



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA
OPCIÓN EN AUTOMATIZACIÓN

“Control de Posición con Ganancias Variables para Robots Manipuladores.”*

T E S I S

Presentada para obtener el título de:
Maestro en Ciencias de la Electrónica

Presenta:

Ing. Brandon Erick Sánchez García *

Directores:

Dr. Fernando Reyes Cortés (MCEA-FCE-BUAP)

Dra. Olga Guadalupe Félix Beltrán (MCEA-FCE-BUAP)

Dr. Basil M. Al-Hadithi (Universidad Politécnica de Madrid)

Puebla, México

Noviembre 2021

*BECARIO CONACYT

*Trabajo dedicado para:
mi madre Virginia y mi padre Francisco,
mis hermanos Anuar y Shantal,
y mis abuelas Rutila y Raquel.*

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi madre Virginia por enseñarme a confiar en mis talentos, trabajar para obtener nuevas habilidades y a siempre darlo todo para vivir sin arrepentimientos. A mi padre Francisco por inculcarme el valor de la honestidad, brindar mis habilidades para ayudar y avanzar sin perjudicar a los demás. Gracias a ustedes es posible el concluir mis estudios de maestría y los demás sueños que llegue a cumplir a lo largo de mi vida.

Gracias a mis hermanos Anuar y Shantal, por estar conmigo en las buenas y en las malas. Han encarado mis defectos y destacado mis habilidades. Esto me ha ayudado a mejorar como persona. Hemos crecido juntos, adoptando las enseñanzas de nuestros padres para que cada día seamos mejores seres humanos.

Al Dr. Fernando Reyes Cortés por brindarme su valiosa amistad y la oportunidad de trabajar con él. Gracias por compartir conmigo su experiencia y conocimientos, la ayuda para adentrarme en la investigación y por siempre motivarme para seguir creciendo como profesional. Sin duda, ha sido una inspiración, adoptando todo lo aprendido como pilares de mi vida profesional.

A la Dra. Olga Félix Beltrán por todo el apoyo recibido como coordinadora y consejera. Gracias por hacer todo lo posible para que ingresara al programa de posgrado y por los consejos para mejorar como estudiante. Al mismo tiempo, agradecimientos al Dr. Basil Al-Hadithi de la Universidad Politécnica de Madrid por su apoyo y tiempo brindado en este trabajo de investigación.

Agradecido con los profesores del posgrado de Ciencias de la Electrónica por compartir sus conocimientos en bien de nuestra formación: Dra. Amparo Palomino, Dra. Aurora Vargas, Dra. Monserrat Morín, Dr. Abraham Sánchez, Dr. Sergio Vergara y Dr. Jesús López.

A mis mejores amigos, Enrique Cruz, Arturo López y Abigail Calderón. Sus consejos y motivaciones me aportaron mucho para esclarecer mis dudas y pulir mis debilidades. A mis compañeros de posgrado por compartir buenos momentos durante esta etapa, Alfonso, Ernesto, Cristian, Emanuel, Gengis, Luis, Osvaldo, Fernando y Daniel.

Agradezco a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por brindarme las oportunidades necesarias para mi crecimiento desde que empecé la Licenciatura hasta hoy en día. Llevo sus valores y el escudo tatuado para representarlo en sociedad con orgullo.

Al CONACyT por la beca otorgada para concluir satisfactoriamente mis estudios.

A los grandes científicos, Aleksandr Lyapunov, Leonhard Euler, Joseph Lagrange, Karl Astrom, Rudolf E. Kalman, Morikazu Takegaki, S. Arimoto, Rafael Kelly, Victor Santibáñez y Fernando Reyes, por brindar sus conocimientos que han sido fundamentales para el crecimiento de las ciencias en robótica.

”La vida es una preparación para el futuro; y la mejor preparación para el futuro es vivir como si no hubiera ninguno” –Albert Einstein.

Resumen

En este trabajo, se aborda el problema de control de posición de robots manipuladores en su espacio articular mediante el diseño de una familia extensa de reguladores con ganancias variables para robots manipuladores. La familia está formada por dos grupos del tipo Proporcional-Derivarivo (PD): el primero son con acciones no acotadas y el segundo grupo son algoritmos saturados. En ambos ejes, las ganancias están formadas por un grupo extenso de funciones Lipchitz dependientes del error de posición y la velocidad de movimiento, dando lugar a una gama extensa de ganancias variables. Mediante la propuesta de una función estricta de Lyapunov, se demuestra la estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. Asimismo, se demuestra la robustez de los esquemas de control frente a la incertidumbre paramétrica del robot. La sintonía de las ganancias variables es abordada usando dos enfoques: mediante el diseño de una regla matemática explícita y la propuesta de un nuevo esquema de sintonía autónoma desde el contexto de la optimización. Por último, para examinar la funcionalidad y el desempeño de los reguladores propuestos, se presentan resultados experimentales en un robot de transmisión directa de 3 grados de libertad (3 gdl) y un análisis comparativo con reguladores ampliamente conocidos en robótica industrial.

Índice general

Resumen	7
1. Introducción	13
1.1. Antecedentes	14
1.2. Justificación	15
1.3. Objetivos	16
1.3.1. Objetivos Particulares	16
2. Robots manipuladores	19
2.1. Robots de transmisión directa	19
2.1.1. Servomotores	20
2.2. Dinámica de robots manipuladores	23
2.2.1. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange	23
2.2.2. Modelo dinámico	24
2.2.3. Fenómenos físicos y propiedades del modelo dinámico	24
2.3. Control de Posición	26
2.3.1. Moldeo de Energía	27
2.4. Teoría de Estabilidad de Lyapunov	28
2.4.1. Método directo de Lyapunov	29
2.5. Caso de estudio: Robot antropomórfico de 3 gdl	30
3. Diseño de la familia de reguladores con ganancias variables	31
3.1. Reguladores PD con ganancias variables	31
3.1.1. Gama de ganancias variables	32
3.1.2. Estabilidad asintótica y global: Función estricta de Lyapunov	33
3.1.3. Robustez frente a la incertidumbre paramétrica	35
3.1.4. Sintonía de las ganancias variables	35
3.1.5. Simulaciones en robot de 3 gdl	36
3.2. Reguladores saturados con ganancias variables	41
3.2.1. Gama de ganancias variables	42
3.2.2. Estabilidad asintótica y global: Función estricta de Lyapunov	44
3.2.3. Robustez frente a la incertidumbre paramétrica	45
3.2.4. Sintonía de las ganancias variables	46
3.2.5. Simulaciones en robot de 3 gdl	47
4. Reguladores con ganancias variables autosintonizables	53
4.1. Control de posición con sintonía autónoma de las ganancias variables	53
4.2. Regulador PD con ganancias variables autosintonizables	54
4.2.1. Función propuesta de Lyapunov	56

4.3. Regulador saturado con ganancias variables autosintonizables	57
4.3.1. Función propuesta de Lyapunov	61
4.4. Simulaciones en robot de 3 gdl	61
5. Resultados experimentales	67
5.1. Reguladores PD con ganancias variables	68
5.2. Reguladores saturados con ganancias variables	73
5.3. Análisis de desempeño	78
5.4. Comentarios	81
Conclusiones	83
Referencias	93

Índice de figuras

2.1. Motor de transmisión directa	20
2.2. Encoder	21
2.3. Servoamplificador Parkermotor	21
2.4. Zona de trabajo de servomotores	22
2.5. Diagrama esquemático del control de posición	27
2.6. Robot antropomórfico con 3 grados de libertad	30
3.1. Gama de ganancias variables para el regulador PD	32
3.2. Errores de posición del robot con el esquema de control τ_{PDa}	38
3.3. Torque aplicado por el esquema de control τ_{PDa}	38
3.4. Errores de posición del robot con el esquema de control τ_{PDb}	39
3.5. Errores de posición del robot con el esquema de control τ_{PDc}	39
3.6. Torque aplicado por el esquema de control τ_{PDc}	40
3.7. Torque aplicado por el esquema de control τ_{PDb}	40
3.8. Función para la saturación de los esquemas de control	42
3.9. Gama de ganancias variables para los reguladores saturados	43
3.10. Errores de posición del robot con el regulador saturado τ_{sat1}	49
3.11. Torques aplicados por el regulador saturado τ_{sat1}	49
3.12. Errores de posición del robot con el regulador saturado τ_{sat2}	50
3.13. Torques aplicados por el regulador saturado τ_{sat2}	50
3.14. Errores de posición del robot con el regulador saturado τ_{sat3}	51
3.15. Torques aplicados por el regulador saturado τ_{sat3}	51
4.1. Errores de posición del robot con el regulador PD autosintonizable	63
4.2. Torque aplicado al robot con el regulador PD autosintonizable	63
4.3. Errores de posición del robot con el regulador saturado autosintonizable	64
4.4. Torque aplicado al robot con el regulador saturado autosintonizable	64
5.1. Robot de transmisión directa BUAP	68
5.2. Errores de posición del robot con el regulador τ_{PDa}	70
5.3. Torque aplicado al robot con el regulador τ_{PDa}	70
5.4. Errores de posición del robot con el regulador τ_{PDb}	71
5.5. Torque aplicado al robot con el regulador τ_{PDb}	71
5.6. Errores de posición del robot con el regulador τ_{PDc}	72
5.7. Torque aplicado al robot con el regulador τ_{PDc}	72
5.8. Errores de posición del robot con el regulador τ_{sat1}	75
5.9. Torque aplicado al robot con el regulador τ_{sat1}	75
5.10. Errores de posición del robot con el regulador τ_{sat2}	76
5.11. Torque aplicado al robot con el regulador τ_{sat2}	76

5.12. Errores de posición del robot con el regulador τ_{sat3}	77
5.13. Torque aplicado al robot con el regulador τ_{sat3}	77
5.14. Errores de posición del robot con el regulador PD clásico	79
5.15. Errores de posición del robot con el regulador PID clásico	79

Capítulo 1

Introducción

Hoy en día, la demanda de robots manipuladores para la solución de problemas se ha convertido en una actividad clave para el avance del ser humano. Desde la necesidad de usar manipuladores para aumentar la producción en masa de vacunas, hasta robots que son adquiridos para realizar actividades en el hogar. Sin embargo, el repertorio de tareas por solucionar es amplio. Robots manipuladores son sumergidos hasta más de 6 kilómetros sobre el nivel del mar, con el fin de tomar muestras de estos ecosistemas para posteriormente estudiarlos en el laboratorio. Como puede intuirse, las condiciones de trabajo son totalmente distintas a las que existen en tierra firme. Por esta razón, los conceptos teóricos son sustanciales para el desarrollo de la robótica en estas aplicaciones. Por otro lado, la robótica ha venido a revolucionar el área de la salud. En Latinoamérica por ejemplo, hay algunos Sistemas Quirúrgico Robóticos Da Vinci que se encuentran operando. La técnica quirúrgica llevada a cabo por este sistema se caracteriza por ser mínimamente invasiva, encontrándose diversas aplicaciones clínicas tales como: Urología, Ginecología, Cardiología, Gastroenterología y Pediatría. Asimismo, los robots ahora son los protagonistas en el área de biomédica, donde se construyen estos sistemas para asistir a personas con capacidades diferenciadas. Para que las anteriores aplicaciones sean realizadas, es necesario contar con algoritmos de control de alto desempeño, su desarrollo es una actividad científica de interés para el área de robótica [1].

Para poder indicarle una rutina específica a un robot manipulador en su espacio articular, es indispensable abordar el problema de control de movimiento o trayectoria. En términos generales, este consiste en encontrar cada uno de los torques aplicados para cada servomotor de todas las articulaciones del robot. Si el problema se soluciona de manera consistente, las coordenadas articulares siguen fielmente a las coordenadas deseadas variantes en el tiempo. Por otra parte, control de posición (regulación) de robots manipuladores es un caso particular del problema de control de movimiento. En este escenario, no hay una referencia variante en el tiempo que el manipulador deba seguir; es un punto constante en el tiempo, al que se le denomina posición deseada. El objetivo, llevar el extremo final del robot hacia una posición deseada sin importar las condiciones iniciales. Por lo tanto, es estrictamente necesario diseñar un regulador que sea capaz de generar un atractor con un punto de equilibrio asintóticamente estable y global [2].

Para construir estos esquemas de control, muchos investigadores han adoptado la técnica de moldeo de energía [3]. Con esta estrategia, es posible diseñar una familia amplia de reguladores a partir del gradiente de la energía potencial artificial del robot manipulador, menos una función disipativa; la cual, inyecta torque que actúa como amortiguamiento

o freno mecánico a través de la velocidad de movimiento del robot. Dicho gradiente, impulsa al robot hacia la posición deseada, mientras que la función disipativa aplica torque para disminuir los sobretiros y oscilaciones en el transitorio. Sin embargo, los esquemas de control diseñados a partir de esta técnica, tienen sus ganancias constantes. Se ha reportado en la literatura, las mejoras en el desempeño de los algoritmos de control cuando sus ganancias son modificadas como variables. Asimismo, nos encontramos con el problema de sintonía, el cual es complicado, queda a experiencia del diseñador y comúnmente no se usa ningún criterio científico; una mala sintonía perjudica de manera importante el desempeño del regulador. Debido a esto, el control de posición de robots manipuladores con ganancias variables y su sintonía ha sido un tema abierto y de mucho interés para la comunidad científica de control automático y robótica.

1.1. Antecedentes

El concepto de ganancias variables surge a partir de la modificación de las ganancias convencionales como funciones dependientes de alguna variable de estado; en [5], se modifican las ganancias del esquema Proporcional-Derivativo (PD) como funciones continuas dependientes de los estados del robot manipulador. Más tarde en [6], se propone este mismo concepto para el PD con una nueva estructura para las ganancias variables, presentando resultados experimentales en una plataforma de arquitectura abierta para robots manipuladores. Posteriormente, diversos trabajos nombraron a este concepto como ganancias variables. Por otro lado, el problema de control de posición de robots manipuladores y la sintonía de las ganancias de control, se ha abordado desde diferentes perspectivas. La lógica difusa es la metodología más reportada en la literatura para dar solución a esta problemática. Un método muy utilizado es el presentado en [4], el cual se describe un esquema matemático para construir modelos difusos para la identificación de sistemas usando los datos de entrada-salida. Años más tarde, se propone en [7] un esquema PD con compensación de gravedad y adaptación difusa para las ganancias de control, se demuestra la estabilidad asintótica local desde el contexto del método directo de Lyapunov y su funcionamiento en un robot de dos grados de libertad. Un esquema Proporcional-Integral-Derivativo (PID) con estabilidad asintótica local es presentado en [8], donde sus ganancias son autosintonizadas mediante un algoritmo difuso permitiendo que los torques suministrados trabajen dentro de las capacidades de los servomotores del robot. Usando un esquema difuso, las ganancias proporcional y derivativa variables de un PID no lineal son sintonizadas en [9], se logra demostrar la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado y se exponen resultados a nivel experimental del esquema de control propuesto.

Por otro lado, usar algoritmos externos ó redes neuronales para la sintonía automática de las ganancias representa una solución interesante. Un esquema de estimación por mínimos cuadrados y su versión recursiva ponderada es presentado en [10], encontrando los valores numéricos de la ganancia variable para esquemas de control con aplicaciones en estrategias de seguimiento. En [11], se propone un PD con ganancias variables cuya sintonía es alcanzada usando una red neuronal de dinámica estructurada conocida como Growing-Multi-Expert creciente en el tiempo por la colocación de nodos ocultos en el espacio de estados. Los autores en [12], diseñan un esquema de control con ganancia variable basado en redes neuronales para un sistema tele-operado, teniendo respuestas suaves y la eliminación de perturbaciones causadas por espasmos generados por el paciente. Por otro lado,

usar algoritmos externos ó redes neuronales para la sintonía automática de las ganancias representa una solución interesante. Un esquema de estimación por mínimos cuadrados y su versión recursiva ponderada es presentado en [10], encontrando los valores numéricos de la ganancia variable para esquemas de control con aplicaciones en estrategias de seguimiento. En [11], se propone un PD con ganancias variables cuya sintonía es alcanzada usando una red neuronal de dinámica estructurada conocida como Growing-Multi-Expert creciente en el tiempo por la colocación de nodos ocultos en el espacio de estados. Los autores en [12], diseñan un esquema de control con ganancia variable basado en redes neuronales para un sistema tele-operado, teniendo respuestas suaves y la eliminación de perturbaciones causadas por espasmos generados por el paciente.

Sin embargo, la incorporación de algoritmos externos para la sintonía automática de las ganancias del controlador no permite realizar un análisis de estabilidad, ya que dichos algoritmos no pertenece a la ecuación en lazo cerrado. En este sentido, se han propuesto trabajos para realizar la sintonía directa de las ganancias variables; en [16], se realiza la sintonía de las ganancias de un control PD para seguimiento de trayectoria de robots manipuladores, la demostración de estabilidad mediante una función de Lyapunov y resultados a nivel simulación. Un controlador PD con ganancias variables es diseñado en [17], para un robot de transmisión directa de tres grados de libertad se demuestra la estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado y resultados a nivel experimental. Se presenta en [18], las ganancias variables para reguladores no acotados, se muestra su funcionalidad a nivel experimental en un robot de tres grados de libertad y la estabilidad asintótica se demuestra mediante una función estricta de Lyapunov. La propuesta de un algoritmo de control saturado con ganancia derivativa variable es analizado en [19], se demuestra la estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado y se exponen resultados experimentales en un robot de transmisión directa.

1.2. Justificación

Los trabajos antes reportados, no abordan el problema de control de posición en espacio articular para robots manipuladores mediante una familia de algoritmos de control con ganancias variables formadas por funciones Lipchitz, demostrando la estabilidad asintótica mediante una función estricta de Lyapunov. Además, pocos trabajos abordan la sintonía de las ganancias variables usando una regla matemática explícita y la sintonía automática de las ganancias variables desde el contexto de la optimización. Por último, la mayoría de los trabajos reportan resultados de simulación, está es una motivación para presentar resultados experimentales en un robot manipulador con 3 grados de libertad. Las aportaciones incrementales de este trabajo con respecto a los esquemas con ganancias variables ya reportados en la literatura son las siguientes. En ambos ejes, se ha diseñado una gama de ganancias variables formadas por funciones continuas, diferenciales y suaves que dependen del error de posición y la velocidad de movimiento del robot manipulador. El primer diseño consiste en un regulador PD con ganancias variables, debido a que se trata de uno de los reguladores más usados en robots industriales. Sin embargo, al tratarse de un regulador con acciones de control no acotadas, hemos diseñado una familia de reguladores saturados con ganancias variables. El error de posición y la velocidad convencional, son argumentos de funciones acotadas, continuas e impares; esta estructura, permite que la función sea continua en el primer y tercer cuadrante, siendo la zona de trabajo de cualquier servomotor. Para estos reguladores, se propone otra familia de ganancias variables

formadas por funciones Lipchitz del error de posición y la velocidad.

La mayoría de los autores mencionados, no hacen un análisis de estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado. Además, los que incluyen dicho análisis, lo realizan mediante el teorema de invarianza de LaSalle, etc. En este trabajo, la demostración de la estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado formada por los reguladores propuestos con ganancias variables y el modelo dinámico del robot manipulador, es realizada mediante una función estricta de Lyapunov. Esta función candidata, no ha sido reportada en la literatura para reguladores con ganancias variables. Dicha propiedad de estabilidad asintótica, nos permite clasificar a nuestros esquemas de control propuestos como una alternativa importante para aplicaciones como control de trayectoria ó control cartesiano, dada la inmunidad a las condiciones iniciales. Al mismo tiempo, la sintonía de las ganancias variables es lograda, si y solo si, la estabilidad asintótica del punto de equilibrio existe.

Sin embargo, la regla matemática de sintonía no pertenece a la ecuación en lazo cerrado, por lo cual, no es posible realizar un análisis de estabilidad asintótica bajo la influencia de dicha regla para las ganancias variables. Adicionalmente, el usuario debe proponer un valor constante dentro de un intervalo definido, si se elige de forma errónea, no se alcanza la sintonía de las ganancias variables. En este sentido, se ha incorporado un esquema de sintonía autónoma desde el contexto de la optimización. Los errores de los miembros de la matriz diagonal proporcional variable y de la matriz diagonal derivativa variable, son dos nuevas variables estado incorporadas al problema. El objetivo principal es que dichos errores tiendan asintóticamente a cero, esto significa que la sintonía automática de las ganancias variables es alcanzada. Dicho esto, se ha propuesto una función estricta de Lyapunov para demostrar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio incorporando al nuevo esquema de sintonía autónoma. Para medir la funcionalidad y efectividad de los algoritmos de control propuestos, se exponen resultados experimentales en un robot de transmisión directa con 3 grados de libertad.

El siguiente trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presenta el modelo dinámico del robot manipulador, sus propiedades matemáticas y su arquitectura. El diseño de los reguladores con ganancias variables y la demostración de la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio son desarrollados en el Capítulo 3. El Capítulo 4, presenta la estructura de los reguladores con ganancias variables autosintonizables. Los resultados experimentales y el análisis de desempeño son expuestos en el Capítulo 5. Finalmente, se presentan las conclusiones.

1.3. Objetivos

Abordar el problema de control de posición con ganancias variables para robots manipuladores mediante la propuesta de nuevos algoritmos de control con sintonía automática.

1.3.1. Objetivos Particulares

- Diseñar los nuevos esquemas de control de posición con ganancias constantes.
- Generalizar los esquemas de control con ganancias variables y sintonía automática.
- Validación experimental.

- Publicación de resultados.

Capítulo 2

Robots manipuladores

A lo largo de la historia, se ha tratado de dar una definición formal al concepto de robot manipulador. En [20] un robot manipulador se define como una maquina manipuladora con varios grados de libertad controlada automáticamente, reprogramable y con múltiples usos, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil dependiendo la aplicación a realizar. En la industria, se pide que el robot manipulador cumpla con ciertas características dentro de las exigencias de producción, calidad, precisión y normas de seguridad. Sin embargo, la mayoría de los robots manipuladores comerciales son de arquitectura cerrada. Esto significa que solo son controlados por esquemas de control que el fabricante proporciona. Esto representa una desventaja, ya que los algoritmos de control que contienen son de pobre desempeño y por lo tanto la brecha de desarrollo de aplicaciones se hace más grande [2].

Una tecnología novedosa, son los robots de transmisión directa. Estos permiten destruir la barrera de la arquitectura cerrada de los robots comerciales y así abrir la puerta para el diseño de nuevos algoritmos de control, estrategias de identificación paramétrica, visual servoing, control de fuerza, control de impedancia, etc.

2.1. Robots de transmisión directa

Los robots de transmisión directa, nos aporta una tecnología novedosa que permite ampliar el espectro de robots en la actualidad. La definición que han apropiado los robots de transmisión directa es, un manipulador multifuncional reprogramable de uso general para realizar una amplia variedad de tareas, formado por eslabones rígidos conectados en serie a través de articulaciones fabricadas con servomotores de transmisión directa. El diseñar robots de transmisión directa, nos ofrece ventajas importantes en la investigación científica en robótica [2]:

- Funcionan como fuente de par.
- No hay pérdidas en la transmisión de energía.
- No es necesario el acoplamiento de engranes.
- No requieren calibración.
- Reducción del fenómeno de fricción.
- Modelado y programación sencilla.
- Alta resolución del sensor de posición (encoder 4096000 pulsos por revolución).
- Arquitectura abierta para la evaluación experimental de cualquier algoritmo de control.

2.1.1. Servomotores

Un servomotor de transmisión directa es una fuente de par, es decir, el par que suministra se mantiene en magnitud y signo independientemente de la carga que desplace. Los servomotores son sistemas electromecánicos que pertenecen a una clase particular de actuadores eléctricos encargados de transmitir energía para producir el movimiento del robot manipulador. Estos se constituyen principalmente de un motor eléctrico de corriente directa, sensor de posición y un amplificador electrónico. El conjunto de estos componentes dan lugar a los actuadores eléctricos de los robots manipuladores de transmisión directa. En la Figura 2.1, se ilustra la constitución mecánica de un motor de transmisión directa, el cual está constituido por un rotor y un estator sin sistemas de engranajes dentro de él [2]. El uso de dichos motores para la construcción de robots manipuladores resulta clave para el desarrollo de la investigación científica en robótica.



Figura 2.1: Motor de transmisión directa

Encoder incremental

El sensor de posición usado en robótica es el encoder incremental, construidos con tecnología optoelectrónica; consta básicamente de una fuente de luz conformada de un arreglo de diodos LEDs que se encuentra enfrente de un disco giratorio con ranuras; los rayos resultantes pasan por unas rendijas para ser detectados por elementos fotosensibles. La salida del encoder incremental son pulsos que son proporcionales al ángulo de rotación. Por cada fracción de desplazamiento rotacional de la flecha del servomotor, el encoder cambia su salida de bajo hacia alto y viceversa. Los pulsos no representan el valor absoluto de la posición, viene dado por acumular los pulsos de salida; el conteo de estos pulsos se lleva a cabo por un circuito electrónico contador de pulsos. Los encoders de cuadratura (ver Figura 2.2) tienen la apertura de usar dos sensores arreglados sobre el disco que gira, de tal manera que cuando un sensor detecta el límite blanco-negro de la franja causa un cambio de estado, el otro sensor estará exactamente en medio de la otra marca, lo que asegura que responderá en un estado estable conforme el primer sensor cambie de estado. La salida de cada sensor se encuentra con un desfase de 90 grados [2].

Servoamplificadores

Un amplificador electrónico o servo amplificador está constituido por un conjunto de microprocesadores que se encargan de enviar la señal de voltaje de baja potencia (señal de control) que proviene de una computadora digital, acopla al motor la impedancia eléctrica y, también incluye una etapa electrónica encargada de suministrar la potencia que requiere



Figura 2.2: Encoder

el motor. En la Figura 2.3 se observa un servoamplificador marca Parkercompumotor. Este servoamplificador nos permite controlar los campos electromagnéticos y poder procesar comandos secuenciales para la etapa de potencia que se encarga de suministrar la señal trifásica de alimentación directamente de la fuente de alimentación de corriente directa para producir un par aplicado que permita movimiento rotacional en el motor.



Figura 2.3: Servoamplificador Parkermotor

Los servomotores tienen tres modos de operación; posición, velocidad y torque. El modo posición permite mover al motor a una posición preestablecida, sin embargo no puede proporcionar un par o torque como tal; en este modo se emplean reguladores simples tales como el PD y PID. El modo velocidad, controla el movimiento del motor sobre una velocidad deseada, no puede proporcionar torque o par y, tienen la característica de ser de arquitectura cerrada, es decir, no permiten programar otro tipo de controladores. Sin embargo, el modo torque es la configuración más usada en robótica, ya que se caracteriza por brindarnos muchas ventajas para el desarrollo e investigación científica en robótica [2]:

- Arquitectura abierta: nos da la apertura de evaluar de manera experimental el desempeño de algoritmos y esquemas de control. Es esta la razón por la cual las aplicaciones en robótica se incrementan.
- Permite la interacción dinámica con el sistema mecánico del robot, por lo que es posible

compensar los efectos dinámicos del robot para controlar su posición o desplazamiento.

- Control de trayectoria y aplicaciones más complejas tales como: control de fuerza, teleoperación y control de impedancia.

