

# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Estudio de la Conjetura de Martin

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

Luis Fernando Altamirano Fernández

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Iván Martínez Ruíz

PUEBLA, PUE.

AGOSTO 2023





**DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE**  
**SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el C:

**LUIS FERNANDO ALTAMIRANO FERNÁNDEZ**

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 2 de mayo de 2023, con la tesis titulada:

*Estudio de la conjetura de Martin*

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

**A T E N T A M E N T E.**  
H. Puebla de Z. a 16 de junio de 2023.

  
**DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE**  
**COORDINADOR DEL POSGRADO**  
**EN MATEMÁTICAS.**



*Dedicado a mis padres con cariño*



# Agradecimientos

Quisiera brindar unas palabras de agradecimiento a mi mamá por siempre apoyarme y quererme incondicionalmente. Por sus valiosas enseñanzas que siempre me motivan a ser mejor cada día. A mis hermanas por inspirarme a ser mejor y por los buenos momentos que hemos pasado juntos.

A mi papá y a toda mi familia de Tuxtepec porque siempre me transmiten su apoyo y cariño a pesar de la distancia, y porque siempre me hacen sentir como en casa. En particular, quisiera agradecer a mi papá por sus palabras y consejos que siempre llevaré conmigo.

A mi tío Jorge por inspirarme a iniciar el camino de las Matemáticas, por prestarme sus libros y por siempre motivarme a tener curiosidad por la ciencia y la filosofía.

A mi querida Aleyda por todo su amor, comprensión, confianza y respeto durante este tiempo juntos. Por motivarme a seguir mis metas y por acompañarme en este camino. Mi agradecimiento con la vida es inmenso por encontrarme a una persona tan maravillosa como ella.

A mis compañeros de la maestría y a mis compañeros del cubo, porque con todos en algún momento compartí una buena charla que sin duda me hizo aprender y crecer.

A mi asesor el Dr. Iván Martínez Ruíz por aceptarme como su tesista, por su tiempo, por su confianza y sobre todo por su paciencia durante el desarrollo y revisión de cada uno de los detalles de los resultados que aquí se presentan.

A mis sinodales el Dr. Carlos Guillén Galván, el Dr. Antonio Montalbán, el Dr. Alejandro Ramírez Páramo y el Dr. Oleg Okunev por aceptar revisar esta tesis. Les agradezco su tiempo y paciencia para la lectura de este trabajo, y por sus valiosas observaciones.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo económico que recibí a través del Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) para poder realizar mis estudios de maestría.

A la vida, una vez más, por permitirme coincidir con gente increíble y por darme todo tipo de experiencias y vivencias. No puedo decir más que: gracias totales.



# Introducción

La Teoría de la Computabilidad se encarga de estudiar la complejidad de los objetos matemáticos numerables con base en la noción de algoritmo (cf. [Dav58], [Rog67] y [Soa87]). Dentro de la teoría existen diferentes formas de *medir* la complejidad de un objeto. Una de ellas es la Turing-equivalencia: una relación de equivalencia sobre los conjuntos de números naturales que captura la idea de poder determinar los elementos de un conjunto mediante un algoritmo, utilizando en el proceso información sobre los elementos de otro conjunto. Las clases de equivalencia resultantes se denominan grados de Turing, y forman un orden parcial con propiedades que la hacen una estructura compleja de describir en su totalidad (cf. [Soa87]).

En los grados de Turing, con el uso de la función salto de Turing, podemos encontrar un conjunto de grados que *aparentemente* forma un buen orden. En la literatura a este tipo de grados se les suele denominar *grados naturales* (cf. [Ste82] y [Mon19]). Aunque la noción de ser natural no está bien definida, es posible identificar a cada grado con una función Turing-invariante definible en los grados de Turing. Para recuperar la noción de buen orden, comparamos dichas funciones en conjuntos que denominaremos conos de Turing, y al pre-orden resultante lo llamaremos pre-orden de Martin.

La Conjetura de Martin, también conocida como el 5.<sup>o</sup> Problema de Victoria Delfino (cf. [KM78] y [CL20]), es un enunciado propuesto en la década de los 70, que busca capturar la idea de que los grados naturales están bien ordenados, esto es, que las funciones Turing-invariantes definibles forman un pre-buen orden respecto al pre-orden de Martin (cf. [MSS16] y [Mon19]). La conjetura es enunciada asumiendo hipótesis sobre cardinales grandes y se compone de dos partes: la primera afirma que toda función que no es creciente en un cono de Turing, debe ser constante en un cono; la segunda parte afirma que las funciones crecientes en un cono de Turing están pre-bien ordenadas por el pre-orden de Martin. A grandes rasgos, la conjetura nos dice que toda función definible Turing-invariante es o bien una función constante, o bien la función identidad, o la función salto de Turing, o alguna función de salto transfinito de Turing.

El objetivo de esta tesis es presentar el problema que plantea la Conjetura de Martin y analizar algunos argumentos y técnicas que se han empleado para llegar a su solución. Este análisis abarca el estudio de los puntos principales de la solución para la versión uniforme del problema, así como la identificación de una serie de

consecuencias de una solución afirmativa de la versión boreliana en el contexto de las relaciones de equivalencia borelianas contables.

En el capítulo 1, repasaremos brevemente los conceptos básicos de la Teoría de la Computabilidad. Enunciaremos una definición formal de función y conjunto computable. Daremos ejemplos de conjuntos que no son computables y enunciaremos los teoremas básicos más importantes de la teoría: el Teorema 1.1.2 conocido como Teorema de Enumeración; el Teorema 1.1.4 conocido como Teorema  $s$ - $m$ - $n$ ; el Teorema 1.1.5 conocido como el Teorema Relativizado de Recursión de Kleene. Introduciremos formas de comparar conjuntos de naturales con base en nociones de computabilidad, las denominaremos reducibilidades, mostraremos algunas de sus propiedades relevantes y definiremos la estructura de los grados de Turing. Después, mostraremos una clasificación de conjuntos de naturales con base en la sintaxis de las fórmulas que los definen y en el Teorema 1.3.2 la vincularemos con la noción de enumerar conjuntos de forma computable. Luego, extenderemos la operación de salto de Turing hacia los ordinales transfinitos y el Teorema 1.4.1 nos permitirá establecer la definición del salto transfinito de Turing.

En el capítulo 2, presentaremos dos versiones de nuestros resultados: una de ellas será asumiendo el Axioma de Determinación (**AD**) y el Axioma de Elecciones Dependientes (**DC**); la otra será asumiendo el Axioma de Elección (**AC**). Introduciremos la noción de cono de Turing y como consecuencia de los Teoremas 2.1.1 y 2.1.2 podremos considerarlos como *conjuntos grandes* respecto a la medida de Martin. Después, daremos el enunciado formal de la Conjetura de Martin en las dos versiones mencionadas. En la sección 2.2.1, desarrollaremos la solución para las dos partes de la conjetura en el caso de las funciones uniformemente Turing-invariantes. Las soluciones de la primera y segunda parte se exponen en los Teoremas 2.2.1 y 2.2.4 y están basadas en las demostraciones dadas en [SS88] y [Ste82] respectivamente. Parte de la contribución de este trabajo se encuentra la presentación de los detalles de la prueba del Teorema 2.2.1.

En el capítulo 3, introduciremos el concepto de relación de equivalencia boreliana, el cual es central en la Teoría de Relaciones de Equivalencia Borelianas (cf. [Kec21]). Expondremos ejemplos de relaciones de equivalencia borelianas contables y veremos que la Turing-equivalencia es uno de ellos. En la definición 3.1.2 introduciremos la noción de reducción boreliana como una forma para establecer comparaciones entre dichas relaciones. Con base en las reducciones borelianas definiremos diferentes nociones de complejidad: suavidad, hiperfinitud y universalidad. En la Definición 3.2.5 debilitaremos la noción de reducción y en el Teorema 3.2.4 veremos que la Turing-equivalencia tiene la propiedad de ser débilmente universal. Para finalizar este trabajo, en el Teorema 3.3.1 se expone la incompatibilidad de la Conjetura de Martin con la universalidad de la Turing-equivalencia y en la Proposición 3.3.3 y Teoremas 3.3.3 y 3.3.4 se exponen las principales consecuencias de una solución afirmativa de la Conjetura de Martin en el contexto de las relaciones débilmente universales.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Teoría de la Computabilidad: resultados básicos . . . . .	1
1.2. Reducibilidades . . . . .	9
1.2.1. Reducibilidad $m$ y $1$ . . . . .	9
1.2.2. Reducibilidad Turing . . . . .	11
1.3. Computabilidad Enumerable y Jerarquía Aritmética . . . . .	14
1.3.1. Jerarquía Aritmética . . . . .	14
1.3.2. Computabilidad Enumerable . . . . .	16
1.4. Salto de Turing Transfinito . . . . .	20
<b>2. Conjetura de Martin</b>	<b>27</b>
2.1. Medida de Martin . . . . .	27
2.2. Conjetura de Martin . . . . .	33
2.2.1. Funciones Uniformemente Turing-Invariantes . . . . .	34
<b>3. Relaciones de Equivalencia Borelianas</b>	<b>47</b>
3.1. Conceptos Básicos . . . . .	47
3.1.1. Relaciones de Equivalencia Borelianas . . . . .	47
3.1.2. Reducciones . . . . .	50
3.2. Reducciones Borelianas . . . . .	52
3.2.1. Suavidad . . . . .	54
3.2.2. Hiperfinitud . . . . .	56
3.2.3. Universalidad . . . . .	57
3.2.4. Reducibilidad Débil . . . . .	60
3.3. Consecuencias de la Conjetura de Martin . . . . .	63
3.3.1. Universalidad de $\equiv_T$ . . . . .	63
3.3.2. Relaciones Débilmente Universales . . . . .	64
<b>Conclusiones</b>	<b>69</b>
<b>Apéndice</b>	<b>70</b>



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Teoría de la Computabilidad: resultados básicos

Un *algoritmo* es un conjunto ordenado y finito de *instrucciones* que, al ser ejecutadas en el orden en el que se presentan o que éstas indiquen, nos permiten resolver un determinado *problema*. En ocasiones también llamaremos *programa* a un algoritmo.

Con el objetivo de formalizar nuestra noción de algoritmo, asumiremos que un algoritmo es una lista de instrucciones de una máquina de Turing. La creencia de que las máquinas de Turing son suficientes para describir cualquier algoritmo es conocida como *tesis de Church-Turing*. En este trabajo, tomamos como cierta esta afirmación, con el objetivo de contar con una base formal sólida para nuestros resultados.

En nuestras pruebas omitiremos el desarrollo explícito de una máquina de Turing y, en su lugar, nos limitaremos a describir un algoritmo de manera informal, dejando al lector convencerse que eso es suficiente. A este método de demostración se le conoce como *prueba por tesis de Church-Turing*.

Dentro de los problemas de interés en Teoría de la Computabilidad se encuentran aquellos que buscan decidir la pertenencia a un conjunto  $X$  de números naturales, vía un programa que tiene acceso a un oráculo  $A$ <sup>1</sup>. En este sentido, un programa que tiene oráculo  $\emptyset$  es equivalente a un programa sin oráculo. Así que, de ahora en adelante, para darle generalidad a nuestros resultados, estos serán enunciados para programas con oráculos.

Comenzamos definiendo predicados que nos serán útiles para expresar que un programa se detiene, y funciones que recuperan los valores que devuelven los programas que se detienen.

---

<sup>1</sup>Un programa tiene acceso a un oráculo  $A$  cuando, siempre que sea necesario, puede responder si un natural es elemento de  $A$ .

**Definición 1.1.1.** Dado un programa  $P^A$  con oráculo  $A \subseteq \omega$  y un número natural  $n \in \omega$ ,  $n \geq 1$ , definimos

- (i)  $P^A(x_1, \dots, x_n) \downarrow$  como el predicado que es verdadero si y sólo si el programa  $P^A$  se detiene en la entrada  $(x_1, \dots, x_n)$ .
- (ii)  $P^A(x_1, \dots, x_n) \downarrow y$  como el predicado que es verdadero si y sólo si  $P^A(x_1, \dots, x_n) \downarrow$  y el programa devuelve  $y$ .
- (iii)  $P^A(x_1, \dots, x_n) \uparrow$  como el predicado que es verdadero si y sólo si el programa  $P^A$  no se detiene en la entrada  $(x_1, \dots, x_n)$ .
- (iv)  $\Phi_P^{A,n} : \omega^n \rightarrow \omega$  la *función parcial n-aria inducida de  $P^A$* , cuya regla de correspondencia es

$$\Phi_P^{A,n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} y & \text{si } P^A(x_1, \dots, x_n) \downarrow y \\ \text{indefinida} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el caso de  $\Phi_P^{A,1}$ , únicamente escribimos  $\Phi_P^A$ . Si  $A = \emptyset$  lo omitimos como superíndice.

A una función cuyos valores se pueden obtener vía un algoritmo, la llamaremos función *efectivamente calculable*; es decir, funciones para las cuales existe un algoritmo tal que si es ejecutado en una entrada  $x$ , este se detiene y devuelve  $f(x)$ .

Para las funciones cuyo dominio es un subconjunto de  $\omega^n$  y codominio  $\omega$ , podemos dar una definición formal de la noción de ser efectivamente calculable como sigue.

**Definición 1.1.2** (Función Parcialmente Computable). Sean  $A \subseteq \omega$  un conjunto y  $f : \omega^n \rightarrow \omega$  una función parcial. Diremos que,

- (i)  $f$  es *parcialmente A-computable* si y sólo si existe un programa  $P^A$  con oráculo  $A$  que toma como input una tupla  $(x_1, \dots, x_n)$  y, si  $f$  está definida en dicha tupla, devuelve  $f(x_1, \dots, x_n)$  y se detiene, en caso de que no, el programa no se detiene; es decir, si y sólo si  $\Phi_P^{A,n} = f$  para algún programa  $P^A$  con oráculo  $A$ .
- (ii)  $f$  es *A-computable* si y sólo si es parcialmente A-computable y  $\text{dom } f = \omega$ .
- (iii)  $f$  es *computable* si y sólo si es  $\emptyset$ -computable.

En resumen, una función computable no requiere de ningún oráculo para recuperar sus valores.

Para demostrar que una función  $f$  es parcialmente A-computable, es suficiente dar un algoritmo informal y verificar que, para cada  $x \in \text{dom } f$ , el algoritmo se detiene y devuelve  $f(x)$ . Dicho esto, es sencillo demostrar que los siguientes son ejemplos de funciones parcialmente computables, respecto a un oráculo según corresponda.

**Ejemplo 1.1.1.** Sean  $A \subseteq \omega$  un conjunto y  $n, k \geq 1$  naturales.

(i) Si  $f : \omega^k \rightarrow \omega$  y  $g_1, \dots, g_k : \omega^n \rightarrow \omega$  son funciones parcialmente  $A$ -computables entonces la composición  $f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$  es parcialmente  $A$ -computable.

(ii) Si  $f : \omega^{n+1} \rightarrow \omega$  es  $A$ -computable entonces su *minimización*

$$\min_{y \in \omega} \{f(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}$$

es parcialmente  $A$ -computable.

(iii) Si  $f : \omega^n \rightarrow \omega$ ,  $g : \omega^{n+2} \rightarrow \omega$  son  $A$ -computables entonces la función  $h : \omega^{n+1} \rightarrow \omega$  tal que

$$h(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$h(x_1, \dots, x_n, m+1) = g(x_1, \dots, x_n, m, h(x_1, \dots, x_n, m))$$

es  $A$ -computable. La función  $h$  es la función obtenida tras aplicar la operación de *recursión primitiva* a  $f$  y  $g$ .

(iv) Las funciones  $x \mapsto 0$ ;  $x \mapsto x+1$ ;  $(x, y) \mapsto x+y$ ;  $(x, y) \mapsto \max\{x-y, 0\}$ ;  $(x, y) \mapsto xy$ ;  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$  son computables.

(v) La función  $(x, y) \mapsto (x+y)(x+y+1)/2 + x$  es biyectiva y computable.

(vi) Existe una biyección computable entre  $\omega^n$  y  $\omega$  y biyecciones efectivas entre  $\omega^{<\omega}$  y  $\omega$ ; entre  $\omega^{<\omega} \times \omega^n$  y  $\omega$ ; entre  $\omega^{<\omega} \times \omega^{<\omega}$  y  $\omega$ ; etc.

Del inciso (vi) del ejemplo anterior, a cada tupla finita, o tupla finita de tuplas finitas,  $\sigma$  de números naturales, le podemos asociar un número natural de forma efectiva; a dicha asociación la denotaremos por  $\ulcorner \sigma \urcorner$ . Recíprocamente, a cada natural  $x$ , podemos asociarle una tupla finita, que denotamos como  $((x)_1, \dots, (x)_n)$ , y en ocasiones sólo  $\ulcorner x \urcorner$ . Salvo biyecciones efectivamente calculables,  $\ulcorner \ulcorner x \urcorner \urcorner = \ulcorner ((x)_1, \dots, (x)_n) \urcorner = x$ . Cada asignación es única salvo biyecciones efectivamente calculables y, para nuestros propósitos, este hecho no afectará en nuestras pruebas.

Podemos entender a un programa como una tupla finita de instrucciones. A cada instrucción es posible asociarle un único número natural. Por lo tanto, un programa puede verse como una tupla finita de números naturales. Así, es posible asociar de forma biyectiva y efectiva a cada programa un número natural. Nuevamente, nuestras asignaciones son iguales salvo biyecciones efectivamente calculables.

*Notación.* Sean  $A \subseteq \omega$  un conjunto y  $e, n \in \omega$  tal que  $n \geq 1$ .

(i) Denotamos por  $\mathbf{P}_e^A$  al  $e$ -simo programa con oráculo  $A$ .

(ii) Denotamos por  $\Phi_e^{A,n}$  a la función  $n$ -aria definida por  $\mathbf{P}_e^A$ .

Omitimos a  $n$  cuando  $n = 1$  y a  $A$  cuando  $A = \emptyset$ .

Podemos caracterizar a las funciones parcialmente  $A$ -computables de la siguiente manera.

**Proposición 1.1.1.** Una función parcial  $f : \omega^n \rightarrow \omega$  es parcialmente  $A$ -computable si y sólo si existe  $e \in \omega$  tal que  $f = \Phi_e^A \circ \varphi_n$  donde  $\varphi_n$  es una biyección computable entre  $\omega^n$  y  $\omega$ .

*Demostración.* Si  $f = \Phi_e^A \circ \varphi_n$  para algún  $e \in \omega$ , entonces  $f$  es parcialmente  $A$ -computable por ser la composición de funciones parcialmente  $A$ -computables.

Si  $f$  es parcialmente  $A$ -computable, definimos  $P_e^A$  como el programa que en una entrada  $x$ , posteriormente obtiene  $((x)_1, \dots, (x)_n)$ , y finalmente ejecuta el programa que hace a  $f$  parcialmente  $A$ -computable en dicha tupla. Se satisface que  $f = \Phi_e^A \circ \varphi_n$ . ■

La proposición anterior justifica nuestra restricción al estudio de funciones parcialmente  $A$ -computables de una sola variable; aunque en ocasiones hablaremos de funciones en  $n$  variables.

**Definición 1.1.3.** Sean  $A \subseteq \omega$  un conjunto y  $e, n \in \omega$  con  $n \geq 1$ . Definimos

- (i)  $\Phi_e^A(x) \downarrow$  el predicado que es verdadero si y sólo si  $\mathbf{P}_e^A(x) \downarrow$ . También  $\Phi_e^A(x) \downarrow y$  el predicado que es verdadero si y sólo si  $\mathbf{P}_e^A(x) \downarrow y$  para algún  $y \in \omega$ .
- (ii)  $\Phi_e^A(x) \uparrow$  el predicado que es verdadero si y sólo si  $\mathbf{P}_e^A(x) \uparrow$ .
- (iii) Para cada  $s \geq 1$ ,  $\Phi_{e,s}^A(x) \downarrow$  el predicado que es verdadero si y sólo si  $e, x < s$ ,  $\mathbf{P}_e^A(x) \downarrow$ , el programa se detuvo en  $< s$  pasos y sólo se utilizaron números  $z < s$  en el cómputo.

También  $\Phi_{e,s}^A(x) \downarrow y$  el predicado que es verdadero si y sólo si  $y < s$ ,  $\Phi_{e,s}^A(x) \downarrow$  y  $\mathbf{P}_e^A(x) \downarrow y$ .

- (iv) Dados  $\sigma \in \omega^{<\omega}$  y  $s \geq 1$ ,  $\Phi_{e,s}^\sigma(x) \downarrow$  el predicado que es verdadero si y sólo si existe  $A \subseteq \omega$  tal que  $\sigma \subseteq \chi_A$ ,  $\Phi_e^A(x) \downarrow$  y sólo se utilizan números  $z < \min\{|\sigma|, s\}$  en el cómputo.

Si  $y \in \omega$ ,  $\Phi_{e,s}^\sigma(x) \downarrow y$  el predicado que es verdadero si y sólo si  $\Phi_{e,s}^\sigma(x) \downarrow$  y el resultado del cómputo es  $y$ .

También,  $\Phi_e^\sigma(x) \downarrow$  como el predicado que es verdadero si y sólo si  $\Phi_{e,|\sigma|}^\sigma(x) \downarrow$ . Dado  $y \in \omega$ ,  $\Phi_e^\sigma(x) \downarrow y$  el predicado que es verdadero si y sólo si  $\Phi_{e,|\sigma|}^\sigma(x) \downarrow y$ .

- (v)  $W_e^A = \text{dom } \Phi_e^A$ ; si  $s \geq 1$ , definimos  $W_{e,s}^A = \{x \in \omega \mid \Phi_{e,s}^A(x) \downarrow\}$ ; si  $\sigma \in \omega^{<\omega}$  definimos  $W_{e,s}^\sigma = \{x \in \omega \mid \Phi_{e,s}^\sigma(x) \downarrow\}$  y  $W_e^\sigma = \{x \in \omega \mid \Phi_e^\sigma(x) \downarrow\}$ .

En cada definición, omitimos a  $A$  cuando  $A = \emptyset$  y a  $\sigma$  cuando  $\sigma = \emptyset$ .

Una consecuencia inmediata de la definición previa, es la siguiente.

**Proposición 1.1.2** (Principio del Uso). Sea  $A \subseteq \omega$ .

- (i) Si  $\Phi_e^A(x) \downarrow y$  entonces  $\exists s \in \omega : \exists \sigma \subseteq \chi_A : \Phi_{e,s}^\sigma(x) \downarrow y$ .
- (ii) Si  $\Phi_{e,s}^\sigma(x) \downarrow y$  entonces  $\forall t \geq s : \forall \tau \supseteq \sigma : \Phi_{e,t}^\tau(x) \downarrow y$ .
- (iii) Si  $\Phi_e^A(x) \downarrow$  entonces existe  $m \in \omega$  tal que para todo  $B \subseteq \omega$ , si  $\chi_A \upharpoonright m = \chi_B \upharpoonright m$  entonces  $\Phi_e^A(x) = \Phi_e^B(x)$ .
- (iv) Si  $\Phi_e^\sigma(x) \downarrow y$  entonces  $\forall \chi_A \supseteq \sigma : \Phi_e^A(x) \downarrow y$ .

De manera similar al caso de funciones, podemos preguntarnos si podemos decidir, de manera efectiva, si un número natural  $x$  pertenece a un conjunto  $A$ .

**Definición 1.1.4** (Conjunto Computable). Sean  $A, B \subseteq \omega$  conjuntos. Diremos que,

- (i)  $A$  es  $B$ -computable si y sólo si y sólo si  $\chi_A$  es  $B$ -computable.
- (ii)  $A$  es computable, también *decidible*, si y sólo si  $A$  es  $\emptyset$ -computable.

Un conjunto  $A$  es  $B$ -computable si existe un algoritmo con oráculo  $B$ , que en una entrada  $x$ , se detiene y devuelve 1 si  $x \in A$  y 0 en otro caso; es decir, responde si  $x \in A$ .

Presentamos a continuación, algunos ejemplos de conjuntos  $A$ -computables.

**Ejemplo 1.1.2.** Sea  $A \subseteq \omega$  un conjunto. Entonces,

- (i)  $A$  es  $A$ -computable.
- (ii) Una función  $f$  es  $A$ -computable si y sólo si  $G_f = \{\ulcorner(x, f(x))\urcorner \in \omega \mid x \in \omega\}$  es un conjunto  $A$ -computable.

Por el inciso (ii), las gráficas de las funciones computables presentadas en el Ejemplo 1.1.1 son conjuntos computables.

Es posible dar una caracterización de las funciones parcialmente  $A$ -computables, como sigue.

**Teorema 1.1.1** (Forma Normal de Kleene). *Para todo conjunto  $A \subseteq \omega$ , existen una  $\mathcal{N}^A$ -fórmula acotada<sup>2</sup>  $T^A(e, x, y)$  y una función computable  $U$  tal que*

$$\Phi_e^A(x) = U(\min_{y \in \omega} T^A(e, x, y)).$$

<sup>2</sup>Una  $\mathcal{N}^A$ -fórmula acotada es una fórmula en el lenguaje  $\mathcal{N}^A$  que se obtiene de aplicar una cantidad finita de veces los cuantificadores  $\forall x < y$  ó  $\exists x < y$  a una  $\mathcal{N}^A$ -fórmula libre de cuantificadores; donde  $\mathcal{N}^A = (\omega; 0, 1, +, \times, \leq, \in^A)$  y  $\in^A(x)$  es verdadero si y sólo si  $x \in A$ .

*Demostración.* Sea  $T^A(e, x, y)$  el predicado que es verdadero si y sólo si  $y$  es el número del cómputo  $\mathbf{P}_e^A$  en la entrada  $x$ . Podemos formalizar este predicado en el lenguaje de  $\mathcal{N}^A$ , mediante  $\mathcal{N}^A$ -fórmulas acotadas que expresen los estados del cómputo de un programa. Verificar que  $T^A(e, x, y)$  es verdadero se puede hacer de forma  $A$ -computable.

Por último, la función  $U(y)$  devuelve  $(y)_n$ . De la construcción de  $T^A(e, x, y)$  y  $U$  se verifica que  $\Phi_e^A(x) = U(\min_{y \in \omega} T^A(e, x, y))$ . Una demostración más detallada, se puede consultar en la página 62 de [Dav58]. ■

Como consecuencia, tenemos la existencia de un programa que en una entrada  $(e, x)$ , si  $\mathbf{P}_e^A$  se detiene, entonces devuelve  $\Phi_e^A(x)$ .

**Teorema 1.1.2** (Teorema de Enumeración). *Para cada conjunto  $A \subseteq \omega$ , la función parcial  $\psi_U^A : \omega \times \omega \rightarrow \omega$  tal que*

$$\psi_U^A(e, x) = \begin{cases} \Phi_e^A(x) & \text{si } \Phi_e^A(x) \downarrow \\ \text{indefinida} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

*es parcialmente  $A$ -computable.*

*Demostración.* La función parcial

$$\psi_U^A(x) = U(\min_{y \in \omega} T^A(e, x, y))$$

satisface lo requerido. ■

Resulta natural preguntarse si existe la posibilidad de mejorar el teorema anterior, demostrando que la función  $\psi_U^A$  es  $A$ -computable. Sin embargo, el hecho de que existen programas que no se detienen en todas las entradas  $x \in \omega$ , hace que la función  $\psi_U^A$  no sea total.

La aplicación más importante del Teorema de Enumeración se encuentra en la presentación de ejemplos explícitos que no son computables.

**Proposición 1.1.3.** Dado un conjunto  $A \subseteq \omega$ , los siguientes conjuntos no son  $A$ -computables:

- (i)  $A' = \{e \in \omega \mid \Phi_e^A(e) \downarrow\}$ .
- (ii)  $K^A = \{\langle e, x \rangle \in \omega \mid \Phi_e^A(x) \downarrow\}$ . A  $K^A$  también lo llamaremos *conjunto de la detención relativo a  $A$* .

*Demostración.* (i) Supongamos que  $A'$  es  $A$ -computable. Afirmamos que la función  $f^A : \omega \rightarrow \omega$  tal que:

$$f^A(x) = \begin{cases} \Phi_x^A(x) + 1 & \text{si } \Phi_x^A(x) \downarrow \\ 0 & \text{si ocurre otro caso} \end{cases}$$

es  $A$ -computable.

En efecto, dado  $x \in \omega$ , preguntamos si  $x \in A'$ . La respuesta la obtenemos de manera  $A$ -computable. En caso de que no, el programa devuelve una respuesta negativa y se detiene. En caso afirmativo, calculamos  $\psi_U^A(x, x) + 1$ , que es lo mismo que  $\Phi_x^A(x) + 1$ . Entonces, como  $f^A$  es  $A$ -computable, existe  $e \in \omega$  tal que  $f^A = \Phi_e^A$  y  $\text{dom } \Phi_e^A = \omega$ . Por consiguiente  $\Phi_e^A(e) \downarrow$ , lo cual implica que  $\Phi_e^A(e) + 1 = f^A(e) = \Phi_e^A(e)$ , que es una contradicción. Concluimos entonces que  $A'$  no es  $A$ -computable.

- (ii) Si  $K^A$  es  $A$ -computable, entonces preguntando a  $K^A$  si  $(e, e) \in K^A$ , podemos responder de forma  $A$ -computable si  $e \in A'$ . Por lo tanto,  $A'$  es  $A$ -computable, la cual es una contradicción. ■

La operación  $A \mapsto A'$  sobre conjuntos de naturales se puede seguir iterando, con el fin de obtener conjuntos que no son  $A$ -computables,  $A'$ -computables, y así sucesivamente.

**Definición 1.1.5** (Salto de Turing). Dados  $A \subseteq \omega$  y  $n \in \omega$ , definimos recursivamente su  $n$ -ésimo salto de Turing, denotado por  $A^{(n)}$ , como sigue:  $A^{(0)} = A$  y  $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$ .

Es posible caracterizar a las funciones que son  $A'$ -computables como aquellas funciones que son límite puntual de funciones  $A$ -computables.

**Teorema 1.1.3** ([Soa87] p. 57, Lema del Límite). Sean  $A \subseteq \omega$  un conjunto y  $f : \omega \rightarrow \omega$  una función. Entonces  $f$  es  $A'$ -computable si y sólo si existen una sucesión de funciones  $\{f_s : \omega \rightarrow \omega\}_{s \in \omega}$  y una función  $F : \omega \times \omega \rightarrow \omega$  que es  $A$ -computable, tal que  $F(x, s) = f_s(x)$  y para todo  $n \in \omega$ ,  $f(n) = \lim_{s \rightarrow \infty} f_s(n)$ <sup>3</sup>.

Enseguida enunciamos un resultado que nos permite calcular valores de programas en entradas arbitrariamente grandes, utilizando a las primeras de estas entradas como parámetros.

**Teorema 1.1.4** (Teorema s-m-n). Para todo  $m, n \geq 1$ , existe una función computable e inyectiva  $s_n^m : \omega^{m+1} \rightarrow \omega$  tal que para todo conjunto  $A \subseteq \omega$  y cualesquiera  $e, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in \omega$  se cumple que:

$$\Phi_{s_n^m(e, x_1, \dots, x_m)}^A(y_1, \dots, y_n) = \Phi_e^A(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n).$$

*Demostración.* Sea  $s_n^m : \omega^{m+1} \rightarrow \omega$  la función que a cada  $(e, x_1, \dots, x_m)$  le asocia un número natural  $e_0$  tal que  $\Phi_{e_0}^A(y_1, \dots, y_n) = \psi_U^A(e', \ulcorner(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)\urcorner)$ , donde  $e'$  es un número natural tal que

$$\Phi_{e'}^A(\ulcorner(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)\urcorner) = \Phi_e^A(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

---

<sup>3</sup> $f(n) = \lim_{s \rightarrow \infty} f_s(n)$  si y sólo si existe  $k \in \omega$  tal que para todo  $s \geq k$ ,  $f_s(n) = f(n)$ .

y el cual, se obtiene de forma efectiva del programa  $e$  y del programa de una función biyectiva y computable entre  $\omega^{m+n}$  y  $\omega$ . La función  $s_n^m$  es computable e inyectiva ya que entradas distintas definen programas distintos. ■

El siguiente resultado nos da una forma más sencilla de obtener conjuntos que no son  $A$ -computables.

**Proposición 1.1.4** (Teorema de Rice). Dados un conjunto  $A \subseteq \omega$  y un conjunto no vacío  $C$  de funciones parcialmente  $A$ -computables distinto del conjunto de todas las funciones parcialmente  $A$ -computables, entonces  $\mathcal{B} = \{e \in \omega \mid \Phi_e^A \in C\}$  no es  $A$ -computable.

*Demostración.* A fin de llegar a una contradicción, supongamos que  $\mathcal{B} = \{e \in \omega \mid \Phi_e^A \in C\}$  es  $A$ -computable. Sea  $e'$  el número asociado al programa que no se tiene en ninguna entrada y supongamos que  $\Phi_{e'}^A \notin \mathcal{B}$ . Sea  $e_0 = \min \mathcal{B}$ . Definimos la función parcial  $f : \omega \times \omega \rightarrow \omega$  tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \Phi_{e_0}^A(y) & \text{si } \Phi_x^A(x) \downarrow \\ \text{indefinida} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se satisface que  $f$  es parcialmente  $A$ -computable y, más aún,  $f = \Phi_e^A$  para algún  $e \in \omega$  que se puede obtener de forma computable a partir de  $e_0$ . Por el teorema s-m-n, existe una función  $s : \omega \times \omega \rightarrow \omega$  computable e inyectiva tal que  $f(x, y) = \Phi_e^A(x, y) = \Phi_{s(e,x)}^A(y)$ .

Notemos que  $x \in A'$  si y sólo si  $s(e, x) \in \mathcal{B}$ . Por lo tanto, como  $\mathcal{B}$  es  $A$ -computable, tenemos que  $A'$  es  $A$ -computable, la cual es una contradicción. La demostración es análoga si  $\Phi_{e'}^A \in \mathcal{B}$ . ■

Una de las consecuencias más importantes del Teorema s-m-n es la siguiente.

**Teorema 1.1.5** (Teorema Relativizado de Recursión de Kleene). *Para toda función  $A$ -computable  $f : \omega \rightarrow \omega$ , existe  $n \in \omega$  tal que  $\Phi_n^A = \Phi_{f(n)}^A$ .*

*Demostración.* A partir del Teorema s-m-n, podemos encontrar una función computable e inyectiva  $d : \omega \rightarrow \omega$  tal que:

$$\Phi_{d(x)}^A(y) = \begin{cases} \Phi_{\Phi_x^A(x)}^A(y) & \text{si } \Phi_x^A(x) \downarrow \\ \text{indefinida} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea  $e \in \omega$  tal que  $\Phi_e^A = f \circ d$ . Afirmamos  $n = d(e)$  satisface lo requerido. Como  $f$  es total,  $\Phi_e^A$  lo es. Por consiguiente,  $\Phi_e^A(e) \downarrow$ . Así,

$$\Phi_n^A = \Phi_{d(e)}^A = \Phi_{\Phi_e^A(e)}^A = \Phi_{f(d(e))}^A = \Phi_{f(n)}^A.$$

■

**Corolario 1.1.1** (Teorema de Recursión de Kleene). Para toda función computable  $f : \omega \rightarrow \omega$ , existe  $n \in \omega$  tal que  $\Phi_n = \Phi_{f(n)}$ .

Una aplicación frecuente del Teorema de la Recursión se encuentra en su uso para evitar circularidad en la definición de funciones parcialmente  $A$ -computables  $\Phi_e^A$  que hacen referencia a su propio índice  $e$ .

