Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

Una contribución al teorema de Dirichlet-Jordan para funciones no Lebesgue integrables

TESIS

que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta:

Edgar Torres Teutle

Director de tesis:

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Puebla, Puebla Noviembre 2020

Dedicado a mis padres
y hermanos.

Agradecimientos

Quiero agradecer a los profesores y a mis amigos con quienes tuve el agrado de compartir el aula.

A mis padres José Felipe y María por siempre apoyarme en lo que deseo emprender. Este logro es uno más en el que ustedes son parte importante. Y por supuesto a mis hermanos Ricardo, Andrea y Julio.

A mis sinodales Dr. Slavisa V. Djordjevic, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dr. Gabriel Kantún Montiel, Dr. Oswaldo Flores Medina, Dra. María Guadalupe Morales Macías y a mi asesor Dr. Francisco Javier Mendoza Torres por sus valiosas observaciones para mejorar este trabajo de tesis.

Gracias a la beca CONACYT por el apoyo económico.

Índice General

Introducción

La Transformada de Fourier, desde su aparición en el siglo XVIII, constituye un tema clásico de estudio dentro del Análisis Matemático. En específico, forma parte de los cimientos y evolución de lo que actualmente se conoce como Análisis de Fourier. Esta área de las matemáticas tiene importantes aplicaciones en la propia matemática y en otras ciencias. Es empleada, por ejemplo, en la solución de problemas relacionados con la óptica, los procesos de recuperación de imágenes, el reconocimiento de patrones, la tomografía, la astronomía, etc. véase [8].

Dada una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), su Transformada de Fourier definida en $t \in \mathbb{R}$ como

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-itu}\, du,$$

cuando $f(\cdot)\, e^{-i(\cdot)t}$ es integrable en algún sentido. Esta transformada ha sido ampliamente estudiada en $L^1(\mathbb{R})$, el espacio de funciones Lebesgue integrables. En este espacio, la existencia de $\widehat{f}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, está garantizada. Sin embargo, su definición para funciones que pertenecen a otros espacios no se asegura, por ejemplo, si la función es de variación acotada sobre $\mathbb{R}$ y no es Lebesgue integrable.

Se sabe que en el proceso de aplicación de la matemática, en los problemas concernientes a las áreas antes mencionadas, en ocasiones se llega a un punto donde se conoce la Transformada de Fourier y el objetivo es recuperar la función de la que proviene. Esto nos plantea un problema de inversión o inversión puntual si se desea obtener el valor de la función en ciertos puntos. En la teoría clásica, el teorema de Dirichlet-Jordan es un resultado que resuelve el problema de inversión puntual para funciones en $BV(\mathbb{R})$, el espacio de funciones de variación acotada sobre $\mathbb{R}$, que al mismo tiempo pertenecen a $L^1(\mathbb{R})$. Este teorema es el siguiente, véase [4].

Teorema A. *Si f pertenece a $L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$, entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi}(L)\int_{M}^{M} e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)d\omega = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}. \tag{1}$$

La expresión de la izquierda en (1) se conoce como la integral de Fourier.

Se sabe que sobre intervalos acotados, las funciones de variación acotada son Lebesgue integrables. En cambio, sobre intervalos no acotados se tiene una situación diferente. Hay funciones de variación acotada que no están en $L^1(\mathbb{R})$, por ejemplo las funciones constantes distintas de 0. Esto parece ser una razón por la cual en el Teorema A se condiciona que las funciones también sean Lebesgue integrables.

Para obtener un resultado similar al teorema de Dirichlet-Jordan que contemple funciones en $BV(\mathbb{R})\setminus L^1(\mathbb{R})$, se hace indispensable el uso de métodos de integración diferentes a los que existen en la teoría de la integral de Lebesgue. Esto nos lleva a utilizar la integral de Henstock-Kurzweil[1]o integral HK, ya que nos permite emplear otros métodos de integración y ampliar el espacio de funciones integrables.

Lo anterior nos hace pensar en $BV_0(\mathbb{R})$, el espacio de las funciones en $BV(\mathbb{R})$ cuyos límites al infinito son cero. Yq que, según a las siguientes relaciones

- $L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}) \subsetneq HK(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}) \subset BV_0(\mathbb{R})$
- $HK(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R}) \neq \emptyset$,

en $BV_0(\mathbb{R})$ hay funciones HK-integrables que no son Lebesgue integrables, ver [17]. Además en este espacio la transformada de HK-Fourier[2]está definida puntualmente para cada $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. De este hecho, esta transformada también se puede definir en algunos subespacios de los espacios $L^P(\mathbb{R})$ con $1 < p \leq 2$. Lo anterior es debido a que si consideramos una función en $L^p(\mathbb{R}) \cap (L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}))$ entonces la transformada definida sobre $L^P(\mathbb{R})$ coincide con la transformada de HK-Fourier casi en todas partes. Las respectivas argumentaciones se encuentran en el Capítulo 1.

Por comentarios hallados en algunas de las referencias consultadas para la realización de esta tesis, se puede afirmar que la primera generalización del teorema de Dirichlet-Jordan para funciones en $BV_0(\mathbb{R})$ fue hecha por A. Pringsheim en el artículo "Über neue Gültigkeitsbedingungen für die Fouriersche Integralformel" publicado en dos partes en 1910 y 1912, [22]. Lamentablemente, de acuerdo a M. Riesz, actualmente no se tiene acceso a dicha prueba. En

[1]Integral definida por Ralph Henstock y Jaroslav Kurzweil en la década de 1950 del siglo pasado.

[2]Término que enfatiza el uso de la integral HK que fue usado por primera vez por E. Talvila en 2002, véase [25].

1955, M. Riesz y A. E. Livingston hicieron una prueba corta y no lo suficientemente justificada de este teorema, [23]. Por lo que, con la intención de ofrecer una demostración comprensiva y usando la integral HK, en [18] fue probado el mismo teorema. La versión del Teorema de Dirichlet-Jordan para funciones en $BV_0(\mathbb{R})$ es la siguiente.

Teorema B. *Si f pertenece a $BV_0(\mathbb{R})$, entonces la Transformada de HK-Fourier está definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y, para cada $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{\beta\to\infty,\alpha\to 0} \frac{1}{2\pi}(HK)\int_{\alpha\leq|t|\leq\beta} e^{ixt}\widehat{f}(t)dt = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}. \qquad (2)$$

Un problema que surge con respecto a las convergencias en (1) y (2) es saber si son uniformes. F. Moricz en 2004, ver [20], probó que la convergencia en (1) es uniforme en puntos de continuidad, obteniendo el siguiente resultado.

Teorema C. *Si f pertenece a $BV(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$ es un punto de continuidad de f, entonces el límite*

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi}(L)\int_{-M}^{M} e^{itx}\widehat{f}(t)dt = f(x), \qquad (3)$$

es uniforme en x. Además, si f es continua en $[a,b]$ entonces la convergencia en (3) es uniforme sobre el intervalo.

La convergencia uniforme en un punto x se refiere a que es uniforme sobre una vecindad de x.

Tomando en cuenta el Teorema C y que en [23] se menciona que la convergencia en (2) es uniforme en cualquier intervalo de continuidad de f pero sin hacer la prueba. El propósito de esta tesis es mostrar un resultado similar para funciones en $BV_0(\mathbb{R})$ y que no necesariamente pertenezcan a $L^1(\mathbb{R})$. A continuación enunciamos este teorema.

Teorema D. *Si f pertenece a $BV_0(\mathbb{R})$ y es continua por la derecha en $\mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$ es un punto de continuidad de f, entonces el límite*

$$\lim_{\beta\to\infty,\alpha\to 0} \frac{1}{2\pi}(HK)\int_{\alpha\leq|t|\leq\beta} e^{ixt}\widehat{f}(t)dt = f(x), \qquad (4)$$

converge uniformemente en x. Además, si f es continua en $[a,b]$ entonces (4) converge uniformemente sobre el intervalo.

En el Capítulo 2 se muestran algunas propiedades que permiten probar el Teorema D. Algunos de estas son similares a las empleadas en [20], pero se adecuaron para obtener la prueba, ya que en esa referencia se estudia el caso para funciones Lebesgue integrables y en este trabajo de tesis se consideran funciones que no necesariamente son integrables con respecto a Lebesgue.

Por lo ya explicado en líneas anteriores, el Teorema D es un resultado original. Este teorema y algunos resultados que llevan a su prueba, considerados en esta tesis, fueron apectados para publicación en la revista Eurasian Bulletin of Mathematics. También, como parte previa a la apropiación de la teoría sobre la integral de Henstock-Kurzweil y de la utilidad del Teorema de Hake en esta trabajo, se llegó a publicar el artículo "Sobre el Teorema de Hake para funciones de varias variables", véase [27].

Capítulo 1

Prerrequisitos

En este capítulo se establecen los conceptos y propiedades más importantes de las funciones de variación acotada, la integral de Henstock-Kurzweil y la Transformada de HK-Fourier. Omitiendo en la mayoria de los resultados sus respectivas pruebas pero sin dejar de mencionar donde encontrarlas. El contenido de este capítulo será la base para desarrollar los resultados de esta tesis.

1.1 Funciones de Variación Acotada

El siguiente concepto esta relacionado con la oscilación de las funciones y en general el comportamiento gráfico de estas.

1.1.1 Definiciones

Definición 1.1. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Se dice que f es de **variación acotada** sobre $[a, b]$, si*

$$V(f, [a, b]) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b \right\} < \infty.$$

*A V(f,[a,b]) se le llama la **variación total de** f sobre $[a, b]$.*

Definición 1.2. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es de **variación acotada** sobre $\mathbb{R}$, si*

$$V(f, \mathbb{R}) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : x_0 < x_1 < ... < x_n; x_0, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\} < \infty.$$

*A $V(f, \mathbb{R})$ se le llama la **variación total de** f sobre $\mathbb{R}$.*

De forma similar se define una función de variación acotada en los intervalos $[a, \infty)$ y $(-\infty, a]$.

Sean los conjunto de funciones $BV(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}|\ f$ es de variación acotada sobre I $\}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ y $BV_0(\mathbb{R}) = \{f \in BV(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \longrightarrow \infty} f(x) = 0\}$. La siguiente observación relaciona las dos definiciones anteriores.

Observación 1.1 ([20]). *$f \in BV(\mathbb{R})$ si y sólo si $f \in BV([a,b])$ para todo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $A = \{V(f,[a,b]) : [a,b] \subset \mathbb{R}\}$ está acotado. Además, $V(f,\mathbb{R}) = \sup A$.*

1.1.2 Propiedades de las funciones de Variación Acotada

Se recordaran algunos resultados importantes alrededor de las funciones de variación acotada. En alguno de ellos, por considerarlo importante se hará la demostración.

Teorema 1.1 ([6], [20]). *Si $f \in BV(\mathbb{R})$ y $V(f,x) := V(f,(-\infty,x])$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces*

1) f es acotada en $\mathbb{R}$.

2) $\lim_{|x| \longrightarrow \infty} f(x)$ existe.

3) $V(f,\cdot), V(f,\cdot) - f \in BV(\mathbb{R})$ son crecientes y acotadas en $\mathbb{R}$.

4) $\lim_{x \longrightarrow -\infty} V(f,x) = 0$ y $\lim_{x \longrightarrow \infty} V(f,x) = V(f,\mathbb{R})$.

5) $V(f,\mathbb{R}) = V(f,(-\infty,a]) + V(f,[a,b]) + V(f,[b,\infty))$.

Del teorema anterior es claro que si $f \in BV(\mathbb{R})$, entonces $f(x) = V(f,x) - (V(f,x) - f(x))$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Es decir, f se puede descomponer en la diferencia de dos funciones acotadas y crecientes.

