BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.

LA INVALIDEZ DE ALGUNOS CONTRAEJEMPLOS A LA CONJETURA DE DIRAC

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA

HERNÁN CORTEZ ESPINOZA

ASESORA: DRA. MERCEDES PAULINA VELÁZQUEZ QUESADA

PUEBLA, PUE. JUNIO 2019

DEDICATORIA

A mis amigos,

A mi familia,

A tí, mi buen lector,

A tí, que sacrificas un poco de tu tiempo por ayudar a tus amigos a salir adelante en esta ciencia ...

Agradecimientos

En la noche más oscura,
cuando lo único visible son tinieblas.
Cuando un frio intenso te recorre,
penetra el alma que quedaba.
La alegria, la luz escapan de los ojos
y el corazón palpita lentamente.
En ese momento, no dudaré
que estarán ahí ustedes
aún cuando no escuchen mi voz.
Florecerán, y en el auxilio
la firmeza he de hallar.
No me cansaré, no olvidaré
su presencia en mi ...

Este trabajo es el resultado de la culminación de esta étapa de mi vida. Muchos de ustedes que leen estas lineas han estado en diferentes partes de este camino. Quisiera devolver un poco de lo mucho que ustedes me han dado; se que no es suficiente pero trataré de externar mi agradecimiento a través de estos párrafos. Tal vez no aparezca tu nombre aquí, pero eso no significa que haya olvidado nuestra amistad y entenderé tu molestia. Una disculpa de antemano.

A mi familia. A mi mamá Marcia Espinoza Reyes por apoyarme en este sueño mío desde el principio. Aunque parecia un desvario, creiste en mi, me acompañaste incluso al verano de talentos. A mi papá Fidel Cortez Medina, por dar un poco de fé a el camino que había elegido, a pesar de verlo con ciertos ojos de desconfianza al principio y con la incertidumbre de que trabajaría tu hijo una vez que se graduara; el acercarse a mí cada vez que trabajaba en algún proyecto o tarea y me acompañaban de a ratitos. A ustedes dos les debo el ánimo de estudiar, participar en muchos eventos escolares desde pequeño, su apoyo durante este largo recorrido desde el inicio y durante las dificultades, estar aquí en esta sala defendiendo mi tesis y haber pasado una de las mejores épocas de mi vida en esta Facultad. A mis hermanos Andrés y Aldo, que han ayudado en mi formación.

A la Dra. Mercedes Velázquez Quesada, por recibirme como su estudiante y permitirme por primera vez trabajar en un proyecto de investigación. Por su apoyo, paciencia y guía en la elaboración de este trabajo en todas su étapas y en los congresos que se presentaron resultados preliminares. Por todo lo que me enseñó, muchisimas gracias. Espero no haberle dado mucho trabajo en este tiempo.

A mis sinodales, a el Dr. Héctor Novales Sánchez, a el Dr. Alberto Escalante Hernández y a la Dra. Iraís Rubalcava García por aceptar la invitación para ser mi jurado, por sus observaciones y comentarios para mejorar esta tesis.

A Julia, Hecsarí, David (Chávez), Tania, Michelle, Concha, Elizabeth (Waffles), Kary, Selena, Óscar y Antonio. No sólo fueron mis compañeros de clase, sino que fueron más allá y me tendieron su mano en los momentos más oscuros. me dieron su amistad sincera y en algún momento pasaron a ser confidentes. Siempre es grato pasar tiempo con ustedes.

A Mina, que gran parte de mi estancia estuvo conmigo y me dió su tiempo para escucharme, para hacerme reir y su motivación para que fuese un mejor físico, pero sobre todo, un mejor ser humano.

A los amigos que hice en el CEEA, en la rondalla, en la OSA y en diversas actividades en las que participé. Por mencionar algunos, a Denisse, Paola, David (Silva), Jeny, Selena, Sandy, Jessy, Ame, Jonhatan, Ana, Angélica, Itzel, Melissa, Balderas, Abraham (el pariente), Judith, María Eugenia, etc..

A Gerardo, por la amistad de más de 17 años, por las largas charlas sobre física (nuestro oficio), ciencias, literatura, música, basquetbol, entre otras cosas. Por sacarme una sonrisa en momentos difíciles sin darme a beber una gota de alcohol. Gracias amigo por todo tu empeño a que estudiemos física.

A Kath, Elizabeth y Faby por no dejarme solo en el coloquio. A Yas por la motivación en estos últimos días para que mis fuerzas no decaigan y por su apoyo académico mientras tomamos algún curso juntos. A Naye, tu fuiste mi primera alumna; me llena de orgullo y alegría verte ahora como una egresada de derecho, y ahora como amigos, el escucharme y darme un consejo oportuno. A Ivonee, por su pasión por la divulgación, la comida y bailar. Porque es la primera persona a la que le ayudarán estas notas. A Óscar por ayudarme en la guía y solución de dudas básicas sobre este tema.

A mis maestros que me han dado clase a lo largo de mi vida. Al Prof. Omar Álvarez Ruíz, que con usted comenzó este viaje y por despertar ese amor por las mates. A la Mtra. Magdalena López Adauta por mostrarme otro lado de las matemáticas, por reavivar mi interés, estar pendiente de mi en el proceso de admisión y responder a mis dudas a lo largo de la carrera. Por su guía y consejo incluso ahora siendo docente también. Y en la licenciatura, a los profesores Pedro Tolentino, María de Jesús López, Rogelio Cruz, Soledad León, Eric Martínez (por sus notas, que ayudaron a aclarar algunos conceptos usados en esta tesis), Cecilia Uribe, Lorenzo Díaz, Héctor Novales, Leticia Fuchs, Rosibel Carrada, Celestino Soriano, Jorge Velázquez, Maribel Méndez, ... Por ser mis maestros, resolver mis dudas respecto a alguna materia que ustedes me impartieron, pero sobre todo, por mostrarme la parte humana de hacer ciencia, por sus consejos y su apoyo para que yo aprendiera mejor.

Un agradecimiento especial a Fanny, que colaboró en la correción de esta tesis. Por las tardes de ritmos latinos, de películas, de comida, de risas y aventuras y por todo lo que queda por venir ... Te quiero mucho.

Resumen

La veracidad de los contraejemplos propuestos hacia la conjetura de Dirac en "Gauge symmetries and Dirac conjeture", es validada. A través del método Hamiltoniano y Lagrangiano para el tratamiento de sistemas con Lagrangianas singulares, se muestra que las Lagrangianas propuestas en [Wang, 2009] no corresponden a contraejemplos a la conjetura de Dirac; su análisis se realiza por el método de Dirac con la modificación del teorema de Castellani para hallar sus respectivas transformaciones de norma, así como por el método Lagrangiano. En este trabajo, se observa que el análisis Hamiltoniano y Lagrangiano realizado en [Wang, 2009] para hallar las transformaciones de norma es erróneo y se verifica que las transformaciones halladas en [Kiriushcheva, 2011] por el método Hamiltoniano son correctas. También se hallan las transformaciones de norma por el método Lagrangiano para estas Lagrangianas. A partir de estos resultados se concluye que una Lagrangiana puede tener diferentes transformaciones de norma halladas por el método Lagrangiano o Hamiltoniano, pero que eso no es criterio suficiente para la invalidez de la conjetura de Dirac.

Palabras clave: Conjetura, constricciones, Dirac, norma, transformaciones.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El formalismo desarrollado a partir de la década de 1940 para el tratamiento de sistemas singulares lagrangianos se sintetiza en la obra de Dirac en el libro [4]. En el primer capítulo, tras obtener todas las constricciones de una Lagrangiana singular, estas se separan en las que son de primera clase y las otras que son de segunda clase. Se observa que las constricciones primarias de primera clase (ϕ) dan origen a una transformación infinitesimal de contacto que no altera el estado físico del sistema. Estas transformaciones se conocen como transformaciones de norma. Si se toma una variable dinámica y se aplican dos transformaciones consecutivas con funciones generadoras $\epsilon_a \phi_a$ y $\gamma_{a'} \phi_{a'}$ se obtiene una transformación de norma cuyos generadores están dados por las funciones $\{\phi_a, \phi_{a'}\}$ las cuales son funciones de primera clase. Estos generadores, que llevan a transformaciones de norma, son funciones de primera clase, pero no necesariamente provienen de una combinación lineal de costricciones primarias de primera clase; también pueden considerarse constricciones de primera clase de generaciones superiores, con lo que se postula que en general, *todas aquellas constricciones que sean de primera clase deben generar una transformación infinitesimal de contacto que no modifica el estado físico del sistema*. Pero Dirac no puede probarlo en ese momento; y sin en cambio no se había encontrado un ejemplo en el que una constricción secundaria de primera clase cambiara el estado físico del sistema de estudio. A esta proposición se le conoce actualmente como *la Conjetura de Dirac* y hasta la fecha se ha tratado de mostrar su invalidez, como en [1], [5] o más recientemente en [11], o su validez en [3] donde bajo ciertas condiciones, se convierte a la conjetura en un teorema.

En este trabajo se verifica que los contraejemplos propuestos por [11] para mostrar la invalidez de la conjetura de Dirac son erroneos, pues no se abordan de la manera correcta por los enfoques lagrangiano ni hamiltoniano. Esto repercute en que las transformaciones de norma halladas por cada enfoque no llevan a una simetría del sistema propuesto. Probar que estos sistemas sí satisfacen la conjetura ayudaría a clarificar para qué sistemas singulares es válida esta proposición. Parte de esta revisión se sustenta en el trabajo hecho por Kiriushcheva en [6] donde se obtienen las transformaciones de norma por el método hamiltoniano; el desarrollo del enfoque Lagrangiano es la aportación de este trabajo y da soporte a lo que se halló por parte de Kiriushcheva.

Capítulo 2

El formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares

En los primeros cursos de licenciatura se enseñan métodos para estudiar sistemas en la mecánica clásica, usando el formalismo newtoniano con vectores y resolviendo las ecuaciones de movimiento derivadas de este análisis. Más tarde se observa que para su estudio uno puede proseguir en el análisis de un sistema sólo usando las herramientas que se nos han proporcionado en los cursos de cálculo. He aquí un repaso.

2.1. Formalismo de Lagrange y Hamilton

2.1.1. El principio de mínima acción y las ecuaciones de Euler-Lagrange

Definición 2.1. *Sea* $S : C^1[t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funcional con dominio sobre todas aquellas funciones continuamente diferenciables sobre el intervalo* $[t_0, t_1]$ *y sea* $\boldsymbol{q} : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que* $\boldsymbol{q}(t) = (q^1(t), q^2(t), ..., q^n(t))$[1] *es una curva. A la funcional*

$$S[q(t)] := \int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)dt \tag{2.1}$$

se le llama ***acción*** *del sistema y* $L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)$ *es la función* ***función lagrangiana*** *o simplemente lagrangiana asociada al sistema de estudio.*

Aunque la acción es una funcional que sólo depende de una variable $[\boldsymbol{q}(t)]$, su valor se ve afectado por:

- El intervalo $[t_0, t_1]$.
- La curva $\boldsymbol{q}(t)$ y las condiciones de frontera (es decir, $\boldsymbol{q}(t_0) = \boldsymbol{q_0}$ y $\boldsymbol{q}(t_1) = \boldsymbol{q_1}$).

[1]Al igual que con esta variable $\boldsymbol{q}$ a lo largo de este texto, aquellas variables en negritas son consideradas como vectores, mientras que a sus componentes no se les resaltan en la escritura de las ecuaciones.

- La función $L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t)$.

Al ser S una función diferenciable de una sola variable, es posible usar las herramientas de cálculo diferencial que ya se conocen para hallar sus puntos críticos, sus puntos de inflexión, entre otras caracteristicas que se necesitan saber de una función que describe (como en este caso) un sistema físico.

Para sistemas que satisfacen las ecuaciones de Newton, la Lagrangiana es $L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t) = T(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t) - V(\boldsymbol{q}(t), t)$ con T la energía cinética y V la energía potencial asociadas al sistema de interés[2].

Definición 2.2. *(**Principio de Hamilton** o de mínima acción)*
Para un sistema físico con n grados de libertad discretos, la trayectoria física del sistema durante el intervalo $[t_0, t_1]$ está descrita por la curva $\boldsymbol{q}(t)$ para la cual la funcional

$$S[\boldsymbol{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t) dt \tag{2.2}$$

es estacionaria (punto de silla) o extremal (máxima o mínima).

En otras palabras, para un sistema físico, uno puede imaginarse las distintas trayectorias $\boldsymbol{q}(t)$ en el espacio de configuración que parten desde $\boldsymbol{q}(t_0)$ y terminan en $\boldsymbol{q}(t_1)$, cada una de ellas lleva a un valor distinto de la acción, pero la trayectoria $\boldsymbol{q}(t)$ que tiene relevancia física es aquella que minimiza el valor de la acción.

Usando métodos del cálculo variacional se obtiene que la función $\boldsymbol{q}(t)$ que satisface el principio de Hamilton es la que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange:

Definición 2.3. *Al conjunto de ecuaciones*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, ..., n \tag{2.3}$$

*se les llama **ecuaciones de Euler-Lagrange** o simplemente ecuaciones de Lagrange para la acción $S[\boldsymbol{q}(t)]$. A las parciales $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ se les conoce como los **momentos generalizados** mientras que $\frac{\partial L}{\partial q^i}$ se conocen como las **fuerzas generalizadas**.*

2.1.2. Las ecuaciones de Hamilton

A través de una transformada de Legendre, un sistema de n ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange de segundo orden pasa a ser un sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden.

[2]La deducción de la forma de la Lagrangina $L = T - V$ viene a partir del principio de D'Alembert. Para mas detalles, consulte [10, pag. 28]

Teorema 2.1.1. *El sistema de n ecuaciones de Lagrange es equivalente al sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden, llamadas **ecuaciones de Hamilton***

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}},\\ \dot{\boldsymbol{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}},\end{aligned}$$

donde $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t) = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} - L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ es la transformada de Legendre de la lagrangiana, vista como una función de $\dot{\boldsymbol{q}}$.

Ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes; el uso de uno u otro depende de la conveniencia de uno al momento de resolver las ecuaciones de movimiento.

2.2. Sistemas singulares

2.2.1. Constricciones primarias

De manera general, las ecuaciones de Lagrange se pueden reescribir de la siguiente forma[3]:

$$W_{ij}(q,\dot{q})\ddot{q}^j + K_i(q,\dot{q}) = 0; \qquad (i,j = 1,2,...,n), \tag{2.4}$$

donde $K_i(q,\dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j$ y $W_{ij}(q,\dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$ es un elemento de la **matriz Hessiana**. Visto de esta forma, las ecuaciones de Lagrange forman un sistema de ecuaciones lineales para las aceleraciones de tal manera que, para que exista una solución a este sistema, se debe cumplir la condición que:

$$\det(W_{ij}) \neq 0. \tag{2.5}$$

A aquellos sistemas que cumplen la condición se les conoce como *sistemas regulares*. Esto significa que las aceleraciones tendrán una solución única y la transformada de Legendre puede realizarse sin mayor problema; los momentos son expresados en función de las coordenadas y velocidades generalizadas y puede hallarse la función hamiltoniana. En otro caso, si

$$\det(W_{ij}) = 0, \tag{2.6}$$

se dice que el sistema dinámico es un *sistema singular*.

A partir de la definición de momentos generalizados, si se cumple la condición (2.5), los momentos pueden escibirse en términos de las coordenadas y velocidades generalizadas. En caso contrario se observa que no todas las velocidades pueden ser expresadas

[3]Cuando sea necesario, se usará el simbolo de sumatoria para expresar la suma de componentes. En otro caso, se usará la notación de suma abreviada

como funciones de coordenadas y momentos, por lo que la transformada de Legendre no se puede realizar y las ecuaciones que definen los momentos se pueden ver como relaciones entre los momentos y las coordenadas; dichas relaciones a su vez definen una superficie en el espacio fase que se denota como Σ_1. Las relaciones tienen la forma:

$$\phi^1_\mu(q^i, p_i) \approx 0 \qquad \mu = 1, 2, ..., M, \tag{2.7}$$

denominadas *constricciones primarias* y se derivan de la definición de momento canónico, el símbolo $\approx$ significa que las constricciones son nulas en la superficie de constricciones primarias Σ_1 y no en todo el espacio fase. El superíndice de ϕ se asocia a las primeras constricciones que surgen de este algoritmo. Se verá mas adelante que es posible hallar más constricciones (si el sistema de estudio lo permite) y cómo es que se derivan.

Si el rango de la matríz Hessiana es constante en el espacio de configuración, las ecuaciones que definen a la superficie de constricciones definen una subvariedad dentro del espacio fase. La dimensión de dicha variedad depende del número de constricciones primarias independientes que puede hallarse a partir del rango de la matriz Hessiana $n \times n$

$$\rho(W_{ij}) = \rho\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = n - M' \quad , \tag{2.8}$$

en donde M' es la nulidad de la matriz Hessiana, y coincide con el número de constricciones primarias independientes.

2.2.2. Condiciones de regularidad

Existen maneras diferentes de representar una superficie dada por medio de las relaciones de la forma (2.7). Por ejemplo, la superficie

$$p_2 + q_1 = 0 \tag{2.9a}$$

es equivalente a escribir

$$(p_2 + q_1)^2 = 0 \tag{2.9b}$$

o como

$$\sqrt{|p_2 + q_1|} = 0. \tag{2.9c}$$

Para usar el formalismo Hamiltoniano, se vuelve necesario imponer restricciones en la elección de las funciones ϕ_i, las cuales representan la superficie de constricciones primarias. Estas son conocidas como *condiciones de regularidad*.

La superficie de constricciones de dimensión $(2n - M')$ debe poderse cubrir con regiones abiertas sobre cada una de las cuales (localmente) las funciones de constricción pueden separarse en dependientes e independientes. El número de constricciones independientes coincide con el rango de la matríz jacobiana sobre la superficie de constricciones:

$$\rho\left(\frac{\partial \phi_{\mu'}}{\partial(q^i, p_i)}\right) = M',$$

.

Las condiciones sobre la matriz jacobiana $\partial\phi_{\mu'}/\partial(q^i, p_i)$ se pueden reformular de manera alternativa como sigue:

1. Las funciones $\phi_{\mu'}$ pueden ser tomadas localmente como las primeras M' coordenadas de un nuevo y regular sistema de coordenadas en la vecindad de la superficie de constricciones.

2. Los gradientes $d\phi_1, ..., d\phi_{M'}$ son localmente linealmente independientes en la superficie de constricciones. Es decir, $d\phi_1 \wedge ... \wedge d\phi_{M'} \neq 0$ (el producto exterior dado en la superficie de constricciones).

3. Las variaciones $\delta\phi_{\mu'}$ son de orden infinitesimal ε para variaciones arbitrarias δq^i y δp_i de orden ε (terminología de Dirac).

Regresando al ejemplo, se observa que la descripción para la superficie de constricciones dada por (2.9a) es admisible. En efecto, $\partial(p_2 + q_1)/\partial(q^n, p_n)$ es de rango dos. Sin embargo (2.9b) o (2.9c) no son válidos, pues por ejemplo el rango de la matríz $\partial((p_2 + q_1)^2)/\partial(q^n, p_n)$ se anula en los puntos $p_2 = -q_1$ y es igual a dos en cualquier otro caso.

2.2.3. El Hamiltoniano canónico H_0

Antes de continuar, se enuncian las siguientes propiedades que serán útiles en lo que sigue.

Teorema 2.2.1. *Si G es una función (suave)*[4] *en el espacio fase que se anula en la superficie de constricciones Σ_1, entonces G es una combinación lineal de las constricciones primarias. Es decir, $G := g^m\phi^1_m$ para algunas funciones g^m.*

Teorema 2.2.2. *Si $\lambda_i\delta q^i + \mu^i\delta p_i = 0$ para variaciones arbitrarias de δq^i y δp_i tangentes a la superficie de constricciones, entonces*

$$\begin{aligned} \lambda_i &= u^\mu \frac{\partial\phi^1_\mu}{\partial q^i}, \\ \mu^i &= u^\mu \frac{\partial\phi^1_\mu}{\partial p_i}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

para algún conjunto de funciones u^μ. Las igualdades anteriores se satisfacen sobre la superficie de constricciones dadas por (2.7)[5]

[4]Una función es suave si admite derivadas de cualquier orden, y por lo tanto, todas sus derivadas de cualquier orden son continuas

[5]Para una prueba de este teorema, consulte [8].

Si las constricciones satisfacen las condiciones de regularidad, se define el *hamiltoniano canónico*:

$$H_0 = \dot{q}^i p_i - L(q^i, \dot{q}^i). \tag{2.11}$$

En la ecuación (2.11), debido a la definición de momento generalizado, H_0 es una función dependiente de las coordenadas y las velocidades generalizadas. Considere la variación de H_0 en relación a variaciones de las posiciones y las velocidades:

$$\begin{aligned} \delta H_0 &= \dot{q}^i \delta p_i + \delta \dot{q}^i p_i - \delta \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \\ &= \dot{q}^i \delta p_i - \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Entonces el Hamiltoniano canónico se puede ver como función de q^i y p_i. Sin embargo las variaciones de δq^i y δp_i en (2.12) no son arbitrarias; tienen que ser tangentes a la superficie de constricciones primarias Σ_1; así el Hamiltoniano canónico está bien definido sobre Σ_1. Se verá más adelante que H_0 puede ser extendido fuera de la superficie de constricciones Σ_1 a través de una combinación lineal de constricciones

$$H_0 \longrightarrow H_0 + c^\mu(q,p)\phi^1_\mu. \tag{2.13}$$

Como H_0 es una función dependiente de q^i y p_i,

$$\delta H_0 = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial H_0}{\partial q^i}\delta q^i. \tag{2.14}$$

Entonces, a partir de (2.12) y de (2.14),

$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial q^i} + \frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\delta q^i + \left(\frac{\partial H_0}{\partial p_i} - \dot{q}^i\right)\delta p_i = 0 \tag{2.15}$$

y usando el teorema (2.2.2), los coeficientes de (2.15) se expresan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + u^\mu \frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial p_i}, \\ -\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)_{\dot{q}} &= \left(\frac{\partial H_0}{\partial q^i}\right)_p + u^\mu \frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial q^i}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Estas relaciones son importantes porque permiten establecer a las velocidades $\dot{q}^i$ a partir de los momentos p_i (cuando se cumple $\phi^1_\mu = 0$) y de los parámetros u^μ. Estos parámetros extra pueden verse como coordenadas en la superficie de imágenes inversas de una p_i dada.

Si las constricciones son independientes, los vectores $\partial\phi^1_\mu/\partial p_i$ son también independientes sobre la superficie ϕ^1_μ, consecuencia de las condiciones de regularidad. Por lo tanto, no hay dos conjuntos diferentes de u's que puedan producir las mismas velocidades.

Esto significa que las u's pueden ser expresadas, en términos de las coordenadas y las velocidades resolviendo las siguientes ecuaciones.

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}(q, p(q,\dot{q})) + u^\mu(q,\dot{q})\frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial p_i}(q, p(q,\dot{q})). \tag{2.17}$$

Definimos la transformada de Legendre partiendo del espacio $(q, \dot{q})$ hacia la superficie $\phi^1_\mu(q,p) \overset{\Sigma_1}{=} 0$ del espacio (q, p, u) mediante:

$$\begin{aligned} q^i &= q^i, \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q,\dot{q}), \\ u^\mu &= u^\mu(q,\dot{q}). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Note que esta transformación entre espacios de dimensión $2N$ es invertible.

$$\begin{aligned} q^i &= q^i, \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + u^\mu \frac{\phi^1_\mu}{\partial p_i}, \\ \phi^1_\mu(q,p) &= 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Aquí, las ecuaciones (2.18) dan lugar a las ecuaciones (2.19) y viceversa. Debe mencionarse que el desarrollo anterior sólo es válido en regiones cercanas a Σ_1. Se asumirá a partir de ahora que un Hamiltoniano H_0 puede ser definido globalmente como una función de q's y p's.

2.2.4. Principio de acción del Hamiltoniano primario H_p

Las ecuaciones (2.16) pueden escribirse con la ayuda de las ecuaciones de Lagrange en la forma hamiltoniana y con la ayuda de la siguiente definición.

Definición 2.4. *Sean F(q,p) y G(q,p) funciones en el espacio fase. Se define el* ***Paréntesis de Poisson*** *como sigue*

$$\{F, G\} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q^i} \tag{2.20}$$

El cual cumple con las siguientes propiedades:

Si F(q,p), G(q,p) y R(q,p) son funciones en el espacio fase y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

- ***Bilinealidad.***

$$\{F, \alpha G + \beta R\} = \alpha\{F, G\} + \beta\{F, R\} \tag{2.21a}$$

- ***Antisimetría***

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \tag{2.21b}$$

- ***Producto***

$$\{F, GR\} = \{F, G\}R + G\{F, R\} \tag{2.21c}$$

- ***Identidad de Jacobi***

$$\{\{F, G\}, R\} + \{\{R, F\}, G\} + \{\{G, R\}, F\} = 0 \tag{2.21d}$$

Usando la definición de paréntesis de Poisson, las ecuaciones (2.16) se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} + u^\mu \frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial p_i} = \{q^i, H_0\} + u^\mu \{q^i, \phi^1_\mu\}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_0}{\partial q^i} - u^\mu \frac{\partial \phi^1_\mu}{\partial q^i} = \{p_i, H_0\} + u^\mu \{p_i, \phi^1_\mu\}, \\ \phi^1_\mu(q, p) &= 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Note que si el sistema no presenta constricciones, las dos primeras ecuaciones presentan la forma ordinaria de las ecuaciones de Hamilton. Estas ecuaciones también pueden hallarse a partir del principio de acción hamiltoniano aplicado a la acción primaria:

Definición 2.5. *A partir de Hamiltoniano canónico H_0, se define el **Hamiltoniano primario** como sigue:*

$$H_p := H_0 + u^\mu \phi^1_\mu. \tag{2.23}$$

Es decir, el hamiltoniano primario es el hamiltoniano canónico más la suma de las combinaciones lineales posibles de las constricciones primarias independientes.

Para este nuevo hamiltoniano, se tiene una *acción primaria*

$$S_p[q^i, p_i, u^\mu] = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{q}^i p_i - H_0 - u^\mu \phi^1_\mu) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{q}^i p_i - H_p) dt \tag{2.24}$$

con las condiciones $\delta q^i(t_\alpha) = 0$, $(\alpha = 0, 1)$. Para esta expresión de la acción, las variables u^μ son multiplicadores de Lagrange.

2.2.5. Constricciones secundarias, terciarias, etc.

En el método hamiltoniano es necesario que las constricciones primarias se preserven constantes en el tiempo y esto debe cumplirse para cualquier valor inicial que tomen las variables dinámicas que se están usando; esta es llamada *condición de consistencia* sobre las constricciones primarias. Se verifica que $\dot{\phi}^1_\mu = d\phi^1_\mu/dt \approx 0$. Visto de otra manera

$$\dot{\phi}^1_\mu = \{\phi^1_\mu, H_0\} + u^\nu \{\phi^1_\mu, \phi^1_\nu\} \approx 0 \tag{2.25}$$

donde $\mu, \nu = 1, ..., M$. Esto se hace con todas las constricciones primarias halladas en el algoritmo, tanto dependientes como independientes.