## 1.2. Reducibilidades

En esta sección compararemos conjuntos de números naturales mediante distintas medidas de complejidad que llamaremos reducibilidades.

### 1.2.1. Reducibilidad $m$ y $1$

**Definición 1.2.1.** Sean  $A, B \subseteq \omega$  conjuntos. Diremos que,

- (i)  $A$  es  $m$ -reducible a  $B$ , lo cual denotamos por  $A \leq_m B$ , si y sólo si existe una función computable  $f : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $x \in A$  si y sólo si  $f(x) \in B$ . En este caso, también diremos que  $A \leq_m B$  vía  $f$ .

Si además  $f$  es inyectiva, diremos que  $A$  es  $1$ -reducibilidad a  $B$ , lo cual denotamos por  $A \leq_1 B$ . En este caso, también diremos que  $A \leq_1 B$  vía  $f$ .

- (ii)  $A$  es  $m$ -equivalente a  $B$ , lo cual denotamos por  $A \equiv_m B$ , si y sólo si  $A \leq_m B$  y  $B \leq_m A$ .
- (iii)  $A$  es  $1$ -equivalente a  $B$ , lo cual denotamos por  $A \equiv_1 B$ , si y sólo si  $A \leq_1 B$  y  $B \leq_1 A$ .

Mostramos a continuación algunas propiedades.

**Ejemplo 1.2.1.** Sean  $A, B \subseteq \omega$  conjuntos. Entonces,

- (i)  $A \leq_1 B$  implica  $A \leq_m B$ . En particular,  $A \equiv_1 B$  implica  $A \equiv_m B$ .
- (ii)  $A \oplus B = \{2n \mid n \in A\} \cup \{2n + 1 \mid n \in B\}$  es la menor cota superior del conjunto  $\{A, B\}$  respecto de  $\leq_m$ .
- (iii) Para cada  $n \in \omega$ ,  $A^{(n)} \leq_1 A^{(n+1)}$ .
- (iv) Para cada  $n \in \omega$ ,  $\bigsqcup_{i < n+1} A^{(i)} \equiv_1 A^{(n)}$ .

*Demostración.* (i) Se sigue de las definiciones de  $\leq_1$  y  $\leq_m$ .

- (ii) Sea  $f : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $f(x) = 2x$ . Tenemos que  $f$  es computable y además  $x \in A$  si y sólo si  $f(x) \in A \oplus B$ . Luego,  $A \leq_m A \oplus B$ . Análogamente,  $B \leq_m A \oplus B$ .

Sea  $C$  tal que  $A \leq_m C$  vía  $f$  y  $B \leq_m C$  vía  $g$ . La función  $h : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $h(x) = f(x/2)$  si  $x$  es par y  $h(x) = g((x-1)/2)$  en otro caso, verifica que  $x \in A \oplus B$  si y sólo si  $h(x) \in C$ . Por lo tanto,  $A \oplus B \leq_m C$ .

- (iii) Sea  $s : \omega \rightarrow \omega$  computable e inyectiva tal que:

$$\Phi_{s(x)}^{A^{(n)}}(y) = \begin{cases} y & \text{si } x \in A^{(n)} \\ \text{indefinida} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces,

$$x \in A^{(n)} \Leftrightarrow \forall y \in \omega : \Phi_{s(x)}^{A^{(n)}}(y) \downarrow \Leftrightarrow \Phi_{s(x)}^{A^{(n)}}(s(x)) \downarrow \Leftrightarrow s(x) \in A^{(n+1)}.$$

- (iv) La desigualdad  $A^{(n)} \leq_1 \bigsqcup_{i < n+1} A^{(i)}$  es inmediata. Para verificar la otra desigualdad, para cada  $i < n+1$ , sea  $s_i : \omega \rightarrow \omega$  función computable e inyectiva tal que  $x \in A^{(i)}$  si y sólo si  $s_i(x) \in A^{(n)}$ . Definimos a  $s : \omega \rightarrow \omega$  función computable e inyectiva tal que:

$$\Phi_{s(x)}^{A^{(n-1)}}(y) = \begin{cases} y & \text{si } x \in A^{(i)} \wedge \Phi_{s_i(x)}^{A^{(n-1)}}(s_i(x)) \downarrow \\ \text{indefinida} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se sigue que,  $x \in \bigsqcup_{i < n+1} A^{(i)}$  si y sólo si  $s(x) \in A^{(n)}$ . ■

**Proposición 1.2.1.** Las relaciones  $\equiv_m$  y  $\equiv_1$  entre subconjuntos de  $\omega$  son relaciones de equivalencia.

*Demostración.* La reflexividad se sigue de que la función identidad es computable. La simetría de las definiciones de  $\equiv_m$  y  $\equiv_1$ . La transitividad de que la composición de funciones computables es computable. ■

El siguiente resultado nos dice que si dos conjuntos son 1-equivalentes, entonces son iguales salvo por una permutación computable.

**Proposición 1.2.2** ([Soa87] p. 24, Teorema de Isomorfismo de Myhill). Para cualesquiera conjuntos  $A, B \subseteq \omega$ ,  $A \equiv_1 B$  si y sólo si existe una función  $f : \omega \rightarrow \omega$  biyectiva y computable tal que  $f(A) = B$ .

Un par de conjuntos 1-equivalentes son el salto de Turing de un conjunto  $A$  y el problema de la detención relativo a  $A$ .

**Ejemplo 1.2.2.** Para todo conjunto  $A \subseteq \omega$ ,

(i)  $A' \equiv_1 K^A$ .

(ii)  $A \leq_1 K^A$  y  $\omega \setminus A \leq_1 K^A$ ; en particular  $A \leq_1 A'$  y  $\omega \setminus A \leq_1 A'$ .

*Demostración.* (i) La función  $f : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $f(x) = \ulcorner(x, x)\urcorner$ , verifica la desigualdad  $A' \leq_1 K^A$ .

Sea  $s : \omega^2 \rightarrow \omega$  computable e inyectiva tal que:

$$\Phi_{s(e,x)}^A(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_e^A(x) \downarrow \\ \text{indefinida} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función  $f : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $f(x) = s((x)_1, (x)_2)$  verifica la desigualdad  $K^A \leq_1 A'$ .

(ii) Sea  $e \in \omega$  tal que

$$\Phi_e^A(x) = \begin{cases} \chi_A(x) & \text{si } x \in A \\ \text{indefinida} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos  $f : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $f(x) = \ulcorner(e, x)\urcorner$ . Entonces  $f$  es computable, inyectiva y es tal que  $x \in A$  si y sólo si  $\ulcorner(e, x)\urcorner \in K^A$ . Por lo tanto,  $A \leq_1 K^A$ . De manera similar se demuestra que  $\omega \setminus A \leq_1 K^A$ . ■

### 1.2.2. Reducibilidad Turing

Presentamos a continuación un tipo de reducibilidad más débil que las reducibilidades  $m$  y  $1$ , pero que utilizaremos con frecuencia para comparar conjuntos de naturales.

**Definición 1.2.2** (Turing-reducibilidad). Sean  $A, B \subseteq \omega$  conjuntos. Diremos que,

- (i)  $A$  es Turing-reducible a  $B$ , lo cual denotamos por  $A \leq_T B$ , si y sólo si  $A$  es  $B$ -computable. Además, diremos que  $A \leq_T B$  vía  $e$  si  $\Phi_e^B = \chi_A$ .
- (ii)  $A$  es Turing-equivalente, a  $B$ , lo cual denotamos por  $A \equiv_T B$ , si y sólo si  $A \leq_T B$  y  $B \leq_T A$ .

De entre todos los conjuntos de naturales, los computables son los conjuntos más simples respecto  $\leq_T$ .

**Ejemplo 1.2.3.** Para todo conjunto  $A \subseteq \omega$ ,

- (i)  $A \equiv_T A$ .
- (ii)  $A$  es computable si y sólo si  $A \equiv_T \emptyset$ .

*Demostración.* El inciso (i) se sigue de que  $A$  es  $A$ -computable. El inciso (ii) de que  $\emptyset$  es  $A$ -computable y de que  $A$  es computable si y sólo si  $A$  es  $\emptyset$ -computable. ■

**Proposición 1.2.3.** La relación  $\equiv_T$  entre subconjuntos de  $\omega$  es una relación de equivalencia.

*Demostración.* La reflexividad se sigue del ejemplo anterior. La simetría se obtiene de la definición de  $\equiv_T$ . La transitividad se sigue del hecho de que podemos construir un programa que contenga a otro programa como subrutina. ■

**Definición 1.2.3** (Grados de Turing). Las clases de equivalencia obtenidas por la relación  $\equiv_T$  se denominan *grados de Turing*. Al conjunto de todos los grados de Turing lo denotamos por  $\mathbf{D}_T$ .

A continuación mostramos algunas propiedades relevantes de la Turing-reducibilidad.

**Ejemplo 1.2.4.** Sean  $A, B \subseteq \omega$  conjuntos.

- (i)  $A \leq_m B$  implica  $A \leq_T B$ , pero el recíproco no se cumple. En particular,  $A \equiv_m B$  implica  $A \equiv_T B$ .
- (ii)  $A' \equiv_T K^A$ .
- (iii)  $A \leq_T A'$  y es falso que  $A' \leq_T A$ .
- (iv)  $A \oplus B = \{2n \mid n \in A\} \cup \{2n + 1 \mid n \in B\}$  es la menor cota superior del conjunto  $\{A, B\}$  respecto de  $\leq_T$ .
- (v)  $A \leq_T B$  si y sólo si  $A' \leq_m B'$ ; en particular  $A \leq_T B$  implica  $A' \leq_T B'$ .
- (vi) Para todo  $n \in \omega$ ,  $A \equiv_T B$  implica  $A^{(n)} \equiv_T B^{(n)}$ .

*Demostración.* (i) Sea  $f : \omega \rightarrow \omega$  función computable tal que  $x \in A$  si y sólo si  $f(x) \in B$ . Definamos el programa  $\mathbf{P}_e^B$  que en una entrada  $x$ , devuelve  $\chi_B(f(x))$ . Se sigue que,  $\Phi_e^B = \chi_A$ . Por lo tanto,  $A$  es  $B$ -computable; i.e.  $A \leq_T B$ .

El recíproco es falso ya que dado  $A \subseteq \omega$ , se cumple  $\omega \setminus A' \leq_T A'$  pero, como veremos más adelante, no ocurre que  $\omega \setminus A' \leq_m A'$ .

- (ii) Se sigue del Ejemplo 1.2.2 y del inciso (i).
- (iii) Se sigue del Ejemplo 1.2.2, del inciso (i) y del hecho de que  $A'$  no es  $A$ -computable.

- (iv) Por el Ejemplo 1.2.2 y el inciso (i) sabemos que  $A \oplus B$  es cota superior de  $\{A, B\}$  respecto de  $\leq_T$ . Ahora bien, si  $C \subseteq \omega$  es un conjunto tal que  $A \leq_T C$  vía  $e_0$  y  $B \leq_T C$  vía  $e_1$ , entonces  $A \oplus B \leq_T C$  vía  $e$ , donde  $e \in \omega$  es tal que:

$$\Phi_e^C(x) = \begin{cases} \Phi_{e_0}^C(\frac{x}{2}) & \text{si } x \text{ es par} \\ \Phi_{e_1}^C(\frac{x-1}{2}) & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

- (v) Si  $A \leq_T B$  vía  $e_0$ , entonces definimos  $f : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $f(\ulcorner(e, x)\urcorner) = \ulcorner(e', x)\urcorner$  donde  $e'$  corresponde al programa que en caso de tener una instrucción de oráculo  $A$ , la sustituye por el programa de número  $e_0$ . Tenemos que  $f$  es computable y cumple que  $\ulcorner(e, x)\urcorner \in K^A$  si y sólo si  $\ulcorner(e', x)\urcorner \in K^B$ . Por lo tanto,  $K^A \leq_m K^B$ , i.e.  $A' \leq_m B'$ .

Si  $A' \leq_m B'$  entonces, por el Ejemplo 1.2.2,  $A \leq_m K^B$  vía  $f$  y  $\omega \setminus A \leq_m K^B$  vía  $g$ . Definimos el programa que en una entrada  $x$ , obtiene el valor de  $f(x)$  y  $g(x)$ , y ejecuta los programas  $(f(x))_1$  y  $(g(x))_1$ , con oráculo  $B$ , en las entradas  $(f(x))_2$  y  $(g(x))_2$  respectivamente; si  $(f(x))_1$  se detiene entonces el programa responde que  $x \in A$ ; si  $(g(x))_1$  se detiene entonces responde que  $x \notin A$ . Notemos que, dado que  $x \in A$  ó  $x \notin A$ , nuestro programa anterior siempre se detiene y devuelve la respuesta de  $x \in A$ . Por lo tanto,  $A$  es  $B$ -computable, i.e.  $A \leq_T B$ .

- (vi) Se sigue del inciso anterior. ■

Si ocurre que  $A \leq_T B$  pero no  $B \leq_T A$  entonces diremos que  $A <_T B$ . Notemos que esta nueva relación no es reflexiva ni simétrica sino sólo transitiva.

**Corolario 1.2.1.** Para todo  $A \subseteq \omega$  conjunto,  $A <_T A'$ .

Denotamos por  $\mathbf{0}$  a su grado de Turing a la clase de equivalencia de  $\emptyset$ , por  $\mathbf{0}'$  a la clase de  $\emptyset'$  y por  $\mathbf{0}^{(n)}$  a la clase de  $\emptyset^{(n)}$ .

Para denotar al grado de Turing de un conjunto  $A$  usaremos la letra  $\mathbf{a}$ , para denotar el grado del salto de  $A$  escribimos  $\mathbf{a}'$  y de manera similar para los demás saltos y demás letras del alfabeto.

Diremos también que un grado de Turing  $\mathbf{a}$  es un grado de Turing computable enumerable o recursivo enumerable si y sólo si algún representante de  $\mathbf{a}$  es un conjunto computable enumerable. Notemos que esta definición no depende del representante que se elija.

A partir del orden  $\leq_T$  podemos inducir un orden sobre los grados de Turing como sigue.

**Definición 1.2.4.** Sean  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  grados de Turing. Diremos que,

- (i)  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  si y sólo si  $A \leq_T B$  para algunos conjuntos  $A, B$  en los grados  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  respectivamente.

(ii)  $\mathbf{a} < \mathbf{b}$  si y sólo si  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  pero no ocurre que  $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$ .

Notemos que  $\leq$  de la definición anterior no depende de que conjuntos  $A$  y  $B$  se elijan. Una observación sobre  $\leq$  y  $<$  es la siguiente.

**Proposición 1.2.4.** (a) Para cualesquiera grados de Turing  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  se cumple lo siguiente.

(i)  $\mathbf{a} \leq \mathbf{a}$ .

(ii) Si  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  y  $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$  entonces  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ .

(iii) Si  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  y  $\mathbf{b} \leq \mathbf{c}$  entonces  $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}$ .

(b) Para cualesquiera grados de Turing  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  se cumple lo siguiente.

(i) Es falso que  $\mathbf{a} < \mathbf{a}$ .

(ii) Si  $\mathbf{a} < \mathbf{b}$  entonces es falso que  $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ .

(iii) Si  $\mathbf{a} < \mathbf{b}$  y  $\mathbf{b} < \mathbf{c}$  entonces  $\mathbf{a} < \mathbf{c}$ .

*Demostración.* La demostración se sigue esencialmente de las propiedades de  $\leq_T$  y de la definición de  $<_T$ . ■

**Corolario 1.2.2.**  $(\mathbf{D}_T, \leq)$  es un orden parcial.

## 1.3. Computabilidad Enumerable y Jerarquía Aritmética

En esta sección introduciremos dos conceptos íntimamente ligados por el Teorema de Post: computabilidad enumerable y jerarquía aritmética.

### 1.3.1. Jerarquía Aritmética

La Jerarquía Aritmética es una clasificación de conjuntos de naturales con base en la complejidad de las fórmulas que los definen. Las fórmulas más simples son aquellas libres de cuantificadores, y la complejidad aumenta conforme la cantidad de veces que alternamos los cuantificadores  $\forall$  y  $\exists$ .

**Definición 1.3.1.** Sean  $A \subseteq \omega$  un conjunto y  $\varphi$  una fórmula de primer orden finita en el lenguaje de la aritmética de Peano extendido a  $A$ ,  $\mathcal{N}^A = (\omega; 0, 1, +, \times, \leq, \in^A)$ . Diremos que

- (i)  $\varphi$  es  $\Sigma_0^A$  (también  $\Pi_0^A$ ) si y sólo si  $\varphi$  es lógicamente equivalente a una  $\mathcal{N}^A$ -fórmula acotada, i.e. a una  $\mathcal{N}^A$ -fórmula de primer orden finita que se obtiene de aplicar una cantidad finita de veces cuantificadores del tipo  $\forall x < y$  ó  $\exists x < y$  a una  $\mathcal{N}^A$ -fórmula libre de cuantificadores.

- (ii)  $\varphi$  es  $\Sigma_{n+1}^{0,A}$  (respectivamente  $\Pi_{n+1}^{0,A}$ ) si y sólo si  $\varphi$  es lógicamente equivalente a una  $\mathcal{N}^A$ -fórmula de la forma  $\exists x\psi$  (resp.  $\forall x\psi$ ) donde  $\psi$  es  $\Pi_n^{0,A}$  (resp.  $\Sigma_n^{0,A}$ ).

Como notación, en las definiciones anteriores omitimos a  $A$  cuando  $A = \emptyset$ .

**Definición 1.3.2** (Conjunto Aritmético). Sean  $X, A \subseteq \omega$  conjuntos.

- (i) Diremos que  $X$  es  $\Sigma_n^{0,A}$  (respectivamente  $\Pi_n^{0,A}$ ) si y sólo si  $X$  es definible por una  $\mathcal{N}^A$ -fórmula de primer orden finita que es  $\Sigma_n^{0,A}$  (resp.  $\Pi_n^{0,A}$ ).
- (ii) Diremos que  $X$  es  $\Delta_n^{0,A}$  si y sólo si  $X$  es  $\Sigma_n^{0,A}$  y  $\Pi_n^{0,A}$ .
- (iii) Diremos que  $X$  es  $A$ -aritmético si y sólo si  $X$  es  $\Sigma_n^{0,A}$  ó  $\Pi_n^{0,A}$  para algún  $n \in \omega$ .

Como notación, en las definiciones anteriores omitimos a  $A$  cuando  $A = \emptyset$ .

La relación que existe entre las familias de conjuntos  $\Sigma_n^{0,A}$  y  $\Pi_n^{0,A}$  es bajo la operación de tomar complementos.

**Proposición 1.3.1.** Sean  $X, A \subseteq \omega$  conjuntos.

- (i)  $X$  es  $\Sigma_n^{0,A}$  si y sólo si  $\omega \setminus X$  es  $\Pi_n^{0,A}$ .
- (ii) Si  $X$  es  $\Sigma_n^{0,A}$  (respectivamente  $\Pi_n^{0,A}$ ) entonces para todo  $m > n$ ,  $X$  es  $\Delta_m^{0,A}$ .

*Demostración.* (i) Se sigue de que  $\neg\forall x\psi$  es lógicamente equivalente a  $\exists x\neg\psi$  y de que  $\neg\exists x\psi$  lo es a  $\forall x\neg\psi$ , para toda  $\mathcal{N}^A$ -fórmula de primer orden finita  $\psi$ .

- (ii) Se sigue de que podemos cuantificar una  $\mathcal{N}^A$ -fórmula de primer orden finita con más cuantificadores que no afecten la fórmula. ■

**Teorema 1.3.1.** Sea  $A \subseteq \omega$  conjunto.

- (i) La familia de conjuntos de  $\omega$  que son  $\Sigma_n^{0,A}$  (respectivamente  $\Pi_n^{0,A}$ ) es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas.
- (ii)  $\Delta_n^{0,A} \subsetneq \Sigma_n^{0,A} \subsetneq \Delta_m^{0,A}$  y  $\Delta_n^{0,A} \subsetneq \Pi_n^{0,A} \subsetneq \Delta_m^{0,A}$  para todo  $1 \leq n < m$ .
- (iii)  $\Sigma_n^{0,A} \not\subseteq \Pi_n^{0,A}$  y  $\Pi_n^{0,A} \not\subseteq \Sigma_n^{0,A}$ .

*Demostración.* Sean  $A, B \in \Sigma_n^{0,A}$  tales que

$$A = \{x \in \omega \mid (\exists y_1)(\forall y_2) \cdots : \varphi(x, y_1, \dots, y_n)\}$$

$$B = \{x \in \omega \mid (\exists z_1)(\forall z_2) \cdots : \psi(x, z_1, \dots, z_n)\}$$

entonces:

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Leftrightarrow (\exists y_1)(\forall y_2) \cdots : \varphi(x, y_1, \dots, y_n) \vee (\exists z_1)(\forall z_2) \cdots : \psi(x, z_1, \dots, z_n) \\ &\Leftrightarrow (\exists y_1)(\exists z_1)(\forall y_2) \cdots : (\varphi(x, y_1, \dots, y_n) \vee \psi(x, z_1, \dots, z_n)) \\ &\Leftrightarrow (\exists u_1)(\forall u_2) \cdots : \varphi(x, (u_1)_1, \dots, (u_n)_1) \vee \psi(x, (u_1)_2, \dots, (u_n)_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $A \cup B \in \Sigma_n^{0,A}$ . La demostración para la intersección es similar. Los incisos (ii) y (iii) se siguen del Teorema 1.3.3. ■

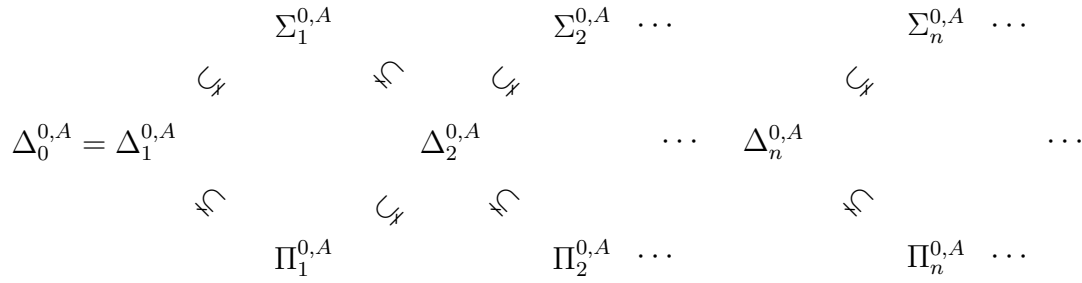


Figura 1.1: Jerarquía aritmética relativa a  $A$ .

Es posible definir una relación sobre conjuntos de  $\omega$  como sigue.

**Definición 1.3.3** (Equivalencia Aritmética). Dados dos conjuntos  $X, Y \subseteq \omega$ , diremos que:

- (i)  $X$  es *aritméticamente reducible* a  $Y$ , lo cual denotamos por  $X \leq_A Y$ , si  $X$  es  $Y$ -aritmético.
- (ii)  $X$  es *aritméticamente equivalente* a  $Y$ , lo cual denotamos por  $X \equiv_A Y$ , si  $X$  es  $Y$ -aritmético.

En la siguiente sección, veremos que  $\equiv_A$  es una relación de equivalencia.

### 1.3.2. Computabilidad Enumerable

Hemos visto que para un conjunto  $X$  que no es  $A$ -computable, no podemos decidir la pertenencia a  $X$  con un programa con oráculo  $A$ . Sin embargo, podemos debilitar la condición de ser  $A$ -computable requiriendo que nuestro programa no nos dé información de  $\omega \setminus X$ , sino únicamente de  $X$ . Es decir, para concluir que  $x \in X$  bastará que nuestro programa se detenga en  $x$  y, en caso contrario, no es posible tener mayor información. En este sentido, los conjuntos considerados son casi  $A$ -computables.

**Definición 1.3.4** (Conjunto Computable Enumerable). Dados dos conjuntos  $X, A \subseteq \omega$ , diremos que  $X$  es  *$A$ -computable enumerable* si y sólo si  $X = \emptyset$  ó existe una función  $A$ -computable  $f : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $\text{rango } f = X$ . Si, además  $f = \Phi_e^A$ , diremos que  $X$  es  *$A$ -computable enumerable vía  $e$* .

En ocasiones, sólo diremos que  $X$  es  *$A$ -c.e.* También diremos que  $X$  es *semi  $A$ -decidible* ó *semi  $A$ -computable*. Omitimos a  $A$  de la definición cuando  $A = \emptyset$ .

Es posible caracterizar a los conjuntos  $A$ -c.e. de la siguiente forma.

**Teorema 1.3.2.** *Dados  $X, A \subseteq \omega$  conjuntos, las siguientes son equivalentes:*

- (i)  $X$  es  *$A$ -computable enumerable*.

- (ii) Existe una función parcialmente  $A$ -computable  $f : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $\text{rango } f = X$ .
- (iii)  $X$  es  $\Sigma_1^{0,A}$ .
- (iv)  $X = W_e^A = \{x \in \omega \mid \Phi_e^A(x) \downarrow\}$  para algún  $e \in \omega$ .
- (v)  $X$  es el dominio de alguna función parcialmente  $A$ -computable.
- (vi)  $X \leq_m K^A$ .
- (vii)  $X \leq_m A'$ .

*Demostración.* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii). Ver que (i) implica (ii) es inmediato. Demostremos que (ii) implica (i). Si  $X = \emptyset$  ó  $X = \omega$ , el resultado es claro. Supongamos que  $X \neq \emptyset$ ,  $X \neq \omega$  y  $\text{rango } \Phi_e^A = X$  para algún  $e \in \omega$ . Sea  $n_0 \in X$  y definamos a  $f : \omega \rightarrow \omega$  como la función tal que

$$f(\ulcorner n, s \urcorner) = \begin{cases} \Phi_e^A(n) & \text{si } n \in W_{e,s+1}^A \setminus W_{e,s}^A \\ n_0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Tenemos que  $f$  es  $A$ -computable y es tal que  $\text{rango } f = X$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Si  $f(x) = U(\text{mín}_{y \in \omega} T^A(e, x, y))$  para algún  $e \in \omega$ , entonces

$$X = \{x \in \omega \mid \exists y \in \omega : T^A(e, x, y)\}.$$

(iii)  $\Rightarrow$  (iv). Supongamos que  $X$  es definible por una fórmula  $\varphi(x)$  que es  $\Sigma_1^{0,A}$ .  
Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \varphi(x) \\ \text{indefinida} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función  $f$  es parcialmente  $A$ -computable; luego  $f = \Phi_e^A$  para algún  $e \in \omega$ . Además  $x \in X$  si y sólo si  $\Phi_e^A(x) \downarrow$ ; por lo tanto,  $X = W_e^A$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (v). Es inmediato.

(v)  $\Rightarrow$  (vi). Supongamos que  $X = \text{dom } \Phi_e^A$  para algún  $e \in \omega$ . Sea  $f : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $f(x) = \ulcorner e, x \urcorner$ . Tenemos que  $f$  es computable y satisface que  $x \in X$  si y sólo si  $f(x) \in K^A$ , i.e.  $X \leq_m K^A$ .

(vi)  $\Leftrightarrow$  (vii). Se sigue de  $A' \equiv_m K^A$ .

(vii)  $\Rightarrow$  (ii). Supongamos que  $X \leq_m K^A$  vía  $f$ . Sea  $g : \omega \rightarrow \omega$  la función parcial tal que

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } f(x) \in K^A \\ \text{indefinida} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función  $g$  es parcialmente  $A$ -computable y satisface que  $\text{rango } g = X$ . ■

**Ejemplo 1.3.1.** Sea  $A \subseteq \omega$  un conjunto. Entonces,

- (i) Los conjuntos  $K^A$  y  $A'$  son  $A$ -computable enumerables.
- (ii) Todo conjunto  $A$ -computable es  $A$ -computable enumerable, pero el recíproco no es cierto; de hecho un conjunto  $X$  es  $A$ -computable si y sólo si  $X$  y  $\omega \setminus X$  son  $A$ -computable enumerables.

*Demostración.* (i) Se sigue de (vi) y (vii) del Teorema 1.3.2.

- (ii) Si  $X \leq_T A$  entonces  $X \leq_m X' \leq_m A'$  y  $\omega \setminus X \leq_m X' \leq_m A'$ , luego por (vi) del Teorema 1.3.2 tenemos que  $X$  y  $\omega \setminus X$  son  $A$ -computable enumerables. Pero, por ejemplo,  $A'$  es  $A$ -computable enumerable y no es  $A$ -computable.

Supongamos que  $X$  y  $\omega \setminus X$  son  $A$ -computable enumerables vía  $e_0$  y  $e_1$  respectivamente.

Sea  $\mathbf{P}_e^A$  el programa que en una entrada  $x$  ejecuta  $e_0$  y  $e_1$  en cada número natural  $n$ , comenzando por 0, y se detiene hasta obtener de alguno de las dos ejecuciones la entrada  $x$ . Si  $e_0$  devolvió  $x$  entonces el programa responde  $x \in X$ ; si fue  $e_1$  entonces el programa responde  $x \notin X$  y, en cualquier caso, se detiene. Como  $x \in X$  ó  $x \in \omega \setminus X$ , nuestro programa siempre se detiene. Por lo tanto,  $X$  es  $A$ -computable. ■

**Teorema 1.3.3** (Teorema de Post). *Para cualesquiera dos conjuntos  $X, A \subseteq \omega$  y cualquier  $n \in \omega$ ,  $X$  es  $A^{(n)}$ -computable enumerable si y sólo si  $X$  es un conjunto  $\Sigma_{n+1}^{0,A}$ .*

*Demostración.* Demostremos el resultado por inducción sobre  $n$ . Comencemos con la suficiencia. Sabemos que si  $X$  es  $A$ -computable enumerable entonces  $X$  es definible por una fórmula  $\Sigma_1^{0,A}$ . Si  $X$  es  $A^{(n+1)}$ -computable enumerable entonces  $X$  es definible por una fórmula  $\psi$  que es  $\Sigma_1^{0,A^{(n+1)}}$ . Por hipótesis inductiva, como  $A^{(n+1)}$  es  $A^{(n)}$ -c.e., tenemos que  $A^{(n+1)}$  es definible por una fórmula  $\varphi$  que es  $\Sigma_{n+1}^{0,A}$ . Reemplazando las apariciones de los predicados de la forma  $t_i \in A^{(n+1)}$  por  $\varphi(t_i)$  en  $\psi$  de manera adecuada, obtenemos una fórmula que es  $\Sigma_{n+2}^{0,A}$ .

Demostremos ahora la necesidad. Sabemos que si  $X$  es definible por una fórmula que es  $\Sigma_1^{0,A}$ , entonces  $X$  es  $A$ -computable enumerable. Ahora supongamos que  $X$  es definible por una fórmula que es  $\Sigma_{n+2}^{0,A}$ , digamos de la forma  $\exists z \varphi$  donde  $\varphi$  es  $\Pi_{n+1}^{0,A}$ . Sea  $Y$  el conjunto definido por  $\neg \varphi$ . Por hipótesis inductiva,  $Y$  es  $A^{(n)}$ -c.e., luego  $Y = W_e^{A^{(n)}}$  para algún  $e \in \omega$ . Entonces  $X$  es  $A^{(n+1)}$ -c.e. vía el programa que en un input  $x$ , verifica por cada  $z$  si  $(e, z) \in A^{(n+1)}$ ; en caso afirmativo tenemos  $z \in Y$ , i.e.  $\neg \varphi(z)$ , por lo que continuamos dicha verificación con  $z + 1$ ; en caso negativo

tenemos  $z \notin Y$ , i.e.  $\varphi(z)$ , lo cual implica que  $\exists x \varphi(z, x)$ , es decir  $x \in X$ , por lo que el programa se detiene y devuelve  $x$ . ■

Enseguida enunciamos algunas consecuencias inmediatas del Teorema de Post.

**Corolario 1.3.1.** Para cualesquiera  $X, A \subseteq \omega$  y  $n \in \omega$ ,  $X$  es  $A^{(n)}$ -computable si y sólo si  $X$  es un conjunto  $\Delta_{n+1}^{0,A}$ .

**Corolario 1.3.2.** Sean  $X, Y, Z \subseteq \omega$  conjuntos.

- (i) Si  $Y \leq_m X$  y  $X$  es  $\Sigma_n^{0,A}$  entonces  $Y$  es  $\Sigma_n^{0,A}$ .
- (ii) Si  $X$  es  $Y$ -aritmético y  $Y$  es  $Z$ -aritmético entonces  $X$  es  $Z$ -aritmético.

**Corolario 1.3.3.**  $\equiv_A$  es una relación de equivalencia en los subconjuntos de  $\omega$ .

**Corolario 1.3.4.** Para cada  $X, Y \subseteq \omega$ ,  $X \leq_A Y$  si y sólo si existe  $n \in \omega$  tal que  $X \leq_T Y^{(n)}$ .

A continuación presentamos un par de ejemplos de conjuntos que no son  $A$ -computable enumerables.

**Ejemplo 1.3.2.** Dado un conjunto  $A \subseteq \omega$ , los siguientes conjuntos no son  $A$ -computable enumerables:

- (i)  $\omega \setminus A'$ .
- (ii)  $T^A = \{e \in \omega \mid \forall x \in \omega : \Phi_e^A(x) \downarrow\} = \{e \in \omega \mid \Phi_e^A \text{ es total}\}$ .

*Demostración.* (i) Se sigue de que  $A'$  no es  $A$ -computable pero sí es  $A$ -c.e.

- (ii) Supongamos que  $T^A$  sí es  $A$ -c.e. Sea  $f : \omega \rightarrow \omega$  función computable tal que rango  $f = T^A$ . Definamos  $g : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $g(x) = \Phi_{f(x)}^A(x) + 1$ . Notemos que  $g$  es total. Por lo tanto, existe  $n_0 \in \omega$  tal que  $g = \Phi_{f(n_0)}^A$ . Luego,  $\Phi_{f(n_0)}^A(n_0) = g(n_0) = \Phi_{f(n_0)}^A(n_0) + 1$ , la cual es una contradicción. Por lo tanto,  $T^A$  no es  $A$ -c.e. ■

**Corolario 1.3.5.** (i) La propiedad sobre conjuntos de  $\omega$  de ser  $A$ -computable enumerable sobre los conjuntos de  $\omega$  es invariante bajo  $m$ -equivalencia (por lo tanto bajo 1-equivalencia), pero no bajo Turing-equivalencia.

- (ii) La propiedad sobre conjuntos de  $\omega$  de ser  $\Sigma_n^{0,A}$  es invariante bajo  $m$ -equivalencia (por lo tanto bajo 1-equivalencia), pero no bajo Turing-equivalencia.

*Demostración.* Se sigue del Teorema 1.3.2 y del Corolario 1.3.2. Además,  $A' \equiv_T \omega \setminus A'$ , pero  $\omega \setminus A'$  no es  $A$ -c.e. De manera similar, ocurre para la familia de conjuntos  $\Sigma_n^{0,A}$ . ■

## 1.4. Salto de Turing Transfinito

Hemos mencionado que la operación  $A \mapsto A'$  puede iterarse una cantidad finita de veces. No obstante, podemos extender esta noción realizando su iteración una cantidad transfinita de veces. La diferencia es que en esta ocasión debemos tener precaución sobre la cantidad de veces que la aplicamos para evitar caer en ambigüedades.

