



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Un tratamiento directo para el problema de transmisión de
una onda electromagnética

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Antonia López Jamett

Asesorada por

Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla Pue.
Septiembre de 2025



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Un tratamiento directo para el problema de transmisión de
una onda electromagnética

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Antonia López Jamett

Asesorada por

Gerardo Francisco Torres del Castillo

Puebla Pue.
Septiembre de 2025

Título: Un tratamiento directo para el problema de transmisión de una onda electromagnética

Estudiante: ANTONIA LÓPEZ JAMETT

COMITÉ

Cupatitzio Ramírez Romero
Presidente

Irais Rubalcava García
Secretario

Cecilia Uribe Estrada
Vocal

Mercedes Paulina Velázquez Quesada
Vocal

Gerardo Francisco Torres del Castillo
Asesor

Índice general

1. Introducción	5
2. Descripción del problema	7
3. Onda que incide en una interfaz	11
3.1. Amplitudes de las ondas	11
3.1.1. Campo eléctrico para polarización tipo 'p'	11
3.1.2. Campo magnético para polarización tipo 'p'	14
3.1.3. Campo magnético para polarización tipo 's'	15
3.1.4. Campo eléctrico para polarización tipo 's'	17
3.2. Relaciones de Fresnel	18
3.2.1. Relaciones de Fresnel para polarización en 'p'	18
3.2.2. Relaciones de Fresnel para polarización 's'	19
3.3. Reflexión total interna	20
3.3.1. Polarización tipo 'p'	20
3.3.2. Polarización tipo 's'	23
4. Conclusiones	25
Bibliografía	27

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo y el estímulo de mi asesor, el Doctor Gerardo Torres del Castillo, bajo cuya supervisión escogí este tema y comencé la tesis.

Además agradezco infinitamente el apoyo y comprensión de toda mi familia, mi papá, Juan Antonio López Encina, mi mamá, Magali Raquel Jamett Pizarro, y mi hermano, Martin Francisco López Jamett; de mi novio, J. Aldair Pantoja González, quien me empujó con comprensión, paciencia y cariño en cada pasito que daba. A mis amigos y colegas, de la facultad y de la vida, quienes me dieron todo el apoyo académico y emocional que pudieron.

En memoria de Jesús Francisco Ramírez Cruz y Miguel Ángel Ortíz Peralta.

Resumen

Se estudia el efecto de una onda electromagnética plana monocromática polarizada linealmente que incide sobre una frontera plana entre dos medios, sin suponer que debe de haber una onda plana reflejada y una transmitida.

Palabras clave: ondas viajeras, ondas electromagnéticas, coeficientes de Fresnel, Ley de Snell.

Capítulo 1

Introducción

En la electrodinámica clásica el problema de la propagación de ondas en regiones limitadas que viajan de una región a otra es uno que usualmente se cubre en un curso de nivel intermedio [1, 2, 3, 6, 7], además es uno de los más didácticos, en mi opinión, pues al resolverlo se vuelven a visitar múltiples conocimientos adquiridos en diversos cursos de la carrera.

La resolución de este problema también es conocida, sin embargo, ésta generalmente se obtiene mediante un *ansatz*. Por esta razón es de nuestro interés explorar la posibilidad de estudiar este fenómeno sin suponer de antemano la respuesta que sabemos que obtendremos, de tal forma que sean las mismas ecuaciones las que nos indiquen las características que deberían tener las ondas resultantes.

Cuando tenemos una onda electromagnética viajando desde un medio homogéneo lineal no conductor hacia otro, naturalmente nos encontraremos con una frontera que divide a ambos. Es en este punto en el que sabemos por experiencia que una parte de la onda se refleja y la otra se refracta. Usualmente el análisis de este fenómeno se reduce a unas condiciones algebraicas, las cuales llevan a los coeficientes de Fresnel, con los que determinamos las amplitudes de la onda transmitida y de la reflejada y también a la ley de Snell, la cual nos da la relación entre las direcciones de propagación de las ondas. Como se cumplen las condiciones de frontera nos solemos convencer de que el *ansatz* estaba correcto.