Se definen

$$\begin{aligned} h_\mu &= \{\phi^1_\mu, H_0\} \\ P_{\mu\nu} &= \{\phi^1_\mu, \phi^1_\nu\} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Así la ecuación (2.25) toma una forma matricial

$$P\boldsymbol{u} + \boldsymbol{h} \approx 0 \tag{2.27}$$

donde P es una matríz formada con los paréntesis de Poisson de las constricciones primarias y $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}$ son vectores. Para que $\boldsymbol{u}$, el vector formado por los multiplicadores de Lagrange este determinado, es necesario que $\det P \neq 0$. Se tienen los siguientes casos para este sistema matricial:

1. $\boldsymbol{h} \neq 0$ y $\det P \neq 0$

   La ecuación (2.25) representa un sistema matricial no homogeneo para $\boldsymbol{u}$. Luego el sistema tiene una solución única y es $\boldsymbol{u} \overset{\Sigma_1}{=} -P^{-1}\boldsymbol{h}$ con P^{-1} la matríz inversa de P.

2. $\boldsymbol{h} \neq 0$ y $\det P = 0$

   Sea R el rango de la matríz P. Como P es una matríz $M \times M$ entonces existen $M - R$ vectores nulos linealmente independientes $\boldsymbol{\nu}$ de modo que

$$P\boldsymbol{\nu} = 0 \tag{2.28}$$

   o una forma equivalente

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{h} = 0 \tag{2.29}$$

   En esta situación, o se satisfacen idénticamente estas relaciones o existe algún número K de nuevas relaciones entre los momentos y las coordenadas independientes de las constricciones primarias. A estas relaciones se les llaman *constricciones secundarias* y se denotan como

$$\phi^2_{\nu'} \approx 0 \quad (\nu' = M + 1, ..., M + K). \tag{2.30}$$

   Estas nuevas constricciones definen una nueva superficie de constricciones llamada superficie de constricciones secundaria. El movimiento del sistema físico en el espacio fase se restringe a la intersección de la superficie primaria y la secundaria.

3. $\boldsymbol{h} = 0$ y $\det P = 0$

   El sistema matricial homogeneo para el vector $\boldsymbol{u}$ tiene soluciones no triviales, pues $\det P = 0$. Si el rango de la matríz P es R, sólo $M' - R$ de los elementos de $\boldsymbol{u}$ serán fijos débilmente; sobre la supeficie de constricciones.

4. $\boldsymbol{h} = 0$ y $\det P \neq 0$

   Solo existe la solución trivial $\boldsymbol{u} = 0$. Es decir, $H_0 = H_p$

En caso de existir constricciones secundarias, es necesario que también cumplan las condiciones de consistencia

$$\dot{\phi_{\mu'}}^2 = \{\phi^2_{\mu'}, H_0\} + u^\nu\{\phi^2_{\mu'}, \phi^1_\nu\} \approx 0, \tag{2.31}$$

para este caso $\mu' = M+1, ..., M+K$, $\nu = 1, ..., M$, $m_\mu = 1$ para $\mu = 1, ..., M$ (que denotan a las constricciones primarias) y $m_\mu = 2$ para $\mu = M+1, ..., M+K$ (que denotan a las constricciones secundarias). Por lo que se vuelven a considerar los casos anteriores. Para el segundo caso, la matríz P puede incrementarse (o quedarse igual) y el número de vectores nulos también puede incrementarse (o quedarse igual). Entonces en el algoritmo pueden obtenerse más constricciones terciarias K_1 y son independientes de todas las anteriores. De manera similar, se pide que estas constricciones se preserven en el tiempo. Este proceso se repite hasta que ya no aparezcan más constricciones o surjan ahora como una combinación lineal de constricciones que previamente ya habían aparecido. Así todas las constricciones obtenidas para el sistema satisfacen una ecuación de consistencia de la forma:

$$\dot{\phi_\mu}^{m_\mu} = \{\phi^{m_\mu}_\mu, H_0\} + u^\nu\{\phi^{m_\mu}_\mu, \phi^1_\nu\} \stackrel{\Sigma_1}{=} 0, \tag{2.32}$$

donde $\mu = 1, ..., J$, es el número total de constricciones y $\nu = 1, ..., M$, el superíndice m_μ denota la generación a la que pertenece dicha constricción, así $m_\mu = 1$ para $\mu = 1, ..., M$ (constricciones primarias) y $m_\mu = 2$ para $\mu = M+1, ..., M+K$ (constricciones secundarias), etc.

Una vez que se han hallado todas las constricciones, la atención se centra sobre las condiciones que deben cumplir los multiplicadores de Lagrange. En lo que sigue, a todas las constricciones en el formalismo Hamiltoniano se les denotará de la forma ϕ_μ; en caso de ser necesario en algún procedimiento, se hará la distinción entre constricciones primarias y secundarias. De la ecuación (2.32) por consistencia todas las constricciones de cualquier generación deben cumplir[6]:

$$\{\phi_\mu, H_0\} + u^\nu\{\phi_\mu, \phi^1_\nu\} \approx 0. \tag{2.33}$$

Es posible considerar esta ecuación como un conjunto de J ecuaciones lineales no homogeneas, con $M \leq J$, o definiendo $P'_{\mu\nu} = \{\phi_\nu, \phi^1_\mu\}$ y $h'_\nu = \{\phi_\nu, H_0\}$, la ecuación anterior

[6]Todas las constricciones halladas se evolucionan con el hamiltoniano primario.

nuevamente es vista como un sistema matricial donde es necesario hallar una solución para el vector $\boldsymbol{u}$. La solución más general a estas ecuaciones es:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{V} \tag{2.34}$$

donde $\boldsymbol{U}$ es una solución particular al la ecuación homogénea (2.33) y $\boldsymbol{V}$ es la solución más general de la ecuación.

$$P'\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0} \tag{2.35}$$

La solución más general de $\boldsymbol{V}$ es una combinación lineal de los vectores nulos linealmente independientes $\boldsymbol{V_\alpha}$ de la matríz P'. Por lo tanto, el vector $\boldsymbol{u}$ se escribe como:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \sum_{\alpha=1} v^\alpha \boldsymbol{V_\alpha} \tag{2.36}$$

donde los coeficientes $v^\alpha(q,p)$ son totalmente arbitrarios en el espacio fase. Con el desarrollo anterior, se muestra a los multiplicadores de Lagrange separados en una parte que esta determinada por las condiciones de consistencia $\boldsymbol{U}$ y otra parte que sigue siendo arbitraria $\sum_{\alpha=1} v^\alpha \boldsymbol{V_\alpha}$.

Reescribiendo el hamiltoniano primario ahora con las expresiones para el vector $\boldsymbol{u}$, este se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} H_p &= H_0 + u^\mu \phi^1_\mu \\ &= \underbrace{H_0 + U^\mu \phi^1_\mu}_{H'} + v^\alpha \underbrace{V^\mu_\alpha \phi^1_\mu}_{\phi^1_\alpha} \\ &= H' + v^\alpha \phi^1_\alpha . \end{aligned} \tag{2.37}$$

2.2.6. Constricciones de primera y segunda clase.

Para el algoritmo, no hay diferencia alguna entre las constricciones primarias o secundarias; son indistintas. Sin embargo, el procedimiento exige clasificar las constricciones de acuerdo a su comportamiento con las demás. Para ello se definen los siguientes conceptos.

Definición 2.6. *Sean F(q,p) y G(q,p) dos funciones en el espacio fase. Se dice que estas funciones son* ***débilmente iguales entre sí*** *si $F - G = c^\mu(q,p)\phi_\mu$. Es decir, son iguales en la subvariedad definida por las constricciones $\phi_\mu \approx 0$. Se denota como $F \approx G$. Por otro lado, si la igualdad no solo se restringe a la subvariedad, si no que es válida en todo el espacio fase, entonces ambas funciones son* ***fuertemente iguales entre sí*** *y se denota esto como $F = G$.*

Definición 2.7. *Sea $F(q,p)$ una función definida en el espacio fase. F es una función de* ***primera clase*** *si*

$$\{F, \phi_\mu\} \approx 0 \tag{2.38}$$

es decir, el paréntesis de Poisson con todas las constricciones halladas es nulo sobre la subvariedad definida por las constricciones. En otro caso, si existe alguna en la que el paréntesis sea diferente de cero se dice que la función F es de ***segunda clase****.*

El siguiente teorema será útil en la próxima sección.

Teorema 2.2.3. *El hamiltoniano $H' = H_0 + U^\nu \phi^1_\nu$ es una función de primera clase.*

Demostración. Basta probar que $\{\phi_\mu, H'\} \approx 0$. A partir de las relaciones de consistencia se tiene que:

$$
\begin{aligned}
0 &\approx \{\phi_\mu, H_0\} + u^\nu\{\phi_\mu, \phi^1_\nu\} \\
&= \{\phi_\mu, H_0\} + U^\nu\{\phi_\mu, \phi^1_\nu\} + v^\alpha V^\nu_\alpha\{\phi_\mu, \phi^1_\nu\} \\
&\approx \{\phi_\mu, H_0\} + U^\nu\{\phi_\mu, \phi^1_\nu\} \\
&= \{\phi_\mu, H_0\} + \{\phi_\mu, U^\nu\phi^1_\nu\} - \{\phi_\mu, U^\nu\}\phi^1_\nu \\
&\approx \{\phi_\mu, H_0\} + \{\phi_\mu, U^\nu\phi^1_\nu\} \\
&= \{\phi_\mu, H'\}.
\end{aligned}
$$

□

Considerando a las constricciones como funciones en el espacio fase y usando la definición anterior, es posible hacer una clasificación entre ellas. Una constricción será de primera clase si su paréntesis de Poisson con ella misma y el resto de constricciones es débilmente cero; estas se denotan como γ_a. En cambio, a aquellas cuyo paréntesis es no nulo al menos con una de las costricciones son llamadas constricciones de segunda clase y se denotan como χ_α. Algunas veces esta separación no es inmediata, es necesario que se cumplan otras condiciones al hacer esta separación.[7]

Considere la matríz P cuyos elementos son de la forma

$$P_{ij} = \{\phi_i, \phi_j\}, \tag{2.39}$$

y a continuación el siguiente teorema.

Teorema 2.2.4. *Si $\det(P_{rs}) \approx 0$, entonces existe al menos una constricción de primera clase entre las ϕ_s's halladas en el algoritmo.*[8]

2.2.7. Transformaciones de norma

El estado de un sistema físico está determinado por los valores iniciales de las variables del espacio fase q's y p's. Para sistemas clásicos regulares una vez que se han dado las

[7] En base a la matriz P_{ij} es posible separar las constricciones que se han hallado y verificar si son independientes o son una combinación lineal del resto de constricciones. Para más detalles sobre este algoritmo, véase [8]

[8] La prueba de este teorema se halla en [8].

condiciones iniciales de un sistema en un tiempo inicial t_0, es posible determinar en un tiempo posterior t_1 cuáles son los valores de las coordenadas y momentos del sistema de estudio. Esto no es posible en sistemas singulares debido a la presencia de los coeficientes u's y v's (específicamente) presentes en las ecuaciones de Hamilton. Estos coeficientes son multiplicadores de Lagrange y están asociados a ambigüedades inherentes al sistema. Es decir, una vez que se ha elegido el marco de referencia inercial y las coordenadas que describirán al sistema, el estado físico del sistema no determina de manera única los valores de las coordenadas y momentos, pero el caso inverso es cierto; si se conocen los valores de las coordenadas y los momentos del sistema físico, se puede determinar el estado del sistema. Existen múltiples valores de las variables canónicas que corresponden al mismo estado físico y una relación entre estas coordenadas equivalentes entre sí de modo que el sistema físico de estudio no sufre cambio cuando se hace un cambio de coordenadas.

De manera burda en el párrafo anterior se ha usado el concepto de simetría. Se dice que en un sistema físico hay una **simetría** si existen regiones en el espacio fase que describen el mismo estado físico. De manera analítica, las simetrías se observan cuando las ecuaciones de movimiento, la Lagrangiana o la Hamiltoniana son invariantes bajo un cambio de coordenadas, es decir, tienen la misma estructura o las ecuaciones llevan a otro sistema equivalente (transformaciones de punto en el caso lagrangiano o transformaciones canónicas en el caso hamiltoniano, ambos para sistemas que son regulares).

Para sistemas singulares en los que se hallaron sus constricciones y se han separado en aquellas que son de primera y segunda clase es posible encontrar estas transformaciones que conecten regiones equivalentes en el espacio fase.

