



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Pronósticos de la incertidumbre del tiempo de vida y de la fracción de materia oscura inestable a partir de mediciones de distorsiones de corrimiento al rojo

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Javier Juárez Jiménez

Asesorado por

Dra. Ana Aurelia Avilez López

Puebla Pue.
Octubre de 2022



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Pronósticos de la incertidumbre del tiempo de vida y de la fracción de materia oscura inestable a partir de mediciones de distorsiones de corrimiento al rojo

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Javier Juárez Jiménez

Asesorado por

Dra. Ana Aurelia Avilez López

Puebla Pue.
Octubre de 2022

Título: Pronósticos de la incertidumbre del tiempo de vida y de la fracción de materia oscura inestable a partir de mediciones de distorsiones de corrimiento al rojo

Estudiante: JAVIER JUÁREZ JIMÉNEZ

COMITÉ

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Presidente

Dr. Miguel Ángel Cruz Becerra
Secretario

Dr. Justiniano Lorenzo Díaz Cruz
Vocal

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Vocal

Dra. Ana Aurelia Avilez López
Asesor

Agradecimientos

Esta tesis está dedicada a todas y cada una de las personas que hicieron que este trabajo fuera posible. En primer lugar, a los profesores con quienes tuve la fortuna de encontrarme en las aulas y me ayudaron a formarme durante mi camino en la Licenciatura.

Quiero agradecer infinitamente a mi asesora, la Doctora Ana Aurelia Aviléz-López, quien desde hace dos años y medio ha sido mi guía dentro de esta grandiosa área de la física como lo es la cosmología. Gracias por todas las retroalimentaciones, las asesorías, los consejos y la paciencia que me brindó a lo largo de todo este proceso. Gracias, de verdad muchísimas gracias.

A mi novia, Belén, quien siempre estuvo conmigo en los buenos momentos, y sobre todo, en aquellos en donde más la necesité. Gracias por tu apoyo, tus consejos y tu compañía.

A mi familia, comenzando por mis tías, Alejandra, Elena y Angélica; y mi primo Arturo, quienes siempre han estado al pendiente de mí, y me muestran su cariño día con día.

A mi hermano, Daniel, por ser una inspiración para poder salir adelante, tanto en el ámbito profesional como personal, también por su amor incondicional y sus consejos.

A mi padre, Rafael, con quien estaré eternamente agradecido por todo lo que hizo por mí y a quien una gran parte de quién soy, es debido a él. Yo sé que querías ver el momento en que presentara esta tesis, pero estoy completamente seguro que donde quiera que estés, sigues cuidándome y procurando lo mejor para mí. Cada día pienso en ti, y sé que una parte tuya siempre estará conmigo. Muchas gracias, papá.

Finalmente, quiero agradecer a la persona que me ha mantenido firme durante toda mi vida, a mi madre, Rocío. Gracias por estar conmigo cada momento, gracias por nunca dejarme solo, gracias por ser parte de cada momento, bueno y malo, gracias por siempre ver por mi salud, por procurar que desde niño no me faltara lo necesario. Las palabras no son suficientes para describir toda la gratitud y todo el amor que te tengo. Muchas gracias, mamá, eres todo para mí.

Índice general

1. El modelo cosmológico estándar	1
1.1. El principio cosmológico y la métrica de FRW	1
1.2. La materia en el universo como un fluido Perfecto	3
1.3. Corrimiento al Rojo Cosmológico y Medidas de Distancia	4
1.3.1. Distancia comóvil	5
1.3.2. Distancia luminosa	6
1.3.3. Distancia angular diametral	7
1.4. Relatividad General y Ecuaciones de Friedmann	8
1.4.1. Algunas herramientas de cálculo de la Relatividad General	8
1.4.2. Ecuaciones de Friedmann	9
1.4.3. La ecuación de continuidad	11
1.5. El modelo Λ CDM	11
1.5.1. La constante cosmológica y una expansión acelerada	11
1.5.2. El Modelo Cosmológico de Concordancia	12
2. Proceso de formación de estructura a gran escala	17
2.1. Teoría de Perturbaciones Cosmológicas	17
2.2. Observando la estructura a gran escala	25
2.2.1. Descripción estadística de campos cosmológicos	25
2.2.2. Función de correlación de dos puntos	26
2.2.3. Espectro de potencias de las perturbaciones de materia	27
2.2.4. El parámetro σ_8	29
2.3. Distorsiones en el Espacio de Corrimientos al Rojo.	30
2.3.1. Función de correlación void-galaxia en el espacio de redshift	31
2.3.2. El test de Alcock-Paczynski	35
3. Modelo cosmológico con materia oscura inestable	39
3.1. El problema de la Materia Oscura	39
3.1.1. Evidencias observacionales de la materia oscura	39
3.1.2. Características de la materia oscura fría	41
3.1.3. Problemas del modelo de CDM	41
3.2. Proceso de Decaimiento de una partícula (no relativista) a partículas relativistas .	43
3.3. Cosmología de Fondo	45
3.4. Ecuaciones para las Perturbaciones Lineales de DDM	47
3.5. Implicaciones del modelo DDM	48

4. Pronósticos de las incertidumbres de los parámetros del modelo DDM de acuerdo con datos simulados de Euclid.	55
4.1. Método de la Matriz de Fisher	55
4.2. En busca de un modelo DDM fiducial	58
4.3. Estimación de las incertidumbres de α_{ddm} y Γ_{ddm}	58
4.4. Discusión de los resultados	61
Conclusiones	66
Bibliografía	67

Índice de figuras

1.1. Un diagrama de la velocidad de recesión de 1355 galaxias en función de su distancia en Mpc. La ley de Hubble describe bastante bien en promedio el comportamiento de las galaxias. La dispersión se debe a incertidumbres observacionales y velocidades peculiares. Imagen obtenida de [38].	2
1.2. La longitud de onda de la luz proveniente de otras galaxias sufre un corrimiento al rojo como consecuencia de la expansión del universo.	4
1.3. Esquema para definir la distancia angular diametral	7
1.4. Factor de escala a como función del tiempo propio t en Giga-años. Se puede apreciar que al día de hoy ($a = 1$), la edad del universo es de aproximadamente 13,77 Gyr. .	14
1.5. Densidad relativa de la materia, radiación y energía del vacío como función del corrimiento al rojo z	15
1.6. Diferentes medidas de distancia como función del corrimiento al rojo. La razón por la que las distancias se encuentran en unidades de tiempo es porque en unidades naturales, como se ha estado trabajando, distancia y tiempo son equivalentes. . .	16
2.1. El espectro de potencias de materia para el modelo Λ CDM al día de hoy mostrando la cantidad de estructura en el universo a diferentes escalas k . Escalas pequeñas corresponden a distancias grandes y viceversa.	29
2.2. Distorsión de redshift del void y una galaxia en esa región. Se ve el vector de separación \vec{r} en el espacio real (izquierda) entre el centro del void con vector de posición \vec{X} y la galaxia ubicada en \vec{x} , así como el vector de posición \vec{s} en el espacio de redshift (derecha). El cambio en la función de correlación entre ambos espacios se conoce como efecto Kaiser. Imagen obtenida de [24]	33
2.3. Monopolo (azul), cuadrupolo (rojo) y hexadecapolo (verde) de la función de correlación void-galaxia en el espacio de redshift para el mismo conjunto de datos simulados, notándose que únicamente para los primeros dos el efecto káiser es dominante. Figura obtenida de [24].	35
2.4. Distorsiones geométricas de una sobredensidad. Del lado izquierdo se muestra la sobredensidad en el espacio real, mientras que en el lado derecho está en el espacio de redshift, se puede apreciar que la región parece achatada en la dirección de la visual.	37
3.1. Curvas de rotación de la galaxia NGC 6503. Tomando en cuenta únicamente materia bariónica (el gas y el disco de la galaxia), no pueden explicar las velocidades observadas. Sin embargo, al añadir un halo de materia oscura rodeando la galaxia, la aproximación a los datos es mucho mejor. Imagen obtenida de [19].	40
3.2. Imagen en rayos X del Cúmulo de Coma, tomada por el satélite ROSAT.	41

- 3.3. Evolución de las densidades ρ_{psi} y su correspondiente producto ρ_{dr} junto con la entropía en la época en que la partícula ψ decae. Las líneas punteadas indican la evolución de ambas especies en ausencia de decaimiento de ψ . Notar que en la imagen, R es el factor de escala, y R_i es el mismo al día de hoy, el cual tiene el valor de uno. Imagen obtenida de [33]. 45
- 3.4. Densidades relativas de la materia oscura inestable como función del corrimiento al rojo z . Cada panel muestra en la parte superior el valor del inverso del parámetro Γ_{ddm} , cada uno con seis diferentes casos, correspondientes a: $\alpha_{ddm} = 0,05$ (azul), $\alpha_{ddm} = 0,2$ (verde), $\alpha_{ddm} = 0,4$ (rojo), $\alpha_{ddm} = 0,8$ (dorado) y $\alpha_{ddm} = 1$ (café) . . . 49
- 3.5. Densidad relativa del producto de la DDM, radiación oscura, como función del corrimiento al rojo. Cada panel muestra en la parte superior el valor del inverso del parámetro Γ_{ddm} , cada uno con seis diferentes casos, correspondientes a: $\alpha_{ddm} = 0,05$ (azul), $\alpha_{ddm} = 0,2$ (verde), $\alpha_{ddm} = 0,4$ (rojo), $\alpha_{ddm} = 0,8$ (dorado) y $\alpha_{ddm} = 1$ (café) 49
- 3.6. Diferencia relativa entre el factor de escala del modelo Λ CDM y el modificado con materia oscura inestable como función del tiempo propio. Cada panel muestra en la parte superior el valor del inverso del parámetro Γ_{ddm} , cada uno con seis diferentes casos, correspondientes a: $\alpha_{ddm} = 0,05$ (azul), $\alpha_{ddm} = 0,2$ (verde), $\alpha_{ddm} = 0,4$ (rojo), $\alpha_{ddm} = 0,8$ (dorado) y $\alpha_{ddm} = 1$ (café). 51
- 3.7. Diferencia relativa entre la distancia angular diametral del modelo Λ CDM y el modificado con materia oscura inestable como función del corrimiento al rojo. Cada panel muestra en la parte superior el valor del inverso del parámetro Γ_{ddm} , cada uno con seis diferentes casos, correspondientes a: $\alpha_{ddm} = 0,05$ (azul), $\alpha_{ddm} = 0,2$ (verde), $\alpha_{ddm} = 0,4$ (rojo), $\alpha_{ddm} = 0,8$ (dorado) y $\alpha_{ddm} = 1$ (café) 52
- 3.8. Espectro de potencias de materia para diferentes modelos DDM. Cada panel muestra en la parte superior el valor del inverso del parámetro Γ_{ddm} , cada uno con seis diferentes casos, correspondientes a: $\alpha_{ddm} = 0,05$ (azul), $\alpha_{ddm} = 0,2$ (verde), $\alpha_{ddm} = 0,4$ (rojo), $\alpha_{ddm} = 0,8$ (dorado) y $\alpha_{ddm} = 1$ (café). La línea azul punteada corresponde en cada panel al espectro en el modelo Λ CDM 53
- 3.9. Espectro de potencias del fondo cósmico de microondas para diferentes modelos DDM. Cada panel muestra en la parte superior el valor del inverso del parámetro Γ_{ddm} , cada uno con seis diferentes casos, correspondientes a: $\alpha_{ddm} = 0,05$ (azul), $\alpha_{ddm} = 0,2$ (verde), $\alpha_{ddm} = 0,4$ (rojo), $\alpha_{ddm} = 0,8$ (dorado) y $\alpha_{ddm} = 1$ (café). La línea azul punteada corresponde en cada panel al espectro en el modelo Λ CDM . . . 53
- 4.1. Gráfica de $f\sigma_8$ predicha por los modelos Λ CDM y DDM correspondientes a los valores fiduciales de los parámetros establecidos en 4.14a y 4.14b. Adicionalmente se indican los datos obtenidos mediante simulaciones realizadas para la planeación de surveys futuras de la colaboración Euclid [22] (dorado). También se muestran datos reales obtenidos por varios trabajos mediante la medición del multipolos descritos en el capítulo 2 a partir del conjunto de datos BOSS DR12: Hamaus et.al 2020 [24] (azul claro) Gil-Marín et.al 2016 [20] (verde) ,Nadathur et.al 2019 [42] (negro), del conjunto de datos *6-degree Field Galaxy Survey* por Achitouv et. al 2017 [1] (naranja), y del *VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey* por Hawken et. al 2016 [1] (rosa).Es interesante notar la discrepancia entre los valores del modelo fiducial y los datos esperados para Euclid, lo cual puede indicar que RSD observadas en futuras surveys ayudarán a aminorar las tensiones en estimaciones de σ_8 60
- 4.2. El límite superior de la tasa de decaimiento Γ_{ddm} para varios valores fijos de α_{ddm} para diferentes conjuntos de datos. En la imagen, $\Gamma_{18} = \Gamma_{ddm}/10^{-18}s^{-1}$, mientras que f_{ddm} corresponde a la fracción de DDM inestable. Imagen obtenida de [5]. . . 63

Índice de tablas

4.1. Datos en VOIDS identificados en catálogos mock para EUCLID [22] a partir de mediciones del efecto Kaiser ($f\sigma_8$) y el efecto de Alcock-Paczynski (ϵ) para diferentes corrimientos al rojo y sus respectivos errores	59
---	----

Resumen

En este trabajo se estudia un modelo cosmológico en el cual se asume que la componente de materia oscura en el universo está formada por una fracción de materia oscura fría estable y una de materia oscura fría inestable que decae muy lentamente a partículas relativistas. El objetivo es estudiar los efectos que produce la presencia de materia oscura inestable en el proceso de la formación de estructuras a grandes escalas descrito a partir de la teoría de perturbaciones lineales. Particularmente, el estudio se enfoca en describir las distorsiones en el espacio de redshift las cuales se cuantifican a partir de la función de crecimiento asociada a las perturbaciones lineales de velocidad. A partir del método de la matriz de Fisher y de considerar dos modelos con este tipo de materia oscura, cada uno con distintos datos observacionales: el primero de ellos usó datos del efecto Kaiser a partir del factor de crecimiento de las perturbaciones, $f\sigma_8$ y el segundo utilizó mediciones parámetro de Alcock-Paczynski. Se estimaron cotas de los parámetros de la materia oscura inestable para ambos modelos, los cuales son su tiempo de vida τ_{ddm} y la fracción de materia oscura fría que decae, α_{ddm} . Para el primer modelo se obtuvo $\tau_{ddm} > 0,00642 t_H$ y $\alpha_{ddm} < 0,01211$, mientras que para el segundo la cota reportada es $\tau_{ddm} > 545,68 t_H$ y $\alpha_{ddm} = 1$.

Introducción

El paradigma cosmológico actual está dado por el modelo de concordancia, o también llamado modelo Λ CDM, Λ por una constante cosmológica que en este caso juega el papel de energía oscura, permitiendo la expansión acelerada del universo; y CDM por materia oscura fría (o cold dark matter por su nombre en inglés), la cual comprende aproximadamente el 23 por ciento del total de la materia y energía contenidas en éste, y ésta a su vez es solo el 5 por ciento del total de materia no relativista en el universo. Comprender su naturaleza es uno de los más grandes problemas de la cosmología y de la física en general, dando origen al *problema de la materia oscura*. A pesar de eso, se tienen numerosas evidencias observacionales de su existencia, por ejemplo las curvas de rotación de las galaxias espirales, la distorsión de la trayectoria de la luz por medio del efecto de lentes gravitacionales o mediciones de las abundancias de elementos ligeros primordiales en cúmulos de galaxias. Sin embargo, hay otras observaciones, sobre todo a escalas galácticas, en donde el modelo de la CDM falla en predecir las características y la distribución de halos de galaxias de bajo brillo superficial [REF], llevando a los cosmólogos a plantear modelos distintos a éste, como la materia oscura fuertemente autointeractuante (SIDM), la materia oscura tibia (WDM), la materia oscura repulsiva (RDM), entre otros.

En esta tesis se considera un modelo alternativo, llamado el de materia oscura inestable (DDM por decaying dark matter), en el cual esta componente decae a un tipo de partícula relativista no masiva que recibe el nombre de radiación oscura. El tiempo de vida τ_{ddm} de la materia oscura es del orden de magnitud de la edad del universo, el cual es de 13.8 Giga-años (1 Giga-año = 10^9 años). Al asumir la presencia de materia oscura inestable, es posible reproducir las observaciones del fondo cósmico de microondas (CMB) y de la expansión del universo, sin embargo, existen ciertos efectos en la dinámica de las perturbaciones que podrían ser interesantes para resolver algunas tensiones del modelo de concordancia. Por ejemplo, en el contexto del modelo Λ CDM, el valor de la amplitud de las fluctuaciones de materia observada a 8 Mpc, usualmente denotada por σ_8 , inferida a partir de mediciones del espectro angular del fondo de radiación cósmica, es significativamente mayor que el valor estimado a partir de observaciones de estructuras a grandes escalas. Esto motiva a extender el modelo de concordancia y considerar otras posibilidades. En este sentido, se ha mostrado que un modelo con materia oscura inestable mitiga esta tensión [18]. En las últimas dos décadas, numerosos trabajos han estudiado este tipo particular de materia oscura, estimando distintas cotas para su tiempo de vida.

Todo lo anterior motiva a estudiar en este trabajo algunas implicaciones fenomenológicas a partir de la hipótesis de que cierta fracción de la materia oscura decae, por ejemplo, sobre algunas cantidades cosmológicas de fondo como el tiempo de vida del universo, la tasa de expansión de éste

y algunas medidas de distancia de objetos lejanos. A su vez el decaimiento de la materia oscura puede tener efectos sobre el proceso de formación de estructuras a grandes escalas descrito por la teoría de perturbaciones cosmológicas lineales, en particular, en este trabajo interesa estudiar los efectos de esta hipótesis sobre el factor de crecimiento de las perturbaciones de velocidad y la amplitud de las perturbaciones lineales de materia, y con esa información imponer cotas sobre las incertidumbres del tiempo de vida y la fracción al día de hoy de materia oscura inestable a partir de datos observaciones y de simulaciones utilizando la técnica de la matriz de Fisher. Los datos que se utilizan para hacer el análisis de Fisher son de distorsiones en espacio de corrimiento al rojo en estructuras en promedio esféricamente simétricas, específicamente vacíos (o como usualmente se les llama en inglés, VOIDS), las cuales corresponden a regiones con una densidad por debajo de la densidad crítica o total del universo. De igual forma se usaron datos a partir del test de Alcock-Paczynski y el efecto Kaiser.

Capítulo 1

El modelo cosmológico estándar

1.1. El principio cosmológico y la métrica de FRW

El modelo actual del universo observable es aquél en el que a grandes escalas presenta homogeneidad e isotropía. Es homogéneo porque cualquier rincón del Universo luce exactamente igual, e isótropo porque se observan las mismas propiedades sin importar la dirección en la que el observador esté mirando. Esto es a lo que se refiere el Principio Cosmológico, que es una de las principales hipótesis del modelo cosmológico moderno. Hablar de "grandes escalas" puede considerarse ambiguo, por ese motivo, y con el fin de ser específicos, las observaciones indican que el principio cosmológico puede aplicarse a escalas mayores a 200 Mega-pársecs (1 Mega-pársec(Mpc) = 3.26 millones de años luz) [47].

Otra evidencia observacional es que el universo se expande. El primer indicio de este fenómeno se descubrió empíricamente a partir de la ley de Hubble, nombrada en honor al físico estadounidense, Edwin Hubble, quien en 1929, al medir la distancia y los corrimientos al rojo de estrellas cefeidas contenidas en cientos de galaxias, determinó que entre más distancia existía entre dos galaxias, éstas aparentaban alejarse más rápidamente una respecto a la otra, a una velocidad denominada velocidad de recesión. Además, mostró que tal velocidad de recesión es proporcional a la distancia que hay entre éstas, lo que matemáticamente se representa por:

$$v_r = H_0 r, \tag{1.1}$$

donde v_r es la velocidad de recesión, r es la distancia que separa estas galaxias, y H_0 es la constante de Hubble, la cual es la misma para todas las galaxias, sin embargo, su valor exacto aún es desconocido. La constante de Hubble se suele parametrizar como:

$$H_0 = 100h \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}, \tag{1.2}$$

donde h es la constante de Hubble reducida, su valor aproximado es [38]:

$$h \simeq 0,72 \pm 0,08. \tag{1.3}$$

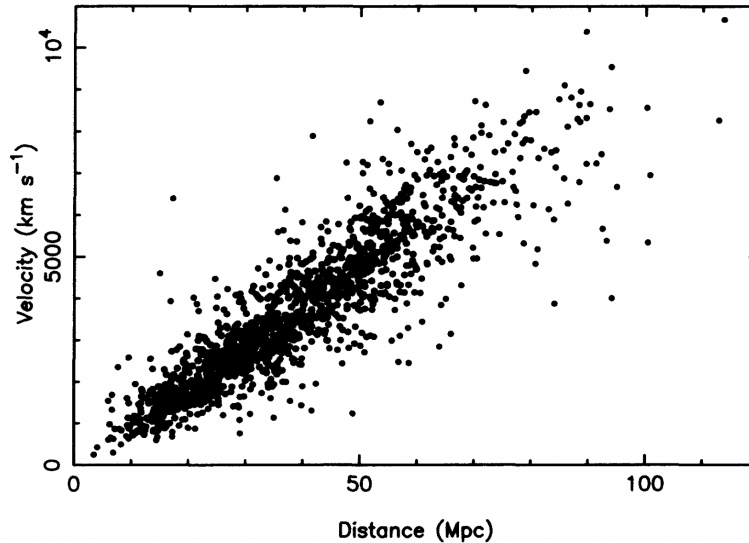


Figura 1.1: Un diagrama de la velocidad de recesión de 1355 galaxias en función de su distancia en Mpc. La ley de Hubble describe bastante bien en promedio el comportamiento de las galaxias. La dispersión se debe a incertidumbres observacionales y velocidades peculiares. Imagen obtenida de [38].

La figura 1.1 muestra lo que se denomina un diagrama de Hubble para una muestra de 1355 galaxias [38]. Gracias a este diagrama se puede apreciar que esta ley no es del todo exacta, debido a incertidumbres observacionales, y sobre todo, a otro tipo de velocidades, denominadas velocidades peculiares. Esto último se explicará con mayor detalle en el Capítulo 2.

Dado que el universo se está expandiendo, existe una medida de esta expansión. Antes de introducirla, puede resultar conveniente un ejemplo ilustrativo, el cual consiste en imaginar un observador en cierta posición en un espacio con curvatura, y los puntos de ese espacio están etiquetados por nodos distribuidos uniformemente (análogamente a las intersecciones de una malla). Al expandirse el universo, la distancia física entre estos nodos está aumentando, sin embargo, dicho observador no es consciente de la expansión y por lo tanto, no nota diferencia alguna en las etiquetas establecidas por los nodos. Las etiquetas de estos nodos reciben el nombre de coordenadas comóviles, y se pueden relacionar con las coordenadas que mide un observador externo que sí está al tanto de la expansión, las cuales reciben el nombre de coordenadas físicas o propias. Tal relación se establece de la siguiente manera:

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}, \tag{1.4}$$

en donde \mathbf{r} representa los puntos en coordenadas físicas o propias, \mathbf{x} representa los mismos puntos en coordenadas comóviles y $a(t)$ es el factor de escala, el cual describe la forma en la que ocurre la expansión del universo a lo largo de su evolución. Es importante recalcar que por el principio cosmológico, $a(t)$ no puede depender de alguna coordenada espacial, esto debido a que el universo se expande de igual manera en todas las direcciones y en todos los puntos.

La geometría de un espacio-tiempo para el cual es válido el principio cosmológico y para el

cual ocurre una expansión caracterizada por el factor de escala $a(t)$ puede describirse por la métrica de Friedmann-Lamaittre-Robertson-Walker (FRW), cuyo elemento de línea en coordenadas cartesianas comóviles, está dado por [34]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{[1 + \frac{1}{4}K(x^2 + y^2 + z^2)]^2}, \quad (1.5)$$

donde K es una constante asociada a la curvatura de la parte espacial del espacio tiempo, la cual debe ser constante en cada punto y dirección de éste. Si esta curvatura es positiva el universo es espacialmente cerrado, si es negativa sería abierto, y si fuera cero se trataría de un universo plano. Ésta geometría aplica al universo en el que se vive, ya que si ese es el caso, el universo sería infinito en extensión, y si esto no ocurriera, se llegaría a un borde que claramente violaría el principio cosmológico. No obstante, esta descripción de un universo infinito es solo un modelo, ya que no se tiene forma de descubrir si efectivamente el universo real continúa por siempre. Por esa razón, los cosmólogos trabajan con un concepto diferente del universo, llamado *universo observable*, que corresponde a la parte del universo que se puede ver, limitada por la velocidad de la luz [38]. Por ese motivo, a partir de este momento, se trabajará con un universo con geometría plana, y entonces, se puede escribir el elemento de línea de FRW de una manera más compacta:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (1.6)$$

siendo δ_{ij} una delta de Kronecker. Es oportuno señalar la repetición de índices covariantes (como un subíndice) y contravariantes (como un superíndice) los cuales denotan una suma implícita. Si la forma general de un elemento de línea es $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, se puede identificar al tensor métrico de FRW como:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

en donde $i, j = 1, 2, 3$ y $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. En este trabajo, cero representa la componente temporal y los demás números a las componentes espaciales. También se usarán letras latinas para denotar solamente índices espaciales, así como letras griegas para componentes tanto temporales como espaciales.