Las ondas planas son las soluciones de las ecuaciones de Maxwell más fáciles de obtener y manejar [3] por lo que ese será el tipo de ondas que se utilizará en esta tesis.

El plan de acción es tomar una onda plana monocromática que se encuentra de un lado de la frontera que divide a dos medios con índices de refracción diferentes, encontrar su forma al aproximarse a la frontera desde un lado, luego hallamos el campo electromagnético que debe existir en el otro lado de la frontera, en los puntos de ésta. Usamos entonces esa información como condición inicial para determinar los campos electromagnéticos en la segunda región, suponiendo que se pueden expresar como una superposición, en principio infinita, de ondas planas. Como es usual, el análisis se hace tratando separadamente los casos en los que el campo eléctrico de la onda incidente es paralelo o perpendicular al plano de incidencia.

En el capítulo 2 se comienza con una descripción más detallada de las ondas electromagnéticas y de cómo las ecuaciones de Maxwell nos dan las condiciones de frontera que necesitaremos para llevar a cabo el plan de acción.

Más adelante nos proponemos encontrar las relaciones de Fresnel y la Ley de Snell para completar el estudio de este problema.

Nuestro enfoque lleva en una forma natural a la existencia de ondas evanescentes en el caso de la reflexión total interna.

Capítulo 2

Descripción del problema

El interés de esta tesis, como se mencionó en la introducción, es describir el comportamiento de las ondas electromagnéticas que se propagan entre materiales. Dichas ondas entran en el segundo material de forma oblicua al cruzar la frontera entre ambos medios, que hemos tomado como un plano[3] cuando se propagan en alguna dirección.

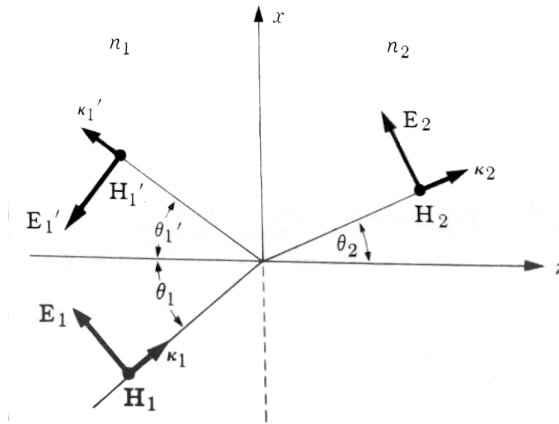


Figura 2.1: Configuración usual, los campos magnéticos (\mathbf{H}) 'salen' de la página. Con \mathbf{E} representando al campo eléctrico, κ representando el vector de onda y n denota el índice de refracción del medio.

En la configuración usual para ondas con incidencia oblicua suponemos que el plano xy conforma la frontera entre dos medios dieléctricos lineales homogéneos, cada medio caracterizado mediante sus parámetros materiales específicos (ϵ_1 y ϵ_2 para la permitividad de los medios 1 y 2 respectivamente, μ_1 y μ_2 para la permeabilidad de los medios 1 y 2).

Tomamos el plano xz como el plano de incidencia, el cual está formado por el vector de onda y la normal a la superficie en la que incide ($\hat{\mathbf{n}}$), que aquí es el eje z .

Como los vectores \mathbf{E} , \mathbf{H} y κ forman un sistema de mano derecha ortogonal, la onda electromagnética es transversal, para la cual podemos hablar de una onda polarizada para describir el comportamiento de los vectores de campo en el plano perpendicular a κ [7].

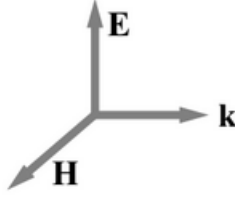


Figura 2.2: \mathbf{E} , \mathbf{H} y \mathbf{k} para una onda electromagnética transversal.

