



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"ASPECTOS DE LA EVOLUCIÓN TEMPORAL DE  
SISTEMAS COMPLEJOS UNIDIMENSIONALES"**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS  
(FÍSICA)**

PRESENTA

**ISAÍAS VALLEJO FABILA**

DIRECTORES DE TESIS

**EDUARDO JONATHAN TORRES HERRERA**

**GERMÁN AURELIO LUNA ACOSTA**

No. de CVU: 784773

**MARZO DE 2023**

# Agradecimientos

A mis padres que siempre han sido el motor que impulsa mis sueños y esperanzas, quienes me han brindado palabras de aliento motivándome a ir cada vez más lejos.

A mis hermanos que han sido parte importante en mi formación personal y profesional, les agradezco por respaldar cada una de mis decisiones y darme ánimos en todo momento.

A Laura. Su amor, presencia y palabras de aliento han sido de gran relevancia en la parte final de esta etapa de mi vida.

A mi asesor Eduardo Jonathan Torres Herrera. Sus consejos fueron piezas clave cuando las ideas no salían de mi pensamiento. Él formó parte importante de esta historia con los aportes profesionales que lo caracterizan. Gracias por su orientación y apoyo.

A mi coasesor Germán Luna por sus comentarios específicos que contribuyeron en gran medida en la realización de este proyecto. Gracias por compartir conmigo parte de sus conocimientos.

Al comité de seguimiento por sus comentarios certeros, en ellos estaban contenidas cosas que no habían pasado por mi cabeza y que reforzaron considerablemente mi entendimiento en diferentes etapas de este trabajo.

Al IFUAP y al CONACyT por la oportunidad que me brindaron para poder realizar mis estudios de posgrado.

EN MEMORIA DE MI ABUELO

No has muerto, solamente te has vuelto invisible.  
Sigues aquí, te veo al cerrar los ojos al anochecer  
y te agradezco todo lo que en vida hiciste por mi.

# Resumen

Mediante el empleo de conceptos y técnicas de la teoría de matrices aleatorias y de la teoría del caos cuántico estudiamos los efectos de los acoplamientos de largo alcance en el modelo de Anderson unidimensional. Esto es, analizamos cómo se ven afectadas las propiedades estáticas y dinámicas así como también las escalas temporales conocidas como *tiempo de Thouless* y *tiempo de relajación*. Dicho análisis se realiza en función del rango de los acoplamientos, el tamaño del sistema y la magnitud del desorden.

Por otro lado, el modelo de Heisenberg unidimensional con desorden es empleado para analizar la propiedad de autopromedio de ciertas cantidades de interés teórico y experimental. Además, estudiamos la conjetura Aurich-Steiner pretendiendo determinar el comportamiento caótico de dicho modelo y para esto el teorema del límite central resulta ser una piedra angular. Cabe mencionar que el desorden puede ser correlacionado o no correlacionado y esto da lugar al estudio de los efectos del desorden correlacionado en el contexto de localización de muchos cuerpos.

---

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducción</b>   | <b>6</b>  |
| <b>1. Efectos de acoplamientos de largo alcance en el modelo de Anderson unidimensional</b> | <b>10</b> |
| 1.1. Modelo de Anderson unidimensional . . . . .  | 11        |
| 1.2. Análisis de propiedades estáticas y dinámicas . . . . .                                | 12        |
| 1.2.1. Propiedades estáticas . . . . .  | 12        |
| 1.2.2. Propiedades dinámicas . . . . .  | 21        |
| <b>2. Autopromedio en sistemas unidimensionales de espín <math>1/2</math></b>               | <b>27</b> |
| 2.1. Modelo de Heisenberg unidimensional con desorden . . . . .                             | 28        |
| 2.2. Cantidades . . . . .   | 29        |
| 2.3. Análisis de resultados . . . . .   | 30        |
| 2.3.1. Estudio del autopromedio empleando la varianza relativa . . . . .                    | 30        |
| 2.3.2. Estudio del autopromedio empleando distribuciones . . . . .                          | 31        |
| <b>3. Manifestaciones del caos en la evolución temporal</b>                                 | <b>35</b> |
| 3.1. La conjetura Aurich-Steiner . . . . .  | 36        |
| 3.2. Análisis del teorema del límite central . . . . .                                      | 38        |
| 3.2.1. Rol del espectro energético . . . . .  | 38        |
| 3.2.2. Rol del estado inicial . . . . .   | 40        |
| 3.2.3. Análisis del CLT en distintas escalas temporales . . . . .                           | 43        |
| 3.2.4. Observables . . . . .  | 44        |

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4. Efectos del desorden correlacionado en el contexto de localización de muchos cuerpos</b> | <b>46</b> |
| 4.1. Análisis . . . . .  | 46        |
| 4.1.1. Propiedades estáticas . . . . .   | 47        |
| 4.1.2. Propiedades dinámicas . . . . .   | 48        |
| 4.1.3. Dependencia en el tamaño del sistema . . . . .  | 50        |
| <b>5. Conclusiones</b>   | <b>53</b> |
| <b>A. Publicaciones</b>  | <b>55</b> |

---

# Introducción

Un sistema complejo puede definirse como aquel cuyo comportamiento no se puede inferir a partir del comportamiento individual de sus componentes [1]. Típicamente estos sistemas se caracterizan por tener un gran número de grados de libertad. Los sistemas se pueden clasificar como cuánticos, clásicos, limpios, desordenados, integrables, etc. y para entender algunas de sus propiedades se han desarrollado modelos teóricos y métodos tanto analíticos como numéricos [2, 3]. Respecto a los modelos, aquellos que representan sistemas bidimensionales y tridimensionales son de gran interés en aplicaciones reales, sin embargo un tratamiento teórico para éstos es más complicado que el correspondiente a sistemas unidimensionales. Un par de ejemplos de restricciones para los estudios teóricos son el crecimiento exponencial del espacio de Hilbert en el caso de sistemas cuánticos de muchos cuerpos y la no integrabilidad. Estas limitaciones son comunes en una, dos y tres dimensiones pero a comparación de los otros dos, los sistemas unidimensionales presentan mayor tratabilidad teórica, ya sea de manera analítica o numérica, además pueden presentar propiedades interesantes y muchas veces únicas [4]. Lo anterior hace que el estudio de los sistemas unidimensionales vaya más allá de un interés meramente académico. Además, las propiedades de un sistema pueden dividirse en estáticas y dinámicas, las primeras han sido ampliamente estudiadas y se ha logrado un entendimiento casi completo de la física de los sistemas en equilibrio [5, 6], en cambio las propiedades dinámicas han sido menos estudiadas y en consecuencia poco se comprende respecto a las propiedades del sistema en tiempos que preceden al tiempo en que se alcanza el estado de equilibrio. En vista de lo anterior, el estudio de los sistemas fuera de equilibrio no requiere mucha justificación pues éstos se encuentran con facilidad en la naturaleza, así que cualquier avance en el entendimiento de la dinámica de un sistema tendrá impacto significativo en diversas áreas de investigación.

Por otra parte, la evolución temporal unitaria de sistemas cuánticos de muchas partículas es un área activa de investigación y sobre ella existen estudios tanto teóricos como experimentales. Algunos experimentos involucran iones confinados [7, 8], átomos superfríos [9] y resonancia magnética nuclear [10]. En dichos experimentos transcurre un tiempo largo antes de que sean relevantes los efectos del entorno sobre el sistema, lo cual permite estudiar la dinámica coherente durante mucho tiempo. En la parte teórica se han logrado muchos avances en el contexto de un *quench* cuántico (ver por ejemplo la referencia [11]): inicialmente el sistema se prepara en un estado determinado, posteriormente se produce una perturbación instantánea que saca del equilibrio al sistema y entonces inicia la evolución temporal. Un aspecto relevante en los estudios sobre la dinámica de los sistemas cuánticos es la determinación de las escalas temporales presentes en el proceso de relajación hacia el estado de equilibrio [12, 13]. Un ejemplo es la determinación del tiempo que transcurre antes de que se alcanza el estado de equilibrio, para lo cual hay bastantes resultados interesantes aunque contradictorios entre sí. Algunos de ellos sugieren que el equilibrio ocurre a tiempos pequeños mientras que otros indican que se requieren tiempos largos [12, 14–18]. En particular, en la Ref. [13] se estudiaron dos escalas temporales relevantes en el contexto de sistemas cuánticos con interacciones entre dos cuerpos: el *tiempo de Thouless* que se define como el tiempo necesario para que un estado inicial se expanda sobre todo el espacio de Hilbert y el *tiempo de relajación*, el cual indica que se ha alcanzado el equilibrio. En la Ref. [13] se mostró que estas escalas temporales presentan un comportamiento exponencial respecto al tamaño del sistema. Dicho estudio nos incita a cuestionar el efecto de los acoplamientos de largo alcance en estas escalas temporales para el modelo de Anderson unidimensional [6, 19]. Además de lo anterior, pretendemos saber cuáles son los efectos combinados del desorden y los acoplamientos en las propiedades estáticas y dinámicas del modelo.

Por otro lado, en los estudios sobre la evolución temporal de los sistemas cuánticos algunas preguntas comunes involucran la viabilidad de la termalización [20–24], la descripción de la dinámica [25–27] y el tiempo que transcurre hasta que se alcanza el equilibrio [13, 28], pero poco se ha explorado respecto al autopromedio [29–31]. Una pregunta relevante en el estudio de los sistemas desordenados consiste en saber si se cumple o no el autopromedio [32]. Se dice que una cantidad de un sistema desordenado es autopromediable cuando su varianza relativa decrece conforme aumenta el tamaño del sistema [33]. De esta manera,

cuando se satisface el autopromedio podemos disminuir el número de muestras empleadas en los análisis teóricos y experimentales. En vista de lo anterior, desarrollamos un estudio sobre las distribuciones de ciertas cantidades con la intención de comprender cómo es que su forma y demás propiedades dependen del tiempo, cantidades y modelos y si nos permiten determinar cuándo se cumple el autopromedio [33].

Por otra parte, en los sistemas clásicos caóticos, cuando se considera un par de condiciones iniciales suficientemente cercanas, las trayectorias en el espacio fase divergen exponencialmente y esta divergencia queda caracterizada por el exponente de Lyapunov, lo cual puede establecerse como definición del caos clásico [34, 35]. Lo anterior no se puede extrapolar al régimen cuántico debido a que el principio de incertidumbre de Heisenberg no permite definir el concepto de trayectoria en el espacio fase, entonces para definir el caos cuántico se ha optado por estudiar las propiedades estáticas y dinámicas de distintos sistemas cuánticos, de esta manera el análisis de la estadística de niveles energéticos ha mostrado que la repulsión entre niveles es una de las principales características del caos cuántico [35]. La teoría de matrices aleatorias (RMT por sus siglas en inglés) desempeña un papel relevante en dicho análisis, estas matrices fueron introducidas a la física por Wigner para entender los niveles energéticos de núcleos complejos, de esta manera los ensambles de RMT fueron empleados para modelar los hamiltonianos correspondientes a sistemas complejos [36–38]. En las aplicaciones a la física dichos ensambles se clasifican de acuerdo a las simetrías respecto a las rotaciones y a la inversión temporal. El *Ensamble Gaussiano Ortogonal (GOE)* esta formado por matrices hermitianas simétricas que presentan invarianza ante rotaciones e inversión temporal, el *Ensamble Gaussiano Unitario (GUE)* esta compuesto por matrices hermitianas complejas invariantes ante rotaciones y el *Ensamble Gaussiano Simpléctico (GSE)* esta formado por matrices hermitianas auto-duales (cuaterniones), las cuales son invariantes ante inversión temporal [39].

Ahora, la probabilidad de supervivencia es una cantidad de la cual se puede extraer bastante información sobre el sistema, ésta se define como la probabilidad de encontrar al sistema en su estado inicial en un tiempo posterior. Mediante el estudio de una versión normalizada de la amplitud de supervivencia (la cual denotamos con la letra  $S$ ) Aurich y Steiner establecieron una propuesta para identificar caos cuántico en la evolución temporal de un sistema cuántico [40]. Se enunció que dado un estado inicial extendido en la base de los estados propios del hamiltoniano que dicta la evolución, la distribución de los

valores de la función  $S(t)$  en una ventana de tiempos largos es universal en el caso en que la contraparte clásica del sistema es caótica y no es universal en el caso en que su contraparte clásica es integrable, en esta tesis nos referimos a lo anterior como *conjetura Aurich-Steiner*. Un aspecto relevante de esta conjetura es que el comportamiento universal de la distribución de los valores de  $S(t)$  en una ventana de tiempos largos se manifiesta al estudiar una sola muestra, lo cual es beneficioso para los estudios debido a que no es necesario realizar promedios y con esto se reduce el tiempo de cálculo. Cabe mencionar que esta conjetura se estableció en el contexto de billares cuánticos bidimensionales y tridimensionales, los cuales son sistemas sin interacciones debido a que se considera una sola partícula. Dado lo anterior, nos preguntamos sobre la validez de esta conjetura en el caso de sistemas cuánticos unidimensionales de muchos cuerpos que carecen de un análogo clásico y para dar respuesta a esta pregunta analizamos las condiciones bajo las cuales se satisface la conjetura empleando el modelo de Heisenberg unidimensional con desorden. Dentro de dichas condiciones se encuentra el cumplimiento del teorema del límite central, el cual a su vez depende del grado de correlaciones en el espectro energético, en las componentes del estado inicial y las posibles correlaciones entre ambos conjuntos. Lo anterior dió lugar a un estudio sobre los efectos del desorden correlacionado en el contexto de localización de muchos cuerpos, en dicho estudio se consideraron algunas propiedades estáticas y dinámicas del modelo antes mencionado.

Parte de este trabajo de tesis ha sido reportada en dos artículos: el estudio del autopromedio se encuentra en la Ref. [33] y el estudio de las correlaciones en el contexto de localización de muchos cuerpos en la Ref. [41]. Asimismo estamos trabajando en un par de manuscritos que serán enviados a revistas para su posible publicación. Este trabajo de tesis se encuentra estructurado de tal manera que en el Capítulo 1 se presenta el estudio de los efectos de acoplamiento de largo alcance en el modelo de Anderson unidimensional, en el Capítulo 2 el estudio del autopromedio, en el Capítulo 3 el análisis de la conjetura Aurich-Steiner, en el Capítulo 4 el estudio de las correlaciones en el contexto de localización de muchos cuerpos y finalmente en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones generales.

---

# Capítulo 1

## Efectos de acoplamientos de largo alcance en el modelo de Anderson unidimensional

El primer modelo teórico que se propuso para sentar las bases de una teoría mecánico-cuántica de los problemas de transporte fue el modelo de Anderson, el cual estaba destinado a representar la difusión de espines. Este modelo consiste en un conjunto de sitios distribuidos de manera regular o aleatoria en el espacio tridimensional (a lo que se conoce como *red*), en cada sitio hay una partícula con cierta energía y se supone que hay una matriz de interacción cuyos elementos transfieren a las partículas de un sitio a otro y ésta contiene un término de desorden, el cual puede estar asociado a la estructura del modelo [42]. La versión unidimensional de este modelo ha sido empleada en estudios de transporte electrónico y recientemente se han realizado estudios considerando acoplamientos de largo alcance como lo es el análisis del fenómeno conocido como *shielding*, en el cual la evolución temporal transcurre como si los acoplamientos de largo alcance no estuviesen presentes [43]. A continuación se muestran los estudios de los efectos de acoplamientos de largo alcance en las propiedades estáticas y dinámicas del modelo de Anderson unidimensional, asimismo se muestra el análisis de las escalas temporales *tiempo de Thouless* y *tiempo de relajación*.

## 1.1. Modelo de Anderson unidimensional

El modelo de Anderson unidimensional es empleado para analizar la propagación de una partícula a lo largo de una cadena de  $N$  sitios y es descrito por el hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^N \epsilon_n |n\rangle \langle n| - \nu \sum_{n=1}^{N-1} (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|), \quad (1.1)$$

donde  $|n\rangle$  representa el estado de una partícula en el sitio  $n$ ,  $\epsilon_n$  son las energías de sitio y éstas son números aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo  $[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}]$  ( $W$  se conoce como magnitud del desorden) y  $\nu$  es el parámetro de acoplamiento entre sitios adyacentes [6]. El primer término de este hamiltoniano puede considerarse como una energía potencial y el segundo como la energía cinética necesaria para que una partícula se propague entre sitios adyacentes, dicha propagación se interpreta como un tunelamiento. Dado que nos interesa analizar el efecto de los acoplamientos de largo alcance en las propiedades estáticas y dinámicas de este modelo consideramos la siguiente extensión del hamiltoniano (1.1)

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^N \epsilon_n |n\rangle \langle n| - \nu \sum_{n=1}^{N-1} (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|) - \gamma \sum_{n \neq m}^N \frac{|n\rangle \langle m|}{|n-m|^\alpha}. \quad (1.2)$$

El término que se añadió representa los acoplamientos de largo alcance, los cuales decaen en forma de ley de potencias respecto a la distancia entre los sitios. Los parámetros  $\gamma$  y  $\alpha$  determinan la magnitud y el rango de los acoplamientos respectivamente [43]. Notemos que cuando  $\alpha \rightarrow 0$  todos los sitios están acoplados y los acoplamientos quedan determinados por los parámetros  $\nu$  y  $\gamma$ , además si  $\alpha \rightarrow \infty$  o  $\gamma \rightarrow 0$  recuperamos el hamiltoniano (1.1). Como podemos observar, en el hamiltoniano (1.2) se encuentran cinco parámetros, entonces para simplificar nuestro análisis fijamos  $\nu = 1$  y  $\gamma = 1$  de tal manera que nuestro estudio es realizado en función del tamaño de la cadena  $N$ , la magnitud del desorden  $W$  y el rango de los acoplamientos  $\alpha$ .

En la Fig. 1.1 se muestra la representación gráfica del modelo, la partícula se representa por el círculo color rojo y ésta se puede propagar a lo largo de la cadena dependiendo de los valores de los parámetros  $\nu$  y  $\gamma$ . Si  $\gamma = 0$  la propagación se da solamente entre sitios adyacentes, lo cual corresponde al modelo descrito por el hamiltoniano (1.1).

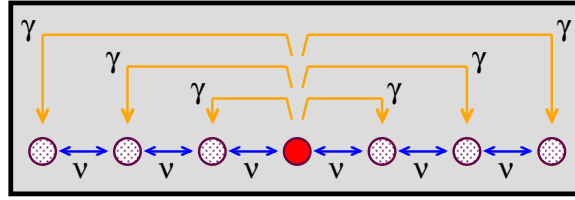


Figura 1.1: Representación gráfica del modelo de Anderson unidimensional con acoplamientos de largo alcance.

## 1.2. Análisis de propiedades estáticas y dinámicas

La caracterización de los sistemas cuánticos se puede llevar a cabo mediante el estudio de sus propiedades estáticas y dinámicas, las cuales pueden no ser independientes entre sí. En esta parte del trabajo de tesis analizamos el efecto de los acoplamientos de largo alcance en ambos tipos de propiedades y en un par de escalas temporales, además se muestra la relación entre algunas propiedades estáticas y dinámicas. Algunas cantidades analizadas ya han sido estudiadas en el caso del modelo de Anderson unidimensional [19], esto es, en el límite  $\alpha \rightarrow \infty$ . Asimismo se han reportado algunos resultados para el caso  $\alpha = 0$  en [43], lo cual nos permite verificar los resultados que hemos obtenido en estos casos límite.