1.2. La materia en el universo como un fluido Perfecto

Para caracterizar la expansión del universo, es necesario conocer la forma específica de $a(t)$, la cual depende de cómo esté distribuida la materia en el Universo y de sus propiedades macroscópicas. En el modelo cosmológico estándar, se asume que esta materia se comporta con un fluido perfecto, el cual está caracterizado en su totalidad por su densidad ρ y su presión p . También se asume como un fluido barotrópico, lo que implica la existencia de una única presión asociada con cada densidad [38], es decir, $p = p(\rho)$. Esa relación se denomina la ecuación de estado, y en el caso más simple

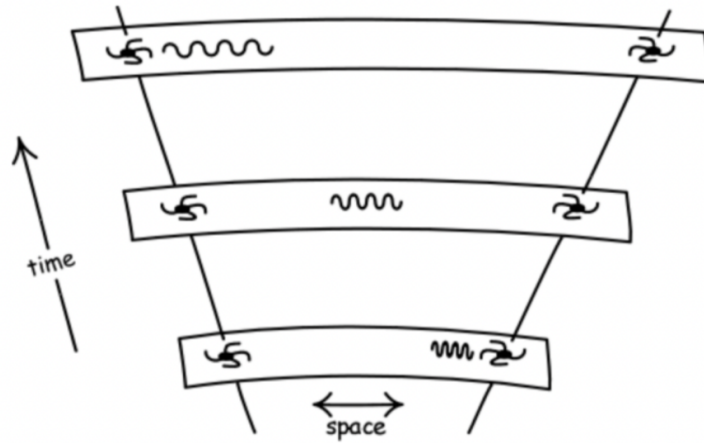


Figura 1.2: La longitud de onda de la luz proveniente de otras galaxias sufre un corrimiento al rojo como consecuencia de la expansión del universo.

está dada por:

$$p(\rho) \equiv \omega \rho, \tag{1.8}$$

aquí, ω es una constante llamada el parámetro de estado, y está determinada por el tipo de especie de partícula que forma al fluido.

1.3. Corrimiento al Rojo Cosmológico y Medidas de Distancia

Otra manera de medir la velocidad de recesión en la ley de Hubble es a partir del corrimiento al rojo gravitacional de la luz debido a la expansión de el universo. Debido a la velocidad de recesión, la longitud de onda de la luz emitida en alguna galaxia lejana la cual es recibida por un observador en la Tierra aumenta, entonces se dice que la longitud de onda sufre un *corrimiento al rojo* o *redshift* como se le dice en inglés. En la figura 1.2 se aprecia gráficamente esto. Para establecer una relación entre el corrimiento al rojo, y el factor de escala, se puede hacer una comparación entre la longitud de onda λ_{em} de la luz que emite una galaxia lejana, y la que detecta un observador en la Tierra, λ_{obs} . Para ello, sea λ_c la longitud de onda en coordenadas comóviles, la cual no cambia en dicho sistema coordenado. Entonces, a partir de la ecuación 1.4 se obtiene que:

$$\lambda_{em} = a(t)\lambda_c, \quad \lambda_{obs} = a(t_0)\lambda_c, \tag{1.9}$$

en donde t_0 es el tiempo propio al día de hoy. Por convención, se establece que $a(t_0) = 1$ lo cual significa que las distancias comóviles y las propias coinciden al tiempo actual. También se puede ver que $\lambda_{obs} = \lambda_{em} + \Delta\lambda$, esto debido a que el tamaño físico de onda percibida por el observador crece debido a la recesión de galaxias. Entonces, se puede calcular el cociente entre λ_{obs} y λ_{em} de dos maneras, primero en términos del factor de escala:

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_c}{a(t)\lambda_c} = \frac{1}{a(t)}. \quad (1.10)$$

Por otro lado, definiendo el corrimiento al rojo como $z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{em}}$, se tiene que:

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_{em} + \Delta\lambda}{\lambda_{em}} = 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{em}} = 1 + z. \quad (1.11)$$

Combinando las ecuaciones 1.10 y 1.11 se encuentra la relación entre el corrimiento al rojo y el factor de escala:

$$1 + z = \frac{1}{a}. \quad (1.12)$$

Es preciso señalar que si a crece en el tiempo, entonces z decrece; si $a(t = 0) = 0$, entonces z tiende a infinito, y al día de hoy, como $a(t_0) = 1$, entonces $z(t_0) = 0$.

A diferencia del corrimiento al rojo, que puede medirse con bastante exactitud, la medida de distancias entre objetos lejanos, en general, no puede medirse directamente, sino que se infiere a partir de un modelo cosmológico. Por otro lado, las diferentes medidas de la distancia entre dos objetos en donde se tiene la costumbre de realizar en un espacio Euclidiano, no necesariamente coinciden en un universo en expansión descrito por la métrica de FRW. Por ejemplo, la distancia a la que se encuentra una galaxia de la Tierra la cual se infiere a partir de la disminución de su brillo al alejarse un observador en la Tierra no es la misma que la distancia angular diametral que se infiere por su tamaño angular. Estas dificultades llevaron a los cosmólogos a proponer varias medidas de distancia aparentes, a continuación se mencionan tres de ellas, las cuales cobrarán especial relevancia en capítulos posteriores.

1.3.1. Distancia comóvil

Recordando a la analogía de los nodos en la malla presentada anteriormente, se define la distancia comóvil como aquella que permanece fija ante la expansión del universo, a diferencia de la distancia física o propia, la cual sí crece debido a la expansión. La distancia comóvil entre dos objetos a dos tiempos t_1 y t_2 está dada por la siguiente integral [34]:

$$\chi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.13)$$

Esta medida de distancia multiplicada por el factor de escala corresponde a la distancia real entre dos objetos de acuerdo a un modelo cosmológico que se esté considerando [41]:

$$dr(t) = a(t)\chi. \quad (1.14)$$

Una distancia comóvil que vale la pena mencionar es aquella que recorre la luz emitida en el inicio del universo (es decir, en $t = 0$) hasta un tiempo posterior t :

$$\chi_p(t) \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.15)$$

Tal medida de distancia es llamada el horizonte de partículas y debido a que no hay ninguna señal luminosa que pueda llegar más lejos que χ_p desde el inicio del universo, se dice entonces que las regiones separadas por una distancia mayor a χ_p no están conectadas causalmente. También se puede pensar a χ como una variable temporal, para la cual se usa la letra η y se le llama *tiempo conforme*. En ese sentido, el tiempo propio t , el tiempo conforme η , el factor de escala z , y el factor de escala a se pueden usar para discutir la evolución del universo [17].

A partir de la ecuación 1.4, se puede deducir el tamaño de dicho horizonte, denotado por $R_p(t)$, en coordenadas físicas:

$$R_p(t) = a(t)\chi_p(t) \quad (1.16)$$

y corresponde al tamaño del *universo observable* en estas coordenadas.

Otra distancia comóvil particular es el horizonte de eventos, la cual se define como la región dentro de la cual los observadores están conectados causalmente a un emisor, en otras palabras, es la distancia comóvil máxima que puede viajar una señal luminosa desde una fuente, y por ende, aquellos observadores localizados a una distancia comóvil mayor que el horizonte de eventos están desconectados causalmente del emisor. El horizonte de eventos corresponde al complemento del horizonte de partículas, y está dado por [41]:

$$\chi_e(t) = \chi_{pmax} - \chi_p(t) = \int_t^{t_{max}} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (1.17)$$

donde 'max' se refiere al momento final del tiempo. Para universos que se expanden eternamente, $t_{max} \rightarrow \infty$ y es finito si el universo eventualmente colapsa. En realidad el horizonte de eventos es la distancia máxima que puede viajar una señal luminosa desde un observador a un tiempo t hacia un observador en el futuro.

1.3.2. Distancia luminosa

Otra manera de medir distancias a grandes escalas es comparando los flujos de energía en dos puntos, en donde en uno de ellos se colocó una fuente de luz. Definiendo la luminosidad como $L \equiv \frac{\Delta E}{\Delta t}$, entonces el flujo de energía es la luminosidad por unidad de área. Por lo tanto, asumiendo que los frentes de onda de la luz son esféricos con radio r , dicho flujo está dado por:

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (1.18)$$

Notar que en un espacio estatico e Euclidiano, la luminosidad es la misma para diferentes observadores. Sin embargo, este método sólo aplica para medir distancias en un universo estático sin expansión, ya que al existir expansión, como el universo que se está estudiando en este trabajo, no se tienen las mismas medidas de luminosidad en la fuente que en donde se está observando debido al cambio de la energía de los fotones de luz producida por el corrimiento al rojo gravitacional. A pesar de eso, se puede medir un flujo de energía y con él definir una medida de distancia aparente, por un lado, lo que mide un observador lejos de la fuente es:

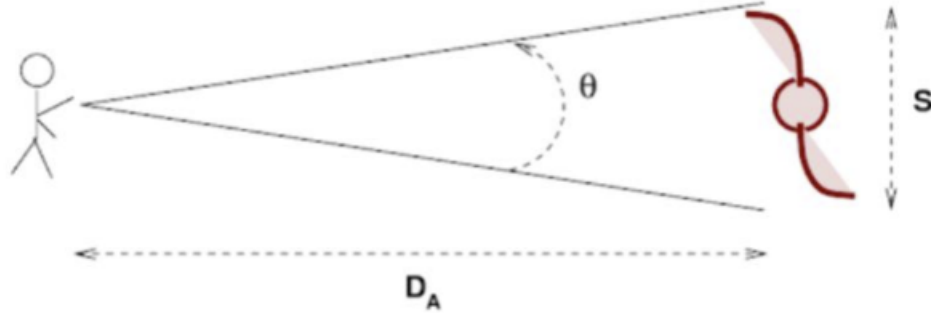


Figura 1.3: Esquema para definir la distancia angular diametral

$$F = \frac{L_0}{4\pi d_R^2}, \quad (1.19)$$

donde L_0 es la luminosidad observada, también llamada luminosidad aparente y d_R es la distancia real a la fuente de luz, y por otro lado se puede medir el flujo en las vecindades de la fuente, el cual corresponde a:

$$F = \frac{L_s}{4\pi d_L^2}, \quad (1.20)$$

con L_s la luminosidad absoluta, y d_L es la distancia luminosa, que es una medida aparente de la distancia entre objetos lejanos. Ambas luminosidades están relacionadas por $L_s = L_0(1+z)^2$, por lo que, a partir de las ecuaciones 1.19 y 1.20, se obtiene la distancia luminosa en términos de la distancia real:

$$d_L = (1+z)d_R. \quad (1.21)$$

La anterior ecuación indica que al estimar la distancia a un objeto lejano a partir de medidas del flujo de energía en diferentes puntos, éste va a aparentar estar más lejos de lo que realmente está.

1.3.3. Distancia angular diametral

Como primer caso considérese un espacio tiempo estático, en ese caso, se puede estimar la distancia angular D_A a partir del tamaño angular θ de un objeto. Es decir, a partir de la figura 1.3, y usando trigonometría euclidiana:

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \simeq \frac{\theta}{2} \simeq \frac{s/2}{D_A}, \quad (1.22)$$

donde s es el tamaño físico del objeto en cuestión.

Al despejar D_A de la ecuación 1.22 se tiene que $D_A = \frac{s}{\theta}$. Al igual que con la distancia luminosa, D_A es una distancia aparente pues no corresponde a la distancia real en un universo en expansión,

es solo una medida de distancia que nos indica cual sería la distancia inferida a partir de distancias angulares en un espacio estático. Entonces, si $s_c = a(t)s$ es el tamaño comóvil del objeto, y también $s_c = \theta d_R$ donde d_R es la distancia real, se tiene que:

$$D_A = \frac{d_R}{a(t)} = \frac{d_R}{1+z}. \quad (1.23)$$

Es interesante notar que, a diferencia de la distancia luminosa, si se infieren distancias a partir de mediciones de tamaños angulares, los objetos van a aparentar estar más cerca de lo que en realidad están.

1.4. Relatividad General y Ecuaciones de Friedmann

En este trabajo muchas de las ecuaciones que describen ciertas cantidades en el universo requieren un desarrollo matemático a partir de la teoría de la Relatividad General, desarrollada por Albert Einstein en 1915, la cual, en contraste a lo que estableció Newton en el siglo XVII, se consideró a la gravedad como una consecuencia de la deformación del espacio-tiempo debido a la presencia de materia. Las ecuaciones que describen matemáticamente esta relación se conocen como las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales, aplicadas a un tensor métrico de FRW, dan lugar a las ecuaciones de Friedmann que describen la expansión del Universo. Pero antes de hablar de ellas, vale la pena dar un repaso a las herramientas tensoriales necesarias para calcular dichas ecuaciones.

1.4.1. Algunas herramientas de cálculo de la Relatividad General

En esta pequeña sección se presentarán algunos elementos matemáticos necesarios para el cálculo de las ecuaciones de Friedmann las cuales corresponden a las ecuaciones de Einstein independientes en espacios de FRW. El primero de ellos corresponde al cálculo de la derivada covariante de un tensor. Al realizar la operación ordinaria de la derivada parcial de un tensor, se muestra que el resultado no es un tensor, por lo que fue necesario agregar un factor de corrección para que la derivada sea, en efecto, un tensor. Esa derivada corregida recibe el nombre de derivada covariante, y se escribe en términos de los llamados "símbolos de Cristoffel", y se construyen a partir de un tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de la siguiente manera:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2}(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}), \quad (1.24)$$

donde $g^{\lambda\sigma}$ corresponde al tensor métrico inverso, y la notación con comas indica derivada parcial respecto de las coordenadas del espacio tiempo, es decir, $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \equiv f_{,\alpha}$. Una propiedad de los símbolos de Cristoffel que ayuda a facilitar los cálculos, es que permanece invariante ante el intercambio de los índices covariantes, en notación matemática esto significa que $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$. Los símbolos de Cristoffel también sirven para definir el tensor de curvatura de Ricci como sigue:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}. \quad (1.25)$$

Otra cantidad importante es el escalar de curvatura de Ricci, el cual se define fácilmente a partir del tensor de Ricci y el tensor métrico inverso como la contracción de éstos:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.26)$$

Con todo lo anterior finalmente se puede calcular el tensor de Einstein, el cual está dado de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.27)$$

Otro elemento clave para el cálculos de las ecuaciones de campo de Einstein es el tensor de energía momento, el cual describe la distribución de masa y energía contenidas en el espacio-tiempo. La teoría de la Relatividad establece que ambas distribuciones están íntimamente relacionadas, por lo que la energía es en realidad la responsable de la curvatura del espacio-tiempo y la geometría de este determina la distribución y evolución de la materia. Para un fluido perfecto, como el que se considera en esta tesis, el tensor de energía-momento está dado por:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

La homogeneidad del universo implica que $\rho = \rho(t)$ y $p = p(t)$ ya que desde todas las regiones ρ y p se observan iguales y por tanto no hay puntos preferenciales, por lo que la presión y la densidad solo pueden evolucionar en el tiempo y no pueden depender de las coordenadas espaciales.

1.4.2. Ecuaciones de Friedmann

Como se mencionó en la sección anterior, las ecuaciones de Friedmann son un caso particular de las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.29)$$

donde G es la constante de gravitación universal. Es pertinente aclarar que se están usando unidades naturales en donde la velocidad de la luz $c = 1$. Para derivar las anteriores ecuaciones en el caso de un tensor métrico de FRW, el primer paso es calcular los símbolos de Cristoffel correspondientes a tal métrica. Entonces, usando la definición 1.24 con el tensor métrico de FRW 1.7, los símbolos de Cristoffel están dados por:

$$\Gamma^0_{00} = 0, \quad (1.30a)$$

$$\Gamma^0_{0i} = 0, \quad (1.30b)$$

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij}, \quad (1.30c)$$

$$\Gamma^i_{j0} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j, \quad (1.30d)$$

$$\Gamma^i_{jk} = 0, \quad (1.30e)$$

$$\Gamma^i_{00} = 0, \quad (1.30f)$$

en donde se usa el punto para denotar derivadas con respecto al tiempo propio, esto es, $\dot{a} \equiv da/dt$. Ahora, con lo obtenido anteriormente, y usando la definición 1.25, el tensor de Ricci en notación matricial es igual a:

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -3\frac{\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

El escalar de Ricci calculado a partir de la definición 1.26 es:

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right). \quad (1.32)$$

Y con todo eso, se obtiene el tensor de Einstein a partir de la definición 1.27, el cual es:

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\ddot{a}a - \dot{a}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\ddot{a}a - \dot{a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\ddot{a}a - \dot{a}^2 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Finalmente ya es posible calcular las ecuaciones de Friedmann a partir de las ecuaciones de campo de Einstein 1.29 y el tensor de energía momento 1.28, para este último es necesario hacer una contracción de sus índices de forma que $T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}T^\alpha_\nu$. De esta forma, se obtienen dos ecuaciones, una corresponde a la parte tiempo-tiempo ($G_{00} = 8\pi GT_{00}$) y la otra a la parte espacio-espacio ($G_{ii} = 8\pi GT_{ii}$), y corresponden a las siguientes:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (1.34a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p + \rho). \quad (1.34b)$$

Normalmente, a la ecuación 1.34a se le suele llamar por sí sola la ecuación de Friedmann, y al resolverla se determina $a(t)$ la cual caracterizaría la expansión del universo que se esté considerando, mientras que la ecuación 1.34b recibe el nombre de ecuación de aceleración, la cual describe la

segunda derivada del factor de escala, o en otras palabras, la expansión acelerada del universo, de lo cual se hablará en la sección 1.5.

1.4.3. La ecuación de continuidad

De las identidades de Bianchi, se deduce que la divergencia del tensor de energía momento es cero, en otras palabras, este tensor se conserva:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.35)$$

donde ∇_{μ} corresponde a una derivada covariante, que en este caso, está dada por:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}{}_{;\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\beta} T^{\nu\beta}. \quad (1.36)$$

Calculando la derivada covariante para el tensor de energía momento de un fluido homogéneo perfecto e igualando a cero da como resultado:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (1.37)$$

la cual recibe el nombre de ecuación de continuidad y describe la conservación de la densidad de energía del fluido. Conviene escribir lo anterior en términos de la ecuación de estado 1.8, asumiendo que el fluido es barotrópico:

$$\dot{\rho} + 3\rho\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega) = 0. \quad (1.38)$$

De acuerdo a esta ecuación diferencial, la densidad de energía como función del factor de escala es:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (1.39)$$

donde se impuso la condición de que al día de hoy $a(t_0) = 1$ y que $\rho(t_0) = \rho_0$. La ecuación 1.39 tendrá una forma distinta para cada tipo de partícula que se esté considerando.

1.5. El modelo Λ CDM

1.5.1. La constante cosmológica y una expansión acelerada

De la ecuación 1.34b se puede observar que si $3p + \rho \geq 0$, el universo se expandiría desaceleradamente, dicha condición es llamada la condición fuerte de energía, la cual la cumple cualquier tipo de materia contemplada en el modelo estándar de partículas elementales. Sin embargo, en 1998 Saul Perlmutter, Adam Riess y Brian Schmidt [44] a través de observaciones de supernovas distantes de tipo 1a, determinaron que el Universo se está expandiendo aceleradamente, este descubrimiento los llevó a ganar el Premio Nobel de Física en 2011. Esto implicaría una forma de materia o energía que no obedece el principio fuerte de energía, es decir, que $3p + \rho < 0$ o bien, una cuya ecuación de estado es:

$$\omega < -\frac{1}{3}. \quad (1.40)$$

En el modelo cosmológico estándar se asume la existencia de una especie de energía (pues en el vacío no hay partículas) que obedece 1.40, y recibe el nombre de energía del vacío o energía oscura. Este tipo de energía se asocia con la constante cosmológica Λ , la cual se puede incorporar a las ecuaciones de Einstein de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.41)$$

y sus correspondientes ecuaciones de Friedmann son:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.42a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p + \rho) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.42b)$$

Es posible incorporar a la constante cosmológica como un término de materia definiendo $\rho_{total} = \rho + \rho_\Lambda$, y $p_{total} = p + p_\Lambda$, donde $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}$ y $p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$, cabe notar que con estas definiciones $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ y por lo tanto $\omega_\Lambda = -1$, indicando que la energía oscura no obedece el principio fuerte de energía. Esto resulta en unas ecuaciones de Friedmann similares a las obtenidas sin constante cosmológica:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{total}, \quad (1.43a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p_{total} + \rho_{total}). \quad (1.43b)$$

1.5.2. El Modelo Cosmológico de Concordancia

El modelo de concordancia corresponde al que, como su nombre lo indica, concuerda con muchos tipos de observaciones que se realizan. Dicho modelo recibe el nombre de Λ CDM, en donde Λ corresponde a la energía del vacío, que en este modelo se asume que es la energía oscura, y es la responsable de la expansión acelerada del Universo, y CDM significa materia oscura fría (cold dark matter, por su nombre en inglés). En este modelo se consideran tres tipos de materia y energía:

- **Materia.** También llamada 'polvo' y se describe como un fluido sin presión, la cual incluye a las partículas no relativistas, la conforman la materia bariónica (aquella que describe el modelo estandar y que en su mayoría es visible) y la materia oscura fría. Su ecuación de estado es $\omega = 0$ de donde a partir de la ecuación (1.39) se ve que $\rho_m = \rho_{0m}a^{-3}$, donde ρ_{0m} es la densidad de materia al día de hoy.
- **Radiación.** Aquí se incluyen a las partículas ultra-relativistas como fotones y neutrinos del modelo estándar de física de partículas y posiblemente otras partículas relativistas que no

son descritas por él. Su ecuación de estado es $\omega = 1/3$, y por lo tanto, de (1.39) se tiene que $\rho_r = \rho_{0r}a^{-4}$.

- **Energía del vacío.** O energía oscura en este modelo, está dada por la constante cosmológica. Su ecuación de estado es $\omega = -1$, violando así el principio fuerte de energía, y entonces de (1.39), $\rho_\Lambda = \rho_{0\Lambda}$.

Si se asume que el Universo está formado por estos tres tipos de especies, entonces $\rho_{total} = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$, por lo que la ecuación de Friedmann 1.43a luce así:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{0m}a^{-3} + \rho_{0r}a^{-4} + \rho_{0\Lambda}), \quad (1.44)$$

en donde se definió la tasa de Hubble como $H \equiv \dot{a}/a$. Evaluando la anterior ecuación al día de hoy, sabiendo que el valor actual de H es la constante de Hubble H_0 , y despejando:

$$\frac{3H_0^2}{8\pi G} = \rho_{0m} + \rho_{0r} + \rho_{0\Lambda}. \quad (1.45)$$

Lo que está al lado derecho recibe el nombre de densidad crítica del universo al día de hoy, y se denota por ρ_{0c} , la cual por tanto es igual a:

$$\rho_{0c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (1.46)$$

Ahora, multiplicando la ecuación de Friedmann 1.44 por $1 = H_0/H_0$ e incorporando la densidad crítica se obtiene:

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\rho_{0m}}{\rho_{0c}} a^{-3} + \frac{\rho_{0r}}{\rho_{0c}} a^{-4} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{0c}} \right). \quad (1.47)$$

Se puede definir la densidad relativa actual $\Omega_{0i} \equiv \frac{\rho_{0i}}{\rho_{0c}}$ para $i = m, r, \Lambda$, la cual corresponde a la proporción de ese tipo de partículas respecto al total. Además la densidad relativa de las partículas relativistas al día de hoy es del orden de $\Omega_{0r} \sim 10^{-4}$ por lo que se puede despreciar y no ser incluida, por lo tanto:

$$H^2 = H_0^2(\Omega_{0m}a^{-3} + \Omega_{0\Lambda}a^{-4}). \quad (1.48)$$

La anterior es la ecuación de Friedmann correspondiente al modelo Λ CDM, el cual está definido por los parámetros $\Omega_{0m}, \Omega_{0\Lambda}$ y H_0 . Al evaluarla al día de hoy se obtiene la ecuación de constricción, indicando que Ω_{0m} y $\Omega_{0\Lambda}$ están correlacionados:

$$\Omega_{0m} + \Omega_{0\Lambda} = 1. \quad (1.49)$$

Resolviendo la ecuación diferencial 1.48 se obtiene el factor de escala como función del tiempo propio:

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0\Lambda}} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{0\Lambda}} H_0 t \right). \quad (1.50)$$

Se puede invertir la relación para obtener una expresión correspondiente a la edad del universo:

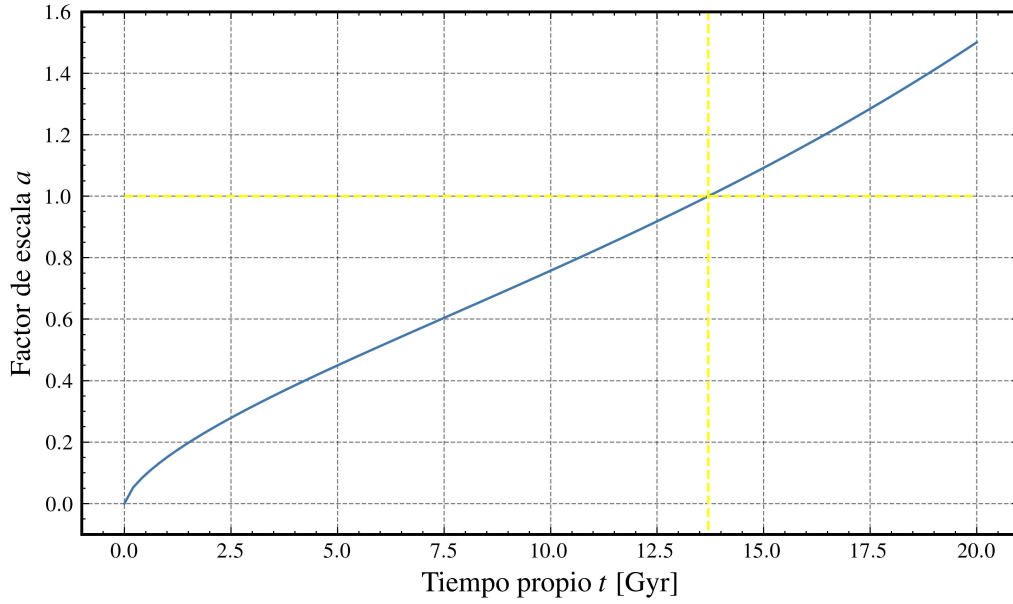


Figura 1.4: Factor de escala a como función del tiempo propio t en Giga-años. Se puede apreciar que al día de hoy ($a = 1$), la edad del universo es de aproximadamente 13,77 Gyr.

$$t(a) = \frac{2}{3} H_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} a^{3/2} \right), \quad (1.51)$$

la cual se puede calcular al día de hoy:

$$t(a_0 = 1) = \frac{2}{3} H_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} \right). \quad (1.52)$$

El mejor ajuste de los parámetros para el modelo Λ CDM fue obtenido en 2018 gracias a los datos de la colaboración PLANCK [3], los cuales dan los valores de:

$$\Omega_{0m} = 0,3111 \pm 0,0056, \quad H_0 = 67,66 \pm 0,42 \text{ km/s/Mpc}, \quad (1.53)$$

recordando que Ω_Λ está dada por la ecuación de constricción 1.49. Con esos valores, la edad actual del universo a partir de (1.52) es aproximadamente 13.77 Gyr. En la figura 1.4 se grafica $a(t)$ desde $t = 0$ Gyr hasta $t = 20$ Gyr, en esa imagen es posible visualizar la edad del universo al día de hoy, cuando el factor de escala es igual a 1.

Así como se definió la densidad relativa actual, se puede definir para cualquier momento de la historia del universo:

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)}, \quad (1.54)$$

donde $i = m, r, \Lambda$. La densidad relativa en cualquier momento se define de manera análoga a la ecuación 1.46:

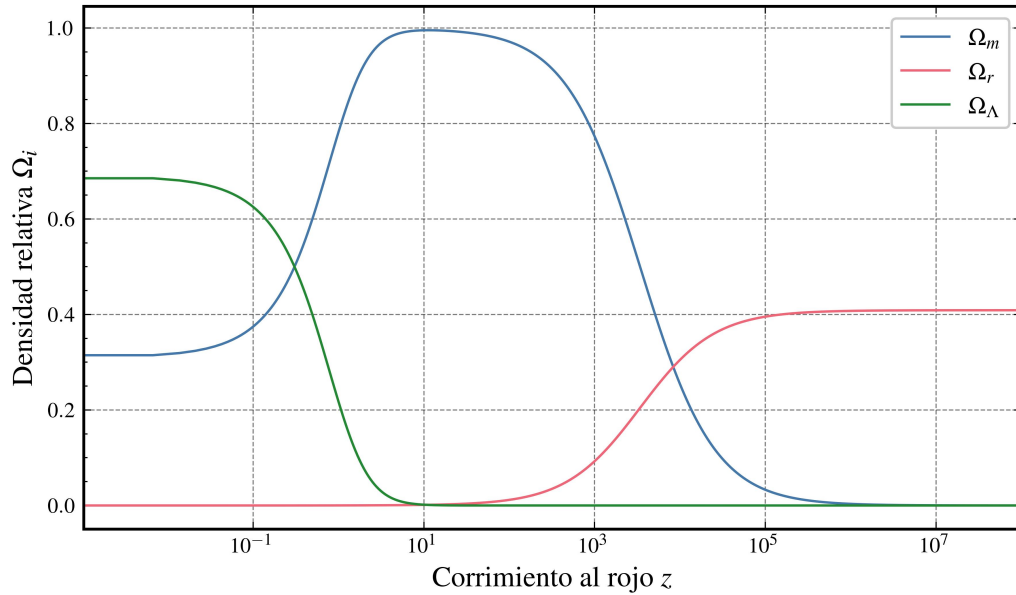


Figura 1.5: Densidad relativa de la materia, radiación y energía del vacío como función del corrimiento al rojo z

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.55)$$

A partir de las ecuaciones 1.39 y 1.48, y conociendo la ecuación de estado para cada una de las especies de partículas, es posible conocer su evolución a través de la historia de expansión:

$$\Omega_i = \frac{\rho_{0i} a^{-3(1+\omega_i)}}{\rho_{0c}(\Omega_{0m} a^{-3} + \Omega_{0\Lambda})}. \quad (1.56)$$

Siguiendo la relación 1.12 se puede visualizar la evolución de las tres especies de partículas: materia, radiación y energía del vacío, a través de la historia mediante el corrimiento al rojo. Esto se grafica en la figura 1.5, ahí es posible dividir la historia del universo en varias etapas: la primera en donde dominaba la radiación, después de que se igualara la cantidad de ésta última y la materia, ésta fue la que dominó llegando a comprender la totalidad de la densidad de materia y energía del universo, posteriormente comenzó a disminuir, al mismo tiempo que la energía del vacío fue aumentando, pasando por un punto en el que existían en la misma proporción, hasta llegar al día de hoy, en donde es la partícula dominante, mientras que la materia o polvo compuesta por todo aquello que se puede tocar e interactuar, junto con la materia oscura fría, apenas componen poco más del 30 por ciento.

Para finalizar este capítulo, en la figura 1.6 se pueden apreciar las tres distintas medidas de distancia mencionadas anteriormente como función del corrimiento al rojo para el modelo Λ CDM. Es evidente que a distancias cortas, las tres medidas son equivalentes.

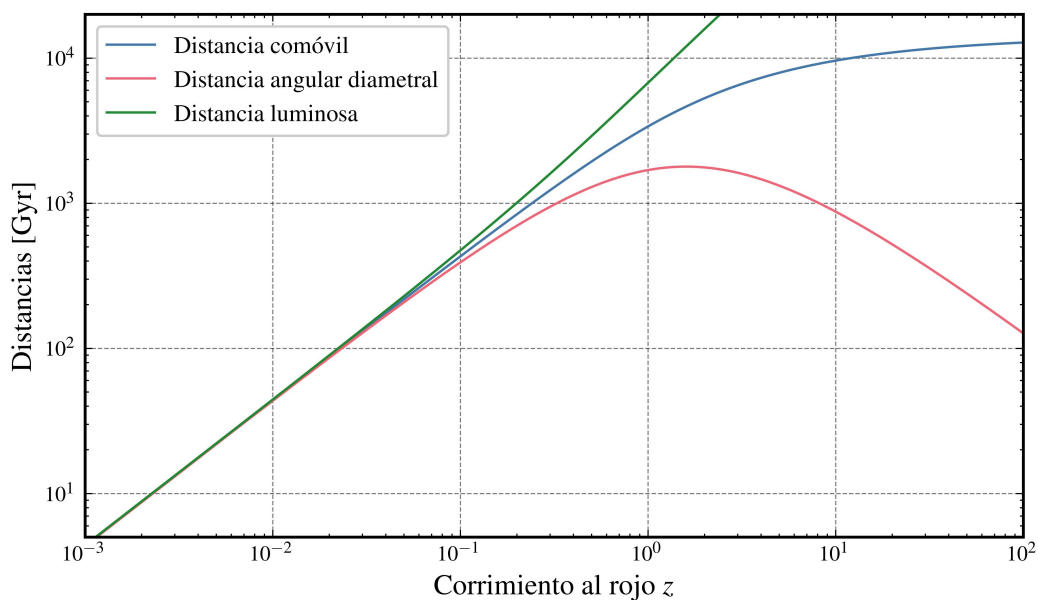


Figura 1.6: Diferentes medidas de distancia como función del corrimiento al rojo. La razón por la que las distancias se encuentran en unidades de tiempo es porque en unidades naturales, como se ha estado trabajando, distancia y tiempo son equivalentes.

Capítulo 2

Proceso de formación de estructura a gran escala

Hasta este momento, se ha asumido al universo como homogéneo e isótropo, tal y como dicta el principio cosmológico mencionado en el capítulo anterior, y por esa razón resulta intuitivo llamarlo el universo de fondo o no perturbado. Evidentemente esta suposición sólo se aplica a grandes escalas, ya que existen, galaxias o estrellas, por mencionar algunos objetos. Por lo tanto, a escalas menores a 200 Mpc aproximadamente, el universo es inhomogéneo, o en otras palabras, perturbado. La evolución de estas pequeñas inhomogeneidades es estudiada y analizada por la teoría de perturbaciones cosmológicas, a partir de la cual se describe el proceso de formación de estructuras en el universo, uno de los campos de la cosmología más estudiados y de mayor interés.

2.1. Teoría de Perturbaciones Cosmológicas

Para comenzar, es necesario haber determinado las soluciones a las ecuaciones de campo para un universo no perturbado, es decir, que las ecuaciones de Friedmann 1.43a y 1.43b así como la ecuación de continuidad sean válidas, y entonces, estudiar pequeñas perturbaciones alrededor de ellas. Vale la pena recordar la métrica de FRW para un universo no perturbado descrita en la ecuación 1.6, pero ahora en términos del tiempo conforme:

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j) = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico no perturbado.

Para modelar una versión más realista del universo, debemos incluir perturbaciones en el elemento de línea de esta manera:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^{(0)}dx^\mu dx^\nu + \delta g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (2.2)$$

En este caso, $\delta g_{\mu\nu}$ denota a las perturbaciones del tensor métrico, mientras que $g_{\mu\nu}^{(0)}$ es ahora el que describe la geometría del universo de fondo.

La elección de la forma de las perturbaciones es, en general, complicada, pero se requiere que

en ausencia de ellas, la métrica se reduce a la del fondo. Esta dificultad radica en que se tienen diferentes elecciones de un sistema de coordenadas, al escoger una de ellas, ésta recibe el nombre de norma. Por el momento, se dejará abierta esta selección y se considera la forma más general del tensor métrico con perturbaciones [39]:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2A)d\eta^2 - B_i d\eta dx^i + [(1 + 2D) + 2E_{ij}] dx^i dx^j \right]. \quad (2.3)$$

En la ecuación anterior se pueden distinguir tres tipos distintos de perturbaciones:

- escalares: A, B, D, E ,
- vectoriales: B_i, E_i ,
- y tensoriales: E_{ij} .

En la formulación Arnowit-Desert-Misner de la Relatividad General [7] se folia el espacio tiempo y las propiedades geométricas de las superficies se caracterizan por las variables A, B, D, E en las perturbaciones. Una ventaja muy importante es que las perturbaciones escalares, tensoriales y vectoriales no están acopladas entre sí, por lo tanto, pueden ser tratadas independientemente. En ese sentido, las escalares son las más importantes, esto es porque son las responsables de la formación de estructura en el universo desde perturbaciones inicialmente pequeñas generadas en la época de inflación. Las vectoriales están relacionadas con las perturbaciones rotacionales de velocidad y tienden a desaparecer en un universo en expansión, por lo tanto, son irrelevantes en este trabajo. Por su parte, las tensoriales se asocian a ondas gravitacionales las cuales no afectan la formación de estructura, por lo que tampoco serán tomadas en cuenta. Es decir, de ahora en adelante sólo se considerarán perturbaciones escalares, por ser las únicas relevantes a los objetivos de este trabajo.

En este trabajo se realiza la elección de norma que lleva el nombre de *norma Newtoniana-Conforme*, en donde las perturbaciones de la métrica se caracterizan por dos potenciales escalares ψ y ϕ que aparecen en el elemento de línea como sigue [40]:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ -(1 + 2\psi)d\eta^2 + (1 - 2\phi)dx^i dx_i \right\}. \quad (2.4)$$

En esta norma, ψ juega el rol del potencial gravitacional en el límite Newtoniano (para aquellas distancias menores a H_0^{-1}), mientras que ϕ recibe el nombre de perturbación de curvatura Newtoniana. Éstas están relacionadas con los llamados potenciales de Bardeen [9] de la siguiente manera:

$$\psi = \Psi,$$

$$\phi = -\Phi.$$

Una ventaja de los potenciales de Bardeen es que son invariantes de norma. Es importante notar la dependencia que tienen las perturbaciones de las coordenadas espaciales comóviles, y por supuesto, del tiempo conforme:

$$\psi = \psi(\eta, x_1, x_2, x_3), \quad (2.5a)$$

$$\phi = \phi(\eta, x_1, x_2, x_3), \quad (2.5b)$$

esto debido a la naturaleza anisotrópica de las perturbaciones. Con esta forma del elemento de línea, el tensor métrico de fondo y su perturbación lucen así:

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = a^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\delta g_{\mu\nu} = -2a^2 \begin{pmatrix} \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Con el fin de obtener las ecuaciones de Einstein, 1.29 específicamente para el tensor métrico perturbado $\delta g_{\mu\nu}$, primero se desarrollará el lado izquierdo de las mismas, para lo cual se necesitan calcular los símbolos de Cristoffel perturbados $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, así que es necesario obtener una expresión para ellos. Recordando su definición en términos de un tensor métrico cualquiera:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (2.8)$$

Se puede bajar el índice del símbolo de Cristoffel multiplicando ambos lados por $g_{\beta\lambda}$:

$$\begin{aligned} g_{\beta\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{g_{\beta\lambda}g^{\lambda\sigma}}{2} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \\ &= \frac{\delta_\beta^\sigma}{2} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \\ \Gamma_{\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Inversamente, se puede subir el índice para tener $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = g^{\lambda\alpha}\Gamma_{\alpha\mu\nu}$. Ahora, descomponiendo el tensor métrico como la suma del no perturbado y el perturbado, lo anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= [g^{\lambda\alpha(0)} + \delta g^{\lambda\alpha}] [\Gamma_{\alpha\mu\nu}^{(0)} + \delta\Gamma_{\alpha\mu\nu}] \\ &= g^{\lambda\alpha(0)}\Gamma_{\alpha\mu\nu}^{(0)} + \delta g^{\lambda\alpha}\Gamma_{\alpha\mu\nu}^{(0)} + g^{\lambda\alpha(0)}\delta\Gamma_{\alpha\mu\nu}, \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda(0)} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \end{aligned} \quad (2.10)$$

en donde se han despreciado los productos de las perturbaciones de los símbolos de Cristoffel, es decir, solo se mantendrán las perturbaciones a primer orden. Además, se llega a que:

$$\Gamma^{\lambda(0)}_{\mu\nu} \equiv g^{\lambda\alpha(0)}\Gamma_{\alpha\mu\nu}^{(0)}, \quad (2.11a)$$

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \delta g^{\lambda\alpha}\Gamma_{\alpha\mu\nu}^{(0)} + g^{\lambda\alpha(0)}\delta\Gamma_{\alpha\mu\nu}. \quad (2.11b)$$

La ecuación 2.11b es la que se necesita obtener, en donde $g^{\lambda\alpha(0)}$ es el inverso del tensor métrico de fondo, dado por:

$$g^{\lambda\alpha(0)} = a^{-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

En el caso de la inversa métrica de fondo, al ser diagonal se cumple que sus entradas son $g^{\lambda\alpha(0)} = 1/g_{\lambda\alpha(0)}$, sin embargo, para $\delta g^{\lambda\alpha}$ se debe proceder de otra manera. Primero, se sabe que $g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$, entonces, separando el tensor métrico en su parte de fondo y la perturbada, y despreciando los términos a segundo orden:

$$g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta} = g_{\alpha\mu}^{(0)}g^{\mu\beta(0)} + \delta g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta(0)} + g_{\alpha\mu}^{(0)}\delta g^{\mu\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (2.13)$$

El primer término de la suma es igual a δ_{α}^{β} , y al aparecer también del lado derecho, se simplifican, luego, al pasar el tercer término del lado derecho:

$$\delta g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta(0)} = -g_{\alpha\mu}^{(0)}\delta g^{\mu\beta}, \quad (2.14)$$

ahora se multiplican ambos lados por $-g^{\nu\alpha(0)}$:

$$-g^{\nu\alpha(0)}g^{\mu\beta(0)}\delta g_{\alpha\mu} = g^{\mu\beta(0)}g_{\alpha\mu}^{(0)}\delta g^{\mu\beta}, \quad (2.15)$$

los dos primeros productos del lado derecho son iguales a δ_{μ}^{ν} , por lo que al contraerlo con el tensor métrico restante al final el resultado es:

$$\delta g^{\nu\beta} = -g^{\nu\alpha(0)}g^{\mu\beta(0)}\delta g_{\alpha\mu}. \quad (2.16)$$

La anterior ecuación permite determinar la perturbación de la inversa de la métrica a partir de la perturbación de la métrica y la métrica de fondo. Realizando la operación anterior, el inverso del la perturbación del tensor métrico es:

$$\delta g^{\mu\nu} = 2a^{-2} \begin{pmatrix} \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Con esta perturbación del tensor métrico, y las definiciones dadas por 2.9 y 2.11b se puede calcular $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. La razón por la que fue necesario todo este desarrollo y no se pudo usar simplemente la ecuación 2.8 (tal y como se hizo en el capítulo pasado para el universo de fondo) es que estos

cálculos, sobre todo cuando llegue el momento de obtener el tensor de Ricci perturbado, se harán demasiado complejos, y la posibilidad de cometer un error se vuelve muy alta, por lo cual es conveniente usar un desarrollo perturbativo para determinar estas cantidades. Igualmente, con el fin de realizar cálculos simbólicos precisos se hizo uso de herramientas computacionales, para esto se utilizó una librería de Python llamada Gravipy, la cual hace este tipo de desarrollos perturbativos, sin embargo, esta librería solo es capaz de calcular los símbolos de Cristoffel de primer orden $\Gamma_{\beta\mu\nu}$, a diferencia de este trabajo, en donde se han estado utilizando los de segundo orden $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, ese es el motivo de todo el desarrollo anterior.

Con eso en consideración, y después de transformar las salidas proporcionadas por Gravipy mediante 2.11b, los símbolos de Cristoffel para el tensor métrico perturbado 2.7 resultaron ser:

$$\delta\Gamma^0_{00} = \psi', \quad (2.18a)$$

$$\delta\Gamma^0_{0i} = \psi_{,x_i}, \quad (2.18b)$$

$$\delta\Gamma^0_{ij} = -(\phi' + 2\frac{a'}{a}(\phi + \psi))\delta_{ij}, \quad (2.18c)$$

$$\delta\Gamma^i_{00} = \psi_{,x_i}, \quad (2.18d)$$

$$\delta\Gamma^i_{jj} = \phi_{,x_i} \quad (i \neq j), \quad (2.18e)$$

$$\delta\Gamma^i_{i0} = -\phi', \quad (2.18f)$$

$$\delta\Gamma^i_{ij} = -\phi_{,x_j}, \quad (2.18g)$$

y cero en cualquier otro caso. La notación usada aquí es $\phi' \equiv \partial\phi/\partial\eta$ y $\phi_{,x_i} \equiv \partial\phi/\partial x_i$.

Ahora cabe notar que, análogamente al tensor métrico y el símbolo de Cristoffel, el tensor de Ricci es una suma del tensor de fondo más su perturbación. Por lo tanto, siguiendo la definición 1.25, haciendo el desarrollo perturbativo hasta primer orden en las perturbaciones se obtiene la perturbación del tensor de Ricci en términos de cantidades previamente determinadas:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha(0)}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta(0)}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha(0)}_{\beta\mu}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} + \delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta(0)}_{\alpha\nu}. \quad (2.19)$$

Sustituyendo las perturbaciones de los símbolos de Cristoffel y las entradas del tensor métrico de fondo en la anterior ecuación para el tensor métrico perturbado y haciendo los cálculos 2.7 se obtiene que las componentes de la perturbación del tensor de Ricci están dadas por:

$$\delta R_{00} = \nabla^2\psi + 3\phi'' + 3\frac{a'}{a}(\phi' + \psi'), \quad (2.20a)$$

$$\delta R_{0i} = \delta R_{i0} = 2\left(\phi_{,\tau,x_i} + \frac{a'}{a}\psi_{,x_i}\right), \quad (2.20b)$$

$$\delta R_{ij} = \left[\nabla^2\phi - \phi'' - 2(\phi + \psi)\left(\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2}\right) - \frac{a'}{a}(5\phi' + \psi')\right]\delta_{ij} + \phi_{,x_i x_j} - \psi_{,x_i x_j}. \quad (2.20c)$$

Si siguiendo el mismo razonamiento para la perturbación del escalar de Ricci a partir de 1.26:

$$\delta R = g^{\mu\nu(0)} \delta R_{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(0)}. \quad (2.21)$$

Al realizar las sumas implícitas se sigue que:

$$\delta R = \frac{2}{a^2} \left(2\nabla^2 \phi - 5\phi'' - \nabla^2 \psi + \psi'' - 6\psi \frac{a''}{a} - 3\frac{a'}{a} (3\phi' + \psi') \right). \quad (2.22)$$

Finalmente, la perturbación del tensor de Einstein según la definición 1.27 es:

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu(0)} \delta R + \delta g_{\mu\nu} R^{(0)}). \quad (2.23)$$

Con el objetivo de seguir la notación de [40], se subirá el primer índice del tensor de Einstein $G_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\lambda} G_{\lambda\nu}$ y su perturbación, de tal manera que:

$$\delta G_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\lambda(0)} \delta G_{\lambda\nu} + \delta g^{\mu\lambda} G_{\lambda\nu}^{(0)}. \quad (2.24)$$

Entonces, después de llevar a cabo una serie larga de operaciones se llega a lo siguiente:

$$\delta G_0^0 = -\frac{2}{a^2} \left(\nabla^2 \phi - 3 \left(\frac{a'}{a} \phi + \frac{a'^2}{a^2} \psi \right) \right), \quad (2.25a)$$

$$\delta G_i^0 = -\frac{2}{a^2} \left(\phi_{\tau, x_i} + \frac{a'}{a} \psi_{, x_i} \right) = -\delta G_0^i, \quad (2.25b)$$

$$\delta G_j^i = \frac{1}{a^2} \left[\left(2\phi'' + 2\frac{a'}{a} (2\phi' + \psi') + 2\psi \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} \right) + -\nabla^2 (\phi - \psi) \right) \delta_j^i + \phi_{, x_i x_j} - \psi_{, x_i x_j} \right]. \quad (2.25c)$$

Ahora, para el lado derecho de las ecuaciones de Einstein 1.29, es necesario obtener la perturbación del tensor de energía-momento. Para ello, se agregan pequeñas perturbaciones a la densidad de energía y presión de fondo, por lo que conviene denotarlas ahora con $\bar{\rho}$ y \bar{P} , respectivamente. Entonces, la densidad ρ y presión P totales de un fluido perfecto en un determinado punto son:

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho, \quad (2.26a)$$

$$P = \bar{P} + \delta P, \quad (2.26b)$$

en donde $\delta\rho$ y δP corresponden a las perturbaciones de la densidad de energía y presión respectivamente. Entonces, el tensor de energía momento perturbado total es [40]:

$$T_0^0 = -(\bar{\rho} + \delta\rho), \quad (2.27a)$$

$$T_i^0 = (\bar{\rho} + \bar{P})v_i = -T_0^i, \quad (2.27b)$$

$$T_j^i = (\bar{P} + \delta P)\delta_j^i + \Sigma_j^i, \quad \Sigma_i^i = 0. \quad (2.27c)$$

Es importante notar que se introducen nuevas perturbaciones además de las de densidad de

energía y presión. Específicamente, la perturbación al campo de velocidad de recesión (o flujo de Hubble) conocidas como velocidades peculiares las cuales están asociadas a pequeños desplazamientos en la malla cómovil producidos por campos gravitacionales locales generados por las perturbaciones de densidad de materia. Es importante notar que la componente T_{0i} es nula a orden cero debido al principio cosmológico, mientras que a primer orden introducen pequeñas anisotropías asociadas a las velocidades peculiares. A su vez puede existir una contribución de estrés anisotrópico a primer orden, la cual corresponde a la parte trasversa sin traza de las componentes espaciales del tensor de energía momento, las cuales están asociadas a pequeñas fuerzas disipativas en el fluido cósmico.

Con el objetivo de facilitar los cálculos, conviene trabajar con las transformadas de Fourier de las perturbaciones para así manejar ecuaciones diferenciales ordinarias en vez de ecuaciones diferenciales parciales. De esta manera los operadores que involucran derivadas parciales se transforman de la siguiente manera:

$$\partial_i \rightarrow ik_i, \quad (2.28a)$$

$$\partial_{i2} \rightarrow (ik_i)(ik_i) = -k_i^2, \quad (2.28b)$$

$$\nabla \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 \rightarrow -k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \equiv -k^2, \quad (2.28c)$$

siendo k el módulo del vector de onda comóvil \vec{k} del modo de Fourier correspondiente. Con este cambio, las expresiones serán más manejables, ya que las operaciones que involucren derivadas se convertirán en operaciones meramente algebraicas. Después de aplicar este cambio, es posible obtener las ecuaciones de Einstein para las transformadas de Fourier de las perturbaciones. La primera de ellas correspondiente a la componente tiempo-tiempo tanto del tensor de Einstein como del de energía momento:

$$k^2 \phi + 3 \frac{a'}{a} \left(\phi' + \frac{a'}{a} \psi \right) = 4\pi G a^2 \delta \rho. \quad (2.29)$$

La segunda se obtiene como la divergencia de δG_i^0 y δT_i^0 en ambos lados de la ecuación, teniendo entonces:

$$k^2 \left(\phi' + \frac{a'}{a} \psi \right) = 4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{P}) \theta, \quad (2.30)$$

donde θ es la divergencia de la perturbación del campo de velocidad del fluido o campo de velocidad peculiar: $\theta \equiv ik^j v_j$.

Para la tercera ecuación, se calcula la traza de los tensores que aparecen en ambos lados de las componentes espaciales de las ecuaciones de Einstein, para así obtener:

$$\phi'' + \frac{a'}{a} (2\phi' + \psi) + \psi \left(2 \frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} \right) + \frac{k^2}{3} (\phi - \psi) = 4\pi G a^2 \delta P. \quad (2.31)$$

La cuarta ecuación se obtiene a partir de aplicar el operador de proyección dado por $-k_j k^i + \frac{k^2}{3} \delta_j^i$ a ambos lados de las componentes espaciales de las ecuaciones de Einstein. Después de realizar

todas las operaciones que conlleva tal cálculo, se llega a:

$$k^2(\phi - \psi) = 12\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{P})\sigma, \quad (2.32)$$

donde se definió la perturbación de esfuerzo de corte σ a partir de la perturbación de estrés anisotrópico Σ_{ij} y el operador de proyección antes mencionado como sigue:

$$k^2(\bar{\rho} + \bar{P})\sigma \equiv (-k_j k^i + \frac{k^2}{3}\delta_j^i)\Sigma_i^j. \quad (2.33)$$

Como consecuencia de las identidades de Jacobi de las ecuaciones de Einstein, se obtiene la ecuación de conservación de energía del fluido a partir del cálculo de la derivada covariante del tensor de energía-momento definida en 1.36.

A diferencia del caso no perturbado, el índice de la derivada covariante corre de cero a 3 puesto que las perturbaciones ahora pueden depender de las coordenadas espaciales y no solo del tiempo. Entonces, a partir de la ecuación de conservación del tensor de energía momento a primer orden, se obtienen las ecuaciones para las transformadas de Fourier de las perturbaciones de materia (densidad, presión, velocidad y esfuerzo cortante):

$$\delta' = -(\omega + 1)(\theta + 3\phi') - 3\frac{a'}{a}\left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - \omega\right)\delta, \quad (2.34)$$

$$\theta' = -\frac{a'}{a}(1 - 3\omega)\theta - \frac{\omega'}{1 + \omega}\theta + \frac{\delta P/\delta\rho}{1 + \omega}k^2\delta - k^2\sigma + k^2\psi, \quad (2.35)$$

en donde se definió en contraste de densidad como:

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}, \quad (2.36)$$

el cual cuantifica la fluctuaciones de densidad respecto al valor promedio (o de fondo) $\bar{\rho}$ del universo. Como la densidad total $\rho \geq 0$, entonces se sigue que $\delta \geq -1$, y se pueden distinguir cuatro casos en donde la densidad local es distinta o igual a la del promedio :

- $\delta = -1$: es una región completamente vacía.
- $-1 < \delta < 0$: es una región con densidad menor a la del promedio, se dice que es subdensa, éstas reciben el nombre de void (vacío en inglés), aunque no son regiones completamente desiertas.
- $\delta = 0$: corresponde a una región con una densidad igual a la de fondo.
- $\delta > 0$: se trata de una región con densidad mayor al promedio, recibe el nombre de sobre-densidad u inhomogeneidad, y corresponde a grupos, cúmulos o supercúmulos.

Las ecuaciones 2.34 y 2.35 son válidas para un fluido desacoplado térmicamente, o para el total de δ y θ correspondiente a los fluidos de todas las especies, sin embargo, deben ser modificadas para componentes individuales si éstas interactúan entre sí no-gravitacionalmente [40], por ejemplo, para un modelo con materia oscura inestable que decae en partículas relativistas que se estudia en este trabajo. Este modelo será abordado con detalle en el próximo capítulo.

Considerar las cuestiones técnicas que involucra la formulación completamente relativista opaca el análisis del comportamiento del contraste, el cual es muy parecido en el régimen relativista y el Newtoniano (y es suficientemente válido para describir el proceso de formación de estructura a escalas menores al horizonte de partículas al día de hoy $\sim cH_0^{-1}$). En este límite, las ecuaciones de las perturbaciones 2.34 y (2.29-2.32) se pueden combinar para determinar una sola ecuación que gobierne la evolución del contraste de densidad dada por [30]:

$$\delta'' + 2\frac{a'}{a}\delta' - 4\pi a^2 G\bar{\rho}\delta = 0. \quad (2.37)$$

Dado que los coeficientes de la ecuación no dependen de k , ésta admite una solución por separación de variables, esto es, soluciones de la forma [47]:

$$\delta(\vec{k}, t) = D(t)\tilde{\delta}(\vec{k}). \quad (2.38)$$

Donde $D(t)$ es el factor de crecimiento de las perturbaciones de densidad y está normalizado a 1 al día de hoy, y $\tilde{\delta}(\vec{k})$ corresponde a la perturbación de densidad primordial prescrita por el espectro de potencias predicho a partir de la teoría de inflación. La forma explícita de $\tilde{\delta}(\vec{k})$ para Λ CDM está bien definida [17].

2.2. Observando la estructura a gran escala

Habiendo desarrollado la teoría de perturbaciones cosmológicas en el régimen relativista y establecido la forma de la ecuación para los modos del contraste de densidad de materia δ en el régimen newtoniano, es momento de aplicar todo esto en el universo real.

A pesar de la descripción teórica sobre el contraste de densidad δ realizada en la sección anterior, ésta no puede describir, por ejemplo, que a 5 kpc de la Vía Láctea se encontrará otra galaxia. En realidad, no existe ningún modelo manejable que pueda explicar cómo se distribuye la materia en el Universo de manera determinista, esto porque se asume que las perturbaciones tuvieron su origen en algún proceso estocástico (o aleatorio) en el Universo temprano, es decir, ocurrieron en posiciones aleatorias y por esa razón no se puede predecir el valor de $\delta(\vec{x}, t)$ unívocamente [35]. Lo que sí se puede hacer es predecir las propiedades estadísticas de esta distribución, normalmente definidas como promedios de ciertas cantidades y su medida de incertidumbre.

2.2.1. Descripción estadística de campos cosmológicos

Para poder entender esto, se puede imaginar un ensamble con una gran cantidad de universos cuyos contrastes de densidad δ tengan las mismas propiedades estadísticas, aunque las funciones individuales puedan ser diferentes. Este ensamble recibe el nombre de campo aleatorio, y el tomar uno de estos universos recibe el nombre de realización del campo aleatorio [47]. Se denota el promedio en el ensamble de una cierta cantidad f como $\langle f \rangle$ y está dado por [36]:

$$\langle f \rangle = \int f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mathcal{P}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n, \quad (2.39)$$

donde \mathcal{P} es la distribución de probabilidad de las cantidades λ_i . En este caso, las λ_i las cuales denotan cualquier tipo de perturbación en todas las posiciones, haciendo que la integral anterior sea posiblemente una integral de dimensiones infinitas.

Por otro lado, se define el promedio de volumen V (o promedio espacial) de una cantidad $f(\vec{x})$ como \bar{f} , de esta manera:

$$\bar{f} = \frac{1}{V} \int_V d^3x f(\vec{x}). \quad (2.40)$$

La diferencia entre el promedio en el ensamble y el promedio de volumen radica en que para el primero, es necesaria una cantidad inmensa de universos, y evidentemente, sólo se cuenta con uno para estudiar, mientras que el segundo es un concepto más orientado hacia la observación. La teoría cosmológica predice una distribución de probabilidad, y por ende, un promedio en el ensamble es requerido, pero al no poder estudiar muchos universos, y sin saberse en cuál de estas realizaciones se vive, es necesaria una conexión para poder comparar la teoría y las observaciones. En ese sentido, se dice que un campo aleatorio $f(\vec{x})$ cumple la propiedad ergódica si

$$\bar{f} = \langle f \rangle. \quad (2.41)$$

En cosmología se asume que las perturbaciones son ergódicas. La igualdad anterior solo se cumple para un volumen V infinito, sin embargo, si se considera al universo observable como este volumen, se tiene una muy buena aproximación de la ergodicidad.

Aunque se ha mencionado que el universo es inhomogéneo, se asume que es estadísticamente homogéneo e isótropo, lo cual puede tomarse como una segunda versión más moderna del Principio Cosmológico. Estadísticamente, *homogéneo* indica que $\langle f(\vec{x}) \rangle$ debe ser el mismo para cualquier posición \vec{x} , por lo que se puede escribir simplemente $\langle f \rangle$, mientras que estadísticamente *isótropo* quiere decir que para aquellas cantidades que involucren una dirección, las propiedades estadísticas son independientes de ésta [35].

Llegados a este punto, surge naturalmente la pregunta de qué propiedades estadísticas se pueden usar, las más usadas por los cosmólogos son la función de correlación de dos puntos y su transformada de Fourier, el espectro de potencias.

2.2.2. Función de correlación de dos puntos

A escalas grandes, las galaxias no están distribuidas aleatoriamente en el espacio, en vez de eso, tienden a agruparse en cúmulos o supercúmulos. Entonces, la probabilidad de encontrar una galaxia en una posición \vec{x} depende de la posición \vec{y} de otra, dicho de otra manera, es más probable encontrar una galaxia en la vecindad de otra que en cualquier otra posición aleatoria [15].

Para describir lo anterior [47], sea un par de puntos \vec{x} y \vec{y} y dos elementos de volumen dV alrededor de estos puntos. La probabilidad de encontrar una galaxia en el elemento de volumen dV alrededor de \vec{x} es:

$$P_1 = \bar{n}dV, \quad (2.42)$$

siendo \bar{n} la densidad de número promedio de galaxias. Si la ubicación de éstas no estuviera correlacionada, la probabilidad de encontrar una galaxia en dV alrededor de \vec{x} y al mismo tiempo encontrar otra en dV alrededor de \vec{y} simplemente sería $P_2 = P_1^2$, es decir, el producto de encontrar cada una de ellas en dV , pero dado que la distribución está correlacionada, se debe cuantificar este exceso de probabilidad, de tal forma que:

$$P_2 = (\bar{n}dV)^2(1 + \xi(\vec{x}, \vec{y})), \quad (2.43)$$

donde $\xi(\vec{x}, \vec{y})$ recibe el nombre de función de correlación de dos puntos. Lo anterior se aplica a una distribución discreta de materia. Para una distribución continua, la función de correlación de la densidad de materia es:

$$\langle \rho(\vec{x})\rho(\vec{y}) \rangle = \bar{\rho}^2(1 + \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{y}) \rangle) = \bar{\rho}^2(1 + \xi(\vec{x}, \vec{y})), \quad (2.44)$$

donde se definió la función de correlación como un promedio en el ensamble $\xi(\vec{x}, \vec{y}) \equiv \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{y}) \rangle$. Debido a la homogeneidad estadística, la función de correlación no puede depender individualmente de \vec{x} y de \vec{y} , sino solamente de su vector separación $\vec{r} \equiv \vec{x} - \vec{y}$, por lo que conviene redefinir ξ como:

$$\xi(\vec{r}) \equiv \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle, \quad (2.45)$$

y debido a la isotropía estadística, solo depende de su módulo r , entonces, la función de correlación posee simetría esférica, de tal forma que $\xi(\vec{r}) = \xi(r)$.

2.2.3. Espectro de potencias de las perturbaciones de materia

Una descripción alternativa y equivalente de las propiedades estadísticas de la distribución de materia en el universo es el espectro de potencias de materia, el cual se define a partir de la función de correlación mediante una transformada de Fourier $\delta_{\vec{k}}$.

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \int_V \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x, \quad (2.46)$$

donde \vec{k} es el vector de onda. En la integral anterior se considera que el universo observable cabe dentro de una caja cúbica de volumen $V = L^3 \sim (3000 \text{ Mpc})^3$, de tal forma que para el modo de mayor longitud de onda, $k = 2\pi/L$. La transformada de Fourier es un número complejo, pero como $\delta(\vec{x})$ es real, se sigue que $\delta_{-\vec{k}} = \delta_{\vec{k}}^*$.

Lo que sigue es calcular la correspondiente transformada de Fourier de la función de correlación, $\langle \delta_{\vec{k}}^* \delta_{\vec{k}'} \rangle$. Multiplicando $\delta_{\vec{k}}^* \delta_{\vec{k}'}$ y luego tomando el promedio se tiene [35].

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\vec{k}}^* \delta_{\vec{k}'} \rangle &= \frac{1}{V^2} \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int d^3x' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x}') \rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int d^3r e^{-i\vec{k}'\cdot(\vec{x}+\vec{r})} \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle. \end{aligned} \quad (2.47)$$

se identifica la función de correlación en el espacio comóvil $\xi(\vec{r}) = \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle$, además, se

acomodan las integrales separándolas por sus dependencias correspondientes [35]:

$$\langle \delta_{\vec{k}}^* \delta_{\vec{k}'} \rangle = \frac{1}{V^2} \int d^3 r e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \xi(\vec{r}) \int d^3 x e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}}. \quad (2.48)$$

Debido a la ortogonalidad de las ondas planas, $\int d^3 x e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} = V \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$, donde $\delta_{\vec{k}\vec{k}'}$ es la delta de Kronecker y no tiene nada que ver con las perturbaciones, de tal manera que:

$$\langle \delta_{\vec{k}}^* \delta_{\vec{k}'} \rangle = V \delta_{\vec{k}\vec{k}'} P(\vec{k}), \quad (2.49)$$

donde al final de definió el espectro de potencias de materia $P(\vec{k})$ como:

$$P(\vec{k}) \equiv \int d^3 r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \xi(\vec{r}) \quad (2.50)$$

el cual es, efectivamente, la transformada de Fourier de la función de correlación. Recordando que por isotropía estadística, $\xi(\vec{r}) = \xi(r)$ y $P(\vec{k}) = P(k)$, y de la definición de producto punto entre dos vectores, se sigue que:

$$P(k) = \int d^3 r e^{-ikr \cos \theta} \xi(r). \quad (2.51)$$

La integral anterior puede resolverse en coordenadas esféricas, luego, escribiendo las integrales explícitamente y tomando solamente la parte real:

$$P(k) = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} r^2 \sin \theta \cos(kr \cos \theta) \xi(r) dr d\theta d\phi. \quad (2.52)$$

La integral para ϕ es directa y su resultado es 2π . Después se hace el cambio de variable $u \equiv kr \cos \theta$, se realiza la integral para u , y se hace uso se la propiedad $\sin(-kr) = -\sin(kr)$ para finalmente tener:

$$P(k) = 4\pi \int_{r=0}^{\infty} r^2 \xi(r) \frac{\sin kr}{kr} dr. \quad (2.53)$$

Esta construcción es valida para cualquier modelo cosmológico en general en cualquier tiempo, por lo que se puede construir tanto $P(k)$ como ξ para cualquier campo δ de contraste de densidad. En particular, el espectro de potencias de la figura 2.1 corresponde al espectro de potencias de materia al día de hoy para el modelo Λ CDM.

Análogamente a la ecuación 2.49, se define un espectro de potencias a partir de un contraste de densidad inicial $\delta_{0\vec{k}}$:

$$\langle \delta_{0\vec{k}}^* \delta_{0\vec{k}'} \rangle = V \delta_{\vec{k}\vec{k}'} P_0(k), \quad (2.54)$$

donde ahora $P_0(k)$ es llamado el espectro de potencias primordial. Teorías inflacionarias predicen una forma bastante simple para él a través de una ley de potencias [14]:

$$P_0(k) = A_0 k^n, \quad (2.55)$$

y se le denomina a A_0 la amplitud de las perturbaciones escalares primordiales y a n el índice

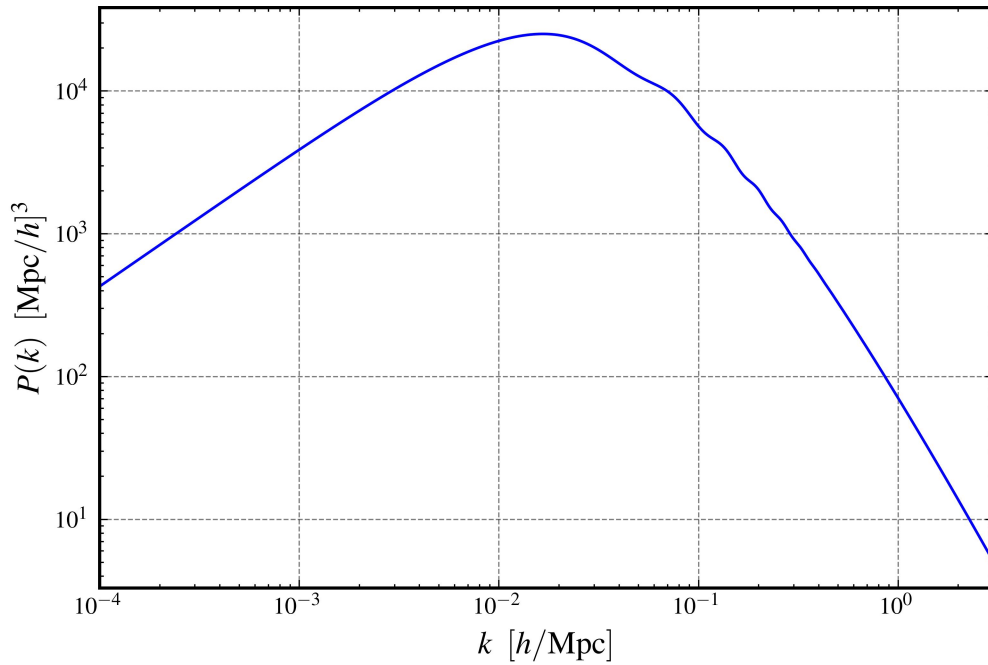


Figura 2.1: El espectro de potencias de materia para el modelo Λ CDM al día de hoy mostrando la cantidad de estructura en el universo a diferentes escalas k . Escalas pequeñas corresponden a distancias grandes y viceversa.

espectral de las mismas. El valor de A_0 es del orden de 10^{-12} [14]. El caso $n = 1$ lleva el nombre de espectro invariante de escala de Harrison-Zeldovich.

2.2.4. El parámetro σ_8

Es común que, en lugar de usar la amplitud inicial de las perturbaciones, los astrónomos y cosmólogos prefieren usar otro parámetro más fácil de medir para describir la amplitud de las perturbaciones en algún modelo cosmológico y en el universo real. Para tal objetivo, conviene introducir la media cuadrática de las fluctuaciones de materia, en donde su cuadrado σ_R^2 (es decir, la varianza en las fluctuaciones de materia) está dada por [30]:

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k^3 P(k) W^2(kR) d \ln k, \quad (2.56)$$

donde:

$$W(x) = \frac{3j_1(x)}{x}, \quad (2.57)$$

siendo j_1 la función de Bessel esférica de primer orden. La cantidad σ_R mide la magnitud de las fluctuaciones de densidad de materia promediadas sobre una esfera de radio R en un corrimiento al rojo z , esto asumiendo que estas fluctuaciones son lineales, es decir, que cumplen la ecuación 2.37. Se ha observado que al analizar galaxias en una esfera de $R = 8h^{-1}$ Mpc, la amplitud de las fluctuaciones de estas galaxias σ_{8g}^2 es aproximadamente 1. Esto motiva una elección para

describir la normalización de las fluctuaciones de materia al día de hoy, descrita por el parámetro $\sigma_8 \equiv \sigma_{8h^{-1}\text{Mpc}}$. Su mejor estimación para el modelo ΛCDM a partir de datos de Planck [3] es $\sigma_8 = 0,8210$.

2.3. Distorsiones en el Espacio de Corrimientos al Rojo.

Las distorsiones en el espacio de corrimientos al rojo (RSD por su nombre en inglés) son una forma para probar las perturbaciones, esto debido que las soluciones de las perturbaciones tienen relación directa con la distorsión, las cuales se pueden medir, y esto proporciona una solución a las ecuaciones de perturbación. También se pretende estudiar las distorsiones para constreñir los parámetros de un modelo alternativo a ΛCDM , como se mostrará en el siguiente capítulo. En esta sección se pretende calcular las RSD en términos de las soluciones de las perturbaciones y también se estudiarán los efectos Kaiser y Alcock-Paczynski.

En el universo de fondo, la ley de Hubble establece que la materia tiene un campo de velocidad descrito por la recesión de galaxias respecto a un observador. Esto se establece a partir de la ley de Hubble 1.1. Esa ecuación debe ser válida para cualquier observador en cualquier época de la historia, dado que la Tierra no es el centro del universo, y cada observador experimenta una ley de Hubble local con una tasa de expansión $H(t)$. En ese sentido, se puede reescribir esta ley de la siguiente manera:

$$v = H(t)r. \tag{2.58}$$

El corrimiento al rojo cosmológico z es el que se asocia a la velocidad de recesión, haciendo a la ley de Hubble una buena aproximación de éste:

$$\bar{z} = H(t)r, \tag{2.59}$$

en donde \bar{z} corresponde al corrimiento al rojo de fondo.

En un universo inhomogéneo, sin embargo, la situación es distinta. Las fluctuaciones de densidad de materia generan campos gravitacionales, éstos a su vez producen aceleraciones, que afectan la misma materia y generando un campo de velocidades peculiares \vec{v}_p [47], las cuales son desviaciones de esta expansión homogénea establecida por la ley de Hubble. Entonces, el corrimiento al rojo total z_{tot} de un objeto es una suma del correspondiente al universo de fondo y una pequeña perturbación, $z = \bar{z} + \delta z$, de tal manera que:

$$z_{tot} = Hr + \vec{v}_p \cdot \hat{n}. \tag{2.60}$$

En lo anterior, \hat{n} representa la dirección correspondiente a la línea de visión, la cual es la única que contribuye al corrimiento al rojo. Conviene notar que de esta forma el vector posición de un objeto en el espacio real se puede escribir como $\vec{r} = r\hat{n}$. Ahora se define una nueva cantidad s de manera muy similar a como se definió la distancia r , de tal forma que $\vec{s} = s\hat{n}$ y el corrimiento al rojo total z_{tot} se puede escribir como la ley de Hubble sin perturbaciones, solo que aquí ya se incluye la información tanto la contribución debida al flujo de Hubble como la de las velocidades

peculiares:

$$z_{tot} = H(t)s, \quad (2.61)$$

por lo tanto, a partir de lo anterior y la ecuación 2.60 se puede relacionar s y r :

$$s = r + \frac{\vec{v}_p \cdot \hat{n}}{H}, \quad (2.62)$$

y en notación vectorial:

$$\vec{s} = \vec{r} + \frac{\vec{v}_p \cdot \hat{n}}{H} \hat{n} \quad (2.63)$$

El vector \vec{s} representa la distancia en el espacio de corrimiento al rojo, la cual no es la distancia real, pero es la que se puede medir. Las distorsiones que surgen de medir \vec{s} en lugar de \vec{r} reciben el nombre de distorsiones de corrimiento al rojo (RSD). El sistema de coordenadas que define \vec{r} es el espacio real, mientras que el que define \vec{s} es el espacio de redshift. Vale la pena mencionar que el espacio real en realidad es desconocido, por lo que para reconstruir las posiciones en espacio real se requiere asumir un modelo cosmológico particular, en cambio las posiciones en espacio de redshift no dependen del modelo cosmológico.

2.3.1. Función de correlación void-galaxia en el espacio de redshift

En este trabajo se pretende estudiar las distorsiones de corrimiento al rojo en vacíos (o voids), en ese sentido se estudiarán dos tipos de distorsiones de redshift:

- Distorsiones dinámicas medidas a partir de la función de correlación, también llamadas *efecto Káiser*, se estudiarán en esta sub-sección.
- Distorsiones geométricas de estructuras esféricamente simétricas, mejor conocidas por el nombre de *efecto de Alcock-Paczynski*, las cuales se discutirán en la siguiente sub-sección.

En la sección 2.2.2 se estudió la correlación entre dos galaxias mediante la ahora llamada función de correlación de sobredensidades las cuales pueden asociarse a halos galácticos, pero también se puede estudiar lo mismo para dos distribuciones de objetos diferentes. Para este trabajo se considerarán dos tipos de objetos: vacíos y galaxias, por lo que se usará la función de correlación void-galaxia ξ_{vg} que cuantifica el exceso de probabilidad de encontrar en el centro de un vacío (o void) en el elemento de volumen dV alrededor de \vec{x} y al mismo tiempo, una galaxia en dV alrededor de \vec{y} [15]:

$$P = \bar{n}_v \bar{n}_g dV^2 [1 + \xi_{vg}(\vec{x}, \vec{y})], \quad (2.64)$$

siendo \bar{n}_v la densidad de número promedio de voids y \bar{n}_g la de galaxias. En [24] se normaliza la probabilidad de tal manera que el producto $\bar{n}_v \bar{n}_g dV^2$ se hace igual a uno. Entonces, considerando homogeneidad e isotropía estadística, la probabilidad de encontrar una galaxia y el centro de un void separados por una distancia comóvil r en el espacio real es

Proceso de formación de estructura a gran escala
2.3 Distorsiones en el Espacio de Corrimientos al Rojo.

$$P = 1 + \xi(r), \quad (2.65)$$

donde a partir de ahora, con el objetivo de simplificar notación, $\xi \equiv \xi_{vg}$ y se le llamará simplemente función de correlación asumiendo que se trata de voids y galaxias.

Para obtener una relación entre las funciones de correlación en los espacios comóvil y de corrimiento al rojo respectivamente, primero se necesita una expresión para la velocidad peculiar de una galaxia, hospedada en la perturbación correspondiente al void. A orden lineal, el campo de velocidad peculiar es [25]:

$$\vec{v}_p = -\frac{1}{3}f(z)H\vec{r}\Delta(r), \quad (2.66)$$

donde $\Delta(r)$ es el contraste de densidad de materia promedio (o suavizado) en una región esférica de radio comóvil r [24]:

$$\Delta(r) = \frac{3}{r^3} \int_0^r \delta(r')r'^2 dr', \quad (2.67)$$

y $f(z)$ es la función de crecimiento de las perturbaciones de velocidad relacionada con el factor de crecimiento D de las perturbaciones de densidad [30]:

$$f(a) = \frac{d \ln D}{d \ln a}, \quad (2.68)$$

recordando que el factor de escala y el corrimiento al rojo se relacionan mediante $z = 1/a - 1$. Para el modelo Λ CDM, $f(z)$ se aproxima muy bien mediante la densidad relativa de materia, de tal forma que $f(z) = \Omega_m^\gamma(z)$ con $\gamma \simeq 0,55$. Para un modelo con materia oscura inestable, éste puede ser obtenido numéricamente a partir de las soluciones para las perturbaciones. Lamentablemente, ni $\delta(r)$ ni $\Delta(r)$ se pueden observar de manera directa, por fortuna se ha demostrado una relación entre $\Delta(r)$ con la función de correlación promedio $\bar{\xi}(r)$ [45]:

$$\bar{\xi}(r) = b\Delta(r), \quad (2.69)$$

donde b es el factor de *bias*, el cual surge a partir del desconocimiento que se tiene sobre la formación de la parte visible de las galaxias, ya que no son las únicas que forman el campo de densidad de materia, esto es, podría haber una distribución de perturbaciones de materia diferente a la de la materia visible, en ese sentido, $b = \delta_g/\delta$ parametriza dichas discrepancias, donde δ_g es el contraste de densidad de las galaxias [14]. Con esto, el campo de velocidad 2.66 luce ahora de la siguiente manera:

$$\vec{v}_p = -\frac{f/b}{3}H\vec{r}\bar{\xi}(r). \quad (2.70)$$

Antes de seguir, conviene aclarar un poco la notación: sea \vec{X} el vector de posición del centro del void, cuyo origen está en la posición del observador, \vec{x} la posición de la galaxia, y $\vec{r} \equiv \vec{x} - \vec{X}$ su separación, además, se elige la línea de visión como la dirección hacia el centro del void, la cual es $\hat{X} = \vec{X}/X$. La figura 2.2 ilustra de muy buena manera la distorsión de un void y una galaxia

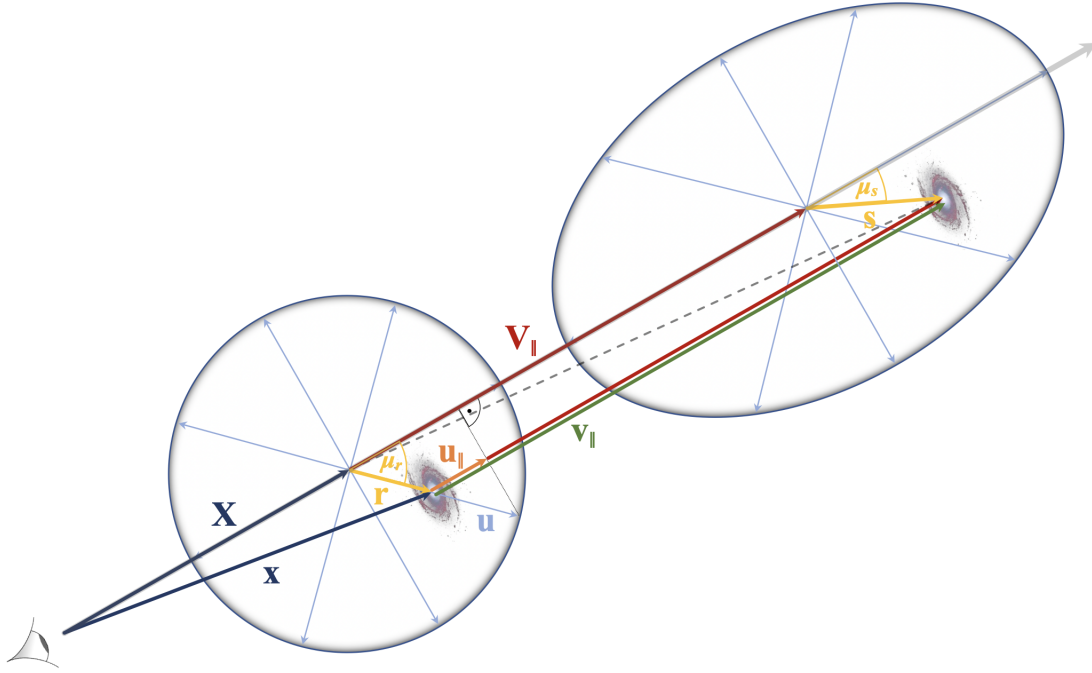


Figura 2.2: Distorsión de redshift del void y una galaxia en esa región. Se ve el vector de separación \vec{r} en el espacio real (izquierda) entre el centro del void con vector de posición \vec{X} y la galaxia ubicada en \vec{x} , así como el vector de posición \vec{s} en el espacio de redshift (derecha). El cambio en la función de correlación entre ambos espacios se conoce como efecto Kaiser. Imagen obtenida de [24]

en esa región vacía. Entonces, la relación entre \vec{s} y \vec{r} es ahora [23]:

$$\vec{s} = \vec{r} - \frac{f/b}{3} \vec{r} \cdot \hat{X} \bar{\xi}(r) \hat{X}. \quad (2.71)$$

Es importante notar que el número total de galaxias no se puede alterar debido a las RSD, por lo tanto, la función de correlación en el espacio real y en el de redshift son iguales:

$$\xi(\vec{r}) = \xi^s(\vec{s}). \quad (2.72)$$

Para obtener la función de correlación en el espacio de redshift se hace un cambio de coordenadas:

$$1 + \xi^s(\vec{s}) = [1 + \xi^s(\vec{r})] \left| \frac{\partial \vec{s}}{\partial \vec{r}} \right|, \quad (2.73)$$

en donde $|\partial \vec{s} / \partial \vec{r}|$ es el Jacobiano de la transformación que relaciona \vec{s} y \vec{r} , el cual está dado por:

$$\left| \frac{\partial \vec{s}}{\partial \vec{r}} \right| = 1 - \frac{f/b}{3} \bar{\xi}(r) \hat{X} \cdot \hat{X} - \frac{f/b}{3} \hat{X} \cdot \vec{r} \nabla \bar{\xi}(r) \cdot \hat{X}, \quad (2.74)$$

como la función de correlación solo depende de la coordenada radial r , su gradiente es $\nabla \bar{\xi}(r) = \hat{r} \partial \bar{\xi}(r) / \partial r$, entonces:

$$\left| \frac{\partial \vec{s}}{\partial \vec{r}} \right| = 1 - \frac{f/b}{3} \bar{\xi}(r) - \frac{f/b}{3} \hat{X} \cdot \vec{r} \frac{\partial \bar{\xi}(r)}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \hat{X}. \quad (2.75)$$

Se puede demostrar que el Jacobiano de la transformación entre el espacio real y el espacio de redshift es:

$$\left| \frac{\partial \vec{s}}{\partial \vec{r}} \right| = 1 - \frac{f/b}{3} \bar{\xi}(r) - \frac{f}{b} \mu^2 [\xi(r) - \bar{\xi}(r)]. \quad (2.76)$$

Entonces, haciendo uso de 2.72 y 2.73 se tiene lo siguiente:

$$\xi^s(\vec{s}) = \frac{\xi(r)}{1 - \frac{f/b}{3} \bar{\xi}(r) - \frac{f}{b} \mu^2 [\xi(r) - \bar{\xi}(r)]}. \quad (2.77)$$

Ahora se hace una expansión en serie a primer orden en ξ se obtiene una relación entre la función de correlación en el espacio real y en el de redshift, esa transformación de dicha función entre ambos espacios se conoce como *efecto kaiser*:

$$\xi^s(\vec{s}) = \xi(r) + \frac{f/b}{3} \bar{\xi}(r) + \frac{f}{b} \mu^2 [\xi(r) - \bar{\xi}(r)]. \quad (2.78)$$

En [24] se descompone la función $\xi^s(\vec{s})$ en multipolos usando los polinomios de Legendre P_ℓ :

$$\xi_\ell^s(s) = \frac{2\ell + 1}{2} \int_{-1}^1 \xi^s(s) P_\ell(\mu) d\mu. \quad (2.79)$$

La integral anterior puede realizarse analíticamente, sin embargo, los únicos casos en que es distinta de cero, es para el caso $\ell = 0$ con $P_0 = 1$ y $\ell = 2$ con $P_2 = (3x^2 - 1)/2$. Físicamente esto quiere decir que el efecto Kaiser es dominante en el monopolo y el cuadrupolo, lo cual se comprueba en la figura 2.3 en donde se realizó la medición de los multipolos de la función de correlación void-galaxia en el espacio de redshift para 30 catálogos de datos simulados. La forma explícita del monopolo y el cuadrupolo son:

$$\xi_0^s(s) = \xi(r) \left[1 + \frac{f/b}{3} \right], \quad (2.80)$$

$$\xi_2^s(s) = \frac{2f/b}{3} [\xi(r) - \bar{\xi}(r)]. \quad (2.81)$$

A pesar de que son los únicos dos en que la integral 2.79 es distinta de cero, son suficientes para determinar la función de correlación en el espacio de redshift:

$$\xi^s(\vec{s}) = \xi_0^s(s) + \frac{3\mu - 1}{2} \xi_2^s(s), \quad (2.82)$$

además, $\xi_0^s(s)$ y $\xi_2^s(s)$ cumplen con la siguiente identidad:

$$\xi_0^s(s) - \bar{\xi}_0^s(s) = \xi_2^s(s) \frac{3 + f/b}{2f/b}. \quad (2.83)$$

Esta última igualdad es de suma importancia por dos razones: 1) Se tiene una relación entre

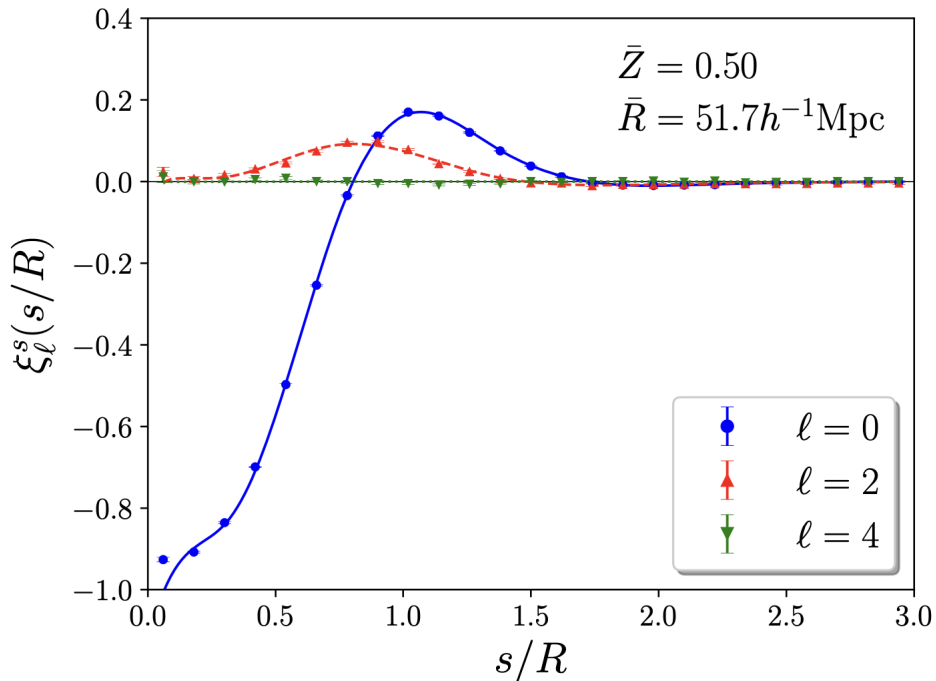


Figura 2.3: Monopolo (azul), cuadrupolo (rojo) y hexadecapolo (verde) de la función de correlación void-galaxia en el espacio de redshift para el mismo conjunto de datos simulados, notándose que únicamente para los primeros dos el efecto káiser es dominante. Figura obtenida de [24].

multipolos en el espacio de redshift sin ser necesario el cálculo de ninguna cantidad en el espacio real [24], por lo que las mediciones son completamente realizables independientemente del modelo cosmológico y 2) que las mediciones de los multipolos solamente dependen de la tasa de crecimiento logarítmica dividido entre el factor de bias. Por esa razón se usan las distorsiones de redshift, particularmente el efecto Kaiser, para aprender sobre el crecimiento de las perturbaciones [17]. Los resultados de las mediciones de RSD, a partir de la función de correlación, se reportan en términos del parámetro f/b o también se suele usar $f\sigma_8$, con σ_8 definido en la subsección (2.5.4), multiplicando f/b por $b\sigma_8$. En este trabajo se usaron distintos resultados sobre RSD reportados en términos de $f\sigma_8$, los cuales se mostrarán en el capítulo 4, cuando se estimen las incertidumbres de los parámetros de un modelo alternativo a Λ CDM.

2.3.2. El test de Alcock-Paczynski

Cuando se determina el vector distancia \vec{s} en el espacio de redshift entre algún par vacío-galaxia, conviene separar el vector en dos componentes, una a lo largo de la línea de visión s_{\parallel} y otra sobre el plano del cielo (perpendicular a la línea de visión), s_{\perp} . Estas cantidades en términos de la separación angular observada $\delta\vartheta$ y el corrimiento al rojo δz como medida de la separación a lo largo de la línea de visión, tiene la siguiente manera [24]:

$$s_{\perp} = D_A(z)\delta\vartheta, \quad (2.84)$$

Proceso de formación de estructura a gran escala
2.3 Distorsiones en el Espacio de Corrimientos al Rojo.

$$s_{\parallel} = \frac{\delta z}{H(z)}. \quad (2.85)$$

Tradicionalmente se introducen los llamados parámetros de Alcock-Paczynski, q_{\parallel} y q_{\perp} dados por:

$$q_{\perp} = \frac{s_{\perp}^*}{s_{\perp}} = \frac{D_A^*(z)}{D_A(z)}, \quad (2.86)$$

$$q_{\parallel} = \frac{s_{\parallel}^*}{s_{\parallel}} = \frac{H(z)}{H^*(z)}, \quad (2.87)$$

en donde las cantidades con asterisco (*) son evaluadas en la cosmología real, la cual se desconoce, o se asume de acuerdo a determinada teoría bajo prueba, mientras que las que no lo tienen corresponden a una cosmología que asume un modelo fiducial para D_A y H , el cual típicamente es el de concordancia. El caso especial en el que la cosmología verdadera coincide con la fiducial, se tiene que $q_{\perp} = q_{\parallel} = 1$, esto sucede si la distribución de las galaxias en el void es esféricamente simétrica. Este método se conoce como el test de Alcock-Paczynski [22] y provee constricciones a los parámetros cosmológicos a partir de predicciones de D_A y H . Más aún, para estructuras esféricamente simétricas en promedio, se puede definir una cantidad ϵ que corresponde a la proporción de q_{\perp} y q_{\parallel} que juegue el papel de parámetro de Alcock-Paczynski:

$$\epsilon = \frac{q_{\perp}}{q_{\parallel}} = \frac{D_A^*(z)H(z)}{D_A(z)H^*(z)}. \quad (2.88)$$

El cual cuantifica la medida de distorsión geométrica de una estructura esférica debido a las velocidades peculiares. Normalmente se suele adoptar al modelo Λ CDM como el modelo fiducial, y se asume otro modelo como el que describe el universo real, ese modelo corresponde a aquél en el que la materia oscura es inestable, y decae a un tipo de partícula relativista llamada radiación oscura. Tal modelo se describirá y analizará en el próximo capítulo.

Un ejemplo de una distorsión geométrica se visualiza en la figura 2.4, en donde se muestra una sobredensidad en una estructura simétrica, las galaxias de esa sobredensidad sufren una caída gravitacional hacia el centro de ésta. Una galaxia en el extremo más cercano al observador se está alejando, por lo que la distancia estimada es mayor que la real. Por el contrario, en el extremo más alejado, la galaxia se está acercando porque cae al centro de la sobredensidad, entonces la distancia estimada es menor que la real. Las galaxias a los costados no sufren distorsiones, entonces sus distancias no sufren alteraciones.

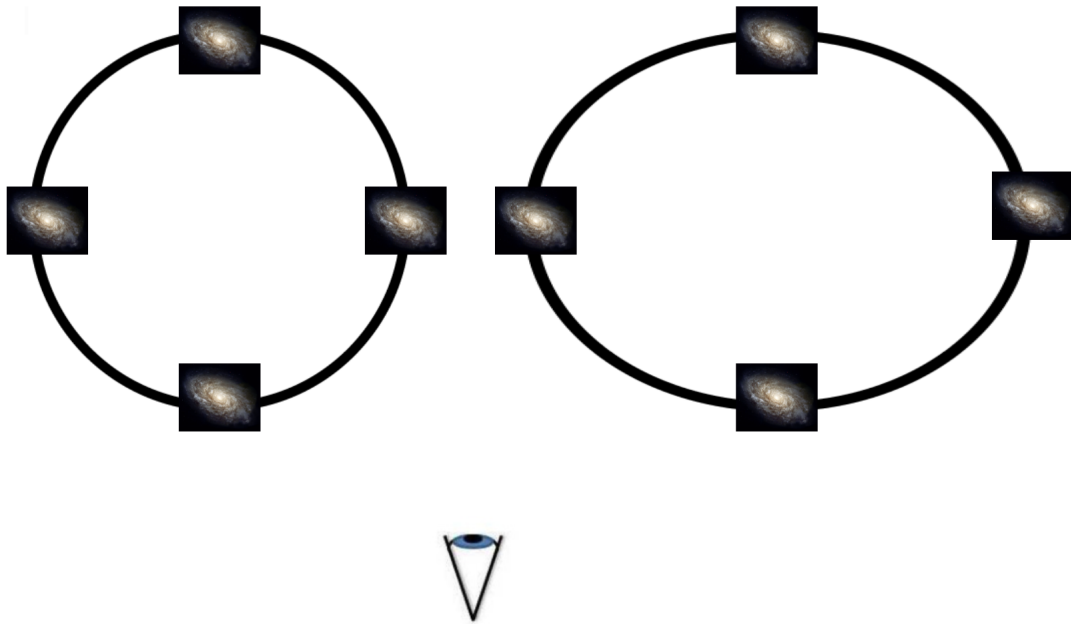


Figura 2.4: Distorsiones geométricas de una sobredensidad. Del lado izquierdo se muestra la sobredensidad en el espacio real, mientras que en el lado derecho está en el espacio de redshift, se puede apreciar que la región parece achatada en la dirección de la visual.

Capítulo 3

Modelo cosmológico con materia oscura inestable

3.1. El problema de la Materia Oscura

Como ya se mencionó en el primer capítulo, aproximadamente el 30 por ciento de la densidad total del universo corresponde a materia formada por partículas no relativistas, o polvo, y está constituida por materia bariónica y materia oscura. Esta última constituye alrededor del 96 % del total de la materia, y a pesar de eso, no se tiene mucha certeza sobre su naturaleza, incluso, no se tiene una prueba directa sobre su existencia. Este dilema recibe el nombre de *problema de la materia oscura* y es una de las preguntas abiertas más importantes de la cosmología, y de la física en general. Es por eso que en esta sección se abordará el tema de la materia oscura (DM por su nombre en inglés).

3.1.1. Evidencias observacionales de la materia oscura

A pesar de que su naturaleza es aún un misterio sin resolver, las evidencias que prueban que la materia oscura existe son numerosas y convincentes, aunque la ausencia de su detección directa deja abierta la posibilidad a su no existencia y a otras hipótesis alternativas como una modificación de las leyes de la gravitación a grandes escalas como posibles soluciones al problema. Vale la pena mencionar algunas de dichas posibles evidencias [19]:

- **Curvas de rotación.** Las curvas de rotación no son más que las velocidades de rotación promedio de objetos (como estrellas o gas) como función de su distancia radial al centro de la galaxia. Ford y Rubin en 1970 [46] dedujeron teóricamente que estas velocidades deberían disminuir como función de esta distancia radial, sin embargo, las observaciones indicaban que permanecía constante. Esto sucede porque las galaxias tienen más masa de la que se puede detectar a partir de objetos luminosos. Esta masa faltante tendría que estar distribuida en halos de materia oscura que rodean a la galaxia. La figura 3.1 ilustra este hecho, en donde de analizaron las curvas de rotación de la galaxia NGC 6503.
- **Lentes gravitacionales.** El efecto de una lente gravitacional se produce cuando la luz que

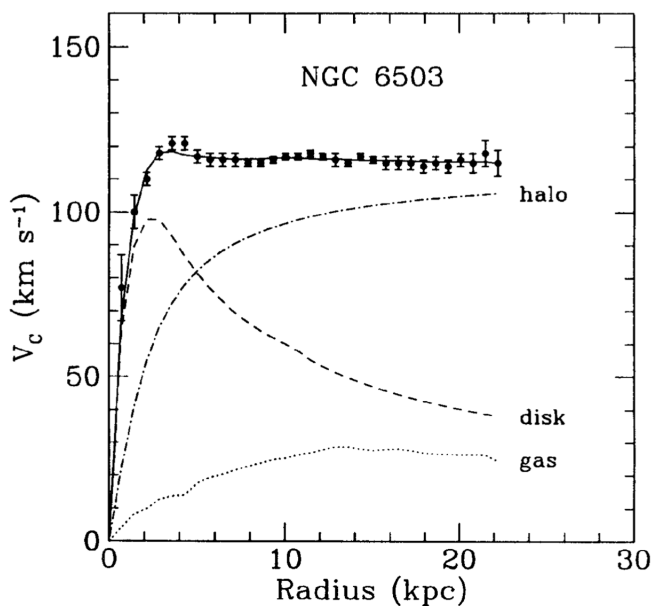


Figura 3.1: Curvas de rotación de la galaxia NGC 6503. Tomando en cuenta únicamente materia bariónica (el gas y el disco de la galaxia), no pueden explicar las velocidades observadas. Sin embargo, al añadir un halo de materia oscura rodeando la galaxia, la aproximación a los datos es mucho mejor. Imagen obtenida de [19].

proviene de objetos lejanos se curva al pasar alrededor de algún otro objeto masivo, de tal forma que un observador en la Tierra ve tales objetos distorsionados o en una posición diferente. Al analizar los objetos luminosos deformados, es posible calcular la masa del objeto que causa este efecto el cual funciona como lente gravitacional. De observaciones del Sloan Digital Sky Survey [2], a través del análisis de un gran número de objetos deformados, se concluyó que las galaxias, entre las que se incluye la Vía Láctea, deben tener mucha más materia de la que se podía detectar, concluyendo que la responsable de este aumento en la masa es la materia oscura.

- **Gas caliente en cúmulos de galaxias.** En la figura 3.2 se puede observar una imagen en rayos X del Cúmulo de Coma, un conjunto con más de 1000 galaxias, en donde se puede ver la presencia de gas caliente hacia el centro de la imagen. La materia oscura crea una barrera de potencial haciendo que el gas permanezca ahí, de lo contrario, se dispersaría. Peebles y Ostriker desde los años 70's demostraron a partir de simulaciones que los halos de materia oscura son necesarios para garantizar la estabilidad de galaxias y cúmulos.
- También existen evidencias de DM a escalas cosmológicas. Por ejemplo para predecir correctamente la distribución de perturbaciones a grandes escalas de acuerdo al $P(k)$ observado, es necesario que haya estructura de materia oscura a escalas mucho mayores a las galácticas y de cúmulos.

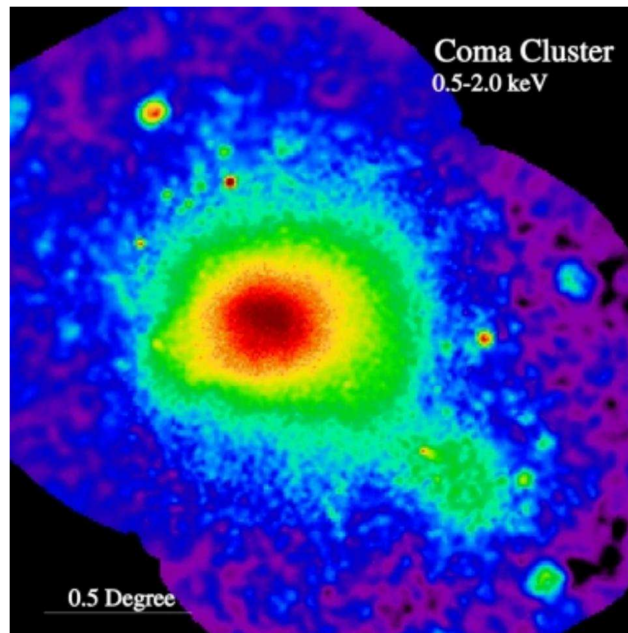


Figura 3.2: Imagen en rayos X del Cúmulo de Coma, tomada por el satélite ROSAT.

3.1.2. Características de la materia oscura fría

Aunque existen diversos modelos de materia oscura, el más aceptado y estudiado es la materia oscura fría (CDM) debido a que es el modelo más sencillo que explica la formación de estructuras cósmicas como galaxias o cúmulos de galaxias. La CDM consiste en partículas con velocidades no relativistas, además de otras características como [49]:

- Solo interactúan gravitacionalmente y no tienen interacciones entre ellas de manera significativa en el universo tardío. A escalas de energía mayores, como las del universo temprano podrían haber interactuado a través de la fuerza débil.
- La materia oscura al día de hoy es una densidad de reliquia de un proceso de aniquilación fuera del equilibrio en el universo temprano.
- Deben ser eléctricamente neutras y no deben tener carga de color.
- No se pueden enfriar por medio de fotones radiantes, a diferencia de la materia bariónica, esto debido a que son eléctricamente neutras.
- Se comportan como fluido perfecto sin presión a grandes escalas.
- Su tiempo de vida debe ser del orden de la edad del universo.

3.1.3. Problemas del modelo de CDM

A pesar de que el modelo de CDM es consistente con la formación de estructuras a grandes estructuras como galaxias y cúmulos de galaxias a distancias de unos cuantos de Mpc a cerca de

1000 Mpc, el problema surge a escalas por debajo de 1 Mpc, donde se han encontrado discrepancias a niveles de subestructuras. Los principales problemas con la CDM son los siguientes [43]:

- Las subestructuras, como halos y galaxias satélites de la Vía Láctea, no son tan numerosos como se esperaban. A este problema se le conoce como el "problema de los satélites faltantes".
- No se encuentra evidencia contundente de que dadas las imágenes de una galaxia lejana, se detecten lentes gravitacionales producidas por halos de CDM pequeños como para justificar la predicción del modelo.
- Los perfiles de densidad de halos de CDM en galaxias pequeñas predichos por la teoría difieren a los obtenidos mediante simulaciones.
- La densidad en las regiones centrales de halos de materia oscura en galaxias es mucho mayor en las simulaciones con CDM que en las observaciones.
- Galaxias espirales ordinarias tienen mucha menos CDM en su interior de lo esperado.
- Simulaciones producen galaxias cuyos discos son más pequeños y con menos momento angular que las observaciones realizadas.

Estas discrepancias entre la teoría y las observaciones, ha motivado a los cosmólogos a generar modelos alternativos a la CDM, a continuación se mencionan algunos de ellos.

- **Materia oscura fuertemente autointeractuante (SIDM)**[48]. En este modelo, las colisiones entre las partículas de materia oscura dan origen una evolución de estructuras más compleja.
- **Materia oscura tibia (WDM)**[13]. Estas partículas tienen velocidades de aproximadamente 100 m/s. Al extrapolar en el tiempo, adquieren dispersiones de velocidades lo suficientemente grandes como para tener efectos en las subestructuras como por ejemplo, se impide la formación de estructuras pequeñas, resolviendo con eso el problema de los satélites faltantes de la Vía Láctea.
- **Materia oscura repulsiva (RDM)**[21]. Aquí, la materia oscura consiste en bosones masivos con un potencial repulsivo que corrige los perfiles de densidades de los halos.
- **Materia oscura difusa o escalar (FDM o SFDM)**[29]. En donde las partículas bosónicas tienen una masa muy pequeña, y su longitud de onda de Compton es comparable al tamaño del bulbo de una galaxia, por lo tanto, la materia oscura no se puede concentrar en pequeñas escalas resultando que los halos en su centro son más achatados que en CDM.
- **Materia oscura aniquilante (SADM)**[32]. Las partículas de materia oscura colisionan y se autoaniquilan, reduciendo la densidad en las regiones centrales de los cúmulos de galaxias.

En esta tesis, se trabajará con otro modelo alternativo, el cual recibe el nombre de "materia oscura inestable o materia oscura decauyente"(DDM), en donde las partículas de materia oscura decaen en partículas relativistas denominadas radiación oscura y las cuales tienen tiempos de vida

de escalas cósmicas y por tanto, solo afectan la evolución del universo tardío. Esto podría resolver algunas de las discrepancias antes mencionadas, por ejemplo, ocasiona que las densidades de los halos se reduzcan, sin alterar la formación de estructura a grandes escalas [11]. En las siguientes secciones se desarrollará toda la cosmología correspondiente a este modelo.

Diversos trabajos han establecido cotas para el tiempo de vida de la DDM. En las últimas dos décadas, varios trabajos han establecido cotas para el tiempo de vida de la materia oscura, por ejemplo, Ichiki et al (2004) [31] la estableció mayor a 54 Giga-años (Gyr); De Lope Amigo et al. (2008) [16] la fijó mayor a 100 Gyr; mientras que Aoyama et al. (2014) [6], Audren et al. (2014) [8], obtuvieron que el tiempo de vida de la materia oscura es mayor a 200 Gyr. Finalmente, Enqvist et al. (2015) [18] estableció la cota del tiempo de vida de la materia oscura inestable mayor a 95 Gyr.

3.2. Proceso de Decaimiento de una partícula (no relativista) a partículas relativistas

En esta sección se derivarán las ecuaciones de continuidad para una partícula inestable pesada y también para su producto, la cual es una partícula relativista. Llámese ψ a la primera. La reliquia de ésta partícula apareció en una etapa del universo en la que esta especie ya era no relativista, y su tiempo de vida τ_ψ es tan grande que puede compararse con la edad del universo. Su densidad, puede escalar de tal manera que $\rho_\psi \propto a^{-3}$. Esto solo es verdad cuando no hay decaimiento de la partícula ψ .

Cuando existen procesos en equilibrio, la densidad de número comóvil de partículas de la especie ψ se conserva, sin embargo, en procesos fuera del equilibrio, en donde el número de partículas por volumen comóvil de una especie cambia, como el que se está estudiando en este trabajo, esto no es verdad. En este caso, se tiene un decaimiento exponencial de las partículas ψ , que se puede escribir de esta manera [33]:

$$\frac{d}{dt}(a^3 n_\psi) = -\frac{a^3 n_\psi}{\tau_\psi}. \quad (3.1)$$

Desarrollando la derivada del lado izquierdo y dividiendo entre a^3 :

$$\dot{n}_\psi + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\psi = -\frac{n_\psi}{\tau_\psi}. \quad (3.2)$$

La relación entre la densidad de energía y la densidad de número de partículas de la especie ψ es está dada por $p_\psi = m_\psi \rho_\psi$, donde m_ψ es la masa de una partícula. Entonces, introduciendo en la ecuación anterior:

$$\frac{d}{dt}(m_\psi n_\psi) + 3\frac{\dot{a}}{a}m_\psi n_\psi = -\frac{m_\psi n_\psi}{\tau_\psi}, \quad (3.3)$$

usando la relación anterior se tiene finalmente:

$$\dot{\rho}_\psi + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_\psi = -\frac{\rho_\psi}{\tau_\psi}. \quad (3.4)$$

Modelo cosmológico con materia oscura inestable

3.2 Proceso de Decaimiento de una partícula (no relativista) a partículas relativistas

La ecuación anterior es la ecuación de continuidad para las partículas de la especie ψ , que describe la evolución a lo largo del tiempo de la densidad de energía de la especie ψ . Durante el decaimiento, cierta fracción de las partículas ψ se convierte en partículas relativistas, por lo que también es necesaria una ecuación de continuidad para esa especie. Para tal objetivo, la segunda ley de la termodinámica aplicada a un elemento de volumen comóvil implica que [33]:

$$d\hat{s} = \frac{dQ}{T} = -\frac{d(a^3\rho_\psi)}{T} = \frac{\rho_\psi a^3}{T\tau_\psi} dt, \quad (3.5)$$

donde T es la temperatura del baño de partículas relativistas, la cual es la temperatura del Universo. En la última igualdad se usó la ecuación 3.1 dividida entre la masa de la partícula m_ψ . En lo anterior se puede ver que si el tiempo de vida de la partícula ψ tiende a infinito, la entropía por volumen comóvil es constante, pero no es el caso del modelo que se está considerando en este trabajo. Después se usa la Primera Ley de la Termodinámica: $dE = -pdV + TdS$, en donde, como se está trabajando en esta tesis con unidades naturales, la masa y la energía son equivalentes, entonces $V_c = 1$, el volumen físico es $V_{total} = a^3 V_c = a^3$, por lo tanto, la energía total es:

$$E_{total} = V\rho_{total} = a^3\rho_{total}, \quad (3.6)$$

y la primera ley se puede escribir, usando lo anterior, y 3.5, de esta forma:

$$d(a^3\rho_r) = -p_r d(a^3) - d(a^3\rho_\psi) = -\frac{\rho_r}{3}d(a^3) + (a^3\rho_\psi)dt/\tau, \quad (3.7)$$

en donde se usó la ecuación de estado del producto $\omega_r = 1/3$, y entonces $p_r = \rho_r/3$. Desarrollando lo anterior se sigue que:

$$a^3 d\rho_r + 3a^2 \dot{a}\rho_r dt = -\frac{\rho_r}{3}(3a^2 \dot{a} dt) + a^3 \rho_\psi \frac{dt}{\tau} \quad (3.8)$$

Dividiendo todo lo anterior entre $a^3 dt$ se llega a la ecuación de continuidad del producto:

$$\dot{\rho}_r + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r = \frac{\rho_\psi}{\tau}. \quad (3.9)$$

La física detrás de 3.9 es clara: el término $4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r$ representa el corrimiento al rojo usual de la densidad de energía de la radiación. En ausencia del decaimiento de ψ , el tiempo de vida de ésta tiende a infinito, por lo que el término ρ_ψ se hace cero, y la solución de 3.9 es simplemente $\rho_R \propto a^{-4}$. La densidad de energía de la radiación está relacionada con la entropía por volumen comóvil mediante [33]:

$$\rho_r = \frac{3}{4} \left(\frac{45}{2\pi^2 g_*} \right)^{1/3} \hat{s}^{4/3} a^{-4}, \quad (3.10)$$

donde g_* corresponde al número efectivo de grados de libertad relativistas. Las ecuaciones 3.4, 3.9 (o equivalentemente, 3.10) con su respectiva ecuación de Friedmann forman un sistema de ecuaciones diferenciales cerrado gobernando la evolución del factor de escala a , ρ_ψ y ρ_r (o la densidad de entropía comóvil \hat{s}). Su solución numérica es mostrada en la figura 3.3 [33]. Las líneas punteadas indican la evolución de la densidades ρ_ψ y ρ_r cuando la partícula ψ no decae. Es de

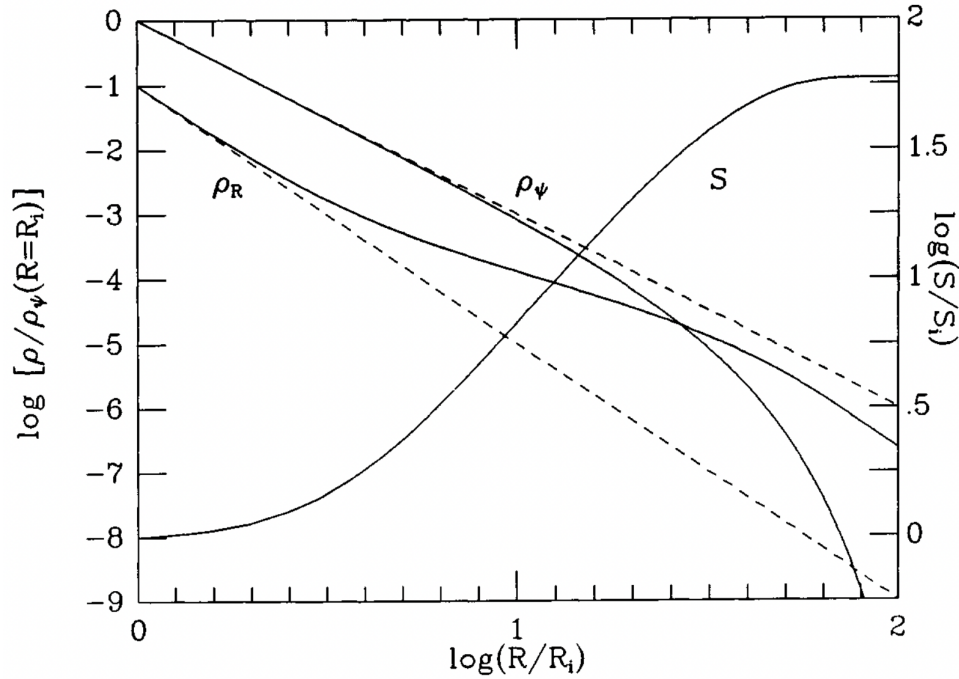


Figura 3.3: Evolución de las densidades ρ_{psi} y su correspondiente producto ρ_{dr} junto con la entropía en la época en que la partícula ψ decae. Las líneas punteadas indican la evolución de ambas especies en ausencia de decaimiento de ψ . Notar que en la imagen, R es el factor de escala, y R_i es el mismo al día de hoy, el cual tiene el valor de uno. Imagen obtenida de [33].

especial relevancia notar el aumento de entropía debido al decaimiento de ψ , algo que no ocurre en un universo con partículas estables.

3.3. Cosmología de Fondo

Regresando al modelo cosmológico que se está considerando en esta tesis, el cual se caracteriza por tener materia oscura fría que decae en un tipo de partícula relativista llamada radiación oscura, las ecuaciones que gobiernan sus densidades de fondo son análogas a 3.4 y 3.9, y son las siguientes:

$$\dot{\rho}_{ddm} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho_{ddm} - \Gamma_{ddm}\rho_{ddm}, \quad (3.11a)$$

$$\dot{\rho}_{dr} = -4\frac{\dot{a}}{a}\rho_{dr} + \Gamma_{ddm}\rho_{ddm}, \quad (3.11b)$$

en donde se definió la tasa de decaimiento de la materia oscura inestable como $\Gamma_{ddm} = 1/\tau_{ddm}$, siendo τ_{ddm} el tiempo de vida medio de la materia oscura inestable en unidades de giga-años. Con el objetivo de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, conviene primero hacer un cambio de variable. Recordando que $H \equiv \dot{a}/a = \frac{d \ln a}{dt}$, y definiendo $N = \ln a$, se tiene que $dN = H dt$ y el sistema 3.11a y 3.11b en términos de N en vez de t luce de la siguiente forma:

$$\frac{\rho_{ddm}}{dN} = -3\rho_{ddm} - \frac{1}{H}\Gamma_{ddm}\rho_{ddm}, \quad (3.12a)$$

$$\frac{\rho_{dr}}{dN} = -4\rho_{dr} + \frac{1}{H}\Gamma_{ddm}\rho_{ddm}. \quad (3.12b)$$

Las ecuaciones anteriores, junto con la ecuación de Friedmann correspondiente, determinarán la evolución del factor de escala $a(t)$ para este modelo en específico, para el cual se consideran en total seis especies de partículas:

- **Materia bariónica.** Su densidad es $\rho_b = \rho_{0b}a^{-3}$.
- **Materia relativista estándar.** Anteriormente se había ignorado debido a su baja abundancia el día de hoy, sin embargo, en este modelo sí será tomada en cuenta dado que hay una contribución debida al decaimiento que podría tener efectos considerables. Su densidad es $\rho_r = \rho_{0r}a^{-4}$.
- **Energía oscura.** Es la constante cosmológica, exactamente la misma que en el modelo de concordancia, con densidad $\rho_\Lambda = \rho_{0\Lambda}$.
- **Materia oscura fría estable (CDM).** Corresponde a la parte del total de la materia oscura que es estable. Su tratamiento es igual que en el modelo Λ CDM y su densidad es $\rho_{cdm} = \rho_{0cdm}a^{-3}$.
- **Materia oscura fría inestable (DDM).** Es la parte del total de materia oscura que sí decae en radiación oscura. Su densidad está determinada por el sistema de ecuaciones 3.12.
- **Radiación oscura (DR).** Es el producto de decaimiento de la DDM, su densidad está determinada también por el mismo sistema de ecuaciones diferenciales 3.12.

La ecuación de Friedmann para este modelo, análogamente a la obtenida para el modelo Λ CDM, es:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{0b}a^{-3} + \rho_{0r}a^{-4} + \rho_{0\Lambda} + \rho_{0cdm}a^{-3} + \rho_{ddm} + \rho_{dr}), \quad (3.13)$$

e insertando en el sistema 3.12:

$$\frac{\rho_{ddm}}{dN} = -3\rho_{ddm} - \left(\frac{8\pi G}{3}(\rho_{0b}a^{-3} + \rho_{0r}a^{-4} + \rho_{0\Lambda} + \rho_{0cdm}a^{-3} + \rho_{ddm} + \rho_{dr}) \right)^{-1/2} \Gamma_{ddm}\rho_{ddm}, \quad (3.14a)$$

$$\frac{\rho_{dr}}{dN} = -4\rho_{dr} + \left(\frac{8\pi G}{3}(\rho_{0b}a^{-3} + \rho_{0r}a^{-4} + \rho_{0\Lambda} + \rho_{0cdm}a^{-3} + \rho_{ddm} + \rho_{dr}) \right)^{-1/2} \Gamma_{ddm}\rho_{ddm}. \quad (3.14b)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales anterior es imposible de resolver analíticamente de manera exacta dada su complejidad, por lo que es necesario recurrir a herramientas numéricas para resolverlo. Por otro lado, para reducir errores numéricos conviene expresar las soluciones en términos de las densidades relativas Ω_{ddm} y Ω_{dr} , las cuales se obtienen dividiendo tanto ρ_{dm} como ρ_{dr} entre la densidad crítica ρ_c en cualquier momento correspondiente a este modelo, establecida en la ecuación 1.55, en donde, al usar la ecuación de Friedmann 3.13 se sigue que:

$$\rho_c = (\rho_{0b}a^{-3} + \rho_{0r}a^{-4} + \rho_{0\Lambda} + \rho_{0cdm}a^{-3} + \rho_{ddm}(a) + \rho_{dr}(a)). \quad (3.15)$$

Aquí es muy importante señalar dos puntos: el primero, que para calcular ρ_c , el sistema 3.14a y 3.14b ya debió ser resuelto, debido a que se están usando las densidades de DM y DR para calcular la densidad crítica; el segundo, que se asume que la suma de las densidades relativas de materia oscura fría y decaente al día de hoy corresponden a la densidad de materia oscura fría del modelo Λ CDM inferida a partir del espectro de potencias del fondo cósmico de microondas (CMB) del satélite Planck 2018 [3], cuyo mejor ajuste es $\Omega_{0cdm}h^{2(\Lambda CDM)} = 0,11933 \pm 0,00091$, y por lo tanto, debe cumplirse una ecuación de constricción dada por:

$$\Omega_{0cdm} + \Omega_{0ddm} = \Omega_{0cdm}^{(\Lambda CDM)}, \quad (3.16)$$

además, como una parte del total de la materia oscura va a decaer, se denotará el cociente de las densidades al día de hoy de ambas especies como α_{ddm} , la cual puede tomar valores entre cero y uno, siendo los casos extremos $\alpha_{ddm} = 0$ si toda la materia oscura es estable, y $\alpha_{ddm} = 1$ si toda es inestable, entonces, ambas densidades relativas se pueden escribir así:

$$\Omega_{0ddm} = \Omega_{0cdm}^{(\Lambda CDM)} \alpha_{ddm}, \quad (3.17a)$$

$$\Omega_{0cdm} = \Omega_{0cdm}^{(\Lambda CDM)} (1 - \alpha_{ddm}), \quad (3.17b)$$

donde se puede ver fácilmente que la suma de las ecuaciones anteriores cumple la ecuación de constricción 3.16. Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales 3.14a y 3.14b se usó el código público de Einstein-Boltzmann «Cosmic Linear Anisotropy Solving System» (CLASS) [37] del cual se utilizó el wrapper o librería correspondiente escrita en el lenguaje de programación Python. De aquí en adelante será la herramienta que servirá para calcular todas las cantidades relacionadas a este modelo, y que además sirvió como base para la creación de un código propio con el objetivo de estimar las incertidumbres de los parámetros de este modelo, los cuales son la tasa de decaimiento Γ_{ddm} y la fracción de materia oscura que decae, α_{ddm} .

3.4. Ecuaciones para las Perturbaciones Lineales de DDM

A nivel de las perturbaciones escalares, la ecuación 1.35 si bien es válida para las perturbaciones del total de la materia, ésta no es aplicable en este modelo para cada especie por separado, debido a la interacción entre las partículas de materia oscura y su producto, por esa razón las ecuaciones de conservación para la DDM y la DR tienen otra forma en este modelo [8]:

$$\nabla_{\mu} T_{ddm}^{\mu} = -a\Gamma_{ddm}\rho_{ddm}(1 + \delta_{ddm}), \quad (3.18)$$

$$\nabla_{\mu} T_{dr}^{\mu} = a\Gamma_{ddm}\rho_{ddm}(1 + \delta_{ddm}). \quad (3.19)$$

Por lo anterior, los contrastes de densidad para la DDM y su producto δ_{ddm} y δ_{dr} junto con la divergencia de las velocidades θ_{ddm} y θ_{dr} tienen una forma diferente a 2.34 y 2.35, las cuales, en la norma Newtoniana Conforme están dadas por [8]:

$$\delta'_{ddm} = -\theta_{ddm} - 3\dot{\phi} - a\Gamma_{ddm}\psi, \quad (3.20)$$

$$\theta'_{ddm} = -\frac{a'}{a}\theta_{ddm} + k^2\psi, \quad (3.21)$$

$$\delta'_{dr} = -\frac{4}{3}(\theta_{ddm} - 3\dot{\phi}) + a\Gamma_{ddm}\frac{\rho_{ddm}}{\rho_{dr}}(\delta_{ddm} - \delta_{dr} + \psi), \quad (3.22)$$

$$\theta'_{dr} = \frac{k^2}{4}\delta_{dr} - k^2\sigma_{dr} + k^2\psi - a\Gamma_{ddm}\frac{3\rho_{ddm}}{4\rho_{dr}}\left(\frac{4}{3}\theta_{dr} - \theta_{ddm}\right), \quad (3.23)$$

donde σ_{dr} corresponde a la perturbación de estrés anisotrópico de la radiación oscura, definido análogamente a 2.33. Las ecuaciones anteriores son implementadas en el código CLASS para un modelo con materia oscura inestable para producir, entre otros, su respectivo espectro de potencias. Considerar un modelo así tiene implicaciones importantes a nivel de formación de estructura, dada la importancia de la materia oscura fría en este aspecto [8]. En la siguiente sección se analizarán distintos efectos de un modelo con materia oscura inestable tanto para la cosmología de fondo como a nivel de formación de estructura a gran escala descrita por la dinámica de las perturbaciones.

3.5. Implicaciones del modelo DDM

Usando CLASS para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales 3.14, además de las respectivas ecuaciones de cada especie estándar, se encuentran, en primer lugar, las densidades relativas de la materia oscura inestable, y su respectivo producto. Las condiciones iniciales para encontrar una solución fueron $\Omega_{0ddm} = \Omega_{0cdm}^{(\Lambda CDM)}\alpha_{ddm}$ y $\Omega_{0dr} \simeq 0$. Soluciones para la densidad relativa de DDM y DR se muestran en las figuras 3.4 y 3.5 para diferentes valores tanto de la tasa de decaimiento Γ_{ddm} como de la fracción de materia oscura que decae α_{ddm} .

Con respecto a las gráficas para Ω_{ddm} (figura 3.4), es evidente que entre menor sea la fracción de materia oscura que es inestable, es decir, el valor de α_{ddm} , la porción de ésta será cada vez menos. Es interesante observar que para los paneles 2 y 3, correspondientes a tiempos de vida mayores que la edad del universo de acuerdo Λ CDM son prácticamente idénticos, lo cual tiene sentido ya que para los dos, la probabilidad de que DDM haya decaído al día de hoy es muy baja, manteniéndose sin cambio sus densidades relativas. En cuanto al primer panel correspondiente al tiempo de vida más corto, indica que, a pesar de que en el pasado llegó a ser prácticamente la especie dominante,

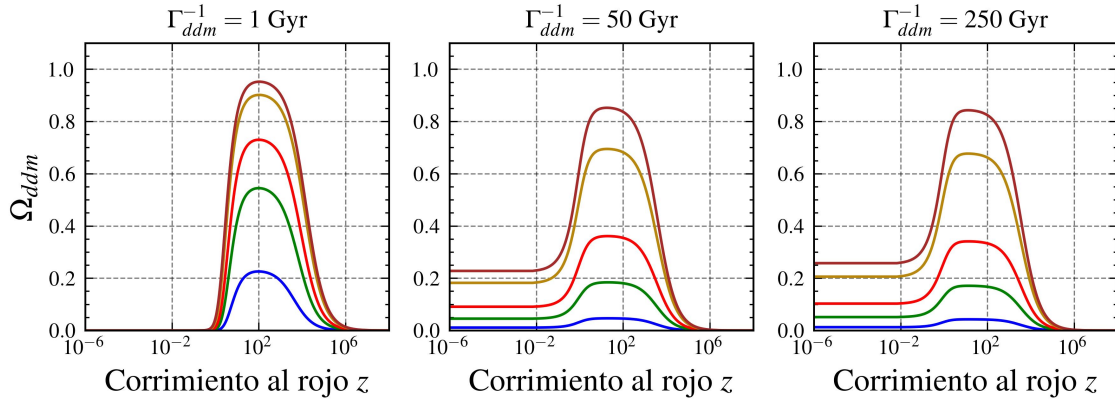


Figura 3.4: Densidades relativas de la materia oscura inestable como función del corrimiento al rojo z . Cada panel muestra en la parte superior el valor del inverso del parámetro Γ_{ddm} , cada uno con seis diferentes casos, correspondientes a: $\alpha_{ddm} = 0,05$ (azul), $\alpha_{ddm} = 0,2$ (verde), $\alpha_{ddm} = 0,4$ (rojo), $\alpha_{ddm} = 0,8$ (dorado) y $\alpha_{ddm} = 1$ (café)

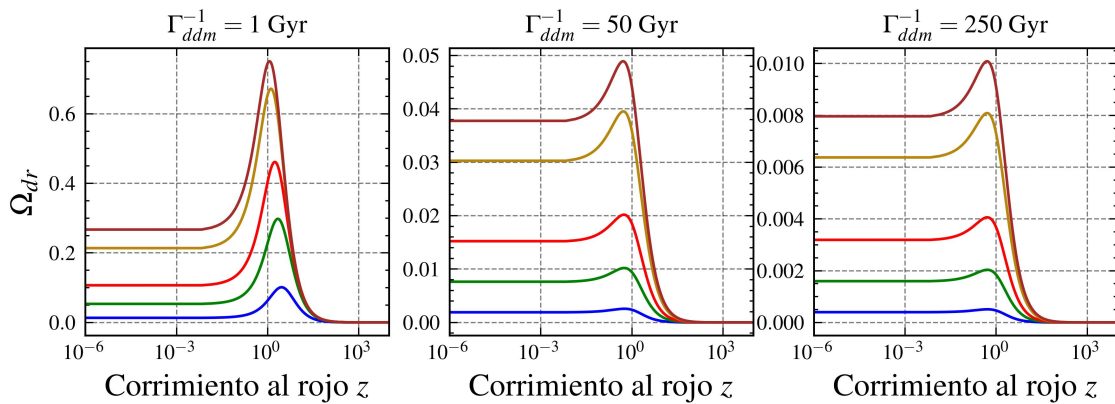


Figura 3.5: Densidad relativa del producto de la DDM, radiación oscura, como función del corrimiento al rojo. Cada panel muestra en la parte superior el valor del inverso del parámetro Γ_{ddm} , cada uno con seis diferentes casos, correspondientes a: $\alpha_{ddm} = 0,05$ (azul), $\alpha_{ddm} = 0,2$ (verde), $\alpha_{ddm} = 0,4$ (rojo), $\alpha_{ddm} = 0,8$ (dorado) y $\alpha_{ddm} = 1$ (café)

actualmente la cantidad de materia oscura sería prácticamente nulo, algo que es imposible dada las estimaciones actuales de la densidad relativa de la reliquia de materia oscura.

Naturalmente, la evolución de la materia oscura inestable está estrechamente relacionada con la evolución de su producto, analizando la figura 3.5, se aprecia cómo conforme el tiempo de vida de la DM es mayor, la densidad relativa de la radiación oscura disminuye, un resultado esperado debido a que si aún no decae la materia oscura, evidente habrá una menor cantidad de su producto. También resulta fácil notar intuitivamente que entre mayor sea la fracción de DM inestable, mayor cantidad de radiación oscura habrá. Finalmente, cabe destacar que sólo en el caso en que el tiempo de vida es menor a la edad del universo, su fracción respecto al total de todas las especies de partículas es considerable, siendo en los otros casos demasiado pequeña.

Haber resuelto el sistema de ecuaciones diferenciales 3.14a y 3.14b permite ahora resolver la ecuación de Friedmann 3.13 para encontrar la evolución del factor de escala a lo largo de la historia del universo tardío. A diferencia de lo que se hizo en el capítulo 1, no es posible encontrar una expresión explícita para $a(t)$, pero se puede usar CLASS para obtener soluciones numéricas y poder graficarlas. Resulta natural pensar que un modelo alternativo a Λ CDM tendrá variaciones importantes respecto a la forma en que el universo se expande, a pesar de eso, la forma de $a(t)$ no varía en gran manera cuando se consideran tiempos de vida del orden o mayores a la edad del universo, por lo que incluir imágenes en donde se aprecie el factor de escala para diferentes valores de Γ_{ddm} o α_{ddm} no aportaría demasiada información al respecto. Por ese motivo, para cuantificar de mejor manera las discrepancias conviene definir la diferencia relativa del factor de escala entre diferentes modelos DDM y el Λ CDM, la cual está definida por:

$$\frac{\delta a}{a} \equiv \frac{|a_{\Lambda\text{CDM}} - a_{\text{DDM}}|}{a_{\Lambda\text{CDM}}}. \quad (3.24)$$

La diferencia relativa cuantifica la diferencia del factor de escala en el modelo DDM respecto al valor para Λ CDM, de manera que en el valor extremo que $\delta a/a = 1$, la diferencia es máxima, es decir, que $a_{\text{DDM}} = 0$. En la figura 3.6 se muestra tal diferencia relativa para distintas cantidades de α_{ddm} y Γ_{ddm} . Se puede apreciar que para tiempos de vida mayores a la edad del universo, la variación de $a(t)$ entre ambos modelos es de, a lo mucho, de poco más del 3 por ciento. Para tiempos de vida tempranos, las discrepancias se elevan en gran medida, llegando a un 60 por ciento para un modelo en donde la materia oscura tarda solo 1 Gyr en decaer, y además, toda ella es inestable, nuevamente indicando que un modelo con un tiempo de vida tan corto no es bueno para describir el universo. También se puede ver que un universo con una fracción de DDM inestable menor da lugar a menos diferencias que uno con mayor cantidad.

Otro efecto de un modelo con DDM se presenta al momento de calcular las diferentes medidas de distancia el cual será relevante para estudiar algunos efectos de las distorsiones de redshift en el siguiente capítulo. Nuevamente se puede hacer uso de la diferencia relativa, en este caso, de la distancia angular diametral:

$$\frac{\delta D_A}{D_A} \equiv \frac{|D_{A\Lambda\text{CDM}} - D_{A\text{DDM}}|}{D_{A\Lambda\text{CDM}}}. \quad (3.25)$$

La cual está graficada en la figura 3.7. Se puede apreciar que para corrimientos al rojo grandes,

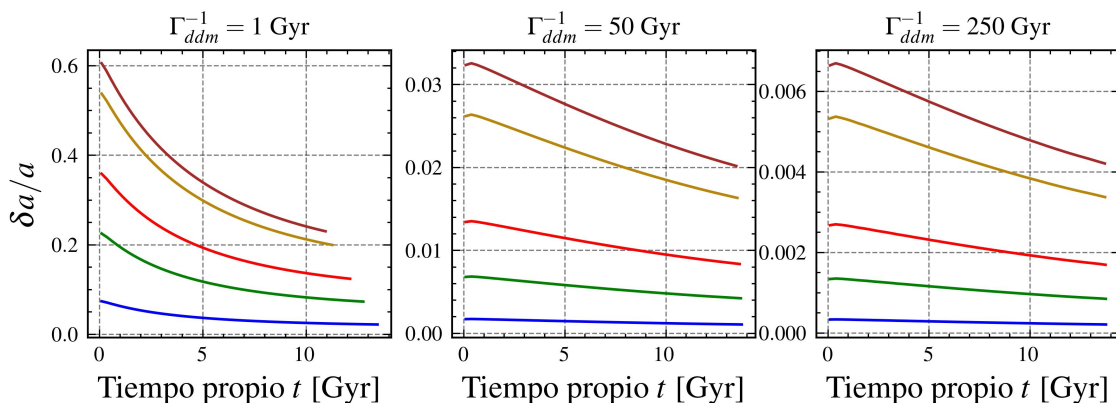


Figura 3.6: Diferencia relativa entre el factor de escala del modelo Λ CDM y el modificado con materia oscura inestable como función del tiempo propio. Cada panel muestra en la parte superior el valor del inverso del parámetro Γ_{ddm}^{-1} , cada uno con seis diferentes casos, correspondientes a: $\alpha_{ddm} = 0,05$ (azul), $\alpha_{ddm} = 0,2$ (verde), $\alpha_{ddm} = 0,4$ (rojo), $\alpha_{ddm} = 0,8$ (dorado) y $\alpha_{ddm} = 1$ (café).

las discrepancias aumentan si el tiempo de vida es menor, y si la fracción de DDM aumenta, sin embargo, como es de esperarse, para z tendiendo a cero, que corresponde al día de hoy (o equivalentemente, a distancias cortas) no hay diferencia alguna entre ambos modelos. Las gráficas correspondientes a la distancia comóvil y a la distancia luminosa son muy similares, y por esa razón no se incluyen, se aplica el mismo razonamiento a cada una de ellas.

Tal y como se mencionó en la sección anterior, al ser la materia oscura una especie clave para la formación de estructura a gran escala en el universo, modificar tanto su tiempo de vida como su fracción debe tener consecuencias en este aspecto. En este caso, con la finalidad de obtener un mejor análisis y ver lo efectos del decaimiento en las perturbaciones, conviene graficar directamente el espectro de potencias para diferentes modelos DDM junto con el Λ CDM. En la figura 3.8 se observa dicha imagen. Nuevamente, los casos extremos, correspondientes a $\Gamma_{ddm}^{-1} = 1$ Gyr y $\alpha_{ddm} = 1$ muestran que, a escalas grandes (o distancias pequeñas) un modelo con esos parámetros predice mayor estructura de la que realmente existe, y viceversa, a escalas pequeñas (o distancias grandes) se predice mucha menos estructura de la que las observaciones indican. Incluso a un tiempo de vida de 50 Gyr, se llegan a apreciar diferencias respecto al modelo de concordancia. También se aprecia que conforme más grande sea el valor de la fracción de DDM, el cambio respecto al modelo Λ CDM será mayor, sin embargo, entre más grande sea su tiempo de vida, la diferencia se hace cada vez menor, sugiriendo que existe una sensibilidad importante de $P(k)$ respecto al parámetro Γ_{ddm} conforme hay una mayor fracción de DDM.

Como se pudo analizar cualitativamente, los parámetros de un modelo con materia oscura inestable, α_{ddm} y Γ_{ddm} , están estrechamente correlacionados. Parece que para un modelo con una fracción de DDM muy cercana a cero, el factor de escala, las medidas de distancia, o el espectro de potencias no sufren variaciones significativas respecto a Λ CDM sin importar el tiempo de vida. Por el contrario, si la fracción de DDM respecto al total de DM es grande es necesario que Γ_{ddm}^{-1} sea lo suficientemente grande para que los resultados coincidan con el modelo de concordancia. La

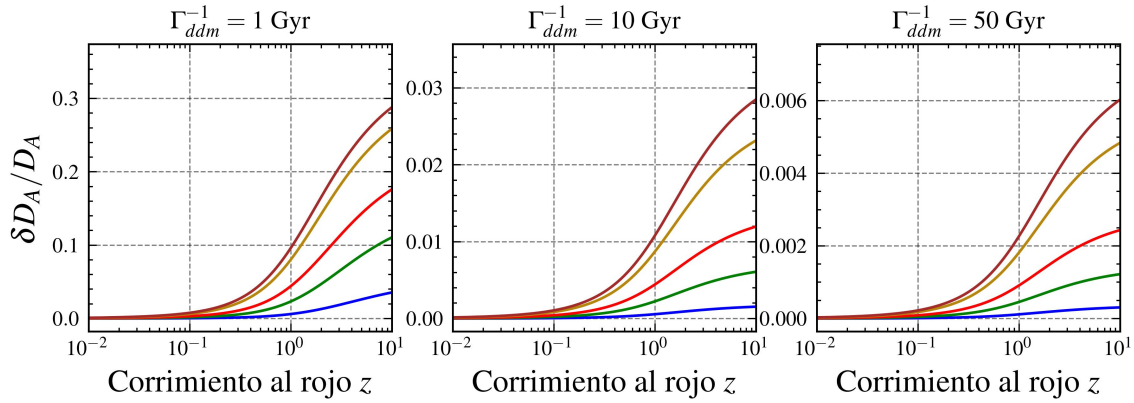


Figura 3.7: Diferencia relativa entre la distancia angular diametral del modelo Λ CDM y el modificado con materia oscura inestable como función del corrimiento al rojo. Cada panel muestra en la parte superior el valor del inverso del parámetro Γ_{ddm} , cada uno con seis diferentes casos, correspondientes a: $\alpha_{ddm} = 0,05$ (azul), $\alpha_{ddm} = 0,2$ (verde), $\alpha_{ddm} = 0,4$ (rojo), $\alpha_{ddm} = 0,8$ (dorado) y $\alpha_{ddm} = 1$ (café)

búsqueda de un modelo DDM que reproduzca fielmente las observaciones es todo un reto, por lo que en el siguiente capítulo se explicará cómo se estableció un modelo con valores de α_{ddm} y Γ_{ddm} que reprodujeran la observable $f\sigma_8$ predicha por Λ CDM así como el parámetro de Alcock-Paczynski.

Para finalizar el capítulo, vale la pena hablar brevemente sobre el espectro de potencias del fondo cósmico de microondas (CMB), una de las principales pruebas del modelo del Big-Bang, el cual sí tiene cambios en el régimen relativista de las perturbaciones, a diferencia del proceso de formación de estructura a pequeñas escalas. Como se puede ver en la figura 3.9, hay diferencias mucho más significativas en escalas pequeñas, mientras que para escalas grandes no hay tantas discrepancias, incluso para tiempos de vida pequeños, estas diferencias a escalas pequeñas están asociadas al efecto de Sachs-Wolfe. El objetivo de este trabajo no es estudiar este efecto, pero ofrece una perspectiva interesante a explorar en este modelo para imponer constricciones a los parámetros de éste.

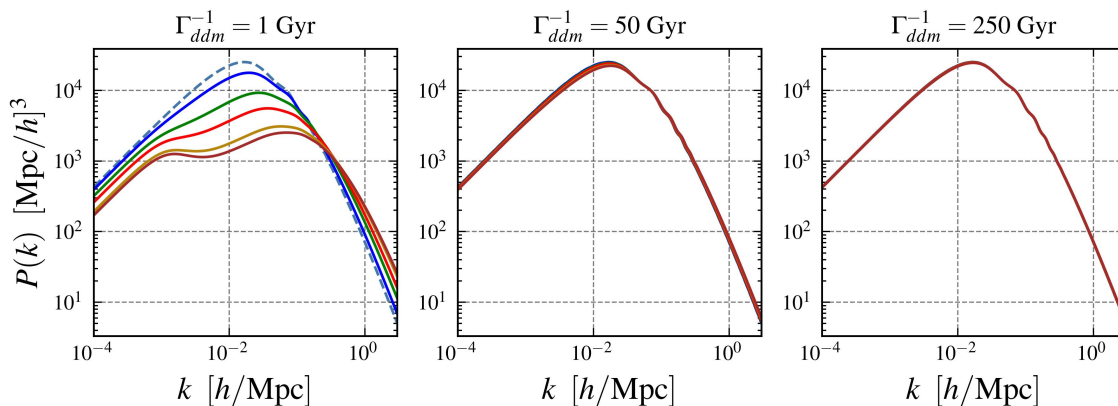


Figura 3.8: Espectro de potencias de materia para diferentes modelos DDM. Cada panel muestra en la parte superior el valor del inverso del parámetro Γ_{ddm} , cada uno con seis diferentes casos, correspondientes a: $\alpha_{ddm} = 0,05$ (azul), $\alpha_{ddm} = 0,2$ (verde), $\alpha_{ddm} = 0,4$ (rojo), $\alpha_{ddm} = 0,8$ (dorado) y $\alpha_{ddm} = 1$ (café). La línea azul punteada corresponde en cada panel al espectro en el modelo Λ CDM

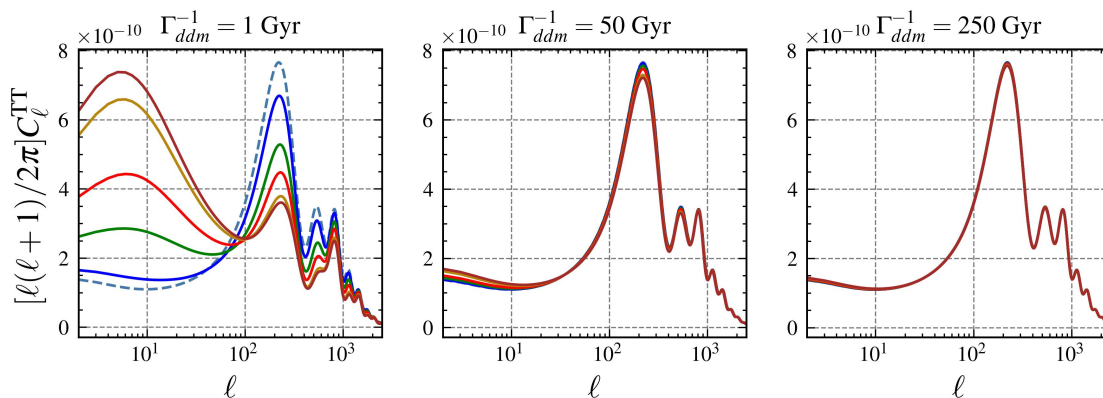


Figura 3.9: Espectro de potencias del fondo cósmico de microondas para diferentes modelos DDM. Cada panel muestra en la parte superior el valor del inverso del parámetro Γ_{ddm} , cada uno con seis diferentes casos, correspondientes a: $\alpha_{ddm} = 0,05$ (azul), $\alpha_{ddm} = 0,2$ (verde), $\alpha_{ddm} = 0,4$ (rojo), $\alpha_{ddm} = 0,8$ (dorado) y $\alpha_{ddm} = 1$ (café). La línea azul punteada corresponde en cada panel al espectro en el modelo Λ CDM

Capítulo 4

Pronósticos de las incertidumbres de los parámetros del modelo DDM de acuerdo con datos simulados de Euclid.

Este capítulo está enfocado en obtener estimaciones para las incertidumbres de los dos parámetros del modelo con materia oscura inestable, α_{ddm} y Γ_{ddm} , estas estimaciones se realizan usando datos simulados para experimentos futuros (algo que en inglés se denomina *mock data*) de $f\sigma_8$ y del parámetro de Alcock-Paszyński ϵ , de tal manera que se espera que las cotas que se obtengan para α_{ddm} y Γ_{ddm} sirvan para constreñir tanto el tiempo de vida como la fracción de la materia oscura fría inestable dentro del marco del modelo Λ CDM.

4.1. Método de la Matriz de Fisher

La matriz de Fisher es usada frecuentemente en el análisis de constricciones cosmológicas a partir de conjuntos de datos observacionales [12], y sirve para hacer estimaciones de las incertidumbres mínimas de los parámetros de un modelo. Bajo ciertas suposiciones los valores en la diagonal dicha matriz son los cuadrados de las las varianzas inversas respecto a una estimación correspondiente a un modelo fiducial. Los elementos fuera de la diagonal diferentes de cero indican correlaciones entre los errores de los parámetros [27]. En esta sección se hará una breve descripción de cómo se deduce la matriz de Fisher, cuál es su forma y cómo se relacionan sus entradas con los parámetros de la función de distribución asociada a determinados conjuntos de datos. A su vez se mostrará la metodología a partir de la cual se van a calcular las estimaciones de las incertidumbres de los parámetros del modelo de este trabajo.

Para estimar los parámetros de un modelo junto con sus errores a partir de un conjunto de datos, se debe obtener la distribución de probabilidad de los parámetros θ dado un conjunto de datos \mathbf{x} , la cual se llama distribución de probabilidad posterior y se denota como

$$P(\theta|\mathbf{x}). \quad (4.1)$$

Con esto se puede definir el espacio de parámetros, en el donde cada punto corresponde a una realización del modelo. La distribución de probabilidad posterior no es muy fácil de calcular, por el contrario, lo que sí es más sencillo es la distribución de probabilidad de los datos dado que se conocen los valores de los parámetros del modelo y la cual se conoce como función de verosimilitud o likelihood en inglés (el cual es el nombre mas usado aún hablando en español), denotada por

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}|\theta) = P(\mathbf{x}|\theta). \quad (4.2)$$

como ejemplos de estas distribuciones se tiene la binomial, poissoniana, gaussiana, entre otras. El teorema de Bayes [10] relaciona la función de verosimilitud con lo que realmente se quiere calcular que es la distribución posterior, $P(\theta|\mathbf{x})$:

$$P(\theta|\mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x}|\theta)P(\theta)}{P(\mathbf{x})}. \quad (4.3)$$

A $P(\theta)$ se le llama probabilidad a priori, y expresa lo que se sabe de los parámetros antes de que alguna observación se realice, pueden ser experimentos previos o alguna teoría. Se suele asumir que todos los valores de los parámetros son igualmente probables, de tal forma que $P(\theta) = \text{constante}$, a lo que se llama una *probabilidad a priori uniforme*. $P(\mathbf{x})$ recibe el nombre de evidencia, la cual en estimación de parámetros suele ser ignorada [26], entonces:

$$P(\theta|\mathbf{x}) \propto \mathcal{L}(\mathbf{x}; \theta). \quad (4.4)$$

Asumiendo que la probabilidad a priori es uniforme, en el punto en el espacio de parámetros en que se alcanza el máximo logaritmo de la función de verosimilitud, se asocia con el valor esperado de los parámetros θ_0 correspondientes al mejor ajuste y éstos se asocian con "el modelo verdadero o fiducial", θ_0 , dicho matemáticamente:

$$\langle \theta \rangle = \theta_0. \quad (4.5)$$

Ahora se hace se hace una expansión en serie de Taylor alrededor de los parámetros del mejor ajuste:

$$\ln \mathcal{L}(\mathbf{x}; \theta) = \ln \mathcal{L}(\mathbf{x}; \theta_0) + \frac{1}{2}(\theta_\alpha - \theta_{0\alpha}) \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta} (\theta_\beta - \theta_{0\beta}) + \dots, \quad (4.6)$$

en donde la primera derivada, al ser calculada en el máximo del logaritmo de la función de verosimilitud se anula [28]. Calculando la exponencial de la ecuación anterior se tiene que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; \theta) = \mathcal{L}(\mathbf{x}; \theta_0) \exp \left[-\frac{1}{2}(\theta_\alpha - \theta_{0\alpha}) H_{\alpha\beta} (\theta_\beta - \theta_{0\beta}) \right], \quad (4.7)$$

donde se definió la matriz Hessiana $H_{\alpha\beta}$ como:

$$H_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta}. \quad (4.8)$$

En la práctica, para estimar los errores de un futuro experimento, se recurre al valor esperado de la matriz Hessiana, llamada la matriz de Fisher:

$$F_{\alpha\beta} \equiv \langle H_{\alpha\beta} \rangle = \left\langle -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta} \right\rangle. \quad (4.9)$$

La inversa de la matriz de Fisher corresponde a la matriz de covarianza, la cual cuantifica las incertidumbres de los parámetros y el ancho de la distribución posterior cuando ésta es multidimensional. Por ejemplo, para un modelo con dos parámetros, la matriz de covarianza se ve así [12]:

$$F_{\alpha\beta}^{-1} = C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

donde $\sigma_{xy} = \gamma \sigma_x \sigma_y$ y a γ se le conoce como el coeficiente de correlación. Si la matriz de correlación es diagonal, es decir, que $\gamma = 0$ significa que las estimaciones de los parámetros no están correlacionadas. Por otro lado, la desigualdad de Crámer-Rao se establece que para cualquier estimación de un parámetro, la entrada de la matriz de covarianza no será mayor que la inversa de la matriz de Fisher. En ese sentido, la matriz de Fisher proporciona un estimador del mejor ajuste posible de las incertidumbres de los parámetros, por lo que ofrece el mejor escenario para constreñir parámetros dado un conjunto de observaciones [4].

Asumiendo, como aproximación, que las incertidumbres obedecen una distribución Gaussiana, entonces la función de verosimilitud tiene la forma siguiente [4]:

$$\mathcal{L} \propto -\sum_{b=1}^B \frac{(f_b(\theta) - y_b)^2}{\sigma_b^2}, \quad (4.11)$$

donde y_b son cantidades observadas, cada una con incertidumbres gaussianas σ_b , y cada una de éstas observables se asocia a una función f_b de los parámetros del modelo. De esta manera, la matriz de Fisher (3.10) tiene las siguientes entradas:

$$F_{jk} = \sum_b \frac{1}{\sigma_b^2} \frac{\partial f_b}{\partial \theta_j} \frac{\partial f_b}{\partial \theta_k}. \quad (4.12)$$

En el sentido de este trabajo, los parámetros del modelo DDM son $\theta_j = \Gamma_{ddm}$ y $\theta_k = \alpha_{ddm}$ mientras que su inversa, la matriz de correlación, proporciona el mejor ajuste para las incertidumbres de ambos parámetros, σ_α y σ_Γ , alrededor de sus valores fiduciales:

$$C_{jk} = \begin{pmatrix} \sigma_\Gamma^2 & \sigma_{\alpha\Gamma} \\ \sigma_{\alpha\Gamma} & \sigma_\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

4.2. En busca de un modelo DDM fiducial

Para poder estimar las incertidumbres de los parámetros Γ_{ddm} y α_{ddm} es necesario establecer unos valores centrales o fiduciales para estos. Generalmente, cuando se estiman pronósticos de las cotas inferiores de las incertidumbres esperadas en observaciones futuras, dichos pronósticos se realizan asumiendo que las incertidumbres corresponden al mejor ajuste de un modelo fiducial correspondiente a datos reales anteriormente obtenidos. El criterio para decidir qué valores van a usarse consiste en que sean capaces de reproducir alguna observable, es decir, para seleccionar ese modelo se ajusta la predicción de dicha observable correspondiente al mejor ajuste de Λ CDM de acuerdo a los conjuntos de datos observacionales reales al momento. En este caso, se consideró como modelo fiducial el modelo DDM que ajuste perfectamente determinadas observables predichas por el modelo Λ CDM para los parámetros cosmológicos estimados por la colaboración de Planck. Es importante notar que si se consideran diferentes observables entonces los modelos DDM que empate las predicciones de Λ CDM correspondientes pueden ser distintos.

Para esta tesis se trabajó con dos modelos DDM fiduciales, el primero que pudiera empatar la observable $f\sigma_8$, la cual cuantifica el efecto Kaiser, predicha por el modelo de concordancia, y el segundo corresponde a aquel que empata la predicción de Λ CDM del parámetro de Alcock-Paczynski, esto es, aquel para el cual ϵ se acerque lo más posible a uno. Para el primer modelo fiducial, los valores de los parámetros fueron:

$$\alpha_{fid_1} = 10^{-3}, \quad (4.14a)$$

$$\Gamma_{fid_1} = 0,001H_0. \quad (4.14b)$$

En cuanto al segundo modelo, es oportuno señalar la dependencia del parámetro ϵ de la distancia angular diametral, como indica la definición 2.88. En el capítulo anterior se hizo notar que la diferencia relativa de las medidas de distancia para tiempos de vida del orden, o mayores a la edad del universo, es pequeña incluso para valores de α_{ddm} cercanos a uno lo cual indica que estas observables son poco sensibles a variaciones de ese parámetro. Para lograr la mayor sensibilidad posible para ajustar esta cantidad se asumió que toda la materia oscura decae en radiación oscura y por tanto, $\alpha_{ddm} = 1$, mientras que el valor fiducial de la tasa de decaimiento fue:

$$\Gamma_{fid_2} = (1 \times 10^{-8})H_0 \quad (4.15a)$$

4.3. Estimación de las incertidumbres de α_{ddm} y Γ_{ddm}

Para estimar las incertidumbres de los parámetros del modelo con materia oscura inestable, α_{ddm} y Γ_{ddm} se usaron datos de catálogos mock obtenidos a partir de simulaciones de N-cuerpos realizadas para la planeación de surveys futuras, particularmente aquellas de la colaboración de EUCLID [24, 22]. En esos trabajos, primero se identifican los VOIDS dentro de la distribución de materia a diferentes tiempos en las simulaciones y se estiman los multipolos de la función de

Pronósticos de las incertidumbres de los parámetros del modelo DDM de acuerdo con datos simulados de Euclid.

4.3 Estimación de las incertidumbres de α_{ddm} y Γ_{ddm}

z	$f\sigma_8$	$\sigma_{f\sigma_8}$	ϵ	σ_ϵ
0.99	0.4531	0.0060	1.0125	0.0073
1.14	0.3777	0.0059	0.9988	0.0073
1.33	0.4310	0.0064	1.0127	0.0076
1.58	0.3666	0.0066	0.9908	0.0074

Tabla 4.1: Datos en VOIDS identificados en catálogos mock para EUCLID [22] a partir de mediciones del efecto Kaiser ($f\sigma_8$) y el efecto de Alcock-Paczynski (ϵ) para diferentes corrimientos al rojo y sus respectivos errores

correlación void-galaxia en el espacio de corrimiento al rojo, cuyo desarrollo fue explicado en el capítulo 2. De esa forma se obtienen las medidas de las distorsiones de redshift con lo cual se estima tanto $f\sigma_8$ como ϵ para diferentes corrimientos al rojo. En la tabla 4.1 se enlistan los datos resultantes con sus respectivos errores, mientras que en la figura 4.1 se grafica $f\sigma_8$ para el modelo DDM fiducial, junto con el correspondiente a Λ CDM, haciendo evidente su extrema similitud. Adicionalmente, se indican los valores de la tabla 4.1 junto con sus errores $\sigma_{f\sigma_8}$ y σ_ϵ .

La definición de derivada que será usada para el cálculo de la matriz de Fisher para el modelo fiducial que involucra a $f\sigma_8$ es la siguiente:

$$\frac{\partial f\sigma_8}{\partial \Gamma_{ddm}} = \frac{f\sigma_{8fid}(z, \alpha_{fid1}, \Gamma_{fid1}) - f\sigma_8(z, \alpha_{fid1}, \Gamma_{ddm})}{\Gamma_{fid1} - \Gamma_{ddm}}, \quad (4.16a)$$

$$\frac{\partial f\sigma_8}{\partial \alpha_{ddm}} = \frac{f\sigma_{8fid}(z, \alpha_{fid1}, \Gamma_{fid1}) - f\sigma_8(z, \alpha_{ddm}, \Gamma_{fid})}{\alpha_{fid1} - \alpha_{ddm}}. \quad (4.16b)$$

La metodología usada para calcular las derivadas 4.16a y 4.16b fue la siguiente: para cada uno de los corrimientos al rojo z de la tabla 3.1 se calcula $f\sigma_{8fid}$ mediante CLASS con los parámetros fiduciales establecidos en las ecuaciones (3.1a) y (3.1b), mientras que para $f\sigma_8(z, \alpha_{fid}, \Gamma_{ddm})$ y $f\sigma_8(z, \alpha_{ddm}, \Gamma_{fid})$ uno de los argumentos se deja con su valor fiducial, mientras que el otro es variado ligeramente alrededor de su valor fiducial hasta encontrar una convergencia en las derivadas, es decir, que sean del mismo orden de magnitud. De esa manera se forma un vector de razones de cambio. Después se promedian esos valores. Finalmente, usando esos resultados, se calculan las entradas de la matriz de Fisher según 4.12.

En cuando al segundo modelo fiducial que involucra a ϵ , solo es necesario el cálculo de una sola derivada, esto debido a que α_{fid2} se ha fijado a 1, por lo que en realidad la matriz de Fisher sólo tendrá una entrada, y como consecuencia solo es necesaria la derivada de ϵ respecto a Γ_{ddm} , la cual está dada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \Gamma_{ddm}} = \frac{1 - \epsilon(z, \alpha_{fid2}, \Gamma_{ddm})}{\Gamma_{fid2} - \Gamma_{ddm}}. \quad (4.17)$$

La razón por la que en la derivada parcial para ϵ aparece un uno en vez de una función fiducial para este parámetro viene dado por la definición 2.88. En ese caso, se asume que el modelo DDM como aquel que describe el universo real, que para el mejor ajuste, concuerda con lo establecido por el mejor ajuste del modelo Λ CDM, dando como resultado que $\epsilon = 1$. En cuanto a $\epsilon(z, \alpha_{fid2}, \Gamma_{ddm})$

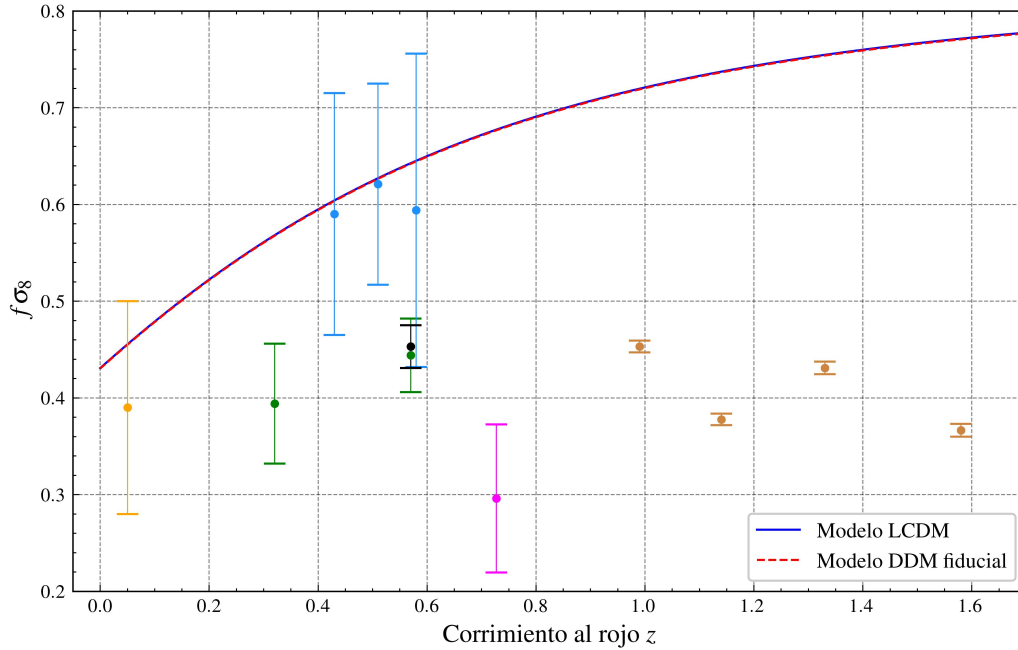


Figura 4.1: Gráfica de $f\sigma_8$ predicha por los modelos Λ CDM y DDM correspondientes a los valores fiduciales de los parámetros establecidos en 4.14a y 4.14b. Adicionalmente se indican los datos obtenidos mediante simulaciones realizadas para la planeación de surveys futuras de la colaboración Euclid [22] (dorado). También se muestran datos reales obtenidos por varios trabajos mediante la medición del multipolos descritos en el capítulo 2 a partir del conjunto de datos BOSS DR12: Hamaus et.al 2020 [24] (azul claro) Gil-Marín et.al 2016 [20] (verde) ,Nadathur et.al 2019 [42] (negro), del conjunto de datos *6-degree Field Galaxy Survey* por Achitouv et. al 2017 [1] (naranja), y del *VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey* por Hawken et. al 2016 [1] (rosa).Es interesante notar la discrepancia entre los valores del modelo fiducial y los datos esperados para Euclid, lo cual puede indicar que RSD observadas en futuras surveys ayudarán a aminorar las tensiones en estimaciones de σ_8 .

**Pronósticos de las incertidumbres de los parámetros del modelo DDM de acuerdo
con datos simulados de Euclid.**
4.4 Discusión de los resultados

y, el procedimiento para obtenerlas es el mismo que para el caso del efecto Kaiser.

Usando las definiciones de las derivadas para el caso del efecto Kaiser, la matriz de Fisher resultante es:

$$(F_{jk}) = \begin{pmatrix} 1,95523 \times 10^{-8} & -0,01254 \\ -0,01254 & 14861,206 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Tras calcular su inversa se obtiene la matriz de correlación que se muestra a continuación:

$$(C_{jk}) = \begin{pmatrix} 1,1142 \times 10^8 & 93999 \\ 93999 & 1,4659 \times 10^{-4} \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

de tal manera que las incertidumbres para los parámetros Γ_{ddm} y α_{ddm} alrededor de sus valores fiduciales Γ_{fid1} y α_{fid1} de acuerdo con Euclid se espera que sean al menos:

$$\sigma_{\Gamma_{ddm1}} = 1,05 \times 10^4 \frac{\text{km}}{\text{s.Mpc}}, \quad (4.20)$$

y

$$\sigma_{\alpha_{ddm1}} = 1,21 \times 10^{-2}. \quad (4.21)$$

Mientras que el coeficiente de correlación es:

$$\gamma = 0,73. \quad (4.22)$$

Para el caso del efecto de Alcock-Paczynski, como se mencionó anteriormente, sólo se calcula de la entrada F_{00} de la matriz de Fisher:

$$F_{00} = 0,015, \quad (4.23)$$

y por lo tanto, la incertidumbre para el parámetro Γ_{ddm} alrededor de su valor fiducial Γ_{fid2} es:

$$\sigma_{\Gamma_{ddm2}} = 0,12 \frac{\text{km}}{\text{s.Mpc}}. \quad (4.24)$$

4.4. Discusión de los resultados

Las incertidumbres anteriores se pueden dar en términos de $H_0 = 1/t_H$, donde $t_H \simeq 14$ Gyr es el tiempo de Hubble, el cual tiene un valor muy cercano a la edad del universo actual, de manera que:

$$\frac{\sigma_{\Gamma_{ddm1}}}{H_0} = 155,66, \quad (4.25)$$

y

$$\frac{\sigma_{\Gamma_{ddm2}}}{H_0} = 0,0018. \quad (4.26)$$

Al expresar las cotas de Γ_{ddm} en términos de H_0 permite expresar al tiempo de vida en términos

**Pronósticos de las incertidumbres de los parámetros del modelo DDM de acuerdo
con datos simulados de Euclid.**
4.4 Discusión de los resultados

de t_H que es una medida de tiempo en escalas cósmicas. De tal forma, se puede expresar la cota para Γ_{ddm} (o equivalentemente, el tiempo de vida τ_{ddm}) para el primer modelo fiducial, el cual corresponde a medidas del efecto Kaiser mediante $f\sigma_8$, de la siguiente manera:

$$\Gamma_{ddm} < 155,664277 \frac{1}{t_H}, \quad (4.27)$$

o bien,

$$\tau_{ddm} > 0,00642 t_H. \quad (4.28)$$

Por otro lado, la cota para α_{ddm} , en este caso es igual a:

$$\alpha_{ddm} < 0,012107. \quad (4.29)$$

Cabe notar que este tiempo de vida es muy pequeño, esto se debe a que el modelo fiducial tiene asociada una α_{ddm} muy pequeña (como ya se dijo, esto es necesario para empatar al mejor ajuste de Λ CDM). Por lo tanto, para generar efectos detectables dada la incertidumbre de los datos, es necesario tomar una tasa de decaimiento grande (o un tiempo de vida pequeño). Lo anterior es consistente con otros trabajos como se muestra más adelante.

Para el segundo modelo fiducial, correspondiente a mediciones del efecto de Alcock-Pazcynski, las cotas para Γ_{ddm} son las siguientes:

$$\Gamma_{ddm} < 0,0018 \frac{1}{t_H}, \quad (4.30)$$

lo que corresponde a:

$$\tau_{ddm} > 545 t_H. \quad (4.31)$$

En este caso, recordemos que el parámetro $\alpha_{ddm} = 1$ dado que es posible reproducir $\epsilon = 1$ (correspondiente al mejor ajuste de Λ CDM) asumiendo que el total de la materia oscura puede decaer.

Es importante mencionar que estrictamente hablando, no existe un único modelo DDM fiducial, sino un conjunto de ellos, esto es, aquellos con $\alpha_{dm} = 1$ y $\Gamma_{ddm} \rightarrow 0$ ¹ o bien aquellos con $\alpha_{ddm} < 1$ para los cuales Γ_{ddm} podría tomar valores alejados de cero y aun así conseguir aún un empate con el mejor ajuste de Λ CDM dentro de sus límites de incertidumbre. Dicha correlación tan alta de ambos parámetros se traduce en que existen situaciones donde uno de los valores puede modificarse de manera importante, pagando el precio de que el otro parámetro también debe cambiar significativamente. Lo anterior fue comprobado por S.Alvi et. al [5] donde explican que para valores grandes de α_{ddm} , el límite superior de la tasa de decaimiento está constreñida a valores pequeños mientras que para valores pequeños de la fracción de DDM inestable (como el considerado en el modelo fiducial 1, el límite para Γ_{ddm} se relaja y permite a la materia oscura

¹Cabe mencionar también que al usar un modelo con $\Gamma_{ddm} = 0$ en la práctica no es viable pues no es posible calcular numéricamente la derivada de las diferentes observables respecto a variaciones de los parámetros. Lo anterior se debe a que la razón de cambio de éstas no es convergente.

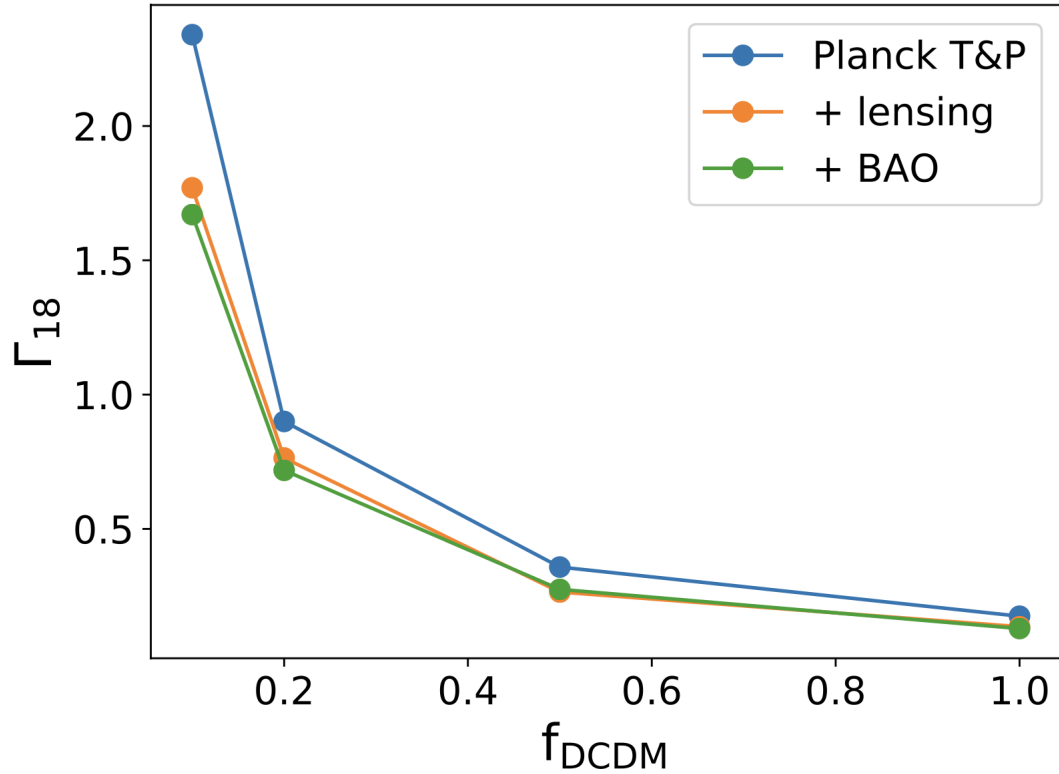


Figura 4.2: El límite superior de la tasa de decaimiento Γ_{ddm} para varios valores fijos de α_{ddm} para diferentes conjuntos de datos. En la imagen, $\Gamma_{18} = \Gamma_{ddm}/10^{-18} s^{-1}$, mientras que f_{ddm} corresponde a la fracción de DDM inestable. Imagen obtenida de [5].

decaer rápidamente, como justamente se puede observar en la figura 4.2. Esto explica por qué se obtuvo una cota menos fuerte a partir de mediciones del efecto de Kaiser en catálogos mock para EUCLID.

La figura 4.2 ilustra lo explicado en el párrafo anterior y justifica la elección de los parámetros fiduciales para ambas observables: para el primer modelo asociado al efecto Kaiser, donde $\alpha_{fid1} = 2 \times 10^{-3}$ permitió una elección de $\Gamma_{fid1} = 0,1H_0$, mientras que una elección de $\alpha_{fid2} = 1$ obligó a que en el segundo modelo, asociado al efecto Alcock-Paczynski, la tasa de decaimiento fuera mucho menor, $\Gamma_{fid2} = (1 \times 10^{-8})H_0$.

Conclusiones

En esta tesis se presenta un modelo alternativo al modelo estándar tipo Λ CDM, en el cual una fracción de la materia oscura fría puede decaer en radiación oscura. El objetivo principal de la tesis era: explorar las implicaciones tanto en las propiedades del universo de fondo como los efectos del decaimiento de la materia oscura sobre el proceso de formación de estructura a gran escala descrito en el régimen lineal de la teoría de perturbaciones. Una meta para ello era aprender sobre dicha teoría en el contexto del modelo de DDM, la cual fue alcanzada exitosamente al reproducir todas las ecuaciones de Einstein linealizadas así como las de las perturbaciones de materia.

Una vez determinado el sistema de ecuaciones para las perturbaciones del modelo, éste se resolvió numéricamente usando el código público CLASS. Posteriormente se realizó un análisis de los efectos del decaimiento de la DM a partir de estas soluciones. Lo anterior fue de suma importancia ya que se pudieron identificar posibles observables y escalas en los cuales las predicciones del modelo alternativo no coinciden con lo establecido por el modelo cosmológico estándar y que ofrecen un escenario para buscar señales indirectas de decaimientos de DM o mejores cotas para sus parámetros. Una conclusión importante de este análisis fue que si toda la materia oscura fuera decayente, considerar tiempos de vida menores a la edad del universo da lugar a resultados que están alejados de las observaciones, por lo que Γ_{ddm}^{-1} debe ser por lo menos, del orden de la edad del Universo (13.77 Gyr) o mayor para reproducir el universo observable a la fecha.

Por otro lado, se utilizaron distintos datos de distorsiones de redshift obtenidos por el proyecto Euclid para establecer cotas correspondientes a el tiempo de vida y la fracción de materia oscura inestable a través de los efectos Kaiser y Alcock-Paczynski. A partir de éste último, se pudo establecer una cota para el tiempo de vida de $\tau_{ddm} > 545 t_H$, un valor que está de acuerdo con trabajos previos sobre este tipo de modelos. Si bien la cota obtenida mediante $f\sigma_8$ no está en conflicto con la que se obtuvo con ϵ , los datos utilizados no fueron capaces de constreñir τ_{ddm} de la mejor manera.

Es posible obtener aún mejores estimaciones para el tiempo de vida de la DDM y de la fracción de ésta mediante otras observables, como el espectro de potencias de las anisotropías de temperatura y polarización del fondo cósmico de microondas, por lo que este campo de investigación está abierto a futuros trabajos y a la luz de datos nuevos los cuales prometen ser abundantes y mucho más precisos que los presentes.

Bibliografía

- [1] Ixandra Achitouv, Chris Blake, P. Carter, J. Koda, and F. Beutler. Consistency of the growth rate in different environments with the 6-degree Field Galaxy Survey: Measurement of the void-galaxy and galaxy-galaxy correlation functions. Phys. Rev. D, 95(8):083502, 2017.
- [2] Jennifer K. Adelman-McCarthy et al. The Fourth Data Release of the Sloan Digital Sky Survey. Astrophys. J. Suppl., 162:38–48, 2006.
- [3] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. Astron. Astrophys., 641:A6, 2020. [Erratum: Astron. Astrophys. 652, C4 (2021)].
- [4] Andreas Albrecht, Luca Amendola, Gary Bernstein, Douglas Clowe, Daniel Eisenstein, Luigi Guzzo, Christopher Hirata, Dragan Huterer, Robert Kirshner, Edward Kolb, and Robert Nichol. Findings of the Joint Dark Energy Mission Figure of Merit Science Working Group. arXiv e-prints, page arXiv:0901.0721, January 2009.
- [5] S. Alvi, T. Brinckmann, M. Gerbino, M. Lattanzi, and L. Pagano. Do you smell something decaying? Updated linear constraints on decaying dark matter scenarios. 5 2022.
- [6] Shohei Aoyama, Toyokazu Sekiguchi, Kiyotomo Ichiki, and Naoshi Sugiyama. Evolution of perturbations and cosmological constraints in decaying dark matter models with arbitrary decay mass products. JCAP, 07:021, 2014.
- [7] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity. Physical Review, 116(5):1322–1330, December 1959.
- [8] Benjamin Audren, Julien Lesgourgues, Gianpiero Mangano, Pasquale Dario Serpico, and Thomas Tram. Strongest model-independent bound on the lifetime of Dark Matter. JCAP, 12:028, 2014.
- [9] James M. Bardeen. Gauge-invariant cosmological perturbations. Phys. Rev. D, 22:1882–1905, Oct 1980.
- [10] Joseph K. Blitzstein and Jessica Hwang. Introduction to probability. CRC Press.
- [11] Renyue Cen. Decaying cold dark matter model and small-scale power. 546(2):L77–L80, jan 2001.
- [12] Dan Coe. Fisher Matrices and Confidence Ellipses: A Quick-Start Guide and Software. arXiv e-prints, page arXiv:0906.4123, June 2009.
- [13] Pedro Colin, Vladimir Avila-Reese, and Octavio Valenzuela. Substructure and halo density profiles in a warm dark matter cosmology. Astrophys. J., 542:622–630, 2000.
- [14] Ed Copeland and Costas Skordis. Modern Cosmology. [Notas de clase].

- [15] Carlos Mauricio Correa. Factibilidad de aplicación del test cosmológico de Alcock-Paczyński utilizando vacíos cósmicos. Master’s thesis, Universidad Nacional de Córdoba, marzo 2016.
- [16] Santiago De Lope Amigo, William Man-Yin Cheung, Zhiqi Huang, and Siew-Phang Ng. Cosmological Constraints on Decaying Dark Matter. JCAP, 06:005, 2009.
- [17] Scott Dodelson. Modern cosmology. Academic Press, 2003.
- [18] Kari Enqvist, Seshadri Nadathur, Toyokazu Sekiguchi, and Tomo Takahashi. Decaying dark matter and the tension in σ_8 . JCAP, 09:067, 2015.
- [19] Katherine Freese. Review of Observational Evidence for Dark Matter in the Universe and in upcoming searches for Dark Stars. EAS Publ. Ser., 36:113–126, 2009.
- [20] Héctor Gil-Marín et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: RSD measurement from the LOS-dependent power spectrum of DR12 BOSS galaxies. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 460(4):4188–4209, 2016.
- [21] Jeremy Goodman. Repulsive dark matter. , 5(2):103–107, April 2000.
- [22] N. Hamaus et al. Euclid: Forecasts from redshift-space distortions and the Alcock–Paczynski test with cosmic voids. Astron. Astrophys., 658:A20, 2022.
- [23] Nico Hamaus, Marie-Claude Cousinou, Alice Pisani, Marie Aubert, Stéphanie Escoffier, and Jochen Weller. Multipole analysis of redshift-space distortions around cosmic voids. JCAP, 07:014, 2017.
- [24] Nico Hamaus, Alice Pisani, Jin-Ah Choi, Guilhem Lavaux, Benjamin D. Wandelt, and Jochen Weller. Precision cosmology with voids in the final BOSS data. JCAP, 12:023, 2020.
- [25] Nico Hamaus, P. M. Sutter, and Benjamin D. Wandelt. Universal Density Profile for Cosmic Voids. Phys. Rev. Lett., 112:251302, 2014.
- [26] Alan Heavens. Bayesian Statistics in Cosmology, 2011. [Notas de clase].
- [27] Alan Heavens. Generalisations of fisher matrices. Entropy, 18(6), 2016.
- [28] M. P. Hobson, Andrew H. Jaffe, Andrew R. Liddle, Pia Mukerjee, and David Parkinson. Bayesian methods in cosmology. Cambridge University Press, 2014.
- [29] Wayne Hu, Rennan Barkana, and Andrei Gruzinov. Fuzzy cold dark matter: The wave properties of ultralight particles. Phys. Rev. Lett., 85:1158–1161, Aug 2000.
- [30] Dragan Huterer et al. Growth of Cosmic Structure: Probing Dark Energy Beyond Expansion. Astropart. Phys., 63:23–41, 2015.
- [31] Kiyotomo Ichiki, Masamune Oguri, and Keitaro Takahashi. WMAP constraints on decaying cold dark matter. Phys. Rev. Lett., 93:071302, 2004.
- [32] Manoj Kaplinghat, Lloyd Knox, and Michael S. Turner. Annihilating cold dark matter. Phys. Rev. Lett., 85:3335–3338, Oct 2000.
- [33] Edward W. Kolb and Michael Turner. The early universe (frontiers in physics). Westview Press Incorporated, 1994.
- [34] Hannu Kurki-Suonio. Cosmology I, 2021. [Notas de clase].
- [35] Hannu Kurki-Suonio. Cosmology II, 2021. [Notas de clase].

- [36] Florent Leclercq. Bayesian large-scale structure inference and cosmic web analysis. PhD thesis, U. Paris-Saclay, Orsay, 2015.
- [37] Julien Lesgourgues. The cosmic linear anisotropy solving system (class) i: overview. arXiv preprint arXiv:1104.2932, 2011.
- [38] Andrew Liddle. An introduction to modern cosmology. Wiley, 2015.
- [39] Andrew R. Liddle and D. H. Lyth. Cosmological inflation and large-scale structure. Cambridge University Press, 2009.
- [40] Chung-Pei Ma and Edmund Bertschinger. Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges. Astrophys. J., 455:7–25, 1995.
- [41] Viatcheslav Mukhanov. Physical Foundations of Cosmology. Cambridge University Press, 2012.
- [42] Seshadri Nadathur, Paul M. Carter, Will J. Percival, Hans A. Winther, and Julian Bautista. Beyond BAO: Improving cosmological constraints from BOSS data with measurement of the void-galaxy cross-correlation. Phys. Rev. D, 100(2):023504, 2019.
- [43] Jeremiah P. Ostriker and Paul J. Steinhardt. New light on dark matter. Science, 300:1909–1913, 2003.
- [44] Saul Perlmutter. Nobel lecture: Measuring the acceleration of the cosmic expansion using supernovae. Rev. Mod. Phys., 84:1127–1149, Aug 2012.
- [45] Giorgia Pollina, Nico Hamaus, Klaus Dolag, Jochen Weller, Marco Baldi, and Lauro Moscardini. On the linearity of tracer bias around voids. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 469(1):787–799, 2017.
- [46] Vera C. Rubin and Jr. Ford, W. Kent. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. , 159:379, February 1970.
- [47] Peter Schneider. Extragalactic Astronomy and Cosmology An Introduction. Springer Berlin, 2016.
- [48] David N. Spergel and Paul J. Steinhardt. Observational evidence for self-interacting cold dark matter. Phys. Rev. Lett., 84:3760–3763, Apr 2000.
- [49] Erik Zackrisson. Quasars and Low Surface Brightness Galaxies as Probes of Dark Matter. PhD thesis, Uppsala University, Department of Physics and Astronomy, May 2005.