



=====

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA**

**“SINTONIZACIÓN SECUENCIAL DE CONTROLADORES  
LINEALES BASADA EN EL ENFOQUE ÓPTIMO CUADRÁTICO”**

**TESIS PRESENTADA**

**PARA OBTENER EL GRADO DE**

**MAESTRO EN INGENIERÍA QUÍMICA**

**PRESENTA:**

**Miguel Ángel Hernández Osorio**

**DIRECTOR:**

**Dr. Irving Israel Ruiz López**

**CODIRECTOR:**

**Dr. Alejandro Escobedo Morales**

**BUAP**

**H. Puebla de Z. Enero 2020**



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**  
**VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO**  
**MAESTRÍA EN INGENIERÍA QUÍMICA**



**ACTA DE REVISIÓN, LIBERACIÓN E IMPRESIÓN DE TESIS**

Nombre del estudiante: MIGUEL ANGEL HERNANDEZ OSORIO

Matrícula: 217470554

Nombre del director: DR. IRVING ISRAEL RUIZ LOPEZ

Nombre del codirector: DR. ALEJANDRO ESCOBEDO MORALES

**Título de la Tesis:**

“SINTONIZACIÓN SECUENCIAL DE CONTROLADORES LINEALES BASADA EN EL ENFOQUE ÓPTIMO  
CUADRÁTICO”

**Comisión Revisora:**

Presidente: Dr. JOSE ALBERTO GALICIA AGUILAR

Secretario(a): Dr. GAMALIEL CHE GALICIA

Vocal (1): Dr. ALEJANDRO ESCOBEDO MORALES

Vocal (2): Dr. IRVING ISRAEL RUIZ LOPEZ

Firma:

Firma:

Firma:

Firma:

Los integrantes de la Comisión Revisora expresamos que hemos leído y revisado el manuscrito de la tesis de maestría que presenta el (la) estudiante arriba indicado, por lo que **estamos de acuerdo en que se proceda con la impresión definitiva de la tesis y que el (la) estudiante presente su defensa y examen de grado en la fecha, horario y lugar que se indican a continuación.**

Fecha de examen: 31 de enero de 2020

Hora: 16.00 horas

Día de la semana: Viernes

Lugar: 1FIQ7/302



Revisa y Autoriza: Sello de la Secretaría de Investigación y Estudios de Posgrado.- FIQ.- BUAP



**BUAP.**

Oficio: FIQ/SIEP/018/2020

**Mtra. María Elena Ruiz Velasco**  
**Directora de la Dirección de Administración Escolar**  
**Benemérita Universidad Autónoma de Puebla**  
**PRESENTE**

Reciba un afectuoso saludo y al mismo tiempo me permito presentar a usted a los integrantes del jurado de examen que para obtener el grado de Maestro en Ingeniería Química sustentará el

**Ing. Miguel Ángel Hernández Osorio**

perteneciente a la generación 2017 con número de matrícula 217470554 y cuyo tema de tesis es: "SINTONIZACIÓN SECUENCIAL DE CONTROLADORES LINEALES BASADA EN EL ENFOQUE ÓPTIMO CUADRÁTICO". Dicho jurado está integrado por:

**JURADO**

Presidente	Dr. José Alberto Galicia Aguilar
Secretario	Dr. Gamaliel Che Galicia
Vocal	Dr. Alejandro Escobedo Morales
Vocal	Dr. Irving Israel Ruiz López

Asimismo, comunico a usted que el alumno cumple con todos los requisitos para poder llevar a cabo su examen de grado y que los integrantes de este jurado están citados con anticipación para la fecha y lugar indicados a continuación.

FECHA DE EXAMEN:	31 de enero de 2020
HORA:	16:00 horas
LUGAR:	Facultad de Ingeniería Química FIQ7/302
DÍA:	Viernes

Sin otro particular, me es grato quedar de usted.

Atentamente,  
"Pensar bien, para vivir mejor"  
H. Puebla de Z. a 27 de enero de 2020.

  
**Dr. Irving Israel Ruiz López**  
Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado



c.c.p. Archivo  
E-mail: [irving.ruiz@correo.buap.mx](mailto:irving.ruiz@correo.buap.mx)

Facultad  
de Ingeniería  
Química

Av. San Claudio s/n, Col. San  
Manuel, Ciudad Universitaria,  
Puebla, Pue. C.P. 72590  
01 (222) 229 55 00  
Exts. 7250 y 7251

# Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a Dios por la oportunidad que me concedió de poder continuar con mis estudios, por los padres y hermanos que me dio y la libertad de poder escoger mi camino.

Quiero agradecer a mis padres, José Gabriel y Mercedes Julieta, por siempre estar conmigo día a día, por mostrarme su apoyo incondicional, por amarme sobre todas las cosas, por apoyar mi sueños e ilusiones, gracias por enseñarme a ser un guerrero incansable.

A mis hermanos, Gabriel y Mercedes Hernández Osorio, gracias por siempre estar juntos, gracias por apoyarme en ese sueño también.

Agradezco grandemente a mi Asesor, el Dr. Irving Israel Ruiz López, gracias por sus conocimientos, gracias por su paciencia cuando me costaba entender algún tema, gracias por exigirme mucho y sacarme de mi zona de confort, gracias por confiar en mí y ver mi capacidad aun cuando yo no la conocía, gracias por siempre tener ganas de hacer las cosas bien, gracias por sus atenciones, gracias por el gran amor que le tiene a su profesión; así mismo agradezco a mi Coasesor, el Dr. Alejandro Escobedo Morales, gracias por todas sus atenciones; también a mis sinodales, el Dr. José Alberto Galicia Aguilar y el Dr. Gamaliel Che Galicia por sus siempre acertadas correcciones.

A mis maestros, muchas gracias por sus invaluable conocimientos que hoy han forjado un profesional comprometido con poner en alto el nombre de su casa de estudios y su profesión, gracias cada uno de ustedes, en especial a la Dra. Mayra Ruiz Reyes y al Dr. José Alberto Galicia Aguilar.

A mis amigos del Posgrado, gracias por tantos momentos inolvidables que pasamos juntos, pueden estar seguros que están en mi corazón.

A Gabriel Vargas, gracias por siempre estar ahí, gracias por tu apoyo, por ser mi confidente en todas las aventuras que hemos pasado.

Agradezco a CONACYT por el apoyo otorgado para la materialización de este proyecto.

# Resumen

**Hernández Osorio, Miguel Ángel.** Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Agosto 2019. **Sintonización secuencial de controladores lineales basada en el enfoque óptimo cuadrático.** Director: Dr. Irving Israel Ruiz López. Codirector: Dr. Alejandro Escobedo Morales.

Se generalizó la metodología LQR para permitir la síntesis de controladores PID en procesos con múltiples entradas y múltiples salidas. El método propuesto se aplica secuencialmente para producir las acciones proporcional, integral y derivativa. Se conciben tres usos principales para la teoría propuesta: (i) el diseño <<de novo>> de controladores PID, (ii) la adición de la acción derivativa a controladores PI existentes y (iii) la diagonalización de las matrices de ganancias PID. Adicionalmente, los dos últimos procedimientos se pueden aplicar a controladores diseñados con diferentes metodologías. La teoría propuesta se aplicó al diseño <<de novo>> de un controlador centralizado PID para una columna de destilación de tres entradas - tres salidas así como la adición de la acción derivativa a controladores existentes PI centralizados y multilazo para un CSTR no lineal. La metodología LQR propuesta permitió la síntesis de controladores PID centralizados y multilazo con buenas características de seguimiento de una referencia, rechazo a perturbaciones, uso limitado de la señal de control e insensibilidad a incertidumbre en el modelo de la planta.

# Abstract

**Hernández Osorio, Miguel Ángel.** Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Agosto 2019. **Sintonización secuencial de controladores lineales basada en el enfoque óptimo cuadrático.** Advisers: Dr. Irving Israel Ruiz López, Dr. Alejandro Escobedo Morales.

The LQR methodology is generalized to allow the synthesis PID controllers in MIMO processes. The proposed method is sequentially applied to produce proportional, integral and derivative actions. Three major usages are conceived for the proposed theory: *(i)* <<de novo>> design of PID controllers, *(ii)* the addition of derivative action to existing PI controllers and *(iii)* the diagonalization of PID gain matrices. Moreover, the two last procedures can be applied to controllers designed with different methodologies. The proposed theory was applied to the <<de novo>> design of centralized of a PID controller for a three input-three out distillation column as well as the addition of derivative action to existing both centralized and multiloop PI controller for a nonlinear CSTR. The proposed LQR methodology allowed the synthesis of centralized and multiloop PID controllers with good characteristics for set - point tracking, disturbance rejection, limited use of control signal and insensitivity to plant model uncertainty.

# Índice

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VIII</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>X</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>XIII</b>
<b>I ANTECEDENTES DEL PROYECTO</b>	<b>1</b>
1.1 Fundamentos de control . . . . .	1
1.1.1 Objetivo de un sistema de control . . . . .	1
1.1.2 Elementos de un sistema de control . . . . .	3
1.1.2.1 Diagrama de bloques . . . . .	3
1.1.2.2 Control de lazo abierto . . . . .	4
1.1.2.3 Control de lazo cerrado . . . . .	4
1.1.3 Concepto de estado . . . . .	5
1.1.4 Características de un sistema de control . . . . .	6
1.1.4.1 Desempeño . . . . .	6
1.1.4.2 Estabilidad . . . . .	7
1.1.4.3 Robustez . . . . .	8

1.2	Modelado matemático de sistemas de control . . . . .	9
1.2.1	Modelos lineales . . . . .	9
1.2.2	Modelos no lineales . . . . .	9
1.2.3	Función de transferencia . . . . .	9
1.2.4	Espacio de estados . . . . .	11
1.3	Tipos de algoritmo de control . . . . .	15
1.3.1	On-Off . . . . .	15
1.3.2	Proporcional-integral-derivativo . . . . .	16
1.3.3	Otros algoritmos de control . . . . .	18
1.3.3.1	Lógica difusa . . . . .	18
1.3.3.2	Redes neuronales. . . . .	21
1.4	Herramientas para diseñar controlares PID . . . . .	23
1.4.1	Segundo método de estabilidad de Liapunov . . . . .	23
1.4.2	Índices de funcionamiento . . . . .	25
1.4.3	Reguladores lineales cuadráticos (LQR) . . . . .	30
1.4.3.1	Controlador de acción proporcional . . . . .	33
1.4.3.2	Controlador de acción proporcional - integral . . . . .	35
1.5	Objetivo general . . . . .	38
1.5.1	Objetivos específicos . . . . .	38
<b>II</b>	<b>METODOLOGÍA</b>	<b>39</b>
2.1	Reseña del sistema estudiado. . . . .	39
2.2	Lazo cerrado de controlador PID con filtro . . . . .	42
2.3	Controladores PID vía LQR . . . . .	44
2.3.1	Síntesis de la acción derivativa vía LQR . . . . .	44
2.3.2	Casos de estudio . . . . .	47

2.3.2.1	Columna de destilación de Ogunnaike y Ray . . . . .	47
2.3.2.2	Reactor CSTR no lineal . . . . .	49
2.3.3	Análisis de las matrices de ponderación en la síntesis de controladores PID . . . . .	52
2.3.4	Caracterización de controladores PID . . . . .	53
2.4	Herramientas de cómputo . . . . .	54
<b>III</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>56</b>
3.1	Re . . . . .	56
3.1.1	Desempeño de los controladores PID multivariados vía LQR . . . . .	56
3.1.1.1	Columna de destilación de Ogunnaike y Ray . . . . .	56
3.1.1.2	Reactor CSTR no lineal . . . . .	67
<b>IV</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>73</b>
<b>V</b>	<b>ANEXOS</b>	<b>74</b>
5.1	Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación de Ogunnaike . . . . .	74
	<b>Bibliografía</b>	<b>80</b>

# Índice de figuras

1.1	Sistema de control generalizado. . . . .	5
1.2	Integral de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control	7
1.3	Diagrama de bloques de una función de transferencia. . . . .	11
1.4	Esquema básico de un sistema de control en función de las variables involucradas. . . . .	12
1.5	Diagrama de bloques del controlador tipo “on-off” . . . . .	16
1.6	Diagrama de bloques de un controlador PID. . . . .	18
1.7	Diagrama de bloques de control difuso en lazo cerrado. . . . .	19
1.8	Diagrama de red neuronal multicapas. . . . .	22
1.9	Diagrama de bloques de un sistema regulador óptimo cuadrático . . . .	31
2.1	Diagrama esquemático de la columna de destilación de Ogunnaike y Ray	47
2.2	Diagrama esquemático del reactor CSTR no lineal . . . . .	50
3.1	Efecto de la selección de pesos de la matriz de control $\mathbf{R}$ en $I_{y1-s}^s$ durante la síntesis de la acción derivada a través del enfoque LQR para la columna de destilación Ogunnaike. . . . .	57
3.2	Efecto de la selección de pesos de la matriz de control $\mathbf{R}$ en $I_{y2-s}^s$ durante la síntesis de la acción derivada a través del enfoque LQR para la columna de destilación Ogunnaike. . . . .	57

3.3	Efecto de la selección de pesos de la matriz de control $\mathbf{R}$ en $I_{y3-s}^s$ durante la síntesis de la acción derivada a través del enfoque LQR para la columna de destilación Ogunnaike. . . . .	58
3.4	Efecto de la selección de pesos de la matriz de control $\mathbf{R}$ en $I_{u1-s}^s$ durante la síntesis de la acción derivada a través del enfoque LQR para la columna de destilación Ogunnaike. . . . .	58
3.5	Efecto de la selección de pesos de la matriz de control $\mathbf{R}$ en $I_{u2-s}^s$ durante la síntesis de la acción derivada a través del enfoque LQR para la columna de destilación Ogunnaike. . . . .	59
3.6	Efecto de la selección de pesos de la matriz de control $\mathbf{R}$ en $I_{u3-s}^s$ durante la síntesis de la acción derivada a través del enfoque LQR para la columna de destilación Ogunnaike. . . . .	59
3.7	Comportamiento de la respuesta $y_1$ de la columna de destilación de OR ante un cambio de referencia unitario en la primer y tercer salida. . . .	64
3.8	Comportamiento de la respuesta $y_2$ de la columna de destilación de OR ante un cambio de referencia unitario en la primer salida. . . . .	64
3.9	Comportamiento de la respuesta $y_3$ de la columna de destilación de OR ante un cambio de referencia unitario en la primer salida. . . . .	65
3.10	Comportamiento de la acción de control $u_1$ de la columna de destilación de OR ante un cambio de referencia unitario en la primer salida. . . .	65
3.11	Comportamiento de la acción de control $u_2$ de la columna de destilación de OR ante un cambio de referencia unitario en la primer salida. . . .	66
3.12	Comportamiento de la acción de control $u_3$ de la columna de destilación de OR ante un cambio de referencia unitario en la primer salida. . . .	66

3.13	Concentración de salida en el CSTR no lineal ante cambios en el punto de referencia y perturbaciones en la concentración y temperatura de alimentación . . . . .	70
3.14	Temperatura de salida en el CSTR no lineal ante cambios en el punto de referencia y perturbaciones en la concentración y temperatura de alimentación . . . . .	71
3.15	Variación del flujo de alimentación para controlar cambios en el punto de referencia y perturbaciones en la concentración y temperatura de alimentación en el CSTR no lineal . . . . .	71
3.16	Variación del flujo de enfriamiento para controlar cambios en el punto de referencia y perturbaciones en la concentración y temperatura de alimentación en el CSTR no lineal . . . . .	72

# Índice de tablas

1.1	Soluciones de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control para un control PI (ante una entrada escalón) . . . .	28
1.2	Soluciones de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control para un control tipo PI (ante una entrada pulso). . .	29
1.3	Soluciones de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control para un control tipo P (ante una entrada escalón). . .	29
2.1	Condiciones de operación nominal del reactor CSTR no lineal . . . . .	51
3.1	Resumen de los índices de desempeño cuadrático ( $I_{y-s}^s$ e $I_{u-s}^s$ ) para el sistema de la columna de OR. <sup>1</sup> . . . . .	60
3.2	Criterio de robustez para los diferentes controles para la columna de destilación de OR. . . . .	62
3.3	Matrices de ponderación que producen la acción derivativa en el procedimiento LQR para el CSTR no lineal de los controles seleccionados. . .	67
3.4	Matrices de ponderación que producen la acción proporcional en el procedimiento LQR para el CSTR no lineal de los controles seleccionados. . .	68
3.5	Índices de desempeño para los sistemas de control del CSTR calculados numérica con el modelo linealizado . . . . .	69

5.1	Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación usando el control $WI^1$ . . . . .	74
5.2	Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación usando el control VU. . . . .	75
5.3	Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación usando el control KO. . . . .	76
5.4	Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación usando el control XI. . . . .	77
5.5	Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación usando el control DH. . . . .	78
5.6	Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación usando el control LQR. . . . .	79

# Nomenclatura

$\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}$	Matrices de espacio de estado de lazo abierto
$\mathbf{k}_1$	Magnitud de la función de entrada en el problema regulador
$\mathbf{k}_2$	Magnitud de la función de entrada en el problema servo
$\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_I, \mathbf{K}_D$	Matrices de las ganancias proporcionales, integrales y derivativas
$n, N$	Número de variables de estado
$\mathbf{Q}$	Matriz de ponderación de la salida para la respuesta en lazo cerrado
$\mathbb{R}$	Matriz de ponderación de la salida para la respuesta en lazo cerrado ( $\mathbb{R}^{c \times c}$ )
$\mathbf{P}$	Solución de la ecuación de Riccati en el problema LQR
$\mathbf{Q}$	Matriz de ponderación de la salida: original ( $\mathbb{R}^{c \times r}$ ) e integral ( $\mathbb{R}^{c \times r}$ ), respectivamente
$\mathbf{R}$	Matrices de peso de salida: proporcional ( $\mathbb{R}^{r \times r}$ ) e integral ( $\mathbb{R}^{r \times r}$ ), respectivamente
$\mathbf{r}$	Vector de referencia ( $\mathbb{R}^r$ )
$\mathbf{u}, \mathbf{U}$	Vectores de control: original ( $\mathbb{R}^{c \times 1}$ ) y sistemas LQR ( $\mathbb{R}^{C \times 1}$ ), respectivamente
$\mathbf{w}, \mathbf{W}$	Vectores de señal exógena: original ( $\mathbb{R}^{s \times 1}$ ) y sistemas LQR ( $\mathbb{R}^{S \times 1}$ ), respectivamente
$\mathbf{x}, \mathbf{X}$	Vectores de lazo abierto: original ( $\mathbb{R}^{n \times 1}$ ) y sistemas LQR ( $\mathbb{R}^{N \times 1}$ ), respectivamente
$\mathbf{y}, \mathbf{Y}$	Vector de salida medido: original ( $\mathbb{R}^{o \times 1}$ ) y sistema LQR ( $\mathbb{R}^{O \times 1}$ ), respectivamente
$o, O$	número de variables de salida medidas

$\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}$	Matrices de espacio de estados LQR
$\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$	Matrices de lazo cerrado
$c, C$	Número de variables de control
$\mathbf{D}$	eigenvalores de $\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_I$ o $\mathbf{K}_D$ ( $\mathbb{R}^{c \times r}$ , $c = r$ )
$I$	Índice de desempeño cuadrático
$J$	Índice de desempeño cuadrático para un problema LQR
$\mathbf{K}$	Estado de las ganancias de retroalimentación en la solución de problemas LQR
$k$	Un elemento dado entre $\mathbf{K}_P, \mathbf{K}_I$ o $\mathbf{K}_D$

### Letras griegas

$\alpha$	abscisa espectral
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Matrices de espacio de estados de control
$\delta$	Ganancias relativas
$\xi$	Estado de la salida integral $\mathbb{R}^r$
$\lambda$	Valores propios en lazo cerrado
$\phi$	Matriz auxiliar en lazo abierto
$\omega$	Variables de entrada de un sistema
$\phi_{max}$	Índice de robustez
$\Omega$	Transformada de Laplace de cualquier entrada

### Subíndices

$i$	Número de salidas
$\infty$	Estado estacionario final

$u$	Evaluado para una señal de control
$y$	Evaluado para una señal de salida
$i$	Número de salidas
P	Acción Proporcional
I	Acción integral
D	Acción derivativa
$j$	Número de entradas
$r$	Evaluado para un problema regulador
$s$	Evaluado para un problema servo
ss	Evaluado para un estado estacionario

**Superíndices**

$n_1$	Orden de la ecuación diferencial de los elementos de salida
$n_2$	Orden de la ecuación diferencial de los elementos de entrada
$p$	Evaluado para una función impulso ( $\delta(t)$ )
$s$	Evaluado para una función impulso ( $1(t)$ )

---

# I. ANTECEDENTES DEL PROYECTO

## 1.1. Fundamentos de control

Los sistemas de control han sido de gran impacto para el desarrollo de nuestra sociedad ya que han permitido a través de su implementación automatizar tareas humanas repetitivas, tediosas y/o peligrosas. Estos nos permiten trabajar con tolerancias mucho menores, mejorando la calidad de los productos, disminuyendo costos de producción en mano de obra e insumos, además de mejorar la seguridad con la que se operan máquinas y procesos en la industria. Los sistemas de control tienen una amplia gama de áreas de aplicación en: industrias del transporte, incluyendo la aeroespacial, procesos químicos y biológicos, sistemas mecánicos, eléctricos y electromecánicos, en la agroindustria, etc.

Existen dos tipos de enfoques principales para el diseño de sistemas de control: la teoría de control clásica y moderna. La teoría de control clásica trata los sistemas lineales con una entrada y una salida invariables en el tiempo, mientras que la teoría de control moderna trata con sistemas lineales o no lineales con entradas y salidas múltiples (Ogata, 2010a).

### 1.1.1. Objetivo de un sistema de control

En la industria debemos controlar correctamente los parámetros que rigen un proceso para asegurar la calidad de la producción, además de operar de forma segura (Wang et al., 2017). La importancia de un sistema de control automático radica en ofrecer seguridad al proceso que controla, cumplir con las especificaciones de calidad

del producto, un uso eficiente de las materias primas y energía, además de una mayor rentabilidad (Zhao & Guo, 2017). Comúnmente, los objetivos de un sistema de control deben ser (Coughanowr, 2009):

- La habilidad de mantener la variables de proceso en el valor deseado a pesar de las perturbaciones que se pudieran experimentar.
- La habilidad de mover las variables de proceso de una configuración a otra nueva configuración deseada.