### 1.2.1. Propiedades estáticas

El análisis de estas cantidades nos permite inferir algunos aspectos de la dinámica, esto reduce el tiempo de cálculo y da lugar a una rápida detección de determinados comportamientos del sistema, por ejemplo, el análisis de la distribución del espaciamiento entre niveles energéticos adyacentes permite determinar el comportamiento caótico ó integrable del sistema [44, 45], mientras que en la dinámica se tiene que esperar determinado tiempo para detectar la manifestación de dicho comportamiento [13].

#### Densidad de estados

La densidad de estados es un histograma de los niveles energéticos que indica cómo están distribuidos los estados propios del hamiltoniano de acuerdo a su energía [46]. Matemáticamente se define como

$$\rho(E) = \sum_{\beta=1}^N \delta(E - E_{\beta}), \quad (1.3)$$

donde  $E_{\beta}$  es la energía correspondiente al  $\beta$ -ésimo estado propio del sistema.

Los resultados del estudio de la densidad de estados se muestran en la Fig. 1.2, donde se mantienen fijos la magnitud del desorden  $W$  y el tamaño de la cadena  $N$ , indican la presencia de una brecha energética entre los primeros dos niveles para valores pequeños de  $\alpha$  (paneles (a)  $\alpha = 0$ , (b)  $\alpha = 1/3$  y (c)  $\alpha = 1$ ), la cual se vuelve cada vez más pequeña conforme aumenta el valor de este parámetro y cuando se tiene un valor suficientemente grande como en el panel (d)  $\alpha = 10$  ya no se manifiesta. La existencia de esta brecha ha sido reportada en [43], donde se muestra que para  $\alpha = 0$  el tamaño de la brecha es proporcional al tamaño de la cadena  $N$ , lo cual es consistente con el panel (a) de la Fig. 1.2. Ahora, si excluimos el nivel energético correspondiente al estado base podemos observar una transición entre distribuciones, de esta manera vamos de una distribución tipo  $\delta$  de Dirac cuando los acoplamientos son de largo alcance con  $\alpha = 0$  (ver panel (a)) y conforme disminuimos el rango de los acoplamientos encontramos distribuciones sesgadas a la izquierda (paneles (b) y (c)) hasta llegar a una distribución tipo  $U$  (panel (d)). Estos resultados indican que los estados se encuentran degenerados cuando los acoplamientos son de largo alcance  $\alpha = 0$  y conforme avanzamos hacia los acoplamientos de corto alcance  $\alpha = 10$  el intervalo de energía se extiende, es decir, las degeneraciones disminuyen. Para complementar este análisis se realizaron los cálculos correspondientes a la variación de la magnitud del desorden y del tamaño de la cadena encontrando resultados similares a los que se muestran en la Fig. 1.2, el cambio en el tamaño de la cadena modifica el tamaño la brecha (ver por ejemplo panel (a) donde la brecha es proporcional a  $N$ ) pero no influye en su manifestación. Es necesario comentar que en los resultados correspondientes a las cantidades analizadas en las siguientes secciones se considera el espectro energético completo, es decir, no excluimos la brecha energética pero en casos como el estudio de la varianza del número de niveles (más adelante se define esta cantidad) el procedimiento requiere descartar un porcentaje del espectro, *i.e.*, descartamos un porcentaje a la izquierda y un porcentaje a la derecha, de esta manera queda excluida la brecha energética. Finalmente, este estudio de la densidad de estados ha sido realizado como parte de la familiarización con el modelo.

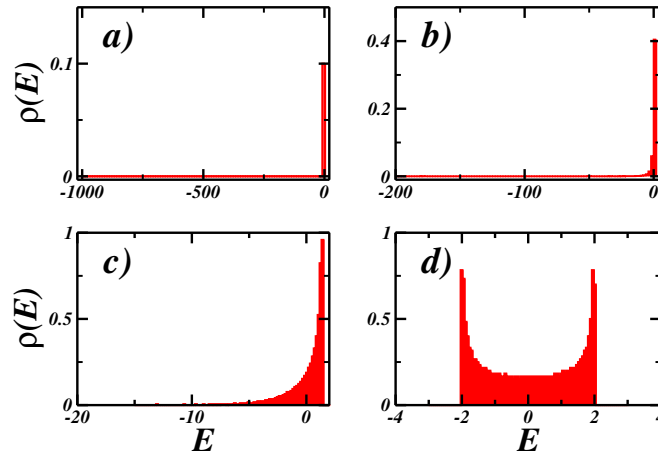


Figura 1.2: Densidad de estados, a)  $\alpha = 0$ , b)  $\alpha = 1/3$ , c)  $\alpha = 1$  y d)  $\alpha = 10$ . Se considera  $N = 1000$  y  $W = 0.02$ . La brecha energética no se ha excluido en los paneles a), b) y c) y se representa con la línea horizontal de color rojo. En el panel d) no hay brecha energética.

### Estadística de los niveles energéticos

Usualmente, cuando se tiene acceso al espectro energético, se estudia la estadística de niveles con la intención de determinar si el sistema cuántico en cuestión se encuentra en el régimen integrable o caótico y para esto se analiza la distribución del espaciamiento entre niveles energéticos adyacentes. En la literatura se encuentran dos conjeturas que fueron establecidas en el contexto de sistemas cuánticos con contraparte clásica: *Conjetura Berry-Tabor* [44] y *Conjetura Bohigas-Gianoni-Schmit* [45]. La primera nos dice que para sistemas con contraparte clásica integrable típicamente dicha distribución es de tipo Poisson, mientras que la segunda nos dice que para los sistemas con contraparte clásica caótica típicamente la distribución es similar a la de alguno de los ensambles de RMT y el ensamble correspondiente depende de las simetrías del sistema. El procedimiento para estudiar esta distribución involucra un desdoblamiento, con esto se remueven las peculiaridades del sistema quedándonos con los aspectos cuyo análisis puede ser contrastado con el correspondiente a los ensambles de RMT. El desdoblamiento consiste en descartar un porcentaje de niveles energéticos a ambos lados del espectro, realizar particiones de cierto número de niveles, calcular el espaciamiento medio en cada partición  $\Delta_l$  ( $l$  indica la partición con la que se está trabajando) y definir las variables  $\eta_n = \epsilon_n^l / \Delta_l$  ( $\epsilon_n^l$  es el  $n$ -ésimo nivel energético en la partición  $l$ ). Posteriormente, para la distribución, definimos los espaciamientos entre niveles energéticos desdoblados  $s_n = \eta_n - \eta_{n-1}$  y realizamos un

histograma de estas cantidades  $s_n$  [47]. En la Tabla 1.1 se muestran las expresiones teóricas correspondientes a esta distribución en el caso de una estadística tipo Poisson y la correspondiente a los ensambles de RMT.

| Ensamble     | Poisson  | GOE                                      | GUE  | GSE  |
|--------------|----------|--|--|--|
| Distribución | $e^{-s}$ | $\frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi s^2}{4}}$ | $2 \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 s^2 e^{-\frac{4s^2}{\pi}}$ | $\left(\frac{64}{9\pi}\right)^3 s^4 e^{-\frac{64s^2}{9\pi}}$ |

Tabla 1.1: Expresiones teóricas de la distribución del espaciamiento entre niveles energéticos adyacentes,  $P(s)$  [47]. El grado de correlación esta determinado por la potencia de  $s$  en el coeficiente que acompaña a las exponenciales, conforme aumenta el valor de la potencia aumenta grado de correlación.

La distribución  $P(s)$  es una medida de las correlaciones de corto alcance entre los niveles energéticos, dichas correlaciones se dan en el sentido de repulsión entre niveles energéticos adyacentes [48]. En el caso de una distribución tipo Poisson no hay correlaciones y conforme pasamos por GOE, GUE y GSE las correlaciones son cada vez más fuertes. Con el modelo que estamos trabajando podemos reproducir gráficamente las distribuciones de la Tabla 1.1 mediante la variación de los parámetros tal como se muestra en la Fig. 1.3, en la cual se puede observar que los resultados numéricos (barras color rojo) se ajustan a las expresiones teóricas de la Tabla 1.1 (curvas color negro).

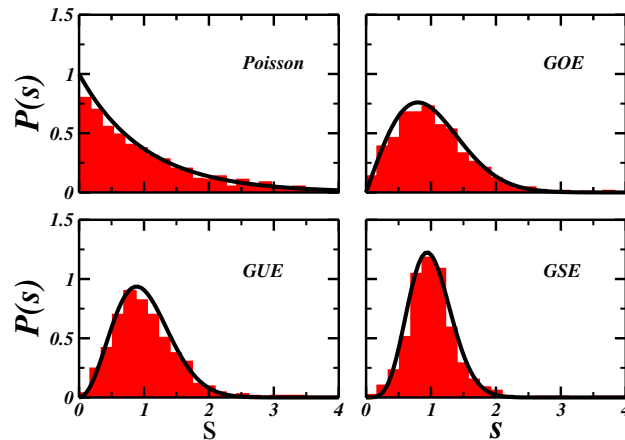


Figura 1.3: Distribución  $P(s)$  para el hamiltoniano 1.2. Se han empleado los valores  $N = 1000$ ,  $\alpha = 0$  y una sola realización de desorden. La variación de la magnitud del desorden permite reproducir las distribuciones de la Tabla 1.1:  $W = 3$  para Poisson,  $W = 0.3721$  para GOE,  $W = 0.2561$  para GUE y  $W = 0.165$  para GSE.

Una alternativa para el estudio de las correlaciones de corto alcance entre los niveles energéticos adyacentes consiste en el estudio de la distribución  $P(r)$ , para lo cual se definen las variables  $r_n$  de la siguiente manera

$$r_n = \frac{\epsilon_{n+1} - \epsilon_n}{\epsilon_n - \epsilon_{n-1}}, \quad n = 2, \dots, N - 1, \quad (1.4)$$

donde  $\epsilon_n$  es el  $n$ -ésimo nivel energético [5]. En contraste con el estudio de la distribución  $P(s)$ , el estudio de la distribución  $P(r)$  no requiere el desdoblamiento. Además de la anterior, otra alternativa para el análisis de las correlaciones de corto alcance se da en términos de un solo número:  $\langle \tilde{r} \rangle$ . La cantidad  $\tilde{r}_n$  se define como

$$\tilde{r}_n = \min \left( r_n, \frac{1}{r_n} \right), \quad (1.5)$$

y  $\langle \tilde{r} \rangle$  es el promedio de todas las variables  $\tilde{r}_n$  [49]. En la Tabla 1.2 se encuentran los valores teóricos para esta cantidad en el caso de una estadística tipo Poisson y de la correspondiente a los ensambles de RMT, además se agrega el valor de  $\langle \tilde{r} \rangle$  para lo que se conoce como “Picket-Fence” (P-F), el cual indica el grado máximo de correlaciones [19].

| Ensamble | $\langle \tilde{r} \rangle$              |
|----------|--|
| Poisson  | $2 \ln(2) - 1 \approx 0.39$              |
| GOE      | $4 - 2\sqrt{3} \approx 0.54$             |
| GUE      | $2\sqrt{3}/\pi - 1/2 \approx 0.60$       |
| GSE      | $(32/15)\sqrt{3}/\pi - 1/2 \approx 0.68$ |
| P-F      | $\approx 1$                              |

Tabla 1.2: Valores teóricos de  $\langle \tilde{r} \rangle$  [5].

Cuando se trabaja con modelos que cuentan con muchos parámetros es más conveniente realizar el estudio de las correlaciones en términos de la cantidad  $\langle \tilde{r} \rangle$  en lugar de analizar las distribuciones para cada uno de los valores de los parámetros que se están considerando. En este trabajo de tesis analizamos la cantidad  $\langle \tilde{r} \rangle$  como función del rango de los acoplamientos y la magnitud del desorden obteniendo los resultados que se muestran en la Fig. 1.4. En el panel (a) se muestra la dependencia de  $\langle \tilde{r} \rangle$  en  $\alpha$  para distintos valores

del desorden, se observa que para magnitudes pequeñas del desorden los acoplamientos de largo alcance (valores pequeños de  $\alpha$ ) suprimen las correlaciones mientras que los acoplamientos de corto alcance (valores grandes de  $\alpha$ ) las inducen. Conforme aumenta la magnitud del desorden las curvas presentan un comportamiento similar al descrito anteriormente cuando los acoplamientos son de largo alcance pero cuando los acoplamientos son de corto alcance las correlaciones son cada vez más débiles. Por otro lado, en el panel (b) se muestra la dependencia de  $\langle \tilde{r} \rangle$  en el desorden para distintos valores de  $\alpha$ , se puede observar que para cualquier valor del rango de los acoplamientos  $\alpha \neq 0$  conforme aumenta la magnitud del desorden se presenta una transición de correlaciones fuertes a correlaciones débiles y cuando  $\alpha = 0$  tenemos una estadística tipo GUE independientemente de la magnitud del desorden. Finalmente, el análisis correspondiente a la variación en el tamaño del sistema mostró que el comportamiento de las curvas de  $\langle \tilde{r} \rangle$  vs  $\alpha$  y  $\langle \tilde{r} \rangle$  vs  $W$  es similar al que se observa en Fig. 1.4.

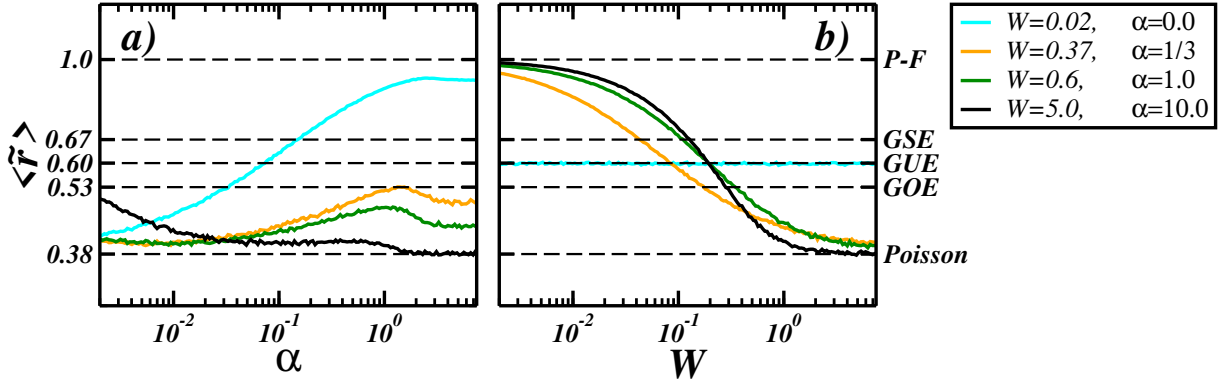


Figura 1.4: Análisis de  $\langle \tilde{r} \rangle$  respecto al rango de los acoplamientos  $\alpha$  (a) y la magnitud del desorden  $W$  (b). Se considera  $N = 1000$  y un promedio sobre 20 realizaciones de desorden.

Por otra parte, el análisis de las correlaciones de largo alcance se realiza empleando la varianza del número de niveles. El estudio de esta cantidad requiere la realización de un desdoblamiento, la división del espectro resultante en intervalos de longitud  $l$ , contar el número de niveles en cada intervalo ( $n(l)$ ) y finalmente calcular la varianza de la distribución resultante [13, 47],

$$\Sigma^2(l) \equiv \langle n(l)^2 \rangle - \langle n(l) \rangle^2. \quad (1.6)$$

En la Tabla 1.3 se muestran las predicciones teóricas de esta cantidad, las cuales fueron tomadas de [47, 50] y la correspondiente representación gráfica se puede visualizar en

la Fig. 1.5, para lo cual tomamos el panel (a): la línea recta punteada corresponde a Poisson y, recorriendo en el sentido de las manecillas del reloj, las demás líneas punteadas corresponden a GOE, GUE, GSE y a P-F.

| Ensamble | $\Sigma^2(l)$  |
|----------|--|
| Poisson  | $l$  |
| GOE      | $\frac{2}{\pi^2} \left[ \ln(2\pi l) + \gamma + 1 - \frac{\pi^2}{8} \right]$  |
| GUE      | $\frac{1}{\pi^2} [\ln(2\pi l) + \gamma + 1]$                                 |
| GSE      | $\frac{1}{2\pi^2} \left[ \ln(4\pi l) + \gamma + 1 + \frac{\pi^2}{8} \right]$ |
| P-F      | $l - [l] - (l - [l])^2$  |

Tabla 1.3: Valores teóricos de la varianza del número de niveles [47]. En la última expresión el término  $[l]$  representa la parte entera de  $l$  y el valor de  $\gamma$  es 0.5772.

En la Fig. 1.5 se presentan los resultados encontrados durante el estudio de la varianza del número de niveles, en esta figura y en las que se mostrarán más adelante la notación  $\langle \cdot \rangle$  se emplea para representar promedios sobre realizaciones. Cada panel de la Fig. 1.5 corresponde a un cierto valor de la magnitud del desorden (indicado en el pie de la figura) y las curvas de colores corresponden a los valores del rango de los acoplamientos indicados en el recuadro que se encuentra a la derecha del panel (b).

En el caso de acoplamientos de largo alcance  $\alpha = 0$  las correlaciones son débiles e independientes de la magnitud del desorden, pues la curva color cyan presenta un comportamiento similar en los cuatro paneles. En el caso de  $\alpha \neq 0$  el incremento en la magnitud del desorden produce una disminución en el grado de correlación, esto lo podemos observar tomando la curva color negro ( $\alpha = 10$ ), la cual corresponde a correlaciones fuertes cuando  $W = 0.02$  (panel (a)) debido a que se encuentra sobre  $P - F$  y conforme aumentamos el valor del desorden en los siguientes paneles ésta se recorre de tal manera que al llegar al panel (d) las correlaciones son débiles, pues ya se encuentra sobre la línea entrecortada correspondiente a Poisson. Por su parte, el análisis correspondiente a la variación en el tamaño del sistema produce resultados similares a los mostrados en la Fig. 1.5.

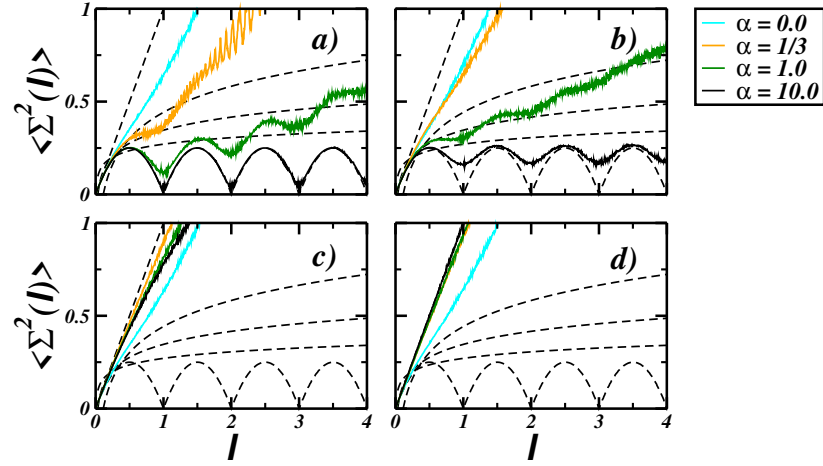


Figura 1.5: Varianza del número de niveles. Los valores de la magnitud del desorden son a)  $W = 0.02$ , b)  $W = 0.1$ , c)  $W = 1$  y d)  $W = 5$ . El tamaño del sistema es  $N = 1000$  y se considera un promedio sobre 20 realizaciones.