Un punto medular de los servomotores, es que debido a su estructura es posible deducir, a partir de las ecuaciones de Maxwell la ley fundamental para servomotores, la cual determina la relación entre el campo magnético y el par o torque aplicado. La generación del movimiento rotacional con respecto al eje de giro es producido por el torque aplicado, esta ley es la base del desarrollo de la robótica y está planteada en la siguiente ecuación:

$$\tau = kv \quad (2.1)$$

donde τ representa el par aplicado al servomotor con unidades de Nm (*Newton – metro*), k es una constante que representa la ganancia del amplificador electrónico con unidades $\frac{Nm}{V}$ (*Newton – metro/Volt*) y la variable v es el voltaje proveniente de la computadora digital, el cual representa el comando, ley o algoritmo de control que es computado para que el robot realice la operación deseada. Es importante recalcar, que no todos los motores eléctricos cumplen con la ecuación (2.1). Este es el caso de algunos motores de corriente alterna y motores de pasos, y por esta razón no forman parte de la estructura del sistema mecánico del robot manipulador.

Los servomotores emplean voltaje trifásico. Sin embargo, esto no implica que se deben alimentar de la línea trifásica de 220 VAC o 440 VAC; la señal senoidal trifásica es generada en forma discreta (emulando a la señal trifásica continua) por el amplificador electrónico y en cada periodo de muestreo alimenta al motor con voltaje directo; el valor pico a pico de la señal trifásica está en función de las características del motor.

Un servomotor no puede proporcionar un par de magnitud infinita, en la práctica la res-

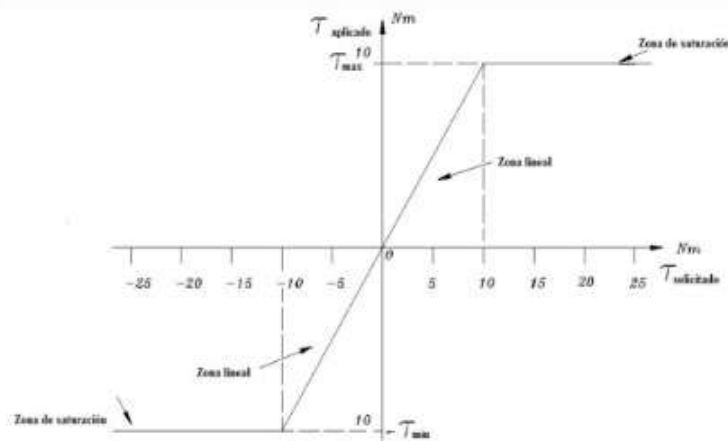


Figura 2.4: Zona de trabajo de servomotores

puesta se encuentra acotada por sus límites físicos. Es por esto que el servomotor debe trabajar en su región lineal, ya que en la zona de saturación produce vibración mecánica, dinámica no modelada y juego mecánico. En la Figura 2.4, se ilustra la gráfica de las distintas zonas de trabajo de un servomotor de transmisión directa. El alto par produce velocidad de rotación con magnitud superior al ancho de banda, por lo que es clave diseñar estrategias de control con acciones acotadas a los límites físicos del servomotor [2].

2.2. Dinámica de robots manipuladores

La importancia del estudio del modelo dinámico de los robots manipuladores, toma fuerza dado que estos se pueden construir de manera virtual. A través de software de simulación (**MATLAB**, **LabView**, entre otros), es posible estudiar los fenómenos físicos del manipulador sin necesidad de tenerlo construido como tal. Este modelo matemático se deduce a través de varios enfoques, uno es el que presenta Leonhard Euler y Joseph Lagrange mediante la mecánica analítica. Posteriormente, la dinámica del robot manipulador cumple con varias propiedades matemáticas intrínsecas del mismo [20].

2.2.1. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

La mecánica analítica representa una herramienta sólida de las ciencias exactas para formular modelos matemáticos de sistemas mecánicos. Como se presenta en [2], a diferencia de la física de Newton o Hamilton, las ecuaciones de Euler-Lagrange representan la mejor alternativa de modelado para robots manipuladores debido a las propiedades matemáticas que se deducen de manera natural usando esa metodología. Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange permiten obtener el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad. La estructura matemática de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se describen en (2.2):

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}_n$ representa el vector de coordenadas articulares o coordenadas generalizadas, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares aplicados, donde el i -ésimo par τ_i se encuentra asociado con la i -ésima coordenada generalizada q_i . También, $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \in \mathbb{R}_n$ es el vector de fuerzas o pares de fricción que dependen de la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ y de la fricción estática \mathbf{f}_e que se encuentra presente en cada una de las articulaciones que constituyen al robot. Por último $t \in \mathbb{R}_+$ representa el tiempo y $n \in \mathbb{N}$ es el número de grados de libertad.

El lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de un robot de n grados de libertad, se define como la diferencia entre la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.3)$$

La energía cinética tiene una estructura cuadrática bien definida en función de la velocidad articular

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.4)$$

$M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia del robot manipulador, la cual es definida positiva.

Por otro lado, la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ no tiene una forma específica. Sin embargo, tiene dependencia exclusivamente del vector de posición \mathbf{q} , ya que se considera su presencia en campos conservativos como la fuerza de gravedad.

Metodología para obtener el modelo dinámico

La obtención del modelo dinámico de un robot manipulador, se puede resumir en cuatro pasos muy específicos.

- Se obtiene la cinemática directa del centro de masa de cada uno de los eslabones. Para el i -ésimo eslabón, tomar en cuenta las longitudes anteriores l_{i-1} y los ángulos q_i y q_{i-1} .

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = f_{\mathbb{R}}(l_i, l_{i-1}, l_{ci}, q_{i-1}, q_i) \quad (2.5)$$

- Se calcula la cinemática diferencial del i -ésimo eslabón y deducir la rapidez lineal.

$$v_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

La rapidez lineal, se calcula de la siguiente forma: $v^T v = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$.

- Obtenemos el modelo de energía.

$$\mathcal{H} = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.7)$$

Posteriormente, se obtiene el lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q})$.

- Finalmente se aplican las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (2.2).

2.2.2. Modelo dinámico

El modelo dinámico de un robot manipulador, permite explicar los fenómenos físicos que se encuentran en su estructura mecánica; tales como efectos inerciales, centrípetas y de Coriolis, par gravitacional y fricción, los cuales son fenómenos físicos intrínsecos o propios de la naturaleza dinámica del robot. Estos fenómenos aparecen en el ancho de banda de operación del robot. El modelo dinámico de un robot de n grados de libertad, formado por eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta [2].

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_c) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.8)$$

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares.
- $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares.
- $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de aceleraciones articulares
- $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva.
- $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis.
- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es vector de pares gravitacionales.
- $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_c) \in \mathbb{R}^n$ es el vector del fenómeno de fricción.
- $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ el vector de pares o torque.

2.2.3. Fenómenos físicos y propiedades del modelo dinámico

Los robots manipuladores contienen diversos fenómenos físicos dinámicos. A su vez, cumpliendo con sus respectivas propiedades matemáticas

Efecto inercial

El efecto inercial representado por $M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ significa el cambio de estado de movimiento del robot manipulador. La matriz de un robot manipulador, tiene las siguientes propiedades:

- La matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica, $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T$, definida positiva $M(\mathbf{q}) > 0$. Por lo que existe la matriz inversa $M(\mathbf{q})^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y también satisface que es una matriz simétrica $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^{-T}$ y definida positiva $M(\mathbf{q})^{-1} > 0$. En robótica una propiedad clave es la característica distintiva de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$; es una matriz definida positiva. Esta propiedad es ampliamente usada en el análisis y diseño de estructuras de control. Su importancia radica en que facilita la demostración de unicidad y existencia de puntos de equilibrio en una ecuación de lazo cerrado formado por el modelo dinámico del robot y el esquema de control.
- El fenómeno inercial de un robot, satisface que $\|M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_{Max}\{M(\mathbf{q})\}\|\ddot{\mathbf{q}}\| \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$; donde $\leq \lambda_{Max}\{M(\mathbf{q})\}$ representa el valor propio máximo de la matriz inercial.
- Constante β del robot: para el caso de los estructurados únicamente de articulaciones rotacionales. $\exists \beta \in \mathbb{R}_+$ tal que:

$$\|M(\mathbf{q})\| \leq \lambda_{Max}\{M(\mathbf{q})\} < \beta \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (2.9)$$

Fuerzas centrípetas y de Coriolis

El vector de fuerzas centrípetas y de Coriolis está representada por $C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$. Las fuerzas centrípetas son fuerzas radiales, teniendo un signo contrario a las fuerzas centrífugas. La fuerza de Coriolis representa una desviación del movimiento de translación debido a su componente de rotación. Las fuerzas centrípetas y de Coriolis tienen las siguientes propiedades:

- La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no es una matriz única, mientras que el vector $C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ si lo es.
- Cuando el vector de velocidades articulares es cero, la matriz de Coriolis satisface $C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})|_{\dot{\mathbf{q}}=0} = C(\mathbf{0}, \mathbf{q}) = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
- La expresión (2.10) se cumple para robots que solo contienen coordenadas articulares.

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_c \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \quad (2.10)$$

- La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ y la derivada de la matriz de inercia $\dot{M}(\mathbf{q})$ satisfacen:

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})] \equiv 0 \quad (2.11)$$

también:

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}; \mathbf{q}) + C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})^T \quad (2.12)$$

Lo anterior se traduce, la matriz resultante $[\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})]$ es una matriz antisimétrica. Esto por la propiedad $\mathbf{x}^T A_{sk} \mathbf{x} = 0$ entonces $A_{sk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es antisimétrica, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. La propiedad de antisimetría facilita el diseño y análisis de estabilidad, cuya demostración para el problema de control de posición se reduce a tres sencillas fases.

Par gravitacional

Para el caso provisto únicamente de articulaciones rotacionales existe una constante α tal que; $\|g(\mathbf{q})\| \leq \alpha \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. También, el vector de pares gravitacionales $g(\mathbf{q})$ y el vector de velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}$ satisfacen:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.13)$$

$$\int_0^t \mathbf{g}(\mathbf{q}(\sigma))^T \dot{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma = \mathcal{U}(\mathbf{q}(t)) - \mathcal{U}(0) \quad (2.14)$$

Fenómeno de fricción

El fenómeno de fricción tiene el efecto físico de oponerse al movimiento del robot manipulador. Su característica principal es un fenómeno disipativo en velocidades diferentes a cero y con entradas acotadas dentro del primer y tercer cuadrante, lo que permite considerar los modelos tradicionales de fricción viscosa y de Coulomb para modelarlos como una combinación lineal de la fricción viscosa, Coulomb y estática. La característica disipativa significa que convierte la energía mecánica en energía térmica, es decir que satisface $\dot{\mathbf{q}}^T f_f(\dot{\mathbf{q}}) > 0$. El efecto disipativo se traduce como un desgaste y envejecimiento en las partes mecánicas del robot; sin embargo, el fenómeno de fricción ayuda a generar la región de atracción de puntos de equilibrio estables. Cada uno de los elementos del modelo de fricción cumple con lo siguiente:

- La fricción estática f_e está representada por $f_e = [f_{e1}, f_{e2}, \dots, f_{en}]^T$ que es el vector de fricción estática que contiene los coeficientes de fricción estática de cada uno de los servomotores del robot manipuladores. Cuando la velocidad es cero, únicamente está presente la fricción estática, satisfaciendo: $f_i = (0, f_{ei}, \tau_i) = \tau_i - g_i(\mathbf{q})$, para $f_{ei} \leq \tau_i - g_i(\mathbf{q}) \leq f_{ei}$ donde f_{ei} es el límite del par de fricción estática para la i -ésima articulación.
- La fricción viscosa satisface:

$$\|B\dot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_{Max}\{B\}\|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (2.15)$$

donde $\lambda_{Max}\{B\}$ es el valor propio máximo de la matriz de coeficientes de fricción viscosa $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- La fricción de Coulomb satisface lo siguiente: $\|F_c \text{signo}(\dot{\mathbf{q}})\| \leq \|F_c\| \sqrt{n} \leq \lambda_{Max}\{F_c\} \sqrt{n}$, donde $\lambda_{Max}\{F_c\}$ es el valor propio de $F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz de fricción de Coulomb y n es el número de grados de libertad del robot manipulador. La función signo se define: $\text{signo}(x) = \frac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$.

2.3. Control de Posición

Llevar a cabo el control de posición del robot manipulador (también llamado regulación), significa que se satisface la necesidad de haber determinado los pares de cada servomotor del robot, de tal manera que las posiciones relacionadas a las coordenadas articulares sigan con exactitud la posición deseada. El problema de control de posición trata de llevar el extremo final del robot manipulador a una posición deseada \mathbf{q}_d para cualquier condición inicial $[\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)]^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Es decir, matemáticamente el problema se describe como encontrar un regulador $\boldsymbol{\tau}$ tal que la velocidad de movimiento $\dot{\mathbf{q}}(t)$ y el error

de posición $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ convergan asintóticamente a cero $\forall t \geq 0$ sin importar las condiciones iniciales $\dot{\mathbf{q}}(0)$ y $\mathbf{q}(0)$, es decir [20]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad (2.16)$$

para todo t mayor o igual a cero.

Un algoritmo de control de posición es una fórmula o ecuación cuya principal característica es generar un atractor a la ecuación de lazo cerrado, formado por el modelo dinámico del robot y la ley de control. La importancia de esta problemática no radica en proponer estrategias de control que cumplan con (2.16), sino que también el desempeño del esquema de control sea alto.

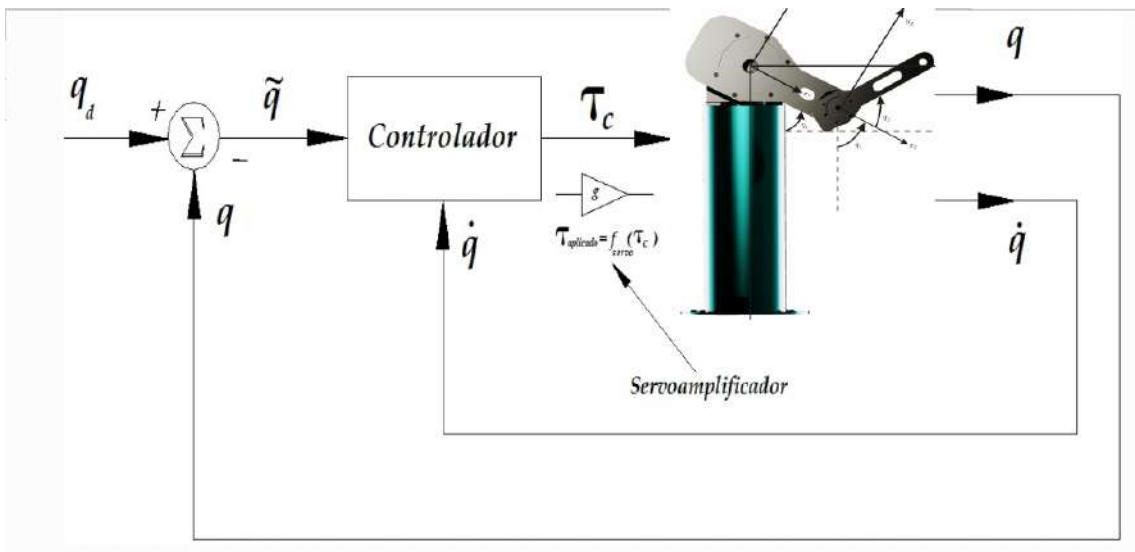


Figura 2.5: Diagrama esquemático del control de posición

En la Figura 2.5 se muestra el diagrama esquemático del lazo cerrado de control de posición en su espacio articular para robots manipuladores. El error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$ se obtiene a partir de la resta entre las posiciones deseadas \mathbf{q}_d y la posición actual \mathbf{q} medida por el encoder. El controlador va a regular al robot manipulador impulsándolo hacia las posiciones deseadas, mientras que la velocidad se retroalimenta directamente hacia el esquema de control para que pueda inyectar torque de amortiguamiento con el fin de no tener respuestas oscilatorias en el régimen transitorio. El servoamplificador, es el encargado de realizar un balance de impedancia, es decir, en función de la señal de control τ_c enviada por la computadora va a amplificar para tener el torque aplicado necesario para los motores de transmisión directa. Este proceso es realizado cíclicamente, hasta que el error de posición y la velocidad de movimiento sean cero.

2.3.1. Moldeo de Energía

Una herramienta moderna del control automático para diseñar una familia extensa de estrategias de control que resuelven el problema de control de posición de robots manipuladores, es la llamada técnica moldeo de energía propuesta en [3]. Tiene la ventaja de generar

una familia muy amplia de leyes de control de posición con una estructura matemática del gradiente de la energía potencial artificial, que moldea la energía que se inyecta al robot, más la componente de una función disipativa como elemento de amortiguamiento a través de la velocidad articular del robot. También, cuando el movimiento del robot es diferente a un plano horizontal, es posible agregar una compensación de gravedad. El moldeo de energía tiene la siguiente descripción matemática:

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - f_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2.17)$$

donde

- K_p y $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices definidas positivas y, son conocidas como ganancia proporcional y ganancia derivativa.
- $\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$ es la energía potencial artificial; el término $\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$ representa el esquema de control y físicamente es el moldeo de energía $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$ a través del gradiente $\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$, el cual debe existir como función continua en $\tilde{\mathbf{q}}$ y $\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$; además de satisfacer $\tilde{\mathbf{q}}^T \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$.
- $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de errores de posición deseada \mathbf{q}_d y la posición actual $\mathbf{q}(t)$.
- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es la compensación de pares gravitacionales.
- El término de control de acción derivativa $f_v(K_v, \dot{\mathbf{q}})$ realiza la función de amortiguador o freno mecánico y además satisface $\dot{\mathbf{q}}^T f_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) > 0$; además, si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, entonces $f_v(K_v, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

2.4. Teoría de Estabilidad de Lyapunov

El estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos se caracteriza por analizar la respuesta del sistema para pequeñas perturbaciones en los estados del sistema. Un punto de equilibrio se dice estable si para pequeñas perturbaciones iniciales, el movimiento perturbado permanece en el espacio de estados.

La teoría de estabilidad de Lyapunov es una herramienta fundamental para el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos. Su importancia destaca en la apertura para analizar sistemas dinámicos lineales y no lineales, sin importar el orden del sistema; permite obtener información sobre la estabilidad del punto de equilibrio del sistema sin resolver la ecuación diferencial que caracteriza a dicho sistema dinámico, ofrece una precisa caracterización de las llamadas funciones de energía en la vecindad del punto de equilibrio y la noción de aquellas que se decrementan a lo largo de las trayectorias del sistema dinámico en cuestión, lo que significa que la derivada temporal o potencia del sistema, debe ser definida negativa hasta alcanzar un estado de equilibrio.

El método directo establece que, si se construye una función de energía en los estados del sistema como una función definida positiva continua y diferenciable, la variación temporal a pequeñas variaciones en una vecindad del punto de equilibrio es siempre negativa o cero, el punto de equilibrio es estable de manera global, para toda condición inicial dentro del atractor. Pero, si la razón de cambio de la función de energía es definida negativa, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable de manera global. Como puede inferirse, la variación temporal de la función de energía es la potencia del sistema dinámico en cuestión [2].

La teoría de estabilidad de Lyapunov, tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de los sistemas dinámicos lineales y no lineales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (2.18)$$

La teoría establece que para toda condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ que se encuentran dentro del atractor, si el sistema tiene estado de equilibrio asintóticamente estable, la energía acumulada del sistema dentro del dominio de atracción cae al evolucionar el tiempo, hasta alcanzar un valor mínimo en su punto de equilibrio.

El concepto de atractor significa que para cada solución de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ que empiece suficientemente cercana a cero, a partir de t_0 se aproxima al origen como el tiempo evoluciona.

La estabilidad, no se refiere al sistema, es una propiedad exclusiva del punto de equilibrio; el decir que el sistema es estable, no tiene sentido dentro del contexto de la teoría de estabilidad de Lyapunov.

2.4.1. Método directo de Lyapunov

Para el método directo de Lyapunov, se presentan los tres principales teoremas para analizar las características de estabilidad de un sistema dinámico; estabilidad relativa, estabilidad asintótica y estabilidad exponencial.

El origen es un punto de equilibrio estable del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, si existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ con derivadas parciales continuas con respecto a \mathbf{x} tal que su derivada temporal satisfaga:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.19)$$

$\forall t \geq 0$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Si se cumple (2.19) significa que la función de Lyapunov es decreciente. Por lo tanto, las soluciones $\mathbf{x}(t)$ del modelo dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ se encuentran acotadas para toda condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$.

El origen es un estado de equilibrio **asintóticamente estable y global** de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, si existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$, tal que su derivada satisfaga.

- $\dot{V}(\mathbf{0}) = 0, \forall t \geq 0$.
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, \forall t \geq 0$ y $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Por lo tanto, se concluye que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad (2.20)$$

Estabilidad exponencial; el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, si existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ y constantes positivas γ, β y α , tales que:

- $\alpha \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \beta \|\mathbf{x}\|^2$.
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\gamma \|\mathbf{x}\|^2, \forall t \geq 0$ y $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Demostrar estabilidad exponencial, demuestra a su vez estabilidad asintótica, más no viceversa. Si la propuesta de una función candidata definida positiva $V(\boldsymbol{x})$ tal que su derivada $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ es definida positiva, no es posible concluir nada sobre el punto de equilibrio. En este caso, significa que la función $V(\boldsymbol{x})$ está mal propuesta, y es necesario mejorar su estructura matemática. Debido a los tres criterios mencionados, podemos intuir que para obtener las características de estabilidad, es una condición necesaria demostrar la existencia del punto de equilibrio del sistema $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. En control de robots, la estabilidad no es importante, la parte clave y relevante debe ser atribuible al algoritmo de control involucrado en el punto de equilibrio del modelo dinámico, es la estabilidad asintótica.

2.5. Caso de estudio: Robot antropomórfico de 3 gdl

Existen diversas configuraciones de robots manipuladores, los cuales se clasifican por el tipo de articulaciones que lo conforman tales como rotacionales, lineales ó una combinación de estos. Para nuestro caso de estudio, nos enfocaremos en la configuración antropomórfica de 3 grados de libertad (3gdl). La razón es porque la gran mayoría de los robots industriales poseen esta configuración, ya que brinda mayor destreza en su espacio de trabajo, debido a que sus eslabones están unidos por articulaciones rotacionales. Debido a la gran similitud con la forma anatómica con el brazo humano, esta configuración es llamada de esta forma, donde la primera articulación es llamada cadera, la segunda articulación como hombro y la tercera como codo. En la Figura 2.6 se muestra un robot experimental antropomórfico de transmisión directa y de 3 gdl, construido en la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. La ventaja de este robot es que cuenta con arquitectura abierta, brindándonos la ventaja de evaluar un sin número de algoritmos de control, identificación paramétrica de sus parámetros y programación de aplicaciones de traslado de objetos, que un robot comercial no tiene.



Figura 2.6: Robot antropomórfico con 3 grados de libertad

Capítulo 3

Diseño de la familia de reguladores con ganancias variables

Este capítulo tiene como objetivo abordar el problema de control de posición de robots manipuladores en su espacio articular mediante el diseño de nuevos reguladores con ganancias variables. Comenzamos con la propuesta de un PD con ganancias variables, dado que es el regulador más usado en robots industriales. Debido a esto, nuestra motivación es mostrar un nuevo PD con ganancias variables que mejore al PD convencional con ganancias constantes. Al mismo tiempo, hemos diseñado un regulador saturado con ganancias variables, debido a las limitantes del regulador PD de solicitar acciones de control no acotadas. Dicho esquema de control suministra torque dentro de los límites físicos de los actuadores ya preestablecidos. Finalmente, para ambos casos presentamos una gama extensa de ganancias variables dependientes del error de posición y la velocidad de movimiento del robot manipulador, formadas por funciones continuas, diferenciables y suaves. Se presentan las propuestas de las funciones estrictas de Lyapunov para demostrar la estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. La sintonía automática es alcanzada gracias a una regla matemática definida y las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio. Por último, mostramos la funcionalidad de los esquemas de control propuestos presentando resultados a nivel simulación para un robot de 3 grados de libertad.

3.1. Reguladores PD con ganancias variables

El problema de control de posición en el espacio articular (2.16) se centra en el diseño de un regulador τ tal que sea capaz de generar un atractor con un punto de equilibrio asintóticamente estable. Se propone el esquema de control PD para abordar el problema de control de posición, ya es más utilizado en robots industriales y con la motivación de proponer dicho esquema en su versión de ganancias variables para mejorar el PD convencional:

$$\tau = K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}} - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.1)$$

donde $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de error de posición, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares, las matrices de ganancia variables $K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ y $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales con las entradas $k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ y $k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$, respectivamente.

3.1.1. Gama de ganancias variables

Se han diseñado una gama extensa de ganancias variables $K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ y $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a partir del trabajo presentado en [6], usando un conjunto de funciones continuas, diferenciables y suaves que dependen del error de posición y la velocidad del robot manipulador. Dicha propuesta, nos permite tener perfiles similares de ganancias variables que tienen sintonía automática debido a las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio y la regla de sintonía. Esto es:

$$K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \hat{k}_{p1}(1 - \beta_1 e^{-\beta_1 f_{p1}(\tilde{q}_1, \dot{q}_1)}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{k}_{p2}(1 - \beta_2 e^{-\beta_2 f_{p2}(\tilde{q}_2, \dot{q}_2)}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{k}_{pn}(1 - \beta_n e^{-\beta_n f_{pn}(\tilde{q}_n, \dot{q}_n)}) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \hat{k}_{v1}(1 - \beta_1 e^{-\beta_1 f_{v1}(\tilde{q}_1, \dot{q}_1)}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{k}_{v2}(1 - \beta_2 e^{-\beta_2 f_{v2}(\tilde{q}_2, \dot{q}_2)}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{k}_{vn}(1 - \beta_n e^{-\beta_n f_{vn}(\tilde{q}_n, \dot{q}_n)}) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Para $i = 1, \dots, n$: $f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i), f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ y $f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{q}_i = \dot{q}_i = 0$. Los parámetros $\hat{k}_{p_i} > 0$ y $\hat{k}_{v_i} > 0$ y $\beta_i = \frac{\hat{k}_{v_i}}{\hat{k}_{p_i}}$, lo cual satisface $\beta_i \in [0, 1]$. Dicho esto, observe que $K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ y $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Finalmente, con el motivo de ilustrar a la gama de ganancias variables, mostramos en expresiones (3.4), (3.5) y (3.6) a los casos particulares de $f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ y $f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^2$. Es importante resaltar que, para cada caso particular de ganancias variables tenemos un diferente regulador PD con ganancias variables (3.1).