**Definición 1.4.1** (Orden Lineal y Buen Orden computable). Sea  $X \subseteq \omega$  un conjunto y  $\mathcal{L} = (L, \leq_L)$  un orden lineal tal que  $L \subseteq \omega^n$  para algún  $n \in \omega$  y  $\leq_L \subseteq L \times L$ . Diremos que  $\mathcal{L}$  es  $X$ -computable si  $L$  y  $\leq_L$  son conjuntos  $X$ -computables. Un buen orden  $\mathcal{L}$  es  $X$ -computable si es  $X$ -computable como orden lineal.

**Ejemplo 1.4.1.** Para cada  $n \in \omega$ ,  $(\omega^n, \leq_{lex})$ , donde  $\leq_{lex}$  es el orden lexicográfico usual, es un buen orden computable. Notemos que para  $n = 1$ ,  $\leq_{lex}$  se vuelve el orden usual  $\leq$  en  $\omega$ .

*Demostración.* El conjunto  $\omega^n$  es computable. Además, se puede verificar de forma computable cuando dos elementos  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \omega^n$  son tales que  $\bar{x} \leq_{lex} \bar{y}$ . Por lo tanto,  $\leq_{lex}$  es computable. ■

**Ejemplo 1.4.2.** Para cada  $X \subseteq \omega$ ,  $(X', \leq)$  donde  $\leq$  es el orden usual en  $\omega$  es un buen orden que es  $X'$ -computable pero que no es  $X$ -computable.

Es posible establecer un isomorfismo de orden entre el conjunto de números racionales con un subconjunto de  $\omega \times \omega$ . Abusando de la notación, también nos referiremos a este conjunto por  $\mathbb{Q}$ .

**Ejemplo 1.4.3.**  $(\mathbb{Q}, \leq)$  es un orden lineal computable que no es un buen orden, donde  $\leq$  es el orden usual en  $\mathbb{Q}$ .

**Ejemplo 1.4.4.**  $(\omega^{<\omega}, \leq_{KB})$  es un orden lineal computable que no es un buen orden, donde para cada  $\sigma, \tau \in \omega^{<\omega}$ ,  $\sigma \leq_{KB} \tau$  si y sólo si  $\sigma \supseteq \tau$  ó  $\sigma(i) > \tau(i)$  donde  $i$  es el menor natural tal que  $\sigma(i) \neq \tau(i)$ . A  $\leq_{KB}$  lo llamamos *orden de Kleene-Brouwer*.

De entre los ordinales sobre los que podemos iterar, identificamos a aquellos que cumplen con una condición de computabilidad.

**Definición 1.4.2** (Ordinal computable). Sea  $X \subseteq \omega$  un conjunto, diremos que un ordinal  $\alpha$  es  $X$ -computable si y sólo si existe un buen orden  $\mathcal{L} = (L; \leq_L)$  que es  $X$ -computable y es de tipo de orden  $\alpha$ .

Si  $\alpha$  es  $\emptyset$ -computable, únicamente diremos que  $\alpha$  es *computable*.

**Proposición 1.4.1.** Sea  $X \subseteq \omega$ , si  $\alpha$  es un ordinal  $X$ -computable y  $\beta < \alpha$  entonces  $\beta$  es  $X$ -computable.

*Demostración.* Se sigue a partir de que podemos encontrar un buen orden de tipo de orden  $\beta$  contenido en un buen orden de tipo de orden  $\alpha$ . ■

**Proposición 1.4.2.** Sea  $X \subseteq \omega$  un conjunto. Si  $\alpha$  es un ordinal  $X$ -computable, entonces  $\alpha + 1$  también es  $X$ -computable.

Notemos que cada natural  $n \in \omega$  es un ordinal computable. Más aún, como  $\emptyset \leq_T X$ , entonces cada  $n \in \omega$  es un ordinal  $X$ -computable. Por lo tanto, existe una infinidad de ordinales  $X$ -computables.

Observemos también que: dado que existe una cantidad numerable de programas con oráculo un conjunto  $X \subseteq \omega$ , debe haber una cantidad a lo más numerable de ordinales  $X$ -computables. Como existe una infinidad de dichos ordinales, tenemos que existe una cantidad numerable de ordinales  $X$ -computables.

De donde, existe un ordinal  $\alpha$  que no es  $X$ -computable; de hecho existe una cantidad no numerable de ordinales que no lo son.

**Definición 1.4.3** (Ordinal de Church-Kleene). Sea  $X \subseteq \omega$  conjunto. Definimos

$$\omega_1^{CK}(X) = \min\{\alpha \in \mathbf{Ord} \mid \alpha \text{ no es } X\text{-computable}\}$$

Denotamos únicamente por  $\omega_1^{CK}$  a  $\omega_1^{CK}(\emptyset)$ .

Algunas observaciones inmediatas de la definición son las siguientes.

**Proposición 1.4.3.** Sean  $X, Y \subseteq \omega$  conjuntos. Entonces,

- (i)  $\omega_1^{CK}(X)$  es un ordinal numerable y límite.
- (ii) Si  $X \leq_T Y$  entonces  $\omega_1^{CK}(X) \leq \omega_1^{CK}(Y)$ . Por consiguiente, si  $X \equiv_T Y$  entonces  $\omega_1^{CK}(X) = \omega_1^{CK}(Y)$ .
- (iii) Para todo  $\alpha < \omega_1^{CK}(X)$  ordinal,  $\alpha$  es  $X$ -computable. Si  $\alpha \geq \omega_1^{CK}(X)$  entonces  $\alpha$  no es  $X$ -computable.
- (iv) Para todo  $n \in \omega$ ,  $\omega^n < \omega_1^{CK}$ .

Es posible obtener explícitamente un buen orden que no sea  $X$ -computable y que, de hecho, tenga tipo de orden  $\omega_1^{CK}(X)$ , de la siguiente forma: es posible obtener una enumeración computable  $\{\mathcal{L}_e : e \in \omega\}$  de los órdenes lineales computables, definimos el conjunto:

$$\mathcal{O}_{\omega_0}^X = \{e \in \omega \mid \mathcal{L}_e \text{ es un buen orden } X\text{-computable}\}.$$

**Proposición 1.4.4.** El buen orden  $\mathcal{L} = \sum_{e \in \mathcal{O}_{\omega_0}^X} \mathcal{L}_e$  es un buen orden que no es  $X$ -computable y que además tiene tipo de orden  $\omega_1^{CK}(X)$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha$  el tipo de orden de  $\mathcal{L}$ . Si  $\alpha < \omega_1^{CK}(X)$  entonces existe  $e \in \mathcal{O}_{\omega_0}^X$  tal que  $\mathcal{L}_e$  tiene tipo de orden  $\alpha$ . Por lo tanto, de la definición de  $\alpha$  tendríamos que  $\alpha < \alpha$ , la cual es una contradicción. Por lo tanto,  $\alpha \geq \omega_1^{CK}(X)$ . Por otro lado, todo segmento inicial de  $\mathcal{L}$  está contenido en una suma finita de órdenes  $\mathcal{L}_e$ . Por lo tanto, dicho segmento  $X$ -computable y tiene como tipo de orden un ordinal  $\beta < \omega_1^{CK}(X)$ . Como  $\alpha$  es el supremo de los tipos de orden de sus segmentos iniciales, tenemos que  $\alpha \leq \omega_1^{CK}(X)$ . Por lo tanto,  $\alpha = \omega_1^{CK}(X)$ . ■

Retomemos nuestro propósito inicial y extendamos la operación de salto de Turing para ordinales. Comenzamos enunciando la siguiente definición.

**Definición 1.4.4** (Jerarquía de Salto). Sean  $A \subseteq \omega$  un conjunto y  $\mathcal{L} = (L; \leq_{\mathcal{L}})$  un buen orden. Una *jerarquía de salto en  $\mathcal{L}$  relativa a  $X$*  es un conjunto  $H \subseteq L \times \omega$  tal que

$$\begin{aligned} H^{[0_{\mathcal{L}}]} &= X' \\ \forall \alpha \in L \setminus \{0_{\mathcal{L}}\} : H^{[\alpha]} &= (H^{[<_{\mathcal{L}}\alpha]})' \end{aligned} \tag{JS}$$

donde

$$\begin{aligned} H^{[\alpha]} &= \{n \in \omega \mid (\alpha, n) \in H\} \\ H^{[<_{\mathcal{L}}\alpha]} &= \{(\beta, n) \in L \times \omega \mid \beta <_{\mathcal{L}} \alpha \text{ y } (\beta, n) \in H\}. \end{aligned}$$

**Proposición 1.4.5.** Para todo conjunto  $X \subseteq \omega$  y todo buen orden  $\mathcal{L} = (L; \leq_{\mathcal{L}})$  existe una única jerarquía de salto relativa a  $X$  en  $\mathcal{L}$ .

*Demostración.* Definimos a las columnas de la jerarquía  $H$  por recursión transfinita según la propiedad (JS), y definimos a  $H = \bigcup_{\alpha \in L} (\{\alpha\} \times H^{[\alpha]})$ . Por construcción,  $H$  es una jerarquía de salto en  $\mathcal{L}$  relativa a  $X$ .

Para verificar la unicidad, utilicemos inducción. Supongamos que  $J$  es otra jerarquía de salto. Entonces,  $H^{[0_{\mathcal{L}}]} = X' = J^{[0_{\mathcal{L}}]}$ . Además, si  $\alpha \in L$  es tal que para todo  $\beta < \alpha$ ,  $H^{[\beta]} = J^{[\beta]}$ , entonces

$$\begin{aligned} H^{[\alpha]} &= (H^{[<_{\mathcal{L}}\alpha]})' \\ &= \bigcup_{\beta <_{\mathcal{L}} \alpha} (\{\beta\} \times H^{[\beta]}) \\ &= \bigcup_{\beta <_{\mathcal{L}} \alpha} (\{\beta\} \times J^{[\beta]}) \\ &= (J^{[<_{\mathcal{L}}\alpha]})' \\ &= J^{[\alpha]} \end{aligned}$$

■

**Definición 1.4.5.** Sean  $X \subseteq \omega$  un conjunto y  $\mathcal{L} = (L; \leq_{\mathcal{L}})$  un buen orden.

- (i) Denotamos por  $X^{(\mathcal{L})}$  a la única jerarquía de salto en  $\mathcal{L}$  relativa a  $X$ .
- (ii) Si  $\beta \in L$ , denotamos por  $X^{(\beta)}$  a la única jerarquía de salto en  $\mathcal{L} \upharpoonright \beta$  relativa a  $X$ .

*Observación.* Notemos que en el caso finito, nuestra noción de salto coincide con la noción de salto de Turing. En efecto, dado  $X \subseteq \omega$  y  $\mathcal{L}$  un buen orden computable y numerable, entonces

$$\begin{aligned}
H^{[0\mathcal{L}]} &= X' \\
H^{[n\mathcal{L}]} &= (H^{[<\mathcal{L}n\mathcal{L}]} )' \\
&= \left( \bigcup_{i < n} (\{i\}_{\mathcal{L}} \times H^{[i\mathcal{L}]}) \right)' \\
&\cong_1 \left( \bigcup_{i < n} (\{i\}_{\mathcal{L}} \times X^{(i+1)}) \right)' \\
&\cong_1 (X^{(n)})' \\
&= X^{(n+1)}.
\end{aligned}$$

La definición de  $X^{(\alpha)}$  depende del buen orden  $\mathcal{L}$ . En lo sucesivo, buscaremos demostrar que para los ordinales  $\alpha < \omega_1^{CK}(X)$ ,  $X^{(\alpha)}$  está bien definido salvo Turing-equivalencia.

**Lema 1.4.1.** Sean  $X \subseteq \omega$ ,  $\alpha, \beta$  buenos órdenes isomorfos que son  $X$ -computables,  $f : \alpha \rightarrow \beta$  un isomorfismo y  $H_\alpha$  la jerarquía de salto de  $\alpha$  relativa a  $X$ . Entonces para todo  $a \in \alpha$ ,  $f \upharpoonright \alpha_{<a} \leq_T H_\alpha^{[a]}$  uniformemente en  $a$ <sup>4</sup>.

*Demostración.* Construyamos por recursión transfinita efectiva una función computable  $a \mapsto e_a$  tal que  $f \upharpoonright \alpha_{<a} \leq_T H_\alpha^{[a]}$  vía  $e_a$ . Si  $a = \min \alpha$  entonces  $f \upharpoonright \alpha_{<a} \leq_T \emptyset$ . Consideramos a  $e_a$  como el programa usual que verifica  $\emptyset \leq_T H_\alpha^{[a]}$ . Supongamos que dado  $a \in \alpha$ , tenemos un índice  $i$  de una función parcialmente computable  $c \mapsto e_c$ , definida en  $\alpha_{<a}$ , tal que  $f \upharpoonright \alpha_{<c} \leq_T H_\alpha^{[c]}$  vía  $e_c$ .

Construyamos a  $e_a$  de forma computable a partir de  $a$  e  $i$ . Definimos el programa que dado  $a \in \alpha$ , determina utilizando  $X'$  si  $a$  es un elemento límite de  $\alpha$ ; ó  $a = b + 1$  y  $b$  es límite; ó  $a = b + 1$  y  $b = c + 1$ <sup>5</sup>.

Como  $X' \leq_T H_\alpha^{[a]}$ , en el proceso anterior utilizamos al oráculo  $H_\alpha^{[a]}$ . Si  $a$  es límite entonces como  $f \upharpoonright \alpha_{<a} = \bigcup_{c < \alpha} f \upharpoonright \alpha_{<c}$ , basta considerar el programa que recibe como input  $c$ , después verifica si  $c <_\alpha a$ ; en caso afirmativo obtiene  $e_{c+1}$  vía  $i$  y calcula  $f(c)$  vía  $e_{c+1}$ ; en caso negativo entra en ciclo infinito. Devolvemos a  $e_a$  como el índice de este programa.

<sup>4</sup>Uniformemente en  $a$  significa que existe un programa cuyo input es  $a$  y devuelve un índice  $e_a$  que verifica  $f \upharpoonright \alpha_{<a} \leq_T H_\alpha^{[a]}$ .

<sup>5</sup>Para cualesquiera  $a, b \in \alpha$ ,  $a = b + 1$  si y sólo si  $\neg \exists c \in \alpha : b <_\alpha c <_\alpha a$ . Por lo tanto, un elemento  $a \in \alpha$  es sucesor si y sólo si  $\exists b \in \alpha : b + 1 = a$ . Un elemento  $a \in \alpha$  es límite si y sólo si  $\neg \exists b \in \alpha : b + 1 = a$ . Por lo tanto, la proposición que expresa ser sucesor en  $\alpha$  es  $\Sigma_2^{0,X}$  y de ser límite es  $\Pi_2^{0,X}$ . Por lo tanto, verificar ambos casos es posible con  $X'$ .

Si  $a = b + 1$  y  $b$  es límite entonces  $f \upharpoonright \alpha_{<a} = f \upharpoonright \alpha_{<b} \cup \{(b, f(b))\}$ . Como  $b$  es límite aplicamos el programa definido en el caso límite anterior para calcular los valores  $f(c)$  para  $c <_\alpha b$ . Para calcular  $f(b)$ , notemos que  $f(b) = \text{mín } \beta \setminus \text{rango } f \upharpoonright \alpha_{<b}$ , por lo que calcular dicho valor es suficiente  $f \upharpoonright \alpha'_{<b}$ <sup>6</sup>.

Por último si  $a = b + 1$  y  $b = c + 1$  entonces utilizamos  $H_\alpha^{[b]}$  para obtener los valores  $f(e)$  para  $e < b$ . Por otro lado, como  $f(b) = f(c) + 1$ , con  $X'$  obtenemos dicho valor a partir de  $f(c)$ . En cualquier caso obtenemos de forma computable el índice  $e_a$  que verifica  $f \upharpoonright \alpha_{<a} \leq_T H_\alpha^{[a]}$ . ■

**Teorema 1.4.1.** *Si  $\alpha, \beta$  son buenos órdenes  $X$ -computables del mismo tipo de orden, entonces  $X^{(\alpha)} \equiv_T X^{(\beta)}$ .*

*Demostración.* Sean  $H_\alpha$  y  $H_\beta$  las jerarquías de salto de  $\alpha$  y  $\beta$  relativas a  $X$ . Del lema anterior tenemos una función computable  $a \mapsto e_a$  tal que  $f \upharpoonright \alpha_{<a} \leq_T H_\alpha^{[a]}$  vía  $e_a$ . Construyamos por recursión transfinita efectiva<sup>7</sup> una función  $a \mapsto i_a$  tal que  $H_\beta^{[f(a)]} \leq_T H_\alpha^{[a]}$  vía  $i_a$ . Si  $a = \text{mín } \alpha$ , entonces la desigualdad se vuelve  $X' \leq_T X'$ , de donde  $i_a$  es el índice usual que verifica dicha condición. Ahora, dado  $a \in \alpha$ , supongamos que tenemos un índice para la función parcial  $c \mapsto i_c$  que verifica  $H_\beta^{[f(c)]} \leq_T H_\alpha^{[c]}$  vía  $i_c$ , i.e.  $\Phi_{i_c}^{H_\alpha^{[c]}} = H_\beta^{[f(c)]}$ .

Busquemos un índice que verifica  $H_\beta^{[<f(a)]} \leq_T H_\alpha^{[<a]}$  utilizando a  $H_\alpha^{[a]}$  como oráculo. Notemos que

$$H_\beta^{[<f(a)]} = \bigcup_{d < f(a)} \{d\} \times H_\beta^{[d]} = \bigcup_{c < a} \{f(c)\} \times H_\beta^{[f(c)]} = \bigcup_{c < a} \{f(c)\} \times \Phi_{i_c}^{H_\alpha^{[c]}}.$$

Por consiguiente,  $H_\beta^{[<f(a)]} \leq_T (f \upharpoonright \alpha_{<a}) \oplus H_\alpha^{[<a]}$  vía el programa que recibe la entrada  $(d, k)$ ; verifica si  $d = f(c)$  para algún  $c \in \omega$  con  $X' \leq_T H_\alpha^{[<a]}$ ; en caso afirmativo, vía  $i_c$  verificamos si  $\Phi_{i_c}^{H_\alpha^{[c]}}(k) = 1$ , lo cual en caso afirmativo nos dirá finalmente que  $(d, k) \in H_\beta^{[<f(a)]}$ ; en caso negativo en alguna de las verificaciones obtendremos que  $(d, k) \notin H_\beta^{[<f(a)]}$ .

Resta verificar que  $f \upharpoonright \alpha_{<a} \leq_T H_\alpha^{[<a]}$ . El índice  $i_a$  que buscamos definir, identifica utilizando  $X'$  si  $a$  es límite en  $\alpha$  o bien  $a = b + 1$  en  $\alpha$  para algún elemento  $b \in \alpha$ . Si  $a$  es límite ya sabemos como calcular  $f(c)$  con el oráculo  $H_\alpha^{[c]}$  vía  $e_c$ ; i.e. obtenemos la reducción  $f \upharpoonright \alpha_{<a} \leq_T H_\alpha^{[<a]}$ . En caso de que  $a = b + 1$  en  $\alpha$ , sabemos que  $f \upharpoonright \alpha_{<a} = f \upharpoonright \alpha_{<b} \cup \{(b, f(b))\}$ . Por lo que para calcular  $f(c)$  para  $c <_\alpha b$  basta

<sup>6</sup>En efecto, un elemento  $d \in \beta$  es tal que  $d \notin \text{rango } f \upharpoonright \alpha_{<b}$  si y sólo si  $\forall c \in \alpha : c <_\alpha b \Rightarrow f(c) \neq d$ . Y  $d \in \beta$  es el mínimo tal que  $d \notin \text{rango } f \upharpoonright \alpha_{<b}$  si y sólo si  $d \notin \text{rango } f \upharpoonright \alpha_{<b} \wedge \forall e <_\alpha \exists h < e : f(h) = e$ . Por lo tanto, para calcular el valor  $f(b)$  verificamos propiedades que se pueden calcular con  $(f \upharpoonright \alpha_{<b})'$ .

<sup>7</sup>Una definición del método de construcción por recursión transfinita efectiva puede consultarse en [B.1.2](#).

considerar la reducción, que utiliza  $e_b$ ,  $f \upharpoonright \alpha_{<b} \leq_T H_\alpha^{[b]} \leq_T H_\alpha^{[<a]}$ . Por otro lado, para calcular  $f(b)$ , lo hacemos utilizando  $H_\alpha^{[a]}$ . Por lo tanto, en el proceso utilizamos  $H_\alpha^{[a]}$  para obtener un índice para la reducción  $H_\beta^{[<f(a)]} \leq_T H_\alpha^{[<a]}$ .

Así, utilizando  $H_\alpha^{[a]}$  podemos obtener un índice para

$$H_\beta^{[f(a)]} = (H_\beta^{[<f(a)]})' \leq_T (H_\alpha^{[<a]})' = H_\alpha^{[a]}.$$

Es decir, podemos obtener un índice  $e_a$  de forma computable para  $H_\beta^{[f(a)]} \leq_T H_\alpha^{[a]}$ . De esta forma concluimos nuestra construcción por recursión. Por lo tanto,  $X^{(\alpha)} \leq X^{(\beta)}$  vía la reducción uniforme en  $a$ ,  $H_\beta^{[f(a)]} \leq_T H_\alpha^{[a]}$ . De manera análoga, se verifica la desigualdad  $X^{(\beta)} \leq X^{(\alpha)}$ . Por lo tanto,  $X^{(\alpha)} \equiv_T X^{(\beta)}$ . ■

El teorema anterior nos dice que la definición de  $X^{(\alpha)}$  está bien definida salvo Turing-equivalencia, para cualquier ordinal  $\alpha < \omega_1^{CK}(X)$ .

**Definición 1.4.6** (Salto Transfinito de Turing). Sean  $X \subseteq \omega$  un conjunto,  $\alpha < \omega_1^{CK}(X)$  un ordinal y  $\mathcal{L} = (L, \leq_L)$  un buen orden  $X$ -computable de tipo de orden  $\alpha$ . Definimos el  $\alpha$ -ésimo salto de Turing de  $X$  como la jerarquía de salto en  $\mathcal{L}$  relativa a  $X$ , la cual es denotada por  $X^{(\alpha)}$ . También nos referimos a dicho salto como el *salto transfinito de  $X$   $\alpha$ -veces*.

*Observación.* Para todo  $X \subseteq \omega$  conjunto y  $\alpha < \omega_1^{CK}(X)$  ordinal, el salto transfinito de  $X$   $\alpha$ -veces está bien definido salvo Turing-equivalencia.

Además, el salto transfinito definirá una función que preserva la Turing-equivalencia.

**Proposición 1.4.6.** Para cualesquiera  $X, Y \subseteq \omega$ , si  $X \equiv_T Y$  entonces para todo  $\alpha < \omega_1^{CK}(X)$ , se cumple que  $X^{(\alpha)} \equiv_T Y^{(\alpha)}$ .

*Demostración.* Sean  $\mathcal{L} = (L, \leq_L)$  buen orden  $X$ -computable de tipo de orden  $\alpha$  y  $X^{(\mathcal{L})}, Y^{(\mathcal{L})}$  jerarquías de salto en  $\mathcal{L}$  relativas a  $X$  e  $Y$  respectivamente. Demostremos que para cada  $a \in L$ ,  $(X^{(\mathcal{L})})^{[a]} \equiv_T (Y^{(\mathcal{L})})^{[a]}$ . Si  $a = 0_{\mathcal{L}}$  entonces  $(X^{(\mathcal{L})})^{[0_{\mathcal{L}}]} = X' \equiv_T Y' = (Y^{(\mathcal{L})})^{[0_{\mathcal{L}}]}$ . Supongamos que para  $b <_{\mathcal{L}} a$ , se cumple  $(X^{(\mathcal{L})})^{[b]} \equiv_T (Y^{(\mathcal{L})})^{[b]}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} (X^{(\mathcal{L})})^{[a]} &= ((X^{(\mathcal{L})})^{[<_{\mathcal{L}} a]})' \\ &= \bigcup_{b <_{\mathcal{L}} a} (\{b\} \times (X^{(\mathcal{L})})^{[b]}) \\ &\equiv_T \bigcup_{b <_{\mathcal{L}} a} (\{b\} \times (Y^{(\mathcal{L})})^{[b]}) \\ &= ((Y^{(\mathcal{L})})^{[<_{\mathcal{L}} a]})' \\ &= (Y^{(\mathcal{L})})^{[a]} \end{aligned}$$

Concluimos que para cada  $a \in L$ ,  $(X^{(\mathcal{L})})^{[a]} \equiv_T (Y^{(\mathcal{L})})^{[a]}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} X^{(\mathcal{L})} &= \bigcup_{a \in L} (\{a\} \times (X^{(\mathcal{L})})^{[a]}) \\ &\equiv_T \bigcup_{a \in L} (\{a\} \times (Y^{(\mathcal{L})})^{[a]}) \\ &= Y^{(\mathcal{L})} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $X^{(\mathcal{L})} \equiv_T Y^{(\mathcal{L})}$ , lo cual implica que  $X^{(\alpha)} \equiv_T Y^{(\alpha)}$ . ■

# Capítulo 2

## Conjetura de Martin

La Conjetura de Martin es un enunciado que busca describir completamente a las funciones Turing-invariantes que son definibles. En este capítulo nos dedicaremos a dar las definiciones y resultados necesarios para enunciar la conjetura. También, desarrollaremos las soluciones para el caso uniforme dadas en [SS88], [Ste82] y [Cor21].

### 2.1. Medida de Martin

De ahora en adelante, identificaremos cada conjunto de naturales  $A \subseteq \omega$  con su función característica  $\chi_A : \omega \rightarrow \{0, 1\}$ , tal que para cada  $n \in \omega$ :

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases}$$

También identificaremos a cada función  $x : \omega \rightarrow \{0, 1\}$  con el conjunto de naturales  $A_x = \{n \in \omega \mid x(n) = 1\}$ . Omitiremos el subíndice  $x$  cuando quede claro en el contexto. De esta manera, dadas  $x, y \in 2^\omega$ , entenderemos que  $x \leq_T y$  si  $A_x \leq_T A_y$ . Damos una definición similar para la reducibilidad  $\leq_A$  y equivalencias  $\equiv_T$  y  $\equiv_A$ . Denotaremos por  $\mathbf{x}$  al grado de Turing de  $A_x$ , el cual también lo entenderemos como el grado de Turing de  $x$ .

Introduciremos una noción de *conjunto grande* en los grados de Turing y en  $2^\omega$ .

**Definición 2.1.1** (Cono de Turing). (i) Dado  $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T$ , definimos al *cono de grados de Turing con base  $\mathbf{x}$*  como el conjunto  $\text{Cono}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{D}_T \mid \mathbf{y} \geq \mathbf{x}\}$ .

(ii) Dado  $x \in 2^\omega$ , definimos al *cono de reales con base  $x$*  como el conjunto  $\text{Cono}(x) = \{y \in 2^\omega \mid y \geq_T x\}$ .

*Observación.* Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}_T$  son tales que  $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$  entonces  $\text{Cono}(\mathbf{y}) \subseteq \text{Cono}(\mathbf{x})$ .

También tenemos las siguientes observaciones.

*Observación.* Cada cono de reales está relacionado con un cono de grados de Turing de la siguiente forma: dado  $x \in 2^\omega$ ,  $y \in \text{Cono}(x)$  si y sólo si  $\mathbf{y} \in \text{Cono}(\mathbf{x})$  para todo  $y \in 2^\omega$ . Es decir,  $\text{Cono}(x) = \pi^{-1}(\text{Cono}(\mathbf{x}))$ , donde  $\pi : 2^\omega \rightarrow \mathbf{D}_T$  es la función cociente tal que  $\pi(x) = \mathbf{x}$ .

*Observación.* Para cada  $x \in 2^\omega$ ,  $\text{Cono}(x)$  es un conjunto boreliano de  $2^\omega$ . Por lo tanto,  $\text{Cono}(\mathbf{x})$  está en la  $\sigma$ -álgebra cociente de  $\mathbf{D}_T$ .

*Demostración.* Notemos que para cada  $y \in 2^\omega$ ,  $y \in \text{Cono}(x)$  si y sólo si  $\exists e \in \omega : \forall n \in \omega : \Phi_e^y(n) = x(n)$ . Como  $\text{Cono}(x) = \pi^{-1}(\text{Cono}(\mathbf{x}))$ , tenemos que  $\text{Cono}(\mathbf{x})$  está en la  $\sigma$ -álgebra cociente<sup>1</sup> de  $\mathbf{D}_T$ . ■

La motivación detrás de la definición de un cono de Turing recae en que nos proporciona una noción de *límite* en los grados de Turing o en  $2^\omega$ , según corresponda. Por ejemplo, si tenemos una propiedad  $P(x)$  en  $X = \mathbf{D}_T$  ó  $X = 2^\omega$  que se satisface en un cono  $C$ , entonces para cada  $x \in X$ , existe  $y \in C^2$  tal que para cada  $z \geq y$  (ó bien  $z \geq_T y$ ), se cumple  $P(z)$ . En este sentido, entendemos que la propiedad  $P(x)$  *se satisface en el límite*.

Asumiendo el Axioma de Determinación junto con el Axioma de Elecciones Dependientes<sup>3</sup> (**ZF+AD+DC**), introduciremos una medida en los grados de Turing, conocida como medida de Martin, que considera grandes a los conjuntos que contienen un cono de Turing. Si asumimos el Axioma de Elección (**ZFC**), nuestro estudio se limita a considerar conjuntos borelianos. Un resultado importante debido a D. Martin es el siguiente.

**Teorema 2.1.1** (Teorema de Martin de conos de grados de Turing, **ZF+AD+DC**).

- (i) Para todo  $A \subseteq \mathbf{D}_T$ , existe  $x \in \mathbf{D}_T$  tal que  $\text{Cono}(\mathbf{x}) \subseteq A$  ó  $\text{Cono}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{D}_T \setminus A$ .
- (ii) La familia de conjuntos

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{A \subseteq \mathbf{D}_T \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbf{D}_T : \text{Cono}(\mathbf{x}) \subseteq A\}$$

es un ultrafiltro no principal en  $\mathbf{D}_T$ .

- (iii) La función  $\tilde{\mu} : P(\mathbf{D}_T) \rightarrow \{0, 1\}$  tal que

$$\tilde{\mu}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \in \tilde{\mathcal{U}} \\ 0 & \text{si } A \notin \tilde{\mathcal{U}} \end{cases}$$

es una medida en  $\mathbf{D}_T$ . A  $\tilde{\mu}$  la llamamos medida de Martin en los grados de Turing.

<sup>1</sup>Para más detalles de la  $\sigma$ -álgebra cociente, consultar [A.3](#)

<sup>2</sup>Si  $\mathbf{z}$  es la base del cono, entonces basta definir  $\mathbf{y} = \mathbf{z} \vee \mathbf{x}$ . De manera similar, se define  $y$  para el caso  $2^\omega$ .

<sup>3</sup>Para más detalles sobre este axioma, mirar las secciones [C.2](#) y [C.3](#) del Apéndice.

*Demostración.* (i) Definimos  $A^* = \{x \in 2^\omega \mid \mathbf{x} \in A\} = \pi^{-1}(A)$ . Consideremos el siguiente juego de elementos en  $\omega$ :

$$\begin{array}{rcccc} \text{I} & a_0 & & a_2 & & \dots \\ & & & & & \\ \text{II} & & a_1 & & a_3 & \end{array}$$

En este juego, el jugador I gana si y sólo si  $a = (a_n)_{n \in \omega} \in A^*$ . Por el Axioma de Determinación **AD**, este juego está determinado. Por lo tanto, existe una estrategia ganadora para I o para II. Supongamos que la estrategia  $\psi : \omega^{<\omega} \rightarrow \omega$  existe para I. Sea  $\varphi : \omega \rightarrow \omega^{<\omega}$  una biyección efectivamente calculable, definimos  $x : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $x(n) = \psi(\varphi(n))$ .

Afirmamos que  $\text{Cono}(\mathbf{x}) \subseteq A$ . Sea  $\mathbf{y} \in \text{Cono}(\mathbf{x})$ , en particular  $x \leq_T y$ . La partida en la que el jugador II juega la sucesión  $y$  y el jugador I responde conforme le dicta la estrategia  $\psi$ , forma la sucesión  $a = (a(0), y(0), a(2), \dots)$ . Como  $y(n) = a(2n + 1)$ , tenemos que  $y \leq_T a$ . Por otro lado, como  $a(2n + 1) = y(n)$  y  $a(2n) = \psi(y_0, \dots, y_{2n-2}) = x(\varphi^{-1}(y_0, \dots, y_{2n-2}))$  tenemos que  $a \leq_T (x_0, y_0, x_1, \dots)$ . Además como  $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$  tenemos que  $\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = \mathbf{y}$ . Por lo tanto,  $\mathbf{y} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \vee \mathbf{y} = \mathbf{y}$ , lo cual implica que  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ . Como I jugó con una estrategia ganadora,  $a \in A^*$ , de donde  $\mathbf{a} \in A$ , es decir  $\mathbf{y} \in A$ . Por lo tanto,  $\text{Cono}(\mathbf{x}) \subseteq A$ .

Si el jugador II tiene una estrategia ganadora, aplicamos un razonamiento similar. En este caso, tendremos que  $\text{Cono}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{D}_T \setminus A$ .

(ii) Es claro que  $\emptyset \notin \tilde{\mathcal{U}}$  y  $\mathbf{D}_T \in \tilde{\mathcal{U}}$ . Si  $A, B \in \tilde{\mathcal{U}}$ , entonces existen  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{D}_T$  tales que  $\text{Cono}(\mathbf{x}_1) \subseteq A$  y  $\text{Cono}(\mathbf{x}_2) \subseteq B$ . Entonces, como  $\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2$  y  $\mathbf{x}_2 \leq \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2$  tenemos que  $\text{Cono}(\mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2) \subseteq A \cap B$ . Por lo tanto,  $A \cap B \in \tilde{\mathcal{U}}$ . Es fácil ver que  $\tilde{\mathcal{U}}$  es cerrado bajo superconjuntos. Por lo tanto,  $\tilde{\mathcal{U}}$  es un filtro. Por el inciso (i) anterior, tenemos que  $\tilde{\mathcal{U}}$  es un ultrafiltro. Ahora bien, como todo cono  $\text{Cono}(\mathbf{x})$  tiene a al menos a los elementos distintos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}'$ , el ultrafiltro  $\tilde{\mathcal{U}}$  no puede contener un conjunto singular  $\{\mathbf{z}\}$  para algún  $\mathbf{z} \in \mathbf{D}_T$ . Concluimos que  $\tilde{\mathcal{U}}$  no es principal.

(iii) Como  $\emptyset \notin \tilde{\mathcal{U}}$ ,  $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$ . Demostremos que  $\tilde{\mu}$  es  $\sigma$ -aditiva. Sea  $\{A_n\}_{n \in \omega}$  una sucesión disjunta de subconjuntos de  $\mathbf{D}_T$ . Notemos que a lo más un conjunto  $A_i$  puede contener un cono de Turing. En efecto, si  $A_i, A_j$  contienen conos de Turing e  $i \neq j$ , entonces  $A_i, A_j \in \tilde{\mathcal{U}}$ , por lo que  $\emptyset = A_i \cap A_j \in \tilde{\mathcal{U}}$ , la cual es una contradicción.

Ahora bien, distingamos de dos casos: algún  $A_i$  contiene un cono o ninguno contiene un cono. Si algún  $A_i$  contiene un cono, entonces existe  $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T$  tal que  $\text{Cono}(\mathbf{x}) \subseteq A_i$ . Por la observación anterior,  $\tilde{\mu}(A_n) = 0$  si y sólo si  $n \neq i$ . También, como  $\text{Cono}(\mathbf{x}) \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{n \in \omega} A_n$  tenemos que  $\bigcup_{n \in \omega} A_n \in \tilde{\mathcal{U}}$ . Así,  $\tilde{\mu}(\bigcup_{n \in \omega} A_n) = 1 = \tilde{\mu}(A_i) = \sum_{n \in \omega} \tilde{\mu}(A_n)$ .

Si ningún  $A_n$  contiene un cono entonces  $\tilde{\mu}(A_n) = 0$  para todo  $n \in \omega$ . Por el inciso (i),  $\mathbf{D}_T \setminus A_n$  tiene un cono  $\text{Cono}(\mathbf{x}_n)$  para todo  $n \in \omega$ . Definimos  $x : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $x(\ulcorner n, m \urcorner) = x_m(n)$ . Se cumple que  $\mathbf{x}_n \leq \mathbf{x}$  para toda  $n \in \omega$ . Por lo tanto,  $\text{Cono}(\mathbf{x}) \subseteq \bigcap_{n \in \omega} (\mathbf{D}_T \setminus A_n)$ . Así,  $\tilde{\mu}(\bigcap_{n \in \omega} \mathbf{D}_T \setminus A_n) = 1$ . Utilizando el caso anterior,  $\tilde{\mu}(\mathbf{D}_T) = \tilde{\mu}(\bigcup_{n \in \omega} A_n) + \tilde{\mu}(\bigcap_{n \in \omega} \mathbf{D}_T \setminus A_n)$ . Por lo tanto,  $\tilde{\mu}(\bigcup_{n \in \omega} A_n) = 0 = \sum_{n \in \omega} \tilde{\mu}(A_n)$ . ■

**Corolario 2.1.1 (ZFC).** El Teorema de Martin de conos de grados de Turing es válido cuando nos restringimos a conjuntos borelianos.

**Definición 2.1.2** (Turing-invariante).

- (i) Sea  $C \subseteq 2^\omega$  un cono de Turing. Una función  $f : C \rightarrow 2^\omega$  es *Turing-invariante* si y sólo si para todo  $x, y \in C$ , si  $x \equiv_T y$  se tiene que  $f(x) \equiv_T f(y)$ .
- (ii) Un conjunto  $A \subseteq 2^\omega$  es *Turing-invariante* si y sólo si para todo  $x, y \in 2^\omega$ , si  $x \equiv_T y$  y  $x \in A$  entonces  $y \in A$ .

La importancia de tener una función Turing-invariante radica en lo siguiente: si  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es Turing-invariante, a partir de ella podemos inducir una nueva función  $\mathbf{f} : \mathbf{D}_T \rightarrow \mathbf{D}_T$  tal que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f(x)]_T$ . Si  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  entonces  $x \equiv_T y$ , lo cual implica  $f(x) \equiv_T f(y)$ , por lo que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f(x)]_T = [f(y)]_T = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ . Por lo tanto,  $\mathbf{f}$  está bien definida. En este caso, diremos que  $\mathbf{f}$  es *representable*. Así, toda función Turing-invariante induce una función representable.

**Proposición 2.1.1.** Para cada  $n \in \omega$ , la función  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  tal que  $f(x) = x^{(n)}$  es una función boreliana Turing-invariante.

*Demostración.* Demostremos el resultado por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 1$ , del Lema del Límite (Teorema 1.1.3), la función  $x \mapsto x'$  en  $2^\omega$  puede escribirse como límite puntual de funciones continuas. Por consiguiente, la función es boreliana. Para  $n + 1$ , la función  $x \mapsto x^{(n+1)}$  es la composición de funciones borelianas y por lo tanto boreliana. Del Ejemplo 1.2.4 se sigue que  $f$  es Turing-invariante. ■

**Proposición 2.1.2.** Si  $\alpha$  es un ordinal y  $z \in 2^\omega$  es tal que  $\alpha$  es un ordinal  $z$ -computable, entonces la función  $f : \text{Cono}(z) \rightarrow 2^\omega$  tal que  $f(x) = x^{(\alpha)}$  es boreliana Turing-invariante.

*Demostración.* Verificar que  $f$  es Turing-invariante se sigue de la Proposición 1.4.6. ■

Por otro lado, un conjunto  $A \subseteq 2^\omega$  Turing-invariante nos permite definir un nuevo conjunto  $\tilde{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T \mid x \in A\} \subseteq \mathbf{D}_T$ . Dicho conjunto está bien definido, en el sentido de que la pertenencia de  $\mathbf{x}$  a  $\tilde{A}$  no depende del representante de dicha clase: pues si  $x \equiv_T y$  y  $x \in A$ , entonces  $\mathbf{y} = \mathbf{x} \in \tilde{A}$ .

**Proposición 2.1.3.** La familia  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $2^\omega$  de conjuntos Turing-invariantes es una  $\sigma$ -álgebra.

*Demostración.* Es claro que  $\emptyset, 2^\omega \in \mathcal{A}$ . Ahora, si  $A \in \mathcal{A}$  entonces dados  $x, y \in 2^\omega$  tal que  $x \in 2^\omega \setminus A$  y  $x \equiv_T y$ , si  $y \in A$  entonces como  $A \in \mathcal{A}$  tenemos que  $x \in A$ , la cual es una contradicción. Por lo tanto,  $y \in 2^\omega \setminus A$ , de donde concluimos que  $2^\omega \setminus A \in \mathcal{A}$ . Es sencillo ver también que  $\mathcal{A}$  es cerrada bajo uniones arbitrarias. Por lo tanto,  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra. ■

También podemos construir una medida de Martin para los conjuntos Turing-invariantes, similar a como la construimos para los conjuntos de grados de Turing.

**Teorema 2.1.2** (Teorema de Martin de conos para reales, **ZF+AD+DC**).

(i) Para todo conjunto Turing-invariante  $A$  existe  $x \in 2^\omega$  tal que  $\text{Cono}(x) \subseteq A$  ó  $\text{Cono}(x) \subseteq 2^\omega \setminus A$ .

(ii) La familia de conjuntos

$$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists x \in 2^\omega : \text{Cono}(x) \subseteq A\}$$

es un ultrafiltro no principal en  $\mathcal{A}$ .

(iii) La función  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$  tal que

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{si } A \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

es una medida en  $\mathcal{A}$ . A  $\mu$  la llamamos medida de Martin en los reales.

*Demostración.* (i) Dado  $A \in \mathcal{A}$ , definimos  $\tilde{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T \mid x \in A\} = \pi(A)$ . Como  $A$  es Turing-invariante,  $\tilde{A}$  está bien definido. Por el Teorema 2.1.1, existe  $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T$  tal que  $\text{Cono}(\mathbf{x}) \subseteq \tilde{A}$  ó  $\text{Cono}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{D}_T \setminus \tilde{A}$ . Por consiguiente,  $\text{Cono}(x) \subseteq A$  ó  $\text{Cono}(x) \subseteq 2^\omega \setminus A$ .

La demostración de los incisos (ii) y (iii) son similares a las demostraciones de los inciso (ii) y (iii), respectivamente, del Teorema 2.1.1. ■

**Corolario 2.1.2** (**ZFC**). El Teorema de Martin de conos de reales es válido cuando nos restringimos a conjuntos borelianos.

La medida de Martin en los grados de Turing está relacionada con la medida de Martin en los conjuntos Turing-invariantes de la siguiente forma: si  $A \subseteq 2^\omega$  es Turing-invariante entonces  $\mu(A) = \tilde{\mu}(\tilde{A})$ . En efecto, esto se sigue del hecho de que dado  $A \in \mathcal{A}$ , existe  $x \in 2^\omega$  tal que  $\text{Cono}(x) \subseteq A$  si y sólo si existe  $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T$  tal que  $\text{Cono}(\mathbf{x}) \subseteq \tilde{A}$ .

Hasta ahora, hemos considerado a los conos como conjuntos grandes en el sentido de Martin. Dicho esto, sería deseable verificar propiedades en dichos conjuntos.

**Definición 2.1.3** (Propiedades en un cono).

- (i) Dada una propiedad  $P$  sobre elementos de  $2^\omega$ , respectivamente sobre elementos de  $\mathbf{D}_T$ , diremos que  $P$  se satisface en un cono si y sólo si  $\{x \in 2^\omega \mid P(x)\}$ , respectivamente  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T \mid P(\mathbf{x})\}$ , contiene un cono de Turing de reales, respectivamente un cono de Turing de grados.

En particular, si  $C \subseteq 2^\omega$  es un cono de Turing y  $f : C \rightarrow 2^\omega$  es una función, diremos que

- (ii)  $f$  es *creciente en un cono* si y sólo si existe  $z \in 2^\omega$  tal que para todo  $x \in C$ , si  $z \leq_T x$  entonces  $x \leq_T f(x)$ .
- (iii)  $f$  es *constante en un cono* si y sólo si existen  $z, y \in 2^\omega$  tal que para todo  $x \in C$ , si  $z \leq_T x$  entonces  $f(x) \equiv_T y$ .
- (iv)  $f$  es *preservadora de orden en un cono* si y sólo si existen  $z \in 2^\omega$  tal que para todo  $x, y \in C$ , si  $z \leq_T x \leq_T y$  entonces  $f(x) \equiv_T f(y)$ .

Dadas  $f : C \subseteq 2^\omega \rightarrow 2^\omega, g : D \subseteq 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  funciones definidas en conos, diremos que

- (v)  $f$  es *menor a  $g$  en un cono*, lo cual denotamos por  $f \leq_T^\nabla g$ , si y sólo si existe  $z \in 2^\omega$  tal que para todo  $x \in C \cap D$ , si  $z \leq_T x$  entonces  $f(x) \leq_T g(x)$ .
- (vi)  $f$  es *igual a  $g$  en un cono*, lo cual denotamos como  $f \equiv_T^\nabla g$ , si y sólo si existe  $z \in 2^\omega$  tal que para todo  $x \in C \cap D$ , si  $z \leq_T x$  entonces  $f(x) \equiv_T g(x)$ .

Por lo regular, las funciones  $f, g$  que consideremos estarán definidas en todo  $2^\omega$ , sin embargo pueden existir excepciones. Por esta razón, nos restringiremos a funciones totales, y cuando sea necesario las consideraremos definidas en conos.

**Ejemplo 2.1.1.** La función identidad en  $2^\omega$  y las funciones que se obtienen de iteraciones del salto de Turing son funciones crecientes en un cono.

Notemos que dos funciones  $f, g$  son iguales en un cono si y sólo si  $f$  es menor a  $g$  en un cono y viceversa, por lo que nuestra notación para funciones iguales en un cono está justificada.

Nuestra definición anterior de funciones iguales en un cono está relacionada con la medida de Martin en los reales.

**Proposición 2.1.4.** Sean  $f, g : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  funciones Turing-invariantes. Entonces  $f$  es igual a  $g$  en un cono, i.e.  $f \equiv_T^\nabla g$ , si y sólo si  $f = g$  salvo un conjunto de medida cero respecto a la medida de Martin en los conjuntos Turing-invariantes.

En caso de que alguna de las propiedades anteriores ocurra, diremos que  $f$  es *igual a  $g$  Martin casi dondequiera*, y lo denotamos también por  $f = g \mu$  c.d.

*Demostración.* En efecto, si  $f \equiv_T^\nabla g$  entonces existe  $z \in 2^\omega$  tal que  $\text{Cono}(z) \subseteq \{x \in 2^\omega \mid f(x) \equiv_T g(x)\}$ . Por lo tanto,  $2^\omega \setminus \{x \in 2^\omega \mid f(x) \equiv_T g(x)\} \subseteq 2^\omega \setminus \text{Cono}(z)$ . Como  $2^\omega \setminus \text{Cono}(z) \notin \mathcal{U}$  (de lo contrario  $\emptyset = \text{Cono}(z) \cap (2^\omega \setminus \text{Cono}(z)) \in \mathcal{U}$ ) entonces  $f = g$  salvo un conjunto de medida cero respecto de  $\mu$ .

Recíprocamente, si  $f = g$  salvo un conjunto de medida cero respecto de  $\mu$ , digamos  $A$ , entonces  $2^\omega \setminus \{x \in 2^\omega \mid f(x) \equiv_T g(x)\} \subseteq A$  y  $\mu(A) = 0$ . Luego, como  $A$  no contiene un cono, existe  $z \in 2^\omega$  tal que  $\text{Cono}(z) \subseteq 2^\omega \setminus A \subseteq \{x \in 2^\omega \mid f(x) \equiv_T g(x)\}$ . Por lo tanto,  $f \equiv_T^\nabla g$ . ■

**Proposición 2.1.5.** La relación  $\equiv_T^\nabla$  entre funciones Turing-invariantes es una relación de equivalencia.

*Demostración.* La reflexividad y simetría son consecuencias inmediatas de la definición. Para verificar la transitividad, sean  $f, g, h : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  Turing-invariantes tales que  $f \equiv_T^\nabla g$  y  $g \equiv_T^\nabla h$ , luego existen  $A, B \subseteq 2^\omega$  Turing-invariantes tales que  $2^\omega \setminus \{x \in 2^\omega \mid f(x) \equiv_T h(x)\} \subseteq (2^\omega \setminus \{x \in 2^\omega \mid f(x) \equiv_T g(x)\}) \cup (2^\omega \setminus \{x \in 2^\omega \mid g(x) \equiv_T h(x)\}) \subseteq A \cup B$ . Como  $\mu(A \cup B) = 0$ , tenemos que  $f = h$   $\mu$  c.d., i.e.  $f \equiv_T^\nabla h$ . ■

La relación  $\leq_T^\nabla$  induce una relación  $\leq$  sobre las clases de equivalencia de la relación  $\equiv_T^\nabla$  sobre funciones Turing-invariantes, las cuales denotamos por  $[\cdot]_T^\nabla$ , o en ocasiones cuando sea claro solamente por  $\mathbf{f}$ , como sigue: dadas  $f, g : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$ , diremos que  $[f]_T^\nabla \leq [g]_T^\nabla$  si sólo si  $f \leq_T^\nabla g$ . La relación  $\leq$  es un orden parcial sobre las clases de funciones Turing-invariantes.

Dada una función Turing-invariante  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  podemos definir una nueva función  $f' : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  tal que  $f'(x) = f(x)'$ , donde  $f(x)'$  es el salto de Turing de  $f(x)$ . Como  $f$  es Turing-invariante, la función  $f'$  también es Turing-invariante. Es posible demostrar que si  $f$  es boreliana entonces  $f'$  también es una función boreliana. Por lo tanto, si asumimos **ZFC**, nuestro estudio puede seguirse restringiendo a funciones y conjuntos borelianos.

## 2.2. Conjetura de Martin

Enseguida enunciamos la Conjetura de Martin. De manera muy general, la conjetura nos dice que las únicas funciones Turing-invariantes son las constantes, la identidad o alguna función que se obtiene de un iterado del salto de Turing, posiblemente transfinito. La versión general de la conjetura es planteada asumiendo **AD** y **DC**. Dicha versión intenta describir a todas las funciones definibles en los grados Turing.

**Conjetura de Martin.** ([KM78] p. 281, **ZF+AD+DC**)

- (i) Si  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es Turing-invariante y no es creciente en un cono, entonces  $f$  es constante en un cono.

- (ii)  $\leq_T^\nabla$  pre-bien ordena a las funciones Turing-invariantes crecientes en un cono. Más aún, si  $f$  tiene tipo de orden  $\alpha$ <sup>4</sup> entonces  $f'$  tiene tipo de orden  $\alpha + 1$ .

La versión general de la conjetura puede ser restringida considerando únicamente funciones borelianas. Esta versión es planteada en **ZFC**.

### Conjetura de Martin restringida a funciones borelianas. (ZFC)

- (i) Si  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es boreliana, Turing-invariante y no es creciente en un cono, entonces  $f$  es constante en un cono.
- (ii)  $\leq_T^\nabla$  pre-bien ordena a las funciones borelianas Turing-invariantes crecientes en un cono. Más aún, si  $f$  tiene tipo de orden  $\alpha$  entonces  $f'$  tiene tipo de orden  $\alpha + 1$ .

Podemos continuar estableciendo diferentes versiones de la conjetura para distintas clases de conjuntos. Por ejemplo, es posible establecer la conjetura sólo para funciones analíticas, funciones proyectivas, entre otras. Sin embargo, en este trabajo sólo abordaremos las dos versiones previamente presentadas.

## 2.2.1. Funciones Uniformemente Turing-Invariantes

En este apartado, desarrollaremos la solución de la conjetura para el caso de funciones que satisfacen una condición de uniformidad. Las soluciones expuestas aquí no son resultados nuevos y se basan en las pruebas presentadas en los artículos [SS88] y [Ste82].

La propiedad que estudiaremos sobre funciones Turing-invariantes es una condición de uniformidad.

**Definición 2.2.1** (Función Uniformemente Turing-invariante). Una función  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es *uniformemente Turing-invariante* si y sólo si existe una función  $u : \omega^2 \rightarrow \omega^2$  tal que si  $x \equiv_T y$  vía  $(i, j)$  entonces  $f(x) \equiv_T f(y)$  vía  $u(i, j)$ .

Los únicos ejemplos de funciones uniformemente Turing-invariantes conocidos son las funciones constantes, la función identidad, la función salto de Turing o alguno de sus iterados.

**Ejemplo 2.2.1.** Las siguientes funciones son uniformemente Turing-invariantes:

- (i) La función identidad en  $2^\omega$ .
- (ii) Para cada  $n \in \omega$ , la función  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  tal que  $f(x) = x^{(n)}$ .
- (iii) La función salto transfinito de Turing, definida en un cono adecuado.

<sup>4</sup>El tipo de orden de  $f$  es el tipo de orden del buen orden inducido por  $\leq_T^\nabla$  en las funciones Turing-invariantes, restringido a la  $\leq_T^\nabla$ -clase de  $f$ , denotada por  $\mathbf{f}$ .

### Primera Parte de la Conjetura de Martin

El trabajo aquí expuesto se basa en la prueba planteada en [SS88]. Comencemos desarrollando la prueba para la primera parte de la conjetura. Para ello, introduciremos dos conceptos fundamentales en este desarrollo: árbol puntuado y conjunto cofinal.

**Definición 2.2.2** (Árbol puntuado). Un árbol  $T \subseteq 2^{<\omega}$  es *puntuado* si y sólo si  $T$  es perfecto y para todo  $x \in [T]$ , se cumple que  $T \leq_T x$ . Diremos además que  $[T]$  es un *conjunto puntuado*.

**Definición 2.2.3** (Conjunto cofinal). Diremos que un conjunto  $A \subseteq 2^\omega$  es *cofinal* si y sólo si para todo  $x \in 2^\omega$ , existe  $y \in A$  tal que  $y \geq_T x$ .

En el caso ideal, un conjunto cofinal es Turing-invariante y, por tanto, por el Teorema de Martin de conos para reales (Teorema 2.1.2), el conjunto debe contener un cono. Así, el verificar una propiedad en un cono, se reduce a verificar que dicha propiedad se satisface cofinalmente.

Recíprocamente, un conjunto cofinal no necesariamente es Turing-invariante, sin embargo cumple con la propiedad de contener un conjunto puntuado.

**Proposición 2.2.1** (Teorema de Martin sobre árboles puntuados, **ZF+AD+DC**). Para todo conjunto cofinal  $A \subseteq 2^\omega$ , existe un árbol puntuado  $T$  tal que  $[T] \subseteq A$ .

*Demostración.* Consideremos el siguiente juego con elementos de  $\{0, 1\}$ :

$$\begin{array}{cccc} \text{I} & x_0 & x_1 & \dots \\ & & & \\ \text{II} & y_0 & y_1 & \dots \end{array}$$

Si  $x = (x_n)_{n \in \omega}$  y  $y = (y_n)_{n \in \omega}$ , este juego lo gana el jugador I si y sólo si  $x \geq_T y$  y  $x \in A$ . Por **AD**, este juego está determinado. Supongamos que II tiene una estrategia ganadora, digamos  $\tau : 2^{<\omega} \rightarrow \{0, 1\}$ . Sea  $\varphi : \omega \rightarrow 2^{<\omega}$  una biyección computable. Para  $\tau \circ \varphi \in 2^\omega$ , existe  $x \in A$  tal que  $x \geq_T \tau \circ \varphi$ . Consideremos la partida en la que el jugador I juega  $x$  y II responde  $y$  conforme su estrategia  $\tau$ . Entonces,  $y \leq_T \tau \leq_T \tau \circ \varphi \leq_T x$  y  $x \in A$ , la cual es una contradicción. Por lo tanto, I debe tener una estrategia ganadora, digamos  $\sigma$ .

Definimos a  $X$  como el conjunto de partidas de I, jugadas conforme la estrategia  $\sigma$ , sobre partidas de II y tales que  $\sigma \leq_T y$ . Dado  $x \in X$ , tenemos que  $x \in A$  y  $x \leq_T \sigma \leq_T y \leq_T x$ , luego  $x \equiv_T \sigma \equiv_T y$  y  $X \subseteq A$ .

Podemos construir un árbol perfecto  $T$  que es  $\sigma$ -computable y tal que  $[T] \subseteq X$ . Dado que  $x \geq_T \sigma$  si  $x \in [T]$ , entonces  $T \leq_T x$ . Por lo tanto,  $T$  es un árbol puntuado tal que  $[T] \subseteq A$ . ■

*Observación.* El Teorema de Martin sobre árboles puntuados es válido en **ZFC** cuando nos restringimos a conjuntos cofinales y borelianos.

Todo elemento en el cono con base en un árbol puntuado, tiene un representante en las ramas del árbol.

**Lema 2.2.1.** Sea  $T$  un árbol puntuado. Entonces para todo  $x \in 2^\omega$ , si  $x \geq_T T$  entonces existe  $y \in [T]$  tal que  $x \equiv_T y$ .

*Demostración.* Definimos  $y \in 2^\omega$  de manera recursiva de la siguiente forma. Sea  $y_0 = \emptyset$ . Supongamos que hemos construido  $y_n \in T$ . Para  $y_n$ , existe el menor  $y_n \subseteq \sigma \in T$  tal que  $\sigma \frown 0, \sigma \frown 1 \in T$ . Sea  $y_{n+1} = \sigma \frown 0$  si  $x(0) = 0$  y  $y_{n+1} = \sigma \frown 1$  si  $x(0) = 1$ . Definimos  $y = \bigcup_{n \in \omega} y_n \in [T]$ . Se sigue que  $x \oplus T \geq_T y$ , ya que para conocer un valor  $y(n)$  usamos a  $T$  para buscar las menores ramificaciones y a  $x$  para saber cuál ramificación se tomó. Por lo tanto,  $x \equiv_T x \oplus T \geq_T y$ . También tenemos que  $y \oplus T \geq_T x$  por una razón similar; ya que podemos ir verificando dónde se realizaron ramificaciones según  $y$ . Así,  $y \equiv_T y \oplus T \leq_T x$ . Por lo tanto,  $x \equiv_T y$ . ■

Como consecuencia tenemos que todo conjunto puntuado es cofinal.

**Corolario 2.2.1.** Si  $T$  es un árbol puntuado, entonces  $[T]$  es cofinal.

*Demostración.* Sea  $x \in 2^\omega$ , para  $x \oplus T \geq_T T$ , existe  $y \in [T]$  tal que  $x \leq_T x \oplus T \equiv_T y$ . Concluimos que  $[T]$  es cofinal. ■

Si tenemos una función definida en un conjunto cofinal que devuelve valores en los naturales, entonces podemos encontrar un subconjunto *suficientemente grande* en el cual la función es constante.

**Proposición 2.2.2 (ZF+AD+DC).** Para todo conjunto cofinal  $A \subseteq 2^\omega$  y toda función  $f : A \rightarrow \omega$ , existe un árbol puntuado  $T$  tal que  $[T] \subseteq A$  y  $f \upharpoonright [T]$  es constante.

*Demostración.* La demostración es similar a la del Teorema de Martin sobre árboles puntuados. Consideremos el juego:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad \ulcorner (e, x_0) \urcorner \quad x_1 \quad \dots \\ \text{II} \quad \quad \quad y_0 \quad y_1 \end{array}$$

donde  $e \in \omega$  y los  $x_n, y_n \in \{0, 1\}$  para todo  $n \in \omega$ . Si  $x = (x_n)$  y  $y = (y_n)$ , este juego lo gana el jugador I si y sólo si  $x \not\leq_T y \vee (y \leq_T x \wedge x \in A \wedge f(x) = e)$ . Por AD, este juego está determinado. Supongamos que II tiene una estrategia ganadora  $\tau : \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \{0, 1\}$ . Sea  $\varphi : \omega \rightarrow \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$  una biyección computable. Para  $\tau \circ \varphi \in 2^\omega$ , existe  $x \in A$  tal que  $x \geq_T \tau \circ \varphi$ . Consideremos la partida en la que el jugador I juega en  $f(x)$  y posteriormente  $x$ , y el jugador II juega  $y$  conforme su estrategia  $\tau$ . Entonces  $y \leq_T \tau \leq_T \tau \circ \varphi \leq_T x$ . Por lo tanto, el jugador I gana la partida, la cual es una contradicción. A partir de esto, concluimos que I debe tener una estrategia ganadora, digamos  $\sigma$ .

Sea  $X$  el conjunto de partidas de I jugadas conforme  $\sigma$ , sobre partidas de II  $y$  tales que  $\sigma \leq_T y$ . Si  $x \in X$ , entonces  $x \leq_T \sigma \leq_T y$ , luego  $x \equiv_T \sigma \equiv_T y$ . De donde, debe ocurrir que  $f(x) = (\sigma(\emptyset))_1$ . Por lo tanto,  $f$  es constante en  $X$ .

Podemos construir un árbol perfecto  $T$  que es  $\sigma$ -computable tal que  $[T] \subseteq X$ . Como  $x \geq_T \sigma$ , si  $x \in [T]$ , entonces  $T \leq_T x$ . Por lo tanto  $T$  es un árbol puntuado tal que  $[T] \subseteq A$ . Además,  $f \upharpoonright [T]$  es constante. ■

*Observación.* La proposición previa es válida en **ZFC** cuando nos restringimos a conjuntos cofinales borelianos y a funciones borelianas.

En ocasiones, será útil uniformizar la obtención de los elementos de un árbol puntuado a partir de sus ramas.

**Corolario 2.2.2 (ZF+AD+DC).** Para todo árbol puntuado  $T$ , existe un árbol uniformemente puntuado  $T^* \subseteq T$ . Es decir, existen  $T^*$  árbol puntuado y  $e \in \omega$  tal que para todo  $x \in [T^*]$ ,  $T^* \leq_T x$  vía  $e$ .

*Demostración.* Sea  $f : [T] \rightarrow \omega$  tal que  $f(x) = \min\{e \in \omega \mid T \leq_T x \text{ vía } e\}$ . Por la proposición previa, existe un árbol puntuado  $T^*$  tal que  $[T^*] \subseteq [T]$  y  $f \upharpoonright [T^*]$  es constante. De donde,  $T^*$  es el árbol requerido. ■

*Observación.* La proposición previa también es válida en **ZFC**, ya que  $[T]$  sería compacto en  $2^\omega$  y  $f$  una función boreliana.

La Proposición 2.2.2 también es válida cuando la función devuelve tuplas de naturales.

**Corolario 2.2.3 (ZF+AD+DC).** Para todo conjunto cofinal  $A \subseteq 2^\omega$  y toda función  $f : A \rightarrow \omega^2$ , existe un árbol puntuado  $T$  tal que  $[T] \subseteq A$  y  $f \upharpoonright [T]$  es constante.

*Demostración.* Sea  $\varphi : \omega^2 \rightarrow \omega$  una biyección. Para  $\varphi \circ f$ , existe un árbol puntuado  $T$  tal que  $[T] \subseteq 2^\omega$  tal que  $(\varphi \circ f) \upharpoonright [T]$  es constante. Sea  $x \in [T]$ , luego  $\varphi(f(x)) = k$ , para algún  $k \in \omega$  fijo. Así,  $f(x) = \varphi^{-1}(k)$ , la cual es constante. Por lo tanto,  $f \upharpoonright [T]$  es constante. ■

*Observación.* En la demostración previa,  $\varphi$  es continua considerando a  $\omega^2$  y  $\omega$  con su respectiva topología discreta. Por lo tanto, el resultado es válido en **ZFC**, considerando conjuntos y funciones borelianas.

Una de las propiedades interesantes que presenta un conjunto puntuado es el ser homeomorfo a  $2^\omega$ , mediante un homeomorfismo del que podemos obtener de forma computable los valores que devuelve en los elementos de dicho conjunto.

**Lema 2.2.2.** Para todo un árbol puntuado  $T$ , existe un homeomorfismo  $\sigma : 2^\omega \rightarrow [T]$  función tal que si  $x \geq_T T$  entonces  $\sigma(x) \equiv_T x$ .

*Demostración.* Construyamos a  $\sigma$  por recursión. Sea  $\sigma_0 = \emptyset$ . Supongamos que hemos construido  $\sigma_n$ . Sea  $\sigma_{n+1} : 2^{<\omega} \rightarrow T$  tal que  $\sigma_{n+1}$  extiende a  $\sigma_n$  en tuplas de longitud  $\leq n$  y si  $\gamma \in 2^{<\omega}$  es tal que  $|\gamma| = n + 1$  entonces  $\sigma_{n+1}(\gamma)$  es la menor extensión de  $\sigma_n(\gamma \upharpoonright n)$  en  $T$  concatenado con 0 ó 1 según sea  $\gamma = (\gamma \upharpoonright n) \frown 0$  ó  $\gamma = (\gamma \upharpoonright n) \frown 1$ . Sea  $\sigma : 2^\omega \rightarrow [T]$  tal que  $\sigma(x) = \bigcup_{n \in \omega} \sigma_n(x \upharpoonright n)$ . Si  $x \in [T]$ , entonces  $x \geq_T T$  y  $\sigma(x) \geq_T T$ . Para obtener que  $\sigma(x) \equiv_T x$  basta ir obteniendo extensiones de tuplas finitas en  $T$ . ■

El siguiente resultado nos dice que si queremos verificar si una función Turing-invariante es uniforme, entonces basta verificar dicha condición en un conjunto puntuado.

**Proposición 2.2.3 (ZF+AD+DC).** Sea  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  una función Turing-invariante. Entonces, existe una función  $g$ , definida  $\mu$  c.d., uniformemente Turing-invariante tal que  $g =_m f$  si y sólo si existe un árbol puntuado  $T$  y una función  $u : \omega^2 \rightarrow \omega^2$  tal que para todo  $x, y \in [T]$ , si  $x \equiv_T y$  vía  $(i, j)$  entonces  $f(x) \equiv_T f(y)$  vía  $u(i, j)$ .

*Demostración.* Demostremos la suficiencia. Sea  $g : C \rightarrow 2^\omega$  función uniformemente Turing-invariante tal que  $g =_{\nabla_T} f$ . Sea  $\text{Cono}(z)$  cono tal que para todo  $x \in C$ ,  $f(x) \equiv_T g(x)$ . Definimos  $h : \text{Cono}(z) \rightarrow \omega^2$  tal que  $h(x)$  es el menor  $(i, j)$  que verifica que  $f(x) \equiv_T g(x)$  vía  $(i, j)$ .

Por el Corolario 2.2.3, existe  $T$  árbol puntuado tal que  $[T] \subseteq \text{Cono}(z)$  y  $h \upharpoonright [T]$  es constante, digamos  $(a, b)$ . Sea  $u^* : \omega^2 \rightarrow \omega^2$  función que verifica la uniformidad de  $g$ . Sea  $u : \omega^2 \rightarrow \omega^2$  tal que  $u(i, j)$  es la pareja cuya primera entrada es el índice que resultan de la concatenación de los programas con índices  $a, \pi_1(u^*(i, j))$  y  $b$ , y la segunda entrada de  $a, \pi_2(u^*(i, j))$  y  $b$ , en el orden que se presentan. Así, para cualesquiera  $x, y \in [T]$ , si  $x \equiv_T y$  vía  $(i, j)$  entonces, se cumple que  $f(x) \equiv_T f(y)$  vía  $u(i, j)$ .

Ahora demostremos la necesidad. Sean  $T$  árbol puntuado y  $u$  como en la hipótesis. Entonces existe un árbol puntuado  $T^* \subseteq T$  y un índice  $e \in \omega$  tal que para todo  $x \in [T^*]$ , se tiene  $T^* \leq_T x$  vía  $e$ . Sean  $C = \{x \in 2^\omega \mid x \geq_T T^*\}$  cono y  $\sigma : 2^\omega \rightarrow [T^*]$  la función del Lema 2.2.2. Definimos  $g : C \rightarrow 2^\omega$  tal que  $g = (f \circ \sigma) \upharpoonright C$ .

Afirmamos que  $g$  es uniformemente Turing-invariante en  $C$ . Sean  $x, y \in C$ , tales que  $x \equiv_T y$  vía  $(i, j)$ . Entonces como  $x, y \in C$ , tenemos que  $\sigma(x) \equiv_T x$  y  $\sigma(y) \equiv_T y$  vía  $(i_0, j_0)$ . Luego,  $\sigma(x) \equiv_T \sigma(y)$ . Como  $f$  en particular es uniforme en  $[T^*]$ , tenemos que  $f(\sigma(x)) \equiv_T f(\sigma(y))$ ; i.e.  $g(x) \equiv_T g(y)$ . Por último demostremos que  $g =_{\nabla_T} f$ . Basta ver que para todo  $x \in C$ ,  $g(x) \equiv_T f(x)$ . Sea  $x \in C$ , entonces  $\sigma(x) \equiv_T x$ . Por lo tanto,  $g(x) = f(\sigma(x)) \equiv_T f(x)$ . ■

*Observación.* La proposición previa es válida en **ZFC** cuando  $f$  y  $g$  son borelianas, ya que todo cono de reales es un conjunto boreliano y las funciones  $h$  y  $\sigma$  son borelianas.

Si queremos volver constante o inyectiva a una función definida en un conjunto puntuado, es suficiente hacer al árbol más *delgado*.

**Lema 2.2.3** (Lema de Adelgazamiento de Árboles Puntuados). Para todo árbol puntuado  $T$  y toda función  $f : [T] \rightarrow 2^\omega$ , existe un árbol puntuado  $U \subseteq T$  tal que  $f \upharpoonright [U]$  es constante ó inyectiva.

*Demostración.* Supongamos que para todo  $\sigma \in T$ ,  $f \upharpoonright [T_\sigma]$  no es constante. Construyamos por recursión a  $U$ . Sea  $U_0 = \emptyset$ . Supongamos que hemos construido  $U_n$ . Construyamos  $U_{n+1}$  tal que  $U_n \subseteq U_{n+1}$ . Sea  $\sigma \in U_n$ , como  $f$  no es constante en  $[T_\sigma]$ , existen  $\gamma, \rho \in [T_\sigma]$  tales que  $f(\gamma) \neq f(\rho)$ . Como  $\gamma \neq \rho$ , sean  $m$  el menor natural tal que  $\gamma(m) \neq \rho(m)$ . Agregamos  $\gamma \upharpoonright k, \rho \upharpoonright k \in U_{n+1}$  para todo  $k \leq m+1$ . Por último, definimos  $U = \bigcup_{n \in \omega} U_n$ .

Afirmamos que  $f$  es inyectiva en  $[U]$ . Sean  $\gamma, \rho \in [U]$  tales que  $\gamma \neq \rho$ . Sea  $m$  el menor natural tal que  $\gamma(m) \neq \rho(m)$ . Por lo tanto,  $\gamma \upharpoonright m = \rho \upharpoonright m \in U$ ,  $\gamma \upharpoonright m+1, \rho \upharpoonright m+1 \in U$  y  $\gamma \upharpoonright m+1 \neq \rho \upharpoonright m+1$ . Por lo tanto, por construcción,  $f(\gamma) \neq f(\rho)$ . ■

Enseguida exhibimos la existencia de una función que nos será de ayuda más adelante.

**Lema 2.2.4.** Existe una función Lipschitz  $h : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  tal que para todo  $x \in 2^\omega$ ,  $h(x) \equiv_T x$  y  $\{h^n(x) \mid n \in \omega\}$  es denso en  $2^\omega$ .

*Demostración.* Definimos recursivamente una función  $h^* : 2^{<\omega} \rightarrow 2^{<\omega}$  como sigue:  
 $h^*(\emptyset) = \emptyset$  y

$$h^*(\gamma \frown (i)) = \begin{cases} (h^*(\gamma)) \frown (1-i) & \text{si } \gamma = \emptyset \text{ ó } \forall k < |\gamma| : \gamma(k) = 0 \\ (h^*(\gamma)) \frown (i) & \text{otro caso} \end{cases}$$

Sea  $h : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  tal que  $h(x) = \bigcup_{n < \omega} h^*(x \upharpoonright n)$ . Como  $h^*$  preserva longitudes,  $h$  es Lipschitz. Para verificar que  $h(x) \equiv_T x$  para cada  $x \in 2^\omega$ , basta seguir la regla que indica los cambios en coordenadas. De la propiedad<sup>5</sup>

$$\forall x \in 2^\omega : \forall \gamma \in 2^{<\omega} : \forall m \in \omega : (|\gamma| = m \Rightarrow \exists n \in \omega : (h^*)^n(x \upharpoonright m) = \gamma),$$

se sigue que para cada  $x \in 2^\omega$ , el conjunto  $\{h^n(x) \mid n \in \omega\}$  es denso en  $2^\omega$ . ■

Continuamos con una definición previa que utilizaremos más adelante.

<sup>5</sup>La demostración de la propiedad es por inducción sobre  $m$ . Para  $m = 0$ , basta tomar  $n = 1$ . Supongamos que la propiedad se cumple para  $m$ . Sean  $0^m$  la sucesión con únicamente  $m$  ceros y  $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \omega$  los menores naturales tales que  $(h^*)^{n_1}(x \upharpoonright m) = 0^m$ ,  $(h^*)^{n_2}(0^m) = \gamma \upharpoonright m$ ,  $(h^*)^{n_3}(0^m) = (1) \frown 0^{m-1}$ ,  $(h^*)^{n_4}(x \upharpoonright m) = \gamma \upharpoonright m$ . Si  $x(m) \neq \gamma(m)$ , entonces  $(h^*)^{n_1+n_2}(x \upharpoonright m+1) = \gamma$ . Si  $x(m) = \gamma(m)$ , distinguimos de dos casos. Si  $n_4 \leq n_1$ , entonces  $(h^*)^{n_4}(x \upharpoonright m+1) = \gamma$ . En otro caso,  $(h^*)^{n_4+(n_3+1)+n_2}(x \upharpoonright m+1) = \gamma$ .

**Definición 2.2.4.** Sea  $V \subseteq 2^{<\omega}$  un árbol. Dados  $u \in 2^{<\omega}$  y  $n \in \omega$ , diremos que  $u$  se  $n$ -separa en  $V$  si y sólo si  $u \in V$  y

$$\{k \in \text{dom } u \mid (u \upharpoonright k)^\frown(0) \in V \wedge (u \upharpoonright k)^\frown(1) \in V\}$$

tiene cardinalidad mayor o igual a  $n$ .

Ahora daremos una demostración de la parte (i) de la conjetura para funciones uniformemente Turing-invariantes.

**Teorema 2.2.1** (Slaman y Steel [SS88], **ZF+AD+DC**). *Sea  $f$  uniformemente Turing-invariante. Si  $f$  no es creciente en un cono, entonces  $f$  es constante en un cono.*

*Demostración.* Por el Teorema de Martin sobre reales, como  $f$  no es creciente en un cono, entonces  $x \not\leq_T f(x)$  en un cono. Por la proposición anterior, existen un árbol puntuado  $T$  y una función  $u : \omega^2 \rightarrow \omega^2$  que son testigos de la uniformidad de  $f$ .

Consideremos el siguiente juego:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad \ulcorner(e, n)^\urcorner \quad x_0 \quad \dots \\ \text{II} \quad \quad \quad y_0 \quad y_1 \end{array}$$

donde  $e, n \in \omega$  y  $x_n, y_n \in \{0, 1\}$  para todo  $n \in \omega$ . Si  $x = (x_n)$ ,  $\bar{x} = (\ulcorner(e, n)^\urcorner)^\frown x$  y  $y = (y_n)$ , este juego lo gana el jugador I si y sólo si

$$(x \in [T] \wedge y \leq_T \bar{x} \text{ vía } e) \wedge \neg(\bar{x} \leq_T y \wedge (f(x)(n) = 0 \leftrightarrow y(y(0)) = 0)).$$

Por el Axioma de Determinación **AD**, este juego está determinado. Supongamos que I tiene una estrategia ganadora  $\sigma : \omega^{<\omega} \rightarrow \omega$ . y demostremos que  $f$  es creciente en el cono con base  $T \oplus \sigma$ . Sean  $z \in 2^\omega$  tal que  $z \geq_T T \oplus \sigma$  y  $(e_0, n_0) = \ulcorner\sigma(\emptyset)^\urcorner$ . Para cada  $m \in \omega$ , definimos  $\beta_m = (m)^\frown z$  y  $\alpha_m \in 2^\omega$  tal que  $(\ulcorner(e_0, n_0)^\urcorner)^\frown \alpha_m$  es la respuesta de I a  $\beta_m$  siguiendo la estrategia  $\sigma$ .

Demostremos que existen índices  $i, j \in \omega$  tal que para todo  $m \in \omega$ ,  $\alpha_m \equiv_T \alpha_{m+1}$  vía  $(i, j)$ . Comencemos mostrando la existencia del índice  $i$ . Dado  $k \in \omega$ ,  $\alpha_m(k) = \sigma(\beta_m \upharpoonright k + 1)$ . Por otro lado,  $\beta_m \upharpoonright k + 1 = (m, z(0), \dots, z(k - 1))$  y  $\beta_{m+1} = (m + 1, z(0), \dots, z(k - 1))$ . Así, para calcular  $\beta_m \upharpoonright k + 1$ , es suficiente calcular  $\beta_{m+1} \upharpoonright k + 1$  y restar uno a  $\beta_{m+1}(0)$ . Como  $\sigma$  es ganadora para el jugador I,  $\beta_{m+1} \leq_T \overline{\alpha_{m+1}}$  vía  $e_0$ . Recordemos que  $\overline{\alpha_{m+1}} = (\ulcorner(e_0, n_0)^\urcorner)^\frown \alpha_m$ . Por lo tanto, para obtener  $\beta_{m+1} \upharpoonright k + 1$  es suficiente ejecutar el programa  $e_0$  con oráculo  $\overline{\alpha_{m+1}}$  modificado de tal forma que sus consultas sean hacia el oráculo  $\alpha_{m+1}$  y, que además, guarde en su memoria el valor  $\overline{\alpha_{m+1}}(0)$ . Notemos que el procedimiento descrito no depende de  $m$ . Por otro lado,  $\sigma \leq_T z \equiv_T \beta_{m+1} \leq_T \alpha_{m+1}$  vía un programa con índice  $e_1$  que no depende de  $m$ . Sea  $i$  el índice del programa que en una entrada  $k \in \omega$ , obtiene  $\beta_m \upharpoonright k + 1$  siguiendo el procedimiento descrito anteriormente y, enseguida, calcula  $\sigma(\beta_m \upharpoonright k + 1) = \alpha_m(k)$  utilizando  $e_1$ . De manera similar, es posible definir

al índice  $j$ . Como observación, de lo anterior, se desprende también que para todo  $m \in \omega$ ,  $\alpha_m \equiv_T \beta_m \equiv_T z$ .

Como para cada  $m \in \omega$ ,  $\alpha_m \in [T]$ , entonces  $f(\alpha_m) \equiv_T f(\alpha_{m+1})$  vía  $u(i, j)$ . Dado que  $f$  es Turing-invariante, tenemos que  $f(\alpha_0) \equiv_T f(z)$ , en particular  $f(\alpha_0) \leq_T f(z)$  vía un programa con índice  $e$ . Así, la función  $(m, n) \mapsto f(\alpha_m)(n)$  es  $f(z)$ -computable vía el programa que en una entrada  $(m, n)$ , ejecuta  $\pi_2(u(i, j))$  en la entrada  $n$  y, en caso de que tengamos una consulta a un oráculo, el programa se vuelve a ejecutar en la consulta; de tal forma que el programa se ejecute un total de  $m - 1$  veces. Esto con el fin de que dichas consultas sean al oráculo  $f(\alpha_0)$ , las cuales las traducimos a consultas a  $f(z)$  vía  $e$ .

Además, para cada  $m \in \omega$ ,  $\overline{\alpha_m} \leq_T \sigma \oplus \beta_m \leq_T z \oplus \beta_m \equiv_T \beta_m$ . Como  $\sigma$  es ganadora para el jugador I, debe ocurrir que  $\beta_m(\beta_m(0)) = 0$  si y sólo si  $f(\alpha_m)(n_0) \neq 0$ . Como para cada  $m > 1$ ,  $z(m - 1) = \beta_m(\beta_m(0))$ , se sigue que  $z(m - 1) = 0$  si y sólo si  $f(\alpha_m)(n_0) \neq 0$ . Por lo tanto,  $z$  es  $f(z)$ -computable, es decir  $z \leq_T f(z)$ , la cual es una contradicción.

Por lo tanto, el jugador II debe tener una estrategia ganadora, digamos  $\sigma$ . Probemos que  $f(z) \leq_T z$  en el cono con base  $T \oplus \sigma$ . Sea  $z \geq_T T \oplus \sigma$ . Como  $z \geq_T T$ , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $z \in [T]$ . Dado  $n \in \omega$ , por el Teorema de Recursión, podemos encontrar de forma computable un índice  $e_0 \in \omega$  tal que  $\Phi_{e_0}^{\bar{z}} = \sigma(\bar{z})$ , donde  $\bar{z} = (\Gamma(e_0, n)^\top)^\frown z$ . Sea  $y = \sigma(\bar{z})$  y consideremos la partida en la que el jugador I juega  $\bar{z}$  y el jugador II juega  $y$ , es decir II juega conforme lo dicta su estrategia  $\sigma$ . Notemos que  $z \in [T]$  y  $y \leq_T \bar{z}$  vía  $e_0$ . Por lo tanto, como II gana la partida, en particular se cumple que  $f(z)(n) = 0$  si y sólo si  $y(y(0)) = 0$ , lo cual ocurre si y sólo si  $\Phi_{e_0}^{\bar{z}}(\Phi_{e_0}^{\bar{z}}(0)) = 0$ . Por último, podemos considerar una modificación del programa con índice  $e_0$ , de tal forma que las consultas se realicen a  $z$ . Así, obtenemos un procedimiento que nos implica que  $f(z) \leq_T z$ , y como no ocurre  $z \leq_T f(z)$ , tenemos que  $f(z) <_T z$ .

Sea  $e \in \omega$  el índice del algoritmo anterior. Definimos

$$P_e = \{x \in [T] \mid f(x) <_T x \text{ vía } e\}.$$

Afirmamos que  $P_e$  es cofinal. Sea  $x \in 2^\omega$ , luego existe  $z \in [T]$  tal que  $z \geq_T x \oplus T \oplus \sigma \geq_T x$ . Por la definición de  $e$ , se verifica que  $f(z) <_T z$  vía  $e$ . De donde, obtenemos que el conjunto  $P_e$  es cofinal. Por el Teorema 2.2.1, existe un árbol puntuado  $T'$  tal que  $[T'] \subseteq P_e$ . Por el Lema 2.2.3, existe un árbol puntuado  $U$  tal que  $U \subseteq T'$  y tal que  $f \upharpoonright [U]$  es constante ó inyectiva.

Supongamos, con el fin de llegar a una contradicción, que  $f \upharpoonright [U]$  es inyectiva. Por el Corolario 2.2.2, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $U$  es uniformemente puntuado vía  $i$ . Sean  $U^* = \{s \in U \mid s^\frown(0) \in U \wedge s^\frown(1) \in U\}$  y  $\phi : U \rightarrow 2^{<\omega}$  la función de la Proposición A.6.5 del Apéndice aplicada a  $f \upharpoonright [U]$ . Por lo tanto,

$$(i) \quad \forall x \in [U] : f(x) = \bigcup_{n \in \omega} \phi(x \upharpoonright n)$$

(ii)  $\forall s, t \in U^* : s \perp t \Rightarrow \phi(s) \perp \phi(t)$

(iii)  $\phi \leq_T U$

Definimos  $V = \{v \in 2^{<\omega} \mid \exists u \in U : v \subseteq \phi(u)\}$ . Entonces  $V$  es un árbol y se cumple que  $[V] = \text{rango}(f \upharpoonright [U])$ . Construyamos una sucesión  $\{u_n\}_{n \in \omega}$  estrictamente creciente de elementos de  $U^*$  como sigue: sea  $u_0 = \emptyset$  y  $u_{n+1}$  el menor elemento de  $U^*$ , respecto al orden lexicográfico, tal que  $u_n \subsetneq u_{n+1}$ . Sea  $x_0 = \bigcup_{n \in \omega} u_n$ . Tenemos que  $x_0 \in [U]$ , luego  $U \leq_T x_0$  vía  $i$ . También  $x_0 \leq_T U$ , ya que  $U$  es suficiente para verificar la pertenencia a  $U^*$ . Identificando bifurcaciones, es posible ver que  $x_0 \leq_T V \oplus f(x_0)$ . Así,  $U \leq_T V \oplus f(x_0)$ . Para finalizar, basta demostrar que  $V \leq_T f(x_0)$ , ya que en ese caso, tendríamos que  $x_0 \leq_T U \leq_T f(x_0)$  y  $x_0 \in [U]$ , contradiciendo que  $[U] \subseteq P_e$ .

Demostremos que  $V$  es  $f(x_0)$ -computable enumerable. Sea  $h : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  la función del Lema 2.2.4. Para  $[U]$ , sea  $\sigma : 2^\omega \rightarrow [U]$  la función del Lema 2.2.2. Sea  $y_0 \in 2^\omega$  tal que  $\sigma(y_0) = x_0$ . A partir de las construcciones de  $h$  y  $\sigma$ , obtenemos  $(i, j) \in \omega^2$  tal que para todo  $y \in 2^\omega$ ,  $\sigma(y) \equiv_T \sigma(h(y))$  vía  $(i, j)$ . De la uniformidad de  $f$ , tenemos que  $f(\sigma(y)) \equiv_T f(\sigma(h(y)))$  vía  $u(i, j)$ . Mediante un procedimiento similar al realizado en pasos anteriores, obtenemos que la función  $(m, n) \mapsto f(\sigma(h^m(y_0)))(n)$  es  $f(\sigma(y_0))$ -computable, es decir, es  $f(x_0)$ -computable.

Además, dado que  $\sigma$  es homeomorfismo y  $f$  es continua en  $[U]^6$ , tenemos que

$$\{f(\sigma(h^m(y_0))) \mid m \in \omega\}$$

es denso en  $[V] = \text{rango}(f \upharpoonright [U])$ . Así,  $v \in V$  si y sólo si  $\exists m \in \omega : v \subseteq f(\sigma(h^m(y_0)))$ . Por lo tanto,  $V$  es  $f(x_0)$ -computable enumerable.

Por último, demostremos que  $2^{<\omega} \setminus V$  es  $f(x_0)$ -computable. Afirmamos que

$$v \in 2^{<\omega} \setminus V \Leftrightarrow \exists n \in \omega \exists u_0, \dots, u_n \in 2^{<\omega} [u_0 = u_n \wedge \forall i \leq n (u_i \subseteq f(\sigma(h^i(y_0)))) \wedge u_i \perp v \wedge u_i \text{ se } (|\text{dom } v| + 2)\text{-separa en } V].$$

Si  $v \in 2^{<\omega} \setminus V$ , es suficiente tomar  $n$  suficientemente grande tal que  $f(\sigma(h^n(y_0)))$  tenga más elementos que  $v$  y, utilizando que  $U$  es perfecto, podemos hacer que tenga suficientes elementos que verifican su  $(|\text{dom } v| + 2)$ -separación en  $V$ . Finalmente, tomamos  $u_0 = u_1 = \dots = u_n$ .

Por otro lado, sean  $n, u_0, \dots, u_n$  como en la afirmación. Para cada  $i \leq n$ , definimos  $r_i = h^i(y_0) \upharpoonright |\text{dom } v|$ . Dado que  $u_i, \phi(\sigma(r_i)) \subseteq f(\sigma(h^i(y_0)))$ , tenemos que  $u_i$  y  $\phi(\sigma(r_i))$  son compatibles. Dado que  $|\sigma(r_i)| = |\text{dom } v|$  y  $\phi$  preserva elementos incompatibles, entonces  $\phi(\sigma(r_i))$  no se  $|\text{dom } v| + 2$ -separa en  $V$ . Por lo tanto, tenemos que  $\phi(\sigma(r_i)) \subseteq u_i$ .

Como  $u_0 = u_n$ , de la inyectividad de  $\sigma$  y  $\phi$  tenemos  $r_0 = r_n$ . Como  $h$  es Lipschitz, tenemos que  $(h^*)^k(r_0) = (h^*)^l(r_0)$  si  $k \equiv l \pmod n$ , donde  $h^*$  es tal

<sup>6</sup>Dado que  $f(x) <_T x$  en  $[U]$ , la función  $f$  es computable en  $[U]$ , por lo tanto  $f$  es continua en  $[U]$ .

como se definió como en el Lema 2.2.4. Así, dado que para cada  $0 \leq k \leq n$ ,  $(h^*)^k(r_0) = h^k(y_0) \upharpoonright |\text{dom } v| = r_k$ , entonces para cada  $k \in \omega$ , existe  $i \leq n$  tal que  $\phi(\sigma(r_i)) \subseteq f(\sigma(h^k(y_0)))$ .

Luego, como para cada  $i \leq n$ ,  $u_i \perp v$ ,  $\phi(\sigma(r_i)) \subseteq u_i$  y  $|\text{dom } \phi(\sigma(r_i))| \geq |\text{dom } v|$ , se cumple que  $\phi(\sigma(r_i)) \perp v$ . Así, para cada  $k \in \omega$ ,  $v \not\subseteq f(\sigma(h^k(y_0)))$ . Por lo tanto,  $v \notin V$ , con lo cual queda demostrada la afirmación.

Como  $V$  es  $f(x_0)$ -computable enumerable, el conjunto  $\{(u, n) \in 2^{<\omega} \times \omega \mid u \text{ se } n\text{-separa en } V\}$  también es  $f(x_0)$ -computable enumerable. Así, de la afirmación previa y del hecho de que la función  $(m, n) \mapsto f(\sigma(h^m)(y_0))(n)$  es  $f(x_0)$ -computable, obtenemos que  $2^{<\omega} \setminus V$  es  $f(x_0)$ -computable enumerable. Concluimos que  $V$  es  $f(x_0)$ -computable, la cual es una contradicción. Por lo tanto,  $f$  es constante en  $[U]$ . Del Lema 2.2.1 y de que  $f$  es Turing-invariante, obtenemos que  $f$  es constante en el cono con base  $U$ . ■

La prueba anterior es válida en **ZFC** si pedimos que  $f$  sea boreliana.

**Teorema 2.2.2** (Slaman y Steel [SS88], **ZFC**). *Sea  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  función boreliana uniformemente Turing-invariante. Si  $f$  no es creciente en un cono, entonces  $f$  es constante en un cono.*

## Segunda Parte de la Conjetura de Martin

Ahora abordaremos la prueba de la segunda parte de la conjetura para funciones uniformemente Turing-invariantes. El trabajo aquí presentado se basa en el artículo [Ste82] y en las demostraciones presentadas en [Cor21].

Nuestro primer resultado nos dice que  $\leq_T^\nabla$  restringido a las funciones uniformemente Turing-invariantes, es un orden lineal.

**Lema 2.2.5** (**ZF+AD+DC**). Sean  $f, g$  funciones uniformemente Turing-invariantes crecientes en un cono. Entonces,  $f \leq_T^\nabla g$  ó  $g \leq_T^\nabla f$ .

*Demostración.* Consideremos el siguiente juego, el cual denotamos por  $G_{f,g}$ , que compara a la función  $f$  con  $g$ :

$$\begin{array}{llll} \text{I} & \ulcorner(e, n)\urcorner & & x_0 \\ & & & \dots \\ \text{II} & & \ulcorner(i, m)\urcorner & y_0 \end{array}$$

donde  $e, n, i, m \in \omega$  y  $x_n, y_n \in \{0, 1\}$  para cada  $n \in \omega$ . Si  $x = (x_n)$  y  $y = (y_n)$ , este juego lo gana el jugador I si y sólo si

$$y \leq_T x \text{ vía } e \wedge \neg(x \leq_T y \text{ vía } i \wedge (f(x)(n) = 0 \leftrightarrow g(y)(m) = 0)).$$

Por el Axioma de Determinación **AD**, este juego está determinado. Supongamos que el jugador II tiene una estrategia ganadora, digamos  $\sigma$ . Asumamos que  $u$  es la función que verifica la uniformidad de la función  $g$ . Afirmamos que  $f(x) \leq_T g(x)$

para todo  $x$  en el cono con base  $\sigma \oplus u$ , i.e.  $x \in \text{Cono}(\sigma \oplus u)$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que en el cono  $\text{Cono}(\sigma \oplus u)$  se verifica que  $f$  y  $g$  son crecientes. Sea  $x \in \text{Cono}(\sigma \oplus u)$ , luego  $\sigma \oplus u \leq_T x \leq_T g(x)$ . Tomemos  $n \in \omega$  y describamos un algoritmo que devuelva  $f(x)(n)$ , utilizando como oráculo a  $g(x)$ . Por el Teorema de Recursión, podemos encontrar de forma computable  $e \in \omega$  tal que  $\Phi_e^x = \sigma(\ulcorner(e, n)\urcorner \frown x)$ . Sean  $(i, m) = \ulcorner\sigma(\ulcorner(e, n)\urcorner)\urcorner$  y  $y = \sigma(\ulcorner(e, n)\urcorner \frown x) = \Phi_e^x$ , es decir,  $y$  es la respuesta a I siguiendo su estrategia  $\sigma$ . Notemos que  $y \leq x$  via  $e$ , luego como  $\sigma$  es ganadora para II, debe ocurrir que  $y \leq x$  via  $i$  y además  $f(x)(n) = 0$  si y sólo si  $g(y)(m) = 0$ .

Entonces  $x \equiv_T y$  via  $(i, e)$ , por lo cual  $g(x) \equiv_T g(y)$  via  $u(i, e)$ . En particular,  $g(y) \leq_T g(x)$  via  $\pi_2(u(i, e))$ . Utilizando a  $x$  como oráculo, y por consiguiente a  $g(x)$ , podemos calcular el índice  $\pi_2(u(i, e))$ . Así, el programa que utiliza a  $g(x)$  como oráculo, obtiene el índice  $\pi_2(u(i, e))$  y calcula los valores de  $g(y)$  con dicho índice, para obtener una respuesta sobre los valores de  $f(x)$ , verifica que  $f(x) \leq_T g(x)$ . En caso de que el jugador I tenga una estrategia ganadora, de manera similar, obtenemos que  $g \leq_T^{\nabla} f$ . ■

Enseguida mostraremos que entre  $f$  y  $f'$  no existe ninguna función  $g$ .

**Lema 2.2.6 (ZF+AD+DC).** Sean  $f, g$  funciones uniformemente Turing-invariantes crecientes en un cono. Si  $f <_T^{\nabla} g$  entonces  $f' \leq_T^{\nabla} g$ .

*Demostración.* Definimos  $\bar{f}' : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  tal que  $\bar{f}'(x)(n) = 1 - f'(x)(n)$ . Con fin de llegar a una contradicción, supongamos que  $f' \not\leq_T^{\nabla} g$ . Del juego  $G_{g, f'}$  considerado en la prueba del Lema 2.2.5, obtenemos una estrategia  $\sigma$  ganadora para el jugador II de dicho juego. Supongamos que  $u$  es una función que verifica la uniformidad de  $f'$ . Así, siguiendo la argumentación de dicha prueba, dado cualquier  $n \in \omega$ , podemos obtener a partir de un elemento  $x \geq_T \sigma \oplus u$  como oráculo, un par de índices  $k, m \in \omega$  tal que  $g(x)(n) = 0$  si y sólo si  $\Phi_k^{f'(x)}(m) = 0$ . Por lo tanto,  $g(x)$  es  $f(x)$ -computable enumerable. De manera similar, si ahora consideramos el juego  $G_{g, \bar{f}'}$ , obtenemos que  $1 - g(x)$  es  $f(x)$ -computable enumerable, en un cono. Así,  $g(x) \leq_T f(x)$  en un cono, i.e.  $g \leq_T^{\nabla} f$ , la cual es una contradicción. Por lo tanto,  $f' \leq_T^{\nabla} g$ . ■

A continuación enunciamos un resultado que nos será de ayuda más adelante. Omitimos la demostración, ya que nos desviaría mucho del propósito de este trabajo.

**Teorema 2.2.3 (Steel [Ste75]).** Sea  $P \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$  una relación aritmética. Entonces no existe una sucesión  $(x_n)_{n \in \omega} \subseteq 2^\omega$  que satisface las siguientes propiedades:

- (i)  $\forall n \in \omega : P(x_n, x_{n+1})$ .
- (ii)  $\forall y \in 2^\omega : R(x_n, y) \Rightarrow y = x_{n+1}$ .
- (iii)  $\forall n \in \omega : x'_{n+1} \leq_T x_n$ .

**Lema 2.2.7 (ZF+AD+DC).** No existe una sucesión  $(f_n)_{n \in \omega}$  de funciones uniformemente Turing-invariantes crecientes en un cono, tales que para todo  $n \in \omega$ ,  $f'_{n+1} <_T^{\nabla} f_n$ .

*Demostración.* Con el fin de llegar a una contradicción, supongamos que existe tal sucesión  $(f_n)_{n \in \omega}$ . Por el Lema 2.2.6, para cada  $n \in \omega$ ,  $f'_{n+1} \leq_T^{\nabla} f_n$ . Sea  $u_n$  una función que verifica la uniformidad de  $f_n$ . Sea  $\sigma_n$  la estrategia del jugador II del juego  $G_{f_{n+1}, f_n}$  de la prueba del Lema 2.2.5.

Similar a la prueba del Lema 2.2.5, tomando  $x \geq_T \bigoplus_{n \in \omega} \sigma_n \oplus \bigoplus_{n \in \omega} u_n$  como oráculo, podemos obtener un índice  $k_n \in \omega$  tal que  $f_{n+1}(x) = \Phi_{k(n)}^{f_n(x)}$ . Lo cual, nos define una función  $k$  tal que  $n \mapsto k(n)$  y  $k \leq_T x$  via  $e$ ; i.e.  $k = \Phi_e^x$ .

Definimos la relación  $P \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$  como sigue:

$$P(a \oplus (n) \frown b, c \oplus (m) \frown d) \text{ si y sólo si } m = n + 1 \wedge b = d \wedge c = \Phi_{\Phi_e^a}^a.$$

La relación  $P$  es aritmética. Sea  $n \in \omega$ , entonces de la elección de  $x$  y  $k$  tenemos que  $P(f_n(x) \oplus (n) \frown x, f_{n+1} \oplus (n+1) \frown x)$ .

Además, de la definición de  $P$ , se desprende que  $f_{n+1}(x) \oplus (n+1) \frown x$  es el único  $c \oplus (m) \frown d \in 2^\omega$  tal que  $P(f_n(x) \oplus (n) \frown x, c \oplus (m) \frown d)$ .

También, para cada  $n \in \omega$ , como  $f_{n+1}(x) \geq_T x \equiv_T (n+1) \frown x$ , entonces

$$(f_{n+1}(x) \oplus (n+1) \frown x)' \equiv_T f'_{n+1}(x) \oplus x \leq_T f_n(x) \oplus x \equiv_T f_n(x) \oplus (n) \frown x.$$

Entonces,  $P$  y  $\{f_n(x) \oplus (n) \frown x\}_{n \in \omega}$  contradicen el Teorema 2.2.3. Por lo tanto, no existe la sucesión  $(f_n)_{n \in \omega}$  que establece el enunciado de este lema. ■

*Observación.* Cada uno de los lemas anteriores es válido en **ZFC** si nos restringimos a funciones borelianas uniformemente Turing-invariantes.

**Teorema 2.2.4** (Steel [Ste82], **ZF+AD+DC**). *La relación  $\leq_T^{\nabla}$  pre-bien ordena a las funciones uniformemente Turing-invariantes crecientes en un cono. Más aún, si  $f$  tiene tipo de orden  $\alpha$  entonces  $f'$  tiene tipo de orden  $\alpha + 1$ .*

*Demostración.* Es consecuencia de la aplicación de los lemas 2.2.5, 2.2.6 y 2.2.7. ■

La versión para funciones borelianas correspondiente es la siguiente.

**Teorema 2.2.5** (Steel [Ste82], **ZFC**). *La relación  $\leq_T^{\nabla}$  pre-bien ordena a las funciones borelianas uniformemente Turing-invariantes crecientes en un cono. Más aún, si  $f$  tiene tipo de orden  $\alpha$  entonces  $f'$  tiene tipo de orden  $\alpha + 1$ .*

En este sentido, Steel se planteó el siguiente problema, cuya resolución de manera afirmativa establecería que la Conjetura de Martin es cierta.

**Conjetura de Steel.** ([Ste82]) Si  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es una función Turing-invariante, entonces existe una función uniformemente Turing-invariante  $g$  definida en un cono tal que  $f \equiv_T^{\nabla} g$ .

De estos resultados se desprende lo siguiente.

**Teorema 2.2.6.** *Las siguientes son equivalentes:*

- (i) *Conjetura de Martin restringida a funciones borelianas.*
- (ii) *Si  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es una función boreliana Turing-invariante, entonces  $f$  es constante en un cono, ó existe  $\alpha < \omega_1$  tal que  $f(x) \equiv_T x^{(\alpha)}$  en un cono.*
- (iii) *Si  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es una función boreliana Turing-invariante, entonces existe una función  $g : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  uniformemente Turing-invariante tal que  $f \equiv_T^\nabla g$ .*

*Demostración.* Asumiendo (i), el tipo de orden de las funciones constantes es 0 y del  $\alpha$ -ésimo salto de Turing es  $\alpha$ . Por lo tanto, se sigue que (i) implica (ii). Dado que las funciones constantes y saltos de Turing son uniformemente Turing-invariantes, el inciso (ii) implica (iii). Por el Teorema 2.2.5, el inciso (iii) implica (i). ■

# Capítulo 3

## Relaciones de Equivalencia Borelianas

La Teoría de Relaciones de Equivalencia Borelianas surge como una aplicación de la Teoría Descriptiva de Conjuntos y ha sido ampliamente desarrollada en [JKL02] y [Kec21]. Su propósito es fundamentar una teoría de la complejidad de los problemas de clasificación en matemáticas, los cuales suelen aparecer como relaciones de equivalencia borelianas en espacios estándar de Borel. Por lo regular, será de nuestro interés asociar invariantes conocidos a las clases de equivalencia resultantes vía una función definible e inyectiva (cf. [Hjo99] y [Kan08]).

En este capítulo introduciremos a las relaciones de equivalencia borelianas, daremos ejemplos de ellas y las compararemos mediante reducciones borelianas. En la parte final, obtendremos algunas consecuencias en la teoría, asumiendo que la Conjetura de Martin es cierta.

### 3.1. Conceptos Básicos

#### 3.1.1. Relaciones de Equivalencia Borelianas

**Definición 3.1.1** (Relación de Equivalencia Boreliana). Diremos que  $E$  es una *relación de equivalencia boreliana* si existe un espacio estándar de Borel  $X$  tal que  $E$  es una relación de equivalencia en  $X$  y  $E$  es un subconjunto boreliano de  $X \times X$ .

Si además, para cada  $x \in X$ , la clase de equivalencia de  $x$  respecto de  $E$ , a saber  $[x]_E$ , es contable, entonces diremos que  $E$  es una *relación de equivalencia boreliana contable (r.e.b.c.)*.

Enseguida mostramos algunos ejemplos.

**Ejemplo 3.1.1.** Sea  $X$  un espacio estándar de Borel. Entonces  $I_X = X^2$  y  $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$  son relaciones de equivalencia borelianas contables.

**Ejemplo 3.1.2.** Sean  $E, F$  relaciones de equivalencia borelianas contables en espacios estándar de Borel  $X, Y$  respectivamente. Entonces la relación  $E \times F \subseteq X^2 \times Y^2$  tal que

$$(x_1, y_1)E \times F(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1Ex_2 \wedge y_1Fy_2$$

es una relación de equivalencia boreliana contable.

**Ejemplo 3.1.3.** La Turing-equivalencia  $\equiv_T$  es una relación de equivalencia boreliana contable.

*Demostración.* Sabemos que para cada  $x \in 2^\omega$ , la clase de equivalencia  $[x]_T$  es contable. Demostremos que  $\equiv_T$  es boreliana. Sean  $x, y \in 2^\omega$  y  $\{\varphi_n\}_{n \in \omega}$  una enumeración de las funciones monótonas computables, entonces

$$\begin{aligned} x \leq_T y &\Leftrightarrow \exists n \in \omega \left( \lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_n(y \upharpoonright k)| = \infty \wedge \forall k \in \omega : \varphi_n(y \upharpoonright k) \subseteq x \right) \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \omega \left( y \in D(\varphi_n) \wedge \forall k \in \omega : \varphi_n(y \upharpoonright k) \subseteq x \right) \end{aligned}$$

De la Proposición A.6.1, para cada  $n \in \omega$ , el conjunto  $2^\omega \times D(\varphi_n)$  es  $G_\delta$  en  $2^\omega \times 2^\omega$ . Afirmamos que para cada  $n, k \in \omega$ , el conjunto

$$D_{n,k} = \{(x, y) \in 2^\omega \times 2^\omega \mid \varphi_n(y \upharpoonright k) \subseteq x\}$$

es abierto en  $2^\omega \times 2^\omega$ . Sean  $n, k \in \omega$  y  $(x, y) \in D_{n,k}$ , entonces existe  $m \in \omega$  tal que  $x \upharpoonright m = \varphi_n(y \upharpoonright k)$ . Demostremos que  $N_{x \upharpoonright m} \times N_{y \upharpoonright k} \subseteq D_{n,k}$ . Sea  $(z, w) \in N_{x \upharpoonright m} \times N_{y \upharpoonright k}$ , luego  $\varphi_n(w \upharpoonright k) = \varphi_n(y \upharpoonright k) = x \upharpoonright m = z \upharpoonright m \subseteq z$ . Por lo tanto,  $(z, w) \in D_{n,k}$ . Concluimos que  $D_{n,k}$  es abierto en  $2^\omega \times 2^\omega$ .

De lo anterior, obtenemos que  $\equiv_T$  es un conjunto  $\Sigma_3^0(2^\omega \times 2^\omega)$ . En particular,  $\equiv_T$  es boreliano en  $2^\omega \times 2^\omega$ . ■

**Ejemplo 3.1.4.** La equivalencia aritmética  $\equiv_A$  es una relación de equivalencia boreliana contable.

*Demostración.* Se sigue de la propiedad de que para cada  $x, y \in 2^\omega$ ,

$$x \leq_A y \Leftrightarrow \exists n \in \omega : x \leq_T y^{(n)}.$$

■

**Ejemplo 3.1.5.** La relación  $E_0 \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$  tal que para cada  $x, y \in 2^\omega$ ,

$$xE_0y \Leftrightarrow \exists m \in \omega : \forall n \geq m : x_n = y_n,$$

es una relación de equivalencia boreliana contable.

*Demostración.* Es sencillo probar que  $E_0$  es una relación de equivalencia. La relación  $E_0$  es contable ya que dado  $x \in 2^\omega$ , para cada  $m \in \omega$  el conjunto  $A_m = \{y \in 2^\omega \mid \forall n \geq m : x_n = y_n\}$  es contable. Como  $[x]_{E_0} = \bigcup_{m \in \omega} A_m$ , entonces  $[x]_{E_0}$  es contable. Afirmamos que  $E_0$  es  $F_\sigma$  en  $2^\omega \times 2^\omega$ , y por lo tanto boreliano. Dado  $n \in \omega$ , el conjunto  $F_n = \{(x, y) \in 2^\omega \times 2^\omega \mid x_n = y_n\}$  es cerrado en  $2^\omega \times 2^\omega$ . Por lo tanto,  $E_0 = \bigcup_{m \in \omega} \bigcap_{n \geq m} F_n$ , lo cual implica que  $E_0$  es  $F_\sigma$ . ■

De manera más general, podemos producir relaciones de equivalencia contables borelianas de la siguiente forma.

**Ejemplo 3.1.6.** Sean  $G$  un grupo contable,  $X$  un espacio estándar de Borel y  $a : G \times X \rightarrow X$  una acción boreliana en  $X$ . La relación  $E_G^X$  tal que para cada  $x, y \in X$ ,

$$xE_G^X y \Leftrightarrow \exists g \in G : a(g, x) = g \cdot x = y$$

es una relación de equivalencia boreliana contable.

*Demostración.* Es sencillo mostrar que  $E_G^X$  es una relación de equivalencia contable. Por otro lado, como  $a$  es boreliana, la gráfica de  $a$ , denotada por  $\text{gr } a$ , es boreliana. La proyección  $\pi_{X,X} : \text{gr } a \rightarrow X \times X$  tal que  $\pi_{X,X}(g, x, y) = (x, y)$  es una función boreliana y contable-a-uno<sup>1</sup>. De la Proposición A.4.1,  $\pi_{X,X}[\text{gr } a] = E_G^X$  es boreliano en  $X \times X$ . ■

Un ejemplo de relación de equivalencia inducida por una acción boreliana, es la siguiente.

**Ejemplo 3.1.7** (Acción de Desplazamiento). Sean  $G$  un grupo contable y  $X$  un espacio estándar de Borel. Definimos la *acción de desplazamiento de  $G$  en  $X^G$*  como la función  $s_{G,X} : G \times X^G \rightarrow X^G$  tal que para cada  $g, h \in G$  y  $p \in X^G$ ,

$$(g \cdot p)(h) = p(g^{-1}h).$$

La relación de equivalencia  $E_{s_{G,X}}$ , denotada por  $E(G, X)$ , es una relación de equivalencia boreliana contable.

No todas las relaciones de equivalencia en espacios polacos son borelianas, como por ejemplo la siguiente.

**Ejemplo 3.1.8** ([Kec95] pp. 96 y 213). Sean  $\mathcal{L} = (R_i)_{i \in I}$  un lenguaje contable relacional y para cada  $i \in I$ , sea  $n_i$  la aridad de la relación  $R_i$ . Definimos el conjunto

$$X_{\mathcal{L}} = \prod_{i \in I} 2^{\omega^{n_i}}.$$

Identificamos a cada elemento  $x = (x_i)_{i \in I} \in X_{\mathcal{L}}$  con la estructura  $\mathcal{A}_x = (\omega, R_i^{A_x})$  donde para cada  $i \in I$  y cada  $s \in \omega^{n_i}$ ,  $R_i^{A_x}(s)$  si y sólo si  $x_i(s) = 1$ .

<sup>1</sup>Una función  $f : X \rightarrow Y$  es *contable-a-uno* si para cada  $y \in Y$ ,  $f^{-1}(\{y\})$  es contable.

Es decir, a  $X_{\mathcal{L}}$  lo podemos identificar con el espacio de estructuras contables del lenguaje  $\mathcal{L}$ .

Si  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  entonces el espacio  $X_{\mathcal{L}}$  es homeomorfo a  $2^\omega$ , por lo tanto  $X_{\mathcal{L}}$  es un espacio estándar de Borel. Definimos en  $X_{\mathcal{L}}$  una relación  $\cong$  tal que para cada  $x, y \in X_{\mathcal{L}}$ ,

$$x \cong y \Leftrightarrow \mathcal{A}_x \text{ es isomorfa a } \mathcal{A}_y.$$

La relación  $\cong \subseteq X_{\mathcal{L}} \times X_{\mathcal{L}}$  es una relación de equivalencia contable. Sin embargo,  $\cong$  no necesariamente es boreliana. Omitimos la demostración ya que no es propósito de este trabajo realizar un desarrollo de la misma.

Es posible caracterizar a las relaciones de equivalencia borelianas contables como sigue.

**Proposición 3.1.1** (Feldman-Moore [FM77] Teorema 1). Si  $E$  es una relación de equivalencia boreliana contable en un espacio estándar de Borel  $X$ , entonces existe un grupo contable  $G$  y una acción boreliana  $a$  de  $G$  en  $X$  tal que  $E = E_G^X$ .

### 3.1.2. Reducciones

Nos encargaremos de establecer relaciones entre relaciones de equivalencia borelianas contables, mediante funciones entre sus respectivos espacios estándar de Borel.

**Definición 3.1.2** (Reducción). Sean  $X, Y$  espacios estándar de Borel,  $f : X \rightarrow Y$  una función y  $E, F$  relaciones de equivalencia borelianas en  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Diremos que,

- (i)  $f$  es un *homomorfismo* de  $E$  a  $F$  si para cualesquiera  $x, y \in X$ ,

$$xEy \Rightarrow f(x)Ff(y).$$

- (ii)  $f$  es un *cohomomorfismo* de  $E$  a  $F$  si para cualesquiera  $x, y \in X$ ,

$$f(x)Ff(y) \Rightarrow xEy.$$

- (iii)  $f$  es una *reducción* de  $E$  a  $F$  si  $f$  es un homomorfismo de  $E$  a  $F$  y cohomomorfismo de  $E$  a  $F$ .

- (iv)  $f$  es un *encaje* de  $E$  a  $F$  si  $f$  es una reducción de  $E$  a  $F$ , que además es inyectiva.

- (v)  $f$  es un *isomorfismo* de  $E$  a  $F$  si  $f$  es un encaje de  $E$  a  $F$ , que además es sobreyectivo.

De la definición se desprenden las siguientes implicaciones, considerando todas las nociones en el sentido de  $E$  a  $F$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \text{isomorfismo} & \Rightarrow & \text{encaje} & \Rightarrow & \text{reducción} & \Rightarrow & \text{homomorfismo} \\ & & & & \Downarrow & & \\ & & & & \text{cohomomorfismo} & & \end{array}$$

Comencemos exhibiendo un ejemplo de un isomorfismo. De esa forma tendremos un ejemplo del resto de las nociones.

**Ejemplo 3.1.9.** Sea  $X$  un espacio estándar de Borel, entonces la función identidad en  $X$ , denotada por  $1_X : X \rightarrow X$ , es un isomorfismo de  $\Delta_X$  a  $\Delta_X$ .

No es inmediato distinguir si las nociones recién definidas son distintas entre sí. Por ello, comencemos probando que no necesariamente hay una relación entre las nociones de homomorfismo y cohomomorfismo, en el mismo sentido de  $E$  a  $F$ .

**Proposición 3.1.2.** Toda función Turing-invariante  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es un homomorfismo de  $\equiv_T$  a  $\equiv_T$ . Sin embargo, la función salto de Turing no es un cohomomorfismo  $\equiv_T$  a  $\equiv_T$ .

*Demostración.* Sabemos del Ejemplo 3.1.3 que  $\equiv_T$  es una relación de equivalencia boreliana contable. Además, de la definición de función Turing-invariante obtenemos que es un homomorfismo. Para notar que la función salto de Turing no es un cohomomorfismo, recordemos que del Teorema de Friedberg-Muchnik podemos obtener  $x, y \in 2^\omega$  tales que  $x <_T y$  y  $x' \equiv_T y'$ . ■

**Proposición 3.1.3.** La función identidad  $1_{2^\omega} : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es un cohomomorfismo de  $\equiv_T$  a  $E_0$  que no es un homomorfismo de  $\equiv_T$  a  $E_0$ .

*Demostración.* Sabemos del Ejemplo 3.1.5 que  $E_0$  es una relación de equivalencia boreliana contable. Además que, si  $x, y \in 2^\omega$  son tales que  $x E_0 y$ , entonces  $x \equiv_T y$  ya que difieren en una cantidad finita de valores. Por lo tanto,  $1_{2^\omega}$  es un cohomomorfismo de  $\equiv_T$  a  $E_0$ . Sin embargo, los elementos  $x, y \in 2^\omega$  tales que para cada  $n \in \omega$

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y  $y(n) = 1 - x(n)$ , difieren en una infinidad de valores pero son tales que  $x \equiv_T y$ . Por lo tanto,  $1_{2^\omega}$  no es un homomorfismo de  $\equiv_T$  a  $E_0$ . ■

En resumen, homomorfismo no implica cohomomorfismo ni viceversa. Además, en las proposiciones anteriores hemos hecho un poco más. Hemos mostrado ejemplos explícitos de homomorfismos y cohomomorfismos que no son encajes. Por lo tanto, la noción de encaje no necesariamente es equivalente a la noción de homomorfismo ni a la de cohomomorfismo.

Identifiquemos la relación que existe entre reducción y encaje.

**Proposición 3.1.4.** Sea  $E$  una relación de equivalencia en un espacio estándar de Borel  $X$  no vacío. Entonces existe una reducción de  $E \times I_2$  a  $E$  que no es un encaje de  $E \times I_2$  a  $E$ .

*Demostración.* Es suficiente considerar la proyección en la primera coordenada como reducción de  $E \times I_2$  a  $E$ . ■

Más adelante veremos que la relación  $E(\mathbb{F}_\infty, \mathbb{R})$  tendrá la complejidad suficiente para que toda relación de equivalencia contable pueda encajarse en ella (Teorema 3.2.2). Por otro lado, la relación  $\Delta_\omega$  no podría ser isomorfa a  $E(\mathbb{F}_\infty, \mathbb{R})$  ya que ello implicaría que  $\mathbb{R}^{\mathbb{F}_\infty}$  es contable, lo cual es falso. Por consiguiente tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.1.5.** Existe un encaje de  $\Delta_\omega$  a  $E(\mathbb{F}_\infty, \mathbb{R})^2$  que no es un isomorfismo.

De esta manera, hemos mostrado que las implicaciones de nuestro diagrama previo no necesariamente se vuelven equivalencias.

## 3.2. Reducciones Borelianas

De entre todas las posibles reducciones que pueden existir entre relaciones de equivalencia borelianas, sólo nos interesarán aquellas que cumplan con el requisito de ser borelianas.

**Definición 3.2.1** (Borel-reducibilidad). Dados dos espacios estándar de Borel  $X$  e  $Y$  y relaciones de equivalencia borelianas  $E$  y  $F$  en  $X$  e  $Y$  respectivamente, diremos que

- (i)  $E$  es *Borel-reducible* a  $F$ , lo cual denotamos  $E \leq_B F$ , si existe una reducción boreliana de  $E$  a  $F$ .
- (ii)  $E$  es *Borel-bireducible* a  $F$ , lo cual denotamos  $E \sim_B F$ , si  $E \leq_B F$  y  $F \leq_B E$ .
- (iii)  $E$  es *Borel-encajable* a  $F$ , lo cual denotamos por  $E \sqsubseteq_B F$ , si existe un encaje boreliano de  $E$  a  $F$ .
- (iv)  $E$  es *Borel-biencajable* a  $F$ , lo cual denotamos por  $E \simeq_B F$ , si  $E \sqsubseteq_B F$  y  $F \sqsubseteq_B E$ .
- (v)  $E$  es *Borel-isomorfo* a  $F$ , lo cual denotamos por  $E \cong_B F$ , si existe un isomorfismo boreliano de  $E$  a  $F$ .

*Observación.* Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios estándar de Borel y  $E, F$  relaciones de equivalencia borelianas en  $X$  e  $Y$  respectivamente. Entonces toda reducción boreliana de  $E$  a  $F$ , induce un encaje boreliano de  $X/E$  a  $Y/F$ .

<sup>2</sup> $\mathbb{F}_\infty$  es el grupo libre con una cantidad numerable de generadores.

*Demostración.* Sea  $f : X \rightarrow Y$  reducción boreliana de  $E$  a  $F$ . Definimos  $\bar{f} : X/E \rightarrow Y/F$  tal que  $\bar{f}([x]_E) = [f(x)]_F$ . La función  $\bar{f}$  está bien definida ya que  $f$  es un homomorfismo. La inyectividad de  $\bar{f}$  se verifica a partir de que  $f$  es un cohomomorfismo. ■

De manera intuitiva,  $E \leq_B F$  se puede interpretar de las siguientes formas:

- (i)  $E$  tiene un problema de clasificación más simple que el de  $F$ ; es decir, cualesquiera invariantes para  $F$  funcionan también para  $E$ .
- (ii) Es posible clasificar  $E$ -clases de equivalencia con invariantes que son  $F$ -clases de equivalencia.
- (iii) El cociente  $X/E$  se encaja en  $Y/F$ , de donde  $X/E$  tiene cardinalidad boreliana menor o igual que  $Y/F$ .

A continuación mostraremos algunos ejemplos de reducibilidades borelianas.

**Ejemplo 3.2.1.** Sean  $X, Y$  espacios estándar de Borel.

- (i) Si  $|X| = n = |Y|$  para algún  $n \geq 1$  y  $X, Y$  son dotados con la topología discreta, entonces  $\Delta_X \sim_B \Delta_Y$ . En este caso, únicamente nos referiremos a la relación por  $\Delta_n$ .
- (ii) Si  $X, Y$  son numerables y son dotados con la topología discreta, entonces  $\Delta_X \sim_B \Delta_Y$ . En este caso, únicamente nos referiremos a la relación por  $\Delta_\omega$ .
- (iii) Si  $X, Y$  no son numerables, entonces  $\Delta_X \sim_B \Delta_Y$ . En ocasiones, sólo nos referiremos a esta relación como  $\Delta_{2^\omega}$ .

*Demostración.* (i) Si  $X = \{x_i\}_{i=1}^n$  y  $Y = \{y_i\}_{i=1}^n$ , la función  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(x_i) = y_i$  es una reducción boreliana de  $\Delta_X$  a  $\Delta_Y$ . Por lo tanto,  $\Delta_X \leq_B \Delta_Y$ . De forma similar se comprueba que  $\Delta_Y \leq_B \Delta_X$ . Por consiguiente,  $\Delta_X \sim_B \Delta_Y$ .

- (ii) La demostración es similar a (i).
- (iii) Como  $X, Y$  no son numerables, existe un isomorfismo boreliano  $f : X \rightarrow Y$ , el cual verifica que para todo  $x, y \in X$ ,  $x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ . Así,  $\Delta_X \leq_B \Delta_Y$ . La otra desigualdad es similar. Por lo tanto,  $\Delta_X \sim_B \Delta_Y$ . ■

Utilizando la borel-reducibilidad, nos interesará asignar una noción de complejidad. Del ejemplo anterior, hemos visto que las relaciones  $\Delta_X, \Delta_Y$  tienen la misma complejidad cuando  $X$  e  $Y$  tienen la misma cardinalidad. Por otro lado, sabemos que la Turing-equivalencia es una relación de equivalencia boreliana contable, por lo tanto podemos preguntarnos por su complejidad en este contexto.

Enseguida nos dedicaremos a describir nociones de complejidad y veremos si la Turing-equivalencia tiene alguna de ellas.

### 3.2.1. Suavidad

La primera noción se denomina *suavidad* y es considerada la más sencilla de todas: nos permite clasificar objetos mediante elementos de un espacio estándar de Borel.

**Definición 3.2.2** (Relación de Equivalencia Boreliana Suave). Una relación de equivalencia boreliana  $E$  es *relación suave* si existe un espacio estándar de Borel  $Y$  tal que  $E \leq_B \Delta_Y$ .

Dado que todo espacio contable puede ser inmerso en un espacio estándar de Borel no numerable, tenemos el siguiente resultado.

**Ejemplo 3.2.2.** Si  $E$  es una relación de equivalencia boreliana suave y  $X$  es un espacio estándar de Borel no numerable entonces  $E \leq_B \Delta_X$ .

Un par de equivalencias de suavidad para relaciones contables son las siguientes.

**Proposición 3.2.1.** Sea  $E$  una relación de equivalencia boreliana contable en un espacio estándar de Borel  $X$ . Las siguientes son equivalentes:

- (i)  $E$  es suave.
- (ii) Existe un conjunto boreliano  $T \subseteq X$ , tal que para todo  $x \in X$ ,  $|T \cap [x]_E| = 1$ . A  $T$  la denominaremos una *transversal de Borel* para  $E$ .
- (iii) Existe una función boreliana  $s : X \rightarrow X$  tal que  $s(x)Ex$  y si  $x, y \in X$  son tales que  $xEy$ , entonces  $s(x) = s(y)$ . A  $s$  lo llamaremos un *selector de Borel* para  $E$ .

*Demostración.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Supongamos que  $E$  es suave. Entonces existe una reducción boreliana  $f : X \rightarrow E$  de  $E$  a  $\Delta_Y$  para algunos espacios estándar de Borel  $X, Y$ . Luego,  $f$  es una función contable-a-uno. Por la Proposición A.4.1, la imagen de  $f$ ,  $f(X)$  es boreliano y existe una función boreliana  $g : f(X) \rightarrow X$  tal que para cada  $y \in f(X)$ ,  $f(g(y)) = y$ . Por consiguiente,  $g$  es inyectiva y por tanto,  $T = g(f(X))$  es un conjunto boreliano. Sean  $w, v \in X$  tal que  $w, v \in T \cap [x]_E$ . Luego,  $w = g(f(x_1)), v = g(f(x_2))$  para algunos  $x_1, x_2 \in X$ . Como  $wEv$ , entonces  $f(w) = f(v)$ , lo que implica  $f(x_1) = f(x_2)$ . Por lo tanto,  $w = v$ . Concluimos que  $|T \cap [x]_E| = 1$ .

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sea  $s : X \rightarrow X$  tal que para cada  $x \in X$ ,  $s(x)$  es el único elemento en  $T \cap [x]_E$ . De la definición de  $s$ , es para cada  $x \in X$ ,  $s(x)Ex$ . Como  $\text{gr } s = (X \times T) \cap E$ ,  $\text{gr } s$  es boreliano y por tanto  $s$  es boreliana. Por último, si  $xEy$  entonces  $T \cap [x]_E = T \cap [y]_E$ , lo cual implica que  $s(x) = s(y)$ .

(iii) $\Rightarrow$ (i). La función  $s$  verifica que  $E \leq_B \Delta_X$ . ■

Una consecuencia de un resultado debido a Silver (cf. [Sil80] p. 4), nos da una clasificación completa de las relaciones suaves como sigue.

**Ejemplo 3.2.3** ([Kec95] Corolario 5.2). Si  $E$  es una relación de equivalencia boreliana suave entonces una, y sólo una, de las siguientes se cumple:

- (i) Existe  $n \geq 1$ , tal que  $E \sim_B \Delta_n$ .
- (ii)  $E \sim_B \Delta_\omega$ .
- (iii)  $E \sim_B \Delta_{2^\omega}$ .

En resumen, las únicas relaciones suaves son las igualdades de espacios estándar de Borel.

Un primer resultado nos dice que la complejidad de  $E_0$  es mayor que la igualdad en  $2^\omega$ .

**Ejemplo 3.2.4.**  $\Delta_{2^\omega} \leq_B E_0$ .

*Demostración.* Sea  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  tal que  $f(x) = (x \upharpoonright 1) \frown (x \upharpoonright 2) \frown (x \upharpoonright 3) \cdots$ . Dado que  $f$  es función, tenemos que  $f$  es un homomorfismo de  $\Delta_{2^\omega}$  a  $E_0$ . Por otro lado, si  $x \neq y$  entonces  $f(x)$  difiere en una infinidad de valores con  $f(y)$ , luego no se cumple que  $f(x)E_0f(y)$ . Así, por contrarrecíproca, si  $f(x)E_0f(y)$  entonces  $x = y$ , es decir  $f$  es un cohomomorfismo de  $\Delta_{2^\omega}$  a  $E_0$ . Es sencillo verificar que  $f$  es continua, por lo tanto es borel. Así,  $f$  es una reducción boreliana de  $\Delta_{2^\omega}$  a  $E_0$ . Por lo tanto,  $\Delta_{2^\omega} \leq_B E_0$ . ■

En este sentido, podemos preguntarnos si  $E_0$  es una relación suave. El siguiente resultado nos dice que  $E_0$  es la menor relación que no es suave en el sentido de la borel-reducibilidad.

**Ejemplo 3.2.5** ([HKL90] Teorema 1.1, Teorema de Dicotomía de Glimm-Effros). Sea  $E$  una relación de equivalencia boreliana. Entonces una, y sólo una, de las siguientes ocurre:

- (i)  $E$  es suave.
- (ii)  $E_0 \sqsubseteq_B E$ .

De igual forma, sin recurrir directamente al Teorema de Dicotomía de Glimm-Effros, es posible distinguir las relaciones  $\Delta_{2^\omega}$  y  $E_0$  utilizando métodos que utilizan al Teorema de Categoría de Baire. También es posible dar otra prueba utilizando métodos de la Teoría de la Medida.

En resumen, combinando los ejemplos anteriores, tenemos la siguiente clasificación.

**Proposición 3.2.2.** Las siguientes desigualdades se cumplen:

$$\Delta_1 <_B \Delta_2 <_B \cdots <_B \Delta_n <_B \cdots <_B \Delta_\omega <_B \Delta_{2^\omega} <_B E_0.$$

Además, cualquier relación de equivalencia boreliana  $E$  es borel-bireducible con alguna de las relaciones de la lista, ó bien  $E_0 <_B E$ .

Observemos que las relaciones suaves forman un segmento inicial dentro de las relaciones de equivalencia borelianas.

Podemos preguntarnos si la Turing-equivalencia  $\equiv_T$  es una relación suave. Una observación inmediata es que no puede ser borel bi-reducible con ninguna igualdad en un espacio contable. En la siguiente sección, veremos si es posible que sea bi-reducible con la igualdad en un espacio no numerable o con  $E_0$ .

### 3.2.2. Hiperfinitud

En la escala creciente de complejidad de las relaciones de equivalencia borelianas, la siguiente noción en aparecer se conoce como *hiperfinitud*. Esta noción hace referencia a aquellas relaciones de equivalencia borelianas que pueden expresarse como una unión contable de relaciones de equivalencia borelianas finitas.

**Definición 3.2.3** (Relación de Equivalencia Boreliana Hiperfinita). Una relación de equivalencia boreliana contable es *hiperfinita* si existe una sucesión  $(E_n)_{n \in \omega}$  de relaciones de equivalencia borelianas finitas tal que  $E_n \subseteq E_{n+1}$  para cada  $n \in \omega$  y

$$E = \bigcup_{n \in \omega} E_n.$$

Un primer ejemplo de relación hiperfinita es  $E_0$ .

**Ejemplo 3.2.6.**  $E_0$  es hiperfinita.

*Demostración.* Sea  $n \in \omega$ . Definimos la relación  $E_n$  en  $2^\omega$  tal que para cada  $x, y \in 2^\omega$ :

$$xE_ny \Leftrightarrow \forall k \geq n : x(k) = y(k).$$

La relación  $E_n$  es finita ya que dado  $x \in 2^\omega$ , sólo una cantidad finita de  $z \in 2^\omega$  satisfacen que  $xE_nz$ . Además es boreliana ya que cada  $E_n$  es  $G_\delta$  en  $2^\omega \times 2^\omega$ . Se cumple además que  $E_0 = \bigcup_{n \in \omega} E_n$ . Por lo tanto,  $E_0$  es hiperfinita. ■

Una consecuencia más que se desprende de este ejemplo es que la propiedad de ser hiperfinita no implica ser suave, en cuanto a relaciones de equivalencia borelianas se refiere.

Enseguida, mostraremos más ejemplos de relaciones hiperfinitas.

**Proposición 3.2.3.** Si  $E, F$  son relaciones de equivalencia borelianas contables tal que  $E$  es hiperfinita y  $F \subseteq E$ , entonces  $F$  es hiperfinita.

*Demostración.* Si  $E = \bigcup_{n \in \omega} E_n$ , entonces  $F = \bigcup_{n \in \omega} E_n \cap F$  y cada  $E_n \cap F$  es una relación de equivalencia boreliana finita. ■

**Proposición 3.2.4** ([JKL02] Proposición 1.3). Si  $E$  es hiperfinita y  $F \leq_B E$  entonces  $F$  es hiperfinita. Por lo tanto, si  $F$  es una relación suave entonces  $F$  es hiperfinita.

Podemos preguntarnos si existen más relaciones hiperfinitas que no son suaves y que no son borel-bireducibles con  $E_0$ . Como veremos a continuación, la respuesta a esta pregunta es negativa.

**Proposición 3.2.5** ([Kec21] Corolario 7.3). Si  $E$  es una relación de equivalencia boreliana que no es suave e hiperfinita, entonces  $E \sim_B E_0$ .

Retomando la cuestión inicial, nos gustaría saber si  $\equiv_T$  es una relación suave o una relación hiperfinita. Slaman y Steel han dado una respuesta a esta pregunta.

**Teorema 3.2.1** (Slaman y Steel [SS88] p. 53).  $\equiv_T$  no es hiperfinita.

Las propiedades de la Turing-equivalencia sugieren que se trata de una relación de equivalencia muy compleja. Así, una pregunta natural es si, en realidad, se trata de la relación más compleja de todas. En la siguiente sección exploraremos más esta cuestión.

### 3.2.3. Universalidad

La noción que busca capturar a las relaciones de equivalencia borelianas contables que son las más complicadas se conoce como *universalidad*.

De ahora en adelante, nuestro estudio se limitará a las relaciones de equivalencia que son contables. Comenzaremos con una serie de resultados que nos permitirán identificar relaciones explícitas que son complicadas en el sentido previamente descrito.

**Proposición 3.2.6.** Sean  $G$  un grupo contable,  $X$  espacio estándar de Borel y  $a$  una acción boreliana de  $G$  en  $X$ . Entonces  $E_G^X \leq_B E(G, 2^\omega)$ .

*Demostración.* Dado que  $X$  es un espacio estándar de Borel, existe una familia de conjuntos borelianos  $\{U_n\}_{n \in \omega}$  tal que para cada  $x, y \in X$ , si  $x \neq y$  entonces existen  $n, m \in \omega$  tal que  $x \in U_n \setminus U_m$  y  $y \in U_m \setminus U_n$ .

Definimos  $f : X \rightarrow (2^\omega)^G$  tal que  $[(f(x))(g)](n) = 1$  si y sólo si  $g^{-1} \cdot x \in U_n$ , es decir si  $a(g^{-1}, x) \in U_n$ .

Afirmamos que  $f$  es un homomorfismo de  $E_G^X$  a  $E(G, 2^\omega)$ . Sean  $x, y \in X$  tales que  $x E_G^X y$ . Luego, existe  $g \in G$  tal que  $g \cdot x = y$ . Afirmamos que  $g \cdot f(x) = f(y)$ . Sean  $h \in G$  y  $n \in \omega$ , entonces:

$$\begin{aligned}
[(g \cdot f(x))(h)](n) = 1 &\Leftrightarrow [(f(x))(g^{-1}h)](n) = 1 \\
&\Leftrightarrow (g^{-1}h)^{-1} \cdot x \in U_n \\
&\Leftrightarrow (h^{-1}g) \cdot x \in U_n \\
&\Leftrightarrow h^{-1} \cdot (g \cdot x) \in U_n \\
&\Leftrightarrow [(f(g \cdot x))(h)](n) = 1 \\
&\Leftrightarrow [(f(y))(h)](n) = 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $g \cdot f(x) = f(y)$ . Luego,  $f(x)E(G, 2^\omega)f(y)$ . Concluimos que  $f$  es un homomorfismo de  $E_G^X$  a  $E(G, 2^\omega)$ .

Demostremos ahora que  $f$  es un cohomomorfismo de  $E_G^X$  a  $E(G, 2^\omega)$ . Sean  $x, y \in X$  tales que  $f(x)E(G, 2^\omega)f(y)$ . Entonces existe  $g \in G$  tal que  $g \cdot f(x) = f(y)$ . Sea  $n \in \omega$ , entonces:

$$\begin{aligned}
g \cdot x \in U_n &\Leftrightarrow [(f(x))(g^{-1})](n) = 1 \\
&\Leftrightarrow [(g \cdot f(x))(1_G)](n) = 1 \\
&\Leftrightarrow [(f(y))(1_G)](n) = 1 \\
&\Leftrightarrow y \in U_n.
\end{aligned}$$

De la propiedad de la familia  $\{U_n\}_{n \in \omega}$  tenemos que  $g \cdot x = y$ . Por lo tanto,  $x E_G^X y$ . Concluimos que  $f$  es un cohomomorfismo de  $E_G^X$  a  $E(G, 2^\omega)$ . ■

El resultado nos dice que la complejidad de la relación inducida por la acción de desplazamiento de un grupo tiene mayor o igual complejidad que la relación de equivalencia inducida por una acción del mismo grupo. Esto sugiere que nuestra búsqueda de encontrar la relación contable más compleja de todas, se reduzca a mirar aquellas que son inducidas por acciones de desplazamiento.

La siguiente proposición nos dice que nuestra intuición previa es correcta.

**Proposición 3.2.7.** Para toda relación de equivalencia boreliana contable  $E$ , se tiene que  $E \leq_B E(\mathbb{F}_\infty, 2^\omega)$ .

*Demostración.* Sean  $G$  un grupo contable y  $a$  una acción boreliana de  $G$  en un espacio estándar de Borel  $X$  tal que  $E_G^X = E$ . De la propiedad universal de los grupos libres, existe un homomorfismo sobreyectivo  $\phi : \mathbb{F}_\infty \rightarrow G$ . Definimos una acción boreliana  $b$  de  $\mathbb{F}_\infty$  en  $X$  tal que  $b(g, x) = \phi(g) \cdot x = a(\phi(g), x)$ . Se verifica que  $E = E_G^X$ . Así, del ejemplo anterior, tenemos que  $E = E_G^X \leq_B E(\mathbb{F}_\infty, 2^\omega)$ . ■

Dado que la relación  $E(\mathbb{F}_\infty, 2^\omega)$  es muy difícil de visualizar, trataremos de identificar una relación más familiar pero con la misma complejidad.

Mediante una serie de argumentos es posible establecer la siguiente reducción.

**Corolario 3.2.1** ([DJK94] Proposición 1.8).  $E(\mathbb{F}_\infty, 2^\omega) \leq_B E(\mathbb{F}_2, 2)$ . Por consiguiente, para toda relación de equivalencia boreliana contable  $E$ , se tiene  $E \leq_B E(\mathbb{F}_2, 2)$ .

La propiedad de las relaciones  $E(\mathbb{F}_\infty, 2^\omega)$  y  $E(\mathbb{F}_2, 2)$ , motiva la siguiente definición.

**Definición 3.2.4** (Universalidad). Diremos que una relación de equivalencia boreliana contable  $E$  es *universal* si para toda relación de equivalencia boreliana contable  $F$  se tiene que  $F \leq_B E$ .

De las observaciones previas, obtenemos que  $E(\mathbb{F}_\infty, 2^\omega)$  y  $E(\mathbb{F}_2, 2)$  son universales. Además, notemos que existe una única relación de equivalencia universal salvo bi-reducibilidad, la cual de ahora en adelante, denotamos por  $E_\infty$ .

La borel-reducibilidad puede mejorarse en el caso de relaciones borelianas universales.

**Teorema 3.2.2** ([MSS16] Teorema 3.6). Sean  $E, F$  relaciones de equivalencia boreliana contable universal. Si  $E$  es universal, entonces  $F \sqsubseteq_B E$ .

Otro ejemplo de relación de equivalencia boreliana contable universal es la equivalencia aritmética.

**Teorema 3.2.3** ([MSS16] Teorema 2.5). La equivalencia aritmética  $\equiv_A$  es una relación de equivalencia boreliana contable universal.

Hasta ahora nos hemos tratado convencer que la noción de universalidad es distinta a la noción de hiperfinitud. Dicha cuestión quedaría resuelta si  $E_\infty$  no fuera borel-reducible a  $E_0$ . El siguiente resultado nos exhibe una relación de equivalencia boreliana contable estrictamente entre  $E_0$  y  $E_\infty$ .

**Proposición 3.2.8** ([JKL02] Sección 3). Existe una relación de equivalencia boreliana contable  $E$  tal que  $E_0 <_B E <_B E_\infty$ .

A partir de este resultado podemos deducir lo siguiente.

**Proposición 3.2.9.** Si  $E$  es hiperfinita, entonces  $E$  no es universal.

Dicho esto, y en base a la evidencia sobre las propiedades de la Turing-equivalencia, es posible tratar de indagar si la Turing-equivalencia  $\equiv_T$  es universal. Sin embargo, aún se desconoce la respuesta a esta cuestión.

**Pregunta 3.2.1.** ([Kec92] Problema 17)  $\leq_T$  es una relación de equivalencia boreliana contable universal?

En la siguiente sección, continuaremos tratando de asignar una complejidad a  $\equiv_T$ , debilitando ahora la noción de universalidad.

### 3.2.4. Reducibilidad Débil

Para debilitar la noción de universalidad, comenzaremos desde el inicio, debilitando la borel-reducibilidad e introduciendo nuevas nociones, de las cuales veremos que algunas de ellas serán conocidas.

**Definición 3.2.5** (Reducibilidad Débil). Sean  $E$  y  $F$  dos relaciones de equivalencia borelianas contables en espacios estándar  $X$  e  $Y$  respectivamente. Diremos que,

- (i)  $E$  es *débilmente reducible* a  $F$  si existe un homomorfismo de  $E$  a  $F$  que es contable-a-uno.
- (ii)  $E$  es *débilmente borel-reducible* a  $F$ , lo cual denotamos por  $E \leq_B^w F$ , si  $E$  es débilmente reducible a  $F$  mediante una función boreliana.

Algunas observaciones de la definición son las siguientes.

**Proposición 3.2.10.** Si  $f$  es una reducción boreliana entre dos relaciones de equivalencia borelianas contables  $E$  y  $F$ , entonces  $f$  es una reducción débil boreliana de  $E$  a  $F$ . Por lo tanto, si  $E \leq_B F$  entonces  $E \leq_B^w F$ .

*Demostración.* Como  $E$  es contable y  $f$  es un cohomomorfismo,  $f$  debe ser contable-a-uno. ■

**Proposición 3.2.11.** La relación  $\leq_B^w$  es transitiva.

*Demostración.* Se sigue de el hecho de que la composición de homomorfismo es un homomorfismo y la composición de funciones contables-a-uno es contable-a-uno. ■

La borel-reducibilidad débil se comporta bien respecto a la contención de conjuntos.

**Proposición 3.2.12.** Si  $E \subseteq F$  son relaciones de equivalencia borelianas contables, entonces  $E \leq_B^w F$ .

*Demostración.* La función identidad es un homomorfismo boreliano de  $E$  a  $F$  que es contable-a-uno. ■

Una caracterización de la borel-reducibilidad débil es la siguiente.

**Proposición 3.2.13.** Sean  $E$  y  $F$  relaciones de equivalencia borelianas contables. Entonces las siguientes son equivalentes:

- (i)  $E \leq_B^w F$
- (ii) Existe una relación de equivalencia boreliana contable  $S \supseteq E$  tal que  $S \leq_B F$ .

*Demostración.* Supongamos que  $E \leq_B^w F$  y sea  $f$  una reducción débil boreliana de  $E$  a  $F$ . La relación  $S$  tal que  $xSy$  si y sólo si  $f(x)Ff(y)$ , es una relación de equivalencia boreliana contable tal que  $S \supseteq E$  y  $S \leq_B F$ .

Por otro lado, si  $S \supseteq E$ , entonces  $E \leq_B^w S$  y  $S \leq_B F$ . Por lo tanto,  $E \leq_B^w F$ . ■

Con esta nueva noción de reducibilidad podemos establecer nuevas nociones de suavidad e hiperfinitud de manera similar a como lo hemos hecho en la sección previa. Sin embargo, veremos que en realidad, dichas nociones no son nuevas.

**Definición 3.2.6.** Sea  $E$  una relación de equivalencia boreliana contable. Diremos que:

- (i)  $E$  es *débilmente suave* si existe un espacio estándar de Borel tal que  $E \leq_B^w \Delta_X$ .
- (ii)  $E$  es *débilmente hiperfinita* si existe una relación de equivalencia boreliana contable hiperfinita  $F$  tal que  $E \leq_B^w F$ .

Un par de observaciones que se siguen de la definición son las siguientes: la propiedad de ser suave implica ser débilmente suave y la propiedad de ser hiperfinita implica ser débilmente hiperfinita. Enseguida veremos que sus recíprocos también son válidos.

**Proposición 3.2.14.** Sea  $E$  una relación de equivalencia boreliana contable. Entonces

- (i)  $E$  es débilmente suave si y sólo si  $E$  es suave.
- (ii)  $E$  es débilmente hiperfinita si y sólo si  $E$  es hiperfinita.

*Demostración.* (i) Si  $E$  es débilmente suave, existen un espacio estándar de Borel  $X$  y una relación de equivalencia boreliana contable  $S \supseteq E$  tal que  $S \leq_B \Delta_X$ . Por lo tanto,  $S$  es suave. Existe un grupo contable  $G = \{g_n : n \in \omega\}$  tal que  $S = E_G^X$ . Además, como  $S$  es suave, existe un conjunto boreliano  $T$  tal que para cada  $x \in X$ , existe  $t_x \in X$  tal que  $T \cap [x]_S = \{t_x\}$ . Definimos la función boreliana  $s : X \rightarrow X$  tal que  $s(x) = g_n \cdot t_x$  donde  $n$  es el menor natural tal que  $(g_n \cdot t_x)Ex$ , el cual existe ya que hay algún  $g \in G$  tal que  $g \cdot t_x = x$ . Por lo tanto,  $s$  es un borel-selector para  $E$ . Por consiguiente,  $E$  es suave.

- (ii) Si  $E$  es débilmente hiperfinita, entonces existe una relación de equivalencia boreliana contable hiperfinita  $F$  y una relación de equivalencia boreliana contable  $S \supseteq E$  tal que  $S \leq_B F$ . Por la Proposición 3.2.4,  $S$  es hiperfinita. De la Proposición 3.2.3 se sigue que  $E$  es hiperfinita. ■

Por consiguiente, nos restringiremos al estudio de la versión débil de la universalidad.

**Definición 3.2.7** (Universalidad Débil). Una relación de equivalencia boreliana contable  $E$  es *débilmente universal* si para toda relación de equivalencia  $F$  se satisface que  $F \leq_B^w E$ .

Una forma de determinar que una relación es débilmente universal es la siguiente.

**Proposición 3.2.15.** Sea  $E$  una relación de equivalencia boreliana contable. Si existe una relación de equivalencia boreliana contable universal  $F$  tal que  $F \subseteq E$ , entonces  $E$  es débilmente universal.

*Demostración.* Se sigue a partir de que la reducibilidad débil se comporta bien respecto a la contención de conjuntos. ■

Con esta caracterización, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.4.**  $\equiv_T$  es débilmente universal.

*Demostración.* Identifiquemos  $E_\infty$  con  $E(\mathbb{F}_2, 2)$ . Una biyección efectivamente calculable  $\varphi : \omega \rightarrow \mathbb{F}_2$  tal que  $\varphi(0) = 1_{\mathbb{F}_2}$ , induce una función  $\bar{\varphi} : 2^{\mathbb{F}_2} \rightarrow 2^\omega$  tal que  $\bar{\varphi}(f) = f \circ \varphi$ . Es posible demostrar que la función  $\bar{\varphi}$  es una biyección y reducción boreliana de  $E(\mathbb{F}_2, 2)$  a  $E(\omega, 2)$  donde  $\omega$  es considerado como un grupo con la operación  $n \cdot m = \varphi^{-1}(\varphi(n)\varphi(m))$ . Por lo tanto,  $E_\infty$  puede identificarse con  $E(\omega, 2)$ . Por otro lado, notemos que para cada  $f, g \in 2^\omega$ , si  $f E(\omega, 2) g$ , entonces debido a que  $\varphi$  es efectivamente calculable, tenemos que  $f \equiv_T g$ . Por lo tanto,  $E(\omega, 2) \subseteq \equiv_T$ . Lo cual implica que  $\equiv_T$  es débilmente universal. ■

Podemos obtener más ejemplos de relaciones débilmente universales de la siguiente forma.

**Proposición 3.2.16.** Si  $E$  es una relación de equivalencia boreliana contable universal entonces  $E$  es débilmente universal.

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 3.2.15. ■

Aún se desconoce si el recíproco de la proposición previa se satisface.

**Pregunta 3.2.2.** ¿Toda relación de equivalencia boreliana contable débilmente universal es universal?

Notemos que si la respuesta es afirmativa, entonces la respuesta a la pregunta 3.2.1 también lo es.

### 3.3. Consecuencias de la Conjetura de Martin

#### 3.3.1. Universalidad de $\equiv_T$

En esta sección exploraremos una condición suficiente para demostrar la falsedad de la Conjetura de Martin. También, examinaremos las implicaciones que tiene la Conjetura de Martin en el análisis de la universalidad débil.

A partir de la Turing-equivalencia podemos definir una nueva relación de equivalencia como sigue.

**Definición 3.3.1.** Sea  $n \in \omega$ , definimos la relación  $(\equiv_T)^n \subseteq (2^\omega)^n \times (2^\omega)^n$  tal que para cada  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in 2^\omega$ :

$$(x_1, \dots, x_n)(\equiv_T)^n(y_1, \dots, y_n) \text{ si y sólo si } x_1 \equiv_T y_1 \wedge x_2 \equiv_T y_2 \wedge \dots \wedge x_n \equiv_T y_n.$$

A partir de su definición, es sencillo probar que la relación  $(\equiv_T)^n$  es una relación de equivalencia boreliana contable para cada  $n \in \omega$ . Por consiguiente, es natural preguntarse sobre el resultado de la comparación de estas nuevas relaciones con la Turing-equivalencia.

**Proposición 3.3.1.** Supongamos que la Conjetura de Martin restringida a funciones borelianas es cierta. Entonces,

$$\equiv_T <_B (\equiv_T)^2.$$

*Demostración.* La función  $f : 2^\omega \rightarrow (2^\omega)^2$  tal que  $f(x) = (x, x)$  es una reducción boreliana de  $\equiv_T$  a  $(\equiv_T)^2$ . Por lo tanto,  $\equiv_T \leq_B (\equiv_T)^2$ . Supongamos, a fin de llegar a una contradicción, que  $(\equiv_T)^2 \leq_B \equiv_T$  vía una reducción  $f$ . Sean  $z \in 2^\omega$  e  $i \in \{0, 1\}$ , definimos la función boreliana  $f_i : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  tal que  $f_i(x) = f(x, z^{(i)})$ . Dado que  $f$  es una reducción, cada  $f_i$  es una función Turing-invariante. Si alguna  $f_i$  fuera constante en un cono, entonces para algún  $x \in 2^\omega$  tenemos que  $f_0(x) \equiv_T f_0(x')$ , luego  $f(x, z) \equiv_T f(x', z)$ . En particular,  $x \equiv_T x'$ , la cual es una contradicción. Por lo tanto, cada  $f_i$  es creciente en un cono.

Notemos que  $f_0(2^\omega) \cap f_1(2^\omega) = \emptyset$ , ya que de lo contrario existen  $x, y \in 2^\omega$  tal que  $f(x, z) = f(y, z')$ , y como  $f$  es una reducción, en particular tendríamos que  $z \equiv_T z'$ , lo cual es falso. Dado que para cada  $y \in 2^\omega$ ,  $y \leq_T f_0(y)$ ,  $f_0(2^\omega)$  es cofinal. De manera similar, obtenemos que  $f_1(2^\omega)$  es cofinal. Dado que  $f$  es contable-a-uno, cada  $f_i$  es contable-a-uno. Por lo tanto, cada  $f_i(2^\omega)$  es boreliano. Por el Teorema de Cono de Martin restringido a conjuntos borelianos (Corolario 2.1.2), cada  $f_i(2^\omega)$  contiene un cono, por lo tanto  $f_0(2^\omega) \cap f_1(2^\omega) \neq \emptyset$ , la cual es una contradicción. Concluimos que  $\equiv_T <_B (\equiv_T)^2$ . ■

En particular, de ser cierta la Conjetura de Martin, la relación  $\equiv_T$  no sería universal, dando una respuesta negativa a la pregunta 3.2.1.

**Teorema 3.3.1.** Si  $\equiv_T$  es universal entonces la Conjetura de Martin es falsa.

De esta manera, podemos concluir que la Conjetura de Martin y la universalidad de la Turing-equivalencia son incompatibles y se comportan en direcciones opuestas.

### 3.3.2. Relaciones Débilmente Universales

Entre otras de las implicaciones de la Conjetura de Martin, se encuentran aquellas que nos revelan más información de las relaciones débilmente universales.

Enseguida enunciamos un resultado que establece que, bajo la veracidad de la Conjetura de Martin en su versión boreliana, las funciones crecientes en un cono son casos particulares de reducciones débiles borelianas.

**Proposición 3.3.2.** Supongamos que la Conjetura de Martin restringida a funciones borelianas es cierta. Si  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es una función boreliana Turing-invariante, entonces una y sólo una de las siguientes ocurre:

- (i)  $f$  es constante en un cono.
- (ii) Existe un cono  $C \subseteq 2^\omega$  tal que  $f \upharpoonright C$  es una reducción débil boreliana de  $\equiv_T \upharpoonright C$  a  $\equiv_T$ . Más aún, si  $D \subseteq 2^\omega$  es un cono, entonces el conjunto  $[f(D)]_{\equiv_T} = \bigcup_{d \in D} [f(d)]_{\equiv_T}$  contiene un cono.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es constante en un cono. Por lo tanto, es creciente en un cono  $C$ . Entonces para cada  $y, z \in 2^\omega$  tal que  $z \in C$ , si  $f(z) = y$ , entonces  $z \leq_T f(z) = y$ . Dado que existe una cantidad a lo más numerable de elementos  $\leq_T$  que  $y$ , tenemos que  $(f \upharpoonright C)^{-1}(\{y\})$  es contable. Por lo tanto,  $f \upharpoonright C$  es contable-a-uno. Por consiguiente,  $f \upharpoonright C$  es una reducción débil boreliana de  $\equiv \upharpoonright C$  a  $\equiv_T$ .

Sea  $D \subseteq 2^\omega$  un cono y definamos al conjunto  $A = C \cap D$ . Dado que  $f \upharpoonright C$  es contable-a-uno, tenemos que  $f(A)$  es boreliano. Por lo tanto,  $[f(A)]_{\equiv_T}$  es boreliano<sup>3</sup>. Como  $[f(A)]_{\equiv_T}$  es cofinal, boreliano y Turing-invariante, por el Teorema de Cono de Martin restringido a conjuntos borelianos (Corolario 2.1.2),  $[f(A)]_{\equiv_T}$  contiene un cono y, por lo tanto,  $[f(D)]_{\equiv_T}$  contiene un cono. ■

Otra de las implicaciones nos permite identificar las restricciones de la Turing-equivalencia que nos dan relaciones débilmente universales.

**Proposición 3.3.3.** Supongamos que la Conjetura de Martin restringida a funciones borelianas es cierta. Sea  $A \subseteq 2^\omega$  un conjunto boreliano Turing-invariante, entonces las siguientes son equivalentes:

- (i)  $\equiv_T \upharpoonright A$  es débilmente universal.
- (ii)  $A$  contiene un cono.

<sup>3</sup>Dado que  $[f(A)]_{\equiv_T} = \pi_2(\equiv_T \cap f(A) \times 2^\omega)$ , donde  $\pi_2$  es la función proyección en la segunda coordenada, y  $\pi_2$  restringida a  $\equiv_T \cap f(A) \times 2^\omega$  es contable-a-uno, tenemos que  $[f(A)]_{\equiv_T}$  es boreliano.

*Demostración.* (ii) $\Rightarrow$ (i). Supongamos que  $A$  contiene un cono  $C$  con base  $z \in 2^\omega$ . La función  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  tal que  $f(x) = x \oplus z$  es un homomorfismo de  $\equiv_T$  a  $\equiv_T \upharpoonright C$ . Como  $f$  es boreliana<sup>4</sup> y contable-a-uno<sup>5</sup>, tenemos que  $\equiv_T \leq_B^w \equiv_T \upharpoonright A$ . Por lo tanto,  $\equiv_T \upharpoonright A$  es débilmente universal.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supongamos que  $\equiv_T \upharpoonright A$  es débilmente universal y sea  $f : 2^\omega \rightarrow A$  una reducción débil boreliana de  $\equiv_T$  a  $\equiv_T \upharpoonright A$ . Por la Proposición 3.3.2, tenemos que  $[f(2^\omega)]_{\equiv_T} \subseteq A$  contiene un cono. ■

Dentro de las consecuencias más significativas, se encuentra la descripción de un comportamiento caótico en la estructura inducida por la reducibilidad débil.

**Teorema 3.3.2** ([Tho09] Teorema 1.2). *Supongamos que la Conjetura de Martin restringida a funciones borelianas es cierta. Entonces, existen una cantidad no numerable de relaciones de equivalencia borelianas contables débilmente universales que son incomparables respecto la reducibilidad débil  $\leq_B^w$ .*

Para hablar de una consecuencia más, debemos introducir la noción de ergodicidad.

**Definición 3.3.2** (Ergodicidad). Sean  $X$  un espacio estándar de Borel y  $E$  relación de equivalencia boreliana contable en  $X$ . Diremos que  $\equiv_T$  es  $E$ - $m$ -ergódica si y sólo si para todo homomorfismo boreliano  $f : 2^\omega \rightarrow X$  de  $\equiv_T$  a  $E$ , existen un cono  $C \subseteq 2^\omega$  y  $x \in X$  tal que  $f(C) \subseteq [x]_E$ .

Por ejemplo, del Teorema de Cono de Martin (Corolario 2.1.2) tenemos el siguiente resultado.

**Ejemplo 3.3.1.**  $\equiv_T$  es  $\Delta_{2^\omega}$ - $m$ -ergódica.

*Demostración.* Sea  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  homomorfismo boreliano de  $\equiv_T$  a  $\Delta_{2^\omega}$ . Tomemos algún  $x \in 2^\omega$ , definimos  $X = f^{-1}(\{f(x)\})$ . Como  $X$  es un conjunto boreliano Turing-invariante,  $X$  contiene un cono  $C$ . Se sigue que  $f(C) \subseteq [f(x)]_{\Delta_2^\omega}$ . ■

Podríamos preguntarnos si  $\equiv_T$  es ergódica respecto a relaciones hiperfinitas, sin embargo se desconoce si  $\equiv_T$  es  $E_0$ - $m$ -ergódica.

La satisfacción de la Conjetura de Martin nos permite caracterizar las relaciones débilmente universales como aquellas que no pueden clasificar *ningún* cono en la misma clase de equivalencia.

**Teorema 3.3.3.** *Supongamos que la Conjetura de Martin restringida a funciones borelianas es cierta. Entonces para cada relación de equivalencia boreliana  $E$ , una y sólo una de las siguientes se satisface:*

<sup>4</sup> $f$  es  $z$ -computable, por el Teorema A.5.1 se sigue que  $f$  es continua, y por tanto boreliana.

<sup>5</sup>Dado  $y \in 2^\omega$ , existe una cantidad a lo más numerable de elementos  $x \in 2^\omega$  tal que  $x \leq_T x \oplus z = y$ .

(i)  $E$  es débilmente universal

(ii)  $\equiv_T$  es  $E$ - $m$ -ergódica.

*Demostración.* Si  $E$  es débilmente universal, entonces  $\equiv_T \leq_B^w E$ , por lo tanto  $\equiv_T$  no es  $E$ - $m$ -ergódica. Por consiguiente (i) y (ii) no se satisfacen al mismo tiempo.

Supongamos que  $\equiv_T$  no es  $E$ - $m$ -ergódica y demostremos que  $E$  es débilmente universal. Sea  $f : 2^\omega \rightarrow X$  una función testigo del hecho de que  $\equiv_T$  no es  $E$ - $m$ -ergódica. Supongamos que  $E \leq_B^w \equiv_T$  vía una reducción débil  $g^6$ . La función  $h = g \circ f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es un homomorfismo boreliano.

Supongamos que  $h$  es constante en un cono  $C$ . Luego existe  $x \in 2^\omega$  tal que  $h(C) \subseteq [x]_{\equiv_T}$ . Entonces  $f(C) \subseteq g^{-1}([x]_{\equiv_T})$ . Como  $C$  es no numerable y  $g^{-1}([x]_{\equiv_T})$  es contable, existe  $y \in g^{-1}([x]_{\equiv_T})$  tal que  $f^{-1}(\{y\})$  es cofinal. Dado que  $[f^{-1}(\{y\})]_{\equiv_T}$  es Turing-invariante y boreliano, del Teorema de Martin (Corolario 2.1.2),  $f^{-1}(\{y\})$  contiene un cono  $D$ . Luego  $f(D) \subseteq [y]_E$ , lo cual contradice que  $\equiv_T$  no es  $E$ - $m$ -ergódica.

Por lo tanto, de la Proposición 3.3.2, existe un cono tal que  $h \upharpoonright C$  es contable-a-uno. Por lo tanto,  $f \upharpoonright C$  es contable-a-uno y por consiguiente  $f \upharpoonright C$  es una reducción débil de  $\equiv_T \upharpoonright C$  a  $E$ . Por la Proposición 3.3.3,  $\equiv_T \upharpoonright C$  es débilmente universal, lo cual implica que  $E$  es débilmente universal. ■

Dentro de los métodos que podríamos utilizar para analizar la complejidad de un relación débilmente universal, se encuentra el análisis de las restricciones de la relación en conjuntos de diferentes medidas. Enseguida enunciaremos un resultado debido a S. Thomas que nos permite concluir que dicha complejidad se concentra en un conjunto de medida cero. Para probar el resultado, primero daremos una definición previa.

**Definición 3.3.3.** Sean  $f, g : \omega \rightarrow \omega$  funciones. Diremos que  $f \leq^* g$  si  $f(n) \leq g(n)$  salvo una cantidad finita de naturales  $n \in \omega$ .

La siguiente aplicación del lema de Borel-Cantelli será esencial en la prueba de nuestro resultado principal. A fin de no interrumpir el curso de la lectura del texto, dejamos la demostración a consulta en el Lema A.2.2.

**Lema 3.3.1.** Sean  $X$  un espacio estándar de Borel,  $\mu$  una medida de probabilidad en  $X$  y  $\theta : X \rightarrow \omega^\omega$  una función boreliana. Entonces existe una función  $h : \omega \rightarrow \omega$  tal que

$$\mu(\{x \in X \mid \theta(x) \leq^* h\}) = 1.$$

Por último, enunciemos el resultado en cuestión y desarrollamos su prueba correspondiente.

---

<sup>6</sup>Dicha reducción existe ya que  $\equiv_T$  es débilmente universal.

**Teorema 3.3.4.** *Supongamos que la Conjetura de Martin restringida a funciones borelianas es cierta. Si  $E$  es una relación de equivalencia boreliana contable en un espacio estándar de Borel  $X$  y  $\mu$  es una medida boreliana de probabilidad en  $X$ , entonces existe un conjunto boreliano  $B \subseteq X$  tal que  $\mu(B) = 1$  y  $E \upharpoonright B$  no es débilmente universal.*

*Demostración.* Sea  $\varphi : 2^\omega \rightarrow \omega^\omega$  la función boreliana tal que:

- (i) Si  $A_r \cap 2\omega$  es infinito, entonces  $\varphi(r)$  es la enumeración estrictamente creciente de  $A_r \cap 2\omega$ , donde  $A_r = \{n \in \omega \mid r(n) = 1\}$ .
- (ii) Si  $A_r \cap 2\omega$  no es infinito, entonces  $\varphi(r)$  es la función 0 en  $\omega$ .

Dado que  $\equiv_T$  es una relación de equivalencia boreliana contable, existen un grupo contable  $G = \{g_n \mid n \in \omega\}$  y una acción boreliana de  $G$  en  $2^\omega$  tal que  $E_G^{2^\omega} = \equiv_T$ . Sea  $\psi : 2^\omega \rightarrow \omega^\omega$  la función boreliana tal que  $\psi(x)(n) = \max\{\varphi(g_m x)(n) : m \leq n\}$ . De la definición de  $E_G^{2^\omega}$ , para cada  $s, r \in 2^\omega$ , si  $s \equiv_T r$ , entonces  $\varphi(s) \leq^* \psi(r)$ .

Como  $\equiv_T$  es débilmente universal, existe una reducción débil boreliana  $f : X \rightarrow 2^\omega$  de  $E$  a  $\equiv_T$ . Sea  $\theta : X \rightarrow \omega^\omega$  tal que  $\theta(x) = \psi(f(x))$ . Por el Lema A.2.2, existe una función  $h : \omega \rightarrow \omega$  tal que el conjunto boreliano  $B = \{x \in X \mid \theta(x) \leq^* h\}$  satisface que  $\mu(B) = 1$ .

Afirmamos que  $E \upharpoonright B$  no es débilmente universal. Sea  $Z = [f(B)]_{\equiv_T}$ . Dado que  $f$  es contable-a-uno,  $Z$  es boreliano. De una observación previa, si  $r \in Z$ , entonces  $r \equiv_T f(b)$  para algún  $b \in B$ . Si  $s \equiv_T r$ , tenemos que  $\varphi(s) \leq^* \psi(f(b)) = \theta(b) \leq^* h$ . Sea  $S_h = \{r \in 2^\omega \mid \exists s \in 2^\omega : s \equiv_T r \wedge \neg(\varphi(s) \leq^* h)\}$ , entonces  $Z \subseteq 2^\omega \setminus S_h$ ; es decir,  $S_h \subseteq 2^\omega \setminus Z$ .

Afirmamos que  $S_h$  contiene un cono. Sea  $t \in \omega \rightarrow \omega$  una función estrictamente creciente tal que para cada  $n \in \omega$ ,  $h(n) < t(n)$ . Afirmamos que el cono  $\text{Cono}(t) \subseteq S_h$ . Sea  $r \in 2^\omega$  tal que  $e \leq_T r$ . Definimos  $s \in 2^\omega$  como la función característica del conjunto  $\{2t(n) \mid n \in \omega\} \cup \{2l + 1 \mid r(l) = 1\}$ . Como  $e \leq_T r$ , tenemos que  $s \equiv_T r$ . De la definición de  $\varphi$ , para cada  $n \in \omega$ ,  $h(n) < t(n) < 2t(n) = \varphi(s)(n)$ ; luego  $\neg(\varphi(s) \leq^* h)$ . Así,  $\text{Cono}(t) \subseteq S_h$ .

Por lo anterior,  $2^\omega \setminus Z$  contiene un cono. Luego,  $Z$  no contiene un cono. Por la Proposición 3.3.3,  $\equiv_T \upharpoonright Z$  no es débilmente universal. Como la reducción débil  $f \upharpoonright B$  verifica que  $E \upharpoonright B \leq_B^w \equiv_T \upharpoonright Z$ , tenemos que  $E \upharpoonright B$  no es débilmente universal. ■



# Conclusiones

En este trabajo hemos introducido la Conjetura de Martin y desarrollado su demostración para el caso uniforme de la conjetura en los Teoremas 2.2.1 y 2.2.4, tomando como referencia las pruebas presentadas en [Ste75], [Ste82] y [Cor21]. De nuestro análisis de las demostraciones, concluimos que los argumentos que se valen del Axioma de Determinación y de métodos de la Teoría de la Computabilidad son suficientes para un correcto desarrollo de las demostraciones. Adicionalmente, es posible identificar de manera específica la aplicación de dicho axioma, lo que nos permite obtener pruebas para distintas versiones de la conjetura.

En el tercer capítulo, interpretamos a la Turing-equivalencia como un problema de clasificación. Del Teorema 3.2.4, identificamos la complejidad de la Turing-equivalencia en términos de comparaciones entre relaciones de equivalencia borelianas contables vía reducciones borelianas débiles.

Asimismo, al examinar las implicaciones de la Conjetura de Martin en el contexto de las relaciones de equivalencia borelianas, el Teorema 3.3.1 arrojó una conclusión significativa: la versión de la conjetura restringida al caso boreliano es incompatible con la universalidad de la Turing-equivalencia. En otras palabras, ambas no pueden ocurrir simultáneamente.

Finalmente, indagando sobre las consecuencias de la Conjetura de Martin en el contexto de las relaciones débilmente universales obtuvimos las siguientes conclusiones: la Proposición 3.3.3 obtiene una caracterización de las restricciones de la Turing-equivalencia que son débilmente universales; el Teorema 3.3.3 identifica las relaciones débilmente universales como exactamente aquellas que no satisfacen la condición de ergodicidad; el Teorema 3.3.4 establece que la complejidad de las relaciones débilmente universales se concentra en conjuntos de medida cero.



# Apéndice A

## Teoría Descriptiva de Conjuntos: algunos resultados

En este apartado, el lector podrá encontrar los resultados en Teoría Descriptiva de Conjuntos que han sido utilizados en este texto. La exposición es presentada a manera de resumen, desarrollando algunas pruebas que se consideran importantes. Las referencias utilizadas son [Kec95] y [M I18].

### A.1. Espacios Polacos

Comenzamos con la definición de espacio polaco.

**Definición A.1.1** (Espacio polaco). Un espacio topológico  $(X, \tau)$  es un *espacio polaco* si existe una métrica  $d$  en  $X$  tal que  $(X, d)$  es un espacio separable, completo y además cumple que  $\tau = \tau_d$ .

Cuando no sea necesario indicar la topología de  $X$ , únicamente diremos que  $X$  es un espacio polaco.

Uno de los espacios polacos más conocidos es  $2^\omega$ . Enseguida indicamos cómo demostrar este hecho importante.

**Definición A.1.2** (Cono generado). Dado  $s \in 2^{<\omega}$ , definimos el *cono generado por  $s$* , como el conjunto

$$N_s = \{x \in 2^\omega \mid s \subseteq x\}.$$

Durante esta sección diremos que una función  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es continua si es continua según la topología cuyos básicos son los conos  $N_s$ . Una forma sencilla de verificar si una función es continua es la siguiente.

**Proposición A.1.1.** Una función  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es continua en  $x \in 2^\omega$  si y sólo si para cada  $n \in \omega$ , existe  $m \in \omega$  tal que  $f(N_{x \upharpoonright m}) \subseteq N_{y \upharpoonright n}$ .

El espacio  $2^\omega$  también admite una métrica definida como sigue.

**Proposición A.1.2.** La función  $d : 2^\omega \times 2^\omega \rightarrow [0, 1]$  tal que:

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } x \neq y \wedge n = \min\{m \in \omega \mid x(m) \neq y(m)\} \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

es una métrica en  $2^\omega$ . Más aún, la topología generada por  $d$ ,  $\tau_d$ , coincide con la topología  $\tau$  de conos en  $2^\omega$ .

**Corolario A.1.1.** Si  $\tau$  es la topología de conos en  $2^\omega$ , entonces  $(2^\omega, \tau)$  es un espacio polaco.

Un espacio polaco, o bien es finito, o bien es numerable o bien tiene la cardinalidad de los números reales, es decir tiene la cardinalidad del continuo  $\mathfrak{c}$ .

**Teorema A.1.1.** Si  $X$  es un espacio polaco no numerable, entonces  $X$  contiene un subconjunto homeomorfo a  $2^\omega$ .

Dado que el producto numerable de espacios separables y completos es separable y completo tenemos que:

**Teorema A.1.2.** El producto contable de espacios polacos es polaco.

También es posible caracterizar a los subespacios polacos de un espacio polaco. Para ello, antes demos una definición.

**Definición A.1.3** (Conjunto  $G_\delta$ ). Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Diremos que  $A$  es  $G_\delta$  si existe  $\{U_n\}_{n \in \omega} \subseteq \tau$  tal que  $A = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ .

Dado que todo subespacio de espacio métrico separable es separable, tenemos lo siguiente.

**Teorema A.1.3.** Un subespacio  $Y$  de un espacio polaco es polaco si y sólo si  $Y$  es  $G_\delta$ .

## A.2. Espacios Estándar de Borel

En esta sección nos encargaremos de mostrar más resultados básicos de los espacios estándar de Borel.

Comenzaremos recordando la definición de la  $\sigma$ -álgebra de Borel.

**Definición A.2.1** (Espacio Medible). Sea  $X$  un conjunto y  $\Sigma \subseteq P(X)$  una  $\sigma$ -álgebra de conjuntos de  $X$ . A la pareja  $(X, \Sigma)$  la llamaremos *espacio medible*.

**Definición A.2.2** ( $\sigma$ -álgebra de Borel). Dado un espacio topológico  $(X, \tau)$ , la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$  respecto a  $\tau$  se define como:

$$\mathcal{B}(X, \tau) = \bigcap \{ \mathcal{F} \subseteq P(X) \mid \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{F} \supseteq \tau \}.$$

Es decir,  $\mathcal{B}(X, \tau)$  es la menor  $\sigma$ -álgebra de  $X$  que contiene a  $\tau$ . Cuando la topología  $\tau$  se encuentre clara dentro del contexto, únicamente diremos  $\sigma$ -álgebra de Borel para  $\mathcal{B}(X)$ . A los elementos de  $\mathcal{B}(X)$  los llamaremos *conjuntos borelianos*.

En particular, denotamos por  $\mathcal{B}(2^\omega)$  a la  $\sigma$ -álgebra de Borel obtenida de la topología de conos en  $2^\omega$ .

Dicho lo anterior, podemos establecer la definición de espacio estándar de Borel.

**Definición A.2.3** (Espacio estándar de Borel). Un espacio medible  $(X, \Sigma)$  es un *espacio estándar de Borel* si existe una topología  $\tau$  tal que el espacio  $(X, \tau)$  es polaco y  $\Sigma = \mathcal{B}(X, \tau)$ .

Los ejemplos comunes de espacios estándar de Borel son  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , donde  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel generada por la topología usual de  $\mathbb{R}$ ;  $(2^\omega, \mathcal{B}(2^\omega))$  donde  $\mathcal{B}(2^\omega)$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel generada por la topología generada por conos. Para poder fabricar más ejemplo de espacios estándar de Borel, tenemos el siguiente resultado, cuya demostración dejamos a consulta en [M I18].

**Proposición A.2.1.** Si  $(X, \Sigma)$  es un espacio estándar de Borel y  $Y \in \Sigma$  es no vacío, entonces  $(Y, \Sigma \upharpoonright Y)$  es un espacio estándar de Borel, donde  $\Sigma \upharpoonright Y = \{B \cap Y \mid B \in \Sigma\}$ .

En este contexto, una función biyectiva  $f$  entre dos espacios estándar de Borel es un isomorfismo boreliano si  $f$  y  $f^{-1}$  son borelianas. Diremos que dos espacios estándar de Borel son Borel-isomorfos si existe un isomorfismo boreliano entre ellos. Un resultado importante y que usaremos con frecuencia es el siguiente. Omitimos la demostración ya que no es el propósito de este trabajo, pero se puede consultar en [M I18].

**Teorema A.2.1.** *Dos espacios estándar de Borel son Borel-isomorfos si y sólo si tienen la misma cardinalidad.*

En caso de que un espacio estándar de Borel sea dotado con una medida de probabilidad tenemos un resultado conocido que nos indica que la probabilidad de que un evento suceda una infinidad de veces es 0 bajo ciertas condiciones. Debido a que es un resultado conocido en la Teoría de la Medida, omitimos su demostración.

**Lema A.2.1** (Borel-Cantelli). Sean  $X$  un espacio estándar de Borel,  $\mu$  una medida de probabilidad en  $X$  y  $\{E_n\}_{n \in \omega}$  una sucesión de conjuntos borelianos de  $X$ . Si  $\sum_{n \in \omega} \mu(E_n) < \infty$ , entonces

$$\mu(\{x \in X \mid x \in E_n \text{ para una infinidad de } n \in \omega\}) = 0.$$

Una consecuencia del lema de Borel-Cantelli es la siguiente.

**Lema A.2.2.** Sean  $X$  un espacio estándar de Borel,  $\mu$  una medida de probabilidad en  $X$  y  $\theta : X \rightarrow \omega^\omega$  una función boreliana. Entonces existe una función  $h : \omega \rightarrow \omega$  tal que

$$\mu(\{x \in X \mid \theta(x) \leq^* h\}) = 1.$$

*Demostración.* Sea  $n \in \omega$ , entonces existe  $h_n \in \omega$  tal que  $\mu(\{x \in X \mid \theta(x)(n) > h_n\}) < 1/2^{n+1}$ . Definimos  $h : \omega \rightarrow \omega$  tal que  $h(n) = h_n$ . Por el lema de Borel-Cantelli (Lema A.2.1),

$$\mu(\{x \in X \mid \theta(x)(n) > h(n) \text{ para una infinidad de } n\}) = 0.$$

Por lo tanto,  $\mu(\{x \in X \mid \theta(x) \leq^* h\}) = 1$ . ■

### A.3. Funciones Borelianas y Espacio Cociente

Dentro de la clase de funciones entre espacios medibles con  $\sigma$ -álgebras de Borel, distinguiremos una subclase particular.

**Definición A.3.1** (Función medible). Una función  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (Y, \Delta)$  entre espacios medibles es una *función medible* si para cada  $A \in \Delta$ , tenemos que  $f^{-1}(A) \in \Sigma$ .

Cuando las  $\sigma$ -álgebras son de Borel, damos un nombre especial a este tipo de funciones.

**Definición A.3.2** (Función Boreliana). Una función  $f : (X, \mathcal{B}(X)) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$  es *boreliana* si para cada  $A \in \mathcal{B}(Y)$ , se tiene que  $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$ .

Una forma de identificar de forma sencilla a una función boreliana es verificando si la función es continua.

**Proposición A.3.1.** Toda función continua  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \eta)$  es boreliana.

A continuación mostramos una construcción de un espacio cociente a partir de un espacio medible con una  $\sigma$ -álgebra de Borel.

**Definición A.3.3.** Sea  $(X, \Sigma)$  un espacio medible y  $E \subseteq X \times X$  una relación de equivalencia en  $X$ . Consideremos  $\pi : X \rightarrow X/E$  a la función tal que  $\pi(x) = [x]_E$ . Definimos el *espacio cociente boreliano*  $(X/E, \Sigma/E)$ , donde

$$\Sigma/E = \{Z \subseteq X/E \mid \pi^{-1}(Z) \in \Sigma\}.$$

Establecemos algunas observaciones a partir de la definición previa.

*Observación.*  $(X/E, \Sigma/E)$  es un espacio medible.

*Demostración.* De las propiedades de la imagen inversa, tenemos que  $\Sigma/E$  es una  $\sigma$ -álgebra. ■

*Observación.* La función  $\pi : X \rightarrow X/E$  es medible.

*Observación.* Si  $Z \in \Sigma/E$ , entonces  $\pi^{-1}(Z)$  es *E-invariante*. Es decir, para cada  $x, y \in X$ , si  $xEy$  y  $x \in \pi^{-1}(Z)$ , entonces  $y \in \pi^{-1}(Z)$ .

*Demostración.* Si  $xEy$ , entonces  $\pi(x) = [x]_E = [y]_E = \pi(y)$ . Se sigue que,  $y \in \pi^{-1}(Z)$ . ■

*Observación.*  $\Sigma/E = \{\pi(B) \subseteq X/E \mid B \in \Sigma \text{ y } B \text{ es } E\text{-invariante}\}$ .

*Demostración.* Para todo  $Z \in \Sigma/E$ , se cumple que  $Z = \pi(\pi^{-1}(Z))$ . Por otro lado, si  $y \in \pi^{-1}(\pi(B))$  para algún  $B \in \Sigma$  que es  $E$ -invariante, entonces  $[y]_E = [x]_E$  para algún  $x \in B$ . Como  $B$  es  $E$ -invariante,  $y \in B$ . Por lo tanto  $\pi^{-1}(\pi(B)) = B$ , de donde  $\pi(B) \in \Sigma/E$ . ■

*Observación.* Sea  $X$  es un espacio topológico con  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{B}(X)$ . Consideremos a  $X/E$  con la topología cociente y a  $\mathcal{B}(X/E)$  la correspondiente  $\sigma$ -álgebra. Entonces  $\mathcal{B}(X/E) \subseteq \mathcal{B}(X)/E$ .

*Demostración.* Si  $Z \in \mathcal{B}(X/E)$ , entonces como  $\pi$  es continua, en particular boreliana, tenemos que  $\pi^{-1}(Z) \in \mathcal{B}(X)$ . Por lo tanto,  $Z \in \mathcal{B}(X)/E$ . ■

## A.4. Teorema de Uniformización de Lusin-Novikov

Un resultado importante dentro de la Teoría Descriptiva de Conjuntos es el Teorema de Uniformización de Lusin-Novikov, el cual nos da condiciones para afirmar que la proyección de un conjunto boreliano es boreliano.

**Teorema A.4.1** (Lusin-Novikov). *Sean  $X, Y$  espacios estándar de Borel y  $P \subseteq X \times Y$  conjunto boreliano. Si para cada  $x \in X$ , el conjunto  $P_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in P\}$  es contable, entonces existe un conjunto boreliano  $P^* \subseteq P$  tal que para cada  $x \in X$ ,*

$$\exists y \in Y : P(x, y) \Leftrightarrow \exists! y : P^*(x, y).$$

*Más aún,  $\text{proj}_X(P) = \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in P\}$  es boreliano y  $P = \bigcup_{n \in \omega} P_n$  para algunos  $P_n$  que son gráficas de funciones borelianas.*

La demostración la dejamos a consulta en [Kec95].

La siguiente proposición será usada con frecuencia en nuestro texto, cuando necesitemos afirmar que la imagen de un conjunto boreliano bajo una función boreliana sigue siendo boreliana.

**Proposición A.4.1.** Sean  $X, Y$  espacios estándar de Borel y  $f : X \rightarrow Y$  función boreliana que es contable-a-uno, es decir tal que para cada  $y \in Y$ ,  $f^{-1}(\{y\})$  es contable. Entonces  $f(X)$  es boreliano y existe una función boreliana  $g : f(X) \rightarrow X$  tal que para cada  $y \in f(X)$ ,  $f(g(y)) = y$ .

## A.5. Funciones Computables en $2^\omega$

Podemos extender nuestra noción de computabilidad de funciones en  $\omega$ , a funciones de  $2^\omega$  como sigue.

**Definición A.5.1.** Sea  $z \in 2^\omega$ . Diremos que una función  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es  $z$ -computable, también que  $f$  es computable respecto al oráculo  $z$ , si y sólo si existe un programa  $P_e$  tal que para todo  $x \in 2^\omega$  y todo  $n \in \omega$ , se tiene que  $\Phi_e^{x \oplus z}(n) = f(x)(n)$ . Diremos que  $f$  es computable si y sólo si es  $\emptyset$ -computable.

Esta noción de computabilidad está íntimamente relacionada con la topología de conos en  $2^\omega$ , más precisamente con la continuidad de funciones en dicho espacio.

**Teorema A.5.1.** Una función  $f : 2^\omega \rightarrow 2^\omega$  es continua si y sólo si existe  $z \in 2^\omega$  tal que  $f$  es  $z$ -computable.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es continua. Definamos  $X = \{(\tau, \sigma) \in 2^{<\omega} \times 2^{<\omega} \mid f(N_\tau) \subseteq N_\sigma\}$ . Sean  $x \in 2^\omega$  y  $y = f(x)$ . Como  $f$  es continua en  $x$ , para cada  $n \in \omega$ , existe  $m \in \omega$ , tal que  $f(N_{x \upharpoonright m}) \subseteq N_{y \upharpoonright n}$ , es decir, tal que  $(x \upharpoonright m, y \upharpoonright n) \in X$ . Afirmamos que  $f$  es  $X$ -computable. Consideremos el programa  $P$  con oráculos  $X$  y  $x \in 2^\omega$  tal que en una entrada  $n$ , busca la primer pareja  $(\tau, \sigma) \in X$  tal que  $\tau \subseteq x$  y  $|\sigma| > n$ . Dicha pareja existe ya que  $(x \upharpoonright m, y \upharpoonright n) \in X$  para  $n$  suficientemente grande. Por último, de la propiedad de  $X$ , se tiene que  $(f(x))(n) = \sigma(n)$ . Luego, pedimos que el programa  $P$  se detenga, devolviendo  $\sigma(n)$ .

Supongamos que  $f$  es  $z$ -computable para algún  $z \in 2^\omega$  y sea  $P_e$  el programa con oráculo  $z$  que lo verifica. Tomemos  $x \in 2^\omega$  y probemos que  $f$  es continua en  $x$ . Entonces para cada  $m \in \omega$ ,  $P_e^{x \oplus z}(m) \downarrow$ . Sean  $y = f(x)$  y  $n \in \omega$ . Por el Principio del Uso, para cada  $k < n$ , existe  $m_k \in \omega$  tal que para cada  $w, v \in 2^\omega$  si  $(x \oplus z) \upharpoonright m_k = (w \oplus v) \upharpoonright m_k$  entonces  $\Phi_e^{x \oplus z}(k) = \Phi_e^{w \oplus v}(k)$ . Por consiguiente,  $y(k) = (f(x))(k) = (f(w))(k)$ . Sea  $m = \max\{m_k \mid k < n\}$ . Tomemos  $w \in N_{x \upharpoonright m}$ . En particular,  $(x \oplus z) \upharpoonright m = (w \oplus z) \upharpoonright m$ . Por lo cual, para cada  $k < n$ , se tiene  $(x \oplus z) \upharpoonright m_k = (w \oplus z) \upharpoonright m_k$ . Así,  $y(k) = (f(w))(k)$ . De donde,  $y \upharpoonright n = f(w) \upharpoonright n$ . Luego,  $f(w) \in N_{y \upharpoonright n}$ . Concluimos que  $f(N_{x \upharpoonright m}) \subseteq N_{y \upharpoonright n}$ . Por lo tanto,  $f$  es continua en  $x$ . ■

## A.6. Árboles

En este apartado repasamos algunos resultados sobre árboles que utilizaremos en el texto.

**Definición A.6.1** (Árbol). Sea  $A$  un conjunto.

- (i) Un conjunto  $T \subseteq A^{<\omega}$  es un *árbol en  $A$*  si para cualesquiera  $t \in T$  y  $s \in A^{<\omega}$ ,  $s \subseteq t$  implica que  $s \in T$ . Cuando el conjunto  $A$  se entiende del contexto,

únicamente diremos que  $T$  es un *árbol*. También diremos que un elemento  $t \in T$  es un *nodo* de  $T$ .

- (ii) Si  $T$  es un árbol y  $x \in A^\omega$ , diremos que  $x$  es una *rama infinita* de  $T$  si para cada  $n \in \omega$ ,  $x \upharpoonright n \in T$ . Denotamos por  $[T]$  al conjunto de ramas infinitas del árbol  $T$ , es decir

$$[T] = \{x \in A^\omega \mid \forall n \in \omega : x \upharpoonright n \in T\}.$$

Si  $A$  es un conjunto, el conjunto  $A^{<\omega}$  siempre será un árbol que satisface  $[A^{<\omega}] = A^\omega$ . Si abreviamos  $2 = \{0, 1\}$ , un ejemplo particular de árbol es  $2^{<\omega}$ , y es tal que  $[2^{<\omega}] = 2^\omega$ .

**Definición A.6.2** (Función Monótona). Sean  $A, B$  conjuntos,  $S \subseteq A^{<\omega}$  y  $T \subseteq B^{<\omega}$  árboles.

- (i) Diremos que una función  $\varphi : S \rightarrow T$  es *monótona* si para cada  $s, t \in S$ , si  $s \subseteq t$  entonces  $\varphi(s) \subseteq \varphi(t)$ .
- (ii) Si  $\varphi : S \rightarrow T$  es una función monótona, definimos

$$D(\varphi) = \{x \in [S] \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi(x \upharpoonright n)| = \infty\}.$$

Además, definimos la función  $\varphi^* : D(\varphi) \rightarrow [T]$  tal que

$$\varphi^*(x) = \bigcup_{n \in \omega} \varphi(x \upharpoonright n).$$

En la definición previa,  $\varphi^*$  está bien definida ya que  $\varphi$  es monótona. Además,  $\varphi^*(x) \in [T]$  ya que  $x \in D(\varphi)$ , luego  $\varphi^*(x) \in A^\omega$ ; como  $T$  es un árbol y  $\varphi$  tiene codominio  $T$ , entonces  $\varphi^*(x) \upharpoonright k \in T$  para todo  $k \in \omega$ .

**Proposición A.6.1.** Sean  $S, T \subseteq 2^{<\omega}$  árboles y  $\varphi : S \rightarrow T$  una función monótona, entonces  $D(\varphi)$  es un conjunto  $G_\delta$  en  $[S]$ .

*Demostración.* Sea  $n \in \omega$ . Afirmamos que

$$U_n = \{x \in [S] \mid \exists m \in \omega : |\varphi(x \upharpoonright m)| \geq n\}$$

es abierto en  $[S]$ . Sean  $x \in U_n$  y  $m \in \omega$  tal que  $|\varphi(x \upharpoonright m)| \geq n$ . Tomemos  $y \in N_{x \upharpoonright m} \cap [S]$ , luego  $|\varphi(y \upharpoonright m)| = |\varphi(x \upharpoonright m)| \geq n$ . Por lo tanto,  $y \in U_n$ . Así,  $N_{x \upharpoonright m} \cap [S] \subseteq U_n$ . Concluimos que  $U_n$  es abierto en  $[S]$ .

De la definición de  $D(\varphi)$ , para todo  $x \in [S]$ ,

$$x \in D(\varphi) \Leftrightarrow \forall n \in \omega : \exists m \in \omega : |\varphi(x \upharpoonright m)| \geq n \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n \in \omega} U_n.$$

Luego,  $D(\varphi) = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ , de donde concluimos que  $D(\varphi)$  es  $G_\delta$  en  $[S]$ . ■

**Proposición A.6.2.** Sean  $S, T \subseteq 2^{<\omega}$  árboles y  $\varphi : S \rightarrow T$  una función monótona tal que para cada  $s \in S$ , se cumple que  $|\varphi(s)| = |s|$ . Entonces,  $d(\varphi^*(x), \varphi^*(y)) \leq d(x, y)$  para cada  $x, y \in D(\varphi)$ .

*Demostración.* Sean  $x, y \in D(\varphi)$  tales que  $\varphi^*(x) \neq \varphi^*(y)$ . Sean  $n, m$  los menores naturales tales que  $(\varphi^*(x))(n) \neq (\varphi^*(y))(n)$  y  $x(m) \neq y(m)$ , respectivamente. Si  $n < m$  entonces  $x \upharpoonright n+1 = y \upharpoonright n+1$ , luego  $\varphi(x \upharpoonright n+1) = \varphi(y \upharpoonright n+1)$ . Como  $|\varphi(x \upharpoonright k)| = l$  para cada  $k \leq n$ , de la definición de  $\varphi^*$ , tenemos que  $(\varphi^*(x))(n) = (\varphi(x \upharpoonright n+1))(n)$ , y de manera similar para  $y$ . Por lo tanto,  $(\varphi^*(x))(n) = (\varphi^*(y))(n)$ , la cual es una contradicción. Por lo tanto,  $m \leq n$ . De lo cual se sigue que  $d(\varphi^*(x), \varphi^*(y)) \leq d(x, y)$ . ■

Nos interesan en particular los árboles cuyos nodos siempre se pueden extender a nodos más grandes.

**Definición A.6.3** (Árbol Bien Podado). Sea  $A$  un conjunto. Diremos que un árbol  $T$  sobre  $A$  es *bien podado* si para cada  $t \in T$ , existe  $s \in T$  tal que  $s \supsetneq t$ .

Una propiedad de los árboles bien podados es la siguiente.

**Proposición A.6.3.** Sea  $A$  un conjunto bien ordenado. Si  $T$  es un árbol bien podado en  $A$ , entonces  $[T] \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Construyamos recursivamente una sucesión de elementos  $\{t_n \in A^{<\omega} \mid n \in \omega\} \subseteq T$  como sigue: sea  $t_0 = \emptyset \in T$ ; supongamos que hemos definido  $t_n \in T$ , definimos  $t_{n+1}$  como el menor  $s \in T$ , respecto al orden lexicográfico en  $A^{<\omega}$ , tal que  $s \supsetneq t_n$ . Sea  $x = \bigcup_{n \in \omega} t_n$ . Como  $T$  es un árbol,  $x \upharpoonright n \in T$  para cada  $n \in \omega$ . Por lo tanto,  $x \in [T]$ . Concluimos que  $[T] \neq \emptyset$ . ■

Recordemos que dos elementos  $s, t \in A^{<\omega}$  son compatibles si  $s \subseteq t$  ó  $t \subseteq s$ .

**Definición A.6.4** (Árbol Perfecto). Sea  $A$  un conjunto. Un árbol  $T \subseteq A^{<\omega}$  es *perfecto* si para cada  $t \in T$ , existen  $u, v \in T$  incompatibles tales que  $t \subseteq u$  y  $t \subseteq v$ .

En particular, un árbol perfecto es bien podado. De donde, obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario A.6.1.** Sea  $A$  un conjunto bien ordenado. Si  $T$  es un árbol perfecto en  $A$ , entonces  $[T] \neq \emptyset$ .

Una propiedad que utilizaremos es la siguiente.

**Proposición A.6.4.** Si  $T \subseteq 2^{<\omega}$  es un árbol perfecto, entonces  $[T]$  es compacto, y por lo tanto cerrado en  $2^\omega$ .

**Proposición A.6.5.** Sean  $A, B$  conjuntos bien ordenados y  $S, T$  árboles perfectos en  $A$  y  $B$  respectivamente. Si  $f : [S] \rightarrow [T]$  es una función continua, entonces existe una función monótona  $\varphi : S \rightarrow T$  tal que  $f = \varphi^*$ .

*Demostración.* Definamos la función  $\varphi$  como sigue: sea  $s \in S$ , definimos

$$\varphi(s) = \underset{\text{lex}}{\text{máx}}\{u \in T \mid |u| \leq |s| \wedge f(N_s \cap [S]) \subseteq N_u\}.$$

Notemos que  $\varphi(s)$  está bien definido ya que, al menos,  $\emptyset$  satisface la condición del conjunto. Como  $S$  es perfecto, tenemos también que  $N_s \cap [S] \neq \emptyset$ . Sean  $s, s' \in S$  tales que  $s \subseteq s'$ , entonces  $|s| \leq |s'|$  y  $N_{s'} \subseteq N_s$ . Así,  $|\varphi(s)| \leq |s'|$  y  $f(N_{s'} \cap [S]) \subseteq N_{\varphi(s)}$ . De la definición de  $\varphi(s')$  se tiene que  $\varphi(s) \subseteq \varphi(s')$ . Por lo tanto,  $\varphi$  es monótona.

Afirmamos que  $f = \varphi^*$ . Demostremos que los dominios de ambas funciones coinciden, es decir que  $[S] = D(\varphi)$ , de donde es suficiente probar que  $[S] \subseteq D(\varphi)$ . Consideremos  $x \in [S]$ , entonces de la continuidad de  $f$ , para cada  $N \in \omega$ , existe  $m \geq N$  tal que  $f(N_{x \upharpoonright m} \cap [S]) \subseteq N_{f(x) \upharpoonright N}$ . Por la definición de  $\varphi(x \upharpoonright m)$ , tenemos que  $f(x) \upharpoonright N \subseteq \varphi(x \upharpoonright m)$ . Como  $f(x) \in [T]$ , de esto último, tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi(x \upharpoonright n)| = \infty$ , es decir que  $x \in D(\varphi)$ . Además, también obtenemos que  $f(x) = \varphi^*(x)$ . Por lo tanto,  $f = \varphi^*$ . ■



# Apéndice B

## Recursión Transfinita

En este apartado expondremos brevemente un par de herramientas que nos facilitarán la construcción de funciones computables de forma efectiva. Para mayores detalles de los resultados aquí presentados, consulte [Mon22].

### B.1. Recursión Transfinita

Es conocido el método de demostración por inducción para probar que una propiedad se satisface en los naturales. Enseguida extendemos esta idea a buenos órdenes.

**Teorema B.1.1** (Principio de Inducción sobre Buenos Órdenes). *Sean  $(\alpha, \leq_\alpha)$  un buen orden e  $I \subseteq \alpha$  con la propiedad de que para todo  $a \in \alpha$ , si  $\alpha_{<a} \subseteq I$  implica  $a \in I$ . Entonces  $I = \alpha$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $I \neq \alpha$  y sea  $a = \text{mín } \alpha \setminus I$ . Entonces para todo  $b <_\alpha a$  se cumple que  $b \in I$ , por lo tanto  $\alpha_a \subseteq I$ , luego  $a \in I$ , la cual es una contradicción. Por lo tanto,  $I = \alpha$ . ■

El siguiente resultado es una versión efectiva del proceso de construcción de funciones por recursión, el cual se utiliza para definir una función en un nuevo valor y permite utilizar valores anteriores en la definición. Si la forma de obtener este nuevo valor es computable, podemos asegurar que la función que obtendremos también será computable.

**Teorema B.1.2** (Recursión Transfinita Efectiva). *Sea  $\alpha$  un buen orden computable. Sea  $\Psi : \omega \times \omega \rightarrow \omega$  una función parcialmente computable tal que para cualesquiera  $a \in \alpha$ ,  $i \in \omega$ , si  $\text{dom } \Phi_i = \alpha_{<a}$  entonces  $(a, i) \in \text{dom } \Psi$ . Entonces existe una función parcialmente computable  $\Phi_e$  tal que  $\text{dom } \Phi_e = \alpha$  y para todo  $a \in \alpha$*

$$\Phi_e(a) = \Psi(a, e \upharpoonright_{\alpha_{<a}})$$

donde

$$\Phi_{e \upharpoonright_{\alpha < a}}(y) = \begin{cases} \Phi_e(y) & \text{si } y \in \alpha \text{ y } y <_\alpha a \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

*Demostración.* Por el Teorema de la Recursión, existe  $e \in \omega$  tal que para todo  $a \in \alpha$ ,  $\Phi_e(a) = \Psi(a, e \upharpoonright_{\alpha < a})$ , y si  $a \notin \alpha$ , entonces  $\Phi_e(a)$  permanece indefinida. Afirmamos que  $\text{dom } \Phi_e = \alpha$ . Supongamos lo contrario y sea  $b \in \alpha$  el menor elemento tal que  $\Phi_e(b)$  está indefinida. Por lo tanto,  $\text{dom } \Phi_{e \upharpoonright_{\alpha < b}} = \alpha < b$ . De donde,  $\Psi(b, e \upharpoonright_{\alpha < b})$  está definida, por lo que  $\Phi_e(b)$  también lo está, lo cual es una contradicción. Concluimos que  $\text{dom } \Phi_e = \alpha$ . ■

# Apéndice C

## Axiomas

En este apartado exponemos los axiomas que son utilizados en este trabajo. También, mostramos algunas equivalencias y consecuencias de dichos enunciados. En todos los casos omitimos las pruebas de dichos resultados, ya que desarrollarlas no es el propósito de este trabajo. Para obtener más detalles, consulte [[Jec02](#)] y [[Kec95](#)].

### C.1. Axiomas de ZFC

**Existencia.**

$$\exists x(x = x).$$

**Extensionalidad.**

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y).$$

**Fundación ó Regularidad.**

$$\forall x (\exists y (y \in x) \Rightarrow \exists y (y \in x) \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)).$$

**Esquema de comprensión.** Para toda fórmula bien formada  $\varphi$  con variables libres de entre  $x, z, \dots, w_1, \dots, w_n$ ,

$$\forall z \forall w_1, \dots, w_n \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge \varphi).$$

**Par**

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z).$$

**Union**

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in A).$$

**Esquema de Reemplazo**

Para cada fórmula bien formada  $\varphi$  con variables libres de entre  $x, y, A, w_1, \dots, w_n$ ,

$$\forall A \forall w_1, \dots, w_n (\forall x \in A \exists! y \varphi \Rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \varphi).$$

**Infinitud.**

$$\exists x (0 \in x \wedge \forall y \in x (S(y) \in x)).$$

**Potencia.**

$$\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \Rightarrow z \in y).$$

**Elección.**

$$\forall x (x \neq 0 \Rightarrow \exists y (y \text{ es función selectora de } x))$$

Denotamos por **ZFC** a la teoría de primer orden que acepta todos los axiomas anteriores y **ZF** la que tiene a todos excepto el axioma de elección.

## C.2. Axioma de Elecciones Dependientes

**Axioma de Elecciones Dependientes.** Para todo conjunto  $X$  y toda relación binaria total  $R$  sobre  $X$  existe una sucesión  $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subseteq X$  tal que  $x_n R x_{n+1}$  para todo  $n \in \omega$ .

Denotamos por **DC** al Axioma de Elecciones Dependientes.

Algunas equivalencias de este axioma son las siguientes:

**Teorema C.2.1.** *Las siguientes son equivalentes:*

- (i) *Axioma de Elecciones Dependientes.*
- (ii) *Si  $T$  es un árbol bien podado y de altura  $\omega$ , entonces  $T$  tiene una rama; i.e.  $[T] \neq \emptyset$ .*
- (iii) *Si  $(X, d)$  es un espacio métrico completo y  $\{D_n\}_{n \in \omega}$  es una familia de densos y abiertos de  $X$  entonces  $\bigcap_{n \in \omega} D_n$  es denso.*

## C.3. Axioma de Determinación

Comencemos esta sección definiendo un juego infinito.

**Definición C.3.1** (Juego Infinito). Sean  $A$  un conjunto y  $X \subseteq A^\omega$  un conjunto de sucesiones de elementos de  $A$ . Asociamos a los conjuntos  $A$  y  $X$  el siguiente *juego infinito*, denotado por  $G(A, X)$ :

$$\begin{array}{cccc} \text{I} & a_0 & & a_2 & & \dots \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \text{II} & & a_1 & & a_3 & \end{array}$$

Éste se interpreta como un juego entre dos jugadores I y II tal que el jugador I comienza eligiendo (jugando) un elemento  $a_0 \in A$ , posteriormente el jugador II elige (juega) un elemento  $a_1 \in A$ , el jugador I continúa con  $a_2 \in A$ , y así sucesivamente.

Diremos que el jugador I *gana la partida* si y sólo si la sucesión  $(a_n)_{n=0}^\infty \in X$ , en otro caso diremos que el jugador II *gana la partida*. A dicha sucesión la consideramos como *una partida del juego*. Cuando el conjunto  $A$  sea claro, simplemente denotamos a este juego por  $G(X)$ .

Con frecuencia, daremos de manera informal una descripción de la condición para que el jugador I gane. De esta forma estaremos indicando al conjunto  $X$  de manera informal.

**Definición C.3.2** (Estrategia para un jugador). Sean  $A$  conjunto y  $X \subseteq A^\omega$ . Sea  $G(A, X)$  un juego infinito. Una *estrategia* es una función  $\varphi : A^{<\mathbb{N}} \rightarrow A$ .

Diremos que el jugador I *juega según la estrategia*  $\varphi$  si para cualquier sucesión  $(y_n)_{n=0}^\infty \in A^\omega$ , la partida del juego es  $x * y := (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots)$  donde  $x = (x_n)_{n=1}^\infty$  satisface que:

- (i)  $x_0 = \varphi(\emptyset)$
- (ii)  $x_{i+1} = \varphi((y_0, y_1, \dots, y_i))$

La idea de que el jugador I juegue según  $\varphi$  es que dicha estrategia dicta las acciones que debe tomar I durante una partida del juego  $G(A, X)$ .

Similarmente, podemos decir cuando el jugador II juega según la estrategia  $\varphi$ . En particular, nos interesa saber cuando una estrategia puede ayudar a un jugador a ganar la partida.

**Definición C.3.3** (Estrategia ganadora). Dado un juego infinito  $G(A, X)$ , una estrategia  $\varphi$  para I (respectivamente II) es *ganadora* si y sólo si siempre que I (II) juega conforme se lo dicta  $\varphi$ , I (II) gana.

De entre todos los juegos posibles, distinguiremos de aquellos en los que o bien el jugador I o el jugador II tienen alguno una estrategia ganadora.

**Definición C.3.4** (Juego determinado). Un juego infinito  $G(A, X)$  es *determinado* si y sólo si alguno de los jugadores I ó II tiene una estrategia ganadora.

Un resultado conocido es que bajo el Axioma de Elección, existe un juego  $G(X)$  no es determinado. Si queremos que todos nuestros juegos sean determinados necesitamos un supuesto adicional.

**Teorema C.3.1 (ZFC).** *Existe un conjunto  $X \subseteq \omega^\omega$  tal que  $G(X)$  no está determinado.*

Entonces, ¿qué características debe tener  $X$  para ser determinado? Martin demostró que los conjuntos borelianos es lo más a lo que podemos aspirar asumiendo el Axioma de Elección.

**Teorema C.3.2 (Martin, ZFC).** *Para todo conjunto boreliano  $X \subseteq \omega^\omega$ ,  $G(X)$  está determinado.*

**Axioma de Determinación (AD).** Para todo conjunto  $X \subseteq \omega^\omega$ , el juego  $G(X)$  es determinado.

Denotamos por **AD** al Axioma de Determinación. Notemos que **AD** no es compatible con el Axioma de Elección. Por ello, cuando utilicemos a **AD**, en realidad usaremos **DC** como una forma más débil de elección.

A la teoría de primer orden cuyos axiomas son **ZF**, **DC** y **AD**, lo denotamos por **ZF+AD+DC**.

El modelo  $L(\mathbb{R})$  interno más pequeño de **ZF** que contiene a todos los ordinales y a  $\mathbb{R}$ . Dicho modelo satisface el axioma **DC**. Un resultado de Martin, Steel y Woodin, establece que bajo hipótesis de cardinales grandes,  $L(\mathbb{R})$  también satisface **AD**. Para conocer más de este modelo, consultar [Kec85].

**Teorema C.3.3 (Martin-Steel-Woodin).** *Si existe una infinidad de cardinales de Woodin y un cardinal medible mayor a todos ellos, entonces el Axioma de Determinación se satisface en  $L(\mathbb{R})$ .*

Un resultado más debido a Woodin es el siguiente.

**Teorema C.3.4 (Woodin).** *Las siguientes son equiconsistentes:*

- (i) **ZFC** + “existe una infinidad de cardinales de Woodin”.
- (ii) **ZF+AD**.

# Bibliografía

- [CL20] A. E. Caicedo y B. Löw. «The fourteen Victoria Delfino problems and their status in the year 2020». En: *Large Cardinals, Determinacy and Other Topics: The Cabal Seminar, Volume IV*. Ed. por A. S. Kechris, B. Löwe y J. R. Steel. Vol. 4. Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, 2020, págs. 258-260.
- [Cor21] A. Nakid Cordero. «Martin's Conjecture». Tesina de Maestría. Universidad Nacional Autónoma de México, 2021.
- [Dav58] M. Davis. *Computability and Unsolvability*. 1.<sup>a</sup> ed. Mc-Graw Hill Company Book Inc, 1958.
- [DJK94] R. Dougherty, S. Jackson y A. S. Kechris. «The Structure of Hyperfinite Borel Equivalence Relations». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 341.1 (1994), págs. 193-225.
- [FM77] J. Feldman y C. C. Moore. «Ergodic Equivalence Relations, Cohomology and Von Neumann Algebras I». En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 234 (1977), págs. 289-324.
- [Hjo99] G. Hjorth. *Classification and Orbit Equivalence Relations*. Vol. 75. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 1999.
- [HK05] G. Hjorth y A. S. Kechris. «Rigidity theorems for actions of product groups and countable Borel equivalence relations». En: *Memoirs of the American Mathematical Society* 177.833 (2005), págs. 1-109.
- [HKL90] L. A. Harrington, A. S. Kechris y A. Louveau. «A Glimm-Effros dichotomy for Borel equivalence relations». En: *J. Amer. Math. Soc.* 3.4 (1990), págs. 903-928.
- [Jec02] T. Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. 3.<sup>a</sup> ed. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, 2002.
- [JKL02] S. Jackson, A. S. Kechris y A. Louveau. «Countable Borel equivalence relations». En: *J. Math. Log.* 2.1 (2002), págs. 1-80.
- [Kan08] V. Kanovei. *Borel Equivalence Relations: Structure and Classification*. Vol. 44. University Lecture Series. American Mathematical Society, 2008.

- [Kec21] A. S. Kechris. «The theory of countable Borel equivalence relations». Recuperado de <http://www.math.caltech.edu/~kechris/papers/lectures%20on%20CBER07book.pdf>. 2021.
- [Kec85] A. S. Kechris. «Determinacy and the Structure of  $L(R)$ ». En: *Recursion Theory. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 42 (1985), págs. 271-283.
- [Kec92] A. S. Kechris. «The structure of Borel equivalence relations in Polish spaces». En: *Set theory of the continuum*. Mathematical Sciences Research Institute Publications 26 (1992), págs. 89-102.
- [Kec95] A. S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. 1.<sup>a</sup> ed. Vol. 156. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995.
- [KM78] A. S. Kechris e Y. N. Moschovakis. *Cabal Seminar 76–77. Proceedings, Caltech-UCLA Logic Seminar 1976–77*. 1.<sup>a</sup> ed. Vol. 689. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 1978, págs. 279-282.
- [Lut21] P. Lutz. «Results on Martin’s Conjecture». Ph.D. Thesis. University of California, Berkeley, 2021.
- [M I18] F. Hernández Hernández y M. Ibarra Contreras. *Introducción a la teoría de la medida*. 1.<sup>a</sup> ed. Textos. Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, 2018.
- [Mon19] A. Montalbán. «Martin’s conjecture: A classification of the naturally occurring Turing degrees». En: *Notices Amer. Math. Soc.* 66.8 (2019), págs. 1209-1215.
- [Mon22] A. Montalbán. «Computable Structure Theory: Beyond the arithmetic». Recuperado de [https://math.berkeley.edu/%7Eantonio/CSTpart2\\_DRAFT.pdf](https://math.berkeley.edu/%7Eantonio/CSTpart2_DRAFT.pdf). 2022.
- [MSS16] A. Marks, T. A. Slaman y J. R. Steel. «Martin’s Conjecture, Arithmetic Equivalence, and Countable Borel Equivalence Relations». En: *Ordinal Definability and Recursion Theory: The Cabal Seminar*. Lecture Notes in Logic III (2016), págs. 493-520.
- [Rog67] H. Rogers. *Theory of recursive functions and effective computability*. 1.<sup>a</sup> ed. McGraw-Hill series in higher mathematics. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [Sac17] G. E. Sacks. *Higher Recursion Theory*. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, 2017.
- [Sil80] J. H. Silver. «Counting the number of equivalence classes of Borel and coanalytic equivalence relations». En: *Ann. Math. Logic* 18 (1980), págs. 1-28.
- [Soa87] R. I. Soare. *Recursively Enumerable Sets and Degrees*. 1.<sup>a</sup> ed. Springer-Verlag, 1987.

- 
- [SS88] T. A. Slaman y J. R. Steel. «Definable functions on degrees». En: *Cabal Seminar* (1988), págs. 81-85.
- [Ste75] J. R. Steel. «Descending sequences of degrees». En: *The Journal of Symbolic Logic* 40.1 (1975), págs. 59-61.
- [Ste82] J. R. Steel. «A classification of jump operators». En: *The Journal of Symbolic Logic* 47.2 (1982), págs. 347-358.
- [Tho09] S. Thomas. «Martin's conjecture and strong ergodicity». En: *Archive for Mathematical Logic* 48.8 (2009), págs. 749-759.
- [Tho12] S. Thomas. «Universal Borel actions of countable groups». En: *Groups, Geometry, and Dynamics* 6 (2012), págs. 389-407.



# Índice alfabético

- $A'$ , 6
- $E(G, X)$ , 49
- $E_G^X$ , 49
- $E_\infty$ , 59
- $W_e^A$ , 4
- $X^{(\alpha)}$ , 25
- $\Delta_n^{0,A}$ , 15
- $\Phi_e^{A,n}$ , 3
- $\Phi_e^A(x) \downarrow$ , 4
- $\Sigma_n^{0,A}$ , 15
- ZF**, 84
- $\equiv_T^\nabla$ , 32
- $\leq_B$ , 52
- $\leq_B^w$ , 60
- $\leq_T^\nabla$ , 32
- $\omega_1^{CK}(X)$ , 21
- AD**, 86
- DC**, 84
  
- algoritmo, 1
  
- Borel-reducible, 52
  
- computable enumerable, 16
- conjunto cofinal, 35
- conjunto puntuado, 35
- conjunto Turing-invariante, 30
- cono de Turing, 27
- constante en un cono, 32
- creciente en un cono, 32
  
- débilmente borel-reducible, 60
- débilmente universal, 62
  
- efectivamente calculable, 2
- espacio estándar de Borel, 73
- espacio polaco, 71
  
- función boreliana, 74
- función Turing-invariante, 30
  
- grados de Turing, 12
  
- homomorfismo, 50
  
- jerarquía de salto, 22
  
- medida de Martin, 28
  
- ordinal computable, 20
  
- parcialmente computable, 2
  
- recursión transfinita efectiva, 81
- reducción, 50
- relación de equivalencia boreliana
  - contable, 47
- relación hiparfinita, 56
- relación suave, 54
- relación universal, 59
  
- salto de Turing transfinito, 25
  
- Turing-equivalencia, 11
- Turing-reducibilidad, 11
  
- uniformemente Turing-invariante, 34
  
- árbol perfecto, 78
- árbol puntuado, 35