### Estructura de los estados

La razón inversa de participación (*IPR* por sus siglas en inglés) permite analizar el número de elementos de una base  $|\psi_\beta\rangle$  que forma parte de la configuración de un estado  $|\phi\rangle$ ,

$$IPR_\phi = \sum_{\beta=1}^N |\langle \phi | \psi_\beta \rangle|^4. \quad (1.7)$$

Cuando pocos elementos de la base  $|\psi_\beta\rangle$  forman parte de la configuración del estado  $|\phi\rangle$  se tiene  $IPR_\phi \sim 1$ , en este caso el estado  $|\phi\rangle$  se encuentra localizado en dicha base. Por otro lado, el estado  $|\phi\rangle$  se encuentra extendido o delocalizado cuando muchos estados de la base  $|\psi_\beta\rangle$  forman parte de su configuración y en este caso  $IPR_\phi \sim N^{-1}$ . Los valores del *IPR* que se muestran en la Tabla 1.4 indican el grado de localización de los estados propios de las matrices en la base en la cual éstas fueron escritas inicialmente y  $N$  es el tamaño de estas matrices.

| Poisson     | GOE             | GUE             | GSE              | P-F                |
|-------------|-----------------|-----------------|------------------|--------------------|
| $\approx 1$ | $\frac{3}{N+2}$ | $\frac{2}{N+1}$ | $\frac{3}{2N+1}$ | $\frac{3}{2(N+1)}$ |

Tabla 1.4: Valores teóricos del *IPR* [19].

En la Fig. 1.6 podemos observar los resultados correspondientes al estudio del grado de localización de los estados de la base de sitios  $|n\rangle$  en los estados propios del hamiltoniano (1.2). En el panel (a) se observa que los estados se encuentran localizados cuando los acoplamientos son de largo alcance ( $\alpha$  pequeña) y conforme disminuimos el rango de los acoplamientos ( $\alpha$  grande) se presenta una transición a estados extendidos. Esta transición se da con todos los valores de la magnitud del desorden considerados pero conforme aumenta el valor de  $W$  el valor de saturación de cada curva es cada vez mayor, es decir, cuando los acoplamientos son de corto alcance los estados se encuentran más localizados para valores grandes de  $W$  que para valores pequeños. Esta transición es más notoria en el panel (b), donde vemos que para  $\alpha \neq 0$  y magnitud de desorden pequeña los estados se encuentran extendidos y el incremento en  $W$  provoca un incremento en el grado de localización de los estados. Especial atención requiere el valor  $\alpha = 0$  para el cual tenemos estados igualmente localizados independientemente de la magnitud del desorden.

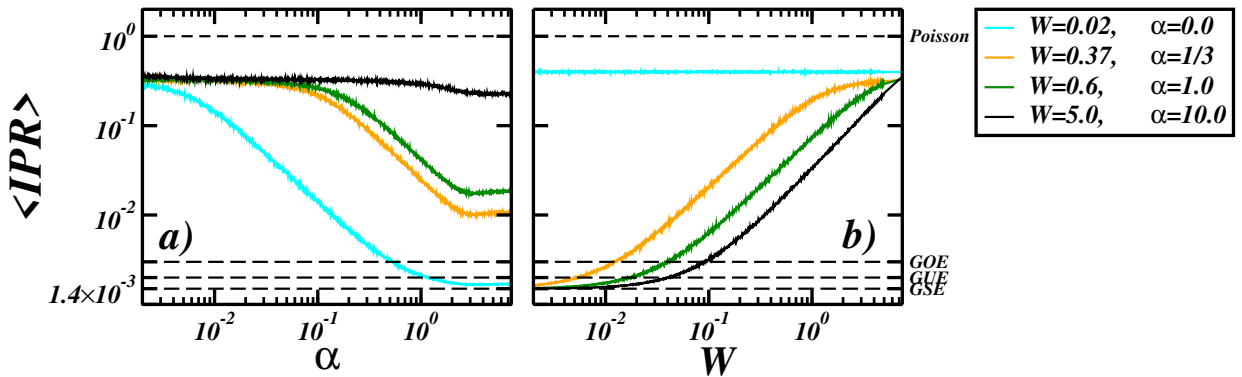


Figura 1.6: Razón inversa de participación como función del rango de los acoplamientos a) y de la magnitud del desorden b). Se tomó en cuenta un promedio sobre 20 realizaciones y un tamaño de la cadena  $N = 1000$ .

Con lo anterior queda concluido el estudio de las propiedades estáticas del modelo, algunas se manifiestan en la dinámica tal como veremos en la siguiente sección, en la cual se presenta el análisis de los efectos de los acoplamientos de largo alcance en la dinámica de la probabilidad de supervivencia y del *imbalance*, asimismo se muestra el estudio de los efectos de dicho tipo de acoplamientos en las escalas temporales.

## 1.2.2. Propiedades dinámicas

### Probabilidad de supervivencia

La primer cantidad dinámica que estudiamos es la probabilidad de supervivencia, ésta nos da la probabilidad de encontrar el estado inicial a un tiempo dado  $t$  y la expresión que la define es

$$SP(t) = |\langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle|^2, \quad (1.8)$$

donde  $|\Psi(0)\rangle$  y  $|\Psi(t)\rangle$  representan el estado inicial y el estado al tiempo  $t$  respectivamente. La dinámica de esta cantidad presenta un decaimiento cuadrático a tiempos cortos seguido de un decaimiento como ley de potencias que va como  $t^{-\sigma}$  (el valor de  $\sigma$  indica el grado de localización del estado inicial en los estados propios del hamiltoniano [51]), puede aparecer un *hoyo de correlaciones* y finalmente alcanza un valor de saturación (ver Fig. 1.7) [51, 52]. Dichos comportamientos están relacionados con las propiedades estáticas, por ejemplo, la presencia del hoyo de correlaciones depende del grado de correlación en el espectro energético [53], su área y su profundidad dependen del grado de correlación de corto y largo alcance respectivamente, con mayor grado de correlación mayor definición presenta el hoyo de correlaciones. Anteriormente hemos visto que ambos tipos de correlaciones son fuertes en el caso del modelo GOE, entonces esperamos que dicho hoyo de correlaciones se manifieste en la dinámica de la probabilidad de supervivencia y esta manifestación la podemos observar en la Fig. 1.7, donde se encuentran sombreadas las regiones correspondientes a los distintos comportamientos de la dinámica de esta cantidad y la línea punteada corresponde al valor de saturación, el cual es básicamente el valor del *IPR* y esto se puede observar en el siguiente desarrollo,

$$\begin{aligned} SP(t) &= |\langle \Psi(0) | e^{-i\mathcal{H}t} | \Psi(0) \rangle|^2 = \left| \sum_{\beta=1}^N \langle \Psi(0) | \psi_{\beta} \rangle \langle \psi_{\beta} | e^{-i\mathcal{H}t} \sum_{\rho=1}^N | \psi_{\rho} \rangle \langle \psi_{\rho} | \Psi(0) \rangle \right|^2 \\ &= \left| \sum_{\beta=1}^N |c_{\beta}^{(0)}|^2 e^{-iE_{\beta}t} \right|^2 = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N |c_{\alpha}^{(0)}|^2 |c_{\beta}^{(0)}|^2 e^{i(E_{\alpha}-E_{\beta})t} \\ &= \sum_{\alpha \neq \beta}^N |c_{\alpha}^{(0)}|^2 |c_{\beta}^{(0)}|^2 e^{i(E_{\alpha}-E_{\beta})t} + IPR, \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde se ha empleado la definición del  $IPR$  (ver ecuación (1.7)),  $c_\beta^{(0)} = \langle \psi_\beta | \Psi(0) \rangle$  es la componente del estado inicial en el  $\beta$ -ésimo estado propio del hamiltoniano que dicta la evolución y  $E_\beta$  es la energía correspondiente a dicho estado propio.

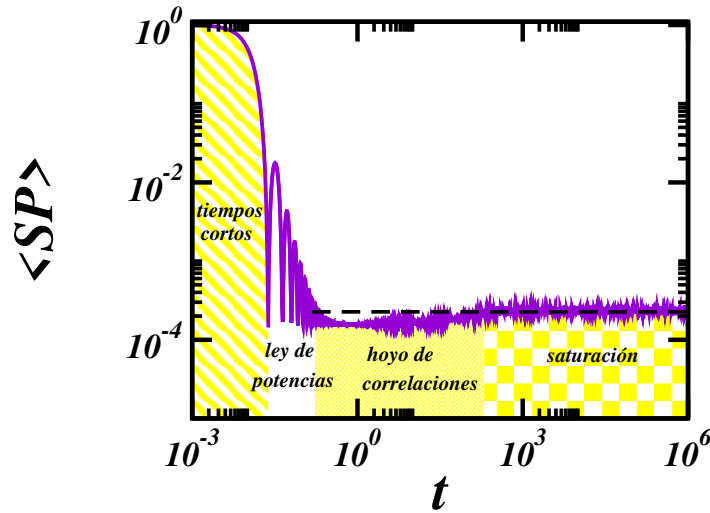


Figura 1.7: Dinámica de la probabilidad de supervivencia para el modelo GOE. Se ha considerado un tamaño  $N = 1000$  y un promedio sobre 100 realizaciones y 100 estados iniciales con energía cercana a cero. La línea punteada horizontal corresponde al valor de saturación ( $IPR$  promedio).

Por otro lado, el hoyo de correlaciones se puede considerar como una manifestación de caos debido a su estrecha relación con la estadística de niveles pues su presencia indica correlaciones y, tal como vimos en la sección anterior, las correlaciones son señales de caos. El tiempo al cual la probabilidad de supervivencia alcanza su valor mínimo en el fondo del hoyo de correlaciones se conoce como *tiempo de Thouless* y el tiempo al cual alcanza su valor de saturación se conoce como *tiempo de relajación* [13]. Anteriormente, en el análisis de las propiedades estáticas para acoplamientos de largo alcance ( $\alpha = 0$ ) se encontraron correlaciones de corto alcance fuertes y correlaciones de largo alcance débiles que son independientes de la magnitud del desorden, al igual que el valor del  $IPR$ . Lo anterior implica la manifestación de un hoyo de correlaciones de poca profundidad y un mismo valor de saturación en la dinámica de la probabilidad de supervivencia para cualquier magnitud del desorden. En vista de lo anterior, las curvas correspondientes a cualquier magnitud del desorden con  $\alpha = 0$  y tamaño de sistema  $N = 1000$  presentarán el mismo comportamiento que la curva color cyan mostrada en el panel (a) de la Fig. 1.8. De manera similar, el análisis

de las propiedades estáticas correspondiente a los demás valores de  $\alpha$  indica la presencia de hoyos de correlaciones de poca profundidad para valores intermedios y para acoplamientos de corto alcance ( $\alpha = 10$ ) dicho hoyo está bien definido, además el valor de saturación disminuye conforme aumenta el valor de  $\alpha$  tal como podemos apreciar en el panel (a) de la Fig. 1.8. Cabe mencionar que la relación existente entre  $SP(t)$  y las propiedades estáticas nos permite inferir los resultados correspondientes a otras magnitudes del desorden.

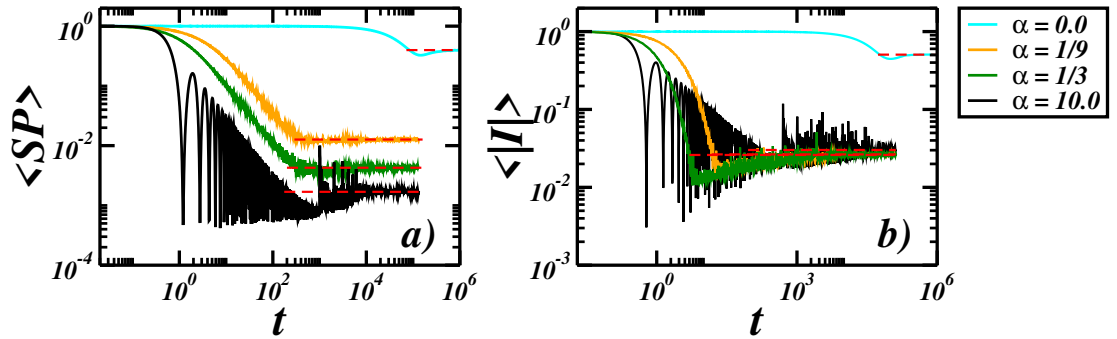


Figura 1.8: Dinámica de la probabilidad de supervivencia y del *imbalance*. Se considera un tamaño de sistema  $N = 1000$  y magnitud de desorden  $W = 0.02$ , además se tomó un promedio sobre 200 realizaciones y 100 estados iniciales. Las líneas punteadas de color rojo corresponden a los valores de saturación.

### Imbalance

El *imbalance* es una cantidad que se ha analizado en experimentos con átomos fríos [54], ésta cuantifica el desequilibrio que hay entre la probabilidad de encontrar a una partícula en un sitio par o un sitio impar al tiempo  $t$  y se define como [55]

$$I(t) = \frac{\eta_{par}(t) - \eta_{impar}(t)}{\eta_{par}(t) + \eta_{impar}(t)}, \quad \eta_{par/impar}(t) = \sum_{i=par/impar} |\langle i | \Psi(t) \rangle|^2, \quad (1.10)$$

donde  $\eta_{par/impar}(t)$  nos da la probabilidad de encontrar a la partícula en un sitio par o impar al tiempo  $t$ . En el panel (b) de la Fig. 1.8 se muestra la dinámica del valor absoluto de esta observable, se considera el valor absoluto debido a que esta cantidad puede presentar valores negativos. Como podemos observar, esta cantidad presenta una dinámica similar a la de la probabilidad de supervivencia pero en diferentes escalas temporales, por ejemplo, en el caso  $\alpha = 1/3$  (curva color verde) se presenta un decaimiento inicial más

rápido, en consecuencia el hoyo de correlaciones es más notorio y se manifiesta en un tiempo menor, además se alcanza más rápido el valor de saturación y éste tiene magnitud similar al correspondiente a la curva de  $\alpha = 1/9$ . Este comportamiento lo exhiben los valores intermedios de  $\alpha$ . En el caso de acoplamientos de corto y largo alcance ( $\alpha = 0, 10$ ) el comportamiento es similar al de la probabilidad de supervivencia pero con más fluctuaciones y un valor de saturación mayor en la curva correspondiente a  $\alpha = 10$ .

### Tiempo de Thouless y tiempo de relajación

Cuando se trabaja con sistemas con interacciones entre muchas partículas el tiempo de Thouless y el tiempo de relajación crecen de manera exponencial respecto al tamaño del sistema, al igual que el espacio de Hilbert. Asimismo en sistemas de una sola partícula el espacio de Hilbert crece de manera lineal respecto al tamaño del sistema [13]. En vista de lo anterior nos interesa saber cómo se comportan dichas escalas temporales con el modelo que estamos empleando y si el cambio en el rango de los acoplamientos influye en su comportamiento. Para responder estas cuestiones estudiamos la dinámica de ambas cantidades realizando una variación en el tamaño del sistema tal como se muestra en la Fig. 1.9, en la cual hemos etiquetado con  $t_{Th}$  al tiempo de Thouless y con  $t_r$  al tiempo de relajación.

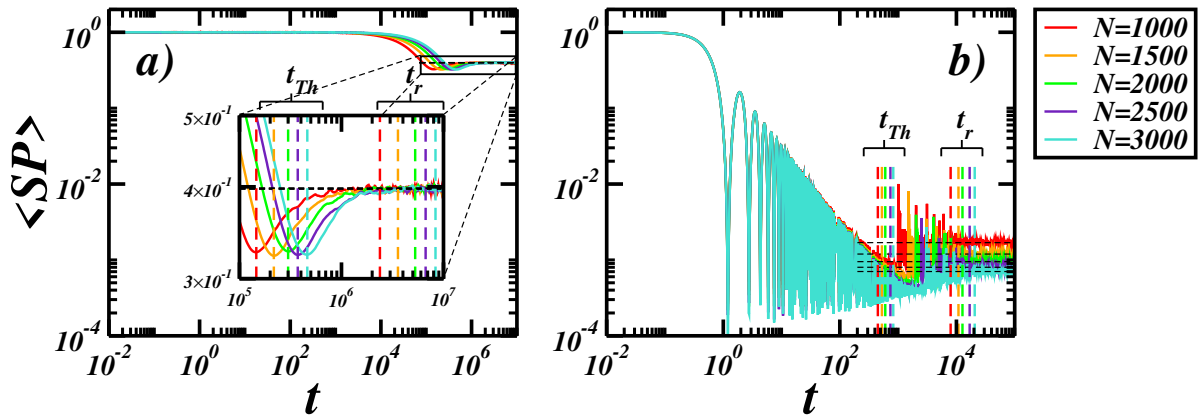


Figura 1.9: Dinámica de la probabilidad de supervivencia para diferentes tamaños del sistema. Se considera una magnitud de desorden  $W = 0.02$  y rango de los acoplamientos a)  $\alpha = 0$  y b)  $\alpha = 10$ . El número de estados iniciales y de realizaciones se ajusta de acuerdo al tamaño del sistema de tal manera que sea tomado en cuenta un promedio sobre 10000 datos. Las líneas punteadas verticales corresponden a las escalas temporales.

En la Fig. 1.9 podemos observar que ambas escalas temporales presentan un corrimiento hacia la derecha conforme aumenta el tamaño del sistema, además en el caso  $\alpha = 0$  los valores de saturación no presentan variaciones significativas en contraste con los correspondientes a  $\alpha = 10$ , cuya magnitud disminuye al incrementar el tamaño del sistema. Además a tiempos cortos la dinámica es independiente de  $N$ . Ahora, al realizar un análisis más detallado sobre estas escalas de tiempo nos encontramos con un comportamiento lineal respecto al tamaño del sistema  $t_{Th/r} \propto N$ , el cual es independiente de la magnitud del rango de los acoplamientos tal como podemos observar en la Fig. 1.10. En esta figura se puede apreciar una buena correspondencia entre los resultados numéricos y los ajustes. Los ajustes correspondientes a cada panel son a)  $Y = 104.63X^{1.047}$ , b)  $Y = 0.99X^{1.004}$ , c)  $Y = 819.46X^{1.152}$  y d)  $Y = 28.56X^{0.805}$ . Cabe mencionar que en el caso del *imbalance* las escalas temporales también presentan un comportamiento lineal respecto al tamaño del sistema, la diferencia se encuentra en las constantes involucradas en los ajustes, por tal motivo no se muestran aquí las gráficas correspondientes al análisis de las escalas temporales para el *imbalance*.