Teorema 1.2. *Sean $f \in BV(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces f es continua en x_0 si y sólo si $V(f,\cdot)$ es continua en x_0.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de $V(f,[x_0,\infty))$ y $V(f,x_0)$, existen sucesiones finitas estríctamente monótonas $x_0 = z_0 < z_1 < ... < z_n$ en $[x_0,\infty)$ y $x_0 = y_0 > y_1 > ... > y_m$ en $(-\infty,x_0]$ tales que

$$V(f,[x_0,\infty)) \leq \sum_{i=1}^{n} |f(z_i) - f(z_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$V(f,x_0) \leq \sum_{i=1}^{m} |f(y_i) - f(y_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por la continuidad de f en x_0, existe $\delta \in (0, \min\{z_1 - x_0, x_0 - y_1\})$ tal que si $x \in \mathbb{R}$ con $0 < x - x_0 < \delta_\varepsilon$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y

$$
\begin{aligned}
0 \leq V(f,x) - V(f,x_0) &= V(f,[x_0,x]) \\
&= V(f,[x_0,\infty)) - V(f,[x,\infty)) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f(z_i) - f(z_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} - V(f,[x,\infty)) \\
&\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(z_1) - f(x)| + \\
&\quad \sum_{i=2}^{n} |f(z_i) - f(z_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} - V(f,[x,\infty)) \\
&\leq |f(x) - f(x_0)| + V(f,[x,\infty)) + \frac{\varepsilon}{2} - V(f,[x,\infty)) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ahora si $x \in \mathbb{R}$ con $0 < x_0 - x < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y

$$
\begin{aligned}
0 \leq V(f,x_0) - V(f,x) &\leq \sum_{i=1}^{m} |f(y_i) - f(y_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} - V(f,x) \\
&\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(y_1) - f(x)| + \\
&\quad \sum_{i=2}^{m} |f(y_i) - f(y_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} - V(f,x)) \\
&\leq |f(x) - f(x_0)| + V(f,x) + \frac{\varepsilon}{2} - V(f,x) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Esto prueba $\lim_{x \longrightarrow x_0} V(f,x) = V(f,x_0)$.

$\Leftarrow$] Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de $V(f,\cdot)$ en x_0, existe δ tal que si $x \in \mathbb{R}$ con $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ entonces $|V(f,x) - V(f,x_0)| < \varepsilon$. Como $|f(x) - f(x_0)| \leq |V(f,x) - V(f,x_0)|$ para cada $x \in \mathbb{R}$, se llega a que f es continua en x_0.

$\square$

1.2 Integral de Henstock-Kurzweil

Un aspecto de la integral de Henstock-Kurzweil radica en lo simple de su definición, la cual es parecida a la integral de Riemann, y que generaliza la integral de Lebesgue y por ende a la de Riemann. Esto nos permite analizar y plantear resultados validos para las integrales de Lebesgue y Riemann pero ahora para la de Henstock-Kurzweil.

1.2.1 Definiciones

Para las siguientes definiciones y resultados consideremos a $I \subseteq \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ un intervalo cerrado finito o infinito y $a, b \in \mathbb{R}$.

Definición 1.3. *Se dice que los intervalos I y J en $\overline{\mathbb{R}}$* ***no se sobreponen****, si $int(I) \cap int(J) = \emptyset$.*

Definición 1.4. *Una* ***partición de I*** *es una colección finita $P = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ de subintervalos cerrados que no se sobreponen tal que $I = \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i]$.*

Definición 1.5. *Sean $P = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ una partición de I y $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es una* ***partición etiquetada*** *de I y t_i se le dice* ***etiqueta*** *de $[x_{i-1}, x_i]$. A $([x_{i-1}, x_i], t_i)$ se le llama* ***par asociado****.*

Definición 1.6. *La función $\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se le llama* ***medidora sobre I****, si $\delta(t) > 0$ para todo $t \in I$.*

Definición 1.7. *Sean $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ una partición etiquetada de $\overline{\mathbb{R}}$ y δ una medidora sobre $\overline{\mathbb{R}}$. Se dice que $\dot{P}$ es* ***δ-fina*** *de $\overline{\mathbb{R}}$ si:*

1. *$[x_0, x_1] \subseteq [-\infty, -\frac{1}{\delta(t_1)}]$ con $t_1 = -\infty$; equivalentemente a $x_1 \leq -\frac{1}{\delta(t_1)}$.*
2. *$[x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ para $i \in \{2, ..., n-1\}$.*
3. *$[x_{n-1}, x_n] \subseteq [\frac{1}{\delta(t_n)}, \infty]$ con $t_n = \infty$; equivalentemente a $\frac{1}{\delta(t_n)} \leq x_{n-1}$.*

Una partición es δ-fina de $[a, \infty]$, si cumple los incisos 1 y 2. Una partición es δ-fina de $[-\infty, b]$, si satisface los incisos 2 y 3. Para un intervalo $[a, b]$, una partición es δ-fina si cumple el inciso 2 con sus respectivas modificaciones.

Observación 1.2. *Sean δ_1 y δ_2 medidoras sobre I, y $\delta(t) := \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\}$ para cada $t \in I$. Entonces, δ es una medidora sobre I. Además, toda partición δ-fina es δ_1-fina y δ_2-fina de I. Esto puede ser extendido a un número finito de medidoras sobre I.*

Observación 1.3. *La medidora δ en predetermina etiquetas de los subintervalos de la partición δ-fina.*

Observación 1.4. *Si $\dot{P}_1$ y $\dot{P}_2$ son particiones δ-finas de $[-\infty, a]$ y $[a, \infty]$, respectivamente, entonces $\dot{P}_1 \cup \dot{P}_2$ es una partición δ-fina de $\overline{\mathbb{R}}$.*

Sean $f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ una partición δ-fina de $\overline{\mathbb{R}}$. Es claro que la δ-finura de una partición $\dot{P}$ de $\overline{\mathbb{R}}$, obliga a que las etiquetas del primer y último subintervalo sean $t_1 = -\infty$ y $t_n = \infty$. El primer subintervalo de $\dot{P}$ es $[x_0, x_1]$ cuya longitud es $x_1 - x_0 = x_1 - (-\infty) = \infty$, esto causaría problemas al definir la suma de Riemann. Por ello, se establece la convención $f(-\infty) := 0$ y de igual forma se hace para $f(\infty) := 0$. Entonces, $f(t_1)(x_1 - x_0) = 0$ y $f(t_n)(x_n - x_{n-1}) = 0$. La misma consideración se hace para funciones sobre $[a, \infty]$ o $[-\infty, b]$. Así que a partir de ahora se consideran funciones que cumplan lo mencionado en este párrafo.

Definición 1.8. *Sean $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ una partición etiquetada de I, entonces*

$$S(f; \dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}),$$

*se llama **suma de Riemann de f sobre** $\dot{P}$.*

El siguiente teorema es de gran importancia ya que dado una medidora δ, esta nos garantiza la existencia de al menos una partición δ-fina.

Teorema 1.3 (**Teorema de la finura de Cousin [6, Teorema 16.1]**)**.** *Si δ es una medidora sobre I, entonces existe una partición δ-fina de I.*

El Teorema anterior da pie a la siguiente definición.

Definición 1.9. *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es **Henstock-Kurzweil (HK) integrable**, si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe δ_ε una medidora sobre I tal que si $\dot{P}$ es una partición δ_ε-fina de I, entonces*

$$|S(f; \dot{P}) - A| < \varepsilon.$$

Se definen los conjunto de funciones

$$HK(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ es HK-integrable sobre } I\} \text{ y}$$

$$HK_{loc}(I) = \{f \in HK([a, b]) : [a, b] \subset I\}.$$

Además, si $f \in HK(I)$, entonces la integral de f se denota como

$$A = (HK) \int_I f = (HK) \int_I f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Notar que con las modificaciones adecuadas a las definiciones de esta sección que hasta el momento se han presentado, se tiene que $HK(\overline{\mathbb{R}}) = HK(\mathbb{R})$ cuyos resultados seguirán siendo validos. Esto se utilizará por conveniencia en la siguiente observación así como también en el contenido de las demás secciones.

Observación 1.5 (**[17]**)**.** *Notar que si $0 < \alpha < \beta \leq 1 < \alpha + \beta$ y $\chi_{1,\alpha}, \chi_{2,\alpha}$ son las funciones características de los intervalos $[\pi^{1/\alpha}, \infty)$ y $[(\pi/2)^{1/\alpha}, \infty)$, respectivamente. Entonces las funciones*

$$sen^\alpha_\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad sen^\alpha_\beta(t) = \chi_{1,\alpha}(t) \frac{sen(t^\alpha)}{t^\beta},$$

$$\cos^\alpha_\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \cos^\alpha_\beta(t) = \chi_{2,\alpha}(t) \frac{\cos(t^\alpha)}{t^\beta}.$$

están en $HK(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$*. Como* $HK(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}) \subset BV_0(\mathbb{R})$*, se puede afirmar que en* $BV_0(\mathbb{R})$ *hay funciones HK-integrables que no son Lebesgue integrables.*

Teorema 1.4 ([**3**])**.** *Si* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es Riemann o Lebesgue integrable sobre* $[a, b]$*, entonces* $f \in HK([a, b])$ *y los valores de las respectivas integrales coinciden.*

Observación 1.6 ([**6, Ejemplo 2.8**])**.** *Si* $f \in HK(I)$*, no necesariamente* $|f| \in HK(I)$*. Ejemplo: Sea* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}2^k}{k} & si \quad x \in [c_{k-1}, c_k) \quad k \in \mathbb{N} \\ 0 & si \quad x = 1. \end{cases}$$

donde $c_{k-1} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}$ *con* $k \in \mathbb{N}$*. Esta función satisface que* $f \in HK([0, 1])$ *pero* $|f| \notin HK([0, 1])$*.*

Definición 1.10. *Si* $f, |f| \in HK(I)$*, se dice que* f *es* ***absolutamente integrable sobre*** I*.*

Bajo las condiciones de la definición anterior $f \in L^1(I)$.

A continuación se muestran ejemplos de funciones HK integrables sobre intervalos infinitos de la forma $[a, \infty]$.

Ejemplo 1.1 ([**6, Ejemplo 16.3**])**.** *Sea* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *una serie que converge a* $A \in \mathbb{R}$*. Definamos* $h : [0, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$h(x) = \begin{cases} a_k & si \quad x \in [k - 1, k) \quad k \in \mathbb{N} \\ 0 & si \quad x = \infty. \end{cases}$$

Se puede ver que $h \in HK([0, \infty])$ *y su integral es igual a* A*.*

Observación 1.7. *Sea la función* h *como en el Ejemplo 1.1. El valor absoluto de* h *está dada por* $|h|(x) = |a_k|$*, para* $x \in [k - 1, k)$ *con* $k \in \mathbb{N}$ *y* $|h|(\infty) = 0$*. Si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es absolutamente convergente, entonces* $|h| \in HK([0, \infty])$*. Así,* $|h|$ *es absolutamente integrable y*

$$(HK) \int_0^{\infty} |h| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

1.2.2 Propiedades de la Integral de Henstock-Kurzweil

La integral de Henstock-Kurzweil satisface propiedades similares a la integral de Riemann, como son la linealidad, monotonía y la aditividad, sólo que en el caso de la integral HK, puede plantearse sobre intervalos finitos o infinitos. Con la intención de profundizar dentro de la teoría desarrollada para la integral HK, a continuación se enuncian resultados más fuertes sólo que se omitirán sus respectivas pruebas.