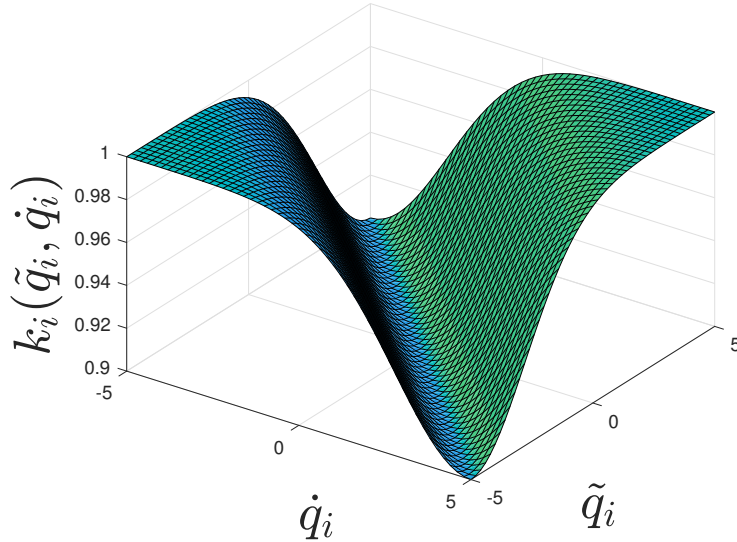


Figura 3.1: Gama de ganancias variables para el regulador PD

$$\begin{aligned} k_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \hat{k}_{p_i} \left(1 - \beta_i e^{-\beta_i \tanh(\tilde{q}_i^2 + \dot{q}_i^2)} \right) \\ k_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \hat{k}_{v_i} \left(1 - \beta_i e^{-\beta_i \tanh(\tilde{q}_i^2 + \dot{q}_i^2)} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} k_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \hat{k}_{p_i} \left(1 - \beta_i e^{-\beta_i (\sinh(\tilde{q}_i)^2 + \cosh(\dot{q}_i)^2)} \right) \\ k_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \hat{k}_{v_i} \left(1 - \beta_i e^{-\beta_i (\sinh(\tilde{q}_i)^2 + \cosh(\dot{q}_i)^2)} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} k_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \hat{k}_{p_i} \left(1 - \beta_i e^{-\beta_i \arctan(\tilde{q}_i^2 + \dot{q}_i^2)} \right) \\ k_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \hat{k}_{v_i} \left(1 - \beta_i e^{-\beta_i \arctan(\tilde{q}_i^2 + \dot{q}_i^2)} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

En la Figura 3.1 se muestra el perfil los casos particulares de la gama de ganancias variables. Como se puede observar, se tiene el mismo perfil a pesar del cambio de $f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ y $f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$. Esto nos permite tener un conjunto amplio de ganancias proporcional y derivativa dependientes del error de posición y la velocidad de movimiento. La curva característica de las ganancias variables, nos permite tener cambios numéricos suaves en función de los estados del robot y al mismo tiempo valores acotados; esto significa que durante el proceso intermedio de sintonía de las ganancias adquieren parámetros constantes adecuados para la regulación del robot manipulador. Sin embargo, una condición necesaria para garantizar la sintonía automática de las ganancias variables es proponer correctamente el valor $\hat{k}_{p_i} > 0$ y $\hat{k}_{v_i} > 0$. Si dicho valor no es el óptimo, el desempeño y la sintonía de las ganancias variables se perjudica de manera importante. Debido a esto, se ha propuesto una regla de diseño para estos valores constantes; esta propuesta está pensada para no saturar a los límites físicos inherentes del robot manipulador.

3.1.2. Estabilidad asintótica y global: Función estricta de Lyapunov

A partir del esquema de control (3.1) y el modelo dinámico del robot manipulador (2.8), se construye la ecuación en lazo cerrado.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\tilde{\mathbf{q}} - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Observe que $\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{q}} = -(I)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y $\frac{d}{dt}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, por lo cual se demuestra que el origen de la ecuación en lazo cerrado es el único punto de equilibrio.

Para demostrar que la ecuación en lazo cerrado tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable y global, se hace uso del método directo de Lyapunov. Se propone una función de energía definida positiva tal que su derivada es definida negativa; esta es llamada función estricta. Desde el contexto del método directo de la teoría de estabilidad de Lyapunov proponemos la siguiente función de energía:

$$V(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\sigma}^T K_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})d\boldsymbol{\sigma} - \epsilon \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (3.8)$$

por notación

$$\int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\sigma}^T K_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})d\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=0}^n \int_0^{\tilde{q}_i} \sigma_i k_{p_i}(\sigma_i, \dot{q}_i)d\sigma_i \quad (3.9)$$

ϵ se define como:

$$\epsilon = \epsilon(\|\tilde{\mathbf{q}}\|) = \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \quad (3.10)$$

donde $\epsilon_0 > 0$ y ϵ es lo suficientemente pequeño para satisfacer lo siguiente.

$$\frac{\sqrt{k_{pl}\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}}}{\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}} > \epsilon > 0 \quad (3.11)$$

Usando la *Propiedad 3* tenemos que la función candidata de Lyapunov.

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{pl} & -\epsilon\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\} \\ -\epsilon\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\} & \lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Dada la estructura de ϵ en (3.10), se demuestra que la función candidata de Lyapunov es definida positiva.

Obtenemos la derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \epsilon \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} - \epsilon \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \epsilon \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad - \epsilon \tilde{\mathbf{q}} M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Acotamos la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov, donde el desarrollo completo está reportado en [21]:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &\leq -\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{\min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \epsilon_0 [\lambda_{\max}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} + \lambda_{\max}\{B\}] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ &\quad - [\lambda_{\min}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} + \lambda_{\min}\{B\} - \epsilon_0 k_{ro} - 2\epsilon_0 \lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}] \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Podemos reescribirla de la siguiente manera:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

donde \mathbf{P} está definida por:

- $\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{\min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\}$.
- $\mathbf{P}(1, 2) = -\frac{\epsilon_0}{2} [\lambda_{\max}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} + \lambda_{\max}\{B\}]$.
- $\mathbf{P}(1, 2) = \mathbf{P}(2, 1)$.
- $\mathbf{P}(2, 2) = [\lambda_{\min}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} + \lambda_{\min}\{B\} - \epsilon_0 k_{ro} - 2\epsilon_0 \lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}]$

A partir del Teorema de Sylvester, las condiciones de ϵ_0 para que la derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov sea definida negativa están dadas por:

$$\frac{4\lambda_{\min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} (\lambda_{\min}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} + \lambda_{\min}\{B\})}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\| [\lambda_{\max}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} + \lambda_{\max}\{B\}] + 4\lambda_{\min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} (K_{ro} + 2\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\})} > \epsilon_0 \geq \epsilon \quad (3.16)$$

La elección de ϵ debe satisfacer (3.11) y (3.16) de manera simultánea; obtener su valor numérico no es necesario para la familia de algoritmos de control y solo es necesario para propósitos de la demostración de estabilidad asintótica del punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado en el espacio de estados. Dicho lo anterior, concluimos que el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (3.7) es asintóticamente estable y global. Esto significa que ambas variables de estado $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}(t)$ tienden asintóticamente a cero cuando $t \rightarrow \infty$, desde cualquier condición inicial $\tilde{\mathbf{q}}(0)$ y $\dot{\mathbf{q}}(0)$.

3.1.3. Robustez frente a la incertidumbre paramétrica

Una de las propiedades de los reguladores PD con ganancias variables diseñados, es la robustez frente a las incertidumbres de los parámetros numéricos del robot manipulador (centro de masas, inercias, coeficientes de fricción, etc.). En el orden de demostrar teóricamente dicha robustez, se presenta la siguiente propiedad. Sean las constantes positivas k_{pl} y k_{pu} tal que: $k_{pl} \leq k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) \leq k_{pu} \forall \tilde{q}_i, \dot{q}_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, 3 \dots n$. Entonces [26]:

$$\frac{1}{2}k_{pl}\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \leq \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} K_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\mathbf{q}})d\boldsymbol{\sigma} \leq \frac{1}{2}k_{pu}\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \quad (3.17)$$

Al no considerar la condición (3.16), se tiene que la función candidata cumple con $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ y $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0$. Esto significa que la función es decreciente, es decir:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \geq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) > 0; t \geq 0 \quad (3.18)$$

observe que lo siguiente se satisface:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}(0)^T M(\mathbf{q}(0))\dot{\mathbf{q}}(0) + \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\sigma}(0)^T K_p(\boldsymbol{\sigma}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))d\boldsymbol{\sigma} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}(0)\|} \tilde{\mathbf{q}}(0)^T M(\mathbf{q}(0))\dot{\mathbf{q}}(0) \quad (3.19)$$

empleando la expresión (3.38), entonces podemos acotar superiormente de la siguiente manera:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \leq \frac{1}{2}\lambda_{Max}\{M(\mathbf{q}(0))\}\|\dot{\mathbf{q}}(0)\|^2 + \frac{1}{2}k_{pu}\|\tilde{\mathbf{q}}(0)\|^2 - \epsilon_0\lambda_{Max}\{M(\mathbf{q}(0))\}\|\dot{\mathbf{q}}(0)\|^2 \quad (3.20)$$

al usar nuevamente (3.38):

$$V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \geq \frac{1}{2}\lambda_{min}\{M(\mathbf{q}(t))\}\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 + \frac{1}{2}k_{pl}\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|^2 - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|}\lambda_{Max}\{M(\mathbf{q}(t))\}\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \quad (3.21)$$

Al sustituir (3.41), (3.42) en (3.39) y realizando algebra, la norma euclidiana del error de posición se puede expresar de la siguiente manera:

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{k_{pu}}{k_{pl}}}\|\tilde{\mathbf{q}}(0)\| \quad (3.22)$$

debido a la expresión (3.43), es claro que el error de posición está acotado y es independiente del modelo dinámico del robot manipulador (2.8). Por lo tanto, debido a los resultados experimentales mostrados en el robot de transmisión directa y los resultados teóricos mostrados en esta sección, se concluye que los reguladores con ganancias variables diseñados son robustos frente a incertidumbres paramétricas del robot manipulador (valores de inercia, coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb).

3.1.4. Sintonía de las ganancias variables

La sintonía de la gama de ganancias variables es alcanzada mediante una regla matemática propuesta. El objetivo principal es encontrar los valores numéricos \hat{k}_{pi} , \hat{k}_{vi} y β_i que toman el papel de los parámetros iniciales de las ganancias variables $k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ hasta su sintonía automática cuando se llega a una vecindad del punto de equilibrio; el cual es

posible debido a la demostración de estabilidad asintótica global en el sentido de Lyapunov. Dichos valores iniciales de las ganancias se obtienen mediante una regla matemática en función del torque máximo suministrado por cada servomotor. Tomando los casos particulares de ganancias variables (3.4), (3.5) y (3.6) pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \delta_i \sqrt{\tau_i^{Max}} \left(1 - \beta_i e^{-\beta_i \tanh(\tilde{q}_i^2 + \dot{q}_i^2)} \right) \\ k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \gamma_i \delta_i \sqrt{\tau_i^{Max}} \left(1 - \beta_i e^{-\beta_i \tanh(\tilde{q}_i^2 + \dot{q}_i^2)} \right) \\ \beta_i &= \gamma_i \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \delta_i \sqrt{\tau_i^{Max}} \left(1 - \beta_i e^{-\beta_i (\sinh(\tilde{q}_i)^2 + \cosh(\dot{q}_i)^2)} \right) \\ k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \gamma_i \delta_i \sqrt{\tau_i^{Max}} \left(1 - \beta_i e^{-\beta_i (\sinh(\tilde{q}_i)^2 + \cosh(\dot{q}_i)^2)} \right) \\ \beta_i &= \gamma_i \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \delta_i \sqrt{\tau_i^{Max}} \left(1 - \beta_i e^{-\beta_i \arctan(\tilde{q}_i^2 + \dot{q}_i^2)} \right) \\ k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \gamma_i \delta_i \sqrt{\tau_i^{Max}} \left(1 - \beta_i e^{-\beta_i \arctan(\tilde{q}_i^2 + \dot{q}_i^2)} \right) \\ \beta_i &= \gamma_i \end{aligned} \quad (3.25)$$

siendo $0 < \delta_i < 10$ y $0 < \gamma_i < 1$ valores constantes propuestos por el diseñador. Dichos parámetros son los valores iniciales de las ganancias variables, para posteriormente alcanzar la sintonía cuando el robot llega al punto de equilibrio. Como recomendación al usuario, se sugiere elegir valores de δ_i cercanos al límite superior de su intervalo si el torque máximo aplicado por el servomotor es el mayor en comparación con los demás. Por otro lado, elija valores cercanos al límite inferior si el torque máximo aplicado es el más pequeño de todos. Los valores de γ_i está relacionado con la inyección de amortiguamiento de la acción de control derivativa, por lo cual mientras más cercano al límite superior, más amortiguamiento inyectará el algoritmo de control. Estas consideraciones se deben tomar en cuenta, en función de las condiciones a priori de las aplicaciones a realizar con el robot manipulador.

3.1.5. Simulaciones en robot de 3 gdl

Con propósitos de verificar la funcionalidad de los esquemas PD con ganancias variables realizamos el control de posición de un robot antropomórfico de 3 grados de libertad. El experimento virtual consiste en llevar al robot manipulador desde sus posiciones de casa $[0, 0, 0]^T$ grados, hacia las posiciones deseadas $[90, 45, 30]^T$ grados. En la Tabla 3.1 se muestra los torques máximos aplicados por cada uno de los servomotores que componen al robot manipulador. Para tener resultados muy parecidos a los que se pueden obtener en un robot experimental, los parámetros numéricos del robot como de las masas, centros de masa, etc. Se pueden encontrar en [2], los cuales fueron obtenidos a partir de estrategias de identificación paramétrica, donde solo consideramos los coeficientes de fricción viscosa. Se ha de considerar los casos particulares de ganancias variables, teniendo un regulador PD con ganancias variables diferente. Comenzamos renombrando al esquema PD con ganancias variables (3.23) como τ_{PDa} , el PD con ganancias variables (3.24) como τ_{PDb} y finalmente al PD con el caso particular de ganancias variables (3.25) lo hemos renombrado

τ_{PDc} . Para cada caso, realizamos la regulación del robot antropomórfico de tres grados de libertad tomando los siguientes casos particulares de δ_i y γ_i . Como se observa en la Tabla 3.2, se han tomado valores cercanos al límite superior del intervalo de δ_i para el caso con mayor torque máximo aplicado y viceversa. Al mismo tiempo, consideramos los valores de δ_i en función de la aplicación de amortiguamiento de la acción de control derivativa.

En la Figura 3.2 se muestra el error de posición del robot manipulador cuando es regulador por el esquema τ_{PDa} . Observe que, se tiene una respuesta subamortiguada, sin sobreoscilaciones y con picos máximos atenuados en régimen transitorio. La llegada al régimen permanente es suave y rápida debido a la acción de control proporcional, formada por el error de posición y la ganancia proporcional variable dependiente del error de posición y la velocidad de movimiento, permitiendo llegar al robot manipulador a una vecindad cercana al punto de equilibrio asintóticamente. Por otro lado, la Figura 3.3 nos muestra los torques aplicados por cada servomotor. Descatamos que los límites físicos de cada servomotor, no son superados en este escenario. Por lo tanto, la sintonía automática es alcanzada de manera consistente; el robot manipulador llega a las posiciones deseadas inyectando torque dentro de las capacidades del servomotor.

Para el caso particular τ_{PDb} , los errores de posición del robot manipulador son ilustrados en la Figura 3.4, mostrando que se tiene de igual manera una respuesta subamortiguada en régimen transitorio debido a la acción de control derivativa; la cual está formada por la velocidad del robot manipulador y la ganancia derivativa dependiente del error de posición y la velocidad de movimiento. Al cumplirse esta condición, la sintonía automática de las ganancias variables es alcanzada. Por último, esta correcta sintonía permite que el esquema PD aplique torque a cada uno de los servomotores sin superar sus límites físicos. Esto significa que los actuadores van a trabajar dentro de la región lineal. Finalmente en el caso τ_{PDc} el robot llega a las posiciones deseadas (ver. Figura 3.5) de forma asintótica a régimen permanente y subamortiguada en el régimen transitorio. La sintonía automática es alcanzada para que los servomotores no lleguen a la zona de saturación (ver Figura 3.6). Dicho esto, a nivel simulación se demuestra la funcionalidad de los reguladores PD con ganancias variables (3.1).

Articulación	Torque máximo
Base	50 Nm
Hombro	150 Nm
Codo	15 Nm

Tabla 3.1: Torques máximos aplicados por los servomotores

Esquema de control	δ_i	γ_i	Ganancias variables
τ_{PDa}	$\delta_1 = 2.5; \delta_2 = 4.53 \delta_3 = 1.23$	$\gamma_1 = 0.21; \gamma_2 = 0.33 \gamma_3 = 0.12$	(3.44)
τ_{PDb}	$\delta_1 = 2.0; \delta_2 = 4.0 \delta_3 = 1.1$	$\gamma_1 = 0.12; \delta_2 = 0.23 \gamma_3 = 0.38$	(3.45)
τ_{PDc}	$\delta_1 = 2.5; \delta_2 = 4.53 \delta_3 = 1.23$	$\gamma_1 = 0.17; \gamma_2 = 0.29 \gamma_3 = 0.16$	(3.46)

Tabla 3.2: Valores de sintonía para las ganancias variables

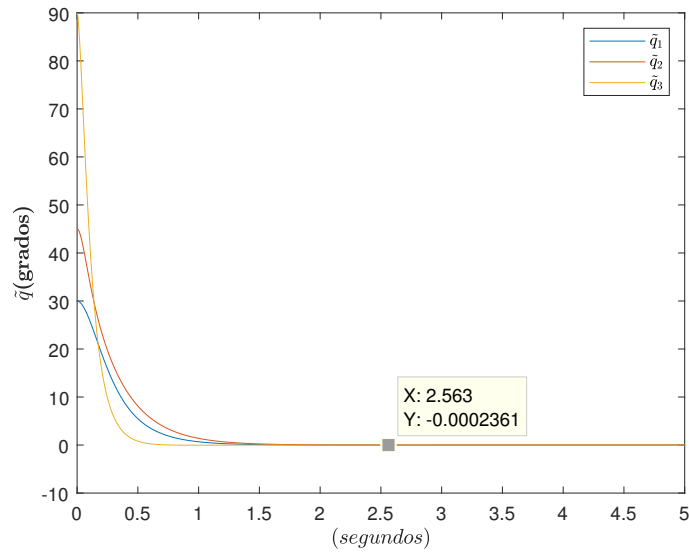


Figura 3.2: Errores de posición del robot con el esquema de control τ_{PDa}

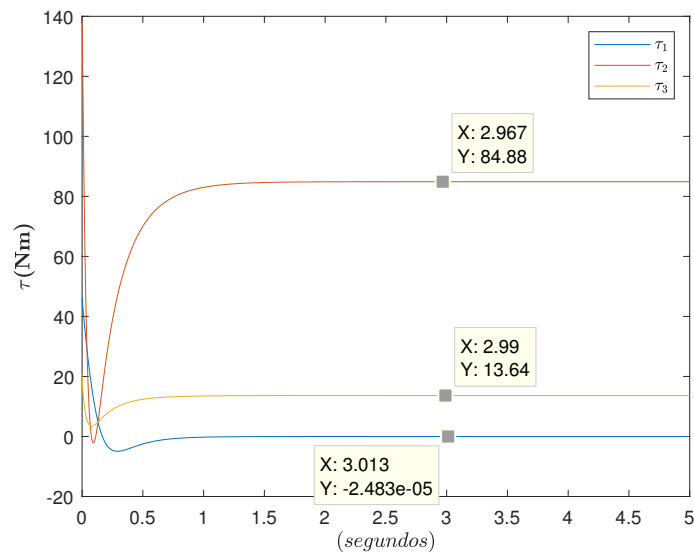
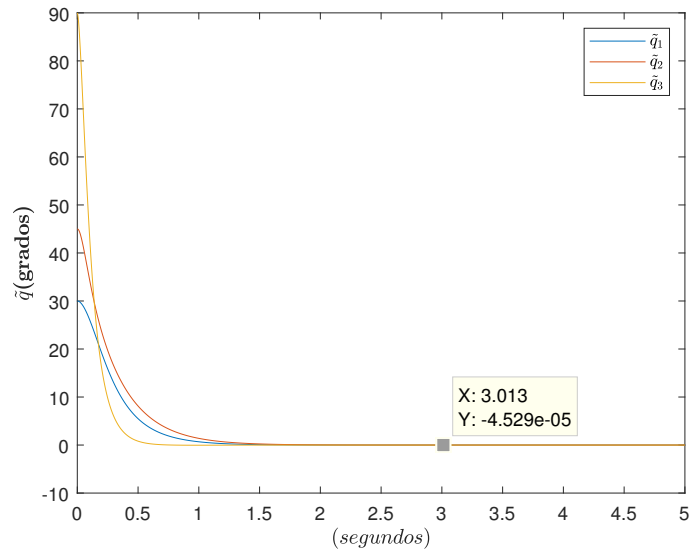
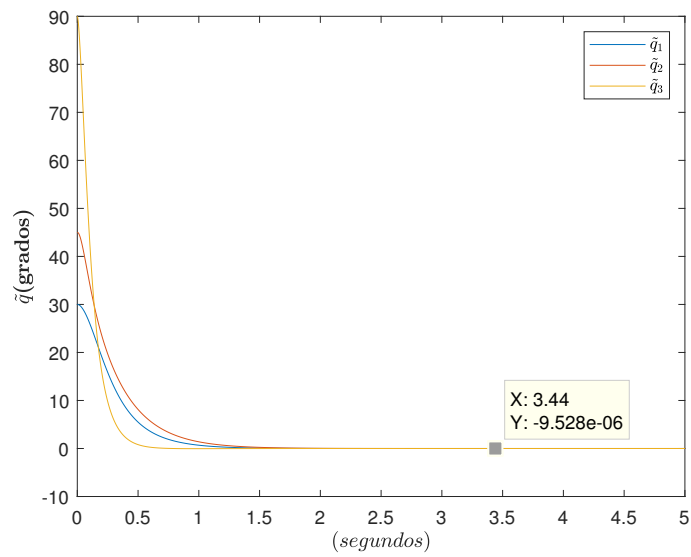


Figura 3.3: Torque aplicado por el esquema de control τ_{PDa}

Figura 3.4: Errores de posición del robot con el esquema de control τ_{PD_b} Figura 3.5: Errores de posición del robot con el esquema de control τ_{PD_c}

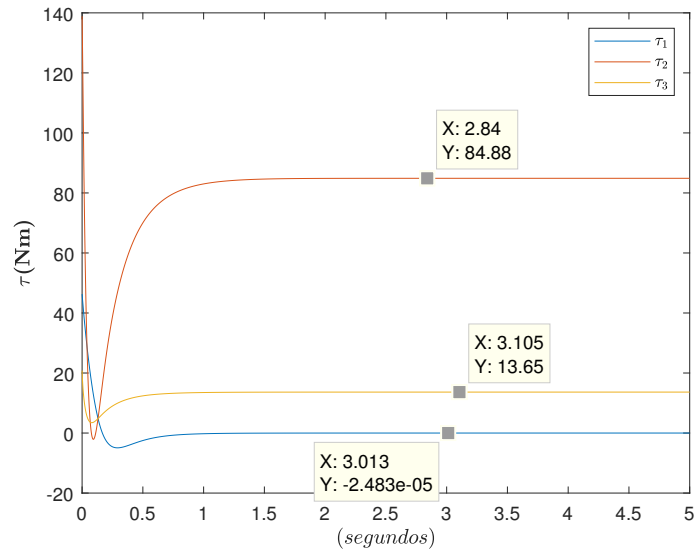


Figura 3.6: Torque aplicado por el esquema de control τ_{PDc}

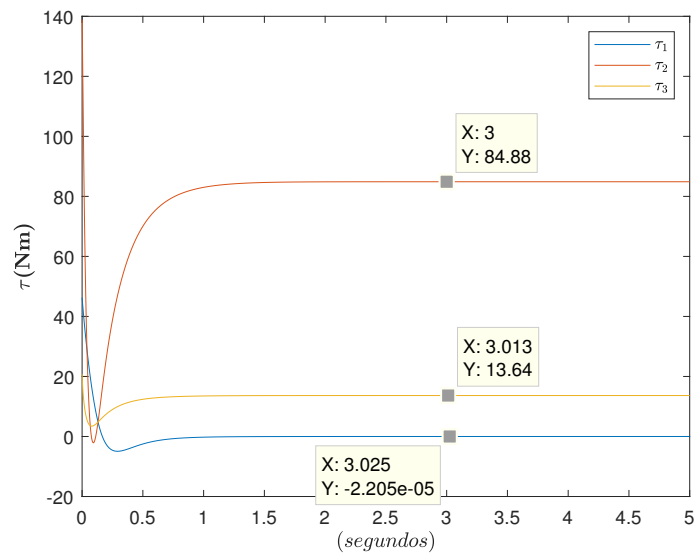


Figura 3.7: Torque aplicado por el esquema de control τ_{PDb}

3.2. Reguladores saturados con ganancias variables

Los esquemas de control con torques acotados, son un tipo de algoritmos de control relacionados con el problema de saturación de los actuadores del robot manipulador. La saturación es una de las consecuencias que originan las no linealidades no modeladas en los robots. Este fenómeno se presenta cuando el regulador demanda una señal de control por arriba de los límites físicos del servomotor. Esto provoca que, el torque o par suministrado a las articulaciones será totalmente diferente del solicitado por el controlador.

Los actuadores del robot tiene como restricción preescrita a los límites de saturación τ_{Max} . Si la estrategia de control τ solicita una señal de control $\tau > \tau_{Max}$, entonces el actuador aplicara al robot el par máximo τ_{Max} , llevándolo a la región de saturación. Por lo tanto, mediante un regulador con torques acotados es posible mantener a los reguladores dentro de la región lineal, debido a que en ningún escenario solicitara señales de control por arriba de estos límites. En este sentido, los esquemas de control propuestos saturan la acciones de control proporcional y derivativa a través de funciones hiperbólicas y trigonométricas inversas, las cuales son continuas, acotadas superiormente y diferenciables. Esto facilita el análisis de estabilidad del punto de equilibrio mediante la propuesta de una función estricta de Lyapunov. Asimismo, se da solución a la sintonía de las ganancias añadiendo una gama extensa de ganancias variables formadas por funciones continuas dependientes del error de posición y la velocidad de movimiento del robot manipulador. Mediante la propuesta de una función estricta de Lyapunov, demostramos la estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. La sintonía es alcanzada debido a una regla matemática propuesta y las propiedades de estabilidad asintótica del punto de equilibrio. Finalmente, para verificar su funcionalidad se exponen resultados a nivel simulación en un robot antropomórfico de 3 grados de libertad.

Se presenta un conjunto de reguladores saturados con ganancias variables dependientes del error de posición y la velocidad de movimiento del robot.

$$\tau = K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi\tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi\tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi\tilde{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi\dot{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi\dot{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi\dot{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi\dot{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi\dot{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi\dot{q}_n)}} \end{bmatrix} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.26)$$

donde $\psi \in \mathbf{N}$ es un entero positivo, $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de error de posición, $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ a las posiciones deseadas y $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ velocidades articulares. La matriz de ganancia proporcional variable $K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ y la matriz de ganancia derivativa variable $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son diagonales con las entradas $k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ y $k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$.