Considere una variable dinámica $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ en un tiempo t_1 y luego en otro instante $t_2 = t_1 + \bar{\delta} t$. La evolución temporal para esta variable es:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \dot{F} \\ &= \frac{F(t_1 + \bar{\delta} t) - F(t_1)}{\bar{\delta} t}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} F(t_1 + \bar{\delta} t) &= F(t_1) + \dot{F} \bar{\delta} t \\ &= F(t_1) + \{F, H_p\} \bar{\delta} t \\ &= F(t_1) + [\{F, H_0\} + u^\mu \{F, \phi^1_\mu\}] \bar{\delta} t \\ &= F(t_1) + [\{F, H_0\} + (U^\mu + v^a V^\mu_a)\{F, \phi^1_\mu\}] \bar{\delta} t. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Así, considerando otro coeficiente arbitrario v'^a tenemos $F'(t_1 + \bar{\delta} t) = F(t_1) + [\{F, H_0\} +$

$(U^\mu + v'^a V_a^\mu)\{F, \phi_\mu^1\}]\bar{\delta}t$, y tomando la diferencia de ambas expresiones:

$$\begin{aligned}
\delta F(t_1 + \bar{\delta}t) &= F(t_1 + \bar{\delta}t) - F'(t_1 + \bar{\delta}t) \\
&= F(t_1) + [\{F, H_0\} + (U^\mu + v^a)\{F, \phi_a\}]\bar{\delta}t \\
&- \left[F(t_1) + [\{F, H_0\} + (U^\mu + v'^a)\{F, \phi_a\}]\bar{\delta}t\right] \\
&= \bar{\delta}t\, v^a\{F, \phi_a\} - \bar{\delta}t\, v'^a\{F, \phi_a\} \\
&= \bar{\delta}t(v^a - v'^a)\{F, \phi_a\} \\
&= \epsilon^a\{F, \phi_a\}. \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

donde se ha usado que $\epsilon^a = \bar{\delta}t(v^a - v'^a)$. El desarrollo previo ha sido para observar cómo es que las arbitrariedades presentes en las ecuaciones dadas por los coeficientes v^a's llevan a estados equivalentes donde el sistema físico no se ve alterado de forma alguna. En resumen, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.8. *Sea F(**q**,**p**) una variable dinámica y $\epsilon^a\phi_a$ una combinación lineal de las constricciones de primera clase halladas en el algoritmo. A la expresión*

$$\delta F := \epsilon^a\{F, \phi_a\} \qquad (2.43)$$

*se le llama **transformación de norma** de la variable dinámica F y es tal que no modifica el estado físico del sistema.*

En general, las transformaciones (2.43) no son las únicas que no alteran el estado físico del sistema. En efecto, los paréntesis de Poisson de dos constricciones de primera clase también son generadoras de norma, así como la función H'. Se prueban los siguientes teoremas para ello.

Teorema 2.2.5. *El paréntesis de Poisson $\{\phi_a^1, \phi_{a'}^1\}$ de dos constricciones primarias de primera clase genera una transformación de norma.*

Demostración. Sea $g(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ una variable dinámica. Aplicando una transformación de norma a esta variable con una función generadora $\epsilon^a\phi_a^1$ y luego con la función $\gamma^{a'}\phi_{a'}^1$:

$$\begin{aligned}
g' &= g + \delta_\epsilon + \delta_\gamma \\
&= g + \epsilon^a\{g, \phi_a^1\} + \gamma^{a'}\{g + \epsilon^a\{g, \phi_a^1\}, \phi_{a'}^1\}
\end{aligned}$$

Aplicando nuevamente estas transformaciones en orden inverso.

$$\begin{aligned}
g'' &= g + \delta_\gamma + \delta_\epsilon \\
&= g + \gamma^{a'}\{g, \phi_{a'}^1\} + \epsilon^a\{g + \gamma^{a'}\{g, \phi_{a'}^1\}, \phi_a^1\}.
\end{aligned}$$

Tomando la diferencia entre ambas expresiones:

$$\begin{aligned}
\Delta g &= g'' - g' \\
&= g + \gamma^{a'}\{g, \phi_{a'}^1\} + \epsilon^a\{g + \gamma^{a'}\{g, \phi_{a'}^1\}, \phi_a^1\} \\
&- g + \epsilon^a\{g, \phi_a^1\} + \gamma^{a'}\{g + \epsilon^a\{g, \phi_a^1\}, \phi_{a'}^1\} \\
&= \epsilon^a\gamma^{a'}\left[\{\{g, \phi_{a'}^1\}, \phi_a^1\} - \{\{g, \phi_a^1\}, \phi_{a'}^1\}\right] \\
&= -\epsilon^a\gamma^{a'}\{\{\phi_a^1, \phi_{a'}^1\}, g\} \\
&= \epsilon^a\gamma^{a'}\{g, \{\phi_a^1, \phi_{a'}^1\}\}.
\end{aligned}$$

De esta manera, Δg es una transformación de norma generada por el paréntesis de Poisson $\{\phi_a^1, \phi_{a'}^1\}$. $\square$

Teorema 2.2.6. *El paréntesis de Poisson $\{\phi_a^1, H'\}$ de cualquier constricción primaria con el Hamiltoniano de primera clase H' genera una transformación de norma.*[9]

Demostración. Sea $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ una variable dinámica. Considere la siguiente combinación.

$$\begin{aligned}
\{\delta_\epsilon F, H_0 + U^\nu \phi_\nu^1\} - \delta_\epsilon\{F, H_0 + U^\nu \phi_\nu^1\} &= \{\epsilon^a\{F, \phi_a^1\}, H_0 + U^\nu \phi_\nu^1\} - \epsilon^a\{\{F, H_0 + U^\nu \phi_\nu^1\}, \phi_a^1\} \\
&= \epsilon^a \left[\{\{F, \phi_a^1\}, H_0 + U^\nu \phi_\nu^1\} + \{\{H_0 + U^\nu \phi_\nu^1, F\}, \phi_a^1\}\right] \\
&= -\epsilon^a\{\{\phi_a^1, H_0 + U^\nu \phi_\nu^1\}, F\} \\
&= \epsilon^a\{F, \{\phi_a^1, H_0 + U^\nu \phi_\nu^1\}\} \\
&= \epsilon^a\{F, \{\phi_a^1, H'\}\}
\end{aligned}$$

Entonces la combinación $\{\delta_\epsilon F, H_0 + U^\nu \phi_\nu^1\} - \delta_\epsilon\{F, H_0 + U^\nu \phi_\nu^1\} = \Delta F$ es una transformación de norma generada por $\{\phi_a^1, H'\}$.

$\square$

En el teorema 2.2.5 se ha mostrado que el paréntesis de Poisson de dos constricciones de primera clase también genera una transformación de norma. Ya se ha visto que esta expresión también es una función de primera clase, por lo que no hay motivos para pensar que $\{\phi_a, \phi_b\}$ este formado sólo por una combinación lineal de constricciones primarias de primera clase; es posible que algunas constricciones de primera clase de generaciones superiores también entren en esa combinación lineal. Esta propuesta fue hecha por Dirac en el libro *Lectures on Quantum Mechanics*, sin embargo en ese momento no pudo probar esta afirmación por lo que el enunciado sólo quedó como una conjetura. A lo largo de estos años se han propuesto contraejemplos en los que se afirma que aún cumpliendose las condiciones de la *Conjetura de Dirac* no es posible hallar transformaciones de norma a partir de constricciones secundarias de primera clase. Para ser precisos, como conjetura de Dirac se entenderá lo siguiente:

La conjetura de Dirac establece que los generadores de las simetrías locales de una acción están dadas por el conjunto completo de constricciones de primera clase.[10]

En la siguiente sección se discute bajo qué condiciones la conjetura es válida.

2.2.8. El Algoritmo de Castellani para hallar transformaciones de norma

En secciones anteriores se había discutido el algoritmo de Dirac para sistemas con Lagrangianas singulares. De acuerdo a [5], una vez halladas las constricciones primarias se

[9] La prueba original de este teorema se encuentra en [7].
[10] Enunciado tomado de [9, capítulo 6].

construye el Hamiltoniano canónico y a partir de este, el Hamiltoniano primario. Para hallar las constricciones secundarias del sistema (si es que existen), a las constricciones primarias se les hace evolucionar en el tiempo con el Hamiltoniano primario y se separan en aquellas que son de primera y segunda clase. Con ello, se obtienen las transformaciones de norma de la Lagrangiana. Sin embargo, el método usado en [6] y [3] para obtener generadores de norma no requiere obtener el Hamiltoniano primario ni el Hamiltoniano total.

Una vez halladas todas las constricciones, se selecciona a aquellas que sean de primera clase y se construye el generador de transformaciones de norma

$$G = \sum_{i=0}^{k} \epsilon^{(i)}(t) G_i, \tag{2.44}$$

donde $\epsilon^{(i)}$ es la i-ésima derivada temporal de un factor arbitrario $\epsilon(t)$ y k indica el nivel de las constricciones halladas. Por ejemplo, $k = 3$ para una sistema con constricciones terciarias. Para cada una de las G_i se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} G_i &= constriccion\, primaria, \\ G_{i-1} + \{G_i, H_0\} &= constriccion\, primaria, \\ &\vdots \\ G_1 + \{G_2, H_0\} &= constriccion\, primaria, \\ G_0 + \{G_1, H_0\} &= constriccion\, primaria, \\ \{G_0, H_0\} &= constriccion\, primaria. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Es decir, cada una de las G_i es igual a una combinación lineal de las constricciones primarias halladas en el proceso; G_{i-1} se deduce a partir de G_i de acuerdo a (2.45).

Para este algoritmo, cuando se calcula cada G_i, es necesario comenzar por aquel que contenga una combinación lineal de constricciones de primera clase (G_k) y usar las ecuaciones (2.45) hasta llegar a G_0. De acuerdo a Castellani [3] a partir de las ecuaciones (2.45), la función generadora (2.44) contiene todas las constricciones de primera clase, excepto aquellas que resultan como χ^n (una constricción secundaria elevada a una potencia, con $1 < n$); el algoritmo se detiene si es que se ha obtenido un χ^n, es decir, $\{H_0, G_l\} = \chi^n$ para algún l. Esto significa que la constricción $\chi = 0$ no está incluida en (2.44). Así, la conjetura de Dirac para todas las constricciones de primera clase generadras de simetrías puede ser reemplazada por el siguiente teorema:

Teorema 2.2.7. *Todas las constricciones primarias, excepto aquellas que surgen como χ^n y como consecuencia de $\{\chi, H\} \approx 0$, son parte de generadores de norma $G = \sum_{i=0}^{k} \epsilon^i(t) G_i$; donde G_k es una constricción primaria de primera clase y los G_i con $i < k$ son constricciones secundarias de primera clase.*

En la siguiente sección se ilustra un ejemplo de una Lagrangiana singular con una sola constricción primaria. Se usa el algoritmo de Castellani para hallar las transformaciones de norma encontradas y se verifica sustituyendo en la variación de la Lagrangiana.

2.3. Ejemplo

Considere la Lagrangiana[11]

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \dot{x}y + \frac{1}{2}(x-y)^2. \tag{2.46}$$

Los momentos asociados son:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + y \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0, \end{aligned} \tag{2.47}$$

por lo que el sistema es singular. El Hamiltoniano canónico para este sistema es:

$$\begin{aligned} H_0 &= p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L \\ &= \frac{p_x^2}{2} - p_x y + p_y\dot{y} - \frac{x^2}{2} + xy. \end{aligned} \tag{2.48}$$

La única constricción primaria que hay es $\phi^1 = p_y$[12]; y debe satisfacer la condición de consistencia.

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^1 &= \{p_y, H_0\} \\ &= p_x - x \\ &= \phi^2. \end{aligned} \tag{2.49}$$

$\phi^2 = p_x - x$ representa una constricción secundaria. También es necesario que ϕ^2 se preserve constante en el tiempo, así:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2 &= \{p_x - x, H_0\} \\ &= -(p_x - x) \\ &= -\phi^2. \end{aligned} \tag{2.50}$$

[11] El desarrolo del enfoque Lagrangiano para este ejemplo (que se muestra en el siguiente capítulo) fue tomado de [9], Capítulo 2, ec. (2.3). La parte que corresponde al enfoque Hamiltoniano fue desarrollado en esta tesis.

[12]Cuando solo exista una constricción primaria en el sistema de estudio, se omite el subíndice. El superíndice indica de que tipo de constricción se trata.

Como la derivada temporal de ϕ^2 es $-\phi^2$, aquí finaliza la busqueda de constricciones para esta Lagrangiana. Nótese que ambas constricciones halladas son de primera clase, pues

$$\begin{aligned}\{\phi^1,\phi^2\} &= \{p_y, p_x - x\}\\ &= 0.\end{aligned}$$

El generador de transformaciones de norma para un modelo con dos constricciones es:

$$G = \dot{\epsilon}G_1 + \epsilon G_0 \ ,$$

donde G_1 y G_0 se determinan a patir de las ecuaciones (2.45) como sigue:

$$\begin{gathered} G_1 = \phi^1, \\ G_0 = -\{G_1, H_0\} + \alpha\phi^1 = -\phi^2 + \alpha\phi^1, \\ \{G_0, H_0\} = PFC^{13}. \end{gathered}$$

G_1 y $G_0 + \{G_1, H_0\}$ deben ser cada una una combinación lineal de constricciones primarias. El valor del coeficiente α se puede obtener exigiendo que $\{G_0, H_0\}$ sea una combinación lineal de constricciones primarias de primera clase.

$$\begin{aligned}\{G_0, H_0\} &= -\{\phi^2, H_0\} + \alpha\{\phi^1, H_0\}\\ &= \phi^2 + \alpha\phi^2\\ &= (1+\alpha)\phi^2.\end{aligned}$$

Para este caso, $\{G_0, H_0\}$ debe ser nulo porque esta última expresión sólo contiene a la constricción secundaria y ninguna primaria. Despejando, el valor de α es

$$\alpha = -1.$$

El generador en términos de las constricciones es:

$$G = \dot{\epsilon}\phi^1 - \epsilon(\phi^2 + \phi^1), \tag{2.53}$$

y las transformaciones de norma son:

$$\delta x = \{G, x\} = \epsilon, \tag{2.54a}$$

$$\delta y = \{G, y\} = \epsilon - \dot{\epsilon}. \tag{2.54b}$$

Puede verificarse que las ecuaciones (2.54a) y (2.54b) obtenidas corresponden a transformaciones de norma de la Lagrangiana (2.46). En efecto, si se realiza una variación directa

[13] Del inglés *primary first class constraint*. En la literatura, con esta nomenclatura se refiere a las constricciones primarias de primera clase y así se hará en el resto de esta tesis.

$$\begin{aligned}
\delta L &= \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y} \\
&= (x-y)\epsilon - (\dot{x} - x + y)(\epsilon - \dot{\epsilon}) + (\dot{x} + y)\dot{\epsilon} \\
&= \dot{x}\epsilon + x\dot{\epsilon} \\
&= \frac{d}{dt}(x\epsilon). \qquad (2.55)
\end{aligned}$$

Si a la Lagrangiana (2.46) se le agrega el término $\frac{d}{dt}(x\epsilon)$, se define una nueva Lagrangiana $L' = L + \frac{d}{dt}(x\epsilon)$ y al obtener sus ecuaciones de movimiento de esta Lagrangiana, se observa que se obtienen las mismas que en la Lagrangiana (2.46). En este sentido, se dice que ambas Lagrangianas son equivalentes, porque llevan a las mismas ecuaciones de movimiento. En el siguiente capítulo se discute cómo obtener las transformaciones de norma sin usar el método de Dirac.