Teorema 1.5 (**[6, Teorema 8.3]**). *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones en* $HK([a,b])$ *que converge uniformemente a* f *sobre* $[a,b]$. *Entonces,* $f \in HK([a,b])$ *y*

$$(HK)\int_I f = \lim_{n\to\infty}(HK)\int_I f_n.$$

Teorema 1.6 (**Teorema de la convergencia Dominada [6, Teorema 8.8]**). *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones en* $HK(I)$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *para cada* $x \in I$. *Supongamos que existen* $g, h \in HK(I)$ *tal que* $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$ *para cada* $x \in I$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces* $f \in HK(I)$ *y*

$$(HK)\int_I f = \lim_{n\to\infty}(HK)\int_I f_n.$$

Teorema 1.7 (**Teorema de Integración por Partes [6, Teorema 12.1]**). *Sean* $f, g \in HK([a,\infty])$, $F(x) = \int_a^x f$ *y* $G(x) = \int_a^x g$ *para cada* $x \geq a$. *Entonces*

i) $Fg + fG \in HK([a,\infty])$ *y*

$$(HK)\int_a^\infty (Fg + fG) = \lim_{b\longrightarrow\infty} F(b)g(b) - F(a)g(a).$$

ii) $Fg \in HK([a,\infty])$ *si y sólo si* $fG \in HK([a,\infty])$. *Además*

$$(HK)\int_a^\infty Fg = \lim_{b\longrightarrow\infty} F(b)g(b) - F(a)g(a) - (HK)\int_a^\infty fG.$$

Teorema 1.8 (**Teorema de Hake para** $\overline{\mathbb{R}}$ **[6, Teorema 16.7]**). *Sea* $h : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función. Entonces* $h \in HK(\overline{\mathbb{R}})$ *con valor de su integral* $A \in \mathbb{R}$, *si y sólo si* $h \in HK([a,b])$ *para todo* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *y*

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} (HK)\int_a^b h = A.$$

El Teorema de Hake es un resultado importante en la teoría de la integral de Henstock-Kurzweil, ya que muestra la equivalencia de la integral y la integral impropia de Henstock-Kurzweil. Además, desempeña un pilar importante en la demostración de otros resultados para intervalos infinitos.

Teorema 1.9 (**Críterio de Cauchy [6, Teorema 16.6]**). *Sea* $h \in HK([a,b])$ *para todo* $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *Entonces* $h \in HK(\overline{\mathbb{R}})$ *si y sólo si* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, k_\varepsilon > 0$ *tal que si* $a_1 < a_2 \leq -k_\varepsilon$ *y* $k_\varepsilon \leq b_1 < b_2$, *entonces* $|(HK)\int_{a_1}^{a_2} h| + |(HK)\int_{b_1}^{b_2} h| < \varepsilon$.

Teorema 1.10 (**Críterio de Chartier-Dirichlet [6, Teorema 16.10]**). *Sean* $h, g : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones. Supogamos que* *i) $h \in HK([a,b])$ para todo $b \geq a$ y $H(x) = (HK)\int_a^x h$ es acotada en $[a,\infty)$,*

ii) g es monótona y $\lim_{x\longrightarrow\infty} g(x) = 0$.

Entonces $hg \in HK([a,\infty])$.

El resultado anterior es cierto, con apropiadas variantes, para el intervalo $[-\infty, a]$.

Teorema 1.11 (Teorema del Multiplicador [6, Teorema 10.12]). *Si $\varphi \in BV([a,\infty))$, $f \in HK([a,\infty])$ y $F(x) = \int_a^x f$ para $x \geq a$, entonces $f\varphi \in HK([a,\infty])$ y*

$$(HK)\int_a^\infty f\varphi = \lim_{b\to\infty}(HK)\int_a^b \varphi dF = \lim_{b\to\infty}\left[F(b)\varphi(b) - (HK)\int_a^b F d\varphi\right].$$

Además, si G es una primitiva de f entonces $f\varphi$ tiene una primitiva dada por

$$\Pi\left(x\right) = (HK)\int_a^x \varphi dG = \varphi(x)G(x) - (HK)\int_a^x G d\varphi,$$

para cada $x \geq a$ y

$$(HK)\int_a^\infty f\varphi = \lim_{x\to\infty}\Pi\left(x\right).$$

Las integrales a la derecha de los símbolos de igualdad son de Riemann-Stieltjes.

Se tiene el resultado análogo para el intervalo $[-\infty, a]$. Como consecuencia del Teorema 1.11 se tiene el siguiente resultado solo que planteado para intervalos compacto.

Teorema 1.12 (Segundo Teorema de Valor Medio [6, Teorema 12.5]). *Si $f \in HK([a,b])$ y g es monótona sobre $[a,b]$, entonces existe $\xi \in [a,b]$ tal que*

$$(HK)\int_a^b f(t)g\left(t\right)\, dt = g\left(a\right)(HK)\int_a^\xi f(t)\, dt + g\left(b\right)(HK)\int_\xi^b f(t)\, dt.$$

1.3 Transformada de HK-Fourier

Teniendo en cuenta que en la teoría clásica del análisis de Fourier, si una función f pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, entonces su transformada de Fourier,

$$\widehat{f}(x) := (L)\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-isx}dx,$$

está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Se pretende definir la transformada de HK-Fourier de una función de una manera similar y posteriormente establecer algunas condiciones necesarias para su existencia. Empleamos este término debido a que la integral usada será la de Henstock-Kurzweil.

Definición 1.11. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. La* ***Transformada de HK-Fourier*** *de f en $s \in \mathbb{R}$ se define como*

$$\mathcal{F}_{HK}(f)(s) := (HK)\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-isx}dx,$$

donde $f(\cdot)e^{-is\cdot}$ es HK integrable sobre $\mathbb{R}$.

Observación 1.8 ([**25, Ejemplo 3**])**.** *Si $f \in HK(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f}(s)$ no existe en $s \in \mathbb{R}$ o en un subconjunto fijo de $\mathbb{R}$. Por ejemplo: Sea $a \in \mathbb{R}$ arbitrario y sea*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(ax)}{|x|} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0, \end{cases}$$

entonces $\mathcal{F}_{HK}(f)(s) = i\ln\left|\frac{s-a}{s+a}\right|$ para $s \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$. Es decir, el conjunto donde $\mathcal{F}_{HK}(f)(s)$ existe depende de a.

Derivado de la observación anterior, a continuación se dan algunas condiciones suficientes para la existencia de la Transformada de HK-Fourier en $\mathbb{R}$ o en un subconjunto determinado de $\mathbb{R}$.

Teorema 1.13 ([**25, Proposición 2, b)**])**.** *Si $f \in HK_{loc}(\mathbb{R})$ y existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \leq \beta$ y $|f| \in HK((-\infty, \alpha])$ y $|f| \in HK([\beta, \infty))$, entonces $\mathcal{F}_{HK}(f)(s)$ existe en cada $s \in \mathbb{R}$.*

Teorema 1.14 ([**25, Proposición 2, b)**])**.** *Si $f \in HK_{loc}(\mathbb{R})$ y existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \leq \beta$ y $f \in BV((-\infty, \alpha]) \cap BV([\beta, \infty))$ con $\lim_{|x| \longrightarrow \infty} f(x) = 0$, entonces $\mathcal{F}_{HK}(f)(s)$ existe en $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Demostración. Como $f \in BV([\beta, \infty))$, $f = f_1 - f_2$ con f_1, f_2 crecientes y acotadas en $[\beta, \infty)$. Además, $\lim_{x \longrightarrow \infty} f_1(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} f_2(x) = c_0 \in \mathbb{R}$. Defínase $\psi_1(x) := f_1(x) - c_0$ y $\psi_2(x) := f_2(x) - c_0$ para cada $x \in [\beta, \infty)$. Entonces ψ_1 y ψ_2 son funciones crecientes y acotadas en $[\beta, \infty)$ con $f = \psi_1 - \psi_2$ y $\lim_{x \longrightarrow \infty} \psi_1(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \psi_2(x) = 0$.

Ahora $\psi(x) = \int_\beta^x e^{-its}dt = \frac{i}{s}(e^{-isx} - e^{-is\beta})$ y $|\psi(x)| \leq \frac{2}{|s|}$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $s \neq 0$. Por Teorema 1.10, $\psi_1(\cdot)e^{-is\cdot}, \psi_2(\cdot)e^{-is\cdot} \in HK([\beta, \infty))$ para $s \neq 0$. Así $f(\cdot)e^{-is\cdot} = \psi_1(\cdot)e^{-is\cdot} - \psi_2(\cdot)e^{-is\cdot} \in HK([\beta, \infty))$ para $s \neq 0$. Análogamente se demuestra que $f(\cdot)e^{-is\cdot} \in HK((-\infty, \alpha])$ para $s \neq 0$. Entonces

$$(HK)\int_\beta^\infty f(x)e^{-isx}dx \quad y \quad (HK)\int_{-\infty}^\alpha f(x)e^{-isx}dx$$

existen para $s \neq 0$. Por el Teorema del Multiplicador,

$$(HK)\int_\alpha^\beta f(x)e^{-isx}dx$$

existe para $s \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $\mathcal{F}_{HK}(f)(s)$ existe cuando $s \neq 0$.

$\square$

Se sigue del teorema anterior cuando $\alpha = \beta$.

Corolario 1.1. *Si $f \in BV_0(\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{F}_{HK}(f)(s)$ está definida para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Teorema 1.15 (**[25, Proposición 2, c)]**)**.** *Sean $f \in HK(\mathbb{R})$, $F_1(x) = (HK)\int_x^\infty f$ y $F_2(x) = (HK)\int_{-\infty}^x f$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathcal{F}_{HK}(f)(s)$ existe en $s \in \mathbb{R}$, si y sólo si $(HK)\int_0^\infty F_1(x)e^{-isx}dx$ y $(HK)\int_{-\infty}^0 F_2(x)e^{-isx}dx$ existen.*

1.3.1 Propiedades de la Transformada de HK-Fourier

Teorema 1.16 (**[19, Teorema 2.5]**)**.** *Sea $g \in HK_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $G(x) = (HK)\int_0^x g$ está acotado en $\mathbb{R}$. Si $f \in BV_0(\mathbb{R})$, entonces $H(s) := (HK)\int_{\mathbb{R}} f(x)g(sx)dx$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y*

$$\lim_{|s|\to\infty} H(s) = 0.$$

Demostración. Para $a \in \mathbb{R}$, sea $g_a(x) := g(ax)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Como $g \in HK_{loc}(\mathbb{R})$ entonces $g, g_a \in HK([0,b])$, para cualquier $b > 0$. Por la primera parte de la demostración del Teorema 1.14 para $[0,\infty)$, $f = f_1 - f_2$ donde f_1 y f_2 son funciones monótonas y acotadas en $[0,\infty)$ tales que

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0.$$

Por el Criterio de Chartier-Dirichlet, Teorema 1.10, $g_a f \in HK([0,\infty))$. Luego con ayuda del Teorema 1.11 para intervalos compactos y sabiendo que $\lim_{b\to\infty}(HK)\int_0^\infty g_a f$ existe y $\lim_{b\to\infty} \frac{G(ab)}{a} f(b) = 0$ cuando $a \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
(HK)\int_0^\infty g_a f &= -(RS)\int_0^\infty \frac{G(at)}{a} df(t) \\
&= -(RS)\int_0^\infty \frac{G(at)}{a} df_1(t) + (RS)\int_0^\infty \frac{G(at)}{a} df_2(t) \\
&= -(L)\int_0^\infty \frac{G(at)}{a} d\mu_{f_1}(t) + (L)\int_0^\infty \frac{G(at)}{a} d\mu_{f_2}(t)
\end{aligned}$$

donde μ_{f_1} y μ_{f_2} son medidas finitas de Lebesgue-Stieltjes generadas por f_1 y f_2.

Sean $b > 0$ y $M > 0$ la cota de G. Para cada $a \in [b,\infty)$ se tiene que

$$\left| \frac{G(ax)}{a} \right| \leq \frac{M}{b},$$

para cada $x \in [0,\infty)$.