En la Figura 3.8 se muestra la función que es parte de las acciones de control proporcional y derivativa. Dicha curva nos permite tener dos características importantes para nuestro esquema de control; de manera que aumenta el valor de ψ , la pendiente del regulador tiende a ser más vertical. Dicho comportamiento es aprovechado por el esquema de control para impulsar al manipulador hacia la posición deseada e inyectar amortiguamiento para disminuir sobreoscilaciones en estado transitorio provocando una llegada suave a estado estacionario. Gracias este comportamiento, el regulador genera acciones de control acotadas, manteniendo a los actuadores dentro de los límites prescritos. Continuando, las funciones

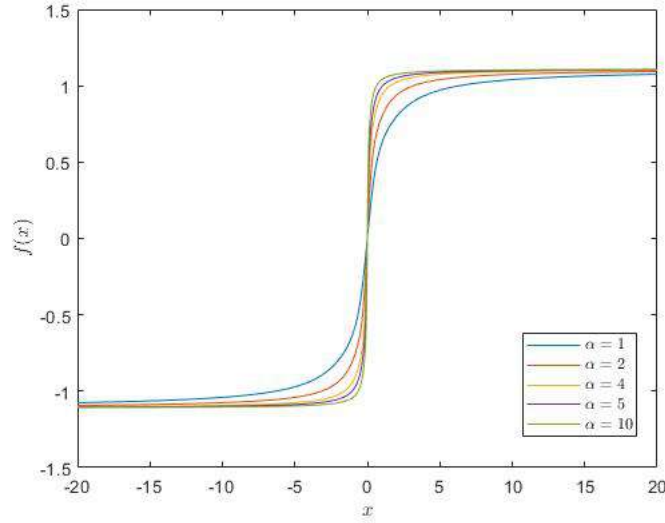


Figura 3.8: Función para la saturación de los esquemas de control

que estructuran a los reguladores saturados, cumplen con la siguiente propiedad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{n}\mu_\psi, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n}\mu_\psi \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \leq \left\| \left[\begin{array}{c} \frac{\arctan(\psi x_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi x_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi x_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi x_2)}} \\ \frac{\arctan(\psi x_3)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi x_3)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi x_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi x_n)}} \end{array} \right] \right\| \leq \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{n}\kappa_\psi, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n}\kappa_\psi \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \quad (3.27)$$

siendo κ_ψ y μ_{p_ψ} las cotas superiores e inferiores. Para las acciones de control proporcional y derivativa renombramos como, κ_{p_ψ} , μ_{p_ψ} y κ_{v_ψ} , μ_{v_ψ} para la funciones de error de posición y velocidad respectivamente.

3.2.1. Gama de ganancias variables

La propuesta de una gama de ganancias variables, proporcional y derivativa se muestra en las expresiones (3.28) y (3.29); estas son matrices diagonales con entradas hiperbólicas, donde su argumento son funciones continuas dependientes del i-ésimo error de posición y velocidad de movimiento.

$$K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \hat{k}_{p_1} \cos^2(f_p(\tilde{q}_1, \dot{q}_1)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{k}_{p_2} \cos^2(f_p(\tilde{q}_2, \dot{q}_2)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{k}_{p_n} \cos^2(f_p(\tilde{q}_n, \dot{q}_n)) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \hat{k}_{v_1} \cos^2(f_v(\tilde{q}_1, \dot{q}_1)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{k}_{v_2} \cos^2(f_v(\tilde{q}_2, \dot{q}_2)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{k}_{v_n} \cos^2(f_v(\tilde{q}_n, \dot{q}_n)) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

siendo $f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i), f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_i = \dot{q}_i = 0$. Los parámetros $\hat{k}_{p_i} > 0$ y $\hat{k}_{v_i} > 0$, para $i = 1, \dots, n$. Entonces, bajo las condiciones anteriores es claro que, las entradas de las matrices diagonales de ganancias $k_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) > 0$ y $k_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) > 0$. Por lo tanto, $K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ y $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$.

Con el propósito de visualizar a los perfiles de la gama de ganancias variables para los reguladores saturados, presentamos los siguientes casos particulares de $f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i), f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ dando lugar a las siguientes expresiones:

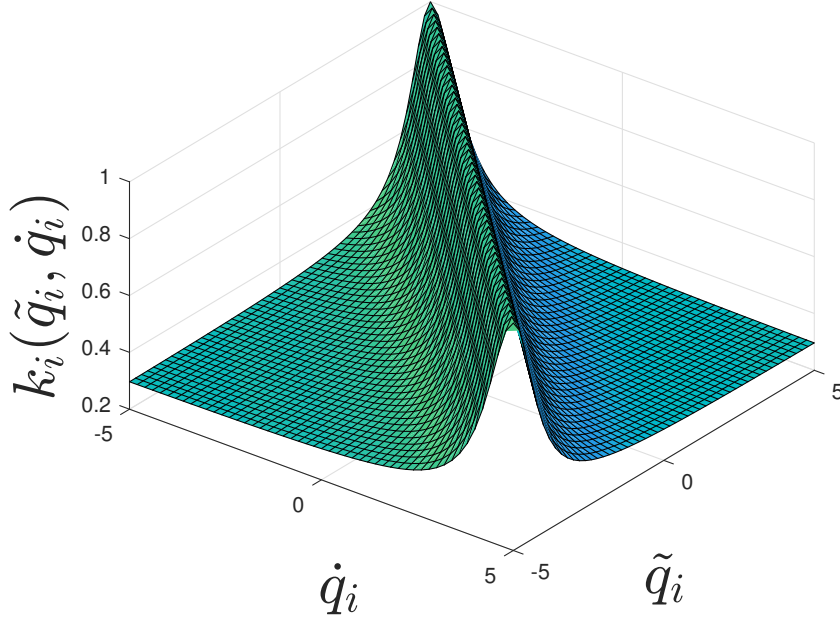


Figura 3.9: Gama de ganancias variables para los reguladores saturados

$$\begin{aligned} k_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \hat{k}_{p_i} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_i + \dot{q}_i)) \\ k_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \hat{k}_{v_i} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_i + \dot{q}_i)) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} k_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \hat{k}_{p_i} \cos^2\left(\frac{\sinh(\tilde{q}_i)}{\sqrt{1 + \cosh^2(\dot{q}_i)}}\right) \\ k_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \hat{k}_{v_i} \cos^2\left(\frac{\sinh(\tilde{q}_i)}{\sqrt{1 + \cosh^2(\dot{q}_i)}}\right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} k_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \hat{k}_{p_i} \cos^2\left(\frac{\tilde{q}_i + \dot{q}_i}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_i + \dot{q}_i)^2}}\right) \\ k_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \hat{k}_{v_i} \cos^2\left(\frac{\tilde{q}_i + \dot{q}_i}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_i + \dot{q}_i)^2}}\right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

En la Figura 3.9 se muestra el perfil de los particulares de la gama de ganancias variables dependientes del error de posición y la velocidad de movimiento del robot manipulador.

Observe que a pesar del cambio particular de $f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$, $f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$, se mantiene el perfil. Dicho comportamiento permite variar a la ganancia proporcional y a la ganancia derivativa de manera suave hasta alcanzar su sintonía. Para alcanzar este objetivo, es necesario proponer una regla matemática de sintonía que permite dar valores iniciales a i -ésima ganancia proporcional y derivativa. Posteriormente, la sintonía automática es alcanzada cuando el robot manipulador está en una vecindad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. En este sentido, es necesario demostrar que los reguladores propuestos generan un atractor con un punto de equilibrio asintóticamente estable y global. Por lo tanto, desde el método directo de Lyapunov se ha de proponer una función estricta que nos permita obtener estas conclusiones.

3.2.2. Estabilidad asintótica y global: Función estricta de Lyapunov

El método directo de Lyapunov, nos permite analizar el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado sin resolver la ecuación diferencial y así obtener conclusiones contundentes acerca de su estabilidad. Por lo tanto, se construye el lazo cerrado (3.33) a partir del modelo dinámico del robot manipulador (2.8) y el conjunto de esquemas de control (3.26) incluyendo al conjunto de ganancias variables (3.28) y (3.29), la cual resulta una ecuación diferencial autónoma no lineal:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \dot{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi \dot{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \dot{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi \dot{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \dot{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi \dot{q}_n)}} \end{bmatrix} - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \dot{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi \dot{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \dot{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi \dot{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \dot{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi \dot{q}_n)}} \end{bmatrix} - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

dado que:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -I(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n &\Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n, \text{ donde } I \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ es la matriz identidad.} \\ \frac{\arctan(\tilde{q}_i)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_i)}} = 0 &\Leftrightarrow \tilde{q}_i = 0 \text{ y } \frac{\arctan(\dot{q}_i)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_i)}} = 0 \Leftrightarrow \dot{q}_i = 0; \text{ para } i = 1 \cdots n. \end{aligned}$$

Observe que lo siguiente se cumple: $C(\mathbf{q}, \mathbf{0})\mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $B\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$.

Debido a lo anterior, se demuestra que el origen de la ecuación en lazo cerrado denotado como $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ es el único punto de equilibrio.

En orden de demostrar la estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov, la cual es llamada estricta dado que cumple con ser definida positiva y su derivada definida negativa:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \sigma_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi \sigma_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \sigma_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi \sigma_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \sigma_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi \sigma_n)}} \end{bmatrix}^T K_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\mathbf{q}}) d\boldsymbol{\sigma} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} > 0 \quad (3.34)$$

donde $\epsilon_0 > 0$, el cual vive en el siguiente intervalo:

$$\frac{\sqrt{k_{pl} \sqrt{n} \mu_{p\psi} \lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}}}{\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}} [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|] > \epsilon_0 > 0 \quad (3.35)$$

siendo k_{pl} la cota inferior de la integral de cierta función continua, la función candidata de Lyapunov (3.34) es definida positiva. La demostración se encuentra reportada en [26].

Posteriormente, se obtiene derivada temporal de (3.34) a lo largo de las trayectorias de la ecuación en lazo cerrado. Usando la regla de derivación de integrales de Leibniz, sustituyendo la aceleración articular $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, realizando la cancelación de términos algebraicos, la derivada temporal $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ se encuentra acotada superiormente de la siguiente manera:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}}_Z \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} < 0 \quad (3.36)$$

siendo

- $z_{11} = \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{\min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} \sqrt{n} \kappa_{p_\psi}$.
- $z_{12} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} [\lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\} - \lambda_{\max}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} \sqrt{n} - \lambda_{\max}\{B\}]$.
- $z_{21} = z_{12}$
- $z_{22} = \lambda_{\min}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} \sqrt{n} \kappa_{v_\psi} + \lambda_{\max}\{B\} + \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{\mathbf{q}}\|} [\lambda_{\min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} \sqrt{n} \kappa_{p_\psi} - \lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}] + \epsilon_0 k_c$.

El elemento z_{11} es positivo, debido a que n , κ_{p_ψ} y $\lambda_{\min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\}$ son todos positivos. Entonces, el siguiente intervalo de existencia de ϵ_0 asegura que el determinante de la matriz Z sea positivo:

$$\frac{n \kappa_{p_\psi}^2 \lambda_{\min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} n_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]}{n \kappa_{p_\psi}^2 \lambda_{\min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} d_1 + \frac{1}{4} (d_2)^2} > \epsilon_0 > 0 \quad (3.37)$$

donde:

$$\begin{aligned} n_1 &= \lambda_{\min}\{B\} + \sqrt{n} \kappa_{v_\psi} \lambda_{\min}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} \\ d_1 &= k_c \kappa_{p_\psi} + \beta (\kappa_{p_\psi} + \mu_{p_\psi}) \\ d_2 &= \sqrt{n} \kappa_{p_\psi} \lambda_{\max}\{B\} + n \mu_{p_\psi} \kappa_{v_\psi} \lambda_{\max}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} + \frac{1}{2} \xi_p \beta g_{pu} (\sqrt{n} \kappa_{v_\psi} \lambda_{\min}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} + \sqrt{n} k_c + \lambda_{\min}\{B\}). \end{aligned}$$

Se demuestra que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es definida negativa de acuerdo con el teorema de Silvester. Encontrar el valor numérico de ϵ_0 no es necesario encontrar, solo demostrar su existencia para propósitos de análisis de estabilidad asintótica y global. En suma, dado que $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ y $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) < 0$ el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ es asintóticamente estable y global. Esto significa que ambas variables de estado $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}(t)$ convergen asintóticamente a cero cuando $t \rightarrow \infty$, sin importar las condiciones iniciales $\tilde{\mathbf{q}}(0)$ y $\dot{\mathbf{q}}(0)$. Dicho esto, los esquemas de control saturados con ganancias variables (3.26) generan un atractor con características de estabilidad asintótica con inmunidad a las condiciones iniciales, solución al problema de control de posición de robots manipuladores en su espacio articular (2.16). Dicho esto, el esquema de control es candidato a implementarse en otras aplicaciones de control de movimiento tales como control punto a punto o control cartesiano para robots manipuladores.

3.2.3. Robustez frente a la incertidumbre paramétrica

Una de las propiedades de los reguladores PD con ganancias variables diseñados, es la robustez frente a las incertidumbres de los parámetros numéricos del robot manipulador

(centro de masas, inercias, coeficientes de fricción, etc.). En el orden de demostrar teóricamente dicha robustez, se presenta la siguiente propiedad. Sean las constantes positivas k_{pl} y k_{pu} tal que: $k_{pl} \leq k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) \leq k_{pu} \forall \tilde{q}_i, \dot{q}_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, 3 \dots n$. Entonces [26]:

$$\frac{1}{2}k_{pl}\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \leq \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} K_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\mathbf{q}})d\boldsymbol{\sigma} \leq \frac{1}{2}k_{pu}\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \quad (3.38)$$

Al no considerar la condición (3.16), se tiene que la función candidata cumple con $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ y $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0$. Esto significa que la función es decreciente, es decir:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \geq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) > 0; t \geq 0 \quad (3.39)$$

observe que lo siguiente se satisface:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}(0)^T M(\mathbf{q}(0))\dot{\mathbf{q}}(0) + \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi\sigma_1(0))}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi\sigma_1(0))}} \\ \frac{\arctan(\psi\sigma_2(0))}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi\sigma_2(0))}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi\sigma_n(0))}{\sqrt{1+\tanh^2(\psi\sigma_n(0))}} \end{bmatrix}^T K_p(\boldsymbol{\sigma}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))d\boldsymbol{\sigma} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}(0)\|} \tilde{\mathbf{q}}(0)^T M(\mathbf{q}(0))\dot{\mathbf{q}}(0) \quad (3.40)$$

empleando la expresión (3.38) podemos acotar superiormente de la siguiente manera:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \leq \frac{1}{2}\lambda_{Max}\{M(\mathbf{q}(0))\}\|\dot{\mathbf{q}}(0)\|^2 + \frac{1}{2}\kappa_{p\psi}^2 k_{pu}\|\tilde{\mathbf{q}}(0)\|^2 - \epsilon_0\lambda_{Max}\{M(\mathbf{q}(0))\}\|\dot{\mathbf{q}}(0)\|^2 \quad (3.41)$$

al usar nuevamente (3.38):

$$V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \geq \frac{1}{2}\lambda_{min}\{M(\mathbf{q}(t))\}\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 + \frac{1}{2}k_{pl}\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|^2 - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|}\lambda_{Max}\{M(\mathbf{q}(t))\}\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \quad (3.42)$$

Al sustituir (3.41), (3.42) en (3.39) y realizando algebra, la norma euclidiana del error de posición se puede expresar de la siguiente manera:

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{k_{pu}}{k_{pl}}\kappa_{p\psi}}\|\tilde{\mathbf{q}}(0)\| \quad (3.43)$$

debido a la expresión (3.43), es claro que el error de posición está acotado y es independiente del modelo dinámico del robot manipulador (2.8). Por lo tanto, debido a los resultados experimentales mostrados en el robot de transmisión directa y los resultados teóricos mostrados en esta sección, se concluye que los reguladores con ganancias variables diseñados son robustos frente a incertidumbres paramétricas del robot manipulador (valores de inercia, coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb).

3.2.4. Sintonía de las ganancias variables

Para que la sintonía de las ganancias proporcional y derivativa de los esquemas de control sea alcanzada, se propone la siguiente regla matemática que permite dar valores

iniciales a la i -ésima ganancia del controlador. Posteriormente, gracias a las propiedades de estabilidad asintótica del punto de equilibrio, la sintonía automática es completada cuando el error de posición y la velocidad de movimiento del robot manipulador está en una vecindad del punto de equilibrio, lo cual sucede. Estos dos escenarios son necesarios para que la sintonía automática pueda cumplirse. En las expresiones (3.44), (3.45) y (3.46), se muestra la regla matemática para los casos particulares de la gama de ganancias variables; dicha regla se ha diseñado en función del torque máximo aplicado por cada servomotor que compone al manipulador para que sus capacidades no sean superadas, por lo tanto, trabajen en la región lineal:

$$\begin{aligned} k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= 2\delta_i \sqrt{\tau_i^{Max}} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_i + \dot{q}_i)) \\ k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \gamma_i \sqrt{\left(2\delta_i \sqrt{\tau_i^{Max}} + 1\right)^2} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_i + \dot{q}_i)) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= 2\delta_i \sqrt{\tau_i^{Max}} \cos^2\left(\frac{\sinh(\tilde{q}_i)}{\sqrt{1 + \cosh^2(\dot{q}_i)}}\right) \\ k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \gamma_i \sqrt{\left(2\delta_i \sqrt{\tau_i^{Max}} + 1\right)^2} \cos^2\left(\frac{\sinh(\tilde{q}_i)}{\sqrt{1 + \cosh^2(\dot{q}_i)}}\right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= 2\delta_i \sqrt{\tau_i^{Max}} \cos^2\left(\frac{\tilde{q}_i + \dot{q}_i}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_i + \dot{q}_i)^2}}\right) \\ k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= \gamma_i \sqrt{\left(2\delta_i \sqrt{\tau_i^{Max}} + 1\right)^2} \cos^2\left(\frac{\tilde{q}_i + \dot{q}_i}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_i + \dot{q}_i)^2}}\right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

siendo τ_i^{Max} el i -ésimo torque máximo aplicado por el servomotor, $0 < \delta_i < 5$ y $0 < \gamma < 1$. El problema se reduce en proponer solo a la constante δ_i por cada grado de libertad del manipulador. Como recomendación hacia el usuario, la propuesta de δ_i debe ser muy cercana al límite inferior de su intervalo definido cuando el torque máximo τ_i^{Max} es el menor de todos, mientras que si el valor del torque máximo aplicado τ_i^{Max} es de los mayores se debe proponer valores de δ_i cercanos a su límite superior de su intervalo.

3.2.5. Simulaciones en robot de 3 gdl

Con el propósito de validar la funcionalidad de los resultados teóricos anteriormente desarrollados, se realiza el control de posición de un robot antropomórfico de 3 grados de libertad a nivel simulación. El experimento consiste en llevar al robot hacia las posiciones deseadas $[90, 45, 30]^T$ grados desde sus posiciones de casa $[0, 0, 0]^T$ grados. Se ha de tomar en cuenta los torques aplicados por el robot manipulador (ver Tabla 3.1) y los parámetros numéricos del robot reportados en [2]. Para evaluar a los reguladores saturados y a la gama de ganancias variables, tomamos el valor de $\psi = 1$ y los casos particulares de ganancias variables (3.44), (3.45) y (3.46). En la Tabla 3.3 se muestra las características de los casos particulares, los valores de δ_i , así como su nuevo nombre asignado.

En la Figura 3.10, se muestra el error de posición del robot manipulador cuando es regulado por caso particular de los esquemas de control τ_{sat1} . Como se puede observar, se

tiene una respuesta subamortiguada en el régimen transitorio y rápida llegada a régimen permanente. La acción de control proporcional saturada dependiente del error de posición y la ganancia proporcional variable dependiente del error de posición y la velocidad de movimiento, es la encargada de aplicar torque para impulsar al robot manipulador hacia las posiciones deseadas. Al mismo tiempo, la acción de control derivativa saturada dependiente de la velocidad y la ganancia derivativa variable dependiente de la velocidad y del error de posición del robot manipulador, inyectan torque que funciona como freno mecánico para amortiguar las sobreosilaciones y atenuar los picos máximos en el régimen transitorios. Asimismo, la sintonía es alcanzada gracias a la correcta elección de los valores iniciales para las ganancias variables δ_i y las propiedades de estabilidad asintótica y globalidad del punto de equilibrio. Observe en a Figura 3.11 que los pares aplicados por cada servomotor, no son superados asegurando su trabajo dentro de la región lineal gracias a la sintonía automática consistente.

Continuamos mostrando la respuesta del robot manipulador cuando es regulado por el esquema de control saturado particular τ_{sat_2} . Se muestran en la Figura 3.12, los errores de posición convergen asintóticamente a una vecindad del punto de equilibrio de forma rápida, con una respuesta subamortiguada en régimen permanente y con errores pequeños. La influencia de ambos estados, error de posición y velocidad, en las acciones de control proporcional y derivativa no influye para que el robot llegue a las posiciones deseadas. Es importante recalcar, que para este caso particular de ganancias variables, el valor de δ_i es cambiado ligeramente, con respecto al caso anterior. Esto se debe a que, a pesar de tener perfiles muy parecidos, el cambio de δ_i nos entrega una mejor respuesta con respecto a los valores de δ_i del caso τ_{sat_1} ; en este caso particular, 3.13 podemos evidenciar que la elección de δ_i puede influir en el desempeño del control. La Figura 3.13 nos muestra los pares aplicados por los servomotores, demostrando a nivel simulación que los actuadores no llegan a la región de saturación gracias que la sintonía es alcanzada.

Esquema de control	δ_i	γ_i	Ganancias variables
τ_{sat_1}	$\delta_1 = 2.5; \delta_2 = 4.53 \delta_3 = 1.23$	$\gamma_1 = 0.21; \gamma_2 = 0.33 \gamma_3 = 0.12$	(3.44)
τ_{sat_2}	$\delta_1 = 2.0; \delta_2 = 4.0 \delta_3 = 1.1$	$\gamma_1 = 0.12; \delta_2 = 0.23 \gamma_3 = 0.38$	(3.45)
τ_{sat_3}	$\delta_1 = 2.5; \delta_2 = 4.53 \delta_3 = 1.23$	$\gamma_1 = 0.17; \gamma_2 = 0.29 \gamma_3 = 0.16$	(3.46)

Tabla 3.3: Valores de sintonía para las ganancias variables.

Por último, se evalúa al robot manipulador cuando es regulado por el caso particular τ_{sat_3} , teniendo los siguientes resultados. Los errores de posición converge asintóticamente a cero de forma subamortiguada en el régimen transitorio con un error en el orden en régimen permanente (véase Figura 3.14. Para este caso particular de ganancias variables, el hecho de involucrar a un estado que no comunmente interviene en las acciones de control (tal es el caso del error de posición en la acción de control derivativa y la velocidad en la acción de control proporcional) no afecta su funcionalidad para regular al robot manipulador a nivel simulación. De igual manera, los valores numéricos de δ_i son muy parecidos al caso particular τ_{sat_1} , entregando su respuesta más óptima con dichos parámetros, a pesar de no tratarse de una función hiperbólica. Este escenario demuestra que la definición de $f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$, $f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ es consistente, permitiendo proponer un sin número de casos particulares sin que el funcionamiento del esquema de control sea afectado. Finalmente en la Figura 3.15, se observa como los torques aplicados no superan los límites físicos prescritos de cada actuador eléctrico, debido a la correcta sintonía automática de este caso particular el esquema de control aplica torques acotados para no llevar al robot hacia la zona de

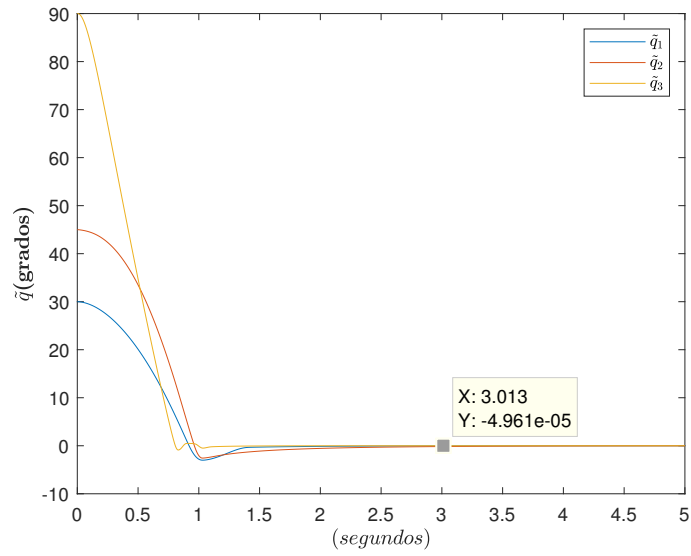


Figura 3.10: Errores de posición del robot con el regulador saturado τ_{sat_1}

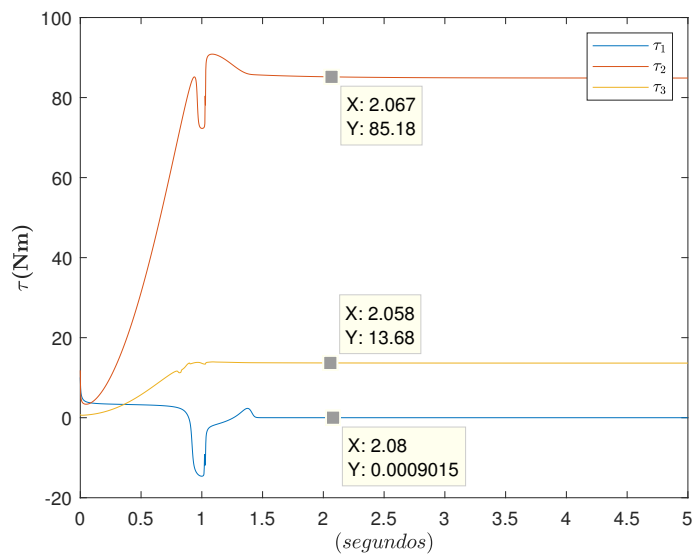


Figura 3.11: Torques aplicados por el regulador saturado τ_{sat_1}

saturación.