De no cumplirse los objetivos anteriores, es posible que exista baja productividad y costos elevados (Younkin, 2003). Es común relacionar el método de sintonización con el tipo de sistema de control, los cuales son servo control (seguimiento de una referencia) o regulador (rechazo de perturbaciones) (Arrieta et al., 2010). En el sistema de control clásico, se espera que este controlador funcione bien tanto para el problema del servo como para los problemas del regulador, es decir, para el seguimiento del punto de ajuste y para el rechazo de perturbaciones. El seguimiento óptimo del punto de ajuste y el rechazo óptimo de una perturbación no se pueden obtener simultáneamente con un solo controlador. En el caso de la acción de control PID, para un proceso de primer orden, el retardo que se genera disminuye proporcionalmente al aumento de la ganancia, no obstante, esto reduce la estabilidad (Tian & Gao, 1998).

Se conoce que los sistemas de control con rechazo a perturbaciones, son mucho más importante que aquellos que siguen un punto de referencia, para muchas aplicaciones de control de procesos, lo que lleva al seguimiento de punto de ajuste a un nivel secundario de interés (Bordignon & Campestrini, 2018; Leva & Seva, 2018; Vilanova et al., 2018). El problema la regulación empieza cuando ocurre que la referencia es o bien constante

o varía lentamente con el tiempo y la tarea principal del controlador es mantener la variable de control en el valor deseado a pesar de las perturbaciones (Gao, 2014). A los sistemas de este tipo se les conoce como “controles reguladores”.

No es de interés como se cumpla el seguimiento de la referencia, siempre y cuando se evite un comportamiento oscilatorio ante cambios frecuentes del punto de referencia (Leva & Bascetta, 2007).

## **1.1.2. Elementos de un sistema de control**

### **1.1.2.1. Diagrama de bloques**

Un sistema de control está conformado por varios componentes. En la ingeniería de control se usa una representación llamada “diagrama de bloques” que representa gráficamente las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo de señales. (Ogata, 2010a).

La representación de los sistemas de control utilizando la representación por bloques facilita la visualización de la relación de las magnitudes de las señales (Coughanowr, 2009) donde las flechas indican el flujo de las señales de control (Oka & Suzuki, 2013). En un diagrama de bloques se enlazan una con otra todas las variables del sistema, mediante bloques funcionales.

El bloque funcional o simplemente bloque es un símbolo para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir una salida. Las funciones de transferencia de los componentes por lo general se introducen en los bloques correspondientes, que se conectan mediante flechas para indicar la dirección del flujo de señales (Ogata, 2010a).

### 1.1.2.2. Control de lazo abierto

Los sistemas en los cuales la salida no afecta la acción de control se denominan sistemas de control en lazo abierto. En otras palabras, en un sistema de control en lazo abierto no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada. En cualquier sistema de control en lazo abierto, la salida no se compara con la entrada de referencia. Por tanto, a cada entrada de referencia le corresponde una condición operativa fija; como resultado, la precisión del sistema depende de la calibración. Ante la presencia de perturbaciones, un sistema de control en lazo abierto no realiza la tarea deseada. En la práctica, el control en lazo abierto sólo se usa si se conoce la relación entre la entrada y la salida y si no hay perturbaciones internas ni externas (Ogata, 2010a).

### 1.1.2.3. Control de lazo cerrado

Estos sistemas también son llamados de control realimentado. En este tipo de sistema de control se alimenta al controlador la señal de error de actuación, lo que hace es comparar la señal de medición de la variable controlada con el punto de ajuste (el valor deseado de la variable controlada). La diferencia entre los dos valores se llama el error. El término control en lazo cerrado siempre implica el uso de una acción de control realimentado para reducir el error del sistema (Coughanowr, 2009).

$$\text{Error} = \text{señal en el punto de ajuste} - \text{señal de la variable ajustada} \quad (1.1)$$

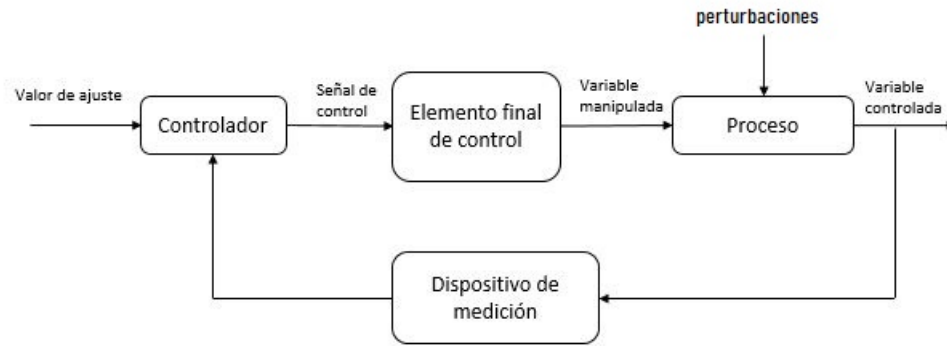


Figura 1.1. Sistema de control generalizado.

### 1.1.3. Concepto de estado

Existe una diferenciación entre la teoría de control moderna y la clásica. La primera esta basada en la representación matemática de sistemas dinámicos utilizando el concepto de estado, por otra parte la teoría de control clásica, utiliza solamente la relación entre entrada y salida de los sistemas.

*“Se define estado de un sistema como la mínima cantidad de información necesaria en un instante para que, conociendo la entrada a partir de ese instante se pueda determinar cualquier variable del sistema en cualquier instante posterior”* (Dominguez, 2006).

En un estado, la cantidad mínima de información que lo define esta representada por un conjunto de variables  $X_i(t)$ , en el cual los valores de este dependen de este instante en el tiempo  $t$ , denominados variables de estado del sistema. El vector de estado se define sobre el denominado espacio de estado:

*“Espacio de estado es el espacio vectorial en el cual el vector de estado toma valores, teniendo por lo tanto la misma dimensión que el número de elementos de dicho vector”* (Dominguez, 2006).

## 1.1.4. Características de un sistema de control

### 1.1.4.1. Desempeño

Los sistemas de control se diseñan para realizar tareas específicas, donde los requerimientos impuestos sobre el control se detallan como especificaciones de desempeño (Ogata, 2010a). La capacidad para controlar un proceso de manera estricta, generalmente aumenta a medida que aumentamos la ganancia del controlador, sin embargo, nos acercamos cada vez más a ser inestables en un sistema de lazo cerrado (Luyben, 1996). Un método para el diseño de un controlador óptimo se tiene a partir de la ecuación (1.2), cuya función es evaluar la integral cuadrática del error o integral de la señal de salida, definida como el área bajo la curva del cuadrado del error entre la referencia y la salida.

$$I_y = \int_0^{\infty} (\mathbf{r} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q} (\mathbf{r} - \mathbf{y}) dt \quad (1.2)$$

Además, la ecuación (1.3) evaluó la integral cuadrática del esfuerzo de control, también conocida como integral de la señal de control, donde se define como el área bajo la curva de la señal de control al cuadrado (Carrillo-Ahumada et al., 2011; M.A. Garcia-Alvarado, 2010; Vargas González et al., 2013)

$$I_u = \int_0^{\infty} u^T \mathbf{Q} u dt \quad (1.3)$$

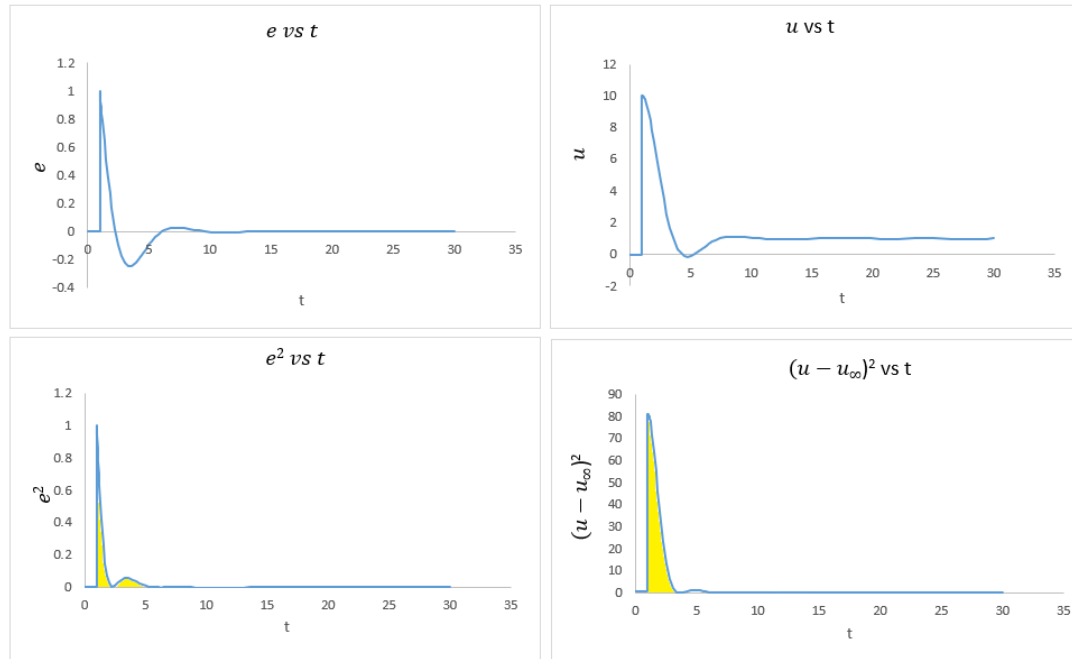


Figura 1.2. Integral de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control

#### 1.1.4.2. Estabilidad

El aspecto más importante a determinar de un sistema es la estabilidad (Luyben, 1996) puesto que los sistemas pueden estar expuesto a perturbaciones y ruido (Oka & Suzuki, 2013).

Al diseñar un sistema de control, se debe poder predecir su comportamiento dinámico a partir del conocimiento de sus componentes. La estabilidad la definiremos como como se muestra a continuación:

*“ Un sistema estable es aquel donde la respuesta de salida está limitada en un rango para todas las entradas limitadas”(Coughanowr, 2009).*

Sin embargo, esta definición de estabilidad es muy ambigua. Un sistema que muestra una respuesta ilimitada a una entrada acotada en un rango, es un sistema inestable. Una función de entrada limitada es una función del tiempo que siempre cae dentro de

ciertos límites durante el transcurso del tiempo. Aunque la definición de un sistema inestable establece que la salida del sistema diverge sin límites, esto es cierto sólo en el sentido matemático, dado que un sistema físico real siempre exhibe límites o restricciones.

Un modelo matemático lineal (conjunto de ecuaciones diferenciales lineales que describen el sistema) a partir del cual se obtiene la información de estabilidad es significativo solo en un cierto rango de variables.(Coughanowr, 2009).

La mayoría de los procesos son estables en lazo abierto, a excepción de algunos sistemas como reactores químicos exotérmicos.

#### **1.1.4.3. Robustez**

La teoría de control robusta utiliza el supuesto de que los modelos que utilizamos para diseñar sistemas de control tienen errores de modelado. Básicamente, la teoría asume que existe una incertidumbre o error entre la planta real y su modelo matemático. Los sistemas diseñados en base a la teoría de control robusta poseerán las siguientes propiedades (Ogata, 2010b):

- Estabilidad robusta. El sistema de control diseñado es estable en presencia de perturbación.
- Rendimiento robusto. El sistema de control exhibe características de respuesta predeterminadas en presencia de perturbación.

La robustez la definiremos de la siguiente forma:

*“Es la tolerancia que tiene un sistema de control ante cambios en los parámetros del modelo de proceso.”*

Esta teoría requiere consideraciones basadas en el análisis de frecuencia-respuesta y el análisis del dominio del tiempo, decreciendo cuando un cambio pequeño en el sistema lo hace inestable, por lo tanto, siempre hay una compensación entre la robustez y el desempeño de un sistema de control (Luyben, 1996).

## **1.2. Modelado matemático de sistemas de control**

### **1.2.1. Modelos lineales**

Se entiende por sistema lineal aquel donde, es posible la aplicación del principio de superposición, el cual establece que:

*“La respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de entradas diferentes es la suma de las dos respuestas individuales” (Ogata, 2010a)*

### **1.2.2. Modelos no lineales**

Un sistema no lineal es aquel donde el principio de superposición no se puede aplicar. Según el principio de superposición, la respuesta de un sistema lineal a la suma de dos entradas es la misma que la suma de las respuestas a las entradas individuales. Este comportamiento, que nos permite caracterizar completamente un sistema lineal mediante una función de transferencia, el cual no se cumple para los sistemas no lineales (Coughanowr, 2009).

### **1.2.3. Función de transferencia**

La forma convencional de hacer el modelado de los sistemas lineales es utilizar las

funciones de transferencia, en donde se puede representar la relación entrada - salida de las variables.

*“La función de transferencia de un sistema lineal invariante con el tiempo se define como la transformada de Laplace de la respuesta al impulso, con todas las condiciones iniciales igual a cero” (Kuo, 1996).*

Suponga un sistema donde  $G(t)$  representa la función de transferencia con  $u(t)$  de entrada y  $y(t)$  de salida y respuesta al impulso  $g(t)$ . La función de transferencia, se define como:

$$\mathbf{G}(t) = \mathcal{L}[g(t)] \quad (1.4)$$

La ecuación (1.4) relaciona la salida y la entrada de la siguiente forma:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} \quad (1.5)$$

en donde  $\mathbf{Y}(s)$  y  $\mathbf{U}(s)$  son las transformadas de Laplace de  $\mathbf{y}(t)$  y  $\mathbf{u}(t)$  respectivamente.

En la teoría de control, a menudo se usan las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada-salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes con el tiempo como ecuación 1.6 a continuación mostrada. La función de transferencia de un sistema se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n+1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 x^m + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x \quad (1.6)$$

en donde “Y” es la salida del sistema y “X” es la entrada.

La ecuación (1.6) también se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s^1 + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.7)$$

Cabe resaltar que, las funciones de transferencia se encuentran definidas solamente para un sistema lineal invariante en el tiempo. Asimismo, se consideran que todas las condiciones iniciales son cero.

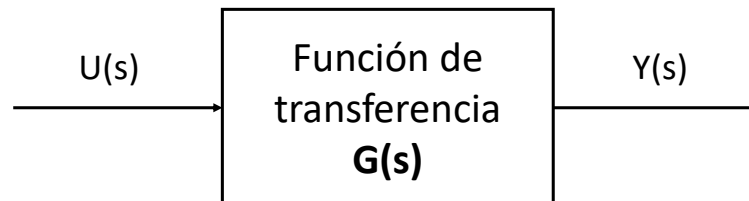


Figura 1.3. Diagrama de bloques de una función de transferencia.

#### 1.2.4. Espacio de estados

En la teoría de control moderno los modelos matemáticos están formados por ecuaciones en espacio de estados, las cuales permiten la predicción del comportamiento futuro del sistema. Este tipo de representación surgió a partir de los años 60 para permitir el control de sistemas cada vez más complejos y con requisitos de funcionamiento cada vez más severos, como los sistemas MIMO; aunque su desarrollo y aplicabilidad han aumentado con el acceso a las computadoras. Para definir la representación general es necesario expresar la Figura 1.1 sólo en términos de las variables involucradas en el proceso y en el algoritmo de control, como se muestra en la Figura 1.3, donde las variables indicadas son:  $\mathbf{x}$ , el vector de variables de estado que definen el proceso;

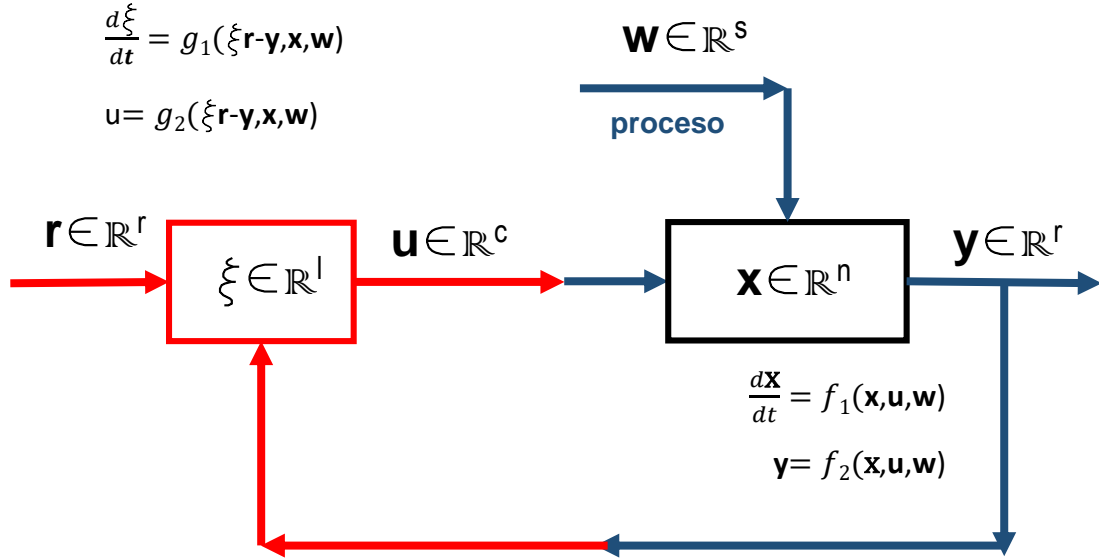


Figura 1.4. Esquema básico de un sistema de control en función de las variables involucradas.

$\mathbf{y}$ , el vector de variables que definen la salida medida del proceso (considerando que  $\mathbf{y}_m = \mathbf{y}$ );  $\mathbf{w}$ , vector de variables de señales exógenas del proceso;  $\mathbf{u}$ , el vector de variables que definen la acción de control sobre el proceso;  $\mathbf{r}$ , el “set point” o vector de variables que definen el valor deseado de la salida medida del proceso; y  $\xi$ , el vector de variables que definen el estado del algoritmo de control.

Las funciones  $f_1$  y  $f_2$  se conocen como espacio de estados del proceso, es decir, son el conjunto de ecuaciones que definen la dinámica del mismo; mientras que las funciones  $g_1$  y  $g_2$  expresan el algoritmo de control.

Las funciones  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  de cualquier proceso lineal o linealizado y controlado con un algoritmo de control lineal se pueden representar por el espacio de estados lineal mostrado en las ecuaciones de la (1.8) a la (1.11):

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_1\mathbf{w} + \mathbf{D}_2\mathbf{u} \quad (1.9)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha\xi + \beta_1\mathbf{r} + \beta_2\mathbf{y} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{u} = \gamma\xi + \delta_1\mathbf{r} + \delta_2\mathbf{y} \quad (1.11)$$

El proceso definido por las Ecs. (1.8) y (1.9) con el control declarado en las Ecs. (1.10) y (1.11) se puede usar para obtener la representación en lazo cerrado de las Ecs. (1.12) a la (1.26):

$$\mathbf{z}^T = [ \mathbf{X}^T \quad \xi^T ] \quad (1.12)$$

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbb{A}\mathbf{z} + \mathbb{B}_1\mathbf{w} + \mathbb{B}_2\mathbf{r} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{y} = \mathbb{C}_1\mathbf{z} + \mathbb{B}_{11}\mathbf{w} + \mathbb{B}_{21}\mathbf{r} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{u} = \mathbb{C}_2\mathbf{z} + \mathbb{D}_1\mathbf{w} + \mathbb{D}_2\mathbf{r} \quad (1.15)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\delta_2\Delta_1\mathbf{C} & \mathbf{B}_2\Delta_2\gamma \\ \beta_2\Delta_1\mathbf{C} & \alpha + \beta_2\Delta_1\mathbf{D}_2\gamma \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\mathbb{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\delta_2\Delta_1\mathbf{D}_1 \\ \beta_2\Delta_1\mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$$\mathbb{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \Delta_2 \delta_1 \\ \beta_1 + \beta_2 \Delta_1 \mathbf{D}_2 \delta_1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$$\mathbb{B}_{11} = [\Delta_1 \mathbf{D}_1] \quad (1.19)$$

$$\mathbb{B}_{21} = [\Delta_2 \mathbf{D}_2 \delta_1] \quad (1.20)$$

$$\mathbf{C}_1 = [ \Delta_1 \mathbf{C} \quad \Delta_1 \mathbf{D}_2 \gamma ] \quad (1.21)$$

$$\mathbf{C}_2 = [ \delta_2 \quad \Delta_1 \mathbf{C} \quad \Delta_2 \gamma ] \quad (1.22)$$

$$\mathbb{D}_1 = [\delta_2 \Delta_1 \mathbf{D}_1] \quad (1.23)$$

$$\mathbb{D}_2 = [\Delta_2 \delta_1] \quad (1.24)$$

$$\Delta_1 = [\mathbf{I}_r - \mathbf{D}_2 \delta_2]^{-1} \quad (1.25)$$

$$\Delta_2 = [\mathbf{I}_c - \delta_2 \Delta_1 \mathbf{D}_2] \quad (1.26)$$

La representación mostrada en las Ecs. (1.12) a la (1.26) se puede usar para determinar analíticamente el comportamiento de un sistema de control ante diferentes cambios de referencia o perturbaciones (M.A. Garcia-Alvarado, 2010).

## 1.3. Tipos de algoritmo de control

Los algoritmos de control definen la relación entre el error y la señal de corrección producida por el controlador. A continuación se muestran algunos de los mas comúnmente utilizados (Berk, 2013):

- Control on-off.
- Control proporcional - integral-diferencial (PID).
- Control de lógica difusa.
- Redes neuronales.

### 1.3.1. On-Off

En sistemas de control de este tipo, el elemento de actuación tiene solamente dos posiciones fijas, que en la mayoría de los casos es “encendido” y “apagado”. Este controlador de tipo “On-off” es simple y barato, razón por la cual su uso e implementación se ha extendido tanto en la industria y hogares.

Suponga que la señal de salida del controlador es  $u(t)$  y que la señal del error es  $e(t)$ . Tomando en cuenta que se trata de un control On-off, la señal de control  $u(t)$  permanece en un valor, ya sea el máximo o el mínimo y esto, depende si la señal del error tiene un valor positivo o negativo, como se muestra en la ecuación , esta oscila sobre un punto de referencia.