Sea $a_0 \in [b,\infty)$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[b,\infty)$ que converge a a_0. Para $n \in \mathbb{N}$, se define $h_n(x) := \frac{G(z_n x)}{z_n}$ para cada $x \in [0,\infty)$. Como G es continua en $[b,\infty)$ obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \frac{G(a_0 x)}{a_0} \quad y \quad |h_n(x)| \leq \frac{M}{b},$$

para cada $x \in [0,\infty)$. Por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_0^\infty h_n(t)d\mu_{f_1}(t) = (L)\int_0^\infty \frac{G(a_0 t)}{a_0}d\mu_{f_1}(t) = (RS)\int_0^\infty \frac{G(a_0 t)}{a_0}df_1(t)$$

y

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_0^\infty h_n(t)d\mu_{f_2}(t) = (L)\int_0^\infty \frac{G(a_0 t)}{a_0}d\mu_{f_2}(t) = (RS)\int_0^\infty \frac{G(a_0 t)}{a_0}df_2(t).$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}(RS)\int_0^\infty \frac{G(z_n t)}{z_n}df(t) = (RS)\int_0^\infty \frac{G(a_0 t)}{a_0}df(t).$$

Así $H_+(a) = (HK)\int_0^\infty g(at)f(t)dt$ es continua en $[b,\infty)$ y con un argumento similar H_+ es continua en $(-\infty,-b]$. Como $b > 0$ es arbitrario, H_+ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. De la misma manera se prueba que $H_-(a) = (HK)\int_{-\infty}^0 g(at)f(t)dt$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Por lo tanto H es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Para finalizar notemos que

$$|H(a)| \leq \frac{M}{|a|}V(f,(-\infty,0]) + \frac{M}{|a|}V(f,[0,\infty))$$

cuando $a \neq 0$. Entonces

$$\lim_{|a|\to\infty} H(a) = 0.$$

□

Como consecuencia del Teorema 1.16 se tiene el siguente resultado.

Proposición 1.1 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Si $f \in BV_0(\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{F}_{HK}(f)$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y*

$$\lim_{|s|\to\infty} \mathcal{F}_{HK}(f)(s) = 0.$$

Demostración. Sea $g(x) = e^{-ix}$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y se aplica el Teorema 1.16 a la parte real e imaginaria de g para obtener el resultado.

□

1.3.2 La Transformada de HK-Fourier sobre los espacios $L^P(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$

Recordemos que $L^p(\mathbb{R})$, con $1 < p \leq 2$, considerado como espacio de Banach, es un espacio cuyos elementos no son funciones, sino clases de equivalencia de funciones. Sin embargo, con la intensión de simplificar el lenguaje, se acostumbra a seguir hablando de $L^p(\mathbb{R})$ como un espacio de funciones. De la precisión anterior, en esta sección se pretende mostrar que la transformada de HK-Fourier se puede definir sobre determinados subespacios de $L^p(\mathbb{R})$, con $1 < p \leq 2$, relacionados con las funciones de variación acotada.

A continuación se enuncia un resultado que será de ayuda para definir la transformada de Fourier para funciones en $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 1.17 (**[24, Teorema 9.13]**). *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ y $||\widehat{f}||_2^2 = ||f||_2^2$. Además, $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$.*

De este teorema, para $f \in L^2(\mathbb{R})$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_2^2 = 0$. Entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$. Luego, $f_n - f_m \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ con $n, m \in \mathbb{N}$. El Teorema 1.17 asegura que $||\widehat{f_n} - \widehat{f_m}||_2^2 = ||\widehat{f_n - f_m}||_2^2 = ||f_n - f_m||_2^2$, lo cual implica que $\{\widehat{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$. Por ende $\{\widehat{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún $g \in L^2(\mathbb{R})$ con respecto a la norma $|| \cdot ||_2$. Además, si $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ que converge a f en $L^2(\mathbb{R})$, entonces $\{\widehat{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en $L^2(\mathbb{R})$. Esto da pie a que tenga sentido la siguiente definición.

Definición 1.12. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Se define la Transformada de Fourier de f como*

$$\mathcal{F}_2(f)(x) := \lim_{n\to\infty} (L) \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f_n(t)dt,$$

donde el límite es con respecto a $|| \cdot ||_2$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ que converge a f en el espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Observación 1.9. *Notar que si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, se cumple $\mathcal{F}_2(f) = \widehat{f}$.*

Lema 1.1 (**[9, Sección 2.2.4]**). *Sea $1 < p < 2$. Entonces*

$$L^p(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}).$$

Demostración. Solo se probará una contención pues la otra es trivial. Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$. Consideremos $f_1 = f\chi_E$ y $f_2 = f - f_1$ donde $E = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > 1\}$ tiene medida finita. Entonces

$$(L) \int_{\mathbb{R}} |f_1| d\mu \leq \mu(E)^{1-\frac{1}{p}} ||f||_p < \infty$$

y

$$\left((L)\int_{\mathbb{R}} |f_2|^2 d\mu\right)^2 \leq (L)\int_{E^c} |f|^2 d\mu < \infty.$$

Por lo tanto $f_1 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ y $f_2 \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$

□

Puede suceder que $f = f_1 + f_2$ y $f = f_1' + f_2'$ donde $f_1, f_1' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, $f_2, f_2' \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$. Entonces $f_1 - f_1' = f_2' - f_2 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Por la Observación 1.9, $\widehat{f_1} - \widehat{f_1'} = \widehat{f_1 - f_1'} = \mathcal{F}_2(f_2' - f_2) = \mathcal{F}_2(f_2') - \mathcal{F}_2(f_2)$. Así, $\widehat{f_1} + \mathcal{F}_2(f_2) = \widehat{f_1'} + \mathcal{F}_2(f_2')$. Por lo tanto la siguiente función está bien definida.

Definición 1.13. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 < p < 2$. Se define la Transformada de Fourier de f como*

$$\mathcal{F}_p(f) := \widehat{f_1} + \mathcal{F}_2(f_2),$$

donde $f_1 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ y $f_2 \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$.

Como existe la transformada de HK-Fourier para funciones en $L^1(\mathbb{R})$ o en $BV_0(\mathbb{R})$, cuando $x \neq 0$. Entonces es posible aplicar esta transformada a funciones en $L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$, es decir, $\mathcal{F}_{HK}(f)(x)$ existe para $f \in L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})$ y $x \neq 0$.

Teorema 1.18 ([**21, Teorema 3.3**]). *Si $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap (L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}))$, entonces $\mathcal{F}_2(f) = \mathcal{F}_{HK}(f)$ c. d.*

El resultado que sigue permite caracterizar la Transformada de Fourier sobre un subespacio de $L^p(\mathbb{R})$ por medio de la integral de Henstock-Kurzweil.

Corolario 1.2 ([**21, Corolario 1**]). *Si $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap (L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}))$ con $1 < p < 2$, entonces*

$$\mathcal{F}_p(f)(x) = (HK)\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t)dt \quad c.\ d.$$

Demostración. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap (L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}))$. Entonces $f = f_1 + f_2 = f_1' + f_2'$, donde $f_1, f_1' \in L^1(\mathbb{R})$, $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ y $f_2' \in BV_0(\mathbb{R})$. Luego $f_2 = f_1' - f_1 + f_2' \in L^2(\mathbb{R}) \cap (L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R}))$. Por el Teorema 1.18, se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_p(f)(x) &= \widehat{f_1}(x) + \mathcal{F}_2(f_2)(x) \\
&= \widehat{f_1}(x) + \mathcal{F}_{HK}(f_2)(x) \\
&= (HK)\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}(f_1 + f_2)(t)dt = (HK)\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t)dt
\end{aligned}$$

c. d. y la integral que interviene es la de Henstock-Kurzweil.

□

Capítulo 2

Inversión de la Transformada de HK-Fourier

El teorema de Dirichlet-Jordan es un teorema de inversión para funciones en $L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. Sabemos que, empleando la integral HK, este teorema se extiende al espacio de funciones de variación acotada que se desvanecen al infinito, $BV_0(\mathbb{R})$. Recordemos que este espacio contiene propiamente a $L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$. En este capítulo se prueba que la convergencia en el Teorema de Dirichlet-Jordan para funciones en $BV_0(\mathbb{R})$ (Teorema B), es uniforme en puntos de continuidad.

Antes de analizar el resultado principal, primero se estudia la convergencia uniforme hacia la transformada de HK-Fourier sobre intervalos compactos para funciones que pertenecen a $BV_0(\mathbb{R})$. Se harán uso de resultados que se pueden consultar en los Apéndices A y B.

2.1 Convergencia Uniforme de Funciones Integrales

En esta parte se muestra la relación entre la convergencia uniforme de funciones integrales y la transformada de HK-Fourier. Los resultados mostrados serán de ayuda para demostrar teoremas importantes en la siguiente sección.

Teorema 2.1 (**[16]**). *Sean $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ intervalos cerrados de $\mathbb{R}$. Sean $f : \mathbb{R} \times I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que, para cada $(x, y) \in I_1 \times I_2$, $f(\cdot, x, y) \in HK_{loc}(\mathbb{R})$ y $\varphi \in BV_0(\mathbb{R})$. Supóngase que existe $A > 0$ tal que para toda $(x, y) \in I_1 \times I_2$ y todo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$,*

$$\left| (HK) \int_a^b f(t, x, y)\, dt \right| \leq A.$$

Entonces $(HK) \int_a^b f(t, \cdot, \cdot)\varphi(t)\, dt$ converge uniformemente a $(HK) \int_{\mathbb{R}} f(t, \cdot, \cdot)\varphi(t)\, dt$ sobre $I_1 \times I_2$, cuando $a \to -\infty$ y $b \to \infty$.

Demostración. Se sabe que φ puede ser expresado como $\varphi = \varphi_1' - \varphi_2'$ donde φ_1' φ_2' son funciones crecientes y acotadas sobre $\mathbb{R}$. Como $\varphi \in BV_0(\mathbb{R})$, existen l_1, l_2 tales que

$$l_1 = \lim_{t\to-\infty} \varphi_1'(t) = \lim_{t\to-\infty} \varphi_2'(t)$$

y

$$l_2 = \lim_{t\to\infty} \varphi_1'(t) = \lim_{t\to\infty} \varphi_2'(t).$$

Las funciones

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \varphi_i'(t) - l_1, & t < 0, \\ \varphi_i'(t) - l_2, & t \geq 0, \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

son crecientes en $(-\infty, 0]$ y $[0, \infty)$, por separado, y satisfacen que

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

y

$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi_1(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \varphi_2(t) = 0.$$

Por el Teorema 1.10 tenemos que $f(\cdot, x, y)\varphi_i(\cdot) \in HK(\mathbb{R})$ con $i = 1, 2$, para cada $(x, y) \in I_1 \times I_2$. Por ende $f(\cdot, x, y)\varphi(\cdot) \in HK(\mathbb{R})$, para cada $(x, y) \in I_1 \times I_2$. Sobre el intervalo $[0, \infty)$ se hace el siguiente análisis. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que si $t \geq N$, entonces $|\varphi_1(t)|, |\varphi_2(t)| < \varepsilon/4A$. Sean $b \geq a \geq N$. Para $(x, y) \in I_1 \times I_2$, el Teorema 1.12 asegura que existe $\xi_i = \xi_i((a, b), (x, y)) \in [a, b]$ con $i = 1, 2$, tal que

$$\begin{aligned}(HK)\int_a^b f(\cdot, x, y)\varphi \;=\;& \varphi_1(a)(HK)\int_a^{\xi_1} f(\cdot, x, y) + \varphi_1(b)(HK)\int_{\xi_1}^b f(\cdot, x, y) \\ & -\varphi_2(a)(HK)\int_a^{\xi_2} f(\cdot, x, y) - \varphi_2(b)(HK)\int_{\xi_2}^b f(\cdot, x, y).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left|(HK)\int_a^b f(t, x, y)\varphi(t)dt\right| \;\leq\;& \{|\varphi_1(a)| + |\varphi_2(a)|\} A + \{|\varphi_1(b)| + |\varphi_2(b)|\} A \\ <\;& \varepsilon,\end{aligned}$$

para cada $(x, y) \in I_1 \times I_2$.

Luego

$$\left|(HK)\int_0^a f(t, x, y)\varphi(t)dt - (HK)\int_0^\infty f(t, x, y)\varphi(t)dt\right| \leq \varepsilon,$$

para cada $(x, y) \in I_1 \times I_2$.

Así se da la convergencia uniforme sobre $I_1 \times I_2$ en $[0, \infty)$. Obteniendo de la misma forma la convergencia uniforme en el intervalo $(-\infty, 0]$ y sumando ambas convergencias, se obtiene la prueba.

□

Como consecuencia del Teorema 2.1 y el Teorema 1.8, se obtiene lo siguiente.

