walter A. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, Second Edition, John Wiley & Sons. Ltd (2008).