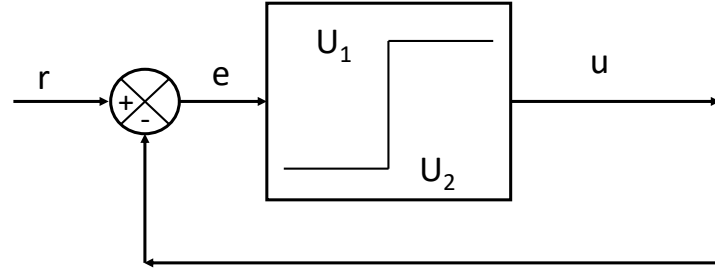


Figura 1.5. Diagrama de bloques del controlador tipo “on-off”

$$u(t) = \begin{cases} U_1 & \text{para } e(t) > 0 \\ U_2 & \text{para } e(t) < 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

por lo tanto, si el error inicialmente tiene un valor positivo el control se activa hasta llegar al valor deseado, para lo cual el error se hace negativo desactivando al controlador (Ogata, 2010a). En la ecuación (1.27), donde  $U_1$  y  $U_2$  son constantes, por lo general, el valor de  $U_2$  es cero (Bishop, 1992).

### 1.3.2. Proporcional-integral-derivativo

El controlador de tipo PID, hoy en día representa aproximadamente el 90 % de los controladores aplicados en diferentes áreas como: control de procesos, motores, automóviles, etc. (Goncalver et al., 2008; Passino & Yurkovich, 1998; Samad, 2017). La combinación de una acción de control proporcional, una acción de control integral y una acción de control derivativa se conoce como control PID (Ogata, 2010a). El controlador PID y sus variaciones se consideran los más utilizados en la industria (Ruiz López et al., 2006).

La parte de la acción derivativa del control PID reduce el exceso de impulso que se produce y también incrementa el tiempo en que la señal de salida del proceso regresa al punto de referencia y en procesos variables con perturbaciones incrementa

el error, por lo que su implementación en una planta requiere de la instalación de sensores y/o filtros que puedan reducir el ruido y permitan al controlador regular el proceso. (Valentas et al., 1997).

Entre los avances en la teoría de control, el algoritmo de control PID es la principal acción de control aplicada en los controladores industriales. Afirma que los sofisticados algoritmos de control (como el control de modelo predictivo), se construyen sobre la base del algoritmo PID. Incluso en el desarrollo de control no lineal, la acción de control PID se ha utilizado como referencia de comparación. (Doyle & Glover, 1989; García-Alvarado et al., 2004; Hwang & Hsiao, 2002). La expresión matemática que describe al control PID se muestra en la ecuación (1.28).

$$u(t) = k_d \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (1.28)$$

donde  $u$  es la variable de control y  $e$  es el error de control, del cual tenemos:

$$e = r - y \quad (1.29)$$

La ecuación (1.28), en su función de transferencia en la ecuación :

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (1.30)$$

donde  $K_p$  es la ganancia de la acción proporcional,  $T_i$  es el tiempo integral y  $T_d$  es el tiempo diferencial (Ogata, 2010a).

Por lo tanto, la variable de control, es una suma de tres términos: el término “P” el cual es proporcional al error, el término “I” el cual es proporcional a la integral del error y el término “D” el cual es proporcional a la derivado del error. (Aström &

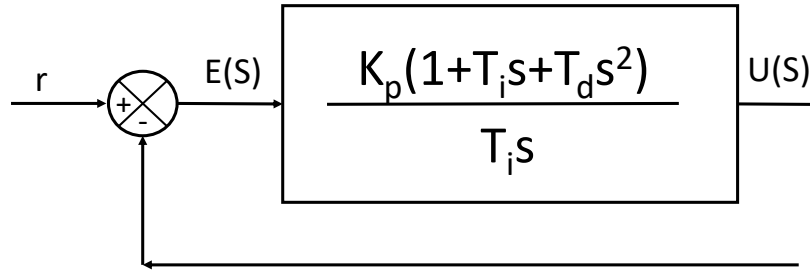


Figura 1.6. Diagrama de bloques de un controlador PID.

Hägglund, 1995). En base a lo anterior, se puede reescribir la ecuación (1.28) de la siguiente forma:

$$u(t) = K_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + k_D \frac{de(t)}{dt} \quad (1.31)$$

en la cual  $K_p$ ,  $K_I$  y  $K_D$  son las ganancias del control PID (Ashida et al., 2017). Además que la acción de control PID ha demostrado buenas características de rendimiento y robustez para procesos no lineales además que se ha mantenido como el controlador más comúnmente utilizado durante 50 años (He et al., 1999).

### 1.3.3. Otros algoritmos de control

#### 1.3.3.1. Lógica difusa

El control difuso proporciona una metodología formal para representar, manipular e implementar el conocimiento heurístico de un ser humano sobre cómo controlar un sistema (Passino & Yurkovich, 1998). Durante los últimos años, ha emergido un especial interés por las técnicas de control difuso, puesto que te permiten generar datos numéricos aproximados basados en el conocimiento heurístico (Ketata et al., 1995).

En la siguiente figura se presenta el diagrama de bloques de un control difuso in-

crustado en un controlador de lazo cerrado donde la salida de la plata se denota con  $y(t)$ , la entrada se denota con  $u(t)$ , y la entrada de referencia para el control difuso se denota con  $r(t)$ .

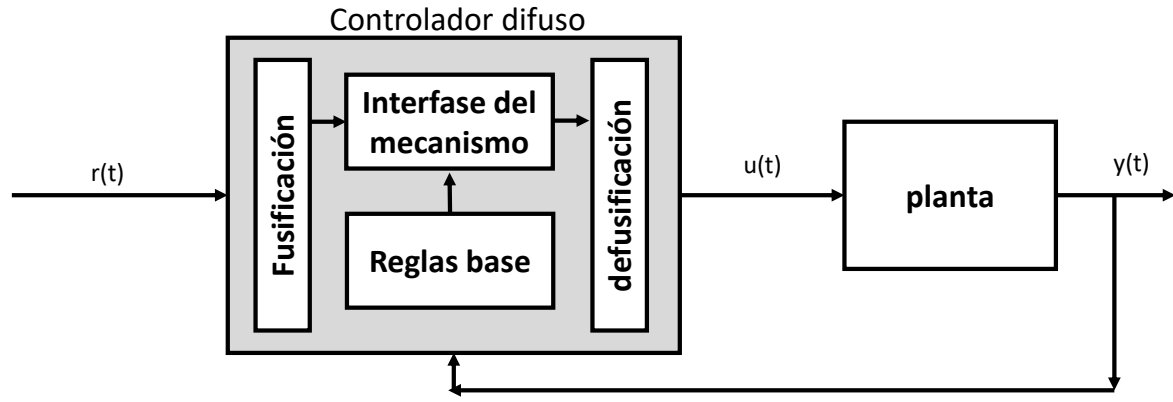


Figura 1.7. Diagrama de bloques de control difuso en lazo cerrado.

El controlador difuso tiene cuatro componentes principales:

1. La "reglas base" contiene el conocimiento, en forma de un conjunto de reglas, de la mejor manera de controlar el sistema.
2. El mecanismo de inferencia evalúa qué reglas de control son relevantes en el momento actual y luego decide cuál debe ser la entrada a la planta.
3. La interfaz de "fusificación" simplemente modifica las entradas para que puedan interpretarse y compararse con las reglas en la base de reglas.
4. La interfaz de defusificación convierte las conclusiones alcanzadas por el mecanismo de inferencia en las entradas a la planta.

Básicamente, debe verse el controlador difuso como un tomador de decisiones artificial

que opera en un sistema de lazo cerrado en tiempo real que recopila los datos de producción de la planta, los compara con la entrada de referencia y luego decide cuál debe ser la entrada de la planta para garantizar que se cumplan los objetivos de rendimiento (Passino & Yurkovich, 1998).

Los beneficios de trabajar con un controlador difuso son (Reznik, 1997):

- Desarrollar un controlador difuso es barato.
- Los controladores difusos son personalizables, ya que es más fácil de entender y modificar sus reglas, que no solo utilizan la estrategia de un operador humano sino que también se expresan en términos lingüísticos naturales.
- Es fácil aprender cómo operan los controladores difusos y cómo diseñarlos y aplicarlos.

Sin embargo, las ventajas que tiene un control PID sobre un controlador difuso son (Jantzen, 2007):

- El controlador PID es bien comprendido, fácil de implementar, tanto en su forma digital como analógica, y es ampliamente utilizado. Por el contrario, el controlador difuso requiere algún conocimiento de la lógica difusa. También implica construir funciones de membresía arbitrarias.
- El controlador difuso es generalmente no lineal. No tiene una ecuación simple como el PID, y es más difícil de analizar matemáticamente; se requieren aproximaciones, y se deduce que la estabilidad es más difícil de garantizar.

- El controlador difuso tiene más parámetros de ajuste que el controlador PID. Además, es difícil rastrear el flujo de datos durante la ejecución, lo que dificulta la corrección de errores.

### **1.3.3.2. Redes neuronales.**

Las redes neuronales artificiales son modelos matemáticos simples de redes neuronales biológicas que ayudan en el diseño de un sistema de control inteligente (Yang et al., 2018). Las redes neuronales artificiales son el resultado de los intentos por modelar los principios organizacionales del sistema nervioso central por medio de estructuras con una gran cantidad de elementos de proceso interconectados que trabajan en conjunto, llamados neuronas artificiales (Antsaklis, 1990).

Una red neuronal artificial es un sistema con entradas y salidas, las cuales están compuestas por varios procesos simples y similares, los cuales cada uno recibe el nombre de “pesos”. Cambiar el peso de un elemento alterará el comportamiento del elemento y por lo tanto, se alterará el comportamiento completo de la red (Nguyen & Widrow, 1990)

Se cree que las redes neuronales (RNN) tienen un potencial de avance en el dominio del procesamiento cognitivo asociativo de grandes cantidades de información heterogénea. Las funciones generalizadas del procesamiento de redes neuronales artificiales son las siguientes (Osipov & Osipova, 2018):

- Vinculación de señales procesadas
- Formación de modelos espacio-temporales de los eventos bajo análisis

- Uso de esos modelos para la solución operativa de tareas creativas poco formalizadas.

El uso de la red neuronal artificial para el control y la optimización ha ido en aumento y puede aplicarse tanto a las relaciones lineales como a las no lineales entre la entrada y salida (Katić et al., 2018).

El objetivo principal en una red neuronal artificial es seleccionar los pesos de la red para alcanzar la relación entrada/salida deseada (Nguyen & Widrow, 1990). Una red típica se muestra en la siguiente figura, donde se observa como la estructura sigue una sucesión de capas totalmente conectadas entre sí. Las dos capas que tienen contacto con el exterior son la capa de entrada y la de salida. Las capas intermedias reciben el nombre de capas ocultas (Vitthal & Durgaprasada, 1995).

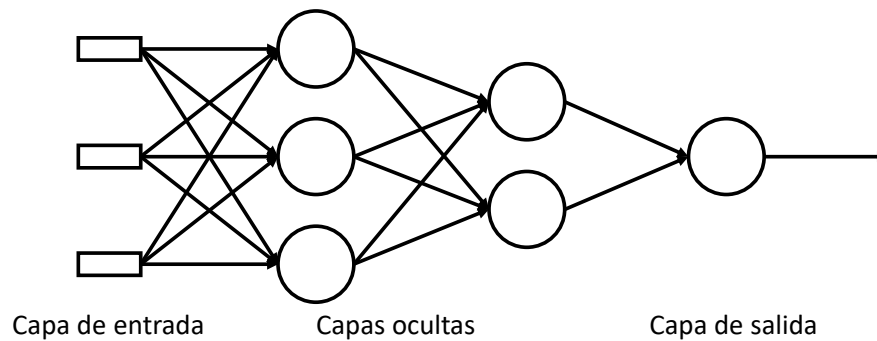


Figura 1.8. Diagrama de red neuronal multicapa.

## 1.4. Herramientas para diseñar controlares PID

### 1.4.1. Segundo método de estabilidad de Liapunov

En un sistema cuyo objetivo determinado es controlarlo, el aspecto cuya determinación es el más importante, es el de la estabilidad (Ogata, 2010a). Si el sistema es lineal e invariante con el tiempo, existen numerosos criterios de estabilidad como Nyquist y el criterio de estabilidad de Routh, sin embargo, si el sistema es no lineal o lineal pero variante con el tiempo, ambos criterios no se pueden aplicar.

EL primer método de Liapunov se compone de los procedimientos en los cuales se usa la forma explícita de la solución de las ecuaciones diferenciales para el análisis. El segundo método, no requiere de la solución de ecuaciones diferenciales. Mediante este método se determina la estabilidad de un sistema sin resolver las ecuaciones de estado.

- Definida positiva. Se dice que una función escalar es definida positiva, en una región  $\Omega$  que incluye el origen del espacio de estados, si  $V(\mathbf{x}) > 0$  para todos los estados  $x$  diferentes a cero en la región  $\Omega$  y  $V(\mathbf{0}) = 0$ .
- Definida negativa. Se dice que una función escalar  $V(\mathbf{x})$  es definida negativa si  $-V(\mathbf{x})$  es definitivamente positiva.
- Semidefinida positiva. Se dice que una función escalar  $V(\mathbf{x})$  es semidefinida positiva si es positiva en todos los estados de la región  $\Omega$ , excepto en el origen, donde es cero.
- Semidefinida negativa. Se dice que una función escalar  $V(\mathbf{x})$  es semidefinida negativa si  $-V(\mathbf{x})$  es definida positiva (Ogata, 2010a).

Considerando el sistema descrito en la ecuación (1.32)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (1.32)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de estado de dimensión  $n$  y  $f(\mathbf{x}, t)$  es un vector de dimensión  $n$  que tiene los elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $t$ .

Se denomina estado de equilibrio cuando el sistema de la ecuación (1.32) tiene:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (1.33)$$

para toda  $t$ .

Según el segundo método de Liapunov, tomando el sistema de la ecuación (1.32) en donde se aplica:

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad (1.34)$$

Para toda  $t$ , si existe una función escalar  $V(\mathbf{x}, t)$  con primeras derivadas parciales continuas que satisfacen las siguientes condiciones:

- $V(\mathbf{x}, t) > 0$  para todo  $V(\mathbf{0}, t) = 0$  (es definida positiva)
- $-\dot{V}(\mathbf{x}, t) > 0$  para todo  $\dot{V}(\mathbf{0}, t) = 0$  (es definida negativa)

entonces el estado de equilibrio en el origen es uniforme y asintóticamente estable. La función  $V(\mathbf{x}, t)$  que satisface las condiciones del segundo método de estabilidad de Liapunov se denomina “función de Liapunov” (Ogata, 2010a).

## 1.4.2. Índices de funcionamiento

En los procesos de la industria moderna, una gran cantidad de bucles de control operan con diferentes controladores, como los controladores proporcional-integral-derivativo (PID) o los controladores de modelo predictivo (MPC), para satisfacer diversos requisitos de control (Shang et al., 2017). Sin embargo, los estudios industriales muestran que muchos lazos de control industrial funcionan en estados de rendimiento deficientes debido a un ajuste inadecuado del controlador, cambios en las características de los procesos o perturbaciones, variaciones en la alimentación, mal funcionamiento de sensores o actuadores, etc. (Jelali, 2013). Por lo tanto, una evaluación del desempeño de control efectiva y confiable es de gran importancia para evaluar su funcionamiento y mantener el sistema de control en un estado de alto desempeño.

La mayoría de los métodos de evaluación de desempeño del controlador requieren un conocimiento previo de los modelos de proceso, pero esta información no siempre está disponible en la práctica (Gao et al., 2016). La acción de seleccionar los parámetros de un controlador, en función de un criterio de desempeño se le conoce como “sintonización”.

Existen varias tendencias para establecer este criterio:

- Las normas  $H_2/H_\infty$  de la salida del sistema (Chen et al., 2002; Doyle & Glover, 1989; Goncalver et al., 2008).
- El balance entre las integrales cuadráticas del error (1.2) y del esfuerzo de control (1.3).
- El posicionamiento de los valores propios de la matriz característica del sistema en lazo cerrado en la región  $D$  del semiplano complejo izquierdo (Carrillo-Ahumada

et al., 2011; M.A. Garcia-Alvarado, 2010; Ruiz López et al., 2006; Vargas González et al., 2013).

Sin embargo, debido a que los controladores PI/PID son sintonizados en base a especificaciones en el dominio del tiempo, el balance entre las normas  $H_2/H_\infty$  no es una elección adecuada como método de sintonización. En (M.A. Garcia-Alvarado, 2010) se demostró que dadas las soluciones analíticas para el sistema (1.13) - (1.14), los índices de funcionamiento del error en la salida  $I_y$  y del esfuerzo de control  $I_u$ , donde  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$  son matrices positivas definidas, también tienen soluciones analíticas (eliminando la necesidad de realizar las simulaciones del sistema).

Al estudiar la respuesta de un sistema de control ante entradas escalón, en las señales de referencia o en las perturbaciones, la integral cuadrática del error  $I_y$  tiene un límite finito, pero la del esfuerzo de control  $I_u$  no lo tiene.

Así, de esta forma, (Vargas González et al., 2013) propusieron una definición alternativa a la Ec. (1.3), quedando de la siguiente forma:

$$I_u = \int_0^\infty (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty)^T \mathbb{Q} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty) dt \quad (1.35)$$

donde  $\mathbf{u}_\infty$  representa el punto donde la señal de control alcanza el estado estacionario final. Esto hace que la integral cuadrática del esfuerzo de control  $I_u$  pertenezca al espacio de Lebesgue  $\mathcal{L}_{2+}$ , eliminando la necesidad de especificar un tiempo final de integración. La combinación de los índices (1.2) y (1.35) junto con el posicionamiento de los valores propios en la región  $D$  se conoce como criterio  $\mathcal{L}(y)/\mathcal{L}_2(u)/D$ , y se ha propuesto como una alternativa para el diseño de un control robusto en procesos de la Ingeniería Química (Vargas González et al., 2013). Un controlador sintonizado con

criterio óptimo robusto en función de  $\mathcal{L}(y)/\mathcal{L}_2(u)/D$  es un problema de optimización que plantea:

Determinar  $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2)$  para un sistema de dinámica conocida  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$  expresado en las ecuaciones (1.8) a la (1.11), de modo que se minimice (1.36):

$$f(I_y, I_u) \longrightarrow \text{mín} \quad (1.36)$$

sujeto a:

$$Re(\lambda) < 0 \forall | \mathbb{A} - \lambda \mathbf{I}_{n+k} | = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n+k \quad (1.37)$$

$$\Phi_{\text{máx}} = \text{máx} \left( \frac{Im(\lambda)}{Re(\lambda)} \right) \quad (1.38)$$

donde

$$I_y = w_1 I_{y-s}^s + w_2 I_{y-s}^r + w_3 I_{y-s}^p \quad (1.39)$$

$$I_u = w_4 I_{u-s}^s + w_5 I_{u-s}^r + w_6 I_{u-s}^p \quad (1.40)$$

En la Ec. (1.39),  $I_y$  es el índice del error en la salida, en la ecuación (1.40)  $I_u$  es el índice del esfuerzo de control. Además, en el criterio óptimo robusto  $I_y$  e  $I_u$  se evalúan ante diferentes entradas cuando una función forzante, sea esta escalón ó impulso, se aplica a  $r$  (problema-servo) ó  $w$  (problema regulador), lo cual produce los diferentes términos de  $I_{y-s}^s, I_{y-s}^r, \dots, I_{u-s}^p$ .

Esto da lugar a considerar que los  $I_y$  son antagonistas de los  $I_u$  porque al minimizar  $I_y$  se minimiza el error del control (desempeño), pero al minimizar los  $I_u$  aumenta la

tolerancia del desempeño ante errores de modelado porque éstos moderan la acción de control y evitan que el estado del proceso se salga de los límites de validez del modelo (Carrillo-Ahumada et al., 2011; M.A. Garcia-Alvarado, 2010; Vargas González et al., 2013). Por lo tanto, para resolver el problema de optimización que plantea el criterio óptimo robusto se han probado distintos métodos de balanceo: minimizando  $\Phi_{máx}$  (M.A. Garcia-Alvarado, 2010), utilizando frentes de Pareto (Carrillo-Ahumada et al., 2011) y por equilibrio de Nash (Vargas González et al., 2013) entre otros.

Las soluciones de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control para un control PI para una señal escalón y pulso se muestran en la Tabla 1.1. y Tabla 1.2.

Tabla 1.1. Soluciones de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control para un control PI (ante una entrada escalón ).

Índice	$I_{y-s}^s$	$I_{u-s}^s$
<b>Definición</b>	$\int_0^\infty (\mathbf{r} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q} (\mathbf{r} - \mathbf{y}) dt$	$\int_0^\infty (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty)^T \mathbf{R} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty) dt$
<b>Solución</b> <sup>1,2</sup>	$\Omega^T \mathbf{P} \Omega^3$	$\Omega^T \mathbf{P} \Omega^3$
<b>Ecuación asociada de Ricatti</b>	$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{-1} = 0$	$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{-1} = 0$

<sup>1</sup> $\Omega = \mathbb{B}_2 K_2$ ;  $\beta = -\mathbf{C}_1 \Omega$ ;  $\alpha = \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{-1}$ ;  $\sum_i = \mathbf{C}_1 (\mathbf{A}^2)^{-1} \Omega$  ( $i = 1, 2$ )

<sup>2</sup>Las expresiones para el caso del regulador se obtienen sustituyendo  $K_2$  y  $\mathbb{B}_2$  con  $K_1$  y  $\mathbb{B}_1$ , respectivamente.

<sup>3</sup>(M.A. Garcia-Alvarado, 2010; Vargas González et al., 2013)

Tabla 1.2. Soluciones de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control para un control tipo PI (ante una entrada pulso).

Índice	$I_{y-s}^p$	$I_{u-s}^p$
<b>Definición</b>	$\int_0^\infty (\mathbf{r} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q} (\mathbf{r} - \mathbf{y}) dt$	$\int_0^\infty \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt$
<b>Solución</b> <sup>1,2,3</sup>	$\Omega^T \mathbf{P} \Omega^3$	$\Omega^T \mathbf{P} \Omega^3$
<b>Ecuación asociada de Ricatti</b>	$\mathbb{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbb{A} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 = 0$	$\mathbb{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbb{A} + \mathbf{C}_2^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_2 = 0$

<sup>1</sup> $\Omega = \mathbb{B}_2 K_2$ ;  $\beta = -\mathbf{C}_1 \Omega$ ;  $\alpha = \mathbf{C}_2 \mathbb{A}^{-1}$ ;  $\sum_i = \mathbf{C}_1 (\mathbb{A}^2)^{-1} \Omega$  ( $i = 1, 2$ )

<sup>2</sup>Las expresiones para el caso del regulador se obtienen sustituyendo  $K_2$  y  $\mathbb{B}_2$  con  $K_1$  y  $\mathbb{B}_1$ , respectivamente.