Capítulo 3

El formalismo Lagrangiano para sistemas singulares

3.1. Introducción

Las simetrías de un sistema físico juegan un papel fundamental en la construcción de una teoría para su completa descripción. Si este sistema está descrito por una Lagrangiana, entonces esta Lagrangiana debe reflejar tales simetrías. Sin embargo, no todas las simetrías de una Lagrangiana pueden ser expresadas en los estados físicos del sistema. Las teorías de norma caen dentro de esta clasificación de sistemas con constricciones cuya dinámica parte de una Lagrangiana singular. Estas teorías son de particular interés, debido a que todas las interacciones fundamentales (electromagnética, interacción débil, interacción fuerte y gravitacional) se estudian como teorías de norma.

Al igual que en el enfoque Hamiltoniano, a nivel Lagrangiano existe un algoritmo para encontrar las simetrías de norma de una Lagrangiana. Esto es, se generan directamente las transformaciones en el espacio de configuración en términos de un conjunto independiente de funciones que parametrizan las transformaciones de simetría. Cada uno de estos parámetros está asociado a las *identidades de norma*, y su número coincide con el número de identidades de norma independientes. En este capítulo[1] se describe el algoritmo usado para hallar las simetrías locales de una Lagrangiana cuya matríz Hessiana no es invertible.

3.2. Algoritmo para encontrar simetrías locales en el enfoque lagrangiano

Considerese una variación infinitesimal en las coordenadas y velocidades:

[1]El desarrollo que se expone fue tomado de [9], Cap. 2.

$$\begin{aligned} q^i(t) &\longrightarrow q^i(t) + \delta q^i(t), \\ \dot{q}^i(t) &\longrightarrow \dot{q}^i(t) + \frac{d}{dt}\delta q^i(t), \end{aligned}$$

donde $i = 1, \ldots, n$ y se ha hecho uso de la propiedad $\delta \dot{q}^i(t) = \frac{d}{dt}\delta q^i(t)$. Esta transformación es una simetría local de las ecuaciones de Euler-Lagrange de movimiento si la acción (2.1) es invariante bajo esta transformación. Este es el caso si la variación de la Lagrangiana es una derivada total, es decir, $\delta L = \frac{d}{dt}\delta F$, con δF igual a cero en el límite superior y en el límite inferior de integración. Note que en el cálculo de la variación no se hace uso de las ecuaciones de movimiento.

Sea $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ una Lagrangiana. Bajo las transformaciones infinitesimales arriba expuestas el cambio en la acción está dado por:

$$\delta S = -\int_{t_1}^{t_2} dt E_i^{(0)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) \delta q^i, \tag{3.1}$$

donde $E_i^{(0)}$ es la derivada de Euler

$$E_i^{(0)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}, \tag{3.2}$$

donde consideramos $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$. En efecto, se tiene que en el espacio de trayectorias físicas[2]:

$$E_i^{(0)} = 0 \quad i = 1, \ldots, n \ \ (on\ shell). \tag{3.3}$$

El objetivo es determinar las variaciones δq^i para los cuales δS se hace cero idénticamente.

$$\int_{t_1}^{t_2} dt E_i^{(0)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) \delta q^i \equiv 0. \tag{3.4}$$

En general, $E_i^{(0)}$ es de la forma

$$E_i^{(0)} = W_{ij}^{(0)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \ddot{q}^j + K_i^{(0)}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}). \tag{3.5}$$

Donde $W_{ij}^{(0)}$ son elementos de la matriz Hessiana. Se observa que la expresión (3.5) tiene la misma estructura que la ecuación (2.4). A lo largo del desarrollo de este capítulo a los vectores $\vec{E}$, $\vec{K}$ y las matrices W tienen un superíndice que denota el nivel en el que se trabaja; en este caso la ecuación (3.5) hace referencia a un "nivel cero".

[2] En física, particularmente en la teoría cuántica de campos (*del inglés Quantum Field Theory, QFT*), las configuraciones de un sistema físico que satisfacen las ecuaciones de movimiento son llamadas *on shell.*

Como se ha visto, para Lagrangianas singulares no es posible obtener todas las aceleraciones a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Si ρ es el rango de la matriz W, existen $n-\rho$ constricciones, las cuales en el enfoque Lagrangiano se presentan como relaciones entre las coordenadas q^i y las velocidades $\dot{q}^i$. Así para una matriz Hessiana W de tamaño $n \times n$, existen $n-\rho$ eigenvectores nulos independientes izquierdos (o derechos), los cuales satisfacen

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^{(0;k)}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) W_{ij}^{(0)}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = 0; \qquad k = 1,\ldots,n-\rho.$$

Se sigue entonces que las funciones definidas por

$$\begin{aligned}
\Phi^{(0;k)} &:= \sum_{i=1}^{n} w_i^{(0;k)}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) E_i^{(0)}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i^{(0;k)}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \left(W_{ij}^{(0)}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}^j + K_i^{(0)}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i^{(0;k)}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) K_i^{(0)}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),
\end{aligned}$$

sólo dependen de las coordenadas y las velocidades, y se anulan *on shell*. Estas son conocidas en la literatura como constricciones de generación cero. No necesariamente todas las $\Phi^{(0;k)}$ son linealmente independientes. En este caso puede hallarse una combinación lineal de eigenvectores nulos, $v_i^{(0;n_0)} = \Sigma_k c_k^{n_0} w_i^{(0;k)}$ tales que, se tiene idénticamente

$$G^{(0;n_0)} := \vec{v}^{(0;n_0)} \cdot \vec{E}^{(0)} \equiv 0 \;\; ; \;\; n_0 = 1,\ldots,N_0. \tag{3.6}$$

A estas relaciones se les llama *identidades de norma*. Usaremos N_0 para denotar el número de identidades de norma que se obtienen en este nivel. Estas identidades de norma también son idénticamente cero sobre la superficie de constricciones. Una consecuencia es que cualquier variación de la forma $\delta q_i = \sum_{n_0} \epsilon_{n_0}(t) v_i^{(0;n_0)}$ dejará invariante a la acción. Los restantes modos nulos de la "generación cero", los cuales se denotan por $\vec{u}^{(0;\bar{n}_0)}$, dan paso a las genuinas constricciones que dependen sólo de las coordenadas y velocidades, siendo cero sobre la superficie de constricciones,

$$\phi^{(0;\bar{n}_0)} = 0 \quad (on\ shell),$$

donde

$$\phi^{(0;\bar{n}_0)} \equiv \vec{u}^{(0;\bar{u}_0)} \cdot \vec{E}^{(0)} \;\;,\;\; \bar{n}_0 = 1,...,\bar{N}_0. \tag{3.7}$$

Aquí $\bar{N}_0$ es el número de constricciones halladas en el nivel cero. En este formalismo, una vez halladas las identidades de norma $G^{(0;n_0)}$, se separan de las constricciones no triviales $\phi^{(0;\bar{n}_0)}$ y se agrupan en una lista, debido a que después se ocuparán para determinar las transformaciones locales de simetría. Para hallar posibles constricciones adicionales se buscan funciones de las posiciones y las velocidades que se anulen en el subespacio de trayectorias físicas; considere el vector construido a partir de $\vec{E}^{(0)}$ y la derivada temporal de las constricciones (3.7):

$$\left(E^{(1)}_{i_1}\right) := \begin{pmatrix} \vec{E}^{(0)} \\ \frac{d}{dt}\left(\vec{u}^{(0;1)} \cdot \vec{E}^{(0)}\right) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\left(\vec{u}^{(0;\bar{N}_0)} \cdot \vec{E}^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}^{(0)} \\ \frac{d}{dt}\vec{\phi}^{(0)} \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

donde $\vec{\phi}^{(0)}$ es un vector columna de tamaño $\bar{N}_0$ con componentes $\phi^{(0;\bar{n}_0)}$, ($\bar{n}_0 = 1, ..., \bar{N}_0$, $i_1 = 1, ..., n, n+1, ..., n+\bar{N}_0$). Debido a que las constricciones $\vec{\phi}^{(0;\bar{n}_0)} = 0$, se sigue que $\vec{E}^{(1)} = 0$ sobre toda la superficie de constricciones.

Debido a que las constricciones son sólo funciones de $\boldsymbol{q}$ y $\dot{\boldsymbol{q}}$, las componentes del vector $\vec{E}^{(1)}$ pueden ser escritas de la siguiente manera,

$$E^{(1)}_{i_1} = \sum_{j=1}^{n} W^{(1)}_{i_1 j}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}^j + K_{i_1}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \tag{3.9}$$

donde la matriz $W^{(1)}$ es ahora la matriz Hessiana de "primer nivel" de tamaño $(n+\bar{N}_0)\times n$.

$$\left(W^{(1)}_{i_1 i}\right) := \begin{pmatrix} W^{(0)} \\ \vec{\nabla}_{\dot{q}}\left(\vec{u}^{(0;1)} \cdot \vec{E}^{(0)}\right) \\ \vdots \\ \vec{\nabla}_{\dot{q}}\left(\vec{u}^{(0;\bar{N}_0)} \cdot \vec{E}^{(0)}\right) \end{pmatrix},$$

donde $\vec{\nabla}_{\dot{q}}$ es un vector columna con componentes enumeradas por i $(i = 1, ..., n)$. El vector $\vec{K}^{(1)}$ está dado por

$$\left(K^{(1)}_{i_1}\right) := \begin{pmatrix} \vec{K}^{(0)} \\ \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\vec{u}^{(0;1)} \cdot \vec{E}^{(0)}\right)\dot{q}_j \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\vec{u}^{(0;\bar{N}_0)} \cdot \vec{E}^{(0)}\right)\dot{q}_j \end{pmatrix},$$

se entiende que hay una suma sobre el subíndice j.

Nuevamente se buscan los vectores nulos para esta matriz, donde surgen aquellos que aparecieron en el nivel anterior, con un número de ceros aumentados. Con los restantes vectores nulos (si es que hay) al multiplicarse con $\vec{E}^{(1)}$ hay dos opciones; una es que dan a expresiones en el "primer nivel" las cuales se escriben como una combinación lineal de las constricciones previas, y dan lugar a nuevas identidades de norma en el “primer nivel”,

$$G^{(1;n_1)} := \vec{v}^{(1;n_1)} \cdot \vec{E}^{(1)} - \sum_{n_0=0}^{N_0} M^{(1,0)}_{n_1,n_0} \left(\vec{u}^{(0;n_0)} \cdot \vec{E}^{(0)} \right) \equiv 0 \;\; ; \;\; n_1 = 1, ..., N_1, \tag{3.10}$$

donde las funciones $M^{(1,0)}_{n_1,n_0}$ son funciones de $\boldsymbol{q}$ y $\dot{\boldsymbol{q}}$. La otra opción es que representen nuevas constricciones en el “primer nivel”:

$$\phi^{(1;n_1)} := \vec{u}^{(1;n_1)} \cdot \vec{E}^{(1)} = 0 \;\; ; \;\; n_1 = 1, ..., \bar{N}_1 \quad (on\, shell). \tag{3.11}$$

Las nuevas identidades de norma (3.10) se adjuntan a las previas. Con las nuevas constricciones (3.11) se procede como antes, uniendo sus derivadas temporales a (3.8) y formando a $W^{(2)}_{i_2 i}$ y $K^{(2)}_{i_2}$. Este proceso termina a algún nivel M si:

- No hay nuevos vectores nulos
- Las constricciones generadas son combinación lineal de las obtenidas en niveles anteriores

Ahora se busca el máximo conjunto de identidades de norma linealmente independientes generadas por el algoritmo. A cada nivel l, los elementos de este conjunto son de la forma

$$\begin{aligned} G^{(0;n_0)} \;\; &:= \;\; \vec{v}^{(0;n_0)} \cdot \vec{E}^{(0)} \equiv 0 \, , \\ G^{(l;n_l)} \;\; &:= \;\; \vec{v}^{(l;n_1)} \cdot \vec{E}^{(l)} - \sum_{l'=0}^{l-1} \sum_{\bar{n}_{l'}=0}^{\bar{N}_{l'}} M^{(l,l')}_{n_l,\bar{n}_{l'}} \phi^{(l';\bar{n}_{l'})} \equiv 0 \, , \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $n_l = 1, \ldots, N_l$, y $M^{(l,l')}_{n_l,n'_l}$ son funciones sólo de $\boldsymbol{q}$ y $\dot{\boldsymbol{q}}$ y

$$\phi^{(l;\bar{n}_l)} = \vec{u}^{(l;\bar{n}_l)} \cdot \vec{E}^{(l)} \quad ; \;\; (\bar{n}_l = 1, ..., \bar{N}_l) \tag{3.13}$$

son constricciones independientes (que dependen sólo de $\boldsymbol{q}$ y $\dot{\boldsymbol{q}}$) generadas por el algoritmo a nivel l. Por otra parte, $\vec{E}^{(l)}$ está dado por:

$$\vec{E}^{(l)} := \begin{pmatrix} \vec{E}^{(0)} \\ \frac{d}{dt}\vec{\phi}^{(0)} \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\vec{\phi}^{(l-1)} \end{pmatrix} \, , \tag{3.14}$$

donde $\vec{\phi}^{(l')}$ es un vector columna con $\bar{N}_l$ componentes $\phi^{(l;\bar{n}_l)}$. Debido a las expresiones (3.13) y (3.14), cada una de las constricciones $\phi^{(l;\bar{n}_l)}$ se expresa iterativamente en términos de $\phi^{(0,\bar{n}_0)} = \vec{u}^{(0,\bar{n}_0)} \cdot \vec{E}^{(0)}$ y de sus derivadas temporales. Se verifica que estas constricciones son de la forma

$$\phi^{(l;\bar{n}_l)} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{m=0}^{l} \eta_{im}^{(l;\bar{n}_l)} \frac{d^m}{dt^m} E_i^{(0)} = 0\,.$$

De esta expresión para las constricciones y el vector (3.14), se concluye que las identidades (3.12) se expresan de manera general como

$$G^{(l;n_l)} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{m=0}^{l} \rho_{im}^{(l;n_l)} \frac{d^m}{dt^m} E_i^{(0)} = 0\,,$$

donde $\rho_{im}^{(l;n_l)}$ son funciones de las coordenadas y las velocidades. Al multiplicar a cada una de las identidades de norma por un factor arbitrario $\epsilon^{(l;n_l)}(t)$ y sumarlas miembro a miembro se debe obtener lo siguiente:

$$\sum_{l=0}^{M} \sum_{n_l=1}^{N_l} \epsilon^{(l;n_l)}(t) G^{(l;n_l)} \equiv 0,$$

donde $\epsilon^{(l;n_l)}(t)$ son funciones arbitrarias del tiempo. Estas identidades pueden ser escritas de la forma:

$$\sum_{i} \delta q^i E_i^{(0)} - \frac{d}{dt} F \equiv 0\,, \tag{3.15}$$

donde

$$\delta q^i = \sum_{l=0}^{M} \sum_{n_l=1}^{N_l} \sum_{m=0}^{l} (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \left(\rho_{im}^{(l;n_l)} \epsilon^{(l;n_l)}(t) \right)\,, \tag{3.16}$$

y F depende de $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$ como una función lineal de estos parámetros y sus derivadas hasta en un orden $M-1$, donde $l = M$ es el orden de la derivada. Nótese que las funciones arbitrarias $\epsilon^{(l;n_l)}(t)$ están etiquetadas por l y n_l. El número de funciones independientes es igual al número de identidades de norma generadas por el algoritmo. Entonces juntando los índices l y n_l en uno solo llamado a, la ecuación (3.16) queda como:

$$\delta q^i = \sum_{m,a} (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \left(\rho_{im}^{(a)} \epsilon^{(a)}(t) \right)\,. \tag{3.17}$$

Ahora, integrando a la ecuación (3.15) con respecto del tiempo desde t_1 a t_2 y usando el hecho de que la derivada total no contribuye si el factor $\epsilon^{(l;n_l)}(t)$ y sus derivadas se anulan en t_1 y t_2, se concluye que la variación (3.16) es una simetría de la acción y por consiguiente de las ecuaciones de movimiento. Debe notarse que un término de la forma

$$\Delta q^i = \sum_{j} a_{ij} E_j^{(0)},$$

con un tensor antisimétrico a_{ij} siempre puede agregarse a (3.17) y seguirá siendo una transformación de simetría debido a que $\vec{E}_i^{(0)}\Delta q^i \equiv 0$. Estas transformaciones que se anulan *on shell* se llaman transformaciones de norma triviales y no tienen relevancia física.

En lo siguiente se considera un ejemplo el cual ilustra los métodos iterativos para encontrar las identidades de norma.

3.3. Ejemplo

Considerese nuevamente la Lagrangiana (2.46). Sean $x_1 = x$ y $x_2 = y$, es decir $L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1 x_2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2$, así

$$E_i^{(0)} = \sum_j W_{ij}^{(0)}\ddot{x}_j + K_i^{(0)},$$

donde

$$W^{(0)} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\vec{K}^{(0)} = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 + x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 - \dot{x}_1 \end{pmatrix}.$$

Se procede a buscar los vectores nulos de la matríz $W^{(0)}$ de la siguiente manera. Se propone un vector columna (a, b) que cumpla la condición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Sólo existe un vector nulo linealmente independiente $\vec{u}^{(0)} = (0, 1)$ en el nivel cero. Su producto punto con el vector $\vec{E}^{(0)}$ no se anula idénticamente, por lo que genera una constricción:

$$\phi^{(0;1)} \equiv \vec{u}^{(0;1)} \cdot \vec{E}^{(0)} = x_1 - x_2 - \dot{x}_1 = 0 \quad (on\, shell). \tag{3.19}$$

A este nivel no se tienen identidades de norma. Se procede a construir el vector $\vec{E}^{(1)}$:

$$\vec{E}^{(1)} = \begin{pmatrix} \vec{E}^{(0)} \\ \frac{d}{dt}\left(\vec{u}^{(0;1)} \cdot \vec{E}^{(0)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}^{(0)} \\ \frac{d}{dt}E_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 + x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \ddot{x}_1 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

$\vec{E}^{(1)}$ puede llevarse a la forma

$$E_{i_1}^{(1)} = \sum_j W_{i_1 j}^{(1)}\ddot{x}_j + K_{i_1}^{(1)},$$

donde la matríz $W^{(1)}$ de tamaño 3×2 es:

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} W^{(0)} \\ \vec{\nabla}_{\dot{x}} \left(\vec{u}^{(0;1)} \cdot \vec{E}^{(0)} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\vec{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} \vec{K}^{(0)} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\vec{u}^{(0;1)} \cdot \vec{E}^{(0)} \right) \dot{x}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 + x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Se requiere hallar los vectores nulos para la matríz $W^{(1)}$. Se propone un vector (a_1, b_1, c_1) tal que:

$$(a_1, b_1, c_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0).$$

Esta vez, cualquier vector nulo se escribe como:

$$(a_1, b_1, c_1) = (a_1, 0, a_1) + (0, b_1, 0) = a_1(1, 0, 1) + b_1(0, 1, 0)\,.$$

Los vectores nulos para $W^{(1)}$ están dados por $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$. El segundo vector nulo es el que se obtuvo en el nivel anterior, sólo con un cero en la tercera entrada; reproduce la constricción $\phi^{(0;1)}$. El otro vector nulo reproduce al negativo de la constricción (3.19),

$$\vec{u}^{(1,1)} \cdot \vec{E}^{(1)} \equiv -\vec{u}^{(0;1)} \cdot \vec{E}^{(0)} \;,$$

donde $\vec{u}^{(1,1)} = (1, 0, 1)$. Este resultado permite construir una identidad de norma a primer nivel;

$$G^{(1)} = \vec{u}^{(1,1)} \cdot \vec{E}^{(1)} - (-\vec{u}^{(0;1)} \cdot \vec{E}^{(0)}) \equiv 0\,.$$

Por otro lado, de la ecuación (3.20)

$$\vec{u}^{(1,1)} \cdot \vec{E}^{(1)} = E_1^{(0)} + \frac{d}{dt} E_2^{(0)} \;,$$

entonces

$$\begin{aligned} G^{(1)} &= \vec{u}^{(1,1)} \cdot \vec{E}^{(1)} - (-\vec{u}^{(0;1)} \cdot \vec{E}^{(0)}) \\ &= E_1^{(0)} + \frac{d}{dt} E_2^{(0)} + E_2^{(0)} \\ &\equiv 0\,. \end{aligned}$$

Multiplicando esta expresión por una función arbitraria dependiente del tiempo $\epsilon(t)$,

$$
\begin{aligned}
\epsilon\left[E_1^{(0)}+\frac{d}{dt}E_2^{(0)}+E_2^{(0)}\right] &= \epsilon E_1^{(0)}+\epsilon\frac{d}{dt}E_2^{(0)}+\epsilon E_2^{(0)}+0\\
&= \epsilon E_1^{(0)}+\epsilon\frac{d}{dt}E_2^{(0)}+\epsilon E_2^{(0)}-\dot{\epsilon}E_2^{(0)}+\dot{\epsilon}E_2^{(0)}\\
&= \epsilon E_1^{(0)}+(\epsilon-\dot{\epsilon})E_2^{(0)}+\frac{d}{dt}\left(\epsilon E_2^{(0)}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Esta expresión ya tiene la forma

$$\sum_j E_i^{(0)}\delta x_i - \frac{dF}{dt} = 0.$$

Comparando, se tiene lo siguiente:

$$\delta x_1 = \delta x = \epsilon, \tag{3.21a}$$

$$\delta x_2 = \delta y = \epsilon - \dot{\epsilon}. \tag{3.21b}$$

Esta variación deja invariante a la acción si $\epsilon(t_i) = 0 \;\; (i = 1, 2)$. Nótese que las transformaciones (3.21a) y (3.21b) son las mismas que en (2.54a) y (2.54b). Sin embargo, al estudiar una Lagrangiana singular por el algoritmo Lagrangiano o Hamiltoniano no siempre se hallarán las mismas transformaciones. Esto se verá en los siguientes capítulos.

Capítulo 4

Ejemplos; enfoque Hamiltoniano

En el capítulo 2 se ha expuesto la teoría para hallar las transformaciones de norma por medio del enfoque Hamiltoniano. Es importante aclarar que no usaremos toda la herramienta teórica expuesta, sino que nos conformaremos con usar el desarrollo presentado en la sección (2.2.8) pues este es suficiente para mostrar que los contraejemplos propuestos en [11] no lo son. Como se verá, las constricciones halladas para cada uno de los ejemplos cumplen la conjetura de Dirac y dan origen a funciones generadoras para encontrar las transformaciones de norma de dicho sistema. El siguiente trabajo se expone en el artículo [6] y parte del desarrollo de esta tesis ha sido verificar la validez de las transformaciones obtenidas para cada uno de estos ejemplos.

4.1. Primer ejemplo

Considere la siguiente Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\left(e^{2u(y)}\dot{x}^2 + e^{-2v(-y)}\dot{z}^2\right), \tag{4.1}$$

donde $u(y)$ y $v(-y)$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} u''(y) &= u'(y) + 2\left[u'(y)\right]^2, \\ -v''(-y) &= v'(-y) + 2\left[v'(-y)\right]^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por inspección, se observa que $\dot{y}$ no se encuentra en (4.1), por lo que la Lagrangiana asociada a este sistema es singular.

Los momentos son:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{2u(y)}\dot{x}, \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0, \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = e^{-2v(-y)}\dot{z}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Se procede ahora a construir el hamiltoniano canónico

$$H_0 = p_y\dot{y} + \frac{1}{2}p_x^2 e^{-2u(y)} + \frac{1}{2}p_z^2 e^{2v(-y)}. \tag{4.4}$$

La única constricción primaria presente es $\phi^1 = p_y$. Su evolución temporal está dada por:

$$\dot{\phi}^1 = \{p_y, H_0\} = p_x^2 e^{-2u(y)}u'(y) + p_z^2 e^{2v(-y)}v'(-y) = \phi^2, \tag{4.5}$$

por lo que tenemos una constricción secundaria ϕ^2. La evolución temporal de ϕ^2 no da lugar a más constricciones, pues

$$\dot{\phi}^2 = \{\phi^2, H_0\} = \dot{y}\left(p_x^2 e^{-2u(y)}u'(y) + p_z^2 e^{2v(-y)}v'(-y)\right) = \dot{y}\phi^2. \tag{4.6}$$

Por un cálculo directo, se puede ver que las dos constricciones halladas $\{\phi^1, \phi^2\}$ son de primera clase. De acuerdo a las ecuaciones (2.45), el generador para un sistema con dos restricciones, una primaria y una secundaria, ambas de primera clase es:

$$G = \dot{\epsilon}G_1 + \epsilon G_0. \tag{4.7}$$

donde

$$\begin{aligned} G_1 &= \phi^1 = p_y, \\ G_0 &= -\{G_1, H_0\} + \alpha p_y = -\phi^2 + \alpha\phi^1. \\ \{G_0, H_0\} &= \alpha\phi^2 - \dot{y}\phi^2 = PFC. \end{aligned} \tag{4.8}$$

El valor del parámetro α es determinado al exigir que $\{G_0, H_0\}$ sea una combinación lineal de constricciones primarias de primera clase, en este caso, que sea múltiplo de ϕ^1

$$\alpha\phi^2 - \dot{y}\phi^2 = 0. \tag{4.9}$$

Entonces $\alpha = \dot{y}$. El generador en términos de las constricciones es

$$G = \dot{\epsilon}\phi^1 + \epsilon(-\phi^2 + \dot{y}\phi^1), \tag{4.10}$$

y las transformaciones de norma son:

$$\begin{aligned} \delta x &= \{G, x\} = \epsilon 2\dot{x}u'(y), \\ \delta y &= \{G, y\} = -\dot{\epsilon} - \epsilon\dot{y}, \\ \delta z &= \{G, z\} = \epsilon 2\dot{z}v'(-y). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Usando las transformaciones (4.11), se puede ver que la variación de la Lagrangiana asociada es

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(e^{2u(y)}u'(y)\dot{x}^2\epsilon + e^{-2v(-y)}v'(-y)\dot{z}^2\epsilon\right). \tag{4.12}$$

Cabe resaltar que las transformaciones obtenidas en [11] para este ejemplo por el enfoque Hamiltoniano están dadas por:

$$\begin{aligned} \delta x &= -2\dot{\epsilon}_0(t)\,\overbrace{e^{-2u(y)}p_x}^{\dot{x}}\,u'(y), \\ \delta y &= \epsilon_0(t), \\ \delta z &= -2\dot{\epsilon}_0(t)\,\underbrace{e^{2v(-y)}p_z}_{\dot{z}}\,v'(-y). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Considerando las definiciones para los momentos $p_x = e^{2u(y)}\dot{x}$ y $p_z = e^{-2v(-y)}\dot{z}$, las transformaciones (4.11) y (4.13) coinciden para x y z pero no para la variable y. Con las transformaciones (4.11), la variación de la Lagrangiana (4.1) es igual a la derivada total respecto al tiempo de una función; cosa que no ocurre con las transformaciones (4.13) debido a esta diferencia en δy. De esta manera, las transformaciones obtenidas para la Lagrangiana (4.1) en [11] no son válidas.

4.2. Segundo ejemplo

Considere la siguiente Lagrangiana:

$$L = \dot{x}\dot{z} + xz - y\dot{z}. \tag{4.14}$$

Los momentos para esta Lagrangiana son:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{z}, \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0, \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{x} - \dot{y}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Como $p_y = 0$, la Lagrangiana para este caso es singular. Se procede ahora a construir el Hamiltoniano canónico

$$\begin{aligned} H_0 &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - \dot{x}\dot{z} - xz - y\dot{z} \\ &= p_y\dot{y} + p_zp_x + p_xy - xz. \end{aligned} \tag{4.16}$$

La única constricción primaria presente es $\phi^1 = p_y$. Su evolución temporal se obtiene como:

$$\dot{\phi}^1 = \{p_y, H_0\} = -p_x = \phi^2, \tag{4.17}$$

donde ϕ^2 es una constricción secundaria. La evolución temporal de ϕ^2 da lugar a una constricción terciaria

$$\dot{\phi}^2 = \{-p_x, H_0\} = -z = \phi^3. \tag{4.18}$$

Ya no podemos hallar mas constricciones pues

$$\dot{\phi}^3 = \{-z, H_0\} = -p_x = \phi^2. \tag{4.19}$$

Es fácil ver que las tres constricciones halladas $\{\phi^1$,ϕ^2,$\phi^3\}$ son de primera clase. Con base en las ecuaciones (2.45), estas tres constricciones permiten construir una función generadora de norma de la forma:

$$G = \ddot{\epsilon} G_2 + \dot{\epsilon} G_1 + \epsilon G_0, \tag{4.20}$$

donde

$$\begin{aligned}
G_2 &= \phi^1, \\
G_1 &= -\{G_2, H_0\} + \alpha\phi^1 = -\phi^2 + \alpha\phi^1, \\
G_0 &= -\{G_1, H_0\} + \beta\phi^1 = \phi^3 - \alpha\phi^2 + \beta\phi^1. \\
\{G_0, H_0\} &= \phi^2 - \alpha\phi^3 + \beta\phi^2 = PFC.
\end{aligned}$$

Con estas condiciones, los valores de los parámetros α y β son determinados.

$$\phi^2 - \alpha\phi^3 + \beta\phi^2 = 0.$$

Entonces $\alpha = 0$ y $\beta = -1$.

El generador en términos de las constricciones es

$$G = \ddot{\epsilon}\phi^1 + \dot{\epsilon}(-\phi^2) + \epsilon(\phi^3 - \phi^1), \tag{4.21}$$

y las transformaciones de norma son:

$$\begin{aligned}
\delta x &= \{G, x\} = -\dot{\epsilon}, \\
\delta y &= \{G, y\} = -\ddot{\epsilon} + \epsilon, \\
\delta z &= 0.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Usando estas transformaciones de norma, la variación de la Lagrangiana asociada es

$$\delta L = -\frac{d}{dt}(\epsilon z). \tag{4.23}$$

Las transformaciones de norma de acuerdo a [11] para esta Lagrangiana desde el enfoque Hamiltoniano son:

$$\begin{aligned}
\delta x &= \dot{\epsilon}_0(t), \\
\delta y &= \epsilon_0(t), \\
\delta z &= 0,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

que no pueden ser llevadas a la forma de las transformaciones (4.22); es más, las transformaciones (4.24) no conducen a que la variación de la Lagrangiana sea la derivada total con respecto al tiempo de una función. De esto se concluye que las ecuaciones (4.24) no son válidas como transformaciones de norma. En este caso a diferencia del anterior, no fue necesario una conversión de coordenadas.

4.3. Tercer ejemplo

Considere la siguiente Lagrangiana[1]

$$L = \frac{1}{2} e^y \dot{x}^2. \tag{4.25}$$

La Lagrangiana (4.25) es singular debido a que el momento asociado a y es nulo como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^y \dot{x}, \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Se procede ahora a construir el hamiltoniano canónico

$$H_0 = p_y \dot{y} + \frac{1}{2} p_x^2 e^{-y}. \tag{4.27}$$

La única constricción primaria presente es $\phi^1 = p_y$. Su evolución temporal debe ser:

$$\dot{\phi}^1 = \{p_y, H_0\} = \frac{1}{2} p_x^2 e^{-y} = \phi^2, \tag{4.28}$$

donde ϕ^2 es una constricción secundaria. Su evolución temporal no da lugar a más constricciones;

$$\dot{\phi}^2 = \{\phi^2, H_0\} = -\dot{y} \frac{1}{2} p_x^2 e^{-y} = -\dot{y}\phi^2. \tag{4.29}$$

Las dos constricciones halladas $\{\phi^1,\phi^2\}$ son de primera clase. Usando las condiciones de las ecuaciones (2.45), el generador para un sistema con dos restricciones, una primaria y una secundaria, ambas de primera clase es:

$$G = \dot{\epsilon} G_1 + \epsilon G_0, \tag{4.30}$$

donde

$$\begin{aligned} G_1 &= p_y = \phi^1, \\ G_0 &= -\{G_1, H_0\} + \alpha p_y = -\phi^2 + \alpha\phi^1, \\ \{G_0, H_0\} &= \alpha\phi^2 + \dot{y}\phi^2 = PFC, \end{aligned}$$

[1]Este ejemplo viene de [5], pág. 19.

y el valor del parámetro α está dado por

$$\alpha\phi^2 + \dot{y}\phi^2 = 0.$$

Entonces $\alpha = -\dot{y}$.

El generador en términos de las constricciones es

$$G = \dot{\epsilon}\phi^1 + \epsilon(-\phi^2 - \dot{y}\phi^1), \tag{4.31}$$

y las transformaciones de norma son:

$$\begin{aligned} \delta x &= \{G, x\} = \epsilon\dot{x}, \\ \delta y &= \{G, y\} = -\dot{\epsilon} + \epsilon\dot{y}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Usando estas transformaciones de norma, la variación de la Lagrangiana asociada es:

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\epsilon e^y \dot{x}^2\right) \tag{4.33}$$

De acuerdo a [5], en la Lagrangiana (4.25) se obtienen las constricciones $\phi = p_y$ y $\dot{\phi} = p_x$; ambas constricciones son de primera clase, sin embargo, sólo la primera genera una transformación de norma. La segunda genera cambios en x, pero estos no corresponden a alguna arbitrariedad en la solución general de las ecuaciones de movimiento de (4.25), así en dicha referencia se dice que la propiedad conjeturada por Dirac no es válida. No obstante, en el desarrollo de este sistema que se obtuvo en [6] (y que se comprobó aquí), para el cual se hallaron dos constricciones de primera clase, es posible obtener transformaciones de norma derivadas de estas constricciones y por tanto, se cumple la conjetura de Dirac. Es importante resaltar el hecho de que las constricciones que se proponen en [5] fueron dadas respetando las condiciones de regularidad exigidas en el método de Dirac, caso contrario en el método de Castellani en el que no son necesarias. Así se hizo este ejemplo en [6] y se ha verificado su procedimiento en este trabajo. Para el desarrollo de este ejemplo en el enfoque Lagrangiano, se verifica este resultado pues se obtienen las mismas transformaciones de norma.

Capítulo 5

Ejemplos; enfoque Lagrangiano

De manera similar al desarrollo del ejemplo expuesto en el capítulo 3, aquí se presenta el trabajo realizado para hallar las transformaciones de norma de los contraejemplos propuestos en [11] usando el enfoque Lagrangiano, las cuales difieren con las halladas en dicha referencia.

5.1. Primer ejemplo

Considere nuevamente las ecuaciones (4.1) y (4.2). Es decir:

$$L = \frac{1}{2}\left(e^{2u(y)}\dot{x}^2 + e^{-2v(-y)}\dot{z}^2\right),$$

donde $u(y)$ y $v(-y)$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} u''(y) &= u'(y) + 2\left[u'(y)\right]^2, \\ -v''(-y) &= v'(-y) + 2\left[v'(-y)\right]^2. \end{aligned}$$

El vector $\vec{E}^{(0)}$ y la matríz $W^{(0)}$ son:

$$E_i^{(0)} = \sum_j W_{ij}^{(0)} \ddot{x}_j + K_i^{(0)} \tag{5.1}$$

donde

$$W^{(0)} = \begin{pmatrix} e^{2u(y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2v(-y)} \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

y

$$\vec{K}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2e^{2u(y)}u'(y)\dot{y}\dot{x} \\ -e^{2u(y)}u'(y)\dot{x}^2 - e^{-2v(-y)}v'(-y)\dot{z}^2 \\ 2e^{-2v(-y)}v'(-y)\dot{y}\dot{z} \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

El vector nulo asociado a $W^{(0)}$ es $\vec{u}^{(0)} = (0,1,0)$ y genera una constricción:

$$\phi^{(0;1)} = \vec{u}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(0)} = -e^{2u(y)}u'(y)\dot{x}^2 - e^{-2v(-y)}v'(-y)\dot{z}^2 \tag{5.4}$$

A este nivel sólo hay una constricción y no hay identidades de norma. Se construye el vector $\vec{E}^{(1)}$.

$$\vec{E}^{(1)} = \begin{pmatrix} \vec{E}^{(0)} \\ \frac{d}{dt}\left(\vec{u}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(0)}\right) \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

$\vec{E}^{(1)}$ puede escribirse explícitamente como

$$E_i^{(1)} = \sum_j W_{ij}^{(1)}\ddot{x}_j + K_i^{(1)}. \tag{5.6}$$

La matriz $W^{(1)}$ asociada a este nivel es

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} e^{2u(y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2v(-y)} \\ -2e^{2u(y)}u'(y)\dot{x} & 0 & -2e^{-2v(-y)}v'(-y)\dot{z} \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

y

$$\vec{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2e^{2u(y)}u'(y)\dot{y}\dot{x} \\ -e^{2u(y)}u'(y)\dot{x}^2 - e^{-2v(-y)}v'(-y)\dot{z}^2 \\ 2e^{-2v(-y)}v'(-y)\dot{y}\dot{z} \\ \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\vec{u}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(0)}\right)\dot{q}_j \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

El vector nulo para $W^{(1)}$ es $\vec{u}^{(1)} = (2u'(y)\dot{x},\, 0,\, 2v'(-y)\dot{z},\, 1)$ y genera la siguiente constricción:

$$\phi^{(1;1)} = \vec{u}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(1)} = -e^{2u(y)}u'(y)\dot{x}^2\dot{y} - e^{-2v(-y)}v'(-y)\dot{z}^2\dot{y}. \tag{5.9}$$

Se tiene a partir de esto una identidad de norma:

$$G^{(1)} = \vec{u}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(0)} - \dot{y}\left(\vec{u}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(1)}\right). \tag{5.10}$$

Construyendo el vector $\vec{E}^{(2)}$

$$\vec{E}^{(2)} = \begin{pmatrix} \vec{E}^{(0)} \\ \frac{d}{dt}\left(\vec{u}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(0)}\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\vec{u}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(1)}\right) \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

y la matríz $W^{(2)}$

$$W^{(2)} = \begin{pmatrix} e^{2u(y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2v(-y)} \\ -2e^{2u(y)}u'(y)\dot{x} & 0 & -2e^{-2v(-y)}v'(-y)\dot{z} \\ 2u'(y)e^{2u(y)}\dot{y}\dot{x} & u'(y)e^{2u(y)}\dot{x}^2 + v'(-y)e^{-2v(-y)}\dot{z}^2 & 2v'(-y)e^{-2v(-y)}\dot{y}\dot{z} \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Se observa que el vector nulo para $W^{(2)}$ es $\vec{u}^{(2)} = (2u'(y)\dot{x},\, 0,\, 2v'(-y)\dot{z},\, 1,\, 0)$ con lo cual aquí finaliza el algoritmo para este sistema.

La identidad de norma descrita en componentes de los vectores $\vec{E}'$s toma la siguiente forma:

$$2\dot{x}u'(y)E_1^{(0)} + 2\dot{z}v'(-y)E_3^{(0)} + \frac{d}{dt}E_2^{(0)} - \dot{y}E_2^{(0)} = 0. \quad (5.13)$$

Multiplicando esta expresión por un factor arbitrario que depende del tiempo $\epsilon(t)$ se obtiene

$$2\epsilon\dot{x}u'(y)E_1^{(0)} - (\dot{\epsilon} + \epsilon\dot{y})E_2^{(0)} + 2\epsilon\dot{z}v'(-y)E_3^{(0)} + \frac{d}{dt}(\epsilon E_2^{(0)}) = 0. \quad (5.14)$$

Las transformaciones de norma halladas son:

$$\begin{aligned} \delta x &= \epsilon 2\dot{x}u'(y), \\ \delta y &= -\dot{\epsilon} - \epsilon\dot{y}, \\ \delta z &= \epsilon 2\dot{z}v'(-y), \end{aligned} \quad (5.15)$$

las cuales son las mismas transformaciones (4.11) halladas por el enfoque Hamiltoniano. El argumento dado en [11] para este ejemplo es que las transformaciones que se hallaron por ambos métodos no son iguales y por ello la conjetura de Dirac no es válida. Al igual que las transformaciones (4.13), las transformaciones halladas en [11] para este ejemplo por el enfoque Lagrangiano:

$$\begin{aligned} \delta x &= 2\dot{x}u'(y)\omega(t), \\ \delta y &= \dot{\omega}(t), \\ \delta z &= 2\dot{z}v'(-y)\omega(t), \end{aligned} \quad (5.16)$$

(donde ω denota a una función infinitesimal arbitraria que depende del tiempo) no corresponden a una simetría del sistema, debido a que al hallar la variación de la Lagrangiana con las ecuaciones (5.16) no se obtiene la derivada total del tiempo de una función. Mientras que las transformaciones (5.15) dan respaldo a lo que se halló en las transformaciones por el método Hamiltoniano para este ejemplo.

5.2. Segundo ejemplo

Considere la Lagrangiana (4.14), es decir

$$L = \dot{x}\dot{z} + xz - y\dot{z}. \tag{5.17}$$

Siguiendo el algoritmo expuesto en el capítulo 2, el vector $\vec{E}^{(0)}$ y la matríz $W^{(0)}$ son:

$$\vec{E}^{(0)} = \begin{pmatrix} \ddot{z} - z \\ \dot{z} \\ \ddot{x} - \dot{y} - x \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

$$W^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El vector nulo para la matríz $W^{(0)}$ es $\vec{u}^{(0)} = (0, 1, 0)$ que genera una constricción;

$$\phi^{(0;1)} = \vec{u}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(0)} = \dot{z} = E_2^{(0)}. \tag{5.19}$$

Como no hay más constricciones a nivel cero, se procede a construir el vector $\vec{E}^{(1)}$ y la matríz $W^{(1)}$.

$$\vec{E}^{(1)} = \begin{pmatrix} \ddot{z} - z \\ \dot{z} \\ \ddot{x} - \dot{y} - x \\ \ddot{z} \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para esta matríz, se obtiene un vector nulo diferente de los anteriores

$$\vec{u}^{(1)} = (-1, 0, 0, 1).$$

La constricción hallada con este vector nulo es:

$$\phi^{(1;1)} = \vec{u}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(1)} = -\ddot{z} + z + \ddot{z} = z. \tag{5.21}$$

Ahora se procede en el análisis con $\vec{E}^{(2)}$ y $W^{(2)}$;

$$\vec{E}^{(2)} = \begin{pmatrix} \ddot{z} - z \\ \dot{z} \\ \ddot{x} - \dot{y} - x \\ \ddot{z} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \tag{5.22}$$

$$W^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El único vector nulo es $\vec{u}^{(2)} = (0, 0, 0, 0, 1)$ pero observe que:

$$\vec{u}^{(2)} \cdot \vec{E}^{(2)} = \dot{z} = \phi^{(0;1)},$$

por lo que hasta aquí finaliza la búsqueda de vectores nulos. Con las constricciones halladas se construyen las identidades de norma. La única presente en el algoritmo es:

$$G^{(1)} := \vec{u}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(1)} - m\left(\vec{u}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(0)}\right). \tag{5.23}$$

La identidad de norma es una combinación lineal de las constricciones halladas tal que es igual a cero. Para satisfacer esta igualdad es necesario que $m = \frac{z}{\dot{z}}$. De esta manera

$$G^{(1)} = -E_1^{(0)} + \frac{d}{dt}E_2^{(0)} - \frac{z}{\dot{z}}E_2^{(0)}, \tag{5.24}$$

y al multiplicar esta expresión por un factor arbitrario ϵ que depende del tiempo, tenemos:

$$-\epsilon E_1^{(0)} - (\epsilon\frac{z}{\dot{z}} + \dot{\epsilon})E_2^{(0)} + \frac{d}{dt}(\epsilon E_2^{(0)}) = 0. \tag{5.25}$$

De aquí, se obtienen las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} \delta x &= \epsilon, \\ \delta y &= \epsilon\frac{z}{\dot{z}} + \dot{\epsilon}, \\ \delta z &= 0. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Nótese que las transformaciones (5.26) no son iguales a las obtenidas por el método Hamiltonino dadas en (4.22). No obstante, al usar las transformaciones (5.26) y sustituirlas en la variación de la Lagrangiana se tiene el siguiente resultado;

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\delta \dot{z} \\ &= z\epsilon - \dot{z}\left(\epsilon\frac{z}{\dot{z}} + \epsilon\right) + \dot{z}\dot{\epsilon} \\ &= z\epsilon - \dot{z}\epsilon\frac{z}{\dot{z}} - \dot{z}\dot{\epsilon} + \dot{z}\dot{\epsilon} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{5.27}$$

es decir, las transformaciones (5.26) dan lugar a una simetría estricta de la Lagrangiana, por lo que efectivamente son transformaciones de norma para la Lagrangiana (4.14).

Para este caso, las transformaciones halladas en [11] por el método Lagrangiano son:

$$\begin{aligned} \delta x &= \omega(t), \\ \delta y &= 0, \\ \delta z &= 0. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Aquí, ω es una función arbitraria que depende del tiempo. Nuevamente el argumento en [11] para exponer que la Lagrangiana (4.14) no cumple la conjetura de Dirac es que las transformaciones (4.24) y las (5.28) no son iguales; en este caso se ha visto que a pesar de no resultar iguales las transformaciones, ambas son válidas porque dejan invariante a la Lagrangiana (4.14).

5.3. Tercer ejemplo

Considerando nuevamente la ecuación (4.25),

$$L = \frac{1}{2} e^y \dot{x}^2 \tag{5.29}$$

entonces:

$$E_i^{(0)} = \sum_j W_{ij}^{(0)} \ddot{x}_j + K_i^{(0)} \tag{5.30}$$

donde

$$W^{(0)} = \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

y

$$\vec{K}^{(0)} = \begin{pmatrix} e^y \dot{x}\dot{y} \\ -\frac{1}{2} e^y \dot{x}^2 \end{pmatrix}. \tag{5.32}$$

Se busca el vector nulo asociado a $W^{(0)}$ que es $\vec{u}^{(0)} = (0, 1)$ y que genera una constricción:

$$\phi^{(0;1)} = \vec{u}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(0)} = -\frac{1}{2} e^y \dot{x}^2. \tag{5.33}$$

A este nivel sólo hay una constricción y no hay identidades de norma. Se construye el vector $\vec{E}^{(1)}$:

$$\vec{E}^{(1)} = \begin{pmatrix} \vec{E}^{(0)} \\ \frac{d}{dt}\left(\vec{u}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(0)}\right) \end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

$\vec{E}^{(1)}$ puede escribirse explícitamente como

$$E_i^{(1)} = \sum_j W_{ij}^{(1)} \ddot{x}_j + K_i^{(1)} \tag{5.35}$$

La matriz $W^{(1)}$ asociada a este nivel es

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & 0 \\ -e^y \dot{x} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.36}$$

y

$$\vec{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} e^y \dot{x} \dot{y} \\ -\frac{1}{2} e^y \dot{x}^2 \\ -\frac{1}{2} e^y \dot{x}^2 \dot{y} \end{pmatrix}. \tag{5.37}$$

El vector nulo para $W^{(1)}$ es $\vec{u}^{(1)} = (\dot{x}, 0, 1)$ y genera la siguiente constricción:

$$\phi^{(1;1)} = \vec{u}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(1)} = \frac{1}{2} e^y \dot{x}^2 \dot{y}. \tag{5.38}$$

Se tiene a partir de esto una identidad de norma

$$G^{(1)} = \vec{u}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(0)} - M \left(\vec{u}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(1)} \right), \tag{5.39}$$

con $M = -\dot{y}$. Construyendo el vector $\vec{E}^{(2)}$ tenemos

$$\vec{E}^{(2)} = \begin{pmatrix} \vec{E}^{(0)} \\ \frac{d}{dt} \left(\vec{u}^{(0)} \cdot \vec{E}^{(0)} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\vec{u}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(1)} \right) \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

y la matríz $W^{(2)}$

$$W^{(2)} = \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & 0 \\ -e^y \dot{x} & 0 \\ e^y \dot{x} \dot{y} & \frac{1}{2} e^y \dot{x}^2 \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

Se observa que el vector nulo para $W^{(2)}$ es $\vec{u}^{(2)} = (\dot{x},\ 0,\ 1,\ 0)$, pero este vector ya fue hallado en el proceso anterior, con lo cual aquí finaliza el algoritmo para este sistema.

La identidad de norma descrita en componentes de los vectores $\vec{E}$'s toma la siguiente forma:

$$\dot{x} E_1^{(0)} + \frac{d}{dt} E_2^{(0)} + \dot{y} E_2^{(0)} = 0 \tag{5.42}$$

Multiplicando esta expresión por un factor arbitrario que depende del tiempo $\epsilon(t)$, se obtiene

$$\epsilon \dot{x} E_1^{(0)} + (\epsilon \dot{y} - \dot{\epsilon}) E_2^{(0)} + \frac{d}{dt}(\epsilon E_2^{(0)}) = 0. \tag{5.43}$$

Las transformaciones de norma halladas son:

$$\begin{aligned} \delta x &= \epsilon \dot{x}, \\ \delta y &= \epsilon \dot{y} - \dot{\epsilon}, \end{aligned} \tag{5.44}$$

las cuales coinciden con las que se hallaron por el método Hamiltoniano.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se han analizado los contraejemplos propuestos en [11] usando el método Hamiltoniano propuesto en [3] y en [9] para el método Lagrangiano.

En [11] para el ejemplo (1) se concluye que la conjetura de Dirac no se cumple debido a que las transformaciones de norma obtenidas por el enfoque Lagrangiano y Hamiltoniano son diferentes; sin embargo, el desarrollo (que se verificó en este trabajo) para este ejemplo hecho por [6] muestra que, usando el algoritmo de Castellani (capítulo 2, sección 2.2.8 de esta tesis) es posible encontrar una función generadora de norma a partir de todas las constricciones de primera clase. El enfoque Lagrangiano para el ejemplo (1) fue parte del trabajo de esta tesis y en el cual se obtiene que las transformaciones de norma (4.11) y (5.15) son idénticas.

Para el ejemplo (2), las transformaciones de norma halladas por el enfoque Hamiltoniano y Lagrangiano difieren en [11]; por lo tanto, en dicha referencia se concluye de nueva cuenta que la conjetura de Dirac no es válida. El desarrollo del ejemplo (2) realizado en [6] usando el enfoque Hamiltoniano (y verificado en esta tesis) es válido pues con las transformaciones (4.22) se puede hallar que la variación de la Lagrangiana nuevamente corresponde a la derivada total del tiempo de una función. El desarrollo del enfoque Lagrangiano para el ejemplo (2) realizado en este trabajo da como resultado las transformaciones (5.26) que son diferentes a las (4.22); sin embargo se verificó que las variaciones dadas en (5.26) generan una transformación de norma.

Con las Lagrangianas (4.1) y (4.14) se muestra que no es un argumento suficiente mostrar que las transformaciones de norma obtenidas por métodos diferentes no son iguales, y luego concluir que la conjetura de Dirac no es válida. Se debe comprobar si las transformaciones obtenidas dejan invariante a la Lagrangiana en cuestión; ese fue el caso del ejemplo (2) [ec. (4.14)], donde a pesar de que las transformaciones (4.22) y (5.26) no son iguales, ambas dejan invariante a la Lagrangiana (4.14).

En el estudio del ejemplo (3) [ec. (4.25)], desarrollado en [5] se pide que las dos constricciones halladas se cambien por otras equivalentes de modo que las nuevas constricciones cumplan las condiciones de regularidad. Con esta modificación, las transformaciones que se obtienen no dejan invariante a la Lagrangiana (4.25). Sin embargo, si se usan las constricciones originales y el método de Castellani como se propone en [6], se obtiene una transformación de norma. Este desarrollo del enfoque Hamiltoniano fue verificado en esta tesis y nuevamente comprobado por el enfoque Lagrangiano.

Como se ha visto, en estos tres ejemplos la conjetura de Dirac es válida porque con las constricciones de primera clase que se obtienen, es posible construir una función generadora y a partir de esta, obtener transformaciones de norma para cada Lagrangiana asociada, siempre y cuando cumpla las condiciones del teorema de Castellani. De acuerdo al artículo [3], se observa que para seguir el método de Castellani no es un requerimiento que las constricciones halladas cumplan con las condiciones de regularidad como se pide en [5]. Por otro lado, con la teoría analizada en este trabajo se tienen dos enfoques diferentes para obtener las transformaciones de norma de una Lagrangiana y, como se vió, no necesariamente ambos enfoques llevan a una misma transformación de norma.

Bibliografía

[1] Allcock, G. R. *The intrinsic properties of rank and nullity of the Lagrange bracket in the one dimensional calculus of variations*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 279 (1290), 487-545 (1975).

[2] Arnold, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*, (vol 60). Springer Science & Business Media (2013).

[3] Castellani, L. *Symmetries in constrained hamiltonian systems*. Annals of Physics, 143(2):357-371.

[4] Dirac, P. A. M. *Lectures on Quantum Mechanics*, volume 2. Courier Corporation (2001).

[5] Henneaux, M and Teitelboim, C. *Quantization of gauge systems*. Princeton University Press (1994).

[6] Kiriushcheva, N., Komorowski, P., & Kuzmin, S. *Comment on "gauge symmetries and Dirac conjeture"by Wang, Y.-L., Li, Z.-P., & Wang, K. and some other counterexamples to the Dirac conjeture*. arXiv preprint arXiv: 1112.6407 (2011).

[7] Martínez Pascual, E. *Mecánica clásica avanzada*. Notas del curso (2013).

[8] Mondragón López, M. J. *Formalismo canónico de teorías BF en cuatro dimensiones y sistemas parametrizados con un número finito de grados de libertad*. Tesis de maestría, CINVESTAV (2003).

[9] Rothe, H.J., & Rothe, K. D. *Classical and quantum dynamics of constrained Hamiltonian systems*. volume 81. World Scientific (2010).

[10] Torres del Castillo, Gerardo F. *An introduction to Hamiltonian Mechanics.* Birkhäuser (2018).

[11] Wang, Y.-L., Li, Z.-P., & Wang, K. *Gauge symmetries and Dirac conjeture*. International Journal of Theoretical Physics, 48(7):1894 (2009).