Corolario 2.1. *Si* $f \in BV_0(\mathbb{R})$ *y* $[a,b] \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *entonces* $(HK)\int_{-n}^{n} e^{-iu\cdot} f(u)du$ *converge uniformemente a* $\mathcal{F}_{HK}(f)(\cdot)$ *sobre* $[a,b]$, *cuando* $n \to \infty$.

Demostración. Sea $g : \mathbb{R} \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(u,t) = e^{-itu}$ para $u \in \mathbb{R}$ y $t \in [a,b]$. Luego se aplica el Teorema 2.1 a la parte real e imaginaria de g para obtener el resultado.

□

Observación 2.1. *Para* $n \in \mathbb{N}$, *sea* $f_n(x) := (HK)\int_{-n}^{n} e^{-iux} f(u)du$ *con* $x \in [a,b] \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *y* $f \in BV_0(\mathbb{R})$. *Como* $f_n \in HK([a,b])$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Por el Corolario 2.1 y el Teorema 1.5,* $\mathcal{F}_{HK}(f) \in HK[a,b]$ *y* $\lim_{n\to\infty}(HK)\int_a^b f_n = \int_a^b \mathcal{F}_{HK}(f)$.

Definición 2.1. *Sea la función* h *definida como*

$$h\left(u\right) = \begin{cases} sen(u)/u, & u \neq 0 \\ 1, & u = 0, \end{cases}$$

que pertenece a $HK(\mathbb{R}) \cap C\left(\mathbb{R}\right)$. *Se define la función* ***Seno Integral***

$$Si(x) = \frac{2}{\pi}(HK)\int_0^x h(u)du,$$

para $x \geq 0$.

La función Si tiene las siguientes propiedades:

1. $\lim_{x\to\infty} Si(x) = 1$.
2. $Si(x) \leq Si(\pi)$ para cada $x \in [0,\infty]$.
3. $\|h\|_\infty = \pi Si(\pi)/2$.

Teorema 2.2. *Si* $f \in BV_0(\mathbb{R})$, *entonces el límite*

$$\lim_{\alpha\to 0}(HK)\int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{sen(\alpha(x-t))}{(x-t)}dt = 0$$

es uniforme sobre $\mathbb{R}$ *(con respecto a* x *en* $\mathbb{R}$*).*

Demostración. Con ayuda de la función integral seno, para $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ y $b < c$ se tiene que

$$\left|(HK)\int_b^c \frac{sen(\alpha\left(t-x\right))}{(t-x)}\,dt\right| = \left|(HK)\int_{\alpha(b-x)}^{\alpha(c-x)} \frac{sen(t)}{t}\,dt\right| \leq \pi Si(\pi).$$

Por el Teorema 2.1, la convergencia

$$\lim_{n\to\infty} (HK) \int_{-n}^{n} f(t) \frac{sen(\alpha\,(t-x))}{(t-x)} dt = (HK) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{sen(\alpha\,(t-x))}{(t-x)} dt$$

es uniforme sobre $[-1,1]\times\mathbb{R}$ (con respecto a $(\alpha,x)\in[-1,1]\times\mathbb{R}$). Para cada $n\in\mathbb{N}$ se cumple que

$$\left|(HK) \int_{-n}^{n} f(t) \frac{sen(\alpha\,(t-x))}{(t-x)} dt\right| \leq 2nM|\alpha|.$$

para cada $(\alpha,x)\in[-1,1]\times\mathbb{R}$ y M es la cota de f.

Entonces, para cada $n\in\mathbb{N}$, la convergencia

$$\lim_{\alpha\to 0} (HK) \int_{-n}^{n} f(t) \frac{sen(\alpha\,(t-x))}{(t-x)} dt = 0$$

es uniforme sobre $\mathbb{R}$ (con respecto a $x\in\mathbb{R}$).

Sea $\varepsilon>0$, por ambas convergencias

- Existe $N_\varepsilon>0$ tal que si $n\geq N_\varepsilon$, entonces

  $$\left|(HK) \int_{-n}^{n} f(t) \frac{sen(\alpha\,(t-x))}{(t-x)} dt - (HK) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{sen(\alpha\,(t-x))}{(t-x)} dt\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

  para cada $(\alpha,x)\in[-1,1]\times\mathbb{R}$.

- Existe $\delta_{N_\varepsilon}>0$ tal que si $0<|\alpha|<\delta_{N_\varepsilon}$, entonces

  $$\left|(HK) \int_{-N_\varepsilon}^{N_\varepsilon} f(t) \frac{sen(\alpha\,(t-x))}{(t-x)} dt\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

  para cada $x\in\mathbb{R}$.

Considerando los puntos anteriores, si $0<|\alpha|<\delta_{N_\varepsilon}$ se tiene que

$$\left|(HK) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{sen(\alpha\,(t-x))}{(t-x)} dt\right| \;<\; \varepsilon,$$

para cada $x\in\mathbb{R}$. Con esto se prueba el resultado.

$\square$

2.2 Convergencia Uniforme en el Teorema de Dirichlet-Jordan sobre $BV_0(\mathbb{R})$

Teniendo en cuenta la importancia en el ámbito práctico del Teorema de Dirichlet-Jordan. En esta sección, se prueba el Teorema D. Antes enunciaremos y demostraremos resultados auxiliares.

Teorema 2.3. *Sean* $0 < \alpha < \beta < \infty$. *Si* $f \in BV_0(\mathbb{R})$, *entonces para cada* $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(HK)\int\limits_{\alpha\leq|t|\leq\beta}\mathcal{F}_{HK}(f)(s)e^{itx}dt &= 2(HK)\int_{\mathbb{R}} f(x+t)\,\frac{sen(\beta t)-sen(\alpha t)}{t}dt \qquad (2.1)\\ &= 2(HK)\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\frac{sen(\beta(x-t))-sen(\alpha(x-t))}{(x-t)}dt.\end{aligned}$$

Demostración. Se sabe que la Transformada de HK-Fourier de f está definida sobre $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Por el Corolario 2.1, se cumple la convergencia uniforme de $\int_{-n}^{n} f(u)e^{-iu\cdot}\,du$ a $\mathcal{F}_{HK}(f)(\cdot)$, cuando $n\to\infty$, sobre $[\alpha,\beta]$ y $[-\beta,-\alpha]$. Como $|e^{itx}| = 1$ para cada $t\in[\alpha,\beta]\cup[-\beta,-\alpha]$. Entonces $\int_{-n}^{n} f(u)e^{-iu\cdot}e^{ix\cdot}\,du$ converge uniformemente a $\mathcal{F}_{HK}(f)(\cdot)e^{ix\cdot}$, cuando $n\to\infty$, sobre $[\alpha,\beta]$ y $[-\beta,-\alpha]$. Sabiendo que $\int_{-n}^{n} f(u)e^{-iu\cdot}e^{ix\cdot}\,du$ es HK integrable sobre $[\alpha,\beta]$ y $[-\beta,-\alpha]$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Por el Teorema 1.5, $\mathcal{F}_{HK}(f)(\cdot)e^{ix\cdot}$ es HK integrable sobre $[\alpha,\beta]$ y $[-\beta,-\alpha]$, y

$$\begin{aligned}(HK)\int\limits_{\alpha\leq|t|\leq\beta}\mathcal{F}_{HK}(f)(t)e^{itx}dt &= (HK)\int\limits_{\alpha\leq|t|\leq\beta}\lim_{n\to\infty}(HK)\int_{-n}^{n} f(u)e^{-itu}e^{itx}du\,dt\\ &= \lim_{n\to\infty}(HK)\int\limits_{\alpha\leq|t|\leq\beta}(HK)\int_{-n}^{n} f(u)e^{-itu}e^{itx}\,du\,dt\\ &= \lim_{n\to\infty}(HK)\int_{-n}^{n} f(u)(HK)\int\limits_{\alpha\leq|t|\leq\beta}\left[e^{it(x-u)}\,dt\right]du\\ &= 2\lim_{n\to\infty}(HK)\int_{-n}^{n} f(u)\frac{sen(\beta(x-u))-sen(\alpha(x-u))}{(x-u)}du\\ &= 2(HK)\int_{\mathbb{R}} f(u)\frac{sen(\beta(x-u))-sen(\alpha(x-u))}{(x-u)}du,\end{aligned}$$

para cada $x\in\mathbb{R}$.

Haciendo el cambio de variable $u-x=t$, se obtiene la primera igualdad.

$\square$

Definición 2.2. *Para* $0 < \gamma$, $0 < \alpha < \beta$, *y* $f \in BV_0(\mathbb{R})$. *Se definen los siguientes operadores*

$$s_\gamma(f,x) = (HK)\int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{sen(\gamma(x-t))}{(x-t)}dt \quad y$$
$$s_{\alpha,\beta}(f,x) = (HK)\int_{\alpha\leq|t|\leq\beta} \mathcal{F}_{HK}(t)e^{itx}dt,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Observación 2.2. *Con las consideraciones de la Definición 2.2. Por el Teorema 2.3,*

$$s_{\alpha,\beta}(f,x) = 2\left[s_\beta(f,x) - s_\alpha(f,x)\right],$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. *Además, de acuerdo al Teorema 2.2, para* β *fijo y* $0 < \alpha < \beta$, *la convergencia de* $s_{\alpha,\beta}(f,\cdot)$ *a* $2s_\beta(f,\cdot)$ *cuando* $\alpha \to 0$, *es uniforme sobre* $\mathbb{R}$.

Definición 2.3. *Con las consideraciones de la Definición 2.2.*

- *La función* $s_\gamma(f,\cdot)$ *converge uniformemente en* $x_0 \in \mathbb{R}$ *a* $A(\cdot)$, *cuando* $\gamma \to \infty$, *si dado* $\varepsilon > 0$ *existen* $\gamma_\varepsilon > 0$ *y* $\delta_\varepsilon > 0$, *tales que si* $x \in \mathbb{R}$ *con* $|x_0 - x| < \delta_\varepsilon$ *y* $\gamma > \gamma_\varepsilon$, *entonces*

  $$|s_\gamma(f,x) - A(x)| < \varepsilon.$$

  Notación:

  $$\lim_{\gamma\to\infty} s_\gamma(f,x_0) = A(x_0) \text{ es uniforme en } x_0.$$

- *La función* $s_{\alpha,\beta}(f,\cdot)$ *converge uniformemente en* $x_0 \in \mathbb{R}$ *a* $B(\cdot)$, *cuando* $\beta \to \infty$ *y* $\alpha \to 0$, *si dado* $\varepsilon > 0$ *existen* $\alpha_\varepsilon > 0$, $\beta_\varepsilon > 0$ *y* $\delta_\varepsilon > 0$, *tales que si* $x \in \mathbb{R}$ *con* $|x_0 - x| < \delta_\varepsilon$, $0 < \alpha < \alpha_\varepsilon$ *y* $\beta_\varepsilon < \beta$, *entonces*

  $$|s_{\alpha,\beta}(f,x) - B(x)| < \varepsilon.$$

  Notación:

  $$\lim_{\beta\to\infty,\alpha\to 0} s_{\alpha,\beta}(f,x_0) = B(x_0) \text{ es uniforme en } x_0.$$

Antes de presentar el siguiente resultado es importante definir el que una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaga la condición de Lacunary, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (L)$, para ello consultar Apéndice A.

Lema 2.1. *Si* $f \in BV_0(\mathbb{R})$ *es continua por la derecha en* $\mathbb{R}$ *y* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (L)$, *entonces*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{u_j\leq v\leq u_{j+1}} \left|s_{u_j,v}(f,x)\right| \leq 2\left[3A+4\right]V(f,\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sean $j \in \mathbb{N}$ y $u_j \leq v \leq u_{j+1}$. Por Teorema 2.3, para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\begin{aligned} s_{u_j,v}(f,x) &= 2\left[s_v(f,x) - s_{u_j}(f,x)\right] \\ &= 2(HK)\int_{\mathbb{R}} f\,(x+t)\,\frac{sen(vt) - sen(u_j t)}{t} dt \\ &= 2(HK)\int_{\mathbb{R}} f\,(x+t)\left((HK)\int_{u_j}^{v} cos(ut)du\right) dt. \end{aligned}$$

El Teorema 2.8 del Apéndice A, asegura que

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{u_j}^{v} (sen(ut)/u)\,du\right] = \int_{u_j}^{v} cos(ut)du$$

y de la respectiva versión del Teorema 1.11 sobre los intervalos $(-\infty, 0]$ y $[0,\infty)$ se tiene

$$(HK)\int_0^{\infty} f\,(x+t)\left(\int_{u_j}^{v} cos(ut)du\right) dt = (RS)\int_0^{\infty} f(x+t)d_t\left(\int_{u_j}^{v} \frac{sen(ut)}{u}du\right) \quad \text{y}$$

$$(HK)\int_{-\infty}^{0} f\,(x+t)\left(\int_{u_j}^{v} cos(ut)du\right) dt = (RS)\int_{-\infty}^{0} f(x+t)d_t\left(\int_{u_j}^{v} \frac{sen(ut)}{u}du\right),$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Luego, se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} s_{u_j,v}(f,x) &= 2(RS)\int_{\mathbb{R}} f(x+t)d_t\left(\int_{u_j}^{v} \frac{sen(ut)}{u}du\right) \\ &= -2(RS)\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{u_j}^{v} \frac{sen(ut)}{u}du\right) d_t f(x+t), \end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. La segunda igualdad se sigue del Teorema 2.13 del Apéndice B.

Por el inciso *iii*) del Teorema 2.12 en el Apéndice B, se obtiene

$$|s_{u_j,v}(f,x)| \leq 2(RS)\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{u_j}^{v} \frac{sen(ut)}{u}du\right| d_t V_x(t),$$

donde $V_x(t) := V(f, x+t)$.

Para $j \in \mathbb{N}$, se define

$$M_j(f,x) := \max_{v\in[u_j,u_{j+1}]} |s_{u_j,v}(f,x)|,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

De la continuidad por la derecha de f y Teorema 2.14 del Apéndice B obtenemos que

$$\begin{aligned} M_j(f,x) &\leq 2(RS)\int_{\mathbb{R}} \max_{v\in[u_j,u_{j+1}]} \left|\int_{u_j}^{v} \frac{sen(ut)}{u} du\right| d_tV_x(t) \\ &= 2(L)\int_{\mathbb{R}} \max_{v\in[u_j,u_{j+1}]} \left|\int_{u_j}^{v} \frac{sen(ut)}{u} du\right| d_t\mu_{V_x}(t), \end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Finalmente, usando el Teorema 2.6 del Apéndice A,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} M_j(f,x) &\leq 2(L)\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \max_{v\in[u_j,u_{j+1}]} \left|\int_{u_j}^{v} \frac{sen(ut)}{u} du\right|\right) d_t\mu_{V_x}(t) \quad (2.2) \\ &\leq 2\,[3A+4]\,V(f,\mathbb{R}), \end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

□

Teorema 2.4. *Si $f \in BV_0(\mathbb{R})$ es continua por la derecha en $\mathbb{R}$ y $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (L)$, entonces la serie*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{u_j\leq v\leq u_{j+1}} \left|s_{u_j,v}(f,x)\right| \tag{2.3}$$

converge uniformemente en todo punto de continuidad de f. Además, si $f \in C([a,b])$, entonces (2.3) converge uniformemente sobre $[a,b]$.

Demostración. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de continuidad de f y $\varepsilon > 0$, entonces $V_{x_0}(\cdot) := V(f, x_0 + \cdot)$ es continua en $t = 0$, por el Teorema 1.2. Luego, existe $\delta_{\varepsilon,x_0} > 0$ tal que si $|t| < \delta_{\varepsilon,x_0}$, entonces $|V_{x_0}(t) - V_{x_0}(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así que dado $\delta_0 = \frac{\delta_{\varepsilon,x_0}}{3}$, se tiene

$$V_{x_0}(2\delta_0) - V_{x_0}(-2\delta_0) < \varepsilon.$$

Si $y \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$, entonces

$$\begin{aligned} V_y(\delta_0) - V_y(-\delta_0) &= V(f,[y-\delta_0, y+\delta_0]) \\ &\leq V(f,[x_0-2\delta_0, x_0+2\delta_0]) \\ &= V_{x_0}(2\delta_0) - V_{x_0}(-2\delta_0) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$. Con la misma idea de la desigualdad (2.2) y el Teorema 2.14 del Apéndice B, se sigue que

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} M_{j-1}(f,y) \leq 2(L)\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} \max_{v\in[u_{j-1},u_j]} \left|\int_{u_{j-1}}^{v} \frac{sen(ut)}{u} du\right|\right) d_t\mu_{V_y}(t)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\ 2\left[(L)\int_{|t|\leq\delta_0} + (L)\int_{|t|\geq\delta_0}\right]\left(\sum_{j=m+1}^{\infty}\max_{v\in[u_{j-1},u_j]}\left|\int_{u_{j-1}}^{v}\frac{sen(ut)}{u}du\right|\right)d_t\mu_{V_y}(t)\\
&=\ 2\left[I_1+I_2\right].
\end{aligned}
$$

Para I_1, por el Teorema 2.6 del Apéndice A, se tiene

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= (L)\int_{|t|\leq\delta_0}\left(\sum_{j=m+1}^{\infty}\max_{v\in[u_{j-1},u_j]}\left|\int_{u_{j-1}}^{v}\frac{sen(ut)}{u}du\right|\right)d_t\mu_{V_y}(t)\\
&\leq [3A+4]\,(L)\int_{|t|\leq\delta_0} d_t\mu_{V_y}(t) = [3A+4]\,(V_y(\delta_0)-V_y(-\delta_0))\\
&< [3A+4]\,\varepsilon. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Para I_2, por el Teorema 2.7 del Apéndice A, se tiene

$$
\begin{aligned}
I_2 &:= (L)\int_{|t|\geq\delta_0}\left(\sum_{j=m+1}^{\infty}\max_{v\in[u_{j-1},u_j]}\left|\int_{u_{j-1}}^{v}\frac{sen(ut)}{u}du\right|\right)d_t\mu_{V_y}(t)\\
&\leq \frac{3A+4}{\delta_0 u_m}(L)\int_{|t|\geq\delta_0} d_t\mu_{V_y}(t) \leq \frac{3A+4}{\delta_0 u_m}V(f,\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Como $\{u_j\}_{j\in\mathbb{R}}$ es estrictamente creciente, existe $m_0\in\mathbb{N}$ tal que si $m\geq m_0$, entonces

$$
I_2 < \varepsilon. \qquad (2.5)
$$

La convergencia uniforme de la serie (2.3) en el punto x_0 se obtiene de las desigualdades (2.4) y (2.5), ya que si $m\geq m_0$ y $y\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$, entonces

$$
\sum_{j=m+1}^{\infty} M_j(f,y) \leq 2\left[[3A+4]+1\right]\varepsilon. \qquad (2.6)
$$

Ahora, supongamos que f es continua en cada $x\in[a,b]$. Sean $\varepsilon>0$ y $x_1=a$, por lo anterior existe $m_1\in\mathbb{N}$ y un intervalo abierto V_1 que continene a x_1 tal que si $m\geq m_1$ y $y\in V_1$ se satisface la desigualdad (2.6). Si $[a,b]\subset V_1$, (2.3) converge uniformemente sobre $[a,b]$. En caso contrario, se toma $x_2\in[a,b]\setminus V_1$ y se obtienen m_2 y V_2 que garantizan (2.6). De esta manera, existen una sucesión $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una cubierta abierta de $[a,b]$. Como $[a,b]$ es compacto, existe $J\subset\mathbb{N}$ finito tal que $[a,b]\subset\bigcup_{j\in J}V_j$. Sea $M=\max\{j|j\in J\}$. Por lo tanto, si $m\geq m_M$ y $y\in[a,b]$, entonces se cumple la desigualdad (2.6). Con esto se llega a que (2.3) converge uniformemente sobre $[a,b]$.

□

A continuación se probará que la convergencia en el Teorema B es uniforme en puntos de continuidad de $f\in BV_0(\mathbb{R})$ añadiendo que sea continua por la derecha en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.5. *Si* $f \in BV_0(\mathbb{R})$ *es continua por la derecha en* $\mathbb{R}$*, entonces* $\frac{1}{2\pi}s_{\alpha,\beta}(f,\cdot)$ *converge uniformemente en puntos de continuidad de* f*, cuando* $\alpha \to 0$ *y* $\beta \to \infty$*. Además, si* f *es continua en* $[a,b]$*, entonces la convergencia es uniforme sobre* $[a,b]$*.*

Demostración. Sea x_0 un punto de continuidad de f. Considere una sucesión $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$. Sean $0 < \alpha < u_1 < \beta$. Por la Observación 2.2, la convergencia de $s_{\alpha,u_1}(f,\cdot)$ a $2s_{u_1}(f,\cdot)$ cuando $\alpha \to 0$, es uniforme sobre $\mathbb{R}$. Esto es, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < \alpha < \delta_1$, entonces

$$\left|\frac{1}{2\pi}s_{\alpha,u_1}(f,x) - \frac{1}{\pi}s_{u_1}(f,x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.7}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por el Teorema 2.4, $\sum_{j=1}^{\infty}\left|s_{u_j,u_{j+1}}(f,x)\right|$ converge uniformemente en x_0. Así que existen $M \in \mathbb{N}$ y $\delta_2 > 0$ tales que si $m \geq M$ y $x \in (x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)$, entonces

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}|s_{u_j,u_{j+1}}(f,x)| < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Por el Lema 2.1, $\sum_{j=1}^{\infty}\left|s_{u_j,u_{j+1}}(f,x)\right|$ converge puntualmente en todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $\sum_{j=1}^{\infty}s_{u_j,u_{j+1}}(f,x)$ converge puntualmente en todo $x \in \mathbb{R}$. Luego con ayuda de (2.8), si $x \in (x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=m+1}^{\infty}s_{u_j,u_{j+1}}(f,x)\right| &= \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{j=m+1}^{n}s_{u_j,u_{j+1}}(f,x)\right| \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{j=m+1}^{n}\left|s_{u_j,u_{j+1}}(f,x)\right| \\ &= \sum_{j=m+1}^{\infty}\left|s_{u_j,u_{j+1}}(f,x)\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Entonces $\sum_{j=1}^{\infty}s_{u_j,u_{j+1}}(f,x)$ converge uniformemente en x_0. Es decir, la convergencia

$$\sum_{j=1}^{\infty}s_{u_j,u_{j+1}}(f,x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}s_{u_j,u_n}(f,x) = \lim_{n\to\infty}(HK)\int_{u_1\leq|t|\leq u_n}\widehat{f}(t)e^{itx}dt \tag{2.9}$$

es uniforme en x_0 y puntual en cada $x \in \mathbb{R}$.

Afirmación. La siguiente convergencia

$$\lim_{\beta\to\infty} s_{u_1,\beta}(f,x) = \sum_{j=1}^{\infty} s_{u_j,u_{j+1}}(f,x)$$

es uniforme en x_0 y puntual en cada $x \in \mathbb{R}$.

Veamos la prueba de la afirmación. Notar que si $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$s_{u_1,\beta}(f,x) = (HK)\int_{u_1\le|t|\le u(\beta)} \widehat{f}(t)e^{itx}dt + (HK)\int_{u(\beta)\le|t|\le\beta} \widehat{f}(t)e^{itx}dt,$$

donde $u(\beta) = \max\{u_i : u_i \le \beta \text{ con } i \in \mathbb{N}\}$.

Por (2.9) y el Teorema 2.4, existen $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ y $\delta_\varepsilon > 0$ tales que si $n \ge N_\varepsilon$ y $x \in (x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon)$, entonces

$$\left|(HK)\int_{u_1\le|t|\le u_n} \widehat{f}(t)e^{itx}dt - \sum_{j=1}^{\infty} s_{u_j,u_{j+1}}(f,x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\max_{v\in[u_n,u_{n+1}]} |s_{u_n,v}(f,x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $\beta > u_{N_\varepsilon}$, entonces $u(\beta) \ge u_{N_\varepsilon}$ y si $x \in (x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon)$ se tiene

$$\begin{aligned}\left|s_{u_1,\beta}(f,x) - \sum_{j=1}^{\infty} s_{u_j,u_{j+1}}(f,x)\right| &\le \left|(HK)\int_{u_1\le|t|\le u(\beta)} \widehat{f}(t)e^{itx}dt - \sum_{j=1}^{\infty} s_{u_j,u_{j+1}}(f,x)\right| \\ &\quad + \left|(HK)\int_{u(\beta)\le|t|\le\beta} \widehat{f}(t)e^{itx}dt\right| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Con esto queda demostrada la afirmación.

Como $\frac{1}{2\pi}s_{u_1,\beta}(f,x) = \frac{1}{\pi}\left[s_\beta(f,x) - s_{u_1}(f,x)\right]$, entonces

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{2\pi}s_{u_1,\beta}(f,x) = A(x) - \frac{1}{\pi}s_{u_1}(f,x)$$

es uniforme en x_0, donde $A(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\beta\to\infty} s_\beta(f,x)$.

Luego, existen $\beta_0 > 0$ y $\delta_4 > 0$ tales que si $\beta > \beta_0$ y $x \in (x_0-\delta_4, x_0+\delta_4)$, entonces

$$\left|\frac{1}{2\pi}s_{u_1,\beta}(f,x) - \left[A(x) - \frac{1}{\pi}s_{u_1}(f,x)\right]\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.10}$$

Ahora, si $0 < \alpha < \alpha_1$, $\beta > \beta_0$ y $x \in (x_0 - \delta_4, x_0 + \delta_4)$ entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}s_{\alpha,\beta}(f,x) - A\left(x\right)\right| &\leq \left|\frac{1}{2\pi}s_{u_1,\beta}(f,x) - A\left(x\right) + \frac{1}{\pi}s_{u_1}(f,x)\right| + \\ &\left|s_{\alpha,u_1}(f,x) - \frac{1}{\pi}s_{u_1}(f,x)\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Con esto se prueba que $\frac{1}{2\pi}s_{\alpha,\beta}(f,\cdot)$ converge uniformemente en x_0, cuando $\alpha \to 0$ y $\beta \to \infty$. Para ver la convergencia uniforme sobre un intervalo cerrado $[a,b]$, se emplea la misma idea que en la parte final de la demostración del Teorema 2.4.

□

Corolario 2.2. *Si $f \in BV_0(\mathbb{R})$ es continua por la derecha en $\mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$ es un punto de continuidad de f, entonces $\frac{1}{2\pi}s_{\alpha,\beta}(f,\cdot)$ converge uniformemente en x a $(f(\cdot) + f(\cdot - 0))/2$, cuando $\alpha \to 0$ y $\beta \to \infty$. Además, si f es continua en $[a,b]$, entonces $\frac{1}{2\pi}s_{\alpha,\beta}(f,\cdot)$ converge uniformemente a f sobre $[a,b]$.*

Demostración. Sea $A(\cdot)$ la función de la prueba del resultado anterior. Por el Teorema B, tenemos que

$$A(x) = \frac{f(x) + f(x-0)}{2},$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Entonces, $\frac{1}{2\pi}s_{\alpha,\beta}(f,\cdot)$ converge uniformemente en x a $(f(\cdot) + f(\cdot - 0))/2$, cuando $\alpha \to 0$ y $\beta \to \infty$. Ahora, supongamos que f es continua en $[a,b]$, resulta que $A(x) = f(x)$ para cada $x \in [a,b]$. Nuevamente haciendo uso del resultado anterior, tenemos que $\frac{1}{2\pi}s_{\alpha,\beta}(f,\cdot)$ converge uniformemente a f sobre $[a,b]$, cuando $\alpha \to 0$ y $\beta \to \infty$.

□

Recordemos que la transformada de Fourier $\mathcal{F}_p$ de f en $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$, no necesariamente se expresa como sigue

$$(L)\int_{\mathbb{R}} e^{it\cdot}f(t)dt. \tag{2.11}$$

Sin embargo, por el teorema 1.18 y su corolario, para una función f en el subespacio $L^p(\mathbb{R}) \cap [L^1(\mathbb{R}) + BV_0(\mathbb{R})]$, $1 < p \leq 2$, $\mathcal{F}_p(f) = \mathcal{F}_{HK}(f)$ *c. d.*. Tomando en cuenta esto y el corolario anterior, se obtiene el siguiente resultado cuya prueba es inmediata.

Corolario 2.3. *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap BV_0(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$, *es continua por la derecha y* x *es un punto de continuidad de* f, *entonces*

$$\frac{1}{2\pi}(HK)\int_{\alpha}^{\beta} e^{it\cdot}\mathcal{F}_p(f)(t)dt \tag{2.12}$$

converge uniformemente en x *a* $(f(\cdot) + f(\cdot - 0))/2$, *cuando* $\beta \to \infty$ *y* $\alpha \to 0$. *Ahora, si* f *es continua en* $[a, b]$, *entonces (2.12) converge uniformemente a* f *sobre* $[a, b]$.

Conclusiones

Las conclusiones de este trabajo de tesis son expresadas en los siguientes puntos.

- Se demostró la aseveración hecha por M. Riesz y A. E. Livingston en [23], en el que afirman que la convergencia (2) del Teorema de Dirichlet-Jordan para funciones en $BV_0(\mathbb{R})$ (Teorema B) es uniforme sobre un intervalo donde la función es continua. Para hacerlo, primero se probó la convergencia uniforme de (2) en puntos de continuidad de la función, para después probar la convergencia uniforme sobre un intervalo donde la función es continua.

- Además de la hipótesis del Teorema B se añadió la continuidad de la función por la derecha en $\mathbb{R}$. Esta hipótesis cumple un papel importante en los resultados de apoyo así como en el resultado principal.

Apéndice

2.3 Apéndice A. Sucesiones (L)

Definición 2.4. *Una sucesión creciente* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ *se dice que satisface* ***la condición de Lacunary (L)*** , $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$*, si existe* $r > 1$ *tal que*

$$u_m \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{u_j} \leq r, \quad m = 1, 2, 3, ...$$

Notar que $u_j \to \infty$ *cuando* $j \to \infty$.

Definición 2.5. *Una sucesión* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ *es Lacunary en el sentido de Hadamard, si existe* $\lambda > 1$ *tal que*

$$\lambda \leq \frac{u_{j+1}}{u_j}, \quad j = 1, 2, 3, ...$$

A continuación se muestra un ejemplo de una sucesión que satisface la condición (L).

Ejemplo 2.1. *Tomemos* $u_j = 2^j$ *para cada* $j \in \mathbb{N}$ *y* $r = 2$.

Observación 2.3. *Toda sucesión Lacunary en el sentido de Hadamard está en* (L) *haciendo la consideración de* $r = \lambda / (\lambda - 1)$.

Ahora se muestran algunos resultados en los que intervienen las sucesiones en (L).

Lema 2.2 ([**20, Lema 1**]). *Si* $0 < a < b < \infty$ *y* $t \neq 0$*, entonces*

$$\left| \int_a^b \frac{sen(tu)}{u} du \right| \leq \frac{3}{|t|a}.$$

Demostración. Aplicando integración por partes y propiedades del valor absoluto se obtiene el resultado.

□

Teorema 2.6 (**[20, Lema 2]**). *Si* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$, *entonces*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{u_{j-1}\leq v\leq u_j} \left| \int_{u_{j-1}}^{v} \frac{sen(tu)}{u} du \right| \leq 3A+4, \quad t \neq 0,$$

donde $u_0 := 0$ *y* A *proviene de la Definición 2.4.*

Demostración. Sean $t > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ tales que $u_{j-1} < \frac{1}{t} \leq u_j$. Se sabe que $|sin(tu)| \leq tu$ para $u > 0$. Por el Lema 2.2

$$\sum_{i=1}^{j-1} \max_{u_{i-1}\leq v\leq u_i} \left| \int_{u_{i-1}}^{v} \frac{sen(tu)}{u} du \right| + \max_{u_{j-1}\leq v\leq \frac{1}{t}} \left| \int_{u_{j-1}}^{v} \frac{sen(tu)}{u} du \right| \leq 1$$

y

$$\max_{\frac{1}{t}\leq v\leq u_j} \left| \int_{\frac{1}{t}}^{v} \frac{sen(tu)}{u} du \right| + \sum_{i=j+1}^{\infty} \max_{u_{i-1}\leq v\leq u_i} \left| \int_{u_{i-1}}^{v} \frac{sen(tu)}{u} du \right| \leq 3A+3.$$

Cuando $t < 0$, se toma $-t > 0$ y al sustituirlo en las desigualdades anteriores estas se mantienen. Por lo tanto, sumando las dos desigualdades se termina la prueba.

□

Teorema 2.7 (**[20, Lema 3]**). *Si* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in (L)$, *entonces*

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \max_{u_{j-1}\leq v\leq u_j} \left| \int_{u_{j-1}}^{v} \frac{sen(tu)}{u} du \right| \leq \frac{3A}{|t|\, u_m}, \quad m = 1, 2, ...; \ t \neq 0.$$

Demostración. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $t \neq 0$. Entonces con ayuda del Lema 2.2 se puede concluir que

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \max_{u_{j-1}\leq v\leq u_j} \left| \int_{u_{j-1}}^{v} \frac{sen(tu)}{u} du \right| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{3}{|t| u_{i-1}} \leq \frac{3A}{|t| u_m}.$$

□

Teorema 2.8 (**[20, Lema 4]**). *Si* $0 < a < b < \infty$, *entonces*

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_a^b \frac{sen(tu)}{u} du = 0 \quad y \quad \frac{d}{dt}\left(\int_a^b \frac{sen(tu)}{u} du \right) = \int_a^b \cos(tu) du, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Por Lema 2.2 se cumple el límite. Sea $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que converge a 0. Se define

$$f_n(u) = \frac{sen((t+h_n)u)}{h_n u} - \frac{sen(tu)}{h_n u} = \frac{cos(h_n u) - 1}{h_n u} sen(tu) + \frac{sen(h_n u)}{h_n u} cos(tu)$$

para cada $u \in [a, b]$. Notar que f_n está acotada por 2 en $[a, b]$ y converge puntualmente a $cos(t\cdot)$. Entonces por el Teorema 8.2.5 de [5],

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \int_a^b \left[\frac{sen((t+h)u)}{hu} - \frac{sen(tu)}{hu} \right] du &= \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(u) du \\
&= \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(u) du \\
&= \int_a^b cos(tu) du.
\end{aligned}$$

$\square$

2.4 Apéndice B. Integral de Riemann-Stieljes

La integral de Riemann-Stieljes se obtiene con una modificación de la definición de la integral de Riemann, en lugar de considerar la longitud $x_i - x_{i-1}$ del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ en la suma de Riemann, se utiliza $g(x_i) - g(x_{i-1})$ para alguna función g. Esto de alguna manera nos permite generalizar la longitud de dicho subintervalo.

Definición 2.6. *Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones. Si $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición etiquetada de $[a, b]$, entonces la **suma de Riemann-Stieljes (RS)** de f con respecto a g de P es*

$$S(f, g, P) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

*Se dice que f es **Riemann-Stieljes (RS) integrable** con respecto a g sobre $[a, b]$, si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ y si $P = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ es una partición etiquetada de $[a, b]$ con $||P|| := \max_i\{x_i - x_{i-1}\} < \delta$, entonces $|S(f, g, P) - A| < \varepsilon$.*

Al valor de la integral RS de f con respecto a g se le denota como $A := (RS)\int_a^b f(x)dg(x) = (RS)\int_a^b f dg$. El siguiente resultado nos habla de la linealidad de la integral RS.

Teorema 2.9. *Sean $f_1, f_2, g_1, g_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones y $k \in \mathbb{R}$. Si f_1, f_2 son RS integrables con respecto a g_1 sobre $[a, b]$, entonces $f_1 \pm f_2$ y kf_1 son RS integrables con respecto a g_1 sobre $[a, b]$ y*

$$(RS)\int_a^b (kf_1(x) \pm f_2(x))dg_1(x) = k(RS)\int_a^b f_1(x)dg_1(x) \pm (RS)\int_a^b f_2(x)dg_1(x).$$

Si f_1 es RS integrables con respecto a g_1 y g_2 sobre $[a, b]$, entonces f_1 es RS integrable con respecto a $g_1 \pm g_2$ y kg_1 sobre $[a, b]$ y

$$(RS)\int_a^b f_1(x)d(kg_1(x) \pm g_2(x)) = k(RS)\int_a^b f_1(x)dg_1(x) \pm (RS)\int_a^b f_1(x)dg_2(x).$$

Demostración. Se sigue inmediatamente de la Definición 2.6.

□

Teorema 2.10. *Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones. Son equivalentes los siguientes incisos:*

1) f es RS integrable con respecto a g sobre $[a, b]$ y su integral es A.

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, para P y Q particiones etiquetadas de $[a, b]$ tales que $||P|| < \delta$ y $||Q|| < \delta$, entonces $|S(f, g, P) - S(f, g, Q)| < \varepsilon$.

3) Para todo $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión de particiones etiquetadas de* $[a,b]$ *tal que* $\lim_{n\to\infty}||P_n|| = 0$*, entonces* $\lim_{n\to\infty} S(f,g,P_n) = A$.

Demostración. La prueba se obtiene aplicando la Definición 2.6.

□

El siguiente teorema da condiciones para la existencia de la integral de RS sobre intervalos campactos.

Teorema 2.11 (**[6, Teorema H.3, H.4]**). *Si* $f \in C[a,b]$ *y* $g \in BV[a,b]$*, entonces* f *son RS integrable con respecto a* g *sobre* $[a,b]$ *y*

$$\left|(RS)\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq ||f||_\infty V(g,[a,b]).$$

Ahora se plantea un resultado parecido al anterior pero para funciones definidas sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 2.12 (**[20]**). *Si* $f \in C_b(\mathbb{R})$ *y* $g \in BV(\mathbb{R})$*, entonces*

i) $\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}} (RS)\int_a^b f dg =: (RS)\int_{\mathbb{R}} f dg$ *existe, donde* $\int_{\mathbb{R}} f dg$ *es* ***la integral impropia de RS****.*

ii) $\left|(RS)\int_{\mathbb{R}} f(x)dg(x)\right| \leq ||f||_\infty V(g,\mathbb{R})$.

iii) $\left|(RS)\int_{\mathbb{R}} f(x)dg(x)\right| \leq (RS)\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dV(g,x)$.

Demostración. *i*] Sean $a,b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Por el Teorema 2.11, se tiene

$$\left|(RS)\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq ||f||_\infty (V(g,b) - V(g,a)).$$

Como

$$\lim_{\substack{a<b\\ a\to-\infty\\ b\to-\infty}} ||f||_\infty (V(g,b) - V(g,a)) = 0$$

y

$$\lim_{\substack{a<b\\ a\to\infty\\ b\to\infty}} ||f||_\infty (V(g,b) - V(g,a)) = 0.$$

Dados $\varepsilon > 0$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones que convergen a $-\infty$ y ∞, respectivamente. Existen $M_0, M_1 > 0$ tales que si $M_0 < a_0 < b_0$ y $a_1 < b_1 < -M_1$, entonces

$$\left|(RS)\int_{a_0}^{b_0} f(x)dg(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad \left|(RS)\int_{a_1}^{b_1} f(x)dg(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además, existen $N_0, N_1 \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N_0$ y $m \geq N_1$, se tiene $d_n \geq M_0$ y $c_m \leq -M_1$. Considérese $N = \max\{N_0, N_1\}$, tomando a $n, m > N$ y sin pérdida de generalidad $c_n < c_m$ y $d_m < d_n$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|(RS)\int_{c_n}^{d_n} fdg - (RS)\int_{c_m}^{d_m} fdg\right| &= \left|(RS)\int_{c_n}^{c_m} fdg + (RS)\int_{d_m}^{d_n} fdg\right| \\
&\leq \left|(RS)\int_{c_n}^{c_m} fdg\right| + \left|(RS)\int_{d_m}^{d_n} fdg\right| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left((RS)\int_{c_n}^{d_n} f(x)dg(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Así $\lim_{n\to\infty}(RS)\int_{c_n}^{d_n} f(x)dg(x)$ existe, es decir, $\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}(RS)\int_a^b fdg$ existe.

ii] Con ayuda de inciso *i*) y del Teorema 2.11,

$$\begin{aligned}
\left|(RS)\int_{\mathbb{R}} f(x)dg(x)\right| &= \left|\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}(RS)\int_a^b f(x)dg(x)\right| \\
&= \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\left|(RS)\int_a^b f(x)dg(x)\right| \\
&\leq ||f||_\infty \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} Var(g,[a,b]) = ||f||_\infty Var(g,\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

iii] Sean $a < b$ y $(P_n)_{n\in\mathbb{R}}$ una sucesión de particiones sobre $[a,b]$ tal que $\lim_{n\to\infty}||P_n|| = 0$, tenemos

$$|S(f,g,P_n)| \leq S(|f|, V(g,\cdot), P_n).$$

Por hipótesis se cumple que $|f| \in C_b(\mathbb{R})$ y $V(g,\cdot) \in BV(\mathbb{R})$, entonces $|f|$ es RS integrable con respecto a $V(g,\cdot)$ sobre $[a,b]$ y $\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b |f|dV(g,\cdot)$ existe. Entonces aplicando el límite cuando $n\to\infty$ se cumple

$$\left|(RS)\int_a^b fdg\right| \leq (RS)\int_a^b |f|dV(g,\cdot).$$

Por lo tanto, aplicando el límite cuando $a\to-\infty$ y $b\to\infty$ se satisface la siguiente desigualdad

$$\left|(RS)\int_{\mathbb{R}} fdg\right| \leq (RS)\int_{\mathbb{R}} |f|dV(g,\cdot).$$

$\square$

Teorema 2.13 (Teorema de Integración por Partes). *Si $f \in C_0(\mathbb{R})$ y $g \in BV(\mathbb{R})$ entonces $(RS)\int_{\mathbb{R}} fdg$ y $(RS)\int_{\mathbb{R}} gdf$ existen. Además*

$$(RS)\int_{\mathbb{R}} f(x)dg(x) = -(RS)\int_{\mathbb{R}} g(x)df(x).$$

Demostración. Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo arbitrario. Por el Teorema H.5 de [6] y el Teorema 2.11,

$$(RS)\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - (RS)\int_a^b g(x)df(x).$$

Por el Teorema 2.12, $(RS)\int_{\mathbb{R}} fdg$ existe. Como

$$\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} f(b)g(b) = 0 \quad y \quad \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} f(a)g(a) = 0.$$

Entonces $(RS)\int_{\mathbb{R}} gdf$ existe y se tiene la igualdad buscada.

□

Teorema 2.14. *Si $f \in C_b(\mathbb{R})$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente, acotada y continua por la derecha en $\mathbb{R}$, entonces*

$$(RS)\int_{\mathbb{R}} f(x)dg(x) = (L)\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu_g(x)$$

donde μ_g es la medida finita de Lebesgue-Stieltjes generada por g.

Demostración. El Teorema 2.12 asegura que $\int_{\mathbb{R}} fdg$ existe. Como g está acotada en $\mathbb{R}$, μ_g es una medida finita. Por ende f es Lebesgue integrable sobre $\mathbb{R}$ con respecto a μ_g. Ahora con ayuda del Teorema 3.5.5 de [3] y el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}
(RS)\int_{\mathbb{R}} f(x)dg(x) &= \lim_{n\to\infty}(RS)\int_{-n}^{n} f(x)dg(x) \\
&= \lim_{n\to\infty}(L)\int_{-n}^{n} f(x)d\mu_g(x) \\
&= \lim_{n\to\infty}(L)\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[-n,n]}(x)d\mu_g(x) \\
&= (L)\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu_g(x).
\end{aligned}$$

□

Bibliografía

[1] G. Antunes-Monteiro, A. Slavik and M. Tvrdy, *Kurzweil-Stieltjes integral: theory and applications*, Series in Real Analysis, World Scientic Publishing Co, Singapore, 2017.

[2] T. Apostol, *Mathematical analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts., 1991.

[3] J. J. Benedetto, W. Czaja, *Integration and modern analysis*, Birkhäuser Boston, 2010.

[4] G. Bachman, L. Narici and E. Beckenstein, *Fourier and Wavelet analysis*, Springer-Verlang, New York. Inc., 1991.

[5] R. Bartle, *Introduction to real analysys*, 4th ed. Illinois: John Wiley and Sons, Inc, 2011.

[6] R. Bartle, *A modern theory of integration*, American Mathematical Society: Providence, RI, 2001.

[7] R. Bartle, *The elements of real analysis*, John Wiley and Sons, 1964.

[8] R. N. Bracewell, *The Fourier transform and its applications*, Mc-Graw Hill, third edtition, 2000.

[9] L. Grafakos. *Classical Fourier analysis*. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 249. Springer, New York, 2014.

[10] R. Gordon, *A descriptive characterization of the generalized Riemann integral*, Real Analysis Exch., 15 (1) (1989-90), 397-400.

[11] R. Henstock, *General theory of integration*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[12] R. Henstock, *Lectures on the theory of integration*, World Scientific: Teaneck, Nj, 1988.

[13] J. Jarnik and J. Kurzweil, *A general form of the product integral and linear ordinary diferential equations*, Czech. Math. J., 37 (112) (1987), 642-659.

[14] T. Lee, *Henstock-Kurzweil integration on Euclidean spaces*, World Scientific: Hackensack, 2011.

[15] P. Lee, *Lanzhou lectures on Henstock integration*, World Scientific: Singapore, 1989.

[16] F. J. Mendoza-Torres y M. G. Morales-Macías, *On the convolution theorem for the Fourier transform of* BV_0 *Functions,* JCA, 7 (1) (2015), 63-71.

[17] F. J. Mendoza-Torres y M. G. Morales-Macías, S. Sánchez-Perales y J. A. Escamilla-Reyna, *Henstock-Kurzweil integral transforms and the Riemann-Lebesgue lemma*, Intech, 2015.

[18] F. J. Mendoza Torres, *On pointwise inversion of the Fourier transform of* BV_0 *functions*, Ann. Funct. Anal., 2 (2010), 112-120.

[19] F. J. Mendoza-Torres, M. G. Morales-Macías, J. A. Escamilla-Reyna y J. H. Arredondo, *Several aspects around the Riemann-Lebesgue lemma*, JARPM, 5 (2013), 33-46.

[20] F. Moricz, *Pointwise behavior of Fourier integrals of functions of bounded variation over* $\mathbb{R}$, J Math Anal. Appl., 297 (2004), 527-539.

[21] M. G. Morales-Macías, J. H. Arredondo y F. J. Mendoza-Torres, *An extension of some properties for the Fourier transform operator on* $L^p(\mathbb{R})$ *spaces*. Rev. Unión Mat. Argent., 57 (2) (2016), 85-94.

[22] A. Pringsheim, *Über neve Güldigkeitsbedingungen fürdie Fouriersche Integral formel*, Math. Ann., 68 (1910), 367-408; Supplement Math. Ann., 71 (1912), 289-298.

[23] M. Riez y A. E. Livingston, *A short proof of a classical theorem in the theory of Fourier integrals*, Amer. Math. Montly, 62 (1955), 434-437.

[24] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill international, third edition, 1987.

[25] E. Talvila, *Henstock-Kurzweil Fourier transforms*, McGraw-Hill international Illinois J. Math., 46 (2002), 1207-1226.

[26] E. Talvila, *The distributional Denjoy integral*, Real Anal. Exchange, 33 (2008), 51-82.

[27] E. Torres Teutle y F.J. Mendoza Torres, *Sobre el Teorema de Hake para funciones de varias variables*, Lecturas Matemáticas, 41 (1) (2020), 41-57.