<sup>3</sup>(M.A. Garcia-Alvarado, 2010; Vargas González et al., 2013)

En (Estévez-Sánchez et al., 2017) se desarrollaron los índices  $I_y$  e  $I_u$  para un controlador de tipo proporcional. Las soluciones de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control para un control P para una señal escalón y pulso se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1.3. Soluciones de los índices de funcionamiento cuadrático del error y del esfuerzo de control para un control tipo P (ante una entrada escalón).

Índice	$I_{y-s}^s$	$I_{u-s}^s$
<b>Definición</b>	$\int_0^\infty (\mathbf{r} - \mathbf{y})^T \mathbf{Q} (\mathbf{r} - \mathbf{y}) dt$	$\int_0^\infty \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt$
<b>Solución</b> <sup>1,2,4</sup>	$(\mathbf{K}_2 - \pi_y)^T \mathbf{Q} (\mathbf{K}_2 - \pi_y) t +$ $(\pi_y - \mathbf{K}_2)^T \mathbf{Q} \sum_1 (\mathbf{K}_2 - \pi_y) +$ $\Omega^T (\mathbb{P} - e^{\mathbb{A}Tt} \mathbb{P} e^{\mathbb{A}Tt}) \Omega$	$\Omega^T (\mathbb{P} - e^{\mathbb{A}Tt} \mathbb{P} e^{\mathbb{A}Tt}) \Omega +$ $\sum_2^T \mathbf{R} \pi_u + \pi_u^T \mathbf{R} \sum_2 + \pi_u^T \mathbf{R} \pi_u t$
<b>Ecuación asociada de Ricatti</b>	$\mathbb{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbb{A} + (\mathbb{A}^{-1})^T \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 \mathbb{A}^{-1} = 0$	$\mathbb{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbb{A} + (\mathbb{A}^{-1})^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_2 \mathbb{A}^{-1} = 0$

<sup>1</sup> $\Omega = \mathbb{B}_2 K_2$ ;  $\pi_u = -\mathbf{C}_1 \Omega$ ;  $\pi_y = \mathbb{D}_2 K_2 - \mathbf{C}_2 \mathbb{A}^{-1}$ ;  $\sum_i = \mathbf{C}_1 (\mathbb{A}^2)^{-1} \Omega$  ( $i = 1, 2$ )

<sup>2</sup>Las expresiones para el caso del regulador se obtienen sustituyendo  $K_2$  y  $\mathbb{B}_2$  con  $K_1$  y  $\mathbb{B}_1$ , respectivamente.

<sup>4</sup>(Estévez-Sánchez et al., 2017)

### 1.4.3. Reguladores lineales cuadráticos (LQR)

Una ventaja del método de control óptimo cuadrático sobre otros métodos es que proporciona una forma sistemática de calcular la matriz de ganancia de control de realimentación del estado (Ogata, 2010b).

El sistema de control que se considera para la metodología LQR tiene la forma de la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (1.41)$$

donde:

- $\mathbf{x}$  = vector de estado (vector de dimensión  $\mathbf{n}$ )
- $\mathbf{u}$  = vector de control (vector de dimensión  $\mathbf{r}$ )
- $\mathbf{A}$  = matriz de coeficientes constantes de  $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$
- $\mathbf{B}$  = matriz de coeficientes constantes de  $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$

Al diseñar un sistema de control, es de notable interés seleccionar el vector de control  $\mathbf{u}(t)$  que minimice el índice de desempeño cuadrático. (Ogata, 2010a). La ley de control para este sistema esta representado por la ecuación (1.42):

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{Kx}(t) \quad (1.42)$$

donde  $\mathbf{K}$  es una matriz de  $r \times n$ . El diseño de sistemas de control óptimo se reduce a la determinación de los elementos de la matriz  $\mathbf{K}$  para minimizar la función de costo

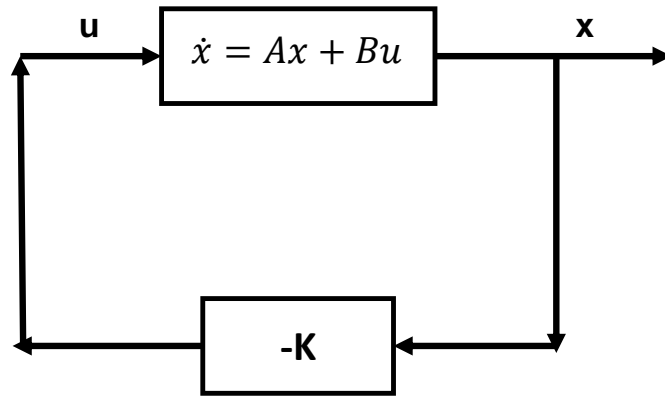


Figura 1.9. Diagrama de bloques de un sistema regulador óptimo cuadrático

descrita en la ecuación (1.43):

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbb{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbb{R} \mathbf{u}) dt \quad (1.43)$$

donde  $\mathbb{Q}$  es una matriz simétrica real definida positiva (o semidefinida positiva),  $\mathbb{R}$  es una matriz simétrica real definida positiva y  $u$  no está restringida. El segundo término en el lado derecho de la ecuación (1.43) representa el gasto de la energía de las señales de control. Las matrices  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$  determinan la importancia relativa del error y el gasto de energía. (Ogata, 2010b)

Una ventaja de usar este esquema es que el sistema diseñado será estable, excepto en el caso en el que el sistema no sea controlable (Ogata, 2010a).

Sustituyendo la ecuación (1.42) en (1.41) obtendremos la ecuación (1.44):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \quad (1.44)$$

Se asume que la matriz dada por  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  es estable, o sea, que sus valores propios

son reales negativos. Sustituyendo la ecuación (1.42) en (1.43) obtendremos la ecuación (1.46):

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x}) dt \quad (1.45)$$

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt \quad (1.46)$$

estableciendo que

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) \quad (1.47)$$

donde  $P$  es una matriz real simétrica positiva definida. En este caso, obtenemos que:

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T \left[ (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \right] \mathbf{x} \quad (1.48)$$

Comparando ambos lados de la ecuación (1.48) y notando que esta ecuación debe ser cierta para cualquier  $\mathbf{x}$ , requerimos que:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \quad (1.49)$$

donde existe la matriz  $P$  que es definida positiva y satisface la ecuación (1.49).

El índice de desempeño  $J$  puede ser evaluado como se muestra en la ecuación (1.50):

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} = \mathbf{x}^T (\infty) \mathbf{P} \mathbf{x} (\infty) + \mathbf{x}^T (0) \mathbf{P} \mathbf{x} (0) \quad (1.50)$$

tomando que los valores propios de la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}$  son reales negativos, tenemos que  $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}$ , entonces tenemos la ecuación (1.51):

$$J = \mathbf{x}^T(0)\mathbb{P}\mathbf{x}(0) \quad (1.51)$$

La ecuación (1.51) se obtiene en terminos de la condición inicial  $\mathbf{x}(0)$  y  $\mathbf{P}$  que se relaciona con  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{Q}$  mediante la ecuación (1.49) (Ogata, 2010a).

### 1.4.3.1. Controlador de acción proporcional

Los controladores proporcionales multivariados se pueden obtener por medio del enfoque LQR siguiendo los siguientes pasos:

1. Se considera el modelo lineal e invariante en el tiempo de una planta multivariada en lazo cerrado, descrito por las ecuaciones (1.52) y (1.53):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1.52)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (1.53)$$

Este método difiere con la representación hecha con las Ecs. (1.8) a la (1.11) en que la salida medida disponible al control ( $\mathbf{y}$ ) únicamente depende de la variable de estado ( $\mathbf{x}$ ).

2. EL modelo descrito por las ecuaciones (1.52)-(1.53) estará acoplado a un controlador proporcional descrito por la Ec. (1.54):

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{e}) \quad (1.54)$$

donde la ecuación que describe el error es la Ec. (1.55):

$$\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{y} \quad (1.55)$$

sustituyendo la ecuación (1.55) en la ecuación (1.54) queda la ecuación (1.56):

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_p (\mathbf{r} - \mathbf{y}) \quad (1.56)$$

En caso de un problema de rechazo de perturbaciones  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , por lo tanto la ecuación (1.56) se escribe como la ecuación (1.57):

$$\mathbf{u}_p = -\mathbf{K}_p \mathbf{y} = -\mathbf{K}_p \mathbf{C} \mathbf{x} = -\mathbf{K} \mathbf{x} \quad (1.57)$$

3. Se definen las matrices de ponderación definidas positivas  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  que determinan el equilibrio entre el error del estado (o salida) y el gasto de energía, respectivamente, para minimizar la función de costo (1.58):

$$J(\mathbf{y}, \mathbf{u}_p) = \int_0^{\infty} (\mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} + \mathbf{u}_p^T \mathbf{R} \mathbf{u}_p) dt \quad (1.58)$$

en esta parte, podemos transponer la Ec. (1.53) y sustituirla en la ecuación (1.58) para obtener la ecuación (1.59):

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}_p) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{u}_p^T \mathbf{R} \mathbf{u}_p) dt \quad (1.59)$$

donde declararemos que:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \quad (1.60)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \quad (1.61)$$

sustituyendo las Ecs. (1.60)-(1.61) en la Ec. (1.59) obtenemos la Ec. (1.62):

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}_p) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x} + \mathbf{u}_p^T \hat{\mathbf{R}} \mathbf{u}_p) dt \quad (1.62)$$

4. La minimización del índice de la Ec. (1.62) involucra la solución de la ecuación de Ricatti (1.63) de acuerdo al segundo método de Liapunov (Ogata, 2010a) para obtener  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (1.63)$$

5. Se determina el controlador óptimo de retroalimentación de estados por medio de la Ec. (1.64):

$$\mathbf{K} = \mathbb{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbb{P} \quad (1.64)$$

6. Se calculan las ganancias del controlador óptimo proporcional a partir de la Ec. (1.65):

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{K} \mathbf{C}^{-1} \quad (1.65)$$

### 1.4.3.2. Controlador de acción proporcional - integral

Los controladores PI multivariados se pueden obtener por medio del enfoque LQR siguiendo los siguientes pasos:

1. Se considera el modelo lineal e invariante en el tiempo de una planta multivariada en lazo cerrado, descrito por las ecuaciones (1.66) y (1.67):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad (1.66)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (1.67)$$

donde las matrices de coeficientes del modelo ahora están definidas por las matrices (1.68) a la (1.72):

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

Al igual que la representación descrita por las ecuaciones (1.52)-(1.53), este modelo difiere en la representación expresada por las Ecs. (1.8) a (1.11) en la que la salida medida disponible al control ( $\mathbf{y}$ ) únicamente depende de la variable de estado aumentada ( $\hat{\mathbf{x}}$ ).

2. La ley de control PI está dada por la Ecs (1.73):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_i \quad (1.73)$$

En caso de un problema de rechazo de perturbaciones  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , la  $\mathbf{u}_p$  y  $\mathbf{u}_i$  se pueden escribir como se muestra en las Ecs. (1.74)-(1.75):

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{K}_p \mathbf{e} \quad (1.74)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{K}_i \int_0^t \mathbf{e} dt \quad (1.75)$$

donde la ecuación que modela el error se representa en la ecuación (1.55), que sustituyéndolas en las Ecs. (1.74) - (1.75) obtenemos las Ecs. (1.76)-(1.77):

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{K}_p (\mathbf{r} - \mathbf{y}) = -\mathbf{K}_p \mathbf{y} = -\mathbf{K}_p \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (1.76)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{K}_i \int_0^t (\mathbf{r} - \mathbf{y}) dt = -\mathbf{K}_i \int_0^t \mathbf{y} dt \quad (1.77)$$

donde podemos definir la Ec. (1.78):

$$\mathbf{q} = - \int_0^t \mathbf{y} dt \quad (1.78)$$

sustituyendo la Ec. (1.78) en la Ec. (1.77) se obtiene la Ec (1.79) que describe  $u_i$ :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{K}_i \mathbf{q} \quad (1.79)$$

de tal forma que la Ec. (1.73) se puede escribir como la Ec. (1.80):

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_p \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{K}_i \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_p \mathbf{C} & \mathbf{K}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = -\mathbf{K} \mathbf{x} \quad (1.80)$$

3. Se definen las matrices de ponderación definidas positivas  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$  que determinan el equilibrio entre el error del estado (o salida) y el gasto de energía, respectiva-

mente, para minimizar la función de costo (1.81):

$$J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} (\mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (1.81)$$

en esta parte, podemos transponer la Ec. (1.53) y sustituirla en la ecuación (1.81) para obtener la ecuación (1.82):

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (1.82)$$

donde declararemos que:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \quad (1.83)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \quad (1.84)$$

sustituyendo las Ecs. (1.83)-(1.84) en la Ec. (1.82) obtenemos la Ec. (1.85):

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{R}} \mathbf{u}) dt \quad (1.85)$$

4. La minimización del índice de la Ec. (1.85) involucra la solución de la ecuación de Ricatti (1.86) de acuerdo al segundo método de Liapunov (Ogata, 2010a) para obtener  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (1.86)$$

5. Se determina el controlador óptimo de retroalimentación de estados por medio de la Ec. (1.87):

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (1.87)$$

6. Se calculan las ganancias del controlador óptimo proporcional a partir de la Ec. (1.88):

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{K} \mathbf{C}^{-1} \quad (1.88)$$

sin embargo, en este caso  $\mathbf{K}$  tiene la forma de la Ec. (1.89):

$$\mathbf{K} = [ -\mathbf{K}_p \mathbf{C} \quad \mathbf{K}_i ] \quad (1.89)$$

## 1.5. Objetivo general

Generalizar la metodología LQR para la sintonización secuencial de controladores lineales aplicados a sistemas dinámicos multivariados lineales y no lineales.

### 1.5.1. Objetivos específicos

1. Generalizar la metodología secuencial LQR para la síntesis de controladores lineales de tipo PID y orden superior.
2. Desarrollar un método de diagonalización de los controladores lineales multivariados obtenidos.
3. Generar versiones multilazo de controladores lineales multivariados existentes obtenidos a través de diferentes metodologías de sintonización.

## II.METODOLOGÍA

En esta sección se presenta el caso de estudio usado para el diseño del controlador PID, así como la metodología para añadir la acción derivativa a controladores PI existentes. Asimismo, se describe el procedimiento seguido para estudiar el efecto de las matrices de ponderación que regulan el balance entre la señal de salida y control sobre diferentes características de los controladores PID multivariados y multilazo obtenidos mediante la generalización del enfoque LQR.

### 2.1. Reseña del sistema estudiado.

El siguiente sistema lineal invariante en el tiempo puede representar un gran número de procesos de la ingeniería química equipados con un controlador lineal:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1\mathbf{w} + \mathbf{b}_2\mathbf{u} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}\mathbf{x} \quad (2.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{e} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{e} + \mathbf{K}_I\mathbf{q} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{q} = \int_0^t \mathbf{e} dt \quad (2.5)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{y} \quad (2.6)$$

Donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{c \times 1}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{c \times 1}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{o \times 1}$ ,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{o \times 1}$ ,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{o \times 1}$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{s \times 1}$ , son el estado del sistema, señal exógena, control, señal medida, error de salida, punto de ajuste y vectores de estado de control, respectivamente. Aquí  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^{n \times c}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{o \times n}$ ,  $\mathbf{d}_1 \in \mathbb{R}^{o \times m}$ ,  $\mathbf{d}_2 \in \mathbb{R}^{o \times c}$ ,  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ,  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{s \times o}$ ,  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{c \times s}$ ,  $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^{c \times o}$ ,  $\mathbf{K}_I \in \mathbb{R}^{o \times c}$  pueden representar un amplio rango de controladores lineales con acciones proporcionales, integrales y derivativas, como se muestra a continuación:

- Control de acción proporcional (P).

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{K}_I = \mathbf{0}$$

- Control de acción proporcional - integral (PI).

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\delta} = \mathbf{K}_P$$

- Control de acción proporcional-integral-derivativo con filtro (PID). Las ecuaciones (2.3) - (2.4) no permiten la representación de una función de transferencia impropia como lo es un controlador PID ideal. Por lo tanto, la estructura de un controlador PID debe ser modificada con un filtro para hacer propia la función. La representación en espacio de estados de esta estructura no es sencilla como la de un controlador P o PI, por que las ganancias del control no se encuentran contenidas en una sola matriz como  $\mathbf{K}_P$  o  $\mathbf{K}_I$ . Consideraremos la función de transferencia para un controlador PID con filtro relacionando la variable de control  $i$  con la señal de control  $j$  dada por (2.7):

$$\frac{u_i(s)}{e_j(s)} = \left( K_{Pij} + \frac{K_{Iij}}{s} + K_{Dij}s \right) \left( \frac{1}{\tau_{ij}s + 1} \right) \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) tiene la siguiente representación de forma canónica observable en el espacio de estado:

$$\frac{d\xi_{ij}}{dt} = \alpha_{ij}\xi_{ij} + \beta_{ij}e_j \quad (2.8)$$

$$u_i = \gamma_{ij}\xi_{ij} + \delta_{ij}e_j + K_{Iij}q_j \quad (2.9)$$

$$\alpha_{ij} = -\frac{1}{\tau_{ij}}; \quad \beta_{ij} = 1; \quad \gamma = \frac{K_{Pij}}{\tau} - K_{Iij} - \frac{K_{Dij}}{\tau^2}; \quad \delta_{ij} = \frac{K_{Dij}}{\tau_{ij}}$$

Los  $i \times j$  controladores pueden ser agrupados en la representación de espacio de estados dado por las ecuaciones (2.3) - (2.4) con las siguientes definiciones:

$$\boldsymbol{\alpha}_i^* = \text{diag} \left( \left[ \alpha_{i1} \quad \alpha_{i2} \quad \dots \quad \alpha_{io} \right] \right) \in \mathbb{R}^{o \times o} \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \text{diag} \left( \left[ \boldsymbol{\alpha}_1^* \quad \boldsymbol{\alpha}_2^* \quad \dots \quad \boldsymbol{\alpha}_c^* \right] \right) \in \mathbb{R}^{co \times co} \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\beta}_i^* = \text{diag} \left( \left[ \beta_{i1} \quad \beta_{i2} \quad \dots \quad \beta_{io} \right] \right) \in \mathbb{R}^{o \times o} \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\beta}^T = \left( \left[ \boldsymbol{\beta}_1^* \quad \boldsymbol{\beta}_2^* \quad \dots \quad \boldsymbol{\beta}_o^* \right] \right) \in \mathbb{R}^{o \times co} \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_i^* = \left( \left[ \gamma_{i1} \quad \gamma_{i2} \quad \dots \quad \gamma_{io} \right] \right) \in \mathbb{R}^{1 \times o} \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \text{diag} \left( \left[ \boldsymbol{\gamma}_1^* \quad \boldsymbol{\gamma}_2^* \quad \dots \quad \boldsymbol{\gamma}_o^* \right] \right) \in \mathbb{R}^{1 \times o} \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1o} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{c1} & \dots & \delta_{co} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{I11} & \dots & \mathbf{K}_{I1o} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{Ic1} & \dots & \mathbf{K}_{Ico} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

## 2.2. Lazo cerrado de controlador PID con filtro

Para realizar la representación en espacio de estados y lazo cerrado del controlador PID con filtro propuesto en la sección anterior, el siguiente lazo cerrado, cuyo desarrollo se encuentra en el anexo correspondiente.