Para la polarización que se conoce como tipo "p" (paralela), los vectores de campo eléctrico (\mathbf{E}) también permanecen en el plano xz lo que nos hace tener una polarización paralela al plano $\mathbf{E}\mathbf{k}$; en cambio, en la polarización tipo "s" los vectores del campo eléctrico se encuentran dirigidos de forma perpendicular al plano de incidencia. Aquí los ángulos se toman desde el eje z , como suele considerarse en la expresión de la Ley de Snell.

Veamos qué ocurre cuando reemplazamos $\mu_0\epsilon_0$ por $\mu\epsilon$: cuando la onda pasa, el medio rápidamente se polariza, éste a su vez magnetiza a las moléculas y dipolos creando así campos eléctricos y magnéticos propios de dichas moléculas y dipolos. Estos campos nuevos se combinan con los campos originales de tal forma que se crea una onda con la misma frecuencia pero diferente velocidad, por esta razón tenemos transparencia, lo cual es una consecuencia no trivial de la linealidad[1].

Ecuaciones de Maxwell

Tenemos las ecuaciones de Maxwell sin fuentes en unidades MKS donde \mathbf{D} y \mathbf{B} son el campo de desplazamiento y la inducción magnética respectivamente[3].

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

con:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (2.6)$$

Si las desarrollamos por componentes cartesianas tendremos:
de (2.1) y (2.5)

$$\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

de (2.2)

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

de (2.3)

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (2.11)$$

y de (2.4), (2.5) y (2.6)

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (2.14)$$

Conviene ahora escribir las ecuaciones de Maxwell, (2.1)-(2.14), como un conjunto de ecuaciones que permiten determinar cómo cambian los campos a lo largo del eje z

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial x} & + & \mu\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} & - & \mu\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_x}{\partial x} & - & \frac{\partial B_y}{\partial y} \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} & - & \frac{\partial B_y}{\partial y} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & + & \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial E_x}{\partial x} & - & \frac{\partial E_y}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Las ecuaciones (2.15) indican que el conocimiento de los campos en cualquier plano $z = \text{constante}$ (como $z = 0$ por ejemplo) es suficiente para determinar los campos en todo el espacio (dentro de la región en que se satisfagan las ecuaciones de Maxwell para el vacío). Las ecuaciones (2.11) y (2.14), las cuales no contienen derivadas parciales con respecto a z , son condiciones de consistencia, es decir, es necesario que los campos satisfagan (2.11) y (2.14) para que las ecuaciones (2.15) sean compatibles entre sí.

Como se procede en los textos citados, suponemos la forma de las funciones para el campo eléctrico y para el campo magnético de la onda incidente, la cual viaja con una frecuencia ω en el medio n_2 . En un dieléctrico no magnético y no conductor la permeabilidad magnética del medio es prácticamente igual a la permeabilidad magnética de vacío, es decir, $\mu = \mu_0$ y $\epsilon = K\epsilon_0$ con $K = n^2$, donde n es el índice de refracción del medio dieléctrico. Como $\kappa = \omega/c$ y $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$, ahora $\kappa = n\frac{\omega}{c}$, ya que aquí la velocidad de la propagación de onda es $\frac{c}{n}$ en lugar de c (la velocidad de la luz); en el vacío $n = 1$ [5].

Capítulo 3

Onda que incide en una interfaz

3.1. Amplitudes de las ondas

3.1.1. Campo eléctrico para polarización tipo 'p'

Tomando como referencia la figura 2.1, vemos que el vector de onda (o vector de propagación) tiene la forma:

$$\boldsymbol{\kappa}_i = n_2 \frac{\omega}{c} (\cos \theta_i \hat{k} + \sin \theta_i \hat{i}) \quad (3.1)$$

con θ_i como el ángulo entre $\boldsymbol{\kappa}_i$ y el eje z , por lo tanto, para la polarización "p", el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = E_i (-\sin \theta_i \hat{k} + \cos \theta_i \hat{i}) \cos(\boldsymbol{\kappa}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (3.2)$$