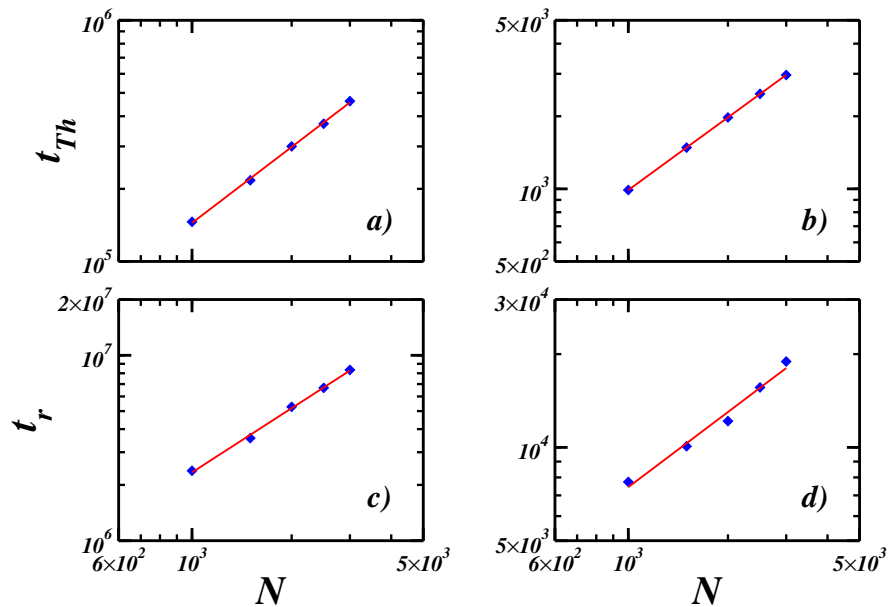


Figura 1.10: Análisis de las escalas temporales. Los paneles a) y c) corresponden a  $\alpha = 0$  y los paneles b) y d) corresponden a  $\alpha = 10$ . Los valores correspondientes a  $t_{Th}$  y  $t_r$  (puntos color azul) fueron extraídos de la Fig. 1.9 y las líneas rojas corresponden a los ajustes los cuales son de la forma  $Y = AX^B$ .

Con el análisis anterior damos por concluido el estudio del efecto de acoplamientos de largo alcance en el modelo de Anderson unidimensional. Hemos analizado algunas propiedades estáticas encontrando resultados interesantes entre los cuales se encuentra el hecho de que la estadística de niveles y la estructura de los estados son independientes de la magnitud del desorden cuando los acoplamientos son de largo alcance. Las propiedades estáticas nos permiten inferir el comportamiento de propiedades dinámicas como la probabilidad de supervivencia y viceversa, de esta manera la determinación del comportamiento caótico de un sistema puede llevarse a cabo mediante el estudio de la estadística de niveles o de la manifestación del hoyo de correlaciones en la dinámica de la probabilidad de supervivencia. Además estudiamos las escalas temporales y encontramos que tanto el tiempo de Thouless como el tiempo de relajación presentan un comportamiento lineal respecto al tamaño del sistema. Cabe mencionar que se encuentra en preparación un manuscrito sobre este análisis, el cual será enviado a una revista para su posible publicación.

En el siguiente Capítulo nos enfocamos en el estudio del autopromedio, el cual es relevante debido a que nos permite reducir el tiempo de cálculo conforme aumentamos el tamaño del sistema.

---

## Capítulo 2

# Autopromedio en sistemas unidimensionales de espín $1/2$

Los avances que se han conseguido en el estudio de la evolución temporal de sistemas cuánticos compuestos por átomos fríos [56], iones atrapados [57], dispositivos semiconductores [58], entre otros, han motivado a la comunidad científica a continuar trabajando sobre esta línea de investigación pretendiendo tener un mejor control sobre la dinámica de dichos sistemas. Entre los estudios realizados con sistemas desordenados sobre la dinámica poco se tiene respecto al autopromedio, el hecho de que una cantidad posea esta propiedad representa una ventaja en estudios teóricos y experimentales debido a que si ésta se cumple podemos reducir el número de muestras consideradas en un promedio mientras aumentamos el tamaño del sistema. El estudio de esta propiedad para la probabilidad de supervivencia y otras cantidades ha sido reportado en la Ref. [29], en la cual el análisis fue realizado estudiando la dinámica de la varianza relativa de las cantidades en cuestión. Entre los resultados de dicho estudio se encuentran el hecho de que la probabilidad de supervivencia no es autopromediable en ninguna escala temporal, la razón inversa de participación es autopromediable a tiempos largos, la función de autocorrelación de espín es autopromediable a tiempos cortos y la función de correlación conexas espín-espín es autopromediable en ambas escalas temporales, tiempos cortos y tiempos largos, más adelante se definen estas funciones de correlación. En este capítulo estudiamos la relación entre las distribuciones correspondientes a dichas cantidades y el autopromedio, los resultados que presentamos fueron reportados en la Ref. [33]. El estudio se realizó empleando el modelo

GOE de RMT y el modelo de Heisenberg unidimensional con desorden, se calcularon las distribuciones sobre realizaciones en el desorden, el objetivo era saber si las distribuciones y sus características podrían ayudarnos a determinar cuándo se satisface el autopromedio.

## 2.1. Modelo de Heisenberg unidimensional con desorden

Este modelo representa una cadena de  $L$  partículas de espín 1/2 que es descrita por el hamiltoniano [59]

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{XXZ} + \hat{\mathcal{H}}_h, \quad (2.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{XXZ} &= \sum_{k=1}^L J_{xy} \left( \hat{S}_k^x \hat{S}_{k+1}^x + \hat{S}_k^y \hat{S}_{k+1}^y \right) + J_z \hat{S}_k^z \hat{S}_{k+1}^z, \\ \hat{\mathcal{H}}_h &= \sum_{k=1}^L h_k \hat{S}_k^z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

En estas expresiones se ha considerado  $\hbar = 1$ ,  $\hat{\mathcal{H}}_{XXZ}$  describe los acoplamientos entre espines adyacentes, los operadores de espín  $\hat{S}_k^{x,y,z}$  actúan sobre el espín que se encuentra en el sitio  $k$ .  $J_{xy}$  es la magnitud del término de interacción  $\hat{S}_k^x \hat{S}_{k+1}^x + \hat{S}_k^y \hat{S}_{k+1}^y$ ,  $J_z$  es la magnitud de la interacción de Ising  $\hat{S}_k^z \hat{S}_{k+1}^z$  y la razón  $\Delta = J_z/J_{xy}$  se conoce como parámetro de anisotropía [60]. El término  $\hat{\mathcal{H}}_h$  nos da la separación de Zeeman de cada espín  $k$  determinada por un campo magnético estático  $h_k$  en la dirección  $z$  [35]. Dichos campos magnéticos son números aleatorios uniformemente distribuidos en el intervalo  $[-h, h]$ , siendo  $h$  la magnitud del desorden.

Este modelo es integrable cuando  $h = 0$  y caótico cuando  $0 < h \lesssim 1$  debido a la competencia entre la interacción de Ising y el término que contiene al desorden. Además el sistema tiende a una fase localizada al incrementar la magnitud del desorden, lo cual ocurre cuando  $h$  es más grande que cierto valor crítico,  $h > h_c \sim 4$  [61, 62]. Cabe mencionar que para la cadena descrita por el hamiltoniano (2.1) el espín total en la dirección  $z$ ,  $\hat{S}^z = \sum_{k=1}^L \hat{S}_k^z$ , se conserva, esto nos permite centrar nuestro estudio en el subespacio más grande cuya dimensión es  $N = L!/(L/2)!^2$ , además consideramos  $J_{xy} = 1$  y  $\Delta = 1$ . Además, de ahora en adelante nos referiremos al modelo descrito por el hamiltoniano (2.1) como modelo

$XXZ + h$  y para el estudio de la propiedad de autopromedio empleamos  $h = 0.5$ , lo cual significa que realizamos el análisis en la región caótica. Es necesario comentar que este modelo será empleado en los capítulos posteriores para analizar la conjetura Aurich-Steiner y los efectos del desorden correlacionado en el contexto de localización de muchos cuerpos.

## 2.2. Cantidades

Para saber si una cantidad  $X$  es autopromediable y en qué escala temporal lo es, analizamos su varianza relativa. Se dice que una cantidad  $X$  es autopromediable cuando su varianza relativa [33],

$$\mathcal{R}_X(t) = \frac{\sigma_X^2(t)}{\langle X(t) \rangle^2} = \frac{\langle X^2(t) \rangle - \langle X(t) \rangle^2}{\langle X(t) \rangle^2}, \quad (2.3)$$

decrece conforme aumenta el tamaño del sistema. La notación  $\langle \cdot \rangle$  indica el promedio sobre realizaciones en el desorden y estados iniciales. En la práctica se calcula  $\mathcal{R}_X(t)$  para cada tiempo y se comparan los resultados correspondientes a distintos tamaños del sistema.

Las cantidades para las cuales se estudia el autopromedio son la probabilidad de supervivencia (definida en la Sección 1.2.2), la razón inversa de participación al tiempo  $t$ ,  $IPR(t)$ , la cual nos da el grado de extensión del estado inicial  $|\Psi(0)\rangle$  en la base de los estados propios del hamiltoniano que dicta la evolución,  $|\psi_\alpha\rangle$ , al tiempo  $t$ ,

$$IPR(t) = \sum_{\alpha} |\langle \psi_{\alpha} | \Psi(t) \rangle|^4. \quad (2.4)$$

Además se emplean dos cantidades que se estudian en experimentos, la función de autocorrelación de espín mide qué tan cercana es la configuración de espín al tiempo  $t$  a la configuración al tiempo inicial [13],

$$I(t) = \frac{4}{L} \sum_{i=1}^L \langle \Psi(0) | \hat{S}_i^z e^{i\hat{H}t} \hat{S}_i^z e^{-i\hat{H}t} | \Psi(0) \rangle. \quad (2.5)$$

Esta cantidad es equivalente al imbalance medido en experimentos con átomos fríos [54, 55]. Finalmente tenemos la función de correlación conexas espín-espín,

$$C(t) = \frac{4}{L} \sum_{k=1}^{L-1} [\langle \Psi(t) | S_k^z S_{k+1}^z | \Psi(t) \rangle - \langle \Psi(t) | S_k^z | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) | S_{k+1}^z | \Psi(t) \rangle], \quad (2.6)$$

la cual cuantifica las correlaciones entre espines adyacentes al tiempo  $t$  y ha sido estudiada en experimentos con iones atrapados [8, 30].

En la Ref. [29] se encuentra reportado el estudio de la propiedad de autopromedio de las cantidades antes mencionadas, en el cual se analizó la varianza relativa. Esto se muestra brevemente en la siguiente sección y posteriormente se presenta el estudio correspondiente a las distribuciones.

## 2.3. Análisis de resultados

### 2.3.1. Estudio del autopromedio empleando la varianza relativa

En la Fig. 2.1 se muestra la dinámica de la varianza relativa de la probabilidad de supervivencia y de la razón inversa de participación para el modelo GOE (paneles (a) y (c)) y para el modelo  $XXZ + h$  (paneles (b) y (d)) [29]. Como podemos observar, para ambos modelos y ambas cantidades en la región de tiempos cortos el valor de la varianza relativa no decrece conforme aumenta el tamaño del sistema y esto indica que ambas cantidades no son autopromediables en esta escala temporal. Cuando se trata de tiempos largos la varianza relativa de la probabilidad de supervivencia (paneles (a) y (b)) se mantiene fluctuando sin cambio evidente respecto al tamaño del sistema y esto implica que esta cantidad no es autopromediable. Por su parte la varianza relativa de la razón inversa de participación (paneles (c) y (d)) decrece conforme aumenta el tamaño del sistema, lo cual indica que esta cantidad es autopromediable a tiempos largos.

Por otra parte, el análisis correspondiente a la función de autocorrelación de espín y la función de correlación conexas espín-espín que se realizó en la Ref. [29] nos dice que ambas cantidades son autopromediables a tiempos cortos, mientras que a tiempos largos solamente la función de correlación conexas espín-espín es autopromediable.

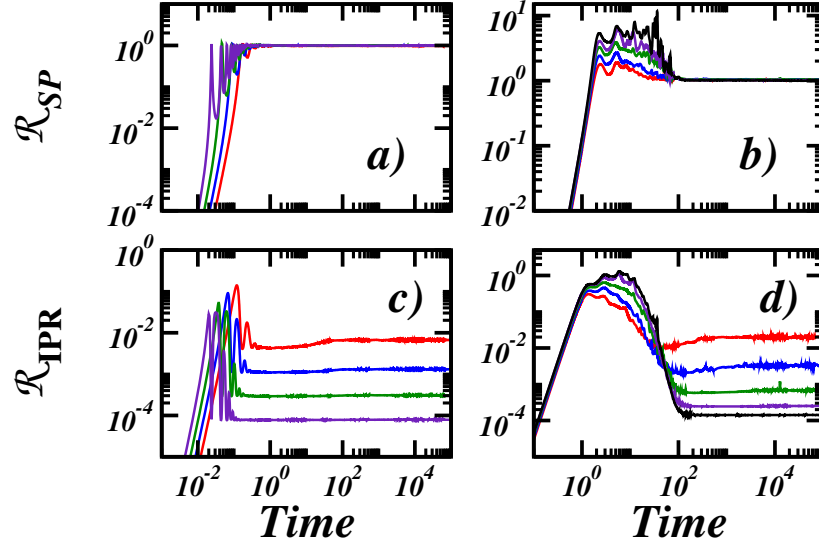


Figura 2.1: Evolución temporal de la varianza relativa de la probabilidad de supervivencia y de la razón inversa de participación. Los tamaños del espacio de Hilbert considerados son: rojo  $N = 252$  ( $L = 10$ ), azul  $N = 924$  ( $L = 12$ ), verde  $N = 3432$  ( $L = 14$ ), índigo  $N = 12870$  ( $L = 16$ ) y negro  $N = 48620$  ( $L = 18$ ). Los paneles a) y c) corresponden al modelo GOE mientras que los paneles b) y d) al modelo de espín. Se considera un promedio sobre  $0.01N$  realizaciones en el desorden y  $10^4/0.01N$  estados iniciales. Esta figura fue tomada de la Ref. [33].

### 2.3.2. Estudio del autopromedio empleando distribuciones

Para analizar las distribuciones de las cantidades antes mencionadas se fija el tiempo, se calcula el valor de la cantidad en cuestión para diferentes realizaciones en el desorden y finalmente se calcula la distribución. En lo que sigue se muestran los resultados correspondientes a la probabilidad de supervivencia y a la razón inversa de participación pero esto no quiere decir que la función de autocorrelación de espín y la función de correlación conexa espín-espín son menos importantes, más bien las distribuciones obtenidas para estas observables presentan comportamientos similares a los que se muestran a continuación [33].

#### Tiempos cortos

En la Fig. 2.2 se muestran las distribuciones correspondientes a la probabilidad de supervivencia y a la razón inversa de participación a tiempos cortos. Como podemos observar, se obtienen distribuciones gaussianas para el modelo GOE, mientras que para el modelo

$XXZ + h$  las distribuciones son fragmentadas. Asimismo, en el caso de las observables  $I(t)$  y  $C(t)$  las distribuciones son fragmentadas, al igual que en los paneles (b) y (d) de la Fig. 2.2 [33]. Contrastando con el análisis de la varianza relativa,  $SP(t)$  e  $IPR(t)$  nos son autopromediables en esta escala temporal y obtenemos distribuciones gaussianas para el modelo GOE y distribuciones fragmentadas para el modelo de espín con ambas cantidades.

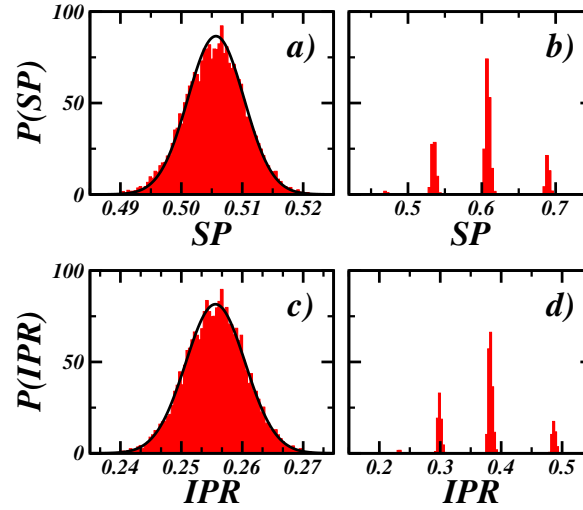


Figura 2.2: Distribuciones correspondientes a los valores de la probabilidad de supervivencia y la razón inversa de participación en tiempos cortos,  $t < 1$ . Los paneles a) y c) pertenecen al modelo GOE mientras que los paneles b) y d) al modelo  $XXZ + h$ . En los paneles a) y c) las curvas color negro son los ajustes a distribuciones gaussianas con parámetros de ajuste a)  $\mu \sim 0.505$  y  $\sigma^2 \sim 2.1 \times 10^{-5}$  y b)  $\mu \sim 0.256$  y  $\sigma^2 \sim 2.3 \times 10^{-5}$ . Esta figura fue tomada de la Ref. [33].

### Tiempos largos

Hemos visto que a tiempos largos la razón inversa de participación es autopromediable mientras que la probabilidad de supervivencia no lo es. En la Fig. 2.3 podemos observar que para la primera las distribuciones son gaussianas y para la segunda las distribuciones son exponenciales independientemente del modelo. Adicionalmente, las distribuciones correspondientes a  $I(t)$  y  $C(t)$  son distribuciones gaussianas y de acuerdo a la Ref. [29] en esta escala temporal solamente  $C(t)$  es autopromediable. Lo anterior indica que una distribución gaussiana corresponde a una cantidad autopromediable mientras que una distribución distinta a la gaussiana corresponde a una cantidad no autopromediable, pero los resultados obtenidos a tiempos cortos (distribuciones gaussianas obtenidas cuando  $SP(t)$  e

$IPR(t)$  no son autopromediables) y la distribución gaussiana obtenida para  $I(t)$  a tiempos largos no son consistentes con este enunciado.

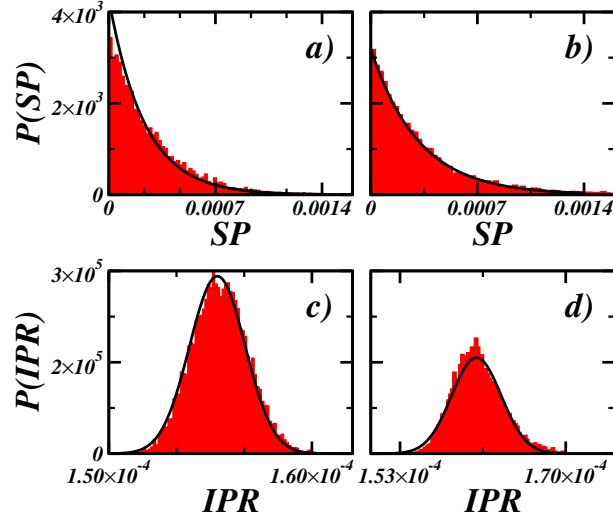


Figura 2.3: Distribuciones correspondientes a los valores de la probabilidad de supervivencia y la razón inversa de participación en tiempos largos,  $t > 10^3$ . Los paneles a) y c) pertenecen al modelo GOE mientras que los paneles b) y d) al modelo  $XXZ + h$ . En los paneles a) y b) las curvas color negro son los ajustes a distribuciones exponenciales,  $Y = Ae^{-BX}$ , mientras que en los paneles c) y d) a distribuciones gaussianas. Los parámetros de ajuste son a)  $A = 3828.99$ ,  $B = 3618.39$ , b)  $A = 33.86.52$ ,  $B = 3265.72$ , c)  $\mu = 1.55 \times 10^{-4}$ ,  $\sigma^2 = 1.96 \times 10^{-12}$  y d)  $\mu = 1.6 \times 10^{-4}$ ,  $\sigma^2 = 5.76 \times 10^{-12}$ . Esta figura fue tomada de la Ref. [33].