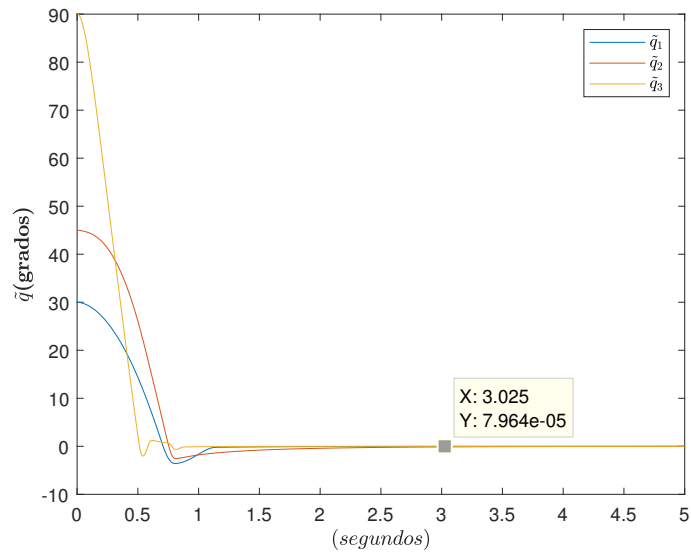


Figura 3.12: Errores de posición del robot con el regulador saturado τ_{sat_2}

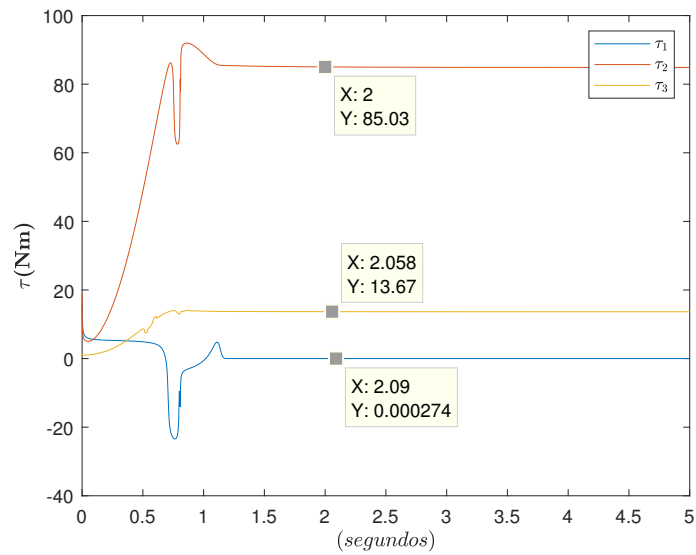


Figura 3.13: Torques aplicados por el regulador saturado τ_{sat_2}

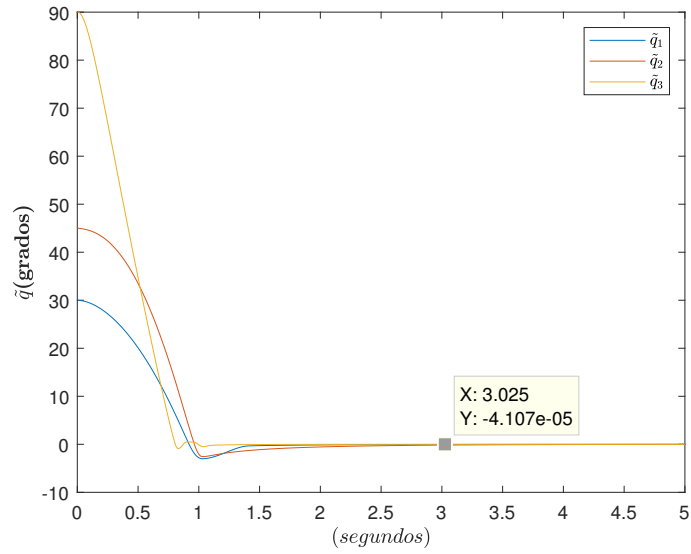


Figura 3.14: Errores de posición del robot con el regulador saturado τ_{sat3}

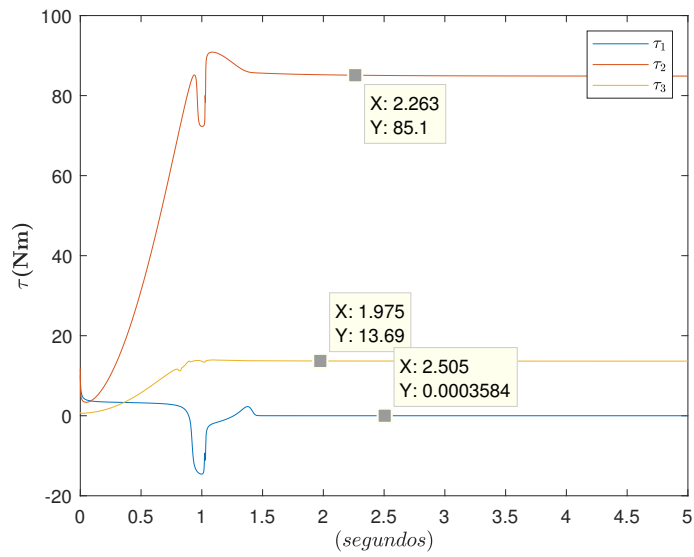


Figura 3.15: Torques aplicados por el regulador saturado τ_{sat3}

Capítulo 4

Reguladores con ganancias variables autosintonizables

La principal desventaja de depender de una regla matemática explícita para sintonía automática de las ganancias variables de los reguladores saturados, radica en la propuesta de los parámetros numéricos de δ_i . Si bien, es verdad que esta propuesta reduce el número de valores a proponer, ya que en la mayoría de las reglas de sintonía propuestas generalmente son dos parámetros a elegir por cada grado de libertad. Sin embargo, el desempeño del esquema de control depende de la correcta elección de δ_i , perjudicando el control de posición del robot si el usuario no está familiarizado con la técnica de sintonía. Dada esta problemática, se desea liberar a los algoritmos de control diseñados de la regla matemática, mediante la propuesta de una estrategia de sintonía autónoma de las ganancias variables desde el contexto del control adaptable. La ventaja de nuestra propuesta, es que la estrategia de sintonía autónoma de las ganancias variables pertenece a la ecuación en lazo cerrado. Por lo tanto, podemos analizar las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio mediante el método directo de Lyapunov. En este capítulo, se presenta el problema de control a resolver y la metodología usada para su solución, la implementación con los reguladores diseñados, el análisis de estabilidad asintótica de Lyapunov y resultados de simulación para verificar su funcionalidad.

4.1. Control de posición con sintonía autónoma de las ganancias variables

El problema de control a resolver, consiste en proponer una ley de control con ganancias variables para robots manipuladores, tal que el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (expresada en variables de estado articulares y dinámica auxiliar $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v]^T$) formada con el modelo dinámico del robot manipulador y la estructura de control satisfaga:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \\ \tilde{\mathbf{k}}_p(t) \\ \tilde{\mathbf{k}}_v(t) \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4n} \quad (4.1)$$

Ecuación en Lazo Cerrado

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\mathbf{k}}_p \\ \tilde{\mathbf{k}}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M^{-1}(\mathbf{q}) \left[\boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - B(\dot{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \right] \\ \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \\ \mathbf{f}_v(\tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Para dar solución de manera formal, se hace uso de la técnica de moldeo de energía para generar diferentes esquemas de control que generen un atractor con características de estabilidad asintótica.

$$\boldsymbol{\tau} = K_p(\tilde{\mathbf{k}}_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}))\nabla\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}}) - K_v(\tilde{\mathbf{k}}_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}))\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.3)$$

donde

- $\nabla\mathcal{U}_a(\tilde{\mathbf{q}})$ es la energía potencial artificial (función definida positiva).
- El error de posición está dado por $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, el cual se define como $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$, siendo \mathbf{q}_d la posición articular deseada y \mathbf{q} la posición actual del robot manipulador.
- $K_p(\tilde{\mathbf{k}}_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}))$ y $K_v(\tilde{\mathbf{k}}_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices definidas positivas diagonales, conocidas como ganancias proporcional y derivativa, respectivamente.
 - $\tilde{\mathbf{k}}_p(t)$ y $\tilde{\mathbf{k}}_v(t)$ variables de estado de la dinámica auxiliar.
 - Dinámica auxiliar $\tilde{\mathbf{k}}_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$, $\tilde{\mathbf{k}}_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ funciones convenientemente construidas (Lipchitz).
- La función disipativa que genera el amortiguamiento mecánico es $\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \in \mathbb{R}^n$.
- Compensación del par gravitacional $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$.
- Función estricta de Lyapunov:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v) > 0 \Rightarrow \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v) < 0 \quad (4.4)$$

4.2. Regulador PD con ganancias variables autosintonizables

Sea el regulador PD con ganancias variables:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\tilde{\mathbf{q}} - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (4.5)$$

O bien:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} k_{p1} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \hat{k}_{pn} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_n + \dot{q}_n)) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} k_{v1} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \hat{k}_{vn} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_n + \dot{q}_n)) \end{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (4.6)$$

a partir de la ley de control (4.6) propuesta, podemos definir:

$$\mathbf{k}_p = \begin{bmatrix} k_{p1} \\ k_{p2} \\ \vdots \\ k_{pn} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{k}_v = \begin{bmatrix} k_{v1} \\ k_{v2} \\ \vdots \\ k_{vn} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

siendo $\mathbf{k}_p \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{k}_v \in \mathbb{R}^n$ los vectores de parámetros desconocidos, cuyos valores son constantes. Dicho esto, el regulador PD con ganancias variables (4.5) se puede reescribir:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p(\mathbf{k}_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}))\tilde{\mathbf{q}} - K_v(\mathbf{k}_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}))\dot{\mathbf{q}} \quad (4.9)$$

Se propone la siguiente versión adaptable:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \hat{k}_{p1} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \hat{k}_{pn} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_n + \dot{q}_n)) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} \hat{k}_{v1} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \hat{k}_{vn} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_n + \dot{q}_n)) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.10)$$

a partir de la ley de control (4.10) propuesta, podemos definir:

$$\hat{\mathbf{k}}_p = \begin{bmatrix} \hat{k}_{p1} \\ \hat{k}_{p2} \\ \vdots \\ \hat{k}_{pn} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_v = \begin{bmatrix} \hat{k}_{v1} \\ \hat{k}_{v2} \\ \vdots \\ \hat{k}_{vn} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

siendo $\hat{\mathbf{k}}_p \in \mathbb{R}^n$ y $\hat{\mathbf{k}}_v \in \mathbb{R}^n$ los vectores de parámetros adaptables. Entonces, podemos reescribir:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p(\hat{\mathbf{k}}_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}))\tilde{\mathbf{q}} - K_v(\hat{\mathbf{k}}_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}))\dot{\mathbf{q}} \quad (4.13)$$

Dicho esto, proponemos la siguientes leyes de adaptación:

$$\hat{\mathbf{k}}_p(t) = \Lambda \int_0^t \left[\frac{\sinh(\tilde{\mathbf{q}}(\sigma))}{1 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}}(\sigma))} - \tilde{\mathbf{k}}_v(\sigma) - \frac{\sinh(\dot{\mathbf{q}}(\sigma))}{1 + \cosh(\dot{\mathbf{q}}(\sigma))} - \tilde{\mathbf{k}}_p(\sigma) \right] d\sigma + \hat{\mathbf{k}}_p(0) \quad (4.14)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_v(t) = \Gamma \int_0^t \left[\frac{\sinh(\tilde{\mathbf{q}}(\sigma))}{1 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}}(\sigma))} - \tilde{\mathbf{k}}_v(\sigma) - \frac{\sinh(\dot{\mathbf{q}}(\sigma))}{1 + \cosh(\dot{\mathbf{q}}(\sigma))} - \tilde{\mathbf{k}}_p(\sigma) \right] d\sigma + \hat{\mathbf{k}}_v(0) \quad (4.15)$$

donde $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales y definidas positivas $\Lambda > 0$ y $\Gamma > 0$, conocidas como matrices de adaptación. Sus parámetros numéricos definen la velocidad de sintonía autónoma de las ganancias variables. Los vectores $\hat{\mathbf{k}}_p(0) \in \mathbb{R}^n$ y $\hat{\mathbf{k}}_v(0) \in \mathbb{R}^n$ son cualquier vector, el cual es seleccionado en la práctica como la mejor aproximación *a priori* disponible de los vectores desconocidos $\mathbf{k}_p \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{k}_v \in \mathbb{R}^n$.

Asimismo, definimos dos nuevos vectores de estados $\tilde{\mathbf{k}}_p \in \mathbb{R}^n$ y $\tilde{\mathbf{k}}_v \in \mathbb{R}^n$, los cuales se definen como:

$$\tilde{\mathbf{k}}_p = \hat{\mathbf{k}}_p - \mathbf{k}_p = \begin{bmatrix} \hat{k}_{p1} \\ \hat{k}_{p2} \\ \vdots \\ \hat{k}_{pn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{p1} \\ k_{p2} \\ \vdots \\ k_{pn} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_v = \hat{\mathbf{k}}_v - \mathbf{k}_v = \begin{bmatrix} \hat{k}_{v1} \\ \hat{k}_{v2} \\ \vdots \\ \hat{k}_{vn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{v1} \\ k_{v2} \\ \vdots \\ k_{vn} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

dado que \mathbf{k}_p y \mathbf{k}_v son constantes y desconocidos, entonces la derivada con respecto al tiempo resulta como: $\dot{\tilde{\mathbf{k}}}_p = \dot{\hat{\mathbf{k}}}_p$ y $\dot{\tilde{\mathbf{k}}}_v = \dot{\hat{\mathbf{k}}}_v$. Entonces, el esquema de control PD con ganancias variables se reescribe como:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p(\tilde{\mathbf{k}}_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}))\tilde{\mathbf{q}} - K_v(\tilde{\mathbf{k}}_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}))\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.18)$$

Se construye la ecuación en lazo cerrado, la cual resulta una ecuación no lineal autónoma. Esto es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\mathbf{k}}_p \\ \tilde{\mathbf{k}}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p(\tilde{\mathbf{k}}_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}))\tilde{\mathbf{q}} - K_v(\tilde{\mathbf{k}}_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}))\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - B\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}] \\ \Lambda \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\tilde{q})}{1+\cosh(\tilde{q})} - \tilde{\mathbf{k}}_v - \frac{\sinh(\dot{\tilde{q}})}{1+\cosh(\dot{\tilde{q}})} - \tilde{\mathbf{k}}_p \\ \Gamma \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\tilde{q})}{1+\cosh(\tilde{q})} - \tilde{\mathbf{k}}_v - \frac{\sinh(\dot{\tilde{q}})}{1+\cosh(\dot{\tilde{q}})} - \tilde{\mathbf{k}}_p \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4n} \quad (4.19)$$

observe que:

- $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = I(-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, siendo $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz identidad.
- $C(\mathbf{q}, \mathbf{0})\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, $B\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, $K_v(\tilde{\mathbf{k}}_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}))\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$ y $K_p(\tilde{\mathbf{k}}_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}))\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Por lo tanto $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ cuando $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$.
- $\frac{\sinh(\tilde{q})}{1+\cosh(\tilde{q})} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{q} = \mathbf{0}$, $\frac{\sinh(\dot{\tilde{q}})}{1+\cosh(\dot{\tilde{q}})} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = \mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{k}}_p = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y $\tilde{\mathbf{k}}_v = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\dot{\tilde{\mathbf{k}}}_p = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ cuando $\tilde{q} = \mathbf{0}$, $\dot{\tilde{q}} = \mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{k}}_p = \mathbf{0}$ y $\tilde{\mathbf{k}}_v = \mathbf{0}$.
- $\frac{\sinh(\tilde{q})}{1+\cosh(\tilde{q})} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{q} = \mathbf{0}$, $\frac{\sinh(\dot{\tilde{q}})}{1+\cosh(\dot{\tilde{q}})} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = \mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{k}}_p = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y $\tilde{\mathbf{k}}_v = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto $\dot{\tilde{\mathbf{k}}}_v = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ cuando $\tilde{q} = \mathbf{0}$, $\dot{\tilde{q}} = \mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{k}}_p = \mathbf{0}$ y $\tilde{\mathbf{k}}_v = \mathbf{0}$.

Dicho lo anterior, se demuestra la existencia y unicidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (4.19) $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4n}$.

4.2.1. Función propuesta de Lyapunov

Con la finalidad de demostrar la estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado, se propone la siguiente función estricta de Lyapunov.

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v) &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\sigma}^T K_p(\tilde{\mathbf{k}}_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})) d\boldsymbol{\sigma} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{k}}_p^T \Lambda^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_p + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{k}}_v^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_v \end{aligned} \quad (4.20)$$

La cual puede reescribirse:

$$\begin{aligned}
V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v) &= \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\sigma}^T K_p(\tilde{\mathbf{k}}_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\mathbf{q}})) d\boldsymbol{\sigma} + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}} \right]^T M(\mathbf{q}) \left[\dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}} \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{k}}_p^T \Lambda^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_p + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{k}}_v^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_v > 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

demostrando que (4.20) es definida positiva. Entonces si la función $\dot{V}((\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v))|_0$, la función candidata $V((\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v))$ será una función estricta. De acuerdo con el método directo de Lyapunov el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (4.19) será asintóticamente estable y global. Esto significaría que las variables de estado $\tilde{\mathbf{q}}(t)$, $\dot{\mathbf{q}}(t)$, $\tilde{\mathbf{k}}_p(t)$ y $\tilde{\mathbf{k}}_v(t)$ convergen asintóticamente a cero cuando $t \rightarrow \infty$ sin importar las condiciones iniciales $[\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0), \tilde{\mathbf{k}}_p(0), \tilde{\mathbf{k}}_v(0)]^T$.

4.3. Regulador saturado con ganancias variables autosintonizables

Considerando los reguladores saturados diseñados en el capítulo anterior:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \dot{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \dot{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \dot{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_n)}} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

O bien:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \begin{bmatrix} k_{p1} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \hat{k}_{pn} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_n + \dot{q}_n)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} - \\
&- \begin{bmatrix} k_{v1} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \hat{k}_{vn} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_n + \dot{q}_n)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \dot{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \dot{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \dot{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_n)}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

a partir de la ley de control (4.23) propuesta, podemos definir:

$$\mathbf{k}_p = \begin{bmatrix} k_{p1} \\ k_{p2} \\ \vdots \\ k_{pn} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

$$\mathbf{k}_v = \begin{bmatrix} k_{v1} \\ k_{v2} \\ \vdots \\ k_{vn} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

siendo $\mathbf{k}_p \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{k}_v \in \mathbb{R}^n$ los vectores de parámetros desconocidos, cuyos valores son constantes. Dicho esto, los reguladores saturados con ganancias variables (4.22) se puede reescribir:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p(\mathbf{k}_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi\tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi\tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi\tilde{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} - K_v(\mathbf{k}_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi\dot{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi\dot{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi\dot{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_n)}} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Se propone la siguiente versión adaptable:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \hat{k}_{p1} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \hat{k}_{pn} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_n + \dot{q}_n)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi\tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi\tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi\tilde{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{k}_{v1} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \hat{k}_{vn} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_n + \dot{q}_n)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi\dot{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi\dot{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi\dot{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_n)}} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

a partir de la ley de control (4.27) propuesta, podemos definir:

$$\hat{\mathbf{k}}_p = \begin{bmatrix} \hat{k}_{p1} \\ \hat{k}_{p2} \\ \vdots \\ \hat{k}_{pn} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_v = \begin{bmatrix} \hat{k}_{v1} \\ \hat{k}_{v2} \\ \vdots \\ \hat{k}_{vn} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

siendo $\hat{\mathbf{k}}_p \in \mathbb{R}^n$ y $\hat{\mathbf{k}}_v \in \mathbb{R}^n$ los vectores de parámetros adaptables. Entonces, podemos reescribir:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p(\hat{\mathbf{k}}_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}))\tilde{\mathbf{q}} - K_v(\hat{\mathbf{k}}_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}))\dot{\mathbf{q}} \quad (4.30)$$

Dicho esto, proponemos la siguientes leyes de adaptación:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}_p(t) = \Lambda \int_0^t & \left[\frac{\sinh(\tanh(\tilde{\mathbf{q}}(\sigma)))}{1 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}}(\sigma))} - \tanh(\tilde{\mathbf{k}}_v(\sigma)) - \right. \\ & \left. - \frac{\sinh(\tanh(\dot{\mathbf{q}}(\sigma)))}{1 + \cosh(\dot{\mathbf{q}}(\sigma))} - \tanh(\tilde{\mathbf{k}}_p(\sigma)) \right] d\sigma + \hat{\mathbf{k}}_p(0) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}_v(t) = \Gamma \int_0^t & \left[\frac{\sinh(\arctan(\tilde{\mathbf{q}}(\sigma)))}{1 + \cosh(\tilde{\mathbf{q}}(\sigma))} - \arctan(\tilde{\mathbf{k}}_v(\sigma)) - \right. \\ & \left. - \frac{\sinh(\arctan(\dot{\mathbf{q}}(\sigma)))}{1 + \cosh(\dot{\mathbf{q}}(\sigma))} - \arctan(\tilde{\mathbf{k}}_p(\sigma)) \right] d\sigma + \hat{\mathbf{k}}_v(0) \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales y definidas positivas $\Lambda > 0$ y $\Gamma > 0$, conocidas como matrices de adaptación. Sus parámetros numéricos definen la velocidad de sintonía autónoma de las ganancias variables. Los vectores $\hat{\mathbf{k}}_p(0) \in \mathbb{R}^n$ y $\hat{\mathbf{k}}_v(0) \in \mathbb{R}^n$ son cualquier vector, el cual es seleccionado en la práctica como la mejor aproximación *a priori* disponible de los vectores desconocidos $\mathbf{k}_p \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{k}_v \in \mathbb{R}^n$.

Asimismo, definimos dos nuevos vectores de estados $\tilde{\mathbf{k}}_p \in \mathbb{R}^n$ y $\tilde{\mathbf{k}}_v \in \mathbb{R}^n$, los cuales se definen como:

$$\tilde{\mathbf{k}}_p = \hat{\mathbf{k}}_p - \mathbf{k}_p = \begin{bmatrix} \hat{k}_{p1} \\ \hat{k}_{p2} \\ \vdots \\ \hat{k}_{pn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{p1} \\ k_{p2} \\ \vdots \\ k_{pn} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_v = \hat{\mathbf{k}}_v - \mathbf{k}_v = \begin{bmatrix} \hat{k}_{v1} \\ \hat{k}_{v2} \\ \vdots \\ \hat{k}_{vn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{v1} \\ k_{v2} \\ \vdots \\ k_{vn} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

dato que \mathbf{k}_p y \mathbf{k}_v son constantes y desconocidos, entonces la derivada con respecto al tiempo resulta como: $\dot{\hat{\mathbf{k}}}_p = \dot{\hat{\mathbf{k}}}_p$ y $\dot{\hat{\mathbf{k}}}_v = \dot{\hat{\mathbf{k}}}_v$. Entonces, los esquemas de control saturados con ganancias variables se reescribe como:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p(\tilde{\mathbf{k}}_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_1)}{\sqrt{1 + \tanh^2(\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_2)}{\sqrt{1 + \tanh^2(\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_n)}{\sqrt{1 + \tanh^2(\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} - K_v(\tilde{\mathbf{k}}_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \dot{q}_1)}{\sqrt{1 + \tanh^2(\dot{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \dot{q}_2)}{\sqrt{1 + \tanh^2(\dot{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \dot{q}_n)}{\sqrt{1 + \tanh^2(\dot{q}_n)}} \end{bmatrix} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (4.35)$$

Se construye la ecuación en lazo cerrado, la cual resulta una ecuación no lineal autónoma. Esto es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \\ \tilde{k}_p \\ \tilde{k}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p(\tilde{\mathbf{k}}_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})) \tilde{\mathbf{q}} - K_v(\tilde{\mathbf{k}}_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} - B\dot{q} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{q}] \\ \Lambda \begin{bmatrix} \frac{\sinh(\tanh(\tilde{q}))}{1+\cosh(\tilde{q})} - \tanh(\tilde{\mathbf{k}}_v) - \frac{\sinh(\tanh(\dot{q}))}{1+\cosh(\dot{q})} - \tanh(\tilde{\mathbf{k}}_p) \\ \frac{\sinh(\arctan(\tilde{q}))}{1+\cosh(\tilde{q})} - \arctan(\tilde{\mathbf{k}}_v) - \frac{\sinh(\arctan(\dot{q}))}{1+\cosh(\dot{q})} - \arctan(\tilde{\mathbf{k}}_p) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

observe que:

- $\dot{\tilde{q}} = I(-\dot{q}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{q} = \mathbf{0}$, siendo $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz identidad.

- $C(\mathbf{q}, \mathbf{0})\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, $B\dot{q} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{q} = \mathbf{0}$, $K_v(\tilde{\mathbf{k}}_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{q} = \mathbf{0} \text{ y } K_p(\tilde{\mathbf{k}}_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \text{ Por lo tanto } \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \text{ cuando } \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \text{ y } \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

- $\frac{\sinh(\tanh(\tilde{q}))}{1+\cosh(\tilde{q})} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\frac{\sinh(\tanh(\dot{q}))}{1+\cosh(\dot{q})} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\tanh(\tilde{\mathbf{k}}_p) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{k}}_p = \mathbf{0}$ y $\tanh(\tilde{\mathbf{k}}_v) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{k}}_v = \mathbf{0}$. Por lo tanto $\dot{\tilde{\mathbf{k}}}_p = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ cuando $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{k}}_p = \mathbf{0}$ y $\tilde{\mathbf{k}}_v = \mathbf{0}$.
- $\frac{\sinh(\arctan(\tilde{q}))}{1+\cosh(\tilde{q})} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\frac{\sinh(\arctan(\dot{q}))}{1+\cosh(\dot{q})} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\arctan(\tilde{\mathbf{k}}_p) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{k}}_p = \mathbf{0}$ y $\arctan(\tilde{\mathbf{k}}_v) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{k}}_v = \mathbf{0}$. Por lo tanto $\dot{\tilde{\mathbf{k}}}_v = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ cuando $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\tilde{\mathbf{k}}_p = \mathbf{0}$ y $\tilde{\mathbf{k}}_v = \mathbf{0}$.

Dicho lo anterior, se demuestra la existencia y unicidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (4.19) $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4n}$.

4.3.1. Función propuesta de Lyapunov

Con la finalidad de demostrar la estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado, se propone la siguiente función estricta de Lyapunov.

$$\begin{aligned}
V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v) &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\sigma}^T K_p(\tilde{\mathbf{k}}_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})) d\boldsymbol{\sigma} - \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{k}}_p^T \Lambda^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_p + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{k}}_v^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_v \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix}^T M(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

La cual puede reescribirse:

$$\begin{aligned}
V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v) &= \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\sigma}^T K_p(\tilde{\mathbf{k}}_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})) d\boldsymbol{\sigma} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} \right]^T M(\mathbf{q}) \left[\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \begin{bmatrix} \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} \\ \vdots \\ \frac{\arctan(\psi \tilde{q}_n)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_n)}} \end{bmatrix} \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{k}}_p^T \Lambda^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_p + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{k}}_v^T \Gamma^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_v > 0
\end{aligned} \tag{4.38}$$

demostrando que (4.37) es definida positiva. Al demostrar que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{k}}_p, \tilde{\mathbf{k}}_v) < 0$ entonces se podría concluir la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (4.36).

Al demostrar la estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio, asegura la sintonía automática de las ganancias variables y la solución al problema de control de posición de robots manipuladores. En este sentido, la solución teórica presentada representa una alternativa interesante y mucho más flexible, con respecto a la lógica difusa, algoritmos externos o redes neuronales.

4.4. Simulaciones en robot de 3 gdl

Con el fin de dar soporte a los desarrollos teóricos anteriores, se implementa el regulador PD con ganancias variables autosintonizables. Realizamos la regulación del robot antropomórfico de 3 grados de libertad desde su posición de casa $[0, 0, 0]^T$ grados hacia las

posiciones deseadas $[90, 45, 30]^T$ grados. Desde este contexto, el esquema PD es autosintonizable sin depender de la regla matemática, y donde el esquema de sintonía pertenece a la ecuación en lazo cerrado con un único punto de equilibrio asintóticamente estable. Considerando las condiciones iniciales $[\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0), \tilde{\mathbf{k}}_p(0), \tilde{\mathbf{k}}_v(0)]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4n}$ y las matrices de velocidad de autosintonía como:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Se proponen los vectores de aproximación:

$$\hat{\mathbf{k}}_p(0) = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{k}}_v(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

En la Figura 4.1 se muestran los errores de posición del robot manipulador cuando es regulado por el esquema PD con ganancias variables autosintonizables. Dadas las propiedades de estabilidad asintótica del punto de equilibrio, el robot manipulador a las posiciones deseadas y a las velocidades de movimiento a cero con una respuesta subamortiguada en régimen transitorio y suavidad a la llegada a régimen permanente con errores pequeños. Asimismo, los errores de las variables de estado \mathbf{k}_p y \mathbf{k}_v convergen asintóticamente a cero. Esto significa que se obtienen los valores numéricos del vector \mathbf{k}_p y \mathbf{k}_v para sintonizar automáticamente las ganancias variables proporcional y derivativa del esquema de control. Los vectores de la mejor aproximación $\hat{\mathbf{k}}_p(0)$ y $\hat{\mathbf{k}}_v(0)$ son elegidos arbitrariamente con el fin de mostrar que se cumple la sintonía autónoma de las ganancias variables. Los valores de las matrices Λ y Γ son encargados de la velocidad de sintonía automática de las ganancias variables, en nuestro caso, se aumentan los valores de las matrices diagonales hasta obtener la mejor respuesta del robot manipulador. En la Figura 4.2 se muestra que los límites físicos de los servomotores no son superados, de acuerdo con las especificaciones de la Tabla 3.1. A pesar de que el regulador PD con ganancias variables es un esquema de control que solicita señales de torque no acotadas, el esquema de sintonía autónoma de las ganancias variables permite descartar este escenario. Entonces, los servomotores siempre aplican torque dentro de los límites prescritos, evitando el fenómeno de saturación y fallas mecánicas que puede sufrir el robot manipulador. Estas ventajas de regulación que presenta el esquema PD autosintonizable, aborda el problema de sintonía de ganancias variables y las complicaciones prácticas de los actuadores de transmisión directa del robot manipulador.

Para continuar, se implementa el regulador saturado con ganancias variables autosintonizables en el robot manipulador de 3 gdl a nivel simulación. Se lleva al robot hacia las posiciones deseadas $[90, 45, 30]^T$ grados desde la posición de casa $[0, 0, 0]^T$ grados. La respuesta del error de posición se muestran en la Figura 4.3, donde se observa que el robot

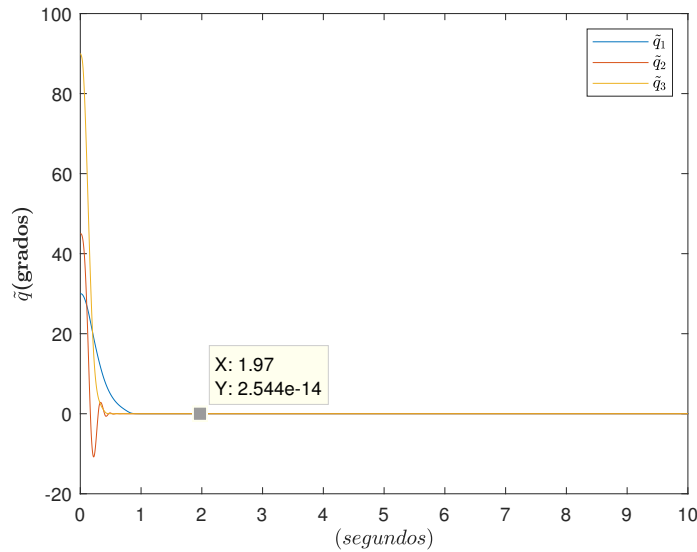


Figura 4.1: Errores de posición del robot con el regulador PD autosintonizable

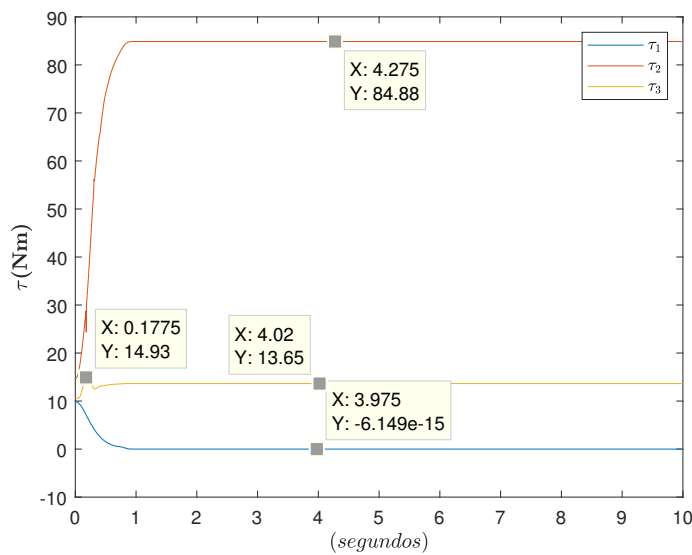


Figura 4.2: Torque aplicado al robot con el regulador PD autosintonizable

manipulador converge hacia las posiciones deseadas con un régimen transitorio subamortiguado debido a la inyección de amortiguamiento por la acción derivativa saturada de la velocidad y la ganancia derivativa variable en función del error de posición y la velocidad. Para impulsar al robot hacia el punto de equilibrio, la acción saturada proporcional del error de posición y su ganancia dependiente de la velocidad de movimiento y el error de posición articular. La sintonía autónoma de las ganancias variables es alcanzada considerando a las matrices de velocidad de autosintonía Λ y Γ y los vectores de aproximación

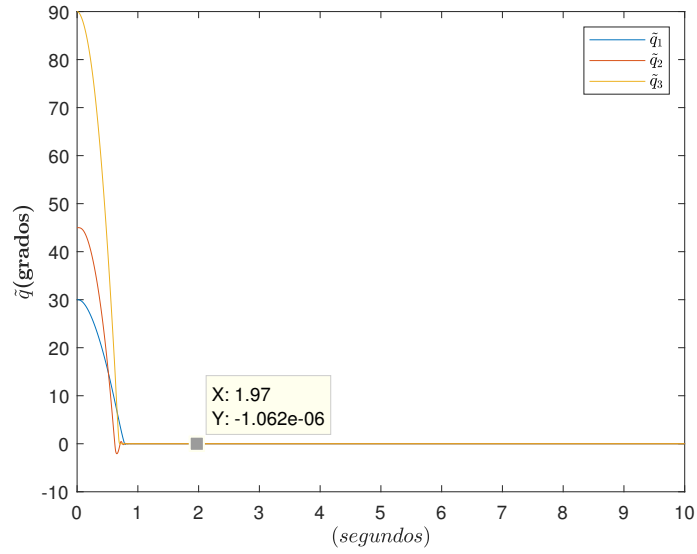


Figura 4.3: Erros de posição do robô com o regulador saturado autosintonizável

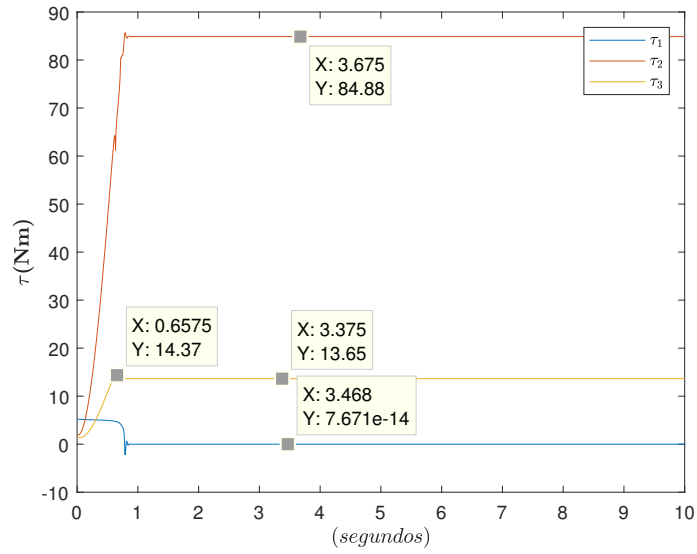


Figura 4.4: Torque aplicado ao robô com o regulador saturado autosintonizável

$\hat{\mathbf{k}}_p(0)$ y $\hat{\mathbf{k}}_v(0)$ como:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{k}}_p(0) &= \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \\ 8 \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{k}}_v(0) &= \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.42}$$

El cambio de la ley de adaptación (4.33) y (4.34) donde $\tilde{\mathbf{k}}_p$ y $\tilde{\mathbf{k}}_v$ son argumentos de funciones continuas, diferenciables y acotadas. A pesar de esto, se garantiza la convergencia asintótica de $\tilde{\mathbf{k}}_p$ y $\tilde{\mathbf{k}}_v$ a cero, obteniendo los parámetros necesarios para la sintonía autónoma de las ganancias variables. Al tratarse de un esquema de control saturado, es bien sabido que los servomotores aplican torque sin superar sus capacidades (ver Figura 4.3) que han sido presentadas en la Tabla 3.1. Dicho esto, el robot manipulador no adquiere no linealidades que no han sido consideradas en el modelo dinámico (2.8).

Por lo tanto, gracias a los resultados obtenidos a nivel simulación, los reguladores autosintonizables diseñados en este capítulo pueden implementarse en un robot manipulador de manera experimental, sustentando los resultados teóricos.

Capítulo 5

Resultados experimentales

Para dar soporte a nuestros desarrollos teóricos, se han implementado los esquemas de control propuestos en una plataforma experimental de robots manipuladores. Este sistema mecatrónico se ha diseñado y construido en la Facultad de Ciencias de la Electrónica (FCE) en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), México. El manipulador antropomórfico es de tres grados de libertad (3 gdl) con una libertad de movimiento tridimensional, donde la longitud de los eslabones son de 0.4 m y su espacio de trabajo es una esfera con un radio de 1 m (ver Figura 5.1). Los eslabones están hechos de aluminio 6061 actuados por servomotores de transmisión directa de tipo brushless de la compañía Parker Compumotor, sin un sistema de reducción de engranes. Las ventajas de este tipo de actuadores funcionan como una fuente de torque aplicado y reducen significativamente el fenómeno de fricción comparados con otros actuadores por sistema de engranajes. Los modelos de los servomotores del robot experimental se enlistan en la Tabla 5.1.

Todos los servomotores operan en modo torque, por lo tanto, ellos funcionan como una fuente de torque, aceptando una entrada analógica de voltaje como una referencia de señal de torque. La información de la posición es obtenida del encoder incremental localizado dentro de los servomotores (ver Tabla 5.1). La electrónica como interfaz del robot manipulador está conformada por una tarjeta de control modelo MFIO-3A manufacturada por Precision MicroDynamic Inc., los algoritmos de control han sido compilados en lenguaje C, con un periodo de muestreo ejecutado de 2.5 ms en una computadora Pentium III. La selección del periodo de muestreo es menor al 10 por ciento del tiempo de respuesta a la función escalón, para el adecuado reconocimiento de la dinámica del robot manipulador. Finalmente, para la implementación de los esquemas de control propuestos, es necesario el vector de compensación de gravedad, el cual está disponible en [25].

Articulación	Torque máximo	Encoder
Base	15 Nm	1638400 p/rev
Hombro	50 Nm	1015808 p/rev
Codo	5 Nm	2612440 p/rev

Tabla 5.1: Servomotores del robot experimental

El experimento consiste en llevar al robot manipulador hacia el vector de posiciones deseadas $[q_{d1}, q_{d2}, q_{d3}]^T$ grados, desde el vector de posición de casa $[0, 0, 0]^T$ grados. Se evalúan los esquemas de control diseñados en el Capítulo 2, donde la sintonía automática de las ganancias variables es alcanzada mediante una regla matemática propuesta. Con propósitos de estudiar el desempeño de los esquemas de control, se realiza un análisis comparativo

con otros esquemas de control conocidos en la literatura.

5.1. Reguladores PD con ganancias variables

En esta sección se evalúan los reguladores PD con ganancias variables 3.1 con los casos particulares de ganancias variables y la nueva nomenclatura usada para identificarlos (ver Tabla 5.2). El vector de posiciones elegido para este regulador es $\mathbf{q}_d = [90, 45, 45]^T$ grados. Comenzamos implementando el algoritmos de control $\boldsymbol{\tau}_{PDa}$, donde el torque aplicado es el siguiente:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \hat{k}_{p1}(1 - \beta_1 e^{-\beta_1 \tanh(\tilde{q}_1^2 + \dot{q}_1^2)})\tilde{q}_1 - \hat{k}_{v1}(1 - \beta_1 e^{-\beta_1 \tanh(\tilde{q}_1^2 + \dot{q}_1^2)})\dot{q}_1 + g_1 \\ \tau_2 &= \hat{k}_{p2}(1 - \beta_2 e^{-\beta_2 \tanh(\tilde{q}_2^2 + \dot{q}_2^2)})\tilde{q}_2 - \hat{k}_{v2}(1 - \beta_2 e^{-\beta_2 \tanh(\tilde{q}_2^2 + \dot{q}_2^2)})\dot{q}_2 + g_2 \\ \tau_3 &= \hat{k}_{p3}(1 - \beta_3 e^{-\beta_3 \tanh(\tilde{q}_3^2 + \dot{q}_3^2)})\tilde{q}_3 - \hat{k}_{v3}(1 - \beta_3 e^{-\beta_3 \tanh(\tilde{q}_3^2 + \dot{q}_3^2)})\dot{q}_3 + g_3\end{aligned}\quad (5.1)$$

siendo el par gravitacional $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3$ con los siguientes, elementos:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(\theta_6 \sin(q_2 + q_3) + \theta_7 \cos(q_2 + q_3)) + \theta_{14} \sin(q_2) + \theta_{15} \cos(q_2) \\ g(\theta_6 * \sin(q_2 + q_3) + \theta_7 \cos(q_2 + q_3)) \end{bmatrix}\quad (5.2)$$

con $\theta_6 = 0.11152$, $\theta_7 = 6.828 \times 10^{-3}$, $\theta_{14} = 16.4906$, $\theta_{15} = 0.202478$ y $g = 9.81$.

Como se puede observar en la Figura 5.2 los errores de posición del robot manipulador convergen asintóticamente hacia el régimen permanente con una respuesta subamortiguada en el régimen transitorio debido a la velocidad y la ganancia variable que depende del error de posición y la velocidad. Ambos términos pertenecen a la acción de control derivativa del regulador PD con ganancias variables. Asimismo, la sintonía automática de las ganancias variables es alcanzada debido a la correcta elección de δ_i y las propiedades de estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. Como consecuencia, los torques aplicados por los servomotores no llegan a la zona de saturación, tal y como muestra la Figura 5.3. El control de posición del robot es realizado mediante



Figura 5.1: Robot de transmisión directa BUAP

el esquema τ_{PDb} , donde el par aplicado es el siguiente:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \hat{k}_{p1}(1 - \beta_1 e^{-\beta_1(\sinh^2(\tilde{q}_1) + \cosh^2(\dot{q}_1))})\tilde{q}_1 - \hat{k}_{v1}(1 - \beta_1 e^{-\beta_1(\sinh^2(\tilde{q}_1) + \cosh^2(\dot{q}_1))})\dot{q}_1 + g_1 \\ \tau_2 &= \hat{k}_{p2}(1 - \beta_2 e^{-\beta_2(\sinh^2(\tilde{q}_2) + \cosh^2(\dot{q}_2))})\tilde{q}_2 - \hat{k}_{v2}(1 - \beta_2 e^{-\beta_2(\sinh^2(\tilde{q}_2) + \cosh^2(\dot{q}_2))})\dot{q}_2 + g_2 \\ \tau_3 &= \hat{k}_{p3}(1 - \beta_3 e^{-\beta_3(\sinh^2(\tilde{q}_3) + \cosh^2(\dot{q}_3))})\tilde{q}_3 - \hat{k}_{v3}(1 - \beta_3 e^{-\beta_3(\sinh^2(\tilde{q}_3) + \cosh^2(\dot{q}_3))})\dot{q}_3 + g_3\end{aligned}\quad (5.3)$$

La respuesta del error de posición mostrada en la Figura 5.4, es subamortiguada en el régimen transitorio y rápida convergencia hacia las posiciones deseadas debido a la acción de control proporcional, la cual está conformada por el vector de error de posición y la matriz de ganancia variable dependiente de la velocidad de movimiento y el error de posición. Los pares aplicados del servomotor mostrados en la Figura 5.5, se mantienen dentro de la región lineal de trabajo, evitando agregar no linealidades que no han sido contempladas dentro de la dinámica del robot manipulador. El cambio de los valores numéricos de δ_i no afectan al esquema de control para que el robot manipulador se mantenga en el punto de equilibrio, cuando el tiempo evoluciona hasta finalizar el experimento.

Por último, al implementar el esquema τ_{PDc} se logra la regulación del robot al vector de posiciones deseadas, siendo la siguiente expresión el torque aplicado:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \hat{k}_{p1}(1 - \beta_1 e^{-\beta_1 \arctan(\tilde{q}_1^2 + \dot{q}_1^2)})\tilde{q}_1 - \hat{k}_{v1}(1 - \beta_1 e^{-\beta_1 \arctan(\tilde{q}_1^2 + \dot{q}_1^2)})\dot{q}_1 + g_1 \\ \tau_2 &= \hat{k}_{p2}(1 - \beta_2 e^{-\beta_2 \arctan(\tilde{q}_2^2 + \dot{q}_2^2)})\tilde{q}_2 - \hat{k}_{v2}(1 - \beta_2 e^{-\beta_2 \arctan(\tilde{q}_2^2 + \dot{q}_2^2)})\dot{q}_2 + g_2 \\ \tau_3 &= \hat{k}_{p3}(1 - \beta_3 e^{-\beta_3 \arctan(\tilde{q}_3^2 + \dot{q}_3^2)})\tilde{q}_3 - \hat{k}_{v3}(1 - \beta_3 e^{-\beta_3 \arctan(\tilde{q}_3^2 + \dot{q}_3^2)})\dot{q}_3 + g_3\end{aligned}\quad (5.4)$$

En la Figura 5.6, se muestra la respuesta del error de posición del robot manipulador. Observe que para este caso, la respuesta del robot tiene el sobrepico máximo menor, con respecto a los otros dos casos anteriores. Sin embargo, el mayor error en régimen permanente con respecto a los anteriores casos. Esto se debe al cambio más abrupto de los parámetros δ_i para la sintonía automática de las ganancias variables. No obstante, la convergencia asintótica del robot hacia el punto se cumple con estas condiciones *a priori*. Asimismo, los servomotores no superan sus límites físicos cuando aplican torque a las articulaciones del robot manipulador, como se muestra en la Figura 5.7. En suma, los reguladores PD con los casos particulares de la gama de ganancias variables, tienen un correcto funcionamiento en robots manipuladores. Es importante recalcar que las diferentes respuestas del robot, han dependido de la elección de los valores de δ_i y no por la elección de los casos particulares de las ganancias variables. Esto representa una ventaja relevante, ya que es posible generar una familia extensa de algoritmos de control con ganancias variables y de alto desempeño, si se eligen los valores óptimos de δ_i .

Regulador PD	Ganancias variables	δ_i
τ_{PDa}	(3.30)	$\delta_1 = 1.6, \delta_2 = 1.2, \delta_3 = 1$
τ_{PDb}	(3.31)	$\delta_1 = 1.5, \delta_2 = 1.7, \delta_3 = 1.85$
τ_{PDc}	(3.32)	$\delta_1 = 1.8, \delta_2 = 3.5, \delta_3 = 2$

Tabla 5.2: Reguladores PD con ganancias variables

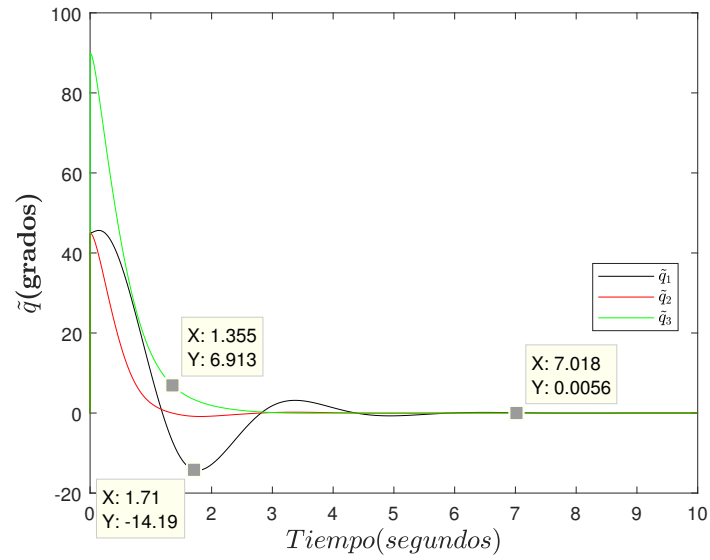


Figura 5.2: Errores de posición del robot con el regulador τ_{PDa}

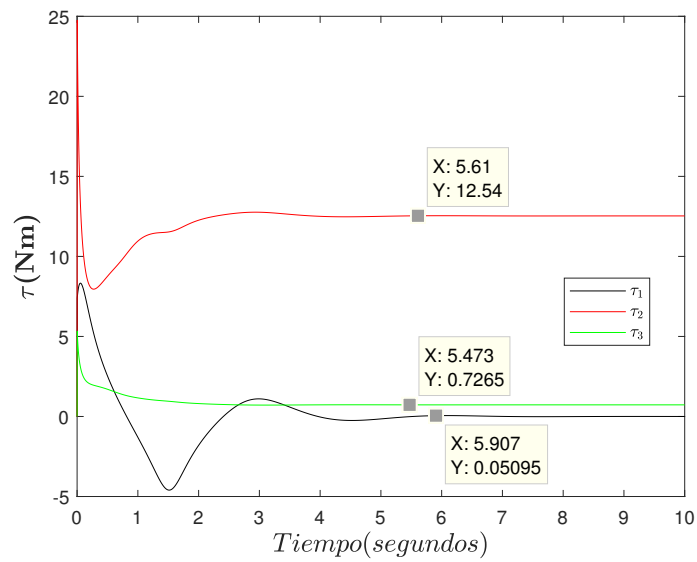


Figura 5.3: Torque aplicado al robot con el regulador τ_{PDa}

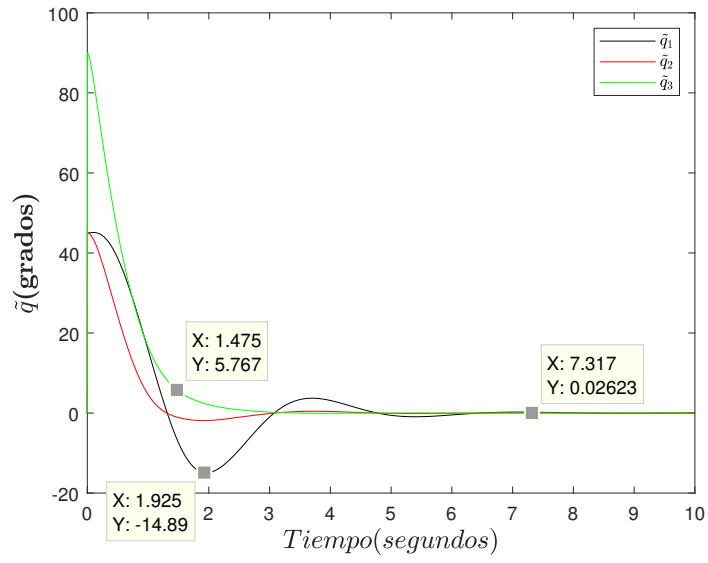


Figura 5.4: Errores de posición del robot con el regulador τ_{PDb}

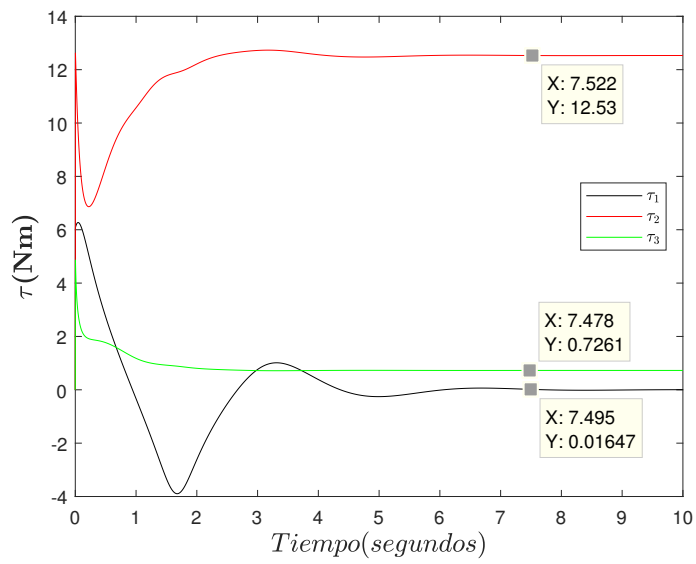


Figura 5.5: Torque aplicado al robot con el regulador τ_{PDb}

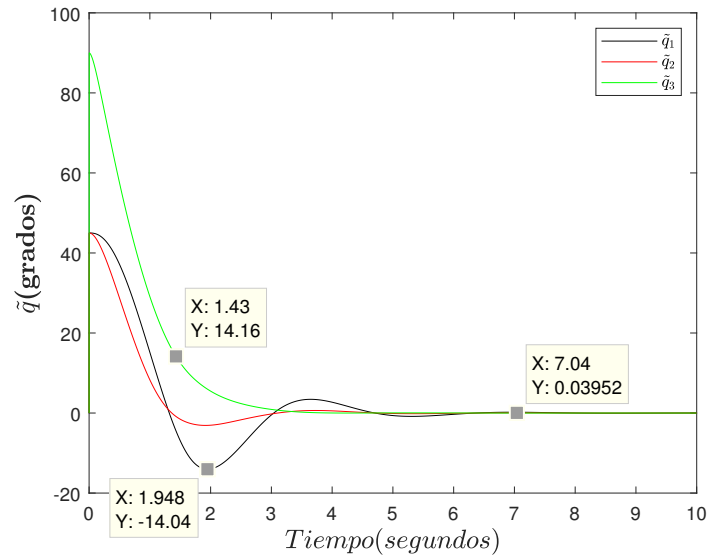


Figura 5.6: Errores de posición del robot con el regulador τ_{PDC}

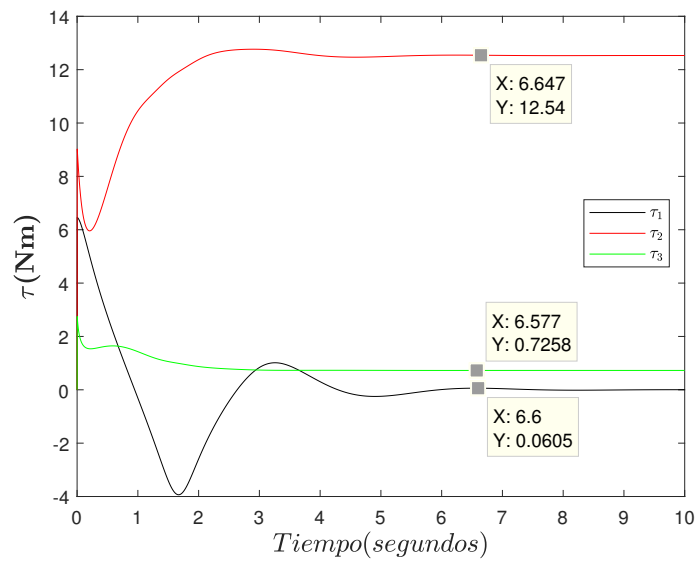


Figura 5.7: Torque aplicado al robot con el regulador τ_{PDC}

5.2. Reguladores saturados con ganancias variables

Esta sección describe los resultados experimentales de la evaluación de los reguladores saturados con ganancias variables. En la Tabla 5.3, se muestran los casos particulares de ganancias variables, así como los valores numéricos de δ_i y γ_i . Para todos estos esquemas de control, se ha considerado una $\psi = 2$. El torque aplicado del regulador $\boldsymbol{\tau}_{sat1}$ está representado por la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \hat{k}_{p1} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)) \frac{\arctan(\tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} - \hat{k}_{v1} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)) \frac{\arctan(\dot{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_1)}} + g_1 \\ \tau_2 &= \hat{k}_{p2} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_2 + \dot{q}_2)) \frac{\arctan(\tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} - \hat{k}_{v2} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_2 + \dot{q}_2)) \frac{\arctan(\dot{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_2)}} + g_2 \\ \tau_3 &= \hat{k}_{p3} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_3 + \dot{q}_3)) \frac{\arctan(\tilde{q}_3)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_3)}} - \hat{k}_{v3} \cos^2(\tanh(\tilde{q}_3 + \dot{q}_3)) \frac{\arctan(\dot{q}_3)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_3)}} + g_3\end{aligned}\quad (5.5)$$

Cuando es implementado, el error de posición del robot manipulador llega al vector de ceros de forma asintótica y con una respuesta subamortiguada en régimen transitorio, tal y como se ilustra en la Figura 5.8. Se tiene una llegada a régimen permanente rápida y suave con errores pequeños. Por otro lado, los torques aplicados al las articulaciones del robot se muestran en la Figura 5.9. Observe que los límites físicos de los servomotores (ver Tabla 3.1) no son superados, asegurando que los actuadores trabajan en la zona lineal. Estos datos obtenidos al implementar el algoritmo de control en cuestión, son consecuencia de la correcta sintonía automática de las ganancias variables debido a la elección de δ_i y γ_i .

Al evaluar el esquema de control $\boldsymbol{\tau}_{sat2}$ (ver ecuación (5.6)), el robot manipulador también converge al punto de equilibrio de forma asintótica. En la Figura 5.10, se muestra como los errores de posición tienden a una vecindad muy cercana al vector de ceros, sin sobreosilaciones en régimen transitorio debido a la matriz de ganancia variable dependiente del error de posición y la velocidad en conjunto con el vector de acción de control derivativa saturada. El impulso rápido del robot hacia as posiciones deseadas es gracias a la matriz de ganancia proporcional variable y la acción de control proporcional saturada. Esto solo es posible dada la sintonía automática de las ganancias variables mediante las propiedades de estabilidad asintótica y la elección de δ_i y γ_i . Al mismo tiempo, las capacidades de torque máximo aplicado de los servomotores no son superados (ver Figura 5.11), inmunizando al robot de obtener no linealidades que no han sido contempladas dentro de la dinámica del robot manipulador.

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \hat{k}_{p1} \cos^2 \left(\frac{\sinh(\tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\cosh^2(\tilde{q}_1)}} \right) \frac{\arctan(\tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_1)}} - \hat{k}_{v1} \cos^2 \left(\frac{\sinh(\tilde{q}_1)}{\sqrt{1+\cosh^2(\tilde{q}_1)}} \right) \frac{\arctan(\dot{q}_1)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_1)}} + g_1 \\ \tau_2 &= \hat{k}_{p2} \cos^2 \left(\frac{\sinh(\tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\cosh^2(\tilde{q}_2)}} \right) \frac{\arctan(\tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_2)}} - \hat{k}_{v2} \cos^2 \left(\frac{\sinh(\tilde{q}_2)}{\sqrt{1+\cosh^2(\tilde{q}_2)}} \right) \frac{\arctan(\dot{q}_2)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_2)}} + g_2 \\ \tau_3 &= \hat{k}_{p3} \cos^2 \left(\frac{\sinh(\tilde{q}_3)}{\sqrt{1+\cosh^2(\tilde{q}_3)}} \right) \frac{\arctan(\tilde{q}_3)}{\sqrt{1+\tanh^2(\tilde{q}_3)}} - \hat{k}_{v3} \cos^2 \left(\frac{\sinh(\tilde{q}_3)}{\sqrt{1+\cosh^2(\tilde{q}_3)}} \right) \frac{\arctan(\dot{q}_3)}{\sqrt{1+\tanh^2(\dot{q}_3)}} + g_3\end{aligned}\quad (5.6)$$

Finalmente, el esquema $\boldsymbol{\tau}_{sat3}$ (ver ecuación (5.7)) también logra realizar el control de posición del robot manipulador. La respuesta del error del robot se muestra en la Figura 5.12. Observe que no se tienen sobreosilaciones ni picos máximos en régimen transitorio, la llegada es suave al régimen permanente con errores pequeños. La sintonía automática de las ganancias variables es alcanzada a pesar del cambio de los parámetros numéricos de δ_i y γ_i . La Figura 5.13 nos ilustra el torque aplicado al robot. Observe que los actuadores del servomotor, no llegan a zona de saturación, aplicando torque a las articulaciones dentro de las especificaciones técnicas mostradas en la Tabla 3.1. Entonces, dado los resultados

experimentales obtenidos, se ha verificado el funcionamiento de los reguladores saturados y la sintonía automática de la gama de ganancias variables dependientes del error de posición y la velocidad de movimiento. Dicho esto, es posible generar una familia extensa de reguladores saturados con ganancias variables y alto desempeño cuando los valores de δ_i y γ_i son los óptimos.

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \hat{k}_{p1} \cos^2 \left(\frac{(\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)^2}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)^2}} \right) \frac{\arctan(\tilde{q}_1)}{\sqrt{1 + \tanh^2(\tilde{q}_1)}} - \hat{k}_{v1} \cos^2 \left(\frac{(\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)^2}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_1 + \dot{q}_1)^2}} \right) \frac{\arctan(\dot{q}_1)}{\sqrt{1 + \tanh^2(\dot{q}_1)}} + g_1 \\ \tau_2 &= \hat{k}_{p2} \cos^2 \left(\frac{(\tilde{q}_2 + \dot{q}_2)^2}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_2 + \dot{q}_2)^2}} \right) \frac{\arctan(\tilde{q}_2)}{\sqrt{1 + \tanh^2(\tilde{q}_2)}} - \hat{k}_{v2} \cos^2 \left(\frac{(\tilde{q}_2 + \dot{q}_2)^2}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_2 + \dot{q}_2)^2}} \right) \frac{\arctan(\dot{q}_2)}{\sqrt{1 + \tanh^2(\dot{q}_2)}} g_2 \\ \tau_3 &= \hat{k}_{p3} \cos^2 \left(\frac{(\tilde{q}_3 + \dot{q}_3)^2}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_3 + \dot{q}_3)^2}} \right) \frac{\arctan(\tilde{q}_3)}{\sqrt{1 + \tanh^2(\tilde{q}_3)}} - \hat{k}_{v3} \cos^2 \left(\frac{(\tilde{q}_3 + \dot{q}_3)^2}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_3 + \dot{q}_3)^2}} \right) \frac{\arctan(\dot{q}_3)}{\sqrt{1 + \tanh^2(\dot{q}_3)}} + g_3\end{aligned}\quad (5.7)$$

Es importante recordar que los reguladores saturados, representan una alternativa intere-

Regulador saturado	Ganancias variables	δ_i	γ_i
τ_{sat1}	(3.30)	$\delta_1 = 4 = \delta_2 = \delta_3$	$\gamma_1 = 0.8 = \gamma_2 = \gamma_3$
τ_{sat2}	(3.31)	$\delta_1 = 3.5, \delta_2 = 4.9, \delta_3 = 1.8$	$\gamma_1 = 0.85, \gamma_2 = 0.6 = \gamma_3$
τ_{sat3}	(3.32)	$\delta_1 = 2 = \delta_2 = \delta_3$	$\gamma_1 = 0.85, \gamma_2 = 0.6 = \gamma_3$

Tabla 5.3: Reguladores saturados con ganancias variables

sante con respecto a los algoritmos de control con acciones no acotadas. En los resultados experimentales podemos verificar la funcionalidad, robustez frente a los parámetros numéricos de un robot manipulador real. Asimismo, a través de la regla de sintonía propuesta para las ganancias variables, se evita la saturación de los servomotores y se tiene una opción más sintetizada, con respecto a los algoritmos difusos, esquemas de sintonía externa, redes neuronales, etc. Lo anterior, gracias a su fácil implementación para cualquier usuario de control automático y robótica. Además, a partir de los datos experimentales obtenidos, hemos podido deducir el siguiente criterio para poder programar una respuesta en régimen transitorio deseada, tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\text{Sobreamortiguado } T_{so} &= \gamma_i > \frac{2\delta_i}{10} \\ \text{Subamortiguado } T_{sub} &= \gamma_i \leq \frac{2\delta_i}{10}\end{aligned}\quad (5.8)$$

En este sentido, el usuario a sintonizar las ganancias propone los valores de δ_i y γ_i de acuerdo a la respuesta deseada en el robot. Desde esta perspectiva, la sintonía de las ganancias variables se adapta a las necesidades de la tarea o aplicación a realizar.

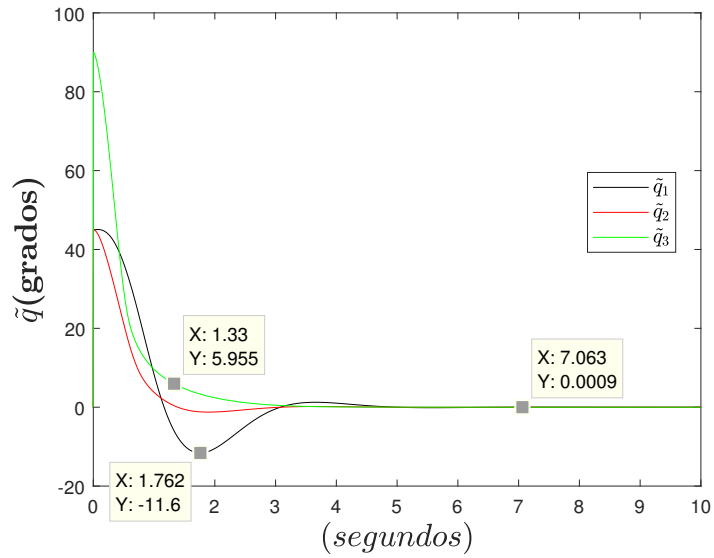


Figura 5.8: Errores de posición del robot con el regulador τ_{sat1}

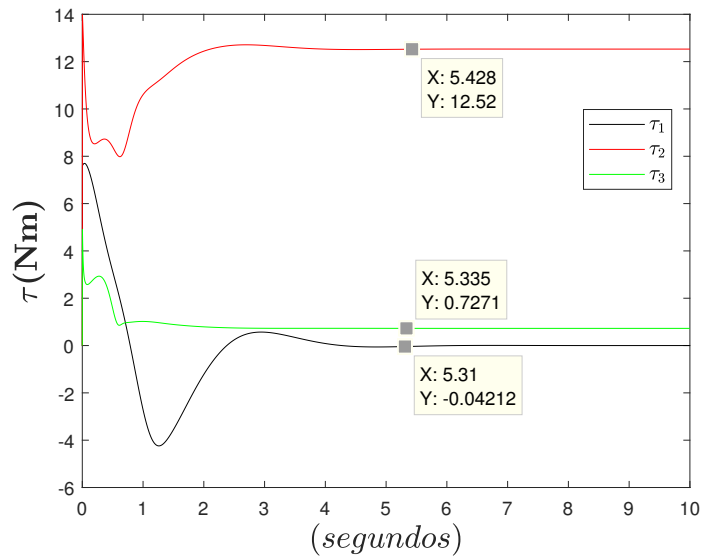


Figura 5.9: Torque aplicado al robot con el regulador τ_{sat1}

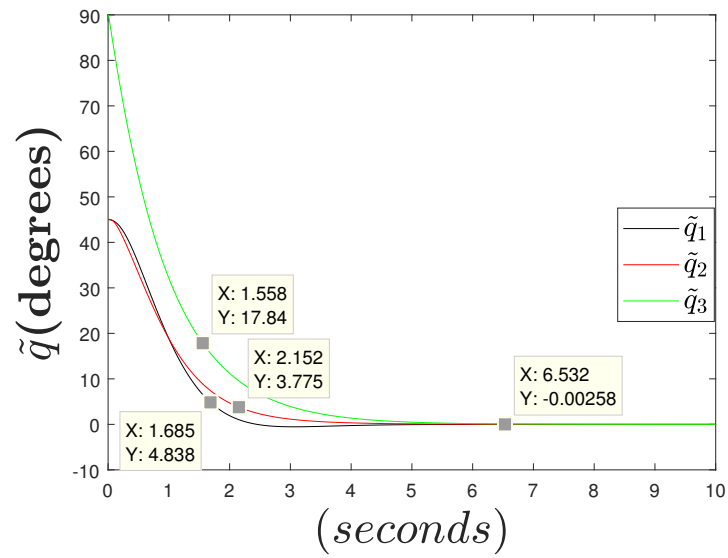


Figura 5.10: Errores de posición del robot con el regulador τ_{sat2}

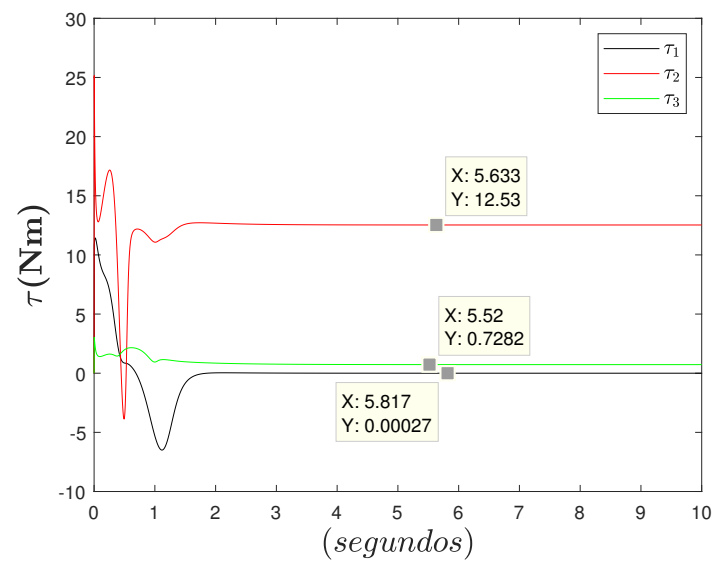


Figura 5.11: Torque aplicado al robot con el regulador τ_{sat2}

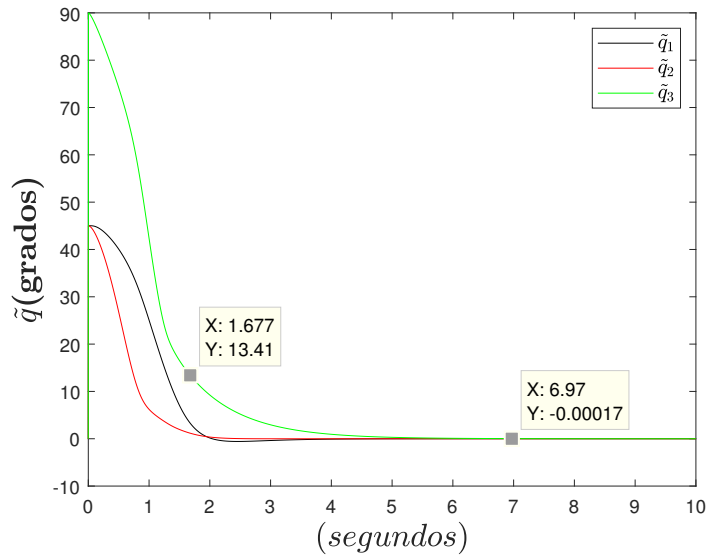


Figura 5.12: Errores de posición del robot con el regulador τ_{sat3}

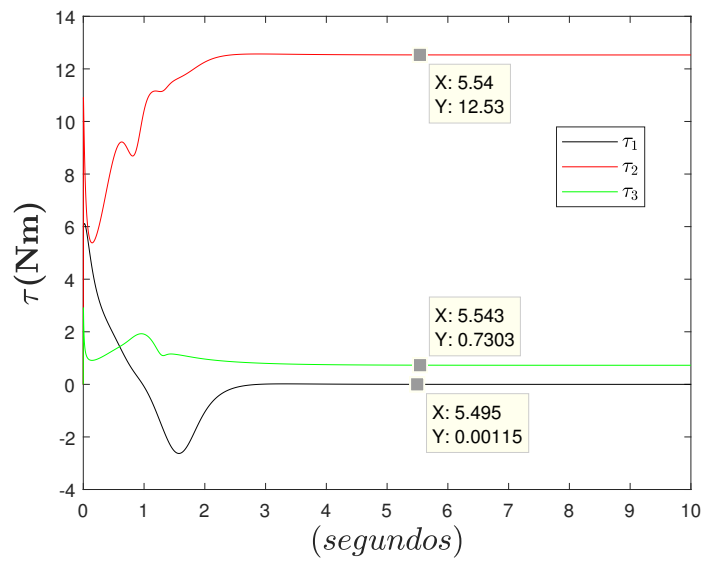


Figura 5.13: Torque aplicado al robot con el regulador τ_{sat3}

5.3. Análisis de desempeño

Existen diversas herramientas para poder medir el desempeño de los algoritmos de control. Lo más utilizado en control automático es medir el índice de desempeño mediante fórmulas matemáticas para obtener un valor escalar que mide error de la variable física que se está controlando. Para el caso de control de posición, el mejor algoritmo de control es aquel que minimice el error de posicionamiento del robot manipulador. En esta sección, se mide el vector de error de posición $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ usando diferentes índices utilizados en la literatura, las cuales se describen en la siguiente lista:

- Integral del valor absoluto del error (IAE):

$$IAE = \int_0^{T_e} \|\tilde{\mathbf{q}}(\sigma)\| d\sigma \quad (5.9)$$

siendo T_e el tiempo de experimentación. Este índice en particular va acumulando el error en régimen transitorio quitando peso al error en régimen permanente.

- Integral del error cuadrático (ISE):

$$ISE = \int_0^{T_e} \tilde{\mathbf{q}}^T(\sigma) \tilde{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma \quad (5.10)$$

funciona como una buena aproximación con respecto al índice IAE cuando se tiene un sistema con sobreesilaciones en el transitorio.

- Integral del tiempo multiplicado por el valor absoluto del error (ITAE):

$$ITAE = \int_0^{T_e} \sigma \|\tilde{\mathbf{q}}(\sigma)\| d\sigma \quad (5.11)$$

los errores grandes presentes en régimen transitorio pasan desapercibidos y da mayor peso a los errores en régimen permanente.

- Integral del tiempo cuadrático por el valor absoluto del error (ITSAE):

$$ITSAE = \int_0^{T_e} \sigma^2 \|\tilde{\mathbf{q}}(\sigma)\| d\sigma \quad (5.12)$$

penaliza fuertemente a los errores en régimen permanente con respecto a los índices anteriores.

- Integral del tiempo al cuadrado por el error cuadrático (ISTSE):

$$ISTSE = \int_0^{T_e} \sigma^2 \tilde{\mathbf{q}}^T(\sigma) \tilde{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma \quad (5.13)$$

disminuye de forma rápida los errores grandes presentes al inicio de la respuesta transitoria.

- Norma $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}]$:

$$\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}] = \sqrt{\frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} \|\tilde{\mathbf{q}}(\sigma)\|^2 d\sigma} \quad (5.14)$$

mide la norma media cuadrática del vector de error de posición, considerando toda la respuesta del robot durante todo el tiempo de experimentación.

Comenzamos evaluando al regulador PD con ganancias variables, en comparación con el esquema PD y el esquema PID con ganancias constantes. El propósito es comparar al regulador propuesto con otros reguladores con acciones de control no acotadas. Al evaluar estos algoritmos en el robot, se obtienen las respuestas mostradas en la Figura 5.14 y la Figura 5.15. Como se observa, se llega a las posiciones deseadas sin sobreoscilaciones de forma asintótica y con una sintonía de sus ganancias de manera manual.

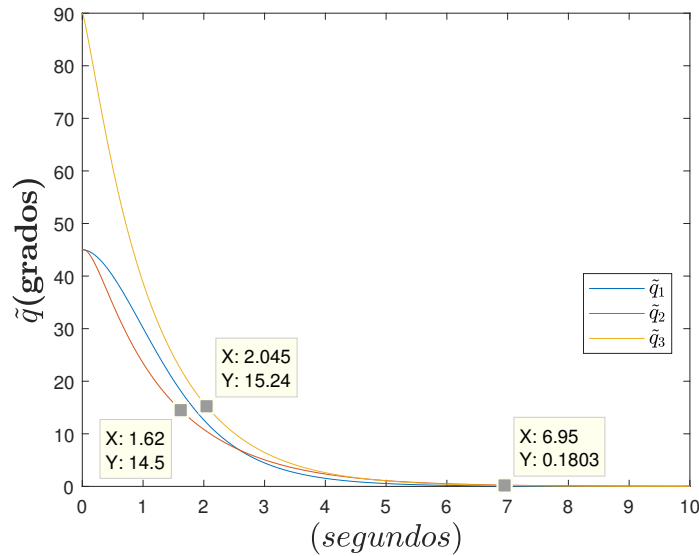


Figura 5.14: Errores de posición del robot con el regulador PD clásico

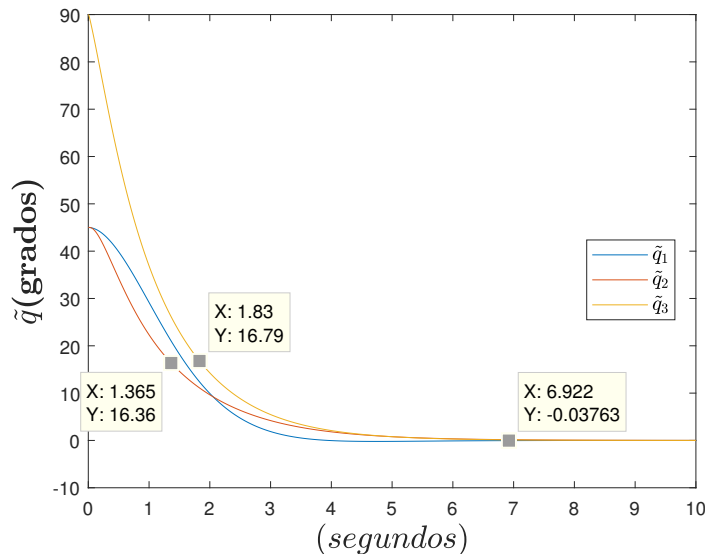


Figura 5.15: Errores de posición del robot con el regulador PID clásico

En la Tabla 5.4, se muestran los índices de desempeño de los reguladores PD con ganancias variables mostrados en la Tabla 5.2, el regulador PD con ganancias constantes y el PID con ganancias constantes. Observe que nuestros reguladores propuestos, tienen mejor desempeño con respecto a los reguladores clásicos.

Regulador	IAE	ISE	ITAE	ITSAE	ISTSE	\mathcal{L}_2
PD _c variable	69.38	1.38	2.27	9.35	4.58	21.70
PD _b variable	92.52	5.31	3.51	12.17	7.92	23.05
PD _a variable	105.35	6.48	4.87	18.14	10.82	25.46
PID clásico	134.32	7.34	6.17	21.06	11.71	28.63
PD clásico	144.35	9.32	8.67	23.46	12.09	29.44

Tabla 5.4: Índices de desempeño de los esquemas no acotados

Regulador	IAE	ISE	ITAE	ITSAE	ISTSE	\mathcal{L}_2
τ_{sat1}	74.82	4.44	2.19	1.48	1.49	21.08
τ_{sat3}	87.77	6.37	3.51	2.21	3.12	25.24
τ_{sat2}	119.15	7.10	5.87	20.84	10.67	25.76
PID clásico	134.32	7.34	6.17	21.06	11.71	28.63
PD clásico	144.35	9.32	8.67	23.46	12.09	29.44

Tabla 5.5: Índices de desempeño de los esquemas saturados

Finalmente, medimos el desempeño de los reguladores saturados mostrados en la Tabla 5.3 y realizamos un análisis comparativo con los reguladores PD y PID clásicos. En la Tabla 5.5, se muestran los datos obtenidos. Observe que el PID clásico, tiene mejor desempeño que el caso particular τ_{sat2} , pero supera al regulador PD clásico. Sin embargo, los reguladores τ_{sat1} y τ_{sat3} , tienen mejor desempeño que los reguladores clásicos.

5.4. Comentarios

De los resultados experimentales, destacamos lo siguiente. Al medir los desempeños de los reguladores mediante diversos índices de desempeños, muestra la flexibilidad del alto desempeño de los esquemas de control diseñados. Es importante recalcar que, el desempeño y de la familia de las ganancias variables depende de los valores numéricos de δ_i y γ_i , más no de la elección de los casos particulares presentados en este trabajo. Esto significa que se puede desarrollar una familia extensa de esquemas de control con ganancias variables y alto desempeño cuando δ_i y γ_i son los óptimos. Dicho esto, los resultados mostrados en este Capítulo, demuestran el alto desempeño de los reguladores con ganancias variables propuestos. Asimismo, al lograr la implementación de los esquemas de control en un robot de transmisión directa y la demostración de la existencia de la cota superior del error de posición, nos permiten concluir la robustez frente a la incertidumbre paramétrica de la dinámica (2.8) de manera teórico-experimental.

Dada estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado, los algoritmos de control con ganancias variables generan un atractor con propiedades de estabilidad asintótica en el sentido de la teoría de Lyapunov. Por lo tanto, los reguladores son inmunes a las condiciones iniciales, siendo candidatos para aplicaciones de control de movimiento de robots manipuladores como el control de trayectoria.

Finalmente, la sintonía de las ganancias a través de la regla matemática explícita, cuya función es ser un esquema de autosintonía más simple de implementar mediante un intervalo de los parámetros δ_i y γ_i . En este sentido, el usuario puede proponer valores constantes sin el riesgo de saturar a los servomotores del robot y poder programar una respuesta en régimen transitorio deseada. Esto depende de las condiciones *a priori* de la aplicación a resolver por el usuario, aumentando la flexibilidad de los esquemas de control con ganancias variables.

Conclusiones

Los reguladores con ganancias variables diseñados en este trabajo resuelven el problema de control de posición de robots manipuladores, demostrando la globalidad de estabilidad asintótica del punto de equilibrio desde el contexto de la teoría de estabilidad de Lyapunov, mediante la propuesta de una función de energía estricta. Además, estos resultados teóricos toman fuerza al ser validados a nivel experimental en un robot de transmisión directa, y alto desempeño en comparación con otros reguladores usados en robots industriales.

La robustez paramétrica de los esquemas de control está garantizada. Esto permite implementar a los algoritmos de control en diversas configuraciones de robots manipuladores sin necesidad de conocer los parámetros numéricos del robot, tales como: inercias, coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb. Permitiendo ampliar el repertorio y la flexibilidad de los reguladores con ganancias variables.

La estructura de las ganancias variables diseñadas aportan, a través del error de posición y la velocidad de movimiento, en la acción de control proporcional y la acción de inyección de amortiguamiento de forma simultánea. Esta es una nueva perspectiva de regulación de robots manipuladores, con respecto a la técnica clásica de moldeo de energía y a los esquemas de control con ganancias variables presentados en la literatura hasta hoy en día. Dado los resultados teóricos y experimentales, se han validado las ventajas de este enfoque.

Como trabajo futuro, se pretende proponer una metodología para el diseño de las leyes de adaptabilidad para la sintonía automática. Además, se pretende reportar las evidencias de los detalles matemáticos de la demostración de estabilidad asintótica y resultados experimentales en el robot manipulador, para comparar su desempeño con respecto a otros algoritmos de sintonía de ganancias.

Divulgación y/o producción científica

El siguiente listado describe la divulgación y producción científica generada a partir de este trabajo de investigación:

- Presentación oral y publicación de artículo en la memoria técnica del "42 Congreso Internacional de Ingeniería Electrónica (ELECTRO 2020)" del trabajo titulado: "Una Familia Extensa de Reguladores PD con Ganancias Variables".
- Presentación oral y publicación de artículo en la memoria técnica del "19 Congreso Nacional de Mecatrónica" del trabajo titulado: "Diseño e Implementación de Reguladores Saturados con Ganancias Variables para Robots Manipuladores".
- Presentación oral y publicación de artículo en la memoria técnica de la "6ta Jornada Nacional de Ciencia y Tecnología Aplicada" del trabajo titulado: "Control de Posición de Robots Manipuladores Mediante un Esquema PD con Ganancias Variables".
- Publicación de artículo en la revista arbitrada "Journal of Robotics and Control", con el trabajo titulado "Global Saturated Regulator with Variable Gains for Robot Manipulators"
DOI: 10.18196/jrc.26139.

UNA FAMILIA EXTENSA DE REGULADORES PD CON GANANCIAS VARIABLES

Sánchez Brandon,^a Rodríguez Ernesto,^a Reyes Fernando,^a Félix Olga,^a Al-Hadithi Basil.^b
 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,^a Universidad Politécnica de Madrid.^b
 Grupo de Robótica Facultad de Ciencias de la Electrónica,^a Departamento de Ingeniería Eléctrica,
 Electrónica, Automática y Física Aplicada, Escuela Superior de Ingeniería y Diseño Industria.^b
 Prolongación 24 Sur, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Puebla, Pue, México
 Tel. (222)2295698
 e-mail: brandon.sanchez@alumno.buap.mx, fernando.reyes@correo.buap.mx

RESUMEN.

En el siguiente trabajo se presenta una familia extensa de reguladores Proporcional Derivativo (PD) con ganancias variables, proporcional y derivativa. La propuesta de control diseñada contiene una familia grande de ganancias variables con sintonía automática, compuestas por funciones dependientes del error de posición y la velocidad de movimiento del robot manipulador. Presentamos la propuesta de una función estricta de Lyapunov, para demostrar la estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. Finalmente, para medir su funcionalidad de la familia de reguladores, evaluamos dos casos particulares experimentalmente para comparar su desempeño con el regulador PD con ganancias constantes.

Palabras Clave: Robot Manipulador, Regulador, Ganancias Variables, Estabilidad de Lyapunov, Sintonía Automática.

ABSTRACT.

The following work presents a large family of Proportional Derivative (PD) regulators with variable proportional derivative gains. The designed control scheme contains a large family of variable tuning gains with automatic tuning, structured as functions dependent on the position error and the speed of movement of the manipulator robot. We present the proposal for a strict Lyapunov function, to demonstrate the asymptotic and global stability of the equilibrium point of the closed-loop equation. Finally, to evaluate its functionality of the regulator family, we evaluated two particular cases experimentally to compare its performance with the PD regulator with constant gains.

Keywords: Robot Manipulators, Regulator, Variable Gains, Lyapunov Stability, Automatic Tuning.

1. INTRODUCCIÓN

La técnica de moldeo de energía, propuesta por Takegaki y Arimoto en 1981, es ampliamente utilizada por diversos investigadores para diseñar nuevos algoritmos de control. Los esquemas que se diseñan a partir de esta técnica, tienen sus ganancias constantes; obtener su valor numérico (sintonía) es complicado, no hay muchos métodos con rigor científico y por lo tanto el proceso de sintonización se realiza de manera

empírica, perjudicando al algoritmo de control, si no se realiza correctamente [11].

Los controladores auto sintonizables existen de hace años, con diferentes concepciones. Uno de los algoritmos más modificados es el PD; su versión con ganancias constantes baja considerablemente su desempeño con una mala sintonía. Algunas de estas modificaciones al PD se presentan en [1], sintonía por lógica difusa [4], sintonía por esquemas de control inteligente [7] y en [6] se implementan dos controles inteligentes para la sintonía de las ganancias. En trabajos recientes, en [9] se propone un PD con ganancias variables dependientes del error de posición. Una familia de reguladores acotados con la ganancia derivativa variable se propone en [10] y para reguladores saturados en [11], también con ganancia derivativa variable.

Sin embargo, los trabajos reportados hasta ahora no proponen un regulador PD con ganancias variables, donde a su vez, contenga una familia grande de ganancias variables con sintonía automática, estructuradas como funciones dependientes del error de posición y la velocidad de movimiento del robot.

2. DINÁMICA DEL ROBOT

Considerando el modelo dinámico de un robot rígido de n grados de libertad, en cadena abierta y con articulaciones rotacionales, se describe de la siguiente manera.

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) = \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

dónde: $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares, $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de aceleraciones articulares, $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, simétrica y definida positiva, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis, $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales y $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares de fricción que incluye la fricción viscosa, de Coulomb y estática f_{e_i} de la i -ésima articulación del robot manipulador $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares o torques.



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



**EL TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
A TRAVÉS DEL INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHIHUAHUA**

OTORGA LA PRESENTE

CONSTANCIA

A

Brandon Erick Sanchez García

POR IMPARTIR LA CONFERENCIA

UNA FAMILIA EXTENSA DE REGULADORES PD CON GANANCIAS VARIABLES

EN EL CONGRESO INTERNACIONAL DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA ELECTRO 2020,
REALIZADO DEL 7 AL 9 DE OCTUBRE DEL PRESENTE AÑO.



CHIHUAHUA, CHIH., A OCTUBRE DE 2020.

ROGELIO ENRIQUE BARAY ARANA
COORDINADOR GENERAL



INSTITUTO TECNOLÓGICO
DE CHIHUAHUA



Desarrollos con enfoque mecatrónico, Capítulo 9, pp. 113 - 130
ISBN: 978-607-9394-22-6, año 2020



Diseño e implementación de reguladores saturados con ganancias variables para robots manipuladores

Sánchez García Brandon¹, Rodríguez Hernández Ernesto¹, Reyes Cortés Fernando¹,
Al-Hadithi B. M.^{2,3} y Félix Beltrán Olga¹

Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (1); Centre for Automation and Robotics UPM-CSIC, Intelligent Control Group, Universidad Politécnica de Madrid (2); Department of Electrical, Electronics Control Engineering and Applied Physics, Higher Technical School of Industrial Design and Engineering, Universidad Politécnica de Madrid (3)
Email: brandon.sanchez@alumno.buap.mx

Resumen

En este trabajo se presenta una familia extensa de reguladores de tipo saturado con una gama grande de ganancias variables para robots manipuladores. La propuesta considera un conjunto amplio de esquemas de control formados por funciones hiperbólicas y trigonométricas inversas; a su vez, se incluye a una familia grande de ganancias proporcional y derivativa variables con sintonía automática, compuestas por funciones continuas dependientes del error de posición y la velocidad de movimiento del robot manipulador. Presentamos la propuesta de una función estricta de Lyapunov para realizar la demostración de la estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. Finalmente, para evaluar el desempeño y funcionalidad de los reguladores saturados con ganancias variables, exponemos algunos resultados vía simulación de algunos casos particulares de la familia de esquemas de control y ganancias variables para un robot de dos grados de libertad. También, se añade un análisis comparativo con dos reguladores bien conocidos en la literatura como son el proporcional derivativo (PD) y el tangente hiperbólico.

Palabras clave: Regulador saturado, Ganancias Variables, Sintonía automática, Estabilidad de Lyapunov, Robot manipulador.

1. Introducción

Los robots manipuladores son sistemas mecatrónicos que han tomado un papel importante en el desarrollo de nuestra sociedad actual. Son parte indispensable de nuestra producción en masa de la mayoría de los artículos que consumimos, construcción y ensamblaje de automóviles, aplicaciones de pintura, troquelado y corte láser, tratamientos de forja en acero y manufactura de hierro colado, asistencia especializada y rehabilitación fisioterapéutica, entre otros. Sin embargo, para que dicho robot realice fielmente algunas de las aplicaciones antes nombradas, es clave contar con algoritmos de control de alto desempeño. Por esta razón, el desarrollo de nuevos esquemas de control se ha convertido en una actividad científica importante y así aumentar las posibilidades de resolver problemas con robots donde la mano de obra del ser humano ya es limitada [1] [2].

Para indicarle al manipulador ciertas actividades, es indispensable abordar el problema de control de trayectoria. Este consiste en encontrar los pares aplicados por los servomotores (actuadores) para cada articulación del robot y este sea capaz de seguir fielmente una referencia deseada variante en el tiempo. El problema de regulación (control de posición) es un caso particular del control de trayectoria, donde se requiere que el extremo final del robot manipulador llegue a una posición articular deseada constante en el tiempo, desde cualquier condición inicial. El objetivo se centra en diseñar un regulador tal que, el error de posición y la velocidad de movimiento del robot manipulador, tiendan asintóticamente

La Asociación Mexicana de Mecatrónica
A.C. otorga el presente

RECONOCIMIENTO

a:

Ing. Brandon Erick Sánchez García



Por su disertación de la conferencia técnica

“Diseño e implementación de reguladores saturados con ganancias variables para robots manipuladores”, en el marco del 19° Congreso Nacional de Mecatrónica.

Lic. Jorge Enrique Orozco Ramírez

Presidente

3 y 4 de Diciembre
2020, México

Dr. J. Emilio Vargas Soto

Fundador

Control de Posición de Robots Manipuladores Mediante un Esquema PD con Ganancias Variables

Brandon Sánchez-García* Fernando Reyes-Cortés *
Basil M. Al-Hadithi**

*Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México (e-mail: brandon.sanchez@alumno.buap.mx).

**Centro de Automática y Robótica, Grupo de Control Inteligente, Universidad Politécnica de Madrid, España

Resumen: En este trabajo, se aborda el problema de control de posición de robots manipuladores en espacio articular. El esquema de control analizado es el Proporcional-Derivativo (PD), donde sus matrices de ganancia son variables formadas por funciones continuas, diferenciables y suaves que dependen del error de posición y la velocidad de movimiento del robot manipulador. Desde el contexto del método directo de Lyapunov, la estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado y la sintonía automática de las ganancias variables está garantizada mediante la propuesta de una función de energía estricta. Asimismo, se demuestra teóricamente la robustez del regulador propuesto frente a incertidumbres paramétricas del robot. Finalmente, para verificar su funcionalidad y desempeño, presentamos resultados experimentales en un robot antropomórfico de transmisión directa con 3 grados de libertad (3 gdl) acompañado de un análisis comparativo con los reguladores PD y Proporcional-Integral-Derivativo (PID) con ganancias constantes.

Keywords: Robots manipuladores, Regulador PD, Ganancias variables, Estabilidad asintótica de Lyapunov.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de control de posición de robots manipuladores en su espacio articular (también llamado regulación) es un caso particular del problema general denominado control de trayectoria. El problema de control de posición en espacio articular, consiste en diseñar un regulador tal que las posiciones del robot manipulador convergen asintóticamente hacia las posiciones deseadas cuando el tiempo evoluciona, sin importar las condiciones iniciales. En otras palabras, el regulador debe ser capaz de generar un atractor con propiedades de estabilidad asintótica global. En este sentido, el regulador representa los pares aplicados de cada uno de los servomotores del robot manipulador para seguir una referencia constante en el tiempo, llamada posición deseada. Además, es necesario que este esquema de control no solo cumpla con lo anterior, sino que tenga un alto desempeño para ser contemplado como un serio candidato para aplicaciones más complejas Reyes et al. (2011).

Desde esta perspectiva, el diseño de nuevos algoritmos de control con alto desempeño se ha convertido en una actividad científica de interés para el área en robótica. La metodología de moldeo de energía más una función de inyección de amortiguamiento presentada en Takegaki and Arimoto (1981), es una de las bases de diseño que ha sido adoptada por diversos investigadores para construir una familia de algoritmos de control para robots manipuladores. Dicha técnica permite obtener esquemas de control a partir del gradiente de la energía

potencial artificial del robot manipulador y, se añade una función de inyección de amortiguamiento. Finalmente, una compensación de gravedad para robots que la necesitan.

El esquema PD es un caso particular de un algoritmo de control construido a partir del moldeo de energía. También, es uno de los controladores más usados en robots industriales. En Kelly et al. (2005), se describen diversas versiones que dicho regulador puede adoptar, poniendo en evidencia la flexibilidad con la que este regulador cuenta. Desde su presentación más simple, hasta en una versión con compensación de gravedad adaptable para disminuir los errores en régimen permanente. Por otro lado, el regulador PD se ha modificado en diferentes formas, en Reyes and Rosado (2005) el PD clásico es modificado para dar lugar a una familia de reguladores de tipo polinomial para el control de posición de robots manipuladores, se demuestra la estabilidad asintótica de acuerdo con el método directo de Lyapunov y se presentan resultados experimentales en un robot de transmisión directa de 3 gdl. En los anteriores trabajos descritos, se considera el escenario donde el PD tiene sus ganancias constantes.

Sin embargo, el desempeño del regulador PD con ganancias constantes depende directamente de la correcta sintonía, siendo un proceso complicado para el diseñador y en donde la mayoría de las ocasiones es realizada de manera empírica. Dada esta problemática, el regulador PD es modificado de ganancias lineales a no lineales en Kelly and Carelli (1996), dependientes de los estados del robot manipulador. Esta alteración, no perjudica las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO.

**EL TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
A TRAVÉS DEL CENTRO NACIONAL DE INVESTIGACIÓN
Y DESARROLLO TECNOLÓGICO**

OTORGA EL PRESENTE

RECONOCIMIENTO

A

**BRANDON SÁNCHEZ GARCÍA, FERNANDO REYES CORTÉS,
BASIL AL-HADITHI**

Por la presentación del artículo “CONTROL DE POSICIÓN DE ROBOTS
MANIPULADORES MEDIANTE UN ESQUEMA PD CON GANANCIAS VARIABLES” en la
6a. Jornada de Ciencia y Tecnología Aplicada realizada del 21 al 23 de abril de 2021.

Cuernavaca, Morelos, 23 de abril de 2021.

DRA. YESICA IMELDA SAAVEDRA BENÍTEZ
DIRECTORA

DR. ARTURO ABÚNDEZ PLIEGO
COORDINADOR GENERAL DE LA 6A JCYTA



Sello Digital:

*MjAyMceAOTjHgEpDVEEwMDk4MjHHgEJyYW5kb24gU8OhbmNoZXogR2F
yY8OtYSwgRmVybmfuZG8gUmV5ZXMGQ29ydMOpcywgQmFzaWwgQWwtSG
FkaXRoaaceBNkEuIEpPUk5BREEGREUgQ01FTkNJQSBZIFRFQ05PTE9Hw
41BIEFQTE1DQURBx4BURUNOTS9DRU5JREvUx4BSRUNPTk9DSU1JRUSU
T8eARVhQT1NJVE9Sx4EYMDIxMDQ=*

JCTA00982021

<http://constancias.cenidet.edu.mx>

cenidet
Centro Nacional de Investigaciones
y Desarrollo Tecnológico



Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira,
C. P. 62490, Cuernavaca, Morelos
Tel. (01) 777 3 62 77 70, ext. 4201,
e-mail: cyd_cenidet@tecnm.mx

www.tecnm.mx | www.cenidet.tecnm.mx



Global Saturated Regulator with Variable Gains for Robot Manipulators

Brandon Sánchez-García*¹, Fernando Reyes-Cortés², Basil M. Al-Hadithi^{3,4} and Olga Félix-Beltrán⁵

^{1,2,5}Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benémerita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.

³Centre for Automation and Robotics UPM-CSIC, Intelligent Control Group, Universidad Politécnica de Madrid, Spain.

⁴Department of Electrical, Electronics, Control Engineering and Applied Physics, Higher Technical School of Industrial Design and Engineering, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Spain.

Email: ¹brandon.sanchez@alumno.buap.mx

*Corresponding Author

Abstract—In this paper we propose a set of saturated controllers with variable gains to solve the regulation problem for robot manipulators in joint space. These control schemes deliver torques inside prescribed limits of servomotors. The gamma of variable gains is formed by continuous, smooth, and differentiable functions of the joint position error and velocity of manipulator. A strict Lyapunov function is proposed to demonstrate globally asymptotic stability of the close-loop equilibrium point. Finally, the functionality and performance of the proposal is illustrated via simulation results and comparative analysis against Proportional-Derivative (PD) control scheme on a two-degrees-freedom direct-drive robot manipulator.

Keywords—Saturated controllers, global asymptotic stability, variable gains, self-tuning, robot manipulator.

I. INTRODUCTION

The robot manipulators are mechatronic systems that solve problems where the human is limited. This can be seen in the different activities of industrialized countries such as, increased production, manufacturing engineering and robotic medicine. Other field is exploration, today the robot manipulators are needed to study different ecosystems. Thus, scientists obtain many new information about the flora and faun. The trend of exploration aims to Mars and other planets; NASA has said that it is the biggest challenge for robotics. Nonetheless, for a robot to carry out complex activities, it is necessary to implement a high-performance control. For this reason, the scientific community in robotic has focused on design controllers, such as these features is contained [1].

To indicate a certain robot task is necessary to solve the trajectory problem. On the other hand, the regulation problem in joint space is a case of the trajectory problem, which consists of designing a regulator such that, carry to joint positions from any initial conditions to certain desired positions of robot manipulator. The solutions can be extrapolated to other motion control application, such as point to point control or cartesian control. However, one of the practical problems is saturation; due to the servomotors of the robot manipulator do not have an unlimited source of torque. This problem generates unmodeled mechanics on the robot manipulator. The classical PD and Proportional-Integral-Derivative (PID) regulator have the disadvantage of applying unlimited torque; hence, the servomotors can work in the saturation zone [2]. In this case, the applied torque by

the actuators to the manipulator joints will be different from that demanded by the controller. Furthermore, saturation of the actuators deteriorates the control performance and leads to thermal and mechanical failure [5].

These control schemes have been modified to avoid this problem using different perspectives. In [3] on a Saturated-Proportional scheme is proposed; through hyperbolic tangent function, the control actions have been saturated. A Saturated Proportional-Saturated Derivative (SP-SD) control is presented and implemented on a two-degrees-of-freedom robot in [4]. We highlight [5] where a simple controller is shown, by continuous functions, this control delivers bounded torques; in this sense, a SP-SD adaptive control is implemented on a robot system. A lineal PD feedback is presented in [6], which the integral action is driven by a nonlinear function of the joint position error of the robot manipulator. Years later, a new saturated nonlinear PID global regulator is proposed in [7] such as, bounded torques are generated. A saturated nonlinear PID regulator for industrial robot manipulators is presented in [8] as alternative to solve the saturation problem.

The energy shaping methodology is another perspective for dynamic control of robot manipulators, which is presented in by Takegaki and Arimoto [9]; from this technique, many papers have been proposed. In [10] the designed controller is capable to apply bounded torque by a known trigonometric function for saturation of control actions. Also, a group of saturated controllers is shown in [11]; these schemes are formed by a combination of functions such as, the limited control actions is generated. The gradient of artificial potential energy is represented by square root-type to design a new regulator with bounded control actions, the implementation and experimental results are presented in [12]. The contribution [13] shows as, the energy shaping methodology allows generating families of control schemes; these controllers have different qualitative proprieties to enhance feedback control of robot, global asymptotic stability, and experimental results on a direct-drive-robot.

The main disadvantage is, the previous control schemes have constant gains, the control-gains-tune is complicated, and the empirical method by the user is needed. A wrong control-gains-tune causes a low performance. In the literature, there are different papers where this problem is approached. The fuzzy logic is the most used. In [14] a fuzzy



31/8/2021

Mail - BRANDON SANCHEZ GARCIA - Outlook

[JRC] Editor Decision

Alfian Ma'arif <journalumy@gmail.com>

Mon 4/12/2021 5:28 AM

To: BRANDON SANCHEZ GARCIA <brandon.sanchez@alumno.buap.mx>

Cc: edits@publons.com <edits@publons.com>

Dear Brandon Erick Sanchez,

We have reached a decision regarding your submission to the Journal of Robotics and Control (JRC), "Global Saturated Regulator with Variable Gains for Robot Manipulators".

Our decision is to: Accepted Submission.

Alfian Ma'arif
(SCOPUS ID: 57195619646), Universitas Ahmad Dahlan
alfianmaarif@ee.uad.ac.id

Journal of Robotics and Control (JRC)
Email: jrc@umy.ac.id || jrcofumy@gmail.com
Website: <http://journal.umy.ac.id/index.php/jrc>

Referencias

- [1] J. Cornejo-Aguilar, J. Cornejo, M. Vargas and R. Sebastian, *La revolución de la cirugía robótica en latinoamérica y la futura implementación en el sistema de salud del Perú*, Cartas al Editor, vol. 19, no. 1, pp. 108-111, 2019.
- [2] F. Reyes, *Robótica Control de robots manipuladores*, Grupo Editor AlfaOmega, Primera edición, México, 2011.
- [3] M. Takegaki and S. Arimoto, "A new feedback method for dynamic control of robot manipulators", *ASME Journal Dynamic Systems Measure Control* 103, pp. 119-225, 1981.
- [4] T. Tekagi and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of systems and its applications to modeling and control", *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, vol. SMC-15, no. 1, pp. 116-132, 1985.
- [5] R. Kelly and R. Carelli, "A class Nolinear PD-type Controllers for robots manipulators", *Journal of Robotic Systems*, vol. 13, no. 12, pp. 793-802, 1996.
- [6] F. Reyes, J. Cid and C. Campuzano, "Development of An Experimental Platform with Open Architecture for Robots Manipulators", *IASTED International Conference Modeling and Simulation*, pp. 77-80, 1999.
- [7] R. Kelly, R. Haber, R. Haber-Guerra and F. Reyes, "Lyapunov Stable Control Of Robot Manipulators: A Fuzzy Self-Tuning Procedure", *Intelligent Automation and Soft Computing*, vol. 5, no. 4, pp. 313-326, 1999.
- [8] J. Meza, V. Santibáñez, R. Soto and M. Llama, "Stable fuzzy self-tuning PID control of robot manipulators", *Systems Man and Cybernetics IEEE International Conference*, pp. 2624-2629, 2009.
- [9] J. Sifuentes, V. Santibáñez and J. Medina, "A globally asymptotically stable nonlinear PID regulator with fuzzy self-tuned PD gains for robot manipulators", *World Automation Congress*, pp. 573-778, 2014.
- [10] E. W. Bai and Y. F Huang, "Variable gain parameter estimation algoritms for fast tracking and smooth steady state", *Automatica* 7, vol. 36, pp. 1001-1008, 2000.
- [11] L. C. Kiong, R. Mandava, W. E. Kiong and M. Rao, "A self-learning no-linear variable gain proportional-derivative (PD) controller in robot manipulators", *Pertanika Journal Science and Technology Supplement*, vol. 12, no. 2, pp. 139-158, 2004.
- [12] G. Xiaobo, S. Aiguo and Z. Yan, "Neural Network Control for Tele-rehabilitation based on variable gains", *Biomedical Engineering and Informatics, International Conference*, vol. 2, pp. 778-782, 2008.
- [13] Y. Zuo, Y. Wang, L. Huang and C. Li, "Intelligent Hybrid Control Strategy for Trajectory Tracking of robots manipulators", *Journal of Control Science and Engineering*, vol. 2008, 2008.

- [14] A. Walsh and J. Forbes, "Analysis and synthesis of input strictly passive gain-schedule controllers", *Journal of the Franklin Institute, Elsevier*, vol. 354, pp. 1285-1201, 2018.
- [15] F. Reyes and B. M. Al-Hadithi, "An asinh-type regulator for robot manipulators with global asymptotic stability", *Automatika*, vol. 61, no. 4, pp. 574-586, 2020.
- [16] F. Salas, V. Santibáñez, and M. A. Llama, "Variable gains PD tracking control of robots manipulators: Stability analysis and simulations", *World Automatic Congress (WAC)*, pp. 1-6, 2012.
- [17] O. Ramos, F. Reyes, M. A. Vargas and S. Vergara, "Variable control gains for PD controller for robot manipulators", 2015 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering, pp. 187-192, 2015.
- [18] M. A. Limón, F. Reyes and E. Gonzales, "Unbounded regulators with variable gains for a direct-drive robot manipulator", *Automatika: Journal for control Measurement Electronics, Computing and Communications*, vol. 57, No. 2, pp. 484-495, 2016.
- [19] M. A. Limón, F. Reyes and E. Gonzales, "Saturated regulation with derivate variable gain for robot manipulators", *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 14, no. 4, pp. 434-445, 2017.
- [20] R. Kelly, V. Santibáñez and A. Loría, "Control of robot manipulators in joint space", *Springer*, London, 2005.
- [21] B. Sánchez, E. Rodríguez, F. Reyes, O. Félix and B. Al-Hadithi, "A extended family of PD regulators with variable gains", *In Congr. Int. en Ing. Electrónica*, vol 42, pp. 47-52, 2020.
- [22] B. Sánchez, E. Rodríguez, F. Reyes, B. Al-Hadithi and O. Félix, "Desing and implementation of saturated regulators with variable gains for robot manipulators", *In Congr. Naci. de Mecatrónica, Desarrollo con enfoque mecatrónico*, Cap. 9, pp. 113-130, 2020.
- [23] R. Kelly, V. Santibáñez and F. Reyes. "On saturated-proportional derivative feedback with adaptive gravity compensation of robot manipulators", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 10, pp. 465-679, 1996.
- [24] R. Kelly, V. Santibáñez, and F. Reyes, "A class of adaptive regulators for robot manipulators", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 12, pp. 41-62, 1998.
- [25] C. Chávez-Olivares, F. Reyes-Cortés, E. Gonzalez-Galvan, M. Mendoza-Gutierrez and I. Bonilla-Gutierrez, "Experimental evaluation of parameter identification on an anthropomorphic direct drive robot", *International Journal Advanced Robotic Systems 9*, vol. 4, pp. 1-18, 2012.
- [26] B. Sánchez, F. Reyes, B. Al-Hadithi and O. Félix, "Global saturated regulator with variable gains for robot manipulators", *Journal of Robotics and Control*, vol. 2, no. 6, pp. 571-581, 2021.
- [27] B. Sánchez, F. Reyes, and B. Al-Hadithi, "Position control of robot manipulators using a PD regulator with variable gains", *Jornada Nacional de Ciencia y Tecnología Aplicada*, vol. 4, no. 1, pp. 147-152, 2021.