con E_i como la amplitud de la onda. Calcularemos su forma cuando la onda choca con la interface, es decir $z = 0$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}_i \cdot \mathbf{r} &= \frac{n_2 \omega}{c} (\cos \theta_i \hat{k} + \sin \theta_i \hat{i}) \cdot (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \\ &= \frac{n_2 \omega}{c} (\cos \theta_i \hat{k} + \sin \theta_i \hat{i}) \cdot (x \hat{i} + y \hat{j} + 0 \hat{k}) \\ &= \frac{n_2 \omega}{c} (x \sin \theta_i) \end{aligned}$$

lo que nos deja el campo eléctrico por la izquierda así:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t)|_{z=0^-} = E_i (-\sin \theta_i \hat{k} + \cos \theta_i \hat{i}) \cos\left(\frac{n_2 \omega}{c} x \sin \theta_i - \omega t\right) \quad (3.3)$$

De (3.2) podemos calcular también \mathbf{B} , \mathbf{D} y \mathbf{H} , utilizando (2.5), (2.6) y la siguiente ecuación:

$$\mathbf{B} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{E} \quad (3.4)$$

que encontramos en [3, 7]

Entonces:

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}, t)|_{z=0^-} = \frac{n_2}{c} E_i \cos\left(\frac{n_2 \omega}{c} x \sin \theta_i - \omega t\right) \hat{j} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{D}_i(\mathbf{r}, t)|_{z=0^-} = \epsilon_2 E_i (-\sin \theta_i \hat{k} + \cos \theta_i \hat{i}) \cos\left(\frac{n_2 \omega}{c} x \sin \theta_i - \omega t\right) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{r}, t)|_{z=0^-} = \frac{n_2}{\mu_0 c} E_i \cos\left(\frac{n_2 \omega}{c} x \sin \theta_i - \omega t\right) \hat{j} \quad (3.7)$$

Estas expresiones deben determinar cómo se comportan las ondas en su propagación a lo largo del eje z .

Ahora, para poder calcular la onda en el otro lado de la interface, vamos a fijarnos en las condiciones a la frontera que se deben de cumplir.

Las componentes normales del campo \mathbf{B} y \mathbf{D} y las componentes tangenciales de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} deben ser continuas. Estas condiciones se derivan de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes [3, 1].

Con esto ya podemos construir el campo eléctrico y magnético inmediatamente al otro lado gracias a que las componentes deben ser continuas:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t)|_{z=0^+} = E_i \left(-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \sin \theta_i \hat{k} + \cos \theta_i \hat{i} \right) \cos \left(\frac{n_2 \omega}{c} x \sin \theta_i - \omega t \right) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}, t)|_{z=0^+} = E_i \frac{n_2}{c} \hat{j} \cos \left(\frac{n_2 \omega}{c} x \sin \theta_i - \omega t \right) \quad (3.9)$$

Una onda plana monocromática cualquiera, con el campo eléctrico en el plano de incidencia, que viaja por el medio de la derecha se puede escribir así:

$$\mathbf{E}_0 = E_0 (-\sin \theta_0 \hat{k} + \cos \theta_0 \hat{i}) \cos \left(\frac{n_1 \omega}{c} (x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0) - \omega t \right), \quad (3.10)$$

donde la constante E_0 es la amplitud de la onda.

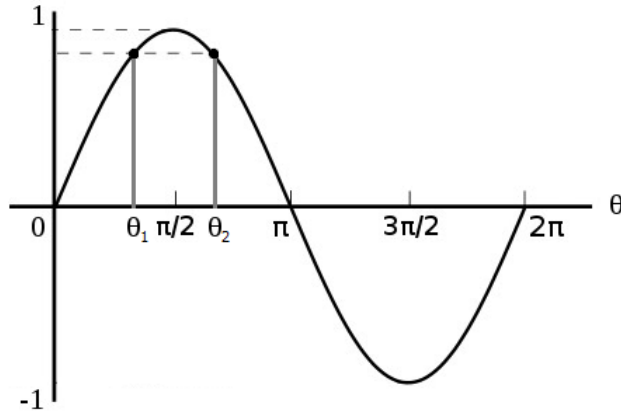
Como la ecuación (3.10) es una solución a las ecuaciones de Maxwell, por la naturaleza de estas ecuaciones, una superposición de soluciones también será solución. Al hacer una integración sobre todas las posibles direcciones y amplitudes, tendremos una superposición de soluciones, la cual también debe ser una solución. Con el objetivo de tener la forma de la solución general de las ecuaciones integramos sobre $[0, 2\pi]$