Considere que la planta está definida por las Ecs. (2.18) - (2.19):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1\mathbf{w} + \mathbf{b}_2\mathbf{u} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}_1\mathbf{x} + \mathbf{d}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{d}_{12}\mathbf{u} \quad (2.19)$$

y el que el control lineal está definido por las Ecs. (2.20) a la (2.22):

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}e \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u} = \mathcal{C}\xi + \mathcal{D}e + \mathbf{k}_i\mathbf{q} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{y} \quad (2.22)$$

en donde se tienen las siguientes definiciones de las Ecs. (2.23) - (2.24):

$$\mathbf{q} = \int_0^t \mathbf{e} dt \quad (2.23)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{e} \quad (2.24)$$

En la Ec. (2.21),  $K_I$  contiene las ganancias integrales. El control formado por las Ecs. (2.20) a la (2.22) es capaz de representar un control lineal con acción integral completamente multivariados o multilazo. El sistema definido por las Ecs. (2.18), (2.19), (2.20), (2.21) y (2.24) acepta la siguiente representación en lazo cerrado:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbb{B}_1\mathbf{w} + \mathbb{B}_2\mathbf{r} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{y} = \mathbb{C}_1\mathbf{x} + \mathbb{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbb{D}_{12}\mathbf{r} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{u} = \mathbb{C}_3\mathbf{x} + \mathbb{D}_{31}\mathbf{w} + \mathbb{D}_{32}\mathbf{r} \quad (2.27)$$

donde la nueva variable de estado aumentado y las matrices dinámicas poseen las siguientes definiciones:

$$\mathbf{X}^T = [ \mathbf{x}^T \mid \boldsymbol{\xi}^T \mid \mathbf{q}^T ] \quad (2.28)$$

$$\Delta = [\mathbf{I}_r - \mathbf{D}_{12}\mathcal{D}]^{-1} \quad (2.29)$$

$$\nabla = (I_c - \mathcal{D}\Delta\mathbf{D}_{12}) \quad (2.30)$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{b}_2\mathcal{D}\Delta\mathbf{c}_1 & \mathbf{b}_2\nabla\mathcal{C} & \mathbf{b}_2\nabla\mathbf{K}_i \\ -\mathcal{B}\Delta\mathbf{c}_1 & \mathcal{A} - \mathcal{B}\Delta\mathbf{d}_{12}\mathcal{C} & -\mathcal{B}\Delta\mathbf{d}_{12}\mathbf{K}_i \\ -\Delta\mathbf{c}_1 & -\Delta\mathbf{d}_{12}\mathcal{C} & -\Delta\mathbf{d}_{12}\mathbf{K}_i \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\mathbb{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\mathcal{D}\Delta\mathbf{d}_{11} \\ -\mathcal{B}\Delta\mathbf{d}_{11} \\ -\Delta\mathbf{d}_{11} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbb{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \Delta \mathcal{D} \\ \mathcal{B} - \mathcal{B} \Delta \mathbf{d}_{12} \mathcal{D} \\ (\mathbf{I}_r - \Delta \mathbf{d}_{12} \mathcal{D}) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbb{C}_1 = [ \Delta \mathbf{c}_1 \quad \Delta \mathbf{d}_{12} \mathcal{C} \quad \Delta \mathbf{d}_{12} \mathbf{K}_i ] \quad (2.34)$$

$$\mathbb{D}_{11} = [\Delta \mathbf{d}_{11}] [\mathbf{w}] \quad (2.35)$$

$$\mathbb{D}_{12} = [\Delta \mathbf{d}_{12} \mathcal{D}] [\mathbf{r}] \quad (2.36)$$

$$\mathbb{C}_3 = [ -\mathcal{D} \Delta \mathbf{c}_1 \quad \nabla \mathcal{C} \quad \nabla \mathbf{K}_i ] \quad (2.37)$$

$$\mathbb{D}_{31} = [-\mathcal{D} \Delta \mathbf{d}_{11}] [\mathbf{w}] \quad (2.38)$$

$$\mathbb{D}_{32} = [\nabla \mathcal{D}] [\mathbf{r}] \quad (2.39)$$

## 2.3. Controladores PID vía LQR

### 2.3.1. Síntesis de la acción derivativa vía LQR

Considerando el siguiente sistema linear invariable en el tiempo de las ecuaciones (2.1)-(2.2), equipado con un controlador de retroalimentación de estado completo (2.40)

$$\mathbf{U} = -\mathbf{K}\mathbf{X} \quad (2.40)$$

Donde  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ ,  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{S \times 1}$ ,  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{C \times 1}$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{O \times 1}$  son el estado del sistema, señal exógena, señal de control y señal de salida medida, respectivamente. Los coeficientes de sistema tiene el tamaño de  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{N \times E}$ ,  $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{N \times C}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{O \times N}$ ,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{C \times O}$ . La teoría de LQR se puede aplicar para obtener el controlador de retroalimentación de estado completo óptimo descrito por ecuación (2.43) minimizando la función de costo de horizonte infinito.

$$J = \int_0^{\infty} \left( \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{R}} \mathbf{u} \right) dt \quad (2.41)$$

donde  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  es una matriz positiva definida o positiva semidefinida  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{C \times C}$  es una matriz definida positiva. Las matrices  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  modifican la compensación entre el error permisible y el tamaño de las señales de control, respectivamente. Las ganancias óptimas de retroalimentación se calculan como:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \quad (2.42)$$

donde  $\mathbf{P}$  se obtiene mediante la solución de la ecuación algebraica de Riccati:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (2.43)$$

(Estévez Sánchez et al., 2017) Propuso que la acción integral podría aplicarse secuencialmente a una planta ya equipada con controlador P utilizando la metodología LQR. Para lograr este propósito, la planta tiene que estar en lazo cerrado con las ganancias proporcionales, pero está en circuito abierto con la acción integral. En este trabajo, se explora la misma idea para la síntesis de la acción derivada; el planta estará en lazo cerrado con ganancias de PI, mientras que la acción derivada estará en lazo cerrado. Así, se propone la siguiente representación del espacio de estados:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{u}; & \mathbf{W} &= \mathbf{w}; & \hat{\mathbf{Q}} &= \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}; \\ \hat{\mathbf{R}} &= \mathbf{R}; & \mathbf{Y} &= \mathbf{y}; & \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a} - \mathbf{b}_2 \mathbf{K}_P \mathbf{c} & \mathbf{b}_2 \mathbf{K}_I \\ -\mathbf{c} & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I}_r + \mathbf{c} \mathbf{b}_2 \mathbf{K}_D]^{-1} [-\mathbf{c} \mathbf{a} + \mathbf{c} \mathbf{b}_2 \mathbf{K}_P - \mathbf{c} \mathbf{b}_2 \mathbf{K}_I]; \quad \mathbf{K} = -\mathbf{K}_P \mathbf{C};$$

Sin embargo, a diferencia de la síntesis de la acción integral, en este caso la matriz  $\mathbf{C}$  de lazo abierto también contiene las ganancias derivadas. Por lo tanto, se propone el siguiente procedimiento iterativo para lograr la síntesis de la acción derivada:

1. Ensamblar matriz  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}_2$ .
2. Inicializar  $\mathbf{K}_D = \mathbf{0}$ .
3. Ensamblar  $\mathbf{C}$  y  $\hat{\mathbf{Q}}$ .
4. Estimar el valor de  $\mathbf{K}$  con la Ec. (2.42) y después  $\mathbf{K}_D$  de la definición dada anteriormente, como  $\mathbf{K}_D = -\mathbf{K}\mathbf{C}^{-1}$ .
5. Repetir los pasos (3)-(5) hasta que  $\mathbf{K}_D$  no tenga cambios significativos entre las iteraciones.

Las versiones multilazo de los controladores PID centralizados pueden ser obtenidos de forma secuencial. Las ganancias PI pueden diagonalizarse siguiendo la metodología propuesta por (Estévez Sánchez et al., 2017), sin embargo, las ganancias derivativas se diagonalizan como se describe a continuación:

1. Ensamblar matriz  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}_2$ .
2. Inicializar  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ .
3. Ensamblar  $\mathbf{C}$  y  $\hat{\mathbf{Q}}$ .
4. Resolver Ec. (2.43) para obtener  $\mathbf{P}$  y estimar  $\mathbf{K}$  con la Ec. (2.42).
5. Calcular  $\mathbf{K}_D$  de la definición dada anteriormente, como  $\mathbf{K}_D = -\mathbf{K}\mathbf{C}^{-1}$ .
6. Obtener la matriz de descomposición de Jordan de  $\mathbf{K}_D$ , como  $\mathbf{K}_D = -\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$  donde  $\mathbf{D}$  Y  $\mathbf{V}$  contienen los eigenvalores y eigenvectores de  $\mathbf{K}_D$ .
7. Establecer  $\mathbf{K}_D = \mathbf{D}$ .
8. Calcular  $\mathbf{K}_D$  de la definición dada anteriormente, como  $\mathbf{K}_D = -\mathbf{K}\mathbf{C}^{-1}$ .
9. Una nueva estimación de  $\hat{\mathbf{R}}$  de la Ec. (2.42) como  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \mathbf{K}^{-1}$ .
10. Repetir los pasos (3)-(5) hasta que  $\mathbf{K}_D$  no tenga cambios significativos entre las iteraciones.

## 2.3.2. Casos de estudio

### 2.3.2.1. Columna de destilación de Ogunnaike y Ray

En este trabajo se consideró el sistema de la columna de destilación de Ogunnaike y Ray, la cual está construida de cobre con 19 platos, de 12 pulgadas de diámetro con variaciones tanto en la alimentación como en la ubicación de los puntos de extracción lateral.

Las temperaturas se midieron en cada plato, así como en el reflujo, alimentación y productos. Las composiciones pueden determinarse a través de varios sensores en línea (densitometría, refractometría, etc.) (Ogunnaike et al., 1983).

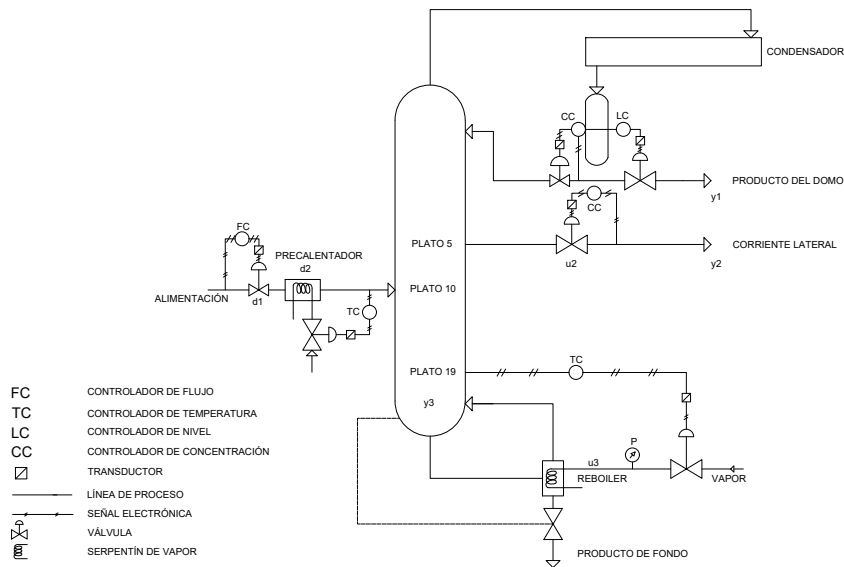


Figura 2.1. Diagrama esquemático de la columna de destilación de Ogunnaike y Ray

Para el sistema binario etanol - agua, el modelo de la columna expresado en la Ec. (2.44), las salidas tienen las siguientes definiciones:

- $y_1$  corresponde a la fracción mol del etanol en el destilado.
- $y_2$  corresponde a la fracción mol del etanol en la corriente de descarga lateral.
- $y_3$  es la temperatura del plato 19 de la columna de destilación, el cual corresponde a la temperatura de los fondos.

Las entradas son:

- $u_1$  la corriente de reflujo.
- $u_2$  El flujo de la descarga lateral.
- $u_3$  la presión del vapor en el calentador.

El sistema puede sufrir perturbaciones en:

- $d_1$  el flujo de la alimentación.
- $d_2$  la temperatura de la alimentación.

El sistema de la columna de destilación de Ogunnaike y Ray tiene la siguiente representación en el dominio de Laplace (Ogunnaike et al., 1983):

$$\mathbf{G}(S) = \begin{bmatrix} \frac{0.66e^{-2.6s}}{6.7s+1} & \frac{-0.61e^{-3.5s}}{8.64s+1} & \frac{-0.0049e^{-s}}{9.06s+1} \\ \frac{1.11e^{-6.5s}}{3.25s+1} & \frac{-2.36e^{-3s}}{5.0s+1} & \frac{-0.012e^{-1.2s}}{7.09s+1} \\ \frac{-34.68e^{-9.2s}}{8.15s+1} & \frac{46.2e^{-9.4s}}{10.9s+1} & \frac{0.87(11.61s+1)e^{-s}}{(3.89s+1)(18.8s+1)} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

La matriz de transferencia expresada en la Ec. (2.44) se escribió en espacio de estados, aproximando los retardos en series de primer orden. En este sistema  $x \in \mathbb{R}^{25 \times 1}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  y los términos distintos a cero de las matrices de estado  $A = \phi^{-1}a$  y  $B_2 = \phi^{-1}b$  son:  $\phi_{1,1} = \phi_{2,2} = 1.3$ ,  $\phi_{3,3} = 6.7$ ,  $\phi_{4,4} = \phi_{5,5} = 1.95$ ,  $\phi_{6,6} = 3.25$ ,  $\phi_{7,7} = \phi_{8,8} = 1.35$ ,  $\phi_{9,9} = 8.15$ ,  $\phi_{10,10} = \phi_{11,11} = 1.5$ ,  $\phi_{12,12} = 5$ ,  $\phi_{13,13} = \phi_{19,19} = \phi_{20,20} = 0.5$ ,  $\phi_{14,14} = 8.64$ ,  $\phi_{15,15} = 2$ ,  $\phi_{16,16} = \phi_{17,17} = 1.95$ ,  $\phi_{18,18} = 10.9$ ,  $\phi_{21,21} = 9.06$ ,  $\phi_{22,22} = 3.89$ ,  $\phi_{23,23} = 1$ ,  $\phi_{24,24} = 0.2$ ,  $\phi_{25,25} = 7.09$ ,  $a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = a_{4,4} = a_{5,5} = a_{6,6} = a_{7,7} = a_{8,8} = a_{9,9} = a_{10,10} = a_{11,11} = a_{12,12} = a_{13,13} = a_{14,14} = a_{15,15} = a_{16,16} = a_{17,17} = a_{18,18} = a_{19,19} = a_{20,20} = a_{21,21} = a_{22,22} = a_{24,24} = a_{25,25} = -1$ ,  $a_{2,1} = a_{4,2} = a_{5,4} = a_{7,5} = a_{8,7} = a_{11,10} = a_{13,11} = a_{15,13} = a_{16,15} = a_{17,16} = a_{20,19} = a_{23,22} = a_{24,20} = 1$ ,  $a_{3,2} = 0.66$ ,  $a_{6,5} = 1.11$ ,  $a_{9,8} = -34.68$ ,  $a_{12,11} = -2.36$ ,  $a_{14,13} = -0.61$ ,  $a_{18,17} = 46.2$ ,  $a_{21,20} = -0.0049$ ,  $a_{22,20} = 0.87$ ,  $a_{23,23} = -\frac{1}{18.8}$ ,  $a_{25,24} = -0.012$ ,  $b_{1,1} = b_{10,2} = b_{19,3} = 1$ ,  $c_{1,3} = c_{1,14} = c_{1,21} = c_{2,6} = c_{2,12} = c_{2,25} = c_{3,9} = c_{3,18} = 1$ ,  $c_{3,22} = \frac{11.61}{18.8}$ ,  $c_{3,23} = -\frac{1}{18.8} - \left(\frac{1}{18.8}\right) \left(\frac{11.61}{18.8}\right)$ .

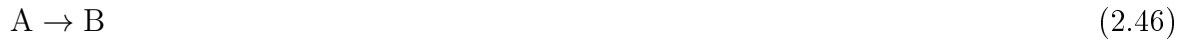
Para evaluar las propiedades de robustez del sistema de control, a todos los parámetros de la matriz de transferencia de la Ec. (2.44) se les aplicó un aumento o una disminución aleatoria del 20 % de sus valores originales, generando el modelo perturbado (2.45):

$$\mathbf{G}(S) = \begin{bmatrix} \frac{0.528e^{-3.12s}}{5.36s+1} & \frac{-0.732e^{-4.2s}}{10.368s+1} & \frac{-0.00588e^{-0.8s}}{10.872s+1} \\ \frac{0.888e^{-7.8s}}{3.9s+1} & \frac{-2.832e^{-2.4s}}{4s+1} & \frac{-0.0144e^{-0.96s}}{5.672s+1} \\ \frac{-27.744e^{-11.04s}}{6.52s+1} & \frac{55.44e^{-11.28s}}{8.72s+1} & \frac{1.044(9.288s+1)e^{-0.8s}}{(3.112s+1)(22.56s+1)} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

### 2.3.2.2. Reactor CSTR no lineal

Se considero el reactor CSTR no lineal el cual se muestra en la Figura 3.2 reportado por (Cheng-Liang Chen, 2002). En este reactor se considera ideal y se lleva a cabo la

reacción:



La cual es exotérmica de primer orden, irreversible. Se considera que en la alimentación fresca ingresa al reactor A puro, combinándose después con una corriente de recirculado. Cabe mencionar que este reactor presenta múltiples estados estacionarios, lo cual añade complejidad al mismo (Uppal & Ray, 1974).

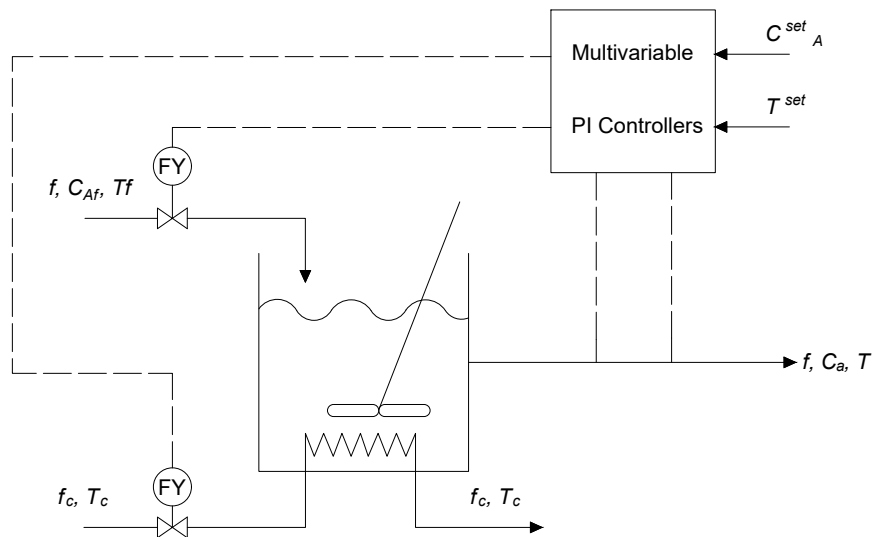


Figura 2.2. Diagrama esquemático del reactor CSTR no lineal

En el reactor,  $F$  es el flujo de alimentación,  $F_c$  es el flujo de enfriamiento, los cuales son utilizados para controlar  $C_A$  y la temperatura del reactor a las salida. En la Tabla 2.1 se muestran los significados físicos de todas las notaciones y sus valores nominales (Cheng-Liang Chen, 2002). La alimentación se encuentra acotada en los límites de

$60 \leq F \leq 140$  y  $63.41 \leq F_c \leq 143.41$ . El comportamiento del reactor CSTR no lineal, se encuentra descrito en las Ecs. (2.47) - (2.48).

Tabla 2.1. Condiciones de operación nominal del reactor CSTR no lineal

	Nomenclatura	valor	unidades
Concentración del reactivo	$C_A$	0.1	mol/l
Temperatura del reactor	$T$	438.54	K
Flujo del refrigerante	$f_c$	103.41	l/mol
Flujo del reactor	$f$	100	l/mol
Concentración de la alimentación	$C_{Af}$	1	mol/l
Temperatura de alimentación	$T_f$	350	K
Temperatura promedio de la alimentación	$T_{cf}$	350	K
Volumen del reactor	$V$	100	l
Coefficiente de transferencia de calor	$h_A$	$7 \times 10^5$	cal/min · K
Velocidad de reacción	$k_0$	$7.2 \times 10^{10}$	l/min
Termino de energía de activación	$E/R$	$10^4$	K
Calor de reacción	$\Delta H$	$-2 \times 10^5$	cal/mol
Densidades de los líquidos	$\rho, \rho_c$	$10^3$	g/l
Calor específicos	$C_p, C_{pc}$	1	cal/g · K

$$\frac{dC}{dt} = \frac{F}{V} (C_f - C) - k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) C \quad (2.47)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F}{V} (T_f - T) + \frac{(-\Delta H)}{\rho C_p} k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) C + \frac{\rho_c C_{pc} F_c}{\rho C_p V} \left(1 - \exp\left(\frac{-h}{\rho_c C_{pc} F_c}\right)\right) (T_f - T) \quad (2.48)$$

Las Ecs. (2.47) - (2.48) tienen la siguiente representación en espacio de estados, mostrado en las Ecs. (2.49) - (2.50):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.998 & -4.67 \times 10^{-2} \\ 1799.6 & 7.325 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 9 \times 10^{-3} & 0 \\ -8.854 \times 10^{-1} & -8.775 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

donde  $x_1 = C - C_{ss}$ ,  $x_2 = T - T_{ss}$ ,  $w_1 = C_f - C_{fss}$ ,  $w_2 = T - T_{fss}$ ,  $u_1 = Q - Q_{ss}$ ,  $u_2 = Q_c - Q_{css}$ ,  $y_1 = x_1$  y  $y_2 = x_2$ .

La degradación o mejora que sufrió cada controlador entre el sistema original y el perturbado se calculó a partir de la diferencia relativa de los índices de funcionamiento cuadrático entre ambos sistemas por medio de las Ecs. (2.51) - (2.52):

$$e(I_y) = 100 \times \frac{(I_y)_{perturbado} - (I_y)_{original}}{(I_y)_{original}} \quad (2.51)$$

$$e(I_u) = 100 \times \frac{(I_u)_{perturbado} - (I_u)_{original}}{(I_u)_{original}} \quad (2.52)$$

### 2.3.3. Análisis de las matrices de ponderación en la síntesis de controladores PID

En este trabajo, los controladores se obtienen de las combinaciones resultantes de explorar los elementos diagonales de las matrices de ponderación  $\mathbf{R}$  en un intervalo propuesto. En el caso de la columna de destilación OR, los controladores proporcionales multivariados y multilazo se evaluaron explorando los elementos diagonales de la matriz  $\mathbf{R}$  en el intervalo  $-2 \leq \log(r_{ii}) \leq 3 (i = 1, 2)$ . La acción integral se obtuvo explorando los elementos de  $\mathbf{R}$  en el rango  $-1 \leq \log(r_{ii}) \leq 6 (i = 1, 2)$ . La acción derivativa se

obtuvo explorando los elementos de  $\mathbf{R}$  en el rango  $-1 \leq \log(r_{ii}) \leq 3 (i = 1, 2)$ . La matriz  $\mathbf{Q}$  se definió como se muestra a continuación para para caso:

$$\begin{array}{ccc} \text{Proporcional} & \text{Integral} & \text{Derivativo} \\ \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} & \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para el caso del reactor CSTR no lineal, se obtuvieron controladores de tipo PI por lo cual solo se debe hacer la síntesis derivativa, haciendo un barrido de  $\mathbf{R}$  en el intervalo  $-8 \leq \log(r_{ii}) \leq 8 (i = 1, 2)$  definiendo  $\mathbf{Q}$  como se muestra a continuación:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1E5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.3.4. Caracterización de controladores PID

Una vez determinada la importancia relativa de cada salida con  $\mathbf{Q}$ , todos los controladores son óptimos para el rango seleccionado de la matriz de control  $\mathbf{R}$ , lo que quiere decir, que cada uno de ellos minimiza los índices de funcionamiento  $I_y$  e  $I_u$ .

Sin embargo, no todos los controladores, aun que sean óptimos, no tienen otras características requeridas por el diseñador tales como un balance adecuado entre seguir una referencia, rechazar una perturbación o hacer el menor uso de energía.

Por lo tanto, para refinar la sintonización vía LQR, se utilizó la representación en espacio de estados y lazo cerrado descrito en las Ecs. (2.18) a la (2.39). Para dicho sistema, se evaluaron los siguientes criterios:

1. Los índices de funcionamiento cuadrático  $I_y$  e  $I_u$  para el controlador PID considerando las expresiones de las Tablas 1.1 a 1.3, reportados por (Vargas González et al., 2013), (M.A. Garcia-Alvarado, 2010; Vargas González et al., 2013)

y (Estévez-Sánchez et al., 2017). Los índices de funcionamiento cuadrático  $I_y$  e  $I_u$  fueron evaluados para el seguimiento de una referencia para diferentes funciones de esfuerzo donde cada elemento se evaluó en  $\mathbf{k}_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  perteneciente al conjunto  $\{-1, 0, 1\}$ . Un total de 13 cambios de referencia (de 27 combinaciones posibles) fueron obtenidas de esta forma, sin considerar  $\mathbf{k}_2 = 0$  en las funciones de entrada. Se propone un tiempo de integración de 200 minutos para evaluar las integrales proporcionales del controlador.

2. La abscisa espectral o máxima parte real de los valores propios de la matriz característica en lazo cerrado  $[\lambda(\mathbb{A})]$ , la cual mide la distancia relativa a la inestabilidad del sistema, donde el sistema es estable si  $\alpha < 0$ , la cual está definida por la Ec. (2.53):

$$\alpha = \max(\operatorname{Re}(\lambda(A))) \quad (2.53)$$

3. La insensibilidad a la incertidumbre del modelo de los sistemas de control se cuantificó por el índice de robustez  $\phi_{\max}$  propuesto por (Ruiz López et al., 2006), expresado en la Ec. (2.54):

$$\phi_{\max} = \left( \left| \frac{\operatorname{Im}(\lambda(\mathbb{A}))}{\operatorname{Re}(\lambda(\mathbb{A}))} \right| \right) \quad (2.54)$$

## 2.4. Herramientas de cómputo

La implementación de la metodología LQR; el cálculo de los índices de funcionamiento cuadrático ( $I_y$  y  $I_u$ ), de la abscisa espectral ( $\alpha$ ), de las normas  $H_\infty$  y del índice

de robustez ( $\phi_{max}$ ) y las simulaciones se realizaron con el programa Matlab R2017a y sus herramientas adicionales como Simulink (MathWorks Inc., Natick, MA, USA).

# III.RESULTADOS

## 3.1. Re

### 3.1.1. Desempeño de los controladores PID multivariados vía LQR

#### 3.1.1.1. Columna de destilación de Ogunnaike y Ray

Los índices cuadráticos de desempeño  $I_{y-s}^s$  e  $I_{u-s}^s$  obtenidos durante la síntesis de la acción proporcional se encontraron en los rangos de 8685 a  $1.23E5$  y  $2.90E4$  a  $3.04E6$  respectivamente. el control de acción proporcional seleccionado en esta etapa del proceso se obtuvo con las siguientes ponderaciones:  $\{\log_{10}r_{11}, \log_{10}r_{11}, \log_{10}r_{11}\} = \{1.1, 1.9, -2\}$  con los correspondientes índices de desempeño  $\{I_{y-s}^s, I_{u-s}^s, \phi\} = \{1.80E4, 8.56E5, 2.963\}$ .

A este controlador proporcional se le adicionó la acción integral, resultando en una reducción en los rangos del índice cuadrático del error ( $243.1 \leq I_{y-s}^s \leq 299.9$ ) y la señal de control ( $2.76E5 \leq I_{u-s}^s \leq 4.12E5$ ). El control PI obtenido en esta etapa tiene los elementos de la matriz de control:  $\{\log_{10}r_{11}, \log_{10}r_{11}, \log_{10}r_{11}\} = \{3.6, 4.1, -0.1\}$  con los correspondientes índices de desempeño  $\{I_{y-s}^s, I_{u-s}^s, \phi\} = \{297.6, 3.22E5, 3.819\}$ .

Finalmente, durante la síntesis de la acción derivativa quedaron los índices cuadráticos de desempeño  $I_{y-s}^s$  e  $I_{u-s}^s$  quedaron en los rangos de 258.3 a 280.4 y  $2.78E5$  a  $4.90E5$  respectivamente. La acción derivativa seleccionada en esta etapa del proceso se obtuvo con las siguientes ponderaciones:  $\{\log_{10}r_{11}, \log_{10}r_{11}, \log_{10}r_{11}\} = \{1.1, 0.9, -1.7\}$  con los correspondientes índices de desempeño  $\{I_{y-s}^s, I_{u-s}^s, \phi\} = \{271.3, 3.26E5, 2.037\}$ .

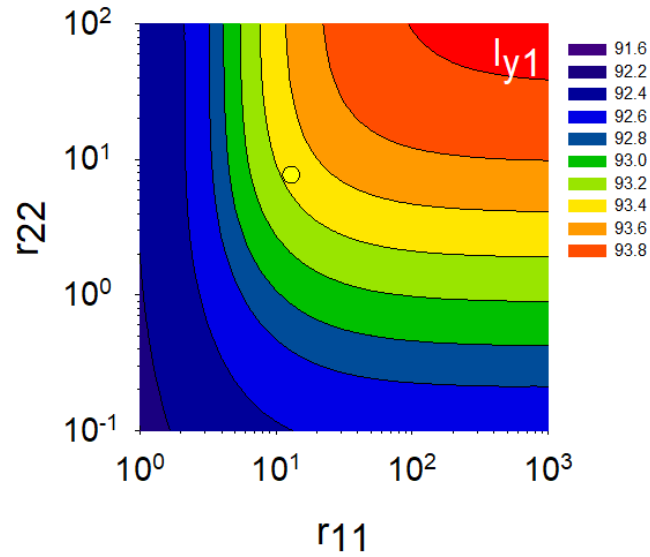


Figura 3.1. Efecto de la selección de pesos de la matriz de control  $\mathbf{R}$  en  $I_{y1-s}^s$  durante la síntesis de la acción derivada a través del enfoque LQR para la columna de destilación Ogunnaike.

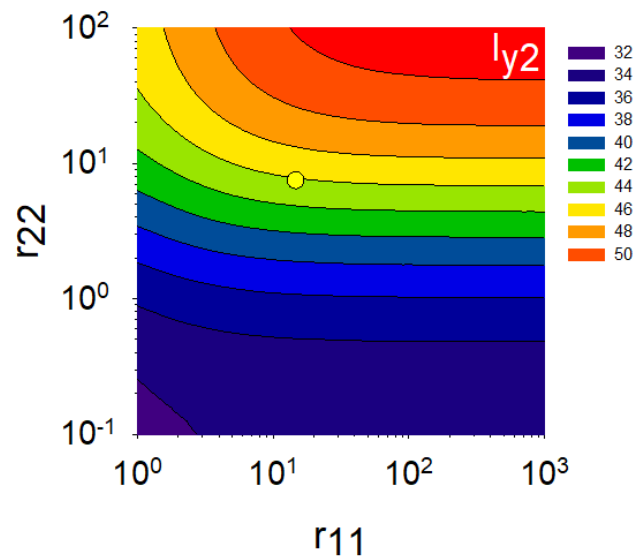


Figura 3.2. Efecto de la selección de pesos de la matriz de control  $\mathbf{R}$  en  $I_{y2-s}^s$  durante la síntesis de la acción derivada a través del enfoque LQR para la columna de destilación Ogunnaike.

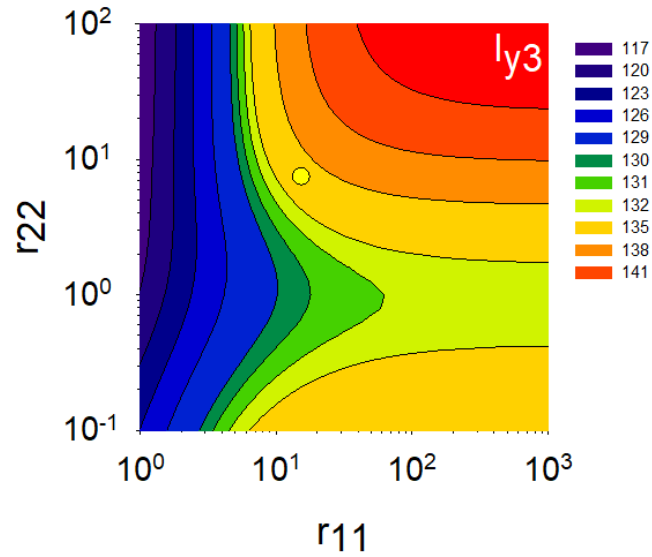


Figura 3.3. Efecto de la selección de pesos de la matriz de control  $\mathbf{R}$  en  $I_{y_3-s}^s$  durante la síntesis de la acción derivada a través del enfoque LQR para la columna de destilación Ogunnaike.

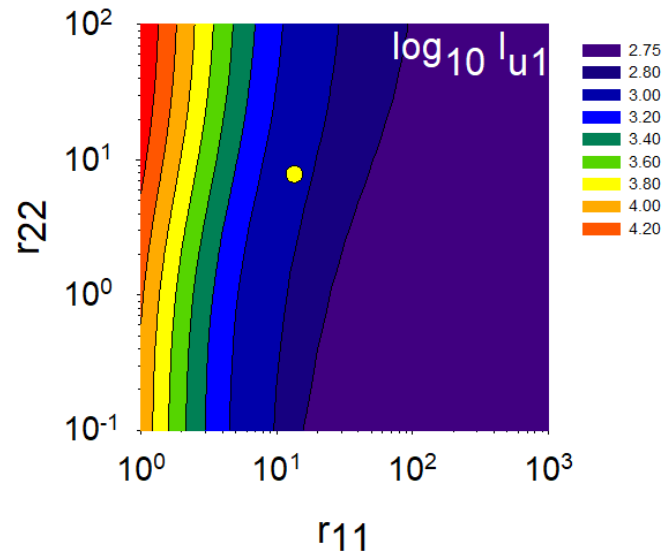


Figura 3.4. Efecto de la selección de pesos de la matriz de control  $\mathbf{R}$  en  $I_{u_1-s}^s$  durante la síntesis de la acción derivada a través del enfoque LQR para la columna de destilación Ogunnaike.

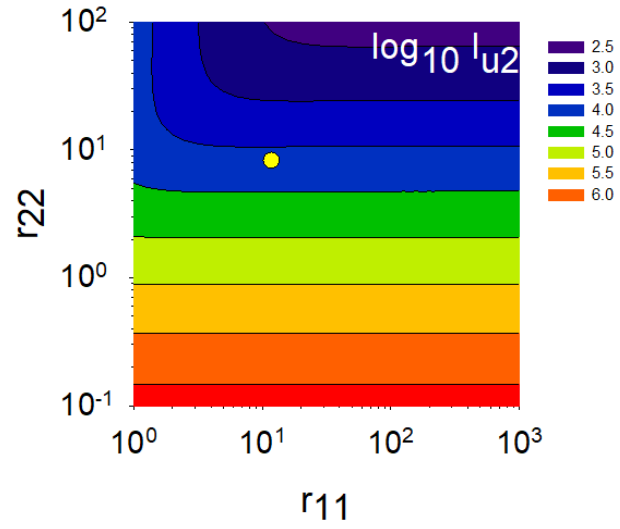


Figura 3.5. Efecto de la selección de pesos de la matriz de control  $\mathbf{R}$  en  $I_{u_2-s}^s$  durante la síntesis de la acción derivada a través del enfoque LQR para la columna de destilación Ogunnaike.

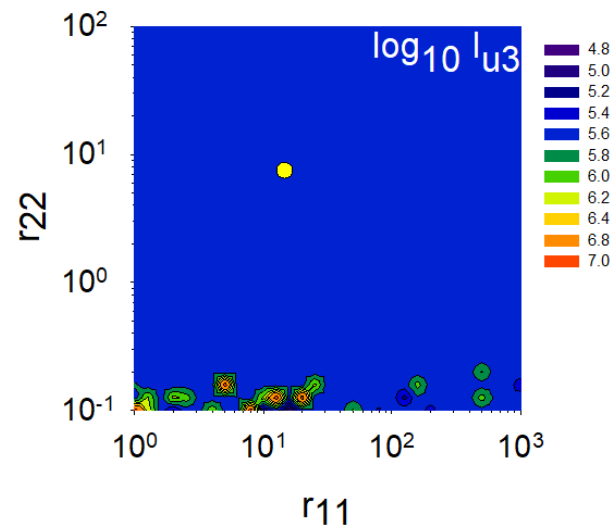


Figura 3.6. Efecto de la selección de pesos de la matriz de control  $\mathbf{R}$  en  $I_{u_3-s}^s$  durante la síntesis de la acción derivada a través del enfoque LQR para la columna de destilación Ogunnaike.

El efecto de la selección de los pesos de la matriz de control  $\mathbf{R}$  en los índices  $I_{y-s}^s$  e  $I_{u-s}^s$  durante la síntesis de la acción derivativa se muestran en las figuras 3.1 - 3.3 y 3.4 - 3.6 respectivamente, donde los índices totales han sido separados para poder observar la contribución de cada uno.

Las figuras muestran principalmente dos características:

1. Se minimiza en diferentes direcciones.
2. Están en diferentes rangos de valores.

El desempeño de los controladores sintetizados por la vía LQR dependen de la selección de los pesos de las matrices que determinan el balance adecuado entre el índice cuadrático del error y el de la señal de control; por lo tanto, el procedimiento de síntesis representa un problema complejo de optimización multiobjetivo que requiere metodologías especiales para refinar aún más las características de control como se muestra en algunos estudios (Das et al., 2015).

Tabla 3.1. Resumen de los índices de desempeño cuadrático ( $I_{y-s}^s$  e  $I_{u-s}^s$ ) para el sistema de la columna de OR.<sup>1</sup>

Control	$I_{y1-s}^s$	$I_{y2-s}^s$	$I_{y3-s}^s \times 10^{-3}$	$I_{u1-s}^s$	$I_{u2-s}^s$	$I_{u3-s}^s \times 10^{-5}$	$\phi$
WI	57.41/- <sup>2</sup>	84.22/- <sup>2</sup>	4.679/- <sup>2</sup>	1.77E4/- <sup>2</sup>	2.70E4/- <sup>2</sup>	101.2/- <sup>2</sup>	5.105
VU	50.78/57.61	180.8/96.87	6.867/7.436	187.0/1364	127.6/390.9	4.085/7.020	3.378
KO	225.0/271.1	103.5/68.48	1.560/1.556	1924/2118	529.8/957.0	7.232/12.79	1.237
XI	83.05/107.3	116.2/189.6	29.45/61.16	246.5/1357	67.98/325.3	1.412/3.734	1.239
DH	55.57/71.52	103.8/192.1	52.18/70.57	44.60/1365	18.83/251.8	1.415/3.396	1.197
LQR	96.03/103.5	62.55/38.23	1.070/1.633	572.5/1470	676.7/500.3	5.527/8.262	2.037

<sup>1</sup>Los índices fueron calculados con el sistema nominal/perturbado.

<sup>2</sup> Proceso inestable

Los índices cuadráticos ( $I_{y-s}^s$  e  $I_{u-s}^s$ ) obtenidos con el controlador LQR, así como los ajustes de PI y PID reportados en la literatura, se muestran en la Tabla 3.1. Los

índices  $I_{y-s}^s = 271.36$  e  $I_{u-s}^s = 3.26E5$  obtenidos con el modelo de espacio de estados y las soluciones analíticas se desglosan como  $\{I_{y1-s}^s, I_{y2-s}^s, I_{y3-s}^s\} = \{94.25, 43.98, 133.2\}$   $\{I_{u1-s}^s, I_{u2-s}^s, I_{u3-s}^s\} = \{718.3, 4767, 3.20E5\}$  para cada salida y variable de control, respectivamente. Estos índices se calculan como  $\{I_{y1-s}^s, I_{y2-s}^s, I_{y3-s}^s\} = \{96.03, 62.55, 1070\}$  y  $\{I_{u1-s}^s, I_{u2-s}^s, I_{u3-s}^s\} = \{572.5, 676.7, 5.52E5\}$  cuando se usa el modelo de transferencia de la matriz original y la integración numérica de los resultados de la simulación (valores de la izquierda en la Tabla 3.1).

Tabla 3.2. Criterio de robustez para los diferentes controles para la columna de destilación de OR.

Ganancias	WI	VU	KO	XI	DH	LQR
$k_{P1,1}$	0.980	2.250	0.318	1.226	1.521	0.967
$k_{P1,2}$	-0.698	0	0	-0.076	-0.291	0.337
$k_{P1,3}$	2.10E-2	0	0	1.0E-3	5.0E-3	8.0E-3
$k_{P2,1}$	0.351	0	0	0.575	0.591	-4.0E-3
$k_{P2,2}$	-0.638	-0.49	-0.191	-0.221	-0.386	-0.444
$k_{P2,3}$	-2.0E-2	0	0	4.70E-4	-1.0E-3	-6.0E-3
$k_{P3,1}$	0.637	0	0	61.10	29.22	-3.764
$k_{P3,2}$	-8.20E-2	0	0	13.94	8.928	-8.831
$k_{P3,3}$	4.921	4.830	2.549	2.834	0.841	8.156
$k_{I1,1}$	0.350	0.316	5.70E-2	0.183	0.380	0.153
$k_{I1,2}$	-0.388	0	0	-2.30E-2	-7.20E-2	3.80E-2
$k_{I1,3}$	-9.0E-3	0	0	2.08E-4	1.0E-3	-2.03E-4
$k_{I2,1}$	0.209	0	0	0.066	0.147	2.10E-2
$k_{I2,2}$	-0.478	-7.60E-2	-4.70E-2	-4.40E-2	-9.60E-2	-1.086
$k_{I2,3}$	-1.20E-2	0	0	4.31E-5	-3.0E-4	-1.0E-3
$k_{I3,1}$	2.549	0	0	6.744	7.306	0.144
$k_{I3,2}$	-3.582	0	0	1.966	2.232	-0.386
$k_{I3,3}$	-1.20E-2	1.553	0.796	0.229	0.210	3.545
$k_{D1,1}$	1.566	5.805	6.30E-2	0	0	0.177
$k_{D1,2}$	-0.821	0	0	0	0	8.0E-2
$k_{D1,3}$	-2.0E-2	0	0	0	0	5.0E-3
$k_{D2,1}$	-1.571	0	0	0	0	0.322
$k_{D2,2}$	-1.316	-1.651	-0.159	0	0	-0.979
$k_{D2,3}$	3.0E-3	0	0	0	0	-1.40E-2
$k_{D3,1}$	-0.710	0	0	0	0	-0.703
$k_{D3,2}$	-0.889	0	0	0	0	-1.365
$k_{D3,3}$	4.160	49.07	0.159	0	0	3.990
$\tau_{1,1}$	-	2.58	-	-	-	-
$\tau_{1,2}$	-	0	-	-	-	-
$\tau_{1,3}$	-	0	-	-	-	-
$\tau_{2,1}$	-	0	-	-	-	-
$\tau_{2,2}$	-	3.37	-	-	-	-
$\tau_{2,3}$	-	0	-	-	-	-
$\tau_{3,1}$	-	0	-	-	-	-
$\tau_{F3,2}$	-	0	-	-	-	-
$\tau_{3,3}$	-	10.16	-	-	-	-

Las diferencias entre los índices calculados con soluciones analíticas y numéricas surgen porque los retardos del proceso se aproximan en la representación del espacio de estados utilizando las series de Taylor. Para la primera salida, el control WI exhibe el mejor rendimiento (valor más bajo) y el control LQR propuesto se ubica en el quinto lugar; sin embargo, el controlador propuesto es el mejor clasificado para la segunda y tercera salida, mientras que exhibe un uso moderado de las señales de control. La Tabla 3.1 muestra el índice  $\phi$  que proporciona una medida de las propiedades de robustez de los sistemas de control, a pesar del hecho de que esto se calcula para la representación aproximada del espacio de estado. Cuanto menor sea el valor  $\phi$ , más insensible será el sistema de control para modelar la incertidumbre (Ruiz López et al., 2006). En este caso, el controlador WI exhibió el valor  $\phi$  más alto entre todas las configuraciones probadas. Como resultado, estas configuraciones fueron las menos robustas, y no lograron estabilizar el modelo perturbado, incluso si el controlador WI logró un seguimiento de referencia rápido (valores  $I_{y-s}^s$  bajos) para el sistema nominal. El rendimiento de los controles XI y DH (ambas configuraciones centralizadas PI) se degradó en términos de  $I_{y-s}^s$  e  $I_{u-s}^s$  para todas las variables (los índices se hacen más grandes). El controlador VU degradó cinco de los seis índices en un modelo perturbado, mientras que los controladores restantes (KO y LQR) solo degradaron cuatro índices. Por lo tanto, el controlador LQR propuesto se equilibra en términos de seguimiento de referencia rápido, bajo uso de las señales de control y propiedades de robustez. En las Figuras 3.7 - 3.12 se muestra una comparación de los controladores seleccionados durante la simulación para el sistema nominal.

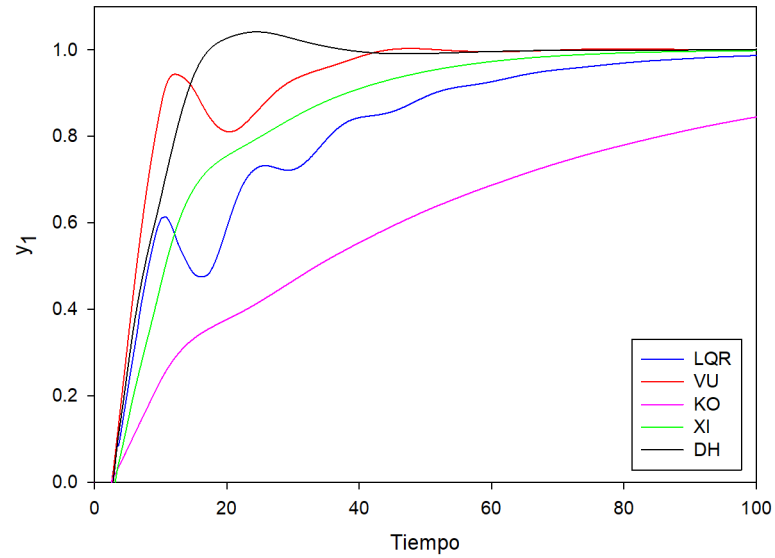


Figura 3.7. Comportamiento de la respuesta  $y_1$  de la columna de destilación de OR ante un cambio de referencia unitario en la primer y tercer salida.

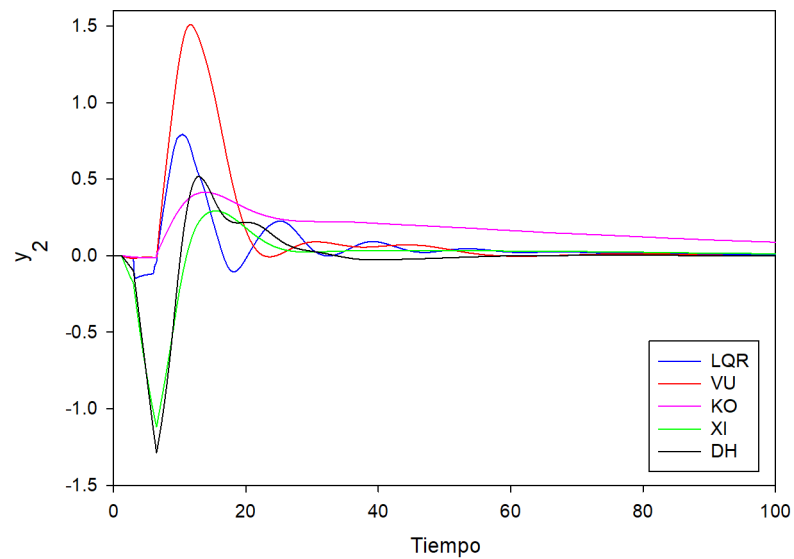


Figura 3.8. Comportamiento de la respuesta  $y_2$  de la columna de destilación de OR ante un cambio de referencia unitario en la primer salida.

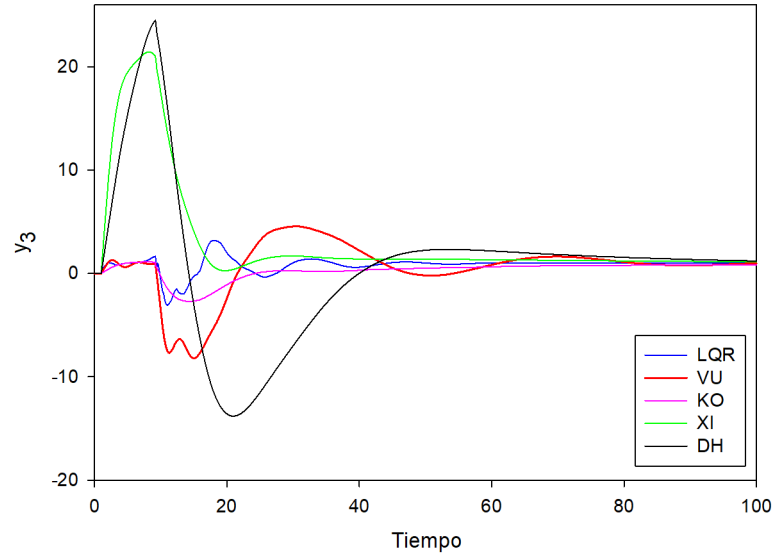


Figura 3.9. Comportamiento de la respuesta  $y_3$  de la columna de destilación de OR ante un cambio de referencia unitario en la primer salida.

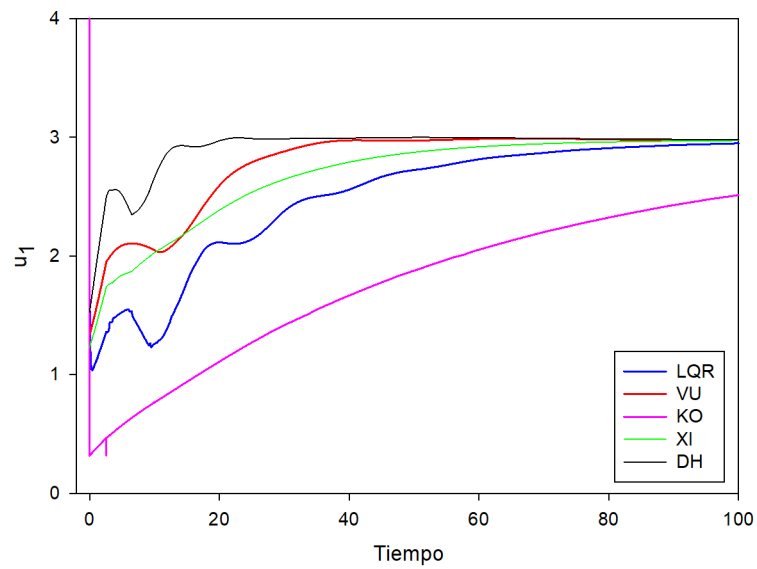


Figura 3.10. Comportamiento de la acción de control  $u_1$  de la columna de destilación de OR ante un cambio de referencia unitario en la primer salida.

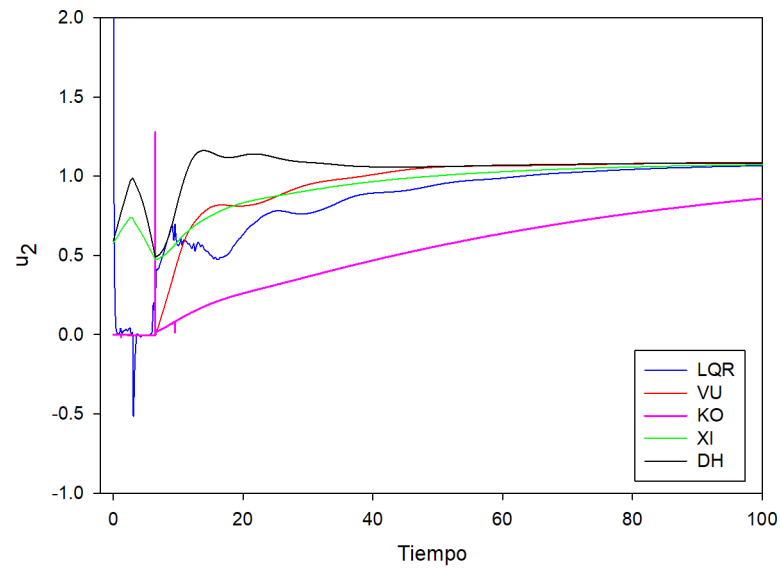


Figura 3.11. Comportamiento de la acción de control  $u_2$  de la columna de destilación de OR ante un cambio de referencia unitario en la primer salida.

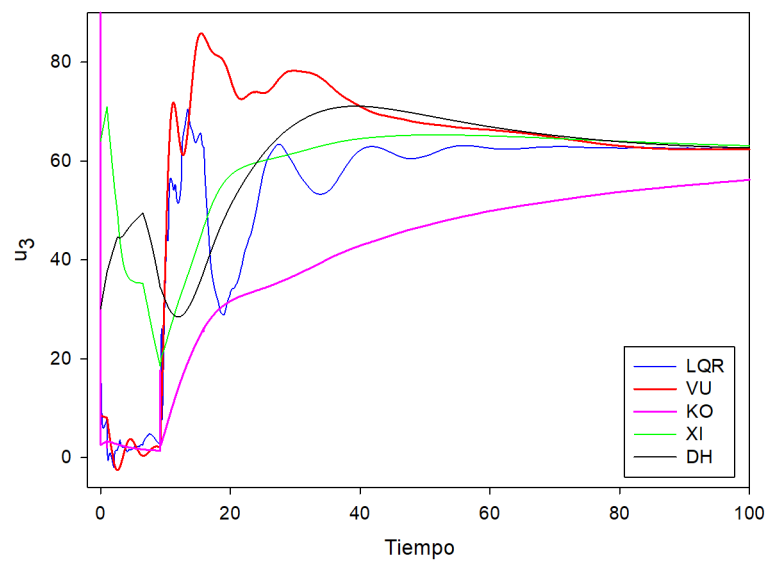


Figura 3.12. Comportamiento de la acción de control  $u_3$  de la columna de destilación de OR ante un cambio de referencia unitario en la primer salida.

### 3.1.1.2. Reactor CSTR no lineal

De acuerdo con los controladores reportados para este sistema, se utilizó la metodología LQR para sintetizar la acción derivativa a los controles PI multilazo utilizando una modificación de la metodología reportada por (Estévez-Sánchez et al., 2017) para hacer la diagonalización de los controles PID obtenidos.

La obtención de los controladores PID diagonales se obtuvieron bajo dos enfoques diferentes:

1. Controladores PID multilazo obtenidos a partir de la diagonalización de un controlador PID multivariado, el cual crece de un control PI multivariado.
2. Controladores PID multilazo, el cual crece a partir de un controlador PI diagonal, unicamente diagonalizando la acción derivativa.

En este trabajo se probaron ambos enfoques de obtención de los controladores PID diagonales, dando como resultado que los controladores obtenidos en ambos enfoques tienen un desempeño similar, tanto en los índices de desempeño cuadrático como en la robustez. Las matrices de ponderación de control  $\mathbf{R}$  de los controladores PID diagonales obtenidos en este trabajo que generan la acción proporcional, integral y derivativa respectivamente se reportan en la Tabla 3.3 - 3.4.

Tabla 3.3. Matrices de ponderación que producen la acción derivativa en el procedimiento LQR para el CSTR no lineal de los controles seleccionados.

control	Controladores originales	
	$r_{11}, r_{22}$	$r_{12}, r_{21}$
(Cheng-Liang Chen, 2002)	15.8489 , 0.012589	0 , 0
(Ruiz López et al., 2006)	-12.1833, -10.414	0.0221, 8384.4764

Tabla 3.4. Matrices de ponderación que producen la acción proporcional en el procedimiento LQR para el CSTR no lineal de los controles seleccionados.

control	Controladores originales	
PID	$[r_{11}, r_{22}] \times 10^4$	$[r_{12}, r_{21}] \times 10^4$
(Cheng-Liang Chen, 2002)	-1262, 1	1, -22369
(Ruiz López et al., 2006)	-0.1551, 0.0228	0.0223, -0.1933
(Cheng-Liang Chen, 2002)*	-0.1414, 0.0227	0.0222, -0.1735
(Ruiz López et al., 2006)*	-649, 1412	1130, -925

\* Controles diagonales que crecen de un control PI diagonal

Los resultados obtenidos de la caracterización de los controles reportados por (Cheng-Liang Chen, 2002; Estévez-Sánchez et al., 2017; Ruiz López et al., 2006) se muestran en las Tablas 3.5 - 3.6 para el sistema linealizado y el sistema original no lineal, junto con los controladores PID contenidos en este trabajo. Los índices de funcionamiento cuadrático, índice de esfuerzo de control y robustez fueron evaluados ante cambios en la variable de entrada y el punto de referencia, tanto para el modelo linealizado y el original no lineal, respectivamente.

Se puede observar que los índices de desempeño cuadrático, así como la robustez de controladores PID diagonales pueden variar respecto a su PID asociado, de modo que puede degradarse (incrementar) o mejorar (disminuir) sus características. Cabe resaltar que no importa el enfoque por el cual se obtuvieron los controladores PID diagonales, en ambos casos se puede observar un comportamiento similar.

Por ejemplo, la adición de la acción derivada a los controladores PI centralizados (CHPI y RLPI) en el sistema lineal mejoró 9 de los 16 índices cuadráticos, pero degradó 13 de los 16 índices en los controladores multilazo (ESPI1 y ESPI2) para la misma planta. Sin embargo, 20 de los 32 índices mejoraron cuando los controladores centralizados agregados con la acción derivada (CHPID, RLPID, ESPID1 y ESPID2) se probaron en CSTR no lineal original. Las Tablas 3.5 - 3.6 también muestra los índices

cuadráticos para los controladores DIAG1 y DIAG2, obtenidos mediante la diagonalización de sus contrapartes centralizadas (CHPID y RLPID), donde es fácil verificar que los controladores multilazo se comportan de manera similar a los originales.

Un punto importante es que los controladores PI propuestos por (Cheng-Liang Chen, 2002; Ruiz López et al., 2006) fueron sintonizados por metodología basada en la minimización de la norma  $H^\infty$  de la función de transferencia, esto en lazo cerrado por desigualdades lineales matriciales u optimización multiobjetivo; los controladores reportados por (Estévez-Sánchez et al., 2017) se obtuvieron mediante la metodología LQR, similar a la de este trabajo, de modo que el método propuesto puede aplicarse para obtener la acción derivativa de un control PI, sin importar que sea multilazo o multivariado, obtenido a partir de otras metodologías de sintonización existentes.

Tabla 3.5. Índices de desempeño para los sistemas de control del CSTR calculados numérica con el modelo linealizado

Índices <sup>1</sup>	Cheng-Liang Chen (2002)					Ruiz López et al. (2006)				
	CHPI	CHPID	ESPI1	ESPID1	DIAG1	RLPI	RLPID	ESPI2	ESPID2	DIAG2
$I_{y1-s}^s \times 10^5$	4.597	3.481	1.506	0.861	1.602	1.139	0.535	0.841	0.679	1.874
$I_{y2-s}^s$	2.975	2.694	2.605	2.011	2.683	2.449	1.937	1.976	1.821	2.972
$I_{y1-r}^s \times 10^8$	1.337	1.239	1.356	1.539	1.361	1.639	1.516	1.331	1.461	1.352
$I_{y2-r}^s \times 10^6$	223.2	295.5	664.2	663.6	674.4	2.296	713.92	13.68	0.146	13.91
$I_{u1-s}^s$	115.5	68.24	46.47	47.84	47.10	26.15	28.40	47.94	48.00	72.42
$I_{u2-s}^s$	602.9	485.7	725.6	561.5	735.0	694.3	569.9	668.6	606.4	371.0
$I_{u1-r}^s \times 10^1$	1.802	1.361	1.441	1.653	1.500	1.854	2.300	15.06	1.700	1.516
$I_{u2-r}^s \times 10^1$	6.179	21.07	11.06	3.862	19.22	2.626	76.43	3.012	2.189	1.616

<sup>1</sup>Obtenido de la evaluación numérica de los índices cuadráticos. En el caso del seguimiento del punto de referencia  $u_{1\infty} = 136.5$  y  $u_{2\infty} = 125.2$ . En el caso rechazo de perturbaciones  $u_{1\infty} = 94,7$  y  $u_{2\infty} = 114.2$ .

Una simulación con cambios en ambos puntos de referencia ( $C = C_{ss} + 0.005$  mol/L<sup>-1</sup> y  $T = T_{ss} + 5K$  a  $t = 0$  min) y perturbaciones en la entrada ( $C = C_{ss} + 0.05$  mol/L<sup>-1</sup> y  $T = T_{ss} + 5K$  a  $t = 1$  min) para este sistema se presenta en las figuras 4.6 - 4.9, donde se puede observar que los controladores PID obtenidos mediante la metodología LQR propuesta en este trabajo tienen un desempeño similar a sus versiones PI y en algunos

casos superan a los reportados por (Cheng-Liang Chen, 2002; Estévez-Sánchez et al., 2017; Ruiz López et al., 2006).

Se pueden extraer dos conclusiones principales de los resultados presentados en esta sección:

1. El método LQR propuesto generaliza otras metodologías de sintonización del controlador PI permitiendo la síntesis de la acción derivada.
2. El procedimiento de diagonalización permite el desarrollo de controladores multilazo que se comportan de manera similar a sus correspondientes versiones centralizadas.

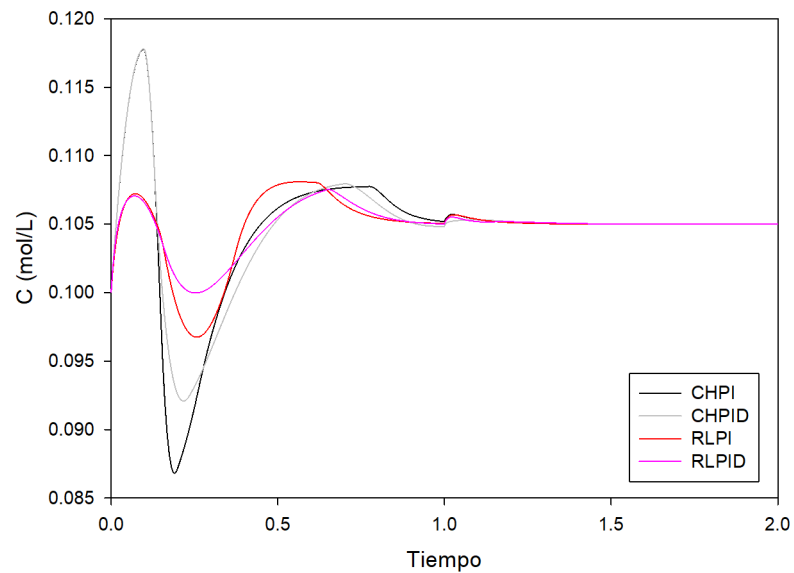


Figura 3.13. Concentración de salida en el CSTR no lineal ante cambios en el punto de referencia y perturbaciones en la concentración y temperatura de alimentación

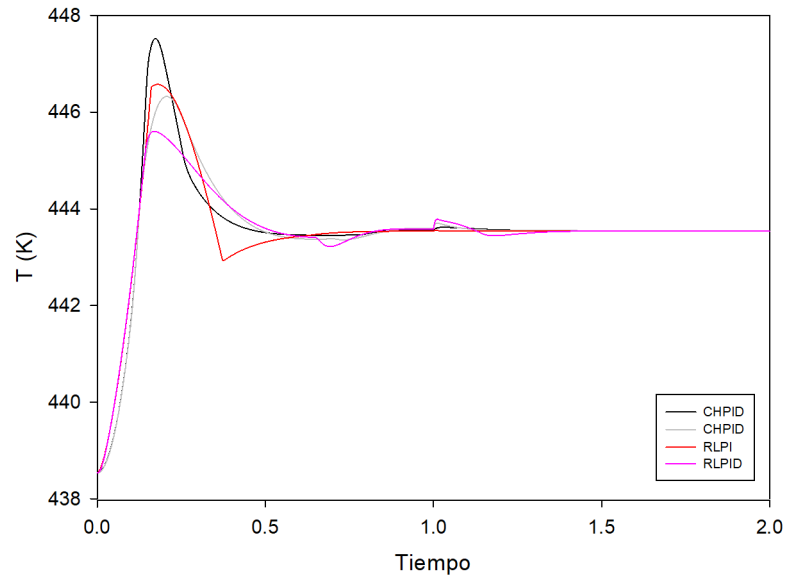
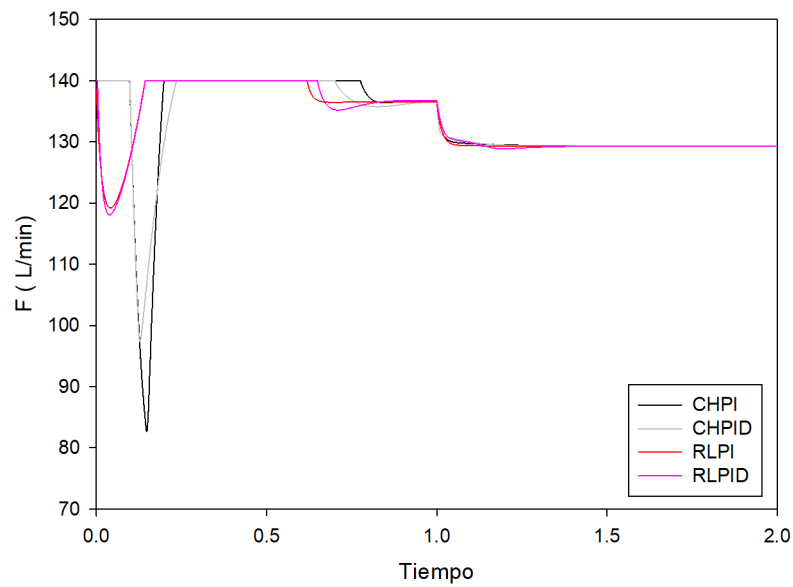


Figura 3.14. Temperatura de salida en el CSTR no lineal ante cambios en el punto de referencia y perturbaciones en la concentración y temperatura de alimentación



original

Figura 3.15. Variación del flujo de alimentación para controlar cambios en el punto de referencia y perturbaciones en la concentración y temperatura de alimentación en el CSTR no lineal

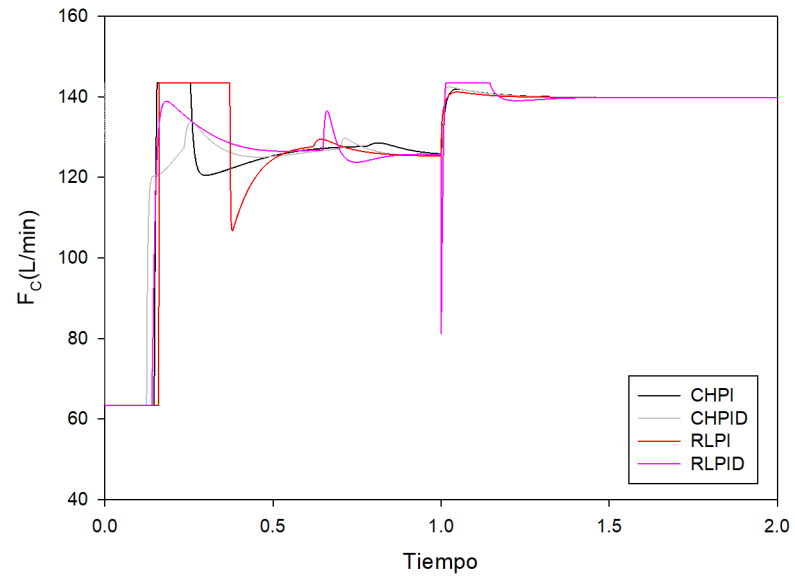


Figura 3.16. Variación del flujo de enfriamiento para controlar cambios en el punto de referencia y perturbaciones en la concentración y temperatura de alimentación en el CSTR no lineal

## IV.CONCLUSIONES

La metodología LQR se generalizó para permitir la síntesis de los controladores PID centralizados con buenas características para el seguimiento de una referencia, rechazo de perturbaciones, uso limitado de la señal de control y la insensibilidad a la incertidumbre del modelo de planta. Además, la naturaleza secuencial del enfoque propuesto permite agregar la acción derivada a los controladores PI existentes sintonizados con esta u otras metodologías para mejorar aún más su operación, así como para obtener estructuras simplificadas multilazo de controladores centralizados, al mismo tiempo que conservan de forma casi intacta sus características originales.

# V.ANEXOS

## 5.1. Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación de Ogunnaike

Tabla 5.1. Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación usando el control WI<sup>1</sup>.

$\mathbf{k}_2^T$	$I_{y1-s}^s$	$I_{y2-s}^s$	$I_{y3-s}^s$	$I_{u1-s}^s$	$I_{u2-s}^s$	$I_{u3-s}^s$
Índices cuadráticos evaluados con el sistema nominal						
[1 1 1]	6.741	7.352	559.2	866.7	5520	1.66E6
[1 1 0]	6.578	5.987	515.6	885.2	5548	1.62E6
[1 1 -1]	6.429	6.149	520.2	944.5	5789	1.40E6
[1 0 1]	6.673	3.839	394.6	1393	1598	5.44E5
[1 0 0]	6.557	4.254	405.0	1429	1612	5.51E5
[1 0 -1]	6.378	3.221	364.8	1457	1598	5.68E5
[1 -1 1]	5.948	12.66	624.4	3027	494.1	7.05E5
[1 -1 0]	5.950	12.39	528.6	3080	480.8	6.60E5
[1 -1 -1]	5.946	12.07	565.2	3081	372.5	7.06E5
[0 1 1]	0.066	5.152	79.29	573.0	1494	6.49E5
[0 1 0]	0.062	6.303	51.86	444.6	1131	4.02E5
[0 1 -1]	0.081	4.830	68.19	520.9	1396	6.30E5
[0 0 1]	2E-4	5E-3	1.77	0.32	0.11	1.07E4

<sup>1</sup> El modelo perturbado fue inestable en todos los casos.

Tabla 5.2. Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación usando el control VU.

Índices cuadráticos evaluados con el sistema nominal						
$\mathbf{k}_2^T$	$I_{y1-s}^s$	$I_{y2-s}^s$	$I_{y3-s}^s$	$I_{u1-s}^s$	$I_{u2-s}^s$	$I_{u3-s}^s$
[1 1 1]	5.109	15.20	1046	5.447	4.542	6.57E4
[1 1 0]	5.072	15.08	1049	5.436	4.539	6.61E4
[1 1 -1]	5.035	14.97	1058	5.425	4.537	6.66E4
[1 0 1]	5.557	13.93	729.0	17.11	12.14	4.15E4
[1 0 0]	5.519	13.94	732.6	17.08	12.14	4.17E4
[1 0 -1]	5.478	13.95	738.5	17.08	12.14	4.21E4
[1 -1 1]	6.253	24.97	469.7	36.14	23.84	2.44E4
[1 -1 0]	6.212	25.10	470.9	36.14	23.84	2.44E4
[1 -1 -1]	6.170	25.24	478.0	36.09	23.83	2.47E4
[0 1 1]	0.122	6.282	29.88	3.678	2.047	3.46E3
[0 1 0]	0.124	6.157	29.42	3.684	2.048	3.553E3
[0 1 -1]	0.127	6.035	32.16	3.689	2.049	3.793E3
[0 0 1]	10E-4	10E-3	1.600	1.3E-4	6.2E-5	78.15
Índices cuadráticos evaluados con el sistema perturbado						
$\mathbf{k}_2^T$	$I_{y1-s}^s$	$I_{y2-s}^s$	$I_{y3-s}^s$	$I_{u1-s}^s$	$I_{u2-s}^s$	$I_{u3-s}^s$
[1 1 1]	5.859	9.831	1204	90.52	8.860	1.21E5
[1 1 0]	5.814	9.679	1212	89.84	8.838	1.20E5
[1 1 -1]	5.765	9.541	1218	89.18	8.816	1.18E5
[1 0 1]	6.329	6.162	769.6	143.3	33.98	7.27E4
[1 0 0]	6.280	6.143	774.5	142.5	33.98	7.15E4
[1 0 -1]	6.230	6.125	782.1	141.8	33.98	7.04E4
[1 -1 1]	7.040	11.73	435.8	214.2	78.03	3.66E4
[1 -1 0]	6.990	11.84	440.3	213.3	78.04	3.57E4
[1 -1 -1]	6.937	11.95	444.2	212.5	78.06	3.50E4
[0 1 1]	0.119	4.753	49.41	8.933	9.476	6786
[0 1 0]	0.122	4.622	49.76	9.044	9.454	6394
[0 1 -1]	0.124	4.496	52.57	9.156	9.432	6149
[0 0 1]	1.37E-4	1.63E-3	1.25	1.58E-3	3.17E-4	74.57

Tabla 5.3. Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación usando el control KO.

Índices cuadráticos evaluados con el sistema nominal						
$\mathbf{k}_2^T$	$I_{y1-s}^s$	$I_{y2-s}^s$	$I_{y3-s}^s$	$I_{u1-s}^s$	$I_{u2-s}^s$	$I_{u3-s}^s$
[1 1 1]	17.53	6.853	318.9	113.4	30.75	9.74E4
[1 1 0]	17.38	6.759	317.3	112.6	30.66	9.78E4
[1 1 -1]	17.25	6.644	317.7	112.0	30.57	9.82E4
[1 0 1]	24.39	4.220	125.8	202.1	41.35	7.52E4
[1 0 0]	24.18	4.245	123.3	200.9	41.19	7.54E4
[1 0 -1]	24.02	4.284	125.1	200.0	41.08	7.56E4
[1 -1 1]	32.79	16.07	28.64	316.0	87.17	6.26E4
[1 -1 0]	32.61	16.25	26.55	314.9	87.06	6.27E4
[1 -1 -1]	32.45	16.44	27.97	314.0	86.97	6.30E4
[0 1 1]	0.786	7.397	49.91	12.64	17.64	4854
[0 1 0]	0.811	7.262	47.85	12.85	17.67	4957
[0 1 -1]	0.834	7.101	49.59	13.10	17.70	5075
[0 0 1]	3.27E-4	1.42E-3	1.973	1.02E-3	1.90E-4	18.39
Índices cuadráticos evaluados con el sistema perturbado						
$\mathbf{k}_2^T$	$I_{y1-s}^s$	$I_{y2-s}^s$	$I_{y3-s}^s$	$I_{u1-s}^s$	$I_{u2-s}^s$	$I_{u3-s}^s$
[1 1 1]	21.22	5.648	328.8	125.5	39.10	1.72E5
[1 1 0]	21.08	5.515	326.8	125.0	39.00	1.70E5
[1 1 -1]	20.88	5.369	328.6	124.2	38.96	1.68E5
[1 0 1]	29.37	2.130	104.6	221.5	78.85	1.37E5
[1 0 0]	29.18	2.133	102.3	220.9	78.65	1.35E5
[1 0 -1]	28.98	2.137	103.9	219.5	78.66	1.33E5
[1 -1 1]	39.41	9.570	17.51	347.0	173.7	1.15E5
[1 -1 0]	39.19	9.705	14.97	345.8	173.6	1.13E5
[1 -1 -1]	38.95	9.850	16.68	344.7	173.4	1.11E5
[0 1 1]	0.916	5.610	70.32	14.29	27.65	6609
[0 1 0]	0.943	5.484	69.00	14.54	27.66	6486
[0 1 -1]	0.972	5.328	71.14	14.75	27.66	6436
[0 0 1]	4.24E-4	1.99E-3	1.844	1.19E-3	2.78E-4	40.13

Tabla 5.4. Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación usando el control XI.

Índices cuadráticos evaluados con el sistema nominal						
$\mathbf{k}_2^T$	$I_{y1-s}^s$	$I_{y2-s}^s$	$I_{y3-s}^s$	$I_{u1-s}^s$	$I_{u2-s}^s$	$I_{u3-s}^s$
[1 1 1]	8.875	18.84	4608	9.720	0.405	2.58E4
[1 1 0]	8.810	18.56	4666	9.659	0.413	2.56E4
[1 1 -1]	8.748	18.26	4547	9.916	0.387	2.85E4
[1 0 1]	9.254	4.471	3078	24.18	4.565	1.28E4
[1 0 0]	9.188	4.374	3122	24.08	4.624	1.26E4
[1 0 -1]	9.122	4.286	3172	23.97	4.674	1.24E4
[1 -1 1]	9.716	7.156	1881	45.18	14.59	5180
[1 -1 0]	9.645	7.262	1915	45.05	14.69	5040
[1 -1 -1]	9.577	7.372	1954	44.90	14.80	4923
[0 1 1]	0.036	8.735	157.8	3.244	2.986	2732
[0 1 0]	0.039	8.536	166.4	3.281	2.939	2681
[0 1 -1]	0.042	8.338	179.3	3.317	2.892	2633
[0 0 1]	1.62E-4	1.74E-3	2.088	1.61E-4	2.03E-4	3.273
Índices cuadráticos evaluados con el sistema perturbado						
$\mathbf{k}_2^T$	$I_{y1-s}^s$	$I_{y2-s}^s$	$I_{y3-s}^s$	$I_{u1-s}^s$	$I_{u2-s}^s$	$I_{u3-s}^s$
[1 1 1]	11.03	33.48	7390	89.74	3.898	6.93E4
[1 1 0]	10.94	32.92	7433	89.07	3.925	6.72E4
[1 1 -1]	10.86	32.35	7482	88.38	3.948	6.53E4
[1 0 1]	11.91	15.43	6498	143.3	25.54	3.78E4
[1 0 0]	11.82	15.04	6534	142.5	25.63	3.62E4
[1 0 -1]	11.72	14.67	6566	141.6	25.75	3.47E4
[1 -1 1]	12.99	9.404	6134	213.5	68.18	1.67E4
[1 -1 0]	12.89	9.217	6155	212.5	68.39	1.56E4
[1 -1 -1]	12.79	9.032	6177	211.6	68.57	1.45E4
[0 1 1]	0.096	6.217	251.5	8.080	10.60	5730
[0 1 0]	0.101	6.025	261.8	8.231	10.51	5249
[0 1 -1]	0.106	5.839	275.8	8.385	10.43	4813
[0 0 1]	2.47E-4	2.28E-3	1.972	1.47E-3	2.55E-4	23.26

Tabla 5.5. Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación usando el control DH.

Índices cuadráticos evaluados con el sistema nominal						
$\mathbf{k}_2^T$	$I_{y1-s}^s$	$I_{y2-s}^s$	$I_{y3-s}^s$	$I_{u1-s}^s$	$I_{u2-s}^s$	$I_{u3-s}^s$
[1 1 1]	6.665	15.49	8089	2.561	0.732	2.43E4
[1 1 0]	6.661	15.40	8218	2.547	0.731	2.40E4
[1 1 -1]	6.654	15.33	8354	2.535	0.729	2.37E4
[1 0 1]	6.157	5.847	5267	4.594	1.560	1.34E4
[1 0 0]	6.150	5.808	5357	4.585	1.571	1.32E4
[1 0 -1]	6.147	5.744	5450	4.566	1.574	1.28E4
[1 -1 1]	5.695	7.685	3331	7.378	3.439	7644
[1 -1 0]	5.688	7.658	3364	7.362	3.451	7388
[1 -1 -1]	5.683	7.645	3426	7.343	3.466	7187
[0 1 1]	0.024	5.768	398.3	0.374	0.534	2.59E3
[0 1 0]	0.023	5.740	435.4	0.376	0.525	2543
[0 1 -1]	0.023	5.710	482.3	0.378	0.516	2504
[0 0 1]	3.87E6	1.33E-4	4.611	3.06E-5	5.32E-5	2.694
Índices cuadráticos evaluados con el sistema perturbado						
$\mathbf{k}_2^T$	$I_{y1-s}^s$	$I_{y2-s}^s$	$I_{y3-s}^s$	$I_{u1-s}^s$	$I_{u2-s}^s$	$I_{u3-s}^s$
[1 1 1]	8.088	25.11	9693	96.01	3.567	6.26E4
[1 1 0]	8.072	24.95	9870	95.25	3.575	6.05E4
[1 1 -1]	8.056	24.79	1.00E4	94.43	3.580	5.86E4
[1 0 1]	7.906	17.38	7094	146.2	20.20	3.38E4
[1 0 0]	7.889	17.25	7251	145.4	20.25	3.23E4
[1 0 -1]	7.872	17.12	7409	144.4	20.33	3.07E4
[1 -1 1]	7.837	17.88	5682	209.2	52.34	1.59E4
[1 -1 0]	7.822	17.70	5802	208.1	52.33	1.48E4
[1 -1 -1]	7.805	17.61	5983	207.0	52.48	1.38E4
[0 1 1]	0.058	4.120	564.6	6.142	7.763	5886
[0 1 0]	0.058	4.092	586.03	6.289	7.710	5387
[0 1 -1]	0.058	4.064	616.8	6.413	7.656	4930
[0 0 1]	1.25E-5	2.96E-4	4.331	1.55E-3	2.24E-4	22.59

Tabla 5.6. Índices de funcionamiento cuadrático para la columna de destilación usando el control LQR.

Índices cuadráticos evaluados con el sistema nominal						
$\mathbf{k}_2^T$	$I_{y1-s}^s$	$I_{y2-s}^s$	$I_{y3-s}^s$	$I_{u1-s}^s$	$I_{u2-s}^s$	$I_{u3-s}^s$
[1 1 1]	6.776	6.422	162.9	23.39	31.68	6.82E4
[1 1 0]	6.703	6.313	161.9	23.40	30.64	6.92E4
[1 1 -1]	6.673	6.246	162.2	23.14	29.49	7.20E4
[1 0 1]	10.06	2.988	60.73	54.61	18.81	4.09E4
[1 0 0]	10.01	3.002	59.79	54.45	19.25	4.13E4
[1 0 -1]	9.963	2.996	60.96	54.34	19.71	4.37E4
[1 -1 1]	14.69	7.527	74.73	104.0	117.7	5.19E4
[1 -1 0]	14.61	7.582	74.74	104.0	119.7	5.18E4
[1 -1 -1]	14.58	7.660	74.98	103.4	121.7	5.33E4
[0 1 1]	0.645	4.044	60.63	9.208	57.62	1.96E4
[0 1 0]	0.646	3.934	57.67	9.199	55.98	1.89E4
[0 1 -1]	0.649	3.826	58.33	9.222	54.42	2.03E4
[0 0 1]	9.95E-5	7.5E-4	1.25	1.6E-3	1.7E-2	1043
Índices cuadráticos evaluados con el sistema perturbado						
$\mathbf{k}_2^T$	$I_{y1-s}^s$	$I_{y2-s}^s$	$I_{y3-s}^s$	$I_{u1-s}^s$	$I_{u2-s}^s$	$I_{u3-s}^s$
[1 1 1]	7.828	4.296	204.1	86.06	14.22	1.21E5
[1 1 0]	7.768	4.183	199.3	85.52	14.03	1.20E5
[1 1 -1]	7.709	4.076	196.6	84.97	13.85	1.19E5
[1 0 1]	11.02	0.981	69.28	150.6	39.10	7.62E4
[1 0 0]	10.95	0.962	67.32	150.0	39.14	7.53E4
[1 0 -1]	10.88	0.946	67.688	149.6	39.15	7.48E4
[1 -1 1]	15.31	4.240	160.9	241.9	96.89	6.36E4
[1 -1 0]	15.23	4.308	161.1	241.3	97.16	6.29E4
[1 -1 -1]	15.17	4.382	164.8	240.6	97.36	6.27E4
[0 1 1]	0.544	3.374	116.9	13.15	16.66	1.67E4
[0 1 0]	0.550	3.281	112.8	13.23	16.48	1.62E4
[0 1 -1]	0.558	3.202	111.3	13.31	16.27	1.61E4
[0 0 1]	1.38E-4	1.11E-3	1.017	1.32E-3	2.09E-3	175.2

# Bibliografía

- Antsaklis, P. (1990). Neural networks for control systems. *Institute of Electrical and Electronics Engineers transactions on neural networks*.
- Arrieta, O., Visioli, A., & Vilanova, R. (2010). Pid autotuning for weighted servo/regulation control operation. *Journal of process control*.
- Ashida, Y., Wakitani, S., & Yamamoto, T. (2017). Design of an implicit self-tuning pid controller based on the generalized output. *IFAC-PapersOnLine*.
- Aström, K. & Hägglund, T. (1995). *PID controllers: Theory, Desing and tuning*.
- Berk, Z. (2013). *Food process engineering and technology, international series*. Academic Press.
- Bishop, P. (1992). *Dynamics and control of the activated sludge process, vol. 6*. Water Quality Management Library.
- Bordignon, V. & Campestrini, L. (2018). Data - driven pid control tuning for disturbance rejection in hierarcical control architecture. *IFAC papersonline 51 - 4, 569 - 574*.
- Carrillo-Ahumada, J., Rodríguez-Jimenez, G., & García-Alvarado, M. A. (2011). Tuning optimal-robust linear mimo controllers of chemical reactors by using pareto optimality. *Chemical Engineering Journal*.
- Chen, C.-L., Wang, T.-C., & Hsu, S.-H. (2002). An lmi approach to h infinity pi controller desing. *Journal of chemical Engineering of japan* , 35(1), 8393.
- Cheng-Liang Chen, T.-C. W. (2002). An lmi approach to h infinito pi controller desing. *Journal of chemical engineering of japan*.
- Coughanowr, D. (2009). *Process Systems Analysis and control*. Tercera edición.
- Das, S., Pan, I., & Das, S. (2015). Miltu-objetive lqr with optimum weight selec-

- tion to desing fopid controllers for delayed fractional order processes. *Applied Mathematical Modelling*, s., pan, i., das, s.
- Dominguez, S. (2006). *Control en el espacio de estado*. Universidad politécnica de Madrid.
- Doyle, J. & Glover, K. (1989). State-space solutions to stadard h2 and h infinity control problems. *Institute of Electrical and Electronics Engineers transactions on automatic control*.
- Estévez Sánchez, K., Cruz-González, D., & I.I. Ruiz-López (2017). AplicaciÓn de la metodologÍa lqr para la sÍntesis de controladores pi de estructura configurable en procesos mimo.
- Estévez-Sánchez, K., Cruz-González, D., & I.I. Ruiz-López (2017). Design of multiloop pi controllers based on quadratic optimal approach. *ISA Transactions*.
- Gao, X., Yang, F., & Shang, C. (2016). A review of control loop monitoring and diagnosis: prospects of controller maintenance in big data era. *Chisese Journal of chemical Engineering* 24(8), 952 - 962.
- Gao, Z. (2014). On the centrality of disturbance rejection in automatic control. *ISA Transactions*.
- García-Alvarado, M., Ruiz-López, I., & Torres-Ramos, T. (2004). Tuning of multivariate pid controllers based on characteristic matrix eigenvalues, lyapunov functions and robustness criteria. *Chemical Engineering Science*.
- Goncalver, E., Palhares, R., & Takahashi, R. (2008). A novel approach for h2/h infinity robust pid synthesis for uncertain systems. *Journal of process control* 19-26.
- He, J.-B., Wang, Q.-G., & Lee, T.-H. (1999). Pi/pid controller tuning via lqr approach. *Chemical Engineering Science*.
- Hwang, C. & Hsiao, C. (2002). A new approach to mixed h2/hinfinity optimal pi/pid

- controller design. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 41(24), 61076119.
- Jantzen, J. (2007). *Foundations of fuzzy control*. John Wiley.
- Jelali, M. (2013). *Control performance management in industrial automation*. Springer.
- Katić, K., Li, R., Verhaart, J., & Zeiler, W. (2018). Neural network based predictive control of personalized heating systems. *Energy & buildings*.
- Ketata, R., Geest, D., & Titli, A. (1995). Fuzzy controller: desing, evaluation, parallel and hierarchical combination with a pid controller. *Fuzzy sets and systems* 71, 113 - 129.
- Kuo, B. (1996). *Sistemas de control automatico*. Practice Hall.
- Leva, A. & Bascetta, L. (2007). Set point tracking optimisation by casual nonparametric modelling. *Automatica* 43.
- Leva, A. & Seva, S. (2018). Structure specific analytical pid tuning for load disturbance rejection. *IFAC papersOnline* 51 - 4, 137 - 142.
- Luyben, W. (1996). *Process modeling, simulation and control for chemical engineers*. Second edition.
- M.A. Garcia-Alvarado, I. R. (2010). A design method for robust and quadratic optimal mimo linear controllers. *Chemital Engineering Science*.
- Nguyen, D. & Widrow, B. (1990). Neural networks for self-learning control systems. *Institute of Electrical and Electronics Engineers control systems magazine*.
- Ogata, K. (2010a). *Ingeniería moderna de control*. 5ta edición.
- Ogata, K. (2010b). *Modern control engineering, fifth edition*. Prentice Hall.
- Ogunnaike, B. A., Lemaire, J. P., Morari, M., & Ray, W. H. (1983). Advanced multi-variable control of pilot - plant distillation column. *AIChE Journal*, Vol 29, No 4.

- Oka, Y. & Suzuki, K. (2013). *Nuclear reactor kinetics and plant control*. Japan: Springer.
- Osipov, V. & Osipova, M. (2018). Space-time binding in recurrent neural networks with controllerd elemets. *Neurocomputing*.
- Passino, K. & Yurkovich, S. (1998). *Fuzzy control*. ADDISON - WESLEY.
- Reznik, L. (1997). *Fuzzy controllers*. NEWNES.
- Ruiz López, I. I., Rodríguez-Jimenes, G., & García-Alvarado, M. (2006). Robust mimo pid controllers tuning based on complex/real ratio of the characteristic matrix eigenvalues. *Chemical Engieenering Science*.
- Samad, T. (2017). A survey on industry impact and challenges thereof [technical activities]. *Institute of Electrical and Electronics Engineers Contr Syst Mag*.
- Shang, L., Tian, X., & Cai, L. (2017). A multi - index control performance assesment method based on historical prediction error covariance. *IFAC papersOnLine*.
- Tian, Y. & Gao, F. (1998). Double - controller scheme for separating load rejection from set - point tracking. *Institution of chemical Engineers*.
- Uppal, A. & Ray, W. (1974). On the dynamic behavior of continuous stirred tank reactors. *Chemical Engineering Science Vol 29, pp 967 - 985*.
- Valentas, K., Rotstein, E., & Singh, R. (1997). *Handbook of food engineering practice*. CRC Press.
- Vargas González, S., Rodriguez-Jimenes, G., & García-Alvarado, M. (2013). Relation between fist order dynamic parameters with pi contrl parameters in nash equilibrium. *International conference on mechatronics, Electronics and automotive engineering*.
- Vilanova, R., Arrieta, O., & Ponsa, P. (2018). Robust pi/pid controllers for load disturbance based on direct synthesis. *ISA Transactions*.

- Vitthal, R. & Durgaprasada, C. (1995). Process control via artificial neural networks and learning automata. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*.
- Wang, Y., j. Qibing, & Zhang, R. (2017). Improved fuzzy pid controller design using predictive functional control structure. *ISA Transactions*.
- Yang, Y., Huang, D., & Dong, X. (2018). Enhanced neural network control of lower limb rehabilitation exoskeleton by add - on repetitive learning. *Neuronalcomputing*.
- Younkin, G. W. (2003). Industrial servo control systems. *Industrial controls consulting, Inc.*
- Zhao, C. & Guo, L. (2017). On the capability of pid control for nonlinear uncertain systems. *IFAC-PapersOnLine*.