### Otras escalas temporales

El análisis del autopromedio mediante distribuciones nos ha enseñado que tener una distribución gaussiana no es señal de autopromedio, pero tener distribuciones que presentan distintos comportamientos puede ser considerado como señal de no autopromedio. En adición a los resultados mostrados anteriormente tenemos las distribuciones de  $SP(t)$  e  $IPR(t)$  a diferentes tiempos, en la Fig. 2.4 se observa la transición de una distribución fragmentada a una distribución exponencial conforme avanzamos partiendo de tiempos pequeños hacia tiempos grandes, esto es para  $SP(t)$ . En el caso de  $IPR(t)$  la transición ocurre de una distribución fragmentada hacia una distribución gaussiana. Asimismo, en los casos de  $I(t)$  y  $C(t)$  también se presenta una transición de una distribución fragmentada hacia una distribución gaussiana.

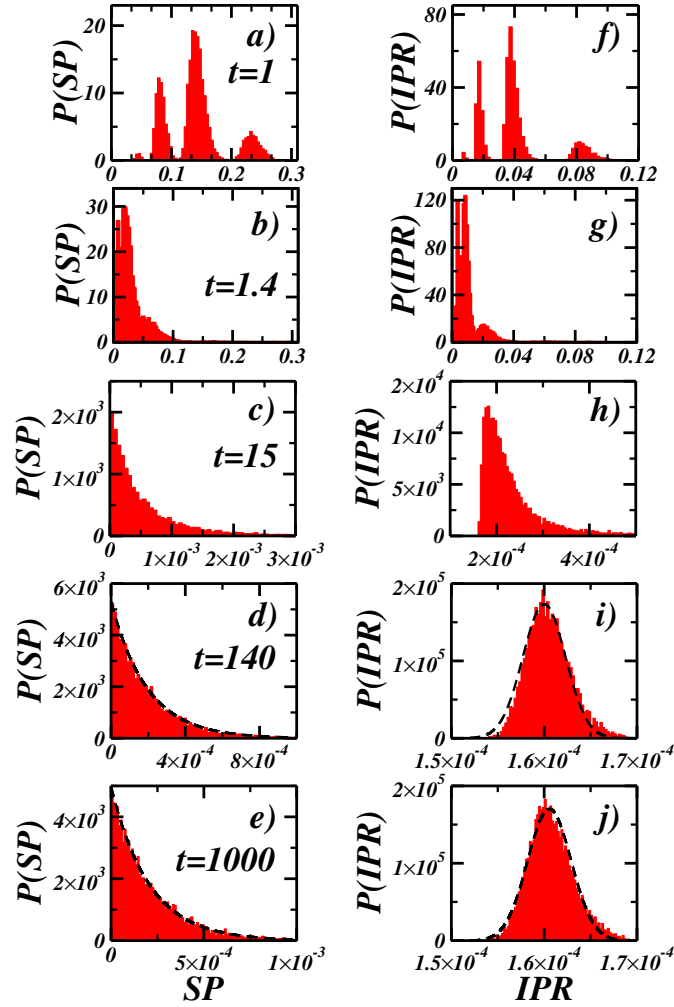


Figura 2.4: Distribuciones de  $SP(t)$  (izquierda) e  $IPR(t)$  (derecha) para el modelo de espín en los tiempos indicados en los paneles. En los paneles d) y e) las líneas entrecortadas son los ajustes a distribuciones exponenciales,  $Y = Ae^{-BX}$ , y en los paneles i) y j) dichas líneas son los ajustes a distribuciones gaussianas. Los parámetros de ajuste son d)  $A = 5299.6$ ,  $B = 5166.5$ , e)  $A = 4977.4$ ,  $B = 4902.2$ , i)  $\mu = 1.6 \times 10^{-4}$ ,  $\sigma^2 = 5.3 \times 10^{-12}$  y j)  $\mu = 1.6 \times 10^{-4}$ ,  $\sigma^2 = 5.48 \times 10^{-12}$ . Esta figura fue tomada de la Ref. [33].

En resumen, tener una distribución gaussiana no es indicio de autopromedio pero tener una distribución distinta a una gaussiana puede considerarse como señal de no autopromedio. Con lo anterior concluye el estudio del autopromedio y en el capítulo siguiente se presenta el análisis de la conjetura Aurich-Steiner.

---

## Capítulo 3

# Manifestaciones del caos en la evolución temporal

Como se ha mencionado anteriormente, la teoría del caos cuántico se encuentra relacionada con las propiedades estáticas de los sistemas cuánticos que poseen un límite clásico. Desde los años 50, a partir de los trabajos de E. Wigner se ha observado que las propiedades estadísticas de muchos sistemas cuánticos pueden modelarse por matrices aleatorias [63] y posteriormente se establecieron las conjeturas Bohigas-Giannoni-Schmit [45] y Berry-Tabor [44], las cuales se formularon en el contexto de billares cuánticos. Para determinar el comportamiento caótico de un sistema cuántico mediante el análisis de estas conjeturas es necesario tener acceso al espectro energético pero en experimentos como los que se realizan con iones atrapados y átomos fríos no es sencillo tener acceso al espectro y usualmente se estudia la evolución temporal [25, 56, 64, 65]. En vista de lo anterior, una alternativa para determinar el comportamiento caótico puede ser la conjetura Aurich-Steiner, ésta fue establecida en el mismo contexto que las anteriores pero en el dominio del tiempo y nos dice que para los sistemas cuánticos que poseen contraparte clásica caótica los valores de cierta función de autocorrelación, en una ventana de tiempos largos, presentan una distribución universal [40]. Es importante mencionar que para estudiar esta conjetura solamente se requiere una muestra de la dinámica. A continuación se presenta el análisis de esta conjetura y para esto consideramos el modelo de Heisenberg unidimensional con desorden descrito en la Sección 2.1.

### 3.1. La conjetura Aurich-Steiner

Esta conjetura puede considerarse como una alternativa para determinar el comportamiento caótico de un sistema cuántico con análogo clásico y está formulada de la siguiente manera [40]:

*Para los sistemas cuánticos cuya contraparte clásica es caótica, en el límite de tiempos largos, la función de autocorrelación*

$$S(t) = \gamma\sqrt{N}|C(t)|, \quad (3.1)$$

*presenta una distribución de Rayleigh,*

$$P(S) = \frac{\pi}{2}S e^{-(\pi/4)S^2}, \quad S \geq 0, \quad (3.2)$$

*y cualquier otra distribución si la contraparte clásica es integrable.*

En la ecuación (3.1)  $|C(t)| = |\langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle|$  es la amplitud de supervivencia (ver ecuación (1.8)),  $\gamma$  es una constante de normalización determinada por la condición  $\langle S \rangle = 1$  y  $N$  es el tamaño del sistema. El estado inicial  $|\Psi(0)\rangle$  es un estado extendido en la base de los estados propios del hamiltoniano que dicta la evolución y solamente se requiere una muestra de la dinámica en una ventana de tiempos largos para analizar esta conjetura.

Un análisis detallado nos ha mostrado que el cumplimiento de la conjetura Aurich-Steiner es una consecuencia del cumplimiento del teorema del límite central (CLT por sus siglas en inglés). Lo anterior se deduce a partir del siguiente desarrollo,

$$\begin{aligned} \langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle &= \langle \Psi(0) | e^{-i\mathcal{H}t} | \Psi(0) \rangle = \sum_{\beta=1}^N \langle \Psi(0) | \psi_{\beta} \rangle \langle \psi_{\beta} | e^{-i\mathcal{H}t} \sum_{\rho=1}^N |\psi_{\rho}\rangle \langle \psi_{\rho} | \Psi(0) \rangle \\ &= \sum_{\beta=1}^N |c_{\beta}^{(0)}|^2 e^{-iE_{\beta}t} = \sum_{\beta=1}^N |c_{\beta}^{(0)}|^2 \cos(E_{\beta}t) - i \sum_{\beta=1}^N |c_{\beta}^{(0)}|^2 \text{sen}(E_{\beta}t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde se ha empleado la relación de completéz y  $c_{\beta}^{(0)} = \langle \psi_{\beta} | \Psi(0) \rangle$  es la componente del estado inicial en el  $\beta$ -ésimo estado propio del hamiltoniano que dicta la evolución. Ahora, si los elementos de las sumas  $|c_{\beta}^{(0)}|^2 \cos(E_{\beta}t)$  y  $|c_{\beta}^{(0)}|^2 \text{sen}(E_{\beta}t)$  se comportan como variables aleatorias independientes entonces las distribuciones correspondientes a los valores de las

sumas  $\sum_{\beta=1}^N |c_{\beta}^{(0)}|^2 \cos(E_{\beta}t)$  y  $\sum_{\beta=1}^N |c_{\beta}^{(0)}|^2 \sin(E_{\beta}t)$  en una ventana de tiempos largos serán gaussianas, esto es, se satisface el CLT [66, 67]. Dado lo anterior, la distribución de la función de autocorrelación  $S(t)$  es una distribución de Rayleigh, lo cual es consistente con el enunciado de la conjetura Aurich-Steiner.

Por otra parte, esta conjetura se puede analizar en términos de otras cantidades, por ejemplo, la probabilidad de supervivencia. Mediante una transformación entre distribuciones, definiendo  $SP = S^2$  en la ecuación (3.2) encontramos que cuando se satisface la conjetura la distribución correspondiente a los valores de la probabilidad de supervivencia en una ventana de tiempos largos es exponencial,

$$P(S) = \frac{\pi}{2} S e^{-(\pi/4)S^2} \quad \Longleftrightarrow \quad P(SP) = \lambda e^{-\lambda SP}. \quad (3.4)$$

Para visualizar gráficamente lo anterior, empleando el modelo GOE calculamos las distribuciones correspondientes a  $S(t)$  y  $SP(t)$  en una ventana de tiempos mayores al tiempo de relajación y en la Fig. 3.1 se muestran los resultados obtenidos, en este caso el CLT se satisface, entonces se tiene una distribución de Rayleigh para  $S(t)$  (panel (a)) y una distribución exponencial para  $SP(t)$  (panel (b)).

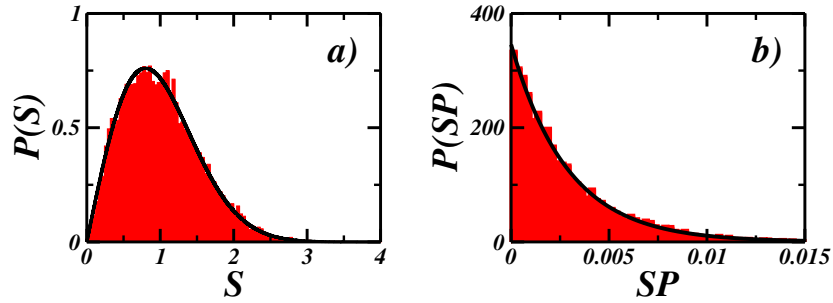


Figura 3.1: Distribuciones de los valores de  $S(t)$  y de  $SP(t)$  para el modelo GOE. El tamaño de la matriz es  $N = 1000$  y se consideran 10000 valores en una ventana de tiempos largos,  $t > 10^5$ . Las curvas color negro corresponden a los ajustes a) a una distribución de Rayleigh y b) a una distribución exponencial con parámetro de ajuste  $\lambda = 345.503$ .

Dado que el cumplimiento de la conjetura Aurich-Steiner depende de que se satisfaga el CLT decidimos centrar esta parte del trabajo de tesis en el análisis del CLT, además de la probabilidad de supervivencia (definida en la Sección 1.2.2) consideramos el factor de forma espectral (será definido en la siguiente sección), la función de autocorrelación de espín y la función de correlación conexas espín-espín (definidas en la Sección 2.2).

## 3.2. Análisis del teorema del límite central

Debido a la estructura que posee la ecuación (3.3) el cumplimiento del CLT depende de las correlaciones en el espectro energético y en las componentes del estado inicial, esto se debe a que si hay correlaciones entre los elementos  $|c_\beta^{(0)}|^2 \cos(E_\beta t)$  y  $|c_\beta^{(0)}|^2 \sin(E_\beta t)$ , éstos no se comportan como variables aleatorias independientes. En vista de lo anterior primero estudiamos las correlaciones en el espectro energético empleando el factor de forma espectral y después las correlaciones en las componentes del estado inicial empleando la probabilidad de supervivencia, esto con la intención de saber cómo influyen las correlaciones de cada conjunto en el cumplimiento del CLT. Posteriormente se muestra el estudio del CLT en diferentes escalas temporales y finalmente el análisis del CLT para las funciones de correlación  $I(t)$  y  $C(t)$ . Cabe mencionar que en lo que resta de este capítulo cuando se menciona una ventana de tiempos largos nos referimos a tiempos mayores que el tiempo de relajación.

### 3.2.1. Rol del espectro energético

En la ecuación (3.3) podemos ver que el cumplimiento del CLT para la probabilidad de supervivencia depende de las componentes del estado inicial y del espectro energético. Ahora, el factor de forma espectral [68] es una cantidad que ha sido empleada en estudios de localización de muchos cuerpos [69] y en el contexto de agujeros negros [70] y es básicamente la probabilidad de supervivencia de un estado inicial completamente extendido en la base de los estados propios del hamiltoniano que dicta la evolución. De esta manera, empleando la ecuación (3.3) podemos escribir la expresión correspondiente a la probabilidad de supervivencia como

$$SP(t) = |\langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle|^2 = \left| \sum_{\beta=1}^N |c_\beta^{(0)}|^2 e^{-iE_\beta t} \right|^2, \quad (3.5)$$

entonces cuando el estado inicial se encuentra completamente extendido  $c_\beta^{(0)} \sim 1/\sqrt{N}$ , así que la definición matemática del factor de forma espectral es

$$K(t) = \frac{1}{N^2} \left| \sum_{\beta=1}^N e^{-iE_\beta t} \right|^2 = \frac{1}{N^2} \left| \sum_{\beta=1}^N \cos(E_\beta t) - i \sum_{\beta=1}^N \sin(E_\beta t) \right|^2. \quad (3.6)$$

Como podemos observar en la ecuación anterior, el factor de forma espectral no depende del estado inicial y esto nos permite emplearlo para el estudio de las correlaciones en el espectro energético. En el caso del modelo  $XXZ+h$  las variables  $\cos(E_\beta t)$  y  $\sin(E_\beta t)$  presentes en la ecuación (3.6) siempre se comportan como variables aleatorias independientes, entonces el CLT siempre se cumple y la distribución correspondiente a esta cantidad en una ventana de tiempos largos es exponencial. Lo anterior se muestra en la Fig. 3.2, notemos que el comportamiento exponencial de la distribución es independiente de la magnitud del desorden. Se obtiene una distribución exponencial debido a la relación que existe entre  $K(t)$  y  $SP(t)$ , por tanto el comportamiento de la distribución correspondiente a  $K(t)$  también está dado por la ecuación (3.4).

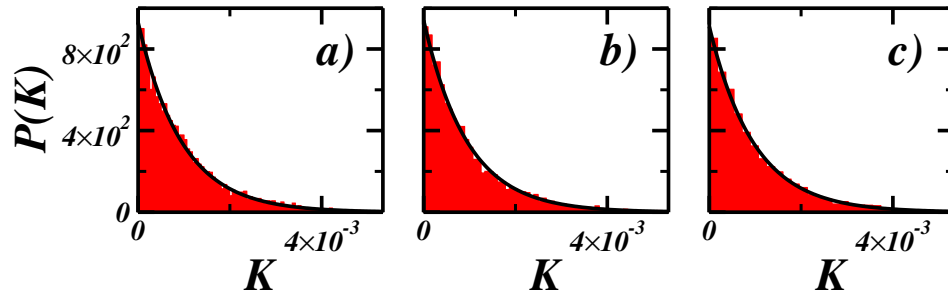


Figura 3.2: Distribución del factor de forma espectral en una ventana de tiempos largos para el modelo  $XXZ+h$ . Se consideró  $L=16$  y la magnitud del desorden a)  $h=0.5$ , b)  $h=3.75$  y c)  $h=6.0$ . Las curvas negras corresponden a los ajustes a distribuciones exponenciales con parámetros de ajuste a)  $\lambda=899.513$ , b)  $\lambda=873.455$  y c)  $\lambda=915.178$ .

Por otra parte, cuando se toma  $h=0$  y  $J_z=0$  en la ecuación (2.2) se obtiene el modelo  $XX$ , el cual presenta un alto grado de degeneraciones [71] y éstas hacen que no se cumpla el CLT. Fue realizado un análisis de las distribuciones del factor de forma espectral partiendo del modelo  $XXZ$  (para el cual se satisface el CLT) variando  $\Delta$  desde  $\Delta=1$  hasta  $\Delta=0$  (modelo  $XX$ ) y se encontró que el valor mínimo necesario para que se satisfaga el CLT es  $\Delta=10^{-3}$ . Lo anterior no nos permitió cuantificar el grado de degeneración permitido para que se satisfaga el CLT, entonces con el modelo GOE encontramos que cuando más del 2.5% de los niveles energéticos son iguales, no se cumple el CLT y la distribución correspondiente no es exponencial (ver Fig. 3.3). En este caso las degeneraciones se indujeron después de diagonalizar el hamiltoniano igualando determinado número de niveles energéticos.

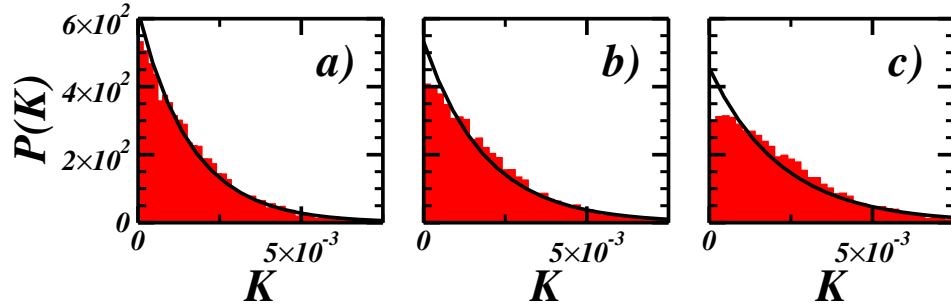


Figura 3.3: Distribución del factor de forma espectral en una ventana de tiempos largos para el modelo GOE. El porcentaje de niveles energéticos con el mismo valor es a) 2.5 %, b) 3 % y c) 3.5 %, además el tamaño de la matriz es  $N = 1000$ . Las curvas negras corresponden a los ajustes a distribuciones exponenciales con parámetros de ajuste a)  $\lambda = 620.979$ , b)  $\lambda = 531.545$  y c)  $\lambda = 454.366$ .

### 3.2.2. Rol del estado inicial

En el caso del modelo  $XXZ+h$  y la probabilidad de supervivencia el cumplimiento del CLT depende de las componentes del estado inicial, esto se debe a que para el factor de forma espectral el CLT siempre se cumple. Dado lo anterior, hemos analizado las distribuciones de esta cantidad con el modelo  $XXZ + h$  y distintos estados iniciales encontrando que solamente las componentes de un estado inicial aleatorio o un estado inicial extendido en la base de los estados propios del hamiltoniano dan lugar al cumplimiento del CLT independientemente del tamaño de la cadena y de la magnitud del desorden (ver Fig. 3.4).

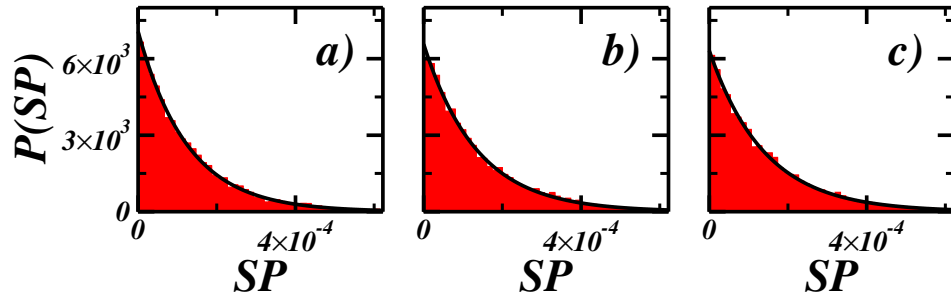


Figura 3.4: Distribución de los valores de la probabilidad de supervivencia en una ventana de tiempos largos para el modelo  $XXZ + h$ . Se considera un estado inicial aleatorio, el tamaño de la cadena es  $L = 16$  y la magnitud del desorden es a)  $h = 0.5$ , b)  $h = 3.75$  y c)  $h = 6.0$ . Las curvas negras corresponden a los ajustes a distribuciones exponenciales con parámetros de ajuste a)  $\lambda = 7067.78$ , b)  $\lambda = 6570.06$  y c)  $\lambda = 6313.76$ .

En la Fig. 3.4 se puede observar una distribución exponencial independientemente de la magnitud del desorden y esto nos dice que las componentes del estado inicial considerado no están correlacionadas o que las correlaciones no son lo suficientemente fuertes como para impedir el cumplimiento del CLT. Además, para saber qué tan correlacionadas se encuentran las componentes del estado inicial y qué tanto afectan estas correlaciones el cumplimiento del CLT estudiamos la dimensión generalizada  $D_2$ , la cual se obtiene a partir de la expresión

$$\langle IPR_2 \rangle \propto N^{-D_2}, \quad (3.7)$$

donde  $\langle IPR_2 \rangle$  es el promedio de ensamble de  $IPR_2$  y  $N$  es la dimensión del espacio de Hilbert. La expresión teórica para  $IPR_2$  es

$$IPR_2 = \sum_{\alpha=1}^N |\langle \psi_\alpha | \Phi \rangle|^4, \quad (3.8)$$

y es una medida del grado de extensión del estado  $|\Phi\rangle$  en la base formada por los estados  $|\psi_\alpha\rangle$  (ver ecuación (1.7)). En la práctica el valor de  $D_2$  corresponde a la pendiente del ajuste de  $\ln(\langle IPR_2 \rangle)$  vs  $\ln(N)$ , el cual es de la forma  $\ln(\langle IPR_2 \rangle) = A - D_2 \ln(N)$ . El valor  $D_2 = 1$  indica ausencia de correlaciones como en estados de matrices GOE y conforme disminuye su valor las correlaciones se incrementan. Asimismo, el valor  $D_2 = 1$  indica que el estado  $|\Phi\rangle$  está extendido en la base formada por los estados  $|\psi_\alpha\rangle$ , mientras que el valor  $D_2 = 0$  indica que el estado  $|\Phi\rangle$  se encuentra localizado en dicha base [72–74]. Ahora, realizamos el estudio de esta dimensión generalizada con los modelos  $XX$  y  $XXZ$  y encontramos  $A = 0.43$ ,  $D_2 = 0.7432$  para el modelo  $XX$  mientras que para el modelo  $XXZ$   $A = -0.021$ ,  $D_2 = 0.7653$  (ver Fig. 3.5). Estos resultados indican que los estados considerados (los estados con la energía más cercana a cero) están extendidos y tienen componentes poco correlacionadas. Además, anteriormente hemos visto que para el modelo  $XX$  no se cumple el CLT debido a las degeneraciones mientras que para el modelo  $XXZ$  si se cumple. En vista de lo anterior podemos decir que pocas correlaciones en las componentes del estado inicial no afectan el cumplimiento o incumplimiento del CLT.

En resumen, para que se cumpla el CLT y por lo tanto la conjetura Aurich-Steiner, es necesario que las degeneraciones en el espectro energético sean débiles o nulas, que el estado inicial sea aleatorio o sea un estado extendido en la base de los estados propios del hamiltoniano y que las componentes del estado inicial no estén o estén poco correlacionadas.

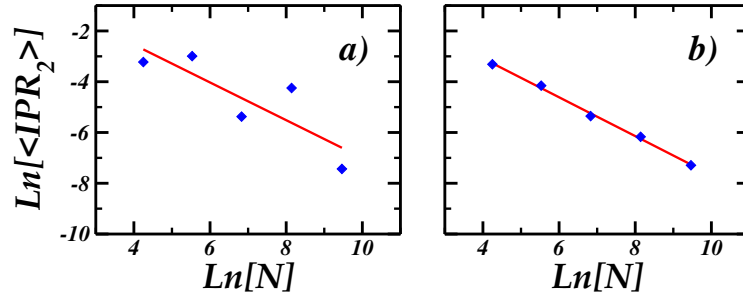


Figura 3.5: Análisis de la dimensión generalizada  $D_2$  para los modelos a)  $XX$  y b)  $XXZ$ . El estado inicial considerado tiene la energía más cercana a cero y las líneas rojas corresponden a ajustes de la forma  $\ln(\langle IPR_2 \rangle) = A + D_2 \ln(N)$ .

Adicionalmente, al analizar la distribución de  $SP(t)$  empleando distintos estados iniciales encontramos que los estados iniciales con energía más cercana a cero tienen mayor probabilidad de ser estados extendidos en la base de los estados propios del hamiltoniano cuando la magnitud del desorden es pequeña. Lo anterior se ve reflejado en el cumplimiento del CLT puesto que cuando el desorden es pequeño es más probable obtener una distribución exponencial para  $SP(t)$  y conforme se incrementa la magnitud del desorden el comportamiento de la distribución se desvía significativamente del comportamiento exponencial (ver Fig. 3.6). Cabe mencionar que este análisis puede emplearse en estudios de localización en sistemas de muchos cuerpos debido a que en el panel (a) el sistema se encuentra en una fase extendida, en el panel (b) en una fase intermedia y en el panel (c) en una fase localizada. Esto es bueno debido a que aquí se usa una sola realización mientras que en estudios tradicionales se requiere un promedio.

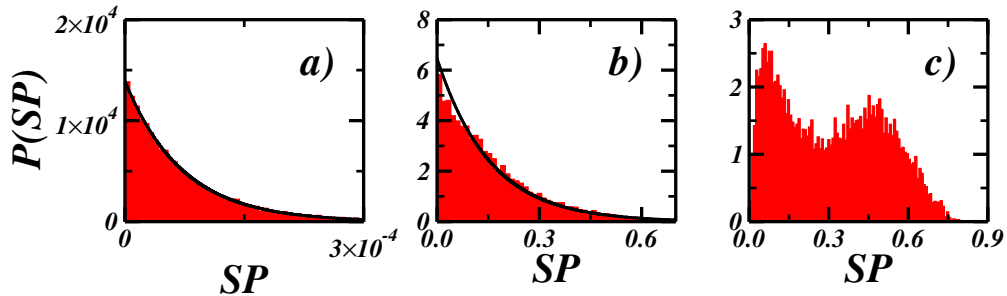


Figura 3.6: Distribución de  $SP(t)$  en una ventana de tiempos largos para el modelo  $XXZ+h$ . El estado inicial es aquel con la energía más cercana a cero,  $L = 18$  y la magnitud del desorden es a)  $h = 0.5$ , b)  $h = 3.75$  y c)  $h = 6.0$ . Las curvas negras corresponden a ajustes de distribuciones exponenciales con parámetros de ajuste a)  $\lambda = 13925.6$  y b)  $\lambda = 6.47$ .

### 3.2.3. Análisis del CLT en distintas escalas temporales

Hasta el momento hemos estado trabajando con escalas de tiempo mayores que el tiempo de relajación, esto se debe a que la conjetura Aurich-Steiner fue establecida considerando una ventana de tiempos largos pero ¿qué pasa en otras escalas temporales? Para responder a esta pregunta analizamos diferentes escalas de tiempo para saber cuál es la más adecuada para estudiar esta conjetura, dicho análisis se realizó empleando la probabilidad de supervivencia y el modelo GOE. Los resultados se presentan en la Fig. 3.7.

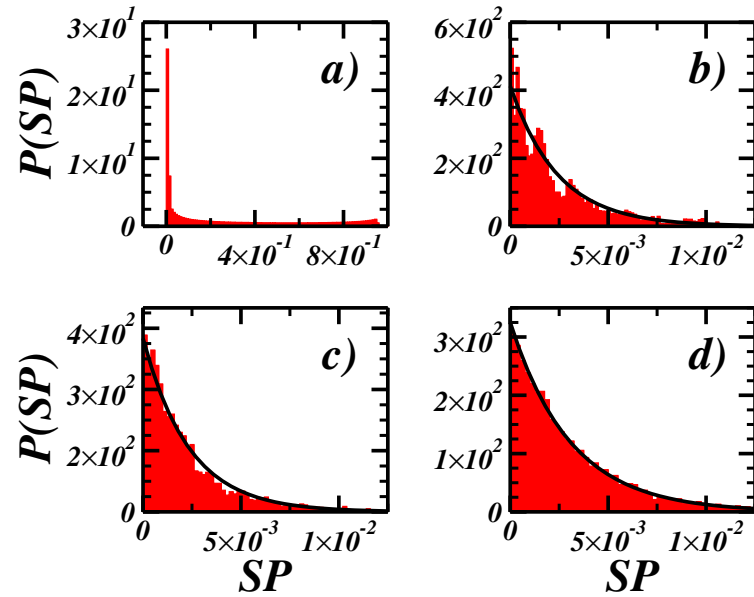


Figura 3.7: Distribución de los valores de  $SP(t)$  en distintas ventanas de tiempo para el modelo GOE. El estado inicial considerado es un estado extendido en la base de los estados propios del hamiltoniano y el tamaño de la matriz es  $N = 1000$ . Las curvas negras corresponden a los ajustes a distribuciones exponenciales con parámetros de ajuste b)  $\lambda = 412.335$ , c)  $\lambda = 425.493$  y d)  $\lambda = 325.12$ .

En el panel (a) de la Fig. 3.7 se observa que a tiempos pequeños  $t \in [10^{-2}, 10^{-1}]$  la distribución no es exponencial y esto se debe a que la dependencia de  $SP(t)$  en  $t$  va como  $e^{-i(E_\alpha - E_\beta)t}$ , entonces en este intervalo de tiempo los valores de esta exponencial son parecidos y esto genera la punta que presenta la distribución. Conforme avanzamos en el tiempo las distribuciones presentan un comportamiento que se acerca al exponencial, tal como vemos en los paneles (b) y (c), los cuales corresponden a tiempos cercanos al tiempo de Thouless (b)  $t \in [0.6, 8]$  y tiempos menores al tiempo de relajación (c)  $t \in$

[15, 30]. Finalmente, en una ventana de tiempos más grandes que el tiempo de relajación  $t \in [10^4, 1.5 \times 10^4]$  (panel (d)) la distribución se ajusta a una distribución exponencial de mejor forma que las dos anteriores, lo cual nos permite concluir que ésta es la escala de tiempo más adecuada para realizar el estudio de la conjetura Aurich-Steiner y el CLT.

### 3.2.4. Observables

Se estudia la conjetura en términos de las funciones de correlación  $I(t)$  y  $C(t)$  (ecuaciones (2.5) y (2.6)) debido a que éstas se pueden analizar experimentalmente. La estructura matemática de estas funciones nos permite inferir que cuando se cumple el CLT la distribución de los valores de estas observables en una ventana de tiempos largos es gaussiana [66].

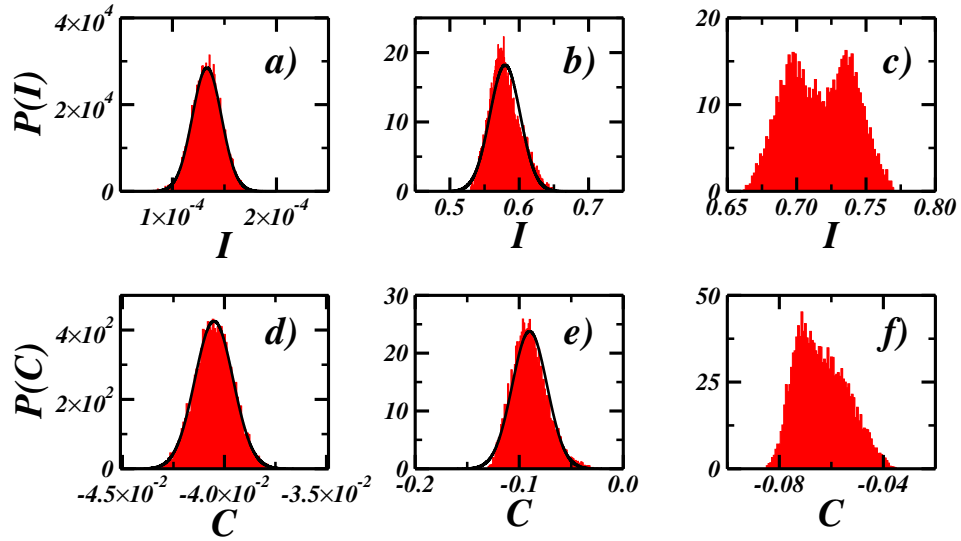


Figura 3.8: Distribución de los valores de las observables  $I(t)$  y  $C(t)$  en una ventana de tiempos largos para el modelo  $XXZ + h$ . Se considera como estado inicial a aquel cuya energía es la más cercana a cero,  $L = 18$  y la magnitud del desorden es  $h = 0.5$  para los paneles a) y d),  $h = 3.75$  para los paneles b) y e) y  $h = 6.0$  para los paneles c) y f). Las curvas negras son los ajustes a distribuciones gaussianas con parámetros de ajuste a)  $\mu = 1.33 \times 10^{-4}$ ,  $\sigma = 1.4 \times 10^{-5}$ , b)  $\mu = 0.579$ ,  $\sigma = 0.022$ , d)  $\mu = -0.041$ ,  $\sigma = 9.4 \times 10^{-4}$  y e)  $\mu = -0.09$ ,  $\sigma = 0.017$ .

En la Fig. 3.8 se observa que para ambas cantidades la distribución presenta un comportamiento gaussiano con  $h = 0.5$  (paneles (a) y (d)), se desvía del comportamiento gaussiano cuando  $h = 3.75$  (paneles (b) y (e)) y es muy diferente a una distribución gaussiana para

$h = 6.0$  (paneles (c) y (f)). Estos resultados son consistentes con los mostrados en la Fig. 3.6 pero en este caso el cumplimiento del CLT no solo depende de las componentes del estado inicial y del espectro energético, sino que también de los elementos del operador de espín.

En resumen, en esta parte de la tesis se analizó la conjetura Aurich-Steiner encontrando que su cumplimiento depende de que el CLT se satisfaga. Mostramos que esto depende del estado inicial considerado, de las correlaciones en el espectro energético, de las correlaciones en las componentes del estado inicial y en el caso de las observables también debe considerarse el papel que juegan los elementos del operador de espín. Además se encontró que las ventanas de tiempos mayores al tiempo de relajación son las más adecuadas para analizar el CLT y la conjetura Aurich-Steiner. En cuanto a las distribuciones, para  $SP(t)$  y  $K(t)$  se obtienen distribuciones exponenciales mientras que para las observables  $I(t)$  y  $C(t)$  se obtienen distribuciones gaussianas cuando se satisface el CLT. Cabe mencionar que estas distribuciones fueron obtenidas con los valores de las cantidades en ventanas de tiempos largos y con una sola realización de la dinámica. Asimismo, algunos de los resultados pueden ser de utilidad en el contexto de localización en sistemas cuánticos de muchos cuerpos ya que permiten distinguir entre una fase localizada y una fase extendida. Además, se encuentra en preparación un manuscrito que será enviado a revista para su posible publicación.

Por otra parte, el estudio de las correlaciones en el espectro energético y en las componentes del estado inicial nos motivó a cuestionarnos sobre las correlaciones en el desorden y cuáles son sus efectos en el contexto de localización de muchos cuerpos, este análisis se muestra en el siguiente capítulo.

---

## Capítulo 4

# Efectos del desorden correlacionado en el contexto de localización de muchos cuerpos

El desorden no correlacionado en sistemas cuánticos con interacciones puede inducir una transición entre una fase ergódica y una fase localizada, a esta transición se le conoce como localización de muchos cuerpos [41]. Se han realizado estudios pero aún no se comprende por completo esta transición, algunas de las preguntas que se tienen al respecto están relacionadas con los efectos de tamaño finito [75–77] y el autopromedio [29, 30, 33]. En cuanto al desorden correlacionado, recientemente se han estudiado sus efectos en el contexto de átomos fríos y *machine learning* [78]. En la Ref. [41] estudiamos los efectos del desorden correlacionado en las propiedades estáticas y dinámicas del modelo de Heisenberg unidimensional con la intención de dar una descripción general de los efectos del desorden correlacionado en la dinámica de este modelo en el contexto de localización de muchos cuerpos. A continuación se presenta dicho estudio.

### 4.1. Análisis

Para nuestro propósito analizamos la estadística de los niveles energéticos empleando la cantidad  $\langle \tilde{r} \rangle$  (ecuación (1.5)), la razón inversa de participación (ecuación (1.7)), la probabilidad de supervivencia (ecuación (1.8)) y la función de autocorrelación de espín

(ecuación (2.5)). Además, el método empleado para generar los campos magnéticos  $h_k$  correlacionados se basa en la función de distribución acumulativa  $F(X)$  de la suma de dos números  $U(0, 1)$  y  $U(0, 1/c)$ , donde  $c$  es un número real positivo. Siendo  $V_k$  un número  $U(0, 1)$  se genera la secuencia

$$\begin{aligned} X_1 &= V_0 + V_1/c \\ X_k &= F(X_{k-1}) + V_k/c, \quad k > 1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

de tal manera que la secuencia de valores  $F(X_k)$  es  $U(0, 1)$  y está correlacionada. Dado lo anterior, los campos magnéticos aleatorios  $h_k$  se obtienen mediante  $h_k = h[2F(X_k) - 1]$ . Cabe mencionar que la distribución  $F(X_k)$  depende del valor de  $c$  y puede determinarse exactamente [79]. El parámetro  $c$  nos permite controlar el grado de correlaciones,  $c \approx 0$  indica ausencia de correlaciones y conforme aumenta el valor de  $c$  las correlaciones también aumentan.

#### 4.1.1. Propiedades estáticas

En la Fig. 4.1 se muestra el análisis de las propiedades estáticas consideradas. En el panel (a) se observa que cuando la magnitud del desorden es pequeña ( $h = 0.5$ , curva roja) los estados se mantienen extendidos independientemente del grado de correlación y este grado de extensión es similar al de los estados del ensamble GOE. Además, cuando las magnitudes del desorden son grandes ( $h = 3.75$  y  $h = 6.0$ , curvas verde y azul respectivamente) se presenta una transición que va de una fase localizada (valores pequeños de  $c$ ) a una fase extendida (valores grandes de  $c$ ).

Por otro lado, para evitar confusión, en este capítulo emplearemos la palabra *repulsión* para referirnos a las correlaciones en el espectro energético. Ahora, en el panel (b) de la Fig. 4.1 se observa que cuando la magnitud del desorden es pequeña ( $h = 0.5$ , curva roja) se presenta una transición que va de repulsión fuerte (de tipo GOE) a repulsión débil (de tipo Poisson) conforme aumenta el valor del parámetro de correlación y cuando la magnitud del desorden es grande ( $h = 3.75$  y  $h = 6.0$ , curvas verde y azul respectivamente) dicha transición se presenta partiendo de repulsión débil (de tipo Poisson) y dirigiéndose hacia repulsión fuerte (de tipo GOE).

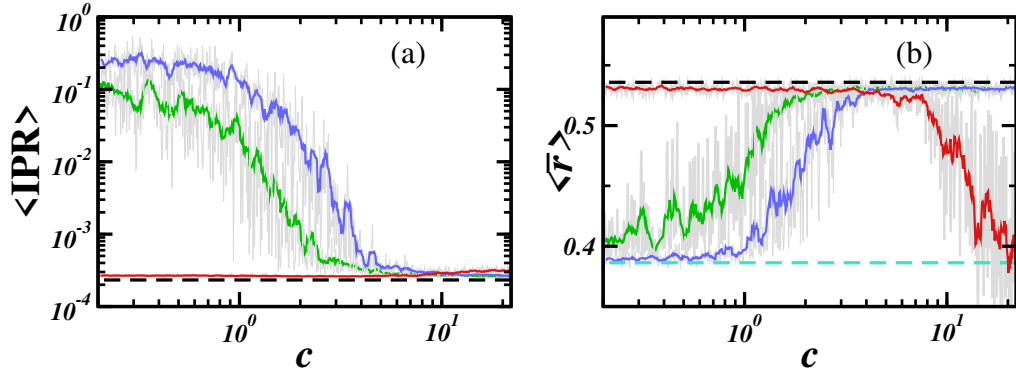


Figura 4.1: Gráficas de a)  $\langle IPR \rangle$  vs  $c$  y b)  $\langle \tilde{r} \rangle$  vs  $c$ . Las curvas sombreadas (grises) representan los datos de una realización mientras que las curvas de color representan promedios sobre ventanas temporales (media móvil). Se consideraron los valores del desorden  $h = 0.5$  (rojo),  $h = 3.75$  (verde) y  $h = 6.0$  (azul), además el tamaño de la cadena  $L = 16$ . Las líneas punteadas color negro corresponden al ensamble GOE mientras que las de color turquesa a una estadística de tipo Poisson. Los datos numéricos para estas últimas son:  $\langle IPR \rangle_{GOE} \sim 0.00023$ ,  $\langle \tilde{r} \rangle_{GOE} = 0.54$  y  $\langle \tilde{r} \rangle_{Poisson} = 0.39$ .

### 4.1.2. Propiedades dinámicas

Como se ha mencionado anteriormente, la repulsión se manifiesta en la dinámica de la probabilidad de supervivencia a través del hoyo de correlaciones y el valor de saturación de esta cantidad corresponde al valor del  $IPR$ . Lo anterior se puede observar en la Fig. 4.2, por ejemplo, para el valor del parámetro de correlación  $c = 0.5$  y la magnitud del desorden  $h = 0.5$  (curvas color rojo en la Fig. 4.1) tenemos estados extendidos, esto indica un valor pequeño del  $IPR$  y en consecuencia un valor de saturación pequeño para  $SP(t)$ , además la repulsión es fuerte y esto implica la presencia del hoyo de correlaciones. Dado lo anterior, en la dinámica de la probabilidad de supervivencia se manifiesta un hoyo de correlaciones y un valor de saturación pequeño, esto se puede apreciar en la curva color rojo que se presenta en el panel (d) de la Fig. 4.2. Un segundo ejemplo es la curva color azul del panel (a) de la Fig. 4.2 correspondiente a la magnitud del desorden  $h = 6.0$  con el parámetro de correlación  $c = 15$ . Revisando la Fig. 4.1 podemos ver que en este caso el valor del  $IPR$  es pequeño y esto implica un valor de saturación pequeño, además la repulsión es fuerte y esto indica la manifestación del hoyo de correlaciones. Para las demás curvas de la Fig. 4.2 se puede realizar el mismo análisis, basta con estudiar la Fig. 4.1 para poder inferir la dinámica de la probabilidad de supervivencia.

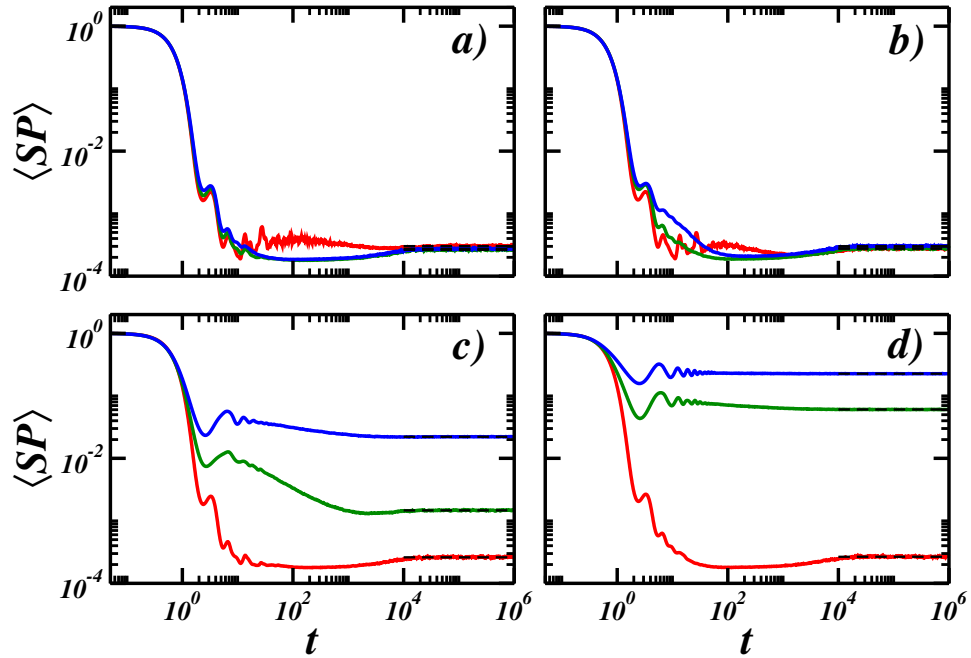


Figura 4.2: Dinámica de  $SP(t)$  con diferentes magnitudes del desorden y distintos grados de correlación, a)  $c = 15$ , b)  $c = 8$ , c)  $c = 2$  y d)  $c = 0.5$ . Se considera  $L = 16$  y para cada panel  $h = 0.5$  (curva color rojo),  $h = 3.75$  (curva color verde) y  $h = 6.0$  (curva color azul). Las líneas punteadas color negro corresponden a los valores de saturación. Se consideró un promedio sobre 500 estados iniciales y 50 realizaciones, además se realizó un promedio sobre ventanas temporales (media móvil).

Por otro lado, debido a que la función de autocorrelación de espín puede presentar valores negativos decidimos estudiar su valor absoluto. Los resultados obtenidos resultaron ser no triviales y se presentan en la Fig. 4.3. El comportamiento general (decaimiento inicial, manifestación de un hoyo de correlaciones y alcanzar un valor de saturación) es similar al que presenta la probabilidad de supervivencia. Notemos que en este caso el hoyo de correlaciones no se encuentra definido como en el caso de la probabilidad de supervivencia, además cuando la magnitud del desorden es  $h = 0.5$  y el parámetro de correlación toma los valores a)  $c = 15$ , b)  $c = 8$  y c)  $c = 2$  la presencia de los valores negativos de esta función se hace notar a través de fluctuaciones. Estos resultados sobre la dinámica y los correspondientes a las cantidades estáticas antes presentados nos indican que la inclusión de desorden correlacionado nos lleva a una variedad de resultados interesantes que no podrían observarse en el caso de desorden no correlacionado.

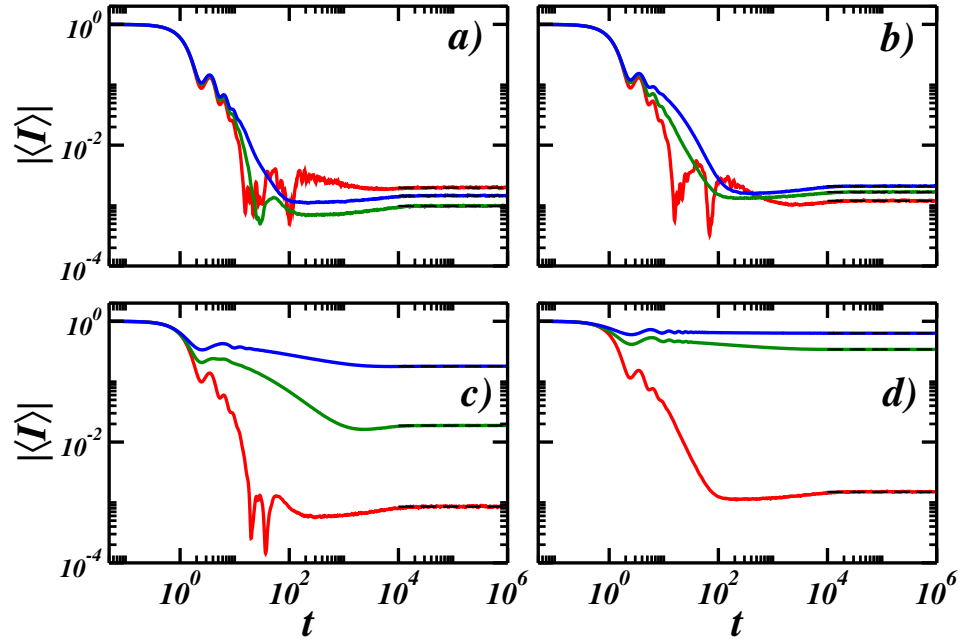


Figura 4.3: Dinámica del valor absoluto de  $I(t)$  con diferentes magnitudes del desorden y distintos grados de correlación, a)  $c = 15$ , b)  $c = 8$ , c)  $c = 2$  y d)  $c = 0.5$ . Se considera  $L = 16$  y para cada panel  $h = 0.5$  (curva color rojo),  $h = 3.75$  (curva color verde) y  $h = 6.0$  (curva color azul). Las líneas punteadas color negro corresponden a los valores de saturación. Se consideró un promedio sobre 500 estados iniciales y 50 realizaciones, además se realizó un promedio sobre ventanas temporales (media móvil).

### 4.1.3. Dependencia en el tamaño del sistema

El análisis respecto al tamaño del sistema se presenta en las figuras 4.4 y 4.5. En el panel (a) de la Fig. 4.4 se observa una transición que va de repulsión fuerte a repulsión débil para todos los tamaños del sistema considerados. Podemos decir que la transición no tendrá lugar en el límite  $L \rightarrow \infty$  debido a que conforme aumenta el tamaño del sistema también aumenta el valor del parámetro de correlación a partir del cual dicha transición ocurre. En los paneles correspondientes a magnitudes grandes del desorden ( $h = 3.75$  y  $h = 6.0$ , paneles (b) y (c) respectivamente) podemos observar transiciones que van de repulsión débil a repulsión fuerte independientemente del tamaño del sistema. Notemos que las curvas correspondientes a  $L = 18$  (paneles (b) y (c), curvas color turquesa) están incompletas pero esto no afecta el comportamiento general, el cual es similar al de las curvas correspondientes a otros valores de  $L$ .

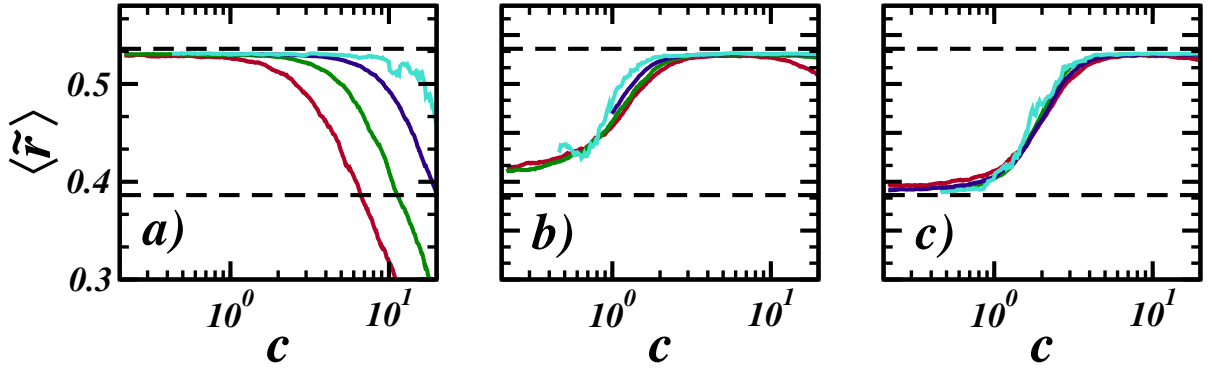


Figura 4.4: Gráficas de  $\langle \tilde{r} \rangle$  vs  $c$  con diferentes magnitudes del desorden, a)  $h = 0.5$ , b)  $h = 3.75$  y c)  $h = 6.0$ . Los tamaños del sistema considerados son  $L = 12$  (curva color rojo),  $L = 14$  (curva color verde),  $L = 16$  (curva color azul) y  $L = 18$  (curva color turquesa). Se consideraron 40 realizaciones y un promedio sobre ventanas temporales (media móvil). Las líneas color negro punteadas corresponden a GOE (superior,  $\langle \tilde{r} \rangle_{GOE} = 0.54$ ) y a Poisson (inferior,  $\langle \tilde{r} \rangle_{Poisson} = 0.39$ ).

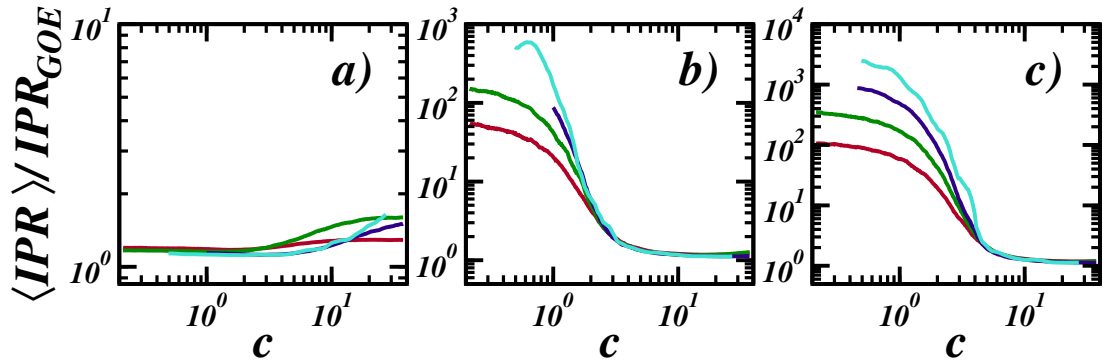


Figura 4.5: Gráficas de  $\langle IPR \rangle / IPR_{GOE}$  vs  $c$  con diferentes magnitudes del desorden, a)  $h = 0.5$ , b)  $h = 3.75$  y c)  $h = 6.0$ . Los tamaños del sistema considerados son  $L = 12$  (curva color rojo),  $L = 14$  (curva color verde),  $L = 16$  (curva color azul) y  $L = 18$  (curva color turquesa). Se consideró un promedio sobre 200 estados iniciales y 40 realizaciones, además se realizó un promedio sobre ventanas temporales (media móvil).

Por otra parte, en la Fig. 4.5 se muestra el análisis del  $IPR$  normalizado con el  $IPR$  correspondiente a GOE. En el panel (a) se presentan los resultados obtenidos para la magnitud del desorden  $h = 0.5$ , éstos indican que los estados están extendidos independientemente del tamaño del sistema y del grado de correlación pues el valor del  $IPR$  es muy parecido al de GOE. Para otras magnitudes del desorden ( $h = 3.75$  y  $h = 6.0$ , paneles (b) y (c))

respectivamente) la dependencia en el tamaño del sistema se manifiesta cuando el grado de correlación es pequeño y cuando éste es grande esta dependencia desaparece. En estos casos se presenta una transición que va de estados localizados a estados extendidos conforme se incrementa el valor del parámetro de correlación. Notemos que en los paneles (b) y (c) las curvas correspondientes a  $L = 16$  y  $L = 18$  no están completas pero esto no afecta el comportamiento general, al igual que en los paneles (b) y (c) de la Fig. 4.4.

En resumen, los resultados obtenidos no son triviales y resultan bastante interesantes en el sentido de que no se podrían observar en el caso de desorden no correlacionado. En cuanto al análisis de la dinámica respecto al tamaño del sistema basta con analizar las figuras 4.4 y 4.5 para inferir el comportamiento de las cantidades dinámicas consideradas. Con lo anterior damos por concluido este trabajo de tesis y en el siguiente capítulo se presentan las conclusiones generales.

---

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo de tesis se analizaron algunos aspectos de la evolución temporal de sistemas cuánticos complejos unidimensionales. En la primera parte se estudiaron los efectos de los acoplamientos de largo alcance en el modelo de Anderson unidimensional. Analizamos algunas propiedades estáticas y posteriormente un par de propiedades dinámicas, además mostramos cómo se manifiestan las propiedades estáticas en la dinámica de la probabilidad de supervivencia y finalmente estudiamos dos escalas temporales: tiempo de Thouless y tiempo de relajación. Entre los resultados obtenidos destacan los correspondientes a los acoplamientos de la misma magnitud entre todos los sitios, se encontró que las correlaciones en el espectro energético son independientes de la magnitud del desorden y del tamaño del sistema mientras que los estados están igualmente localizados pero en este caso si hay dependencia en el tamaño del sistema. La manifestación de las correlaciones en el espectro energético se da mediante la presencia del hoyo de correlaciones y la razón inversa de participación se ve reflejada en el valor de saturación de la probabilidad de supervivencia. Por otro lado, las escalas temporales presentan un comportamiento lineal respecto al tamaño del sistema y este comportamiento es independiente del rango de los acoplamientos.

En la segunda parte de la tesis se realizó un estudio de la propiedad de autopromedio en relación con el tiempo. Este análisis se desarrolló calculando las distribuciones de ciertas cantidades en distintas escalas de tiempo con la intención de saber si éstas y sus propiedades nos podrían ayudar a determinar cuándo se cumple el autopromedio. En tiempos mayores al tiempo de relajación se encontraron distribuciones gaussianas para cantida-

des autopromediables y esto podría considerarse como una señal de que una distribución gaussiana corresponde a una cantidad autopromediable pero los resultados obtenidos para tiempos cortos no son consistentes con este enunciado, pues en tiempos cortos se encontraron distribuciones gaussianas para cantidades no autopromediables.

En la tercera parte se estudió la conjetura Aurich-Steiner. Encontramos que el cumplimiento de esta conjetura depende de que se satisfaga el CLT y para que esto suceda se necesita que las componentes del estado inicial no estén correlacionadas o se encuentren poco correlacionadas y que el grado de degeneración en el espectro energético sea pequeño o nulo. Además, se encontró que los estados cuyas componentes están poco correlacionadas son estados aleatorios o estados extendidos en la base de los estados propios del hamiltoniano que dicta la evolución. Asimismo, cuando se cumple el CLT las distribuciones correspondientes al factor de forma espectral y a la probabilidad de supervivencia son exponenciales mientras que las correspondientes a la función de autocorrelación de espín y a la función de correlación conexas espín-espín son gaussianas. Además, algunos de los resultados podrían ser de utilidad en el contexto de localización en sistemas de muchos cuerpos debido a que nos permiten distinguir entre una fase localizada y una fase extendida.

El análisis que se llevó a cabo en la tercera parte sobre las correlaciones nos condujo a realizar un estudio de los efectos del desorden correlacionado en el contexto de localización de muchos cuerpos, el cual está contenido en la cuarta parte de este trabajo de tesis. Los resultados obtenidos resultaron ser no triviales e interesantes debido a que no podrían observarse en el caso de desorden no correlacionado.

Para finalizar, como resultado de este trabajo de tesis se publicaron dos artículos, uno corresponde al estudio del autopromedio y el otro corresponde al análisis de los efectos del desorden correlacionado en el contexto de localización de muchos cuerpos (ver *apéndice A*). Se encuentran en preparación los manuscritos correspondientes al estudio de los efectos de acoplamiento de largo alcance en el modelo de Anderson unidimensional y al análisis de la conjetura Aurich-Steiner.

---

# Apéndice A

## Publicaciones

En el periodo de tiempo en que se cubrió el plan de estudios de doctorado en el IFUAP-BUAP se publicó un par de artículos y los resúmenes de éstos se muestran a continuación.

---

PHYSICAL REVIEW E **102**, 062126 (2020)

---


### **Self-averaging in many-body quantum systems out of equilibrium: Time dependence of distributions**

E. Jonathan Torres-Herrera,<sup>1</sup> Isaías Vallejo-Fabila,<sup>1</sup> Andrei J. Martínez-Mendoza,<sup>2</sup> and Lea F. Santos<sup>3</sup> 

<sup>1</sup>*Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apt. Postal J-48, Puebla 72570, Mexico*

<sup>2</sup>*División de Estudios de Posgrado e Investigación, Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Oaxaca, C.P. 68030, Oaxaca de Juárez, Mexico*

<sup>3</sup>*Department of Physics, Yeshiva University, New York City, New York 10016, USA*

 (Received 16 June 2020; revised 26 August 2020; accepted 10 November 2020; published 11 December 2020)


In a disordered system, a quantity is self-averaging when the ratio between its variance for disorder realizations and the square of its mean decreases as the system size increases. Here, we consider a chaotic disordered many-body quantum system and search for a relationship between self-averaging behavior and the properties of the distributions over disorder realizations of various quantities and at different timescales. An exponential distribution, as found for the survival probability at long times, explains its lack of self-averaging, since the mean and the dispersion are equal. Gaussian distributions, however, are obtained for both self-averaging and non-self-averaging quantities. Our studies show also that one can make conclusions about the self-averaging behavior of one quantity based on the distribution of another related quantity. This strategy allows for semianalytical results, and thus circumvents the limitations of numerical scaling analysis, which are restricted to few system sizes.

DOI: [10.1103/PhysRevE.102.062126](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.102.062126)

Figura A.1: Resumen del artículo correspondiente al estudio del autopromedio.

PHYSICAL REVIEW B **106**, L220201 (2022)

Letter

**Effects of autocorrelated disorder on the dynamics in the vicinity of the many-body localization transition**Isaías Vallejo-Fabila and E. Jonathan Torres-Herrera \**Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apt. Postal J-48, Puebla 72570, Mexico* (Received 25 June 2022; revised 4 November 2022; accepted 29 November 2022; published 7 December 2022)

The presence of frozen uncorrelated random on-site potential in interacting quantum systems can induce a transition from an ergodic phase to a localized one, the so-called many-body localization. Here we numerically study the effects of autocorrelated disorder on the static and dynamical properties of a one-dimensional many-body quantum system which exhibits many-body localization. Specifically, by means of some standard measures of energy level repulsion and localization of energy eigenstates, we show that a strong degree of correlations between the on-site potentials in the one-dimensional spin-1/2 Heisenberg model leads to suppression of the many-body localization phase, while level repulsion is mitigated for small disorder strengths, although energy eigenstates remain well extended. Our findings are also remarkably manifested in the time domain, on which we put the main emphasis, as shown by the time evolution of experimentally relevant observables, like the return probability and the spin autocorrelation function.

DOI: [10.1103/PhysRevB.106.L220201](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.106.L220201)

Figura A.2: Resumen del artículo correspondiente al estudio de los efectos del desorden correlacionado en el contexto de localización de muchos cuerpos.

---

# Bibliografía

- [1] Y. Bar-Yam, “Dynamics of Complex Systems” (Addison-Wesley, 1997).
- [2] D. J. Thouless, “The quantum mechanics of many-body systems” (Academic Press, 1972).
- [3] F. Calogero, “Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments” (Springer, 2001).
- [4] B. Sutherland, “Beautiful Models” (World Scientific, 2004).
- [5] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux, “Distribution of the Ratio of Consecutive Level Spacings in Random Matrix Ensembles”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 084101 (2013).
- [6] S. Sorathia, F. M. Izrailev, V. G. Zelevinsky, and G. L. Celardo, “From closed to open one-dimensional Anderson model: Transport versus spectral statistics”, *Phys. Rev. E* **86**, 011142 (2012).
- [7] P. Jurcevic et al. “Quasiparticle engineering and entanglement propagation in a quantum many-body system”, *Nature* **511**, 202–205 (2014).
- [8] P. Richerme et al. “Non-local propagation of correlations in quantum systems with long-range interactions”, *Nature* **511**, 198–201 (2014).
- [9] T. Fukuhara et al. “Quantum dynamics of a mobile spin impurity”, *Nature Phys* **9**, 235–241 (2013).
- [10] G. Kaur, A. Ajoy, and P. Cappellaro, “Decay of spin coherences in one-dimensional spin systems”, *New J. Phys.* **15** 093035 (2013).

- 
- [11] A. Mitra, “Quantum Quench Dynamics”, *Annual Review of Condensed Matter Physics* 9, 245-259 (2018).
- [12] C. Gogolin and J. Eisert, “Equilibration, thermalisation, and the emergence of statistical mechanics in closed quantum systems”, *Rep. Prog. Phys.* 79 056001 (2016).
- [13] M. Schiulaz, E. J. Torres-Herrera, and L. F. Santos, “Thouless and relaxation time scales in many-body quantum systems”, *Phys. Rev. B* 99, 174313 (2019).
- [14] I. de Vega and D. Alonso, “Dynamics of non-Markovian open quantum systems”, *Rev. Mod. Phys.* 89, 015001 (2017).
- [15] T. Monnai, “Generic Evaluation of Relaxation Time for Quantum Many-Body Systems: Analysis of the System Size Dependence”, *J. Phys. Soc. Jpn.* 82, 044006 (2013).
- [16] S. Goldstein, T. Hara, and H. Tasaki, “Time Scales in the Approach to Equilibrium of Macroscopic Quantum Systems”, *Phys. Rev. Lett.* 111, 140401 (2013).
- [17] P. Reimann, “Typical fast thermalization processes in closed many-body systems”, *Nat. Commun.* 7, 10821 (2016).
- [18] T. R. de Oliveira et al. “Equilibration time scales in closed many-body quantum systems ”, *New J. Phys.* 20 033032 (2018).
- [19] E. Jonathan Torres-Herrera, J. A. Méndez-Bermúdez, and Lea F. Santos, “Level repulsion and dynamics in the finite one-dimensional Anderson model”, *Phys. Rev. E* 100, 022142 (2019).
- [20] M. Rigol, V. Dunjko, and M. Olshanii, “Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems”, *Nature* 452, 854–858 (2008).
- [21] L. F. Santos and M. Rigol, “Onset of quantum chaos in one-dimensional bosonic and fermionic systems and its relation to thermalization”, *Phys. Rev. E* 81, 036206 (2010).
- [22] E. J. Torres-Herrera and L. F. Santos, “Effects of the interplay between initial state and Hamiltonian on the thermalization of isolated quantum many-body systems”, *Phys. Rev. E* 88, 042121 (2013).

- 
- [23] F. Borgonovi, F. M. Izrailev, L. F. Santos, and V. G. Zelevinsky, “Quantum chaos and thermalization in isolated systems of interacting particles”, *Phys. Rep.* 626, 1 (2016).
- [24] L. D’Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and M. Rigol, “From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics”, *Adv. Phys.* 65, 3, 239-362 (2016).
- [25] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbène, “Quantum simulations with ultracold quantum gases”, *Nature Phys* 8, 267–276 (2012).
- [26] L. F. Santos and A. Mitra, “Domain wall dynamics in integrable and chaotic spin-1/2 chains”, *Phys. Rev. E* 84, 016206 (2011).
- [27] D. Gobert, C. Kollath, U. Schollwöck, and G. Schütz, “Real-time dynamics in spin-1/2 chains with adaptive time-dependent density matrix renormalization group”, *Phys. Rev. E* 71, 036102 (2005).
- [28] A. Dymarsky, “Mechanism of macroscopic equilibration of isolated quantum systems”, *Phys. Rev. B* 99, 224302 (2019).
- [29] M. Schiulaz, E. J. Torres-Herrera, F. Pérez-Bernal, and L. F. Santos, “Self-averaging in many-body quantum systems out of equilibrium: Chaotic systems”, *Phys. Rev. B* 101, 174312 (2020).
- [30] E. J. Torres-Herrera, G. De Tomasi, M. Schiulaz, F. Pérez-Bernal, and L. F. Santos, “Self-averaging in many-body quantum systems out of equilibrium: Approach to the localized phase”, *Phys. Rev. B* 102, 094310 (2020).
- [31] J. Richter, D. Schubert, and R. Steinigeweg, “Decay of spin-spin correlations in disordered quantum and classical spin chains”, *Phys. Rev. Research* 2, 013130 (2020).
- [32] I. M. Lifshitz, S. A. Gredeskul, and L. A. Pastur, “Introduction to the Theory of Disordered Systems” (Wiley, New York, 1988).
- [33] E. J. Torres-Herrera, I. Vallejo-Fabila, A. J. Martínez-Mendoza, and L. F. Santos, “Self-averaging in many-body quantum systems out of equilibrium: Time dependence of distributions”, *Phys. Rev. E* 102, 062126 (2020).

- 
- [34] T. Tél and M. Gruiz, “Chaotic Dynamics” (Cambridge University Press, 2006).
- [35] A. Gubin and L. F. Santos, “Quantum chaos: An introduction via chains of interacting spins  $1/2$ ”, *Am. J. Phys.* 80, 246 (2012).
- [36] E. P. Wigner, “Random Matrices in Physics”, *SIAM Review*, 9, 1, 1-23 (1967).
- [37] F. J. Dyson, “Statistical theory of the energy levels of complex systems. I”, *J. Math. Phys.* 3, 140 (1962).
- [38] M. L. Mehta, “On the statistical properties of the level-spacings in nuclear spectra”, *Nuclear Physics*, 18, 395-419 (1960).
- [39] A. Pandey, A. Kumar, S. Puri, “Quantum Chaotic Systems and Random Matrix Theory”, [arXiv:1905.10596](https://arxiv.org/abs/1905.10596)
- [40] R. Aurich and F. Steiner, “Temporal Quantum Chaos”, *International Journal of Modern Physics B*, 13, 18, 2361-2369 (1999).
- [41] I. Vallejo-Fabila and E. J. Torres-Herrera, “Effects of autocorrelated disorder on the dynamics in the vicinity of the many-body localization transition”, *Phys. Rev. B* 106, L220201 (2022).
- [42] P. W. Anderson, “Absence of Diffusion in Certain Random Lattices”, *Phys. Rev.* 109, 1492 (1958).
- [43] G. L. Celardo, R. Kaiser, and F. Borgonovi, “Shielding and localization in the presence of long-range hopping”, *Phys. Rev. B* 94, 144206 (2016).
- [44] M. Berry and M. Tabor, “Level clustering in the regular spectrum”, *Proc. R. Soc. Lond.* A356375–394 (1977).
- [45] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, “Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws”, *Phys. Rev. Lett.* 52, 1 (1984).
- [46] E. J. Torres-Herrera, J. Karp, M. Távora, and L. F. Santos, “Realistic Many-Body Quantum Systems vs. Full Random Matrices: Static and Dynamical Properties”, *Entropy* 18(10), 359 (2016).

- 
- [47] M. L. Mehta, “Random Matrices” (Academic Press, 1991).
- [48] L. F. Santos, F. Pérez-Bernal, and E. J. Torres-Herrera, “Speck of chaos”, *Phys. Rev. Research* 2, 043034 (2020).
- [49] A. L. Corps, R. A. Molina, and A. Relaño, “Thouless energy challenges thermalization on the ergodic side of the many-body localization transition”, *Phys. Rev. B* 102, 014201 (2020).
- [50] O. Bohigas and M. P. Pato, “Randomly incomplete spectra and intermediate statistics”, *Phys. Rev. E* 74, 036212 (2006).
- [51] M. Távora, E. J. Torres-Herrera, and L. F. Santos, “Inevitable power-law behavior of isolated many-body quantum systems and how it anticipates thermalization”, *Phys. Rev. A* 94, 041603(R) (2016).
- [52] E. J. Torres-Herrera, and L. F. Santos, “Extended nonergodic states in disordered many-body quantum systems”, *Annalen Der Physik*, 529, 1600284 (2017).
- [53] Jian-Zhong Ma, “Correlation hole of survival probability and level statistics”, *J. Phys. Soc. Jpn*, 64, 4059-4063 (1995).
- [54] M. Schreiber, S. S. Hodgman, P. Bordia, H. P. Lüschen, M. H. Fischer, R. Vosk, E. Altman, U. Schneider, and I. Bloch, “Observation of many-body localization of interacting fermions in a quasirandom optical lattice”, *Science*, 349, 6250, 842-845 (2015).
- [55] P. Bordia, H. Lüschen, S. Scherg, S. Gopalakrishnan, M. Knap, U. Schneider, and I. Bloch, “Probing slow relaxation and many-body localization in two-dimensional quasiperiodic systems”, *Phys. Rev. X* 7, 041047 (2017).
- [56] H. Bernien, S. Schwartz, A. Keesling, et al., “Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator”, *Nature* 551, 579–584 (2017).
- [57] W. L. Tan et al. “Domain-wall confinement and dynamics in a quantum simulator”, *Nat. Phys.* 17, 742–747 (2021).

- 
- [58] J. M. Martinis, M. H. Devoret, and J. Clarke, “Quantum Josephson junction circuits and the dawn of artificial atoms”, *Nat. Phys.* 16, 234–237 (2020).
- [59] R. Nandkishore and D. A. Huse, “Many-Body Localization and Thermalization in Quantum Statistical Mechanics”, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, Vol. 6, 15 (2015).
- [60] J. Kira, D. Kollmar, and L. F. Santos, “An introduction to the spectrum, symmetries, and dynamics of spin-1/2 Heisenberg chains”, *American Journal of Physics* 81, 450 (2013).
- [61] E. J. Torres-Herrera and L. F. Santos, “Dynamics at the many-body localization transition”, *Phys. Rev. B* 92, 014208 (2015).
- [62] E. J. Torres-Herrera, G. De Tomasi, M. Schiulaz, F. Pérez-Bernal, and L. F. Santos, “Self-averaging in many-body quantum systems out of equilibrium: Approach to the localized phase”, *Phys. Rev. B* 102, 094310 (2020).
- [63] T. Kriecherbauer, J. Marklof, and A. Soshnikov, “Random matrices and quantum chaos”, *Proc Natl Acad Sci USA*, Vol. 98, No. 19, 10531-10532 (2001).
- [64] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, “Quantum dynamics of single trapped ions”, *Rev. Mod. Phys.* 75, 281 (2003).
- [65] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, “Many-body physics with ultracold gases”, *Rev. Mod. Phys.* 80, 885 (2008).
- [66] H. J. Hilhorst, “Central limit theorems for correlated variables: some critical remarks”, *Brazilian J. Phys.* 39 371-379 (2009).
- [67] M. M. Siddiqui, “Some problems connected with Rayleigh distributions”, *Journal of Research of the National Bureau of Standards, Section D, Radio Propagation*, 167 (1962).
- [68] H. Kunz, “The probability distribution of the spectral form factor in random matrix theory”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 32 2171 (1999).

- 
- [69] A. Prakash, J. H. Pixley, and M. Kulkarni, “Universal spectral form factor for many-body localization”, *Phys. Rev. Research* **3**, L012019 (2021).
- [70] J. S. Cotler, G. Gur-Ari, M. Hanada, et al., “Black holes and random matrices”, *J. High Energ. Phys.* 2017, 118 (2017).
- [71] P. R. Zangara, A. D. Dente, E. J. Torres-Herrera, H. M. Pastawski, A. Iucci, and L. F. Santos, “Time fluctuations in isolated quantum systems of interacting particles”, *Phys. Rev. E* **88**, 032913 (2013).
- [72] A. Solórzano, L. F. Santos, and E. J. Torres-Herrera, “Multifractality and self-averaging at the many-body localization transition”, *Phys. Rev. Res.*, **3**, L032030 (2021).
- [73] N. Macé, F. Alet, and N. Laflorencie, “Multifractal Scalings Across the Many-Body Localization Transition”, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 180601, L032030 (2019).
- [74] D. J. Luitz, F. Alet, and N. Laflorencie, “Universal Behavior beyond Multifractality in Quantum Many-Body Systems”, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 057203 (2014).
- [75] I.-D. Potirniche, S. Banerjee, and E. Altman, “Exploration of the stability of many-body localization in  $d > 1$ ”, *Phys. Rev. B* **99**, 205149 (2019).
- [76] D. Abanin, J. H. Bardarson, G. De Tomasi, S. Gopalakrishnan, V. Khemani, S. Parameswaran, F. Pollmann, A. Potter, M. Serbyn, and R. Vasseur, “Distinguishing localization from chaos: Challenges in finite-size systems”, *Ann. Phys.* **427**, 168415 (2021).
- [77] P. Sierant and J. Zakrzewski, “Challenges to observation of many-body localization”, *Phys. Rev. B* **105**, 224203 (2022).
- [78] S. Pilati and P. Pieri, “Supervised machine learning of ultracold atoms with speckle disorder”, *Sci. Rep.* **9**, 1 (2019).
- [79] R. Willemain and A. Desautels, “A method to generate autocorrelated uniform random numbers”, *J. Stat. Comput. Simul.* **45**, 23 (1993).