$$\mathbf{E} = \int_0^{2\pi} E(\phi) (-\sin \phi \hat{k} + \cos \phi \hat{i}) \cos \left(\frac{n_1 \omega}{c} (x \sin \phi + z \cos \phi) - \omega t \right) d\phi \quad (3.11)$$

con $z \geq 0$, siendo $E(\phi)$ una función que representa la amplitud de la onda caracterizada por el ángulo ϕ , que de momento no sabemos cómo es. El campo (3.11) debe reducirse a (3.8) cuando $z \rightarrow 0^+$. Es decir:

$$\begin{aligned} & E_i \left(-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \sin \theta_i \hat{k} + \cos \theta_i \hat{i} \right) \cos \left(\frac{n_2 \omega}{c} x \sin \theta_i - \omega t \right) \\ &= \int_0^{2\pi} E(\phi) (-\sin \phi \hat{k} + \cos \phi \hat{i}) \cos \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \sin \phi - \omega t \right) d\phi. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De la ecuación anterior, fijándonos en la dependencia en x y t , se puede ver que la función $E(\phi)$ puede ser diferente de cero sólo para los valores de ϕ tales que $n_2 \sin \theta_i = n_1 \sin \phi$ (siempre y cuando $\frac{n_2}{n_1} \sin \theta_i \leq 1$, lo cual se cumple para cualquier valor de θ_i si $n_2 \leq n_1$).



Observando la gráfica de la función seno notamos que para un valor positivo de la función diferente de 1, tenemos dos ángulos θ_1 y θ_2 entre 0 y π que nos pueden dar el mismo resultado, es decir, $\text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta_2$, con

$$\text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta_2 = \frac{n_2}{n_1} \text{sen } \theta_i. \quad (3.13)$$

Además, observamos que estos dos ángulos tienen que estar relacionados de la siguiente forma:

$$\left| \theta_2 - \frac{\pi}{2} \right| = \left| \frac{\pi}{2} - \theta_1 \right|, \quad (3.14)$$

tomando en cuenta nuestra configuración y nuestras variables vemos en la gráfica que la diferencia anterior será:

$$\begin{aligned} \theta_2 - \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} - \theta_1 \\ \theta_2 &= \pi - \theta_1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Así

$$E(\phi) = A\delta(\phi - \theta_1) + B\delta(\phi - \theta_2), \quad (3.16)$$

donde A y B son dos valores constantes que representan amplitudes que aún desconocemos.

Hasta este punto, si $\frac{n_2}{n_1} \text{sen } \theta_i \leq 1$ y además hay una onda plana con polarización "p" que incide desde la izquierda oblicuamente sobre el plano $z = 0$, entonces para $z > 0$ debe haber una superposición de dos ondas planas que se propagan en las direcciones dadas por θ_1 y θ_2 ; la primera alejándose del plano $z = 0$ y la segunda, acercándose a él.

Sustituimos (3.16) en (3.12) y desarrollamos:

$$\int_0^{2\pi} E(\phi) (-\text{sen } \phi \hat{k} + \cos \phi \hat{i}) \cos\left(\frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \phi - \omega t\right) d\phi \quad (3.17)$$

$$= \int_0^{2\pi} [A\delta(\phi - \theta_1) + B\delta(\phi - \theta_2)] (-\text{sen } \phi \hat{k} + \cos \phi \hat{i}) \cos\left(\frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \phi - \omega t\right) d\phi \quad (3.18)$$

$$= A(-\text{sen } \theta_1 \hat{k} + \cos \theta_1 \hat{i}) \cos\left(\frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \theta_1 - \omega t\right) \quad (3.19)$$

$$+ B(-\text{sen } \theta_2 \hat{k} + \cos \theta_2 \hat{i}) \cos\left(\frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \theta_2 - \omega t\right) \quad (3.20)$$

$$= E_i \left(-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \text{sen } \theta_i \hat{k} + \cos \theta_i \hat{i} \right) \cos\left(\frac{n_2 \omega}{c} x \text{sen } \theta_i - \omega t\right). \quad (3.21)$$

Sustituimos (3.15) en la ecuación anterior, luego expandimos la resta de ángulos dentro del seno y del coseno y reordenamos para obtener:

$$\begin{aligned} & [(A + B)(-\text{sen } \theta_1 \hat{k}) + (A - B) \cos \theta_1 \hat{i}] \cos \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \theta_1 - \omega t \right) \\ & = E_i \left(-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \text{sen } \theta_i \hat{k} + \cos \theta_i \hat{i} \right) \cos \left(\frac{n_2 \omega}{c} x \text{sen } \theta_i - \omega t \right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

cancelando el factor común en (3.22), de esa ecuación tenemos:

$$(A + B)(-\text{sen } \theta_1) = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_i \text{sen } \theta_i \quad (3.23)$$

$$(A - B) \cos \theta_1 = E_i \cos \theta_i. \quad (3.24)$$

Por un lado, tomando (3.23), utilizamos (3.13) y el hecho que $\epsilon_\alpha = n_\alpha^2$

$$n_1(A + B) - n_2 E_i = 0. \quad (3.25)$$

Por otro lado, para (3.24) es mucho más sencillo:

$$(A - B) \cos \theta_1 - E_i \cos \theta_i = 0, \quad (3.26)$$

luego solucionamos el sistema conformado por las ecuaciones (3.25) y (3.26) para A y B , obtenemos que:

$$A = \frac{E_i(n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_i)}{2n_1 \cos \theta_1} \quad (3.27)$$

$$B = \frac{E_i(n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_i)}{2n_1 \cos \theta_1}. \quad (3.28)$$

3.1.2. Campo magnético para polarización tipo 'p'

Veamos si integrando el campo magnético podemos conseguir más información. Procedemos de la misma forma que con el campo eléctrico, para la onda ya considerada (3.2) su campo magnético puede describirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}, t)|_{z=0^-} = \frac{n_2}{c} E_i \hat{j} \cos \left(\frac{n_2 \omega}{c} x \text{sen } \theta_i - \omega t \right) \quad (3.29)$$

De la misma manera que en el caso del campo eléctrico (3.11), calculamos el campo magnético al otro lado de la interface, tomando en cuenta las condiciones a la frontera, obtenemos (3.9), luego, escribimos cómo sería el campo magnético correspondiente a (3.10):

$$\mathbf{B}_0 = \frac{n_1}{c} E_0 \hat{j} \cos \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \theta_0 - \omega t \right). \quad (3.30)$$

Similarmente, el campo correspondiente a (3.11) es

$$\mathbf{B} = \int_0^{2\pi} \frac{n_1}{c} E(\phi) \hat{j} \cos \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \phi - \omega t \right) d\phi. \quad (3.31)$$

Revisamos qué podemos encontrar si comparamos componentes, haciendo el mismo análisis que hicimos para (3.22), tomamos (3.16) y sustituimos:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{n_1}{c} [A \delta(\phi - \theta_1) + B \delta(\phi - (\pi - \theta_1))] \hat{j} \cos \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \phi - \omega t \right) d\phi \\ & = \frac{n_1}{c} \hat{j} \left[A \cos \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \theta_1 - \omega t \right) + B \cos \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \theta_2 - \omega t \right) \right], \end{aligned}$$

por (3.13)

$$\mathbf{B} = \frac{n_1}{c} (A + B) \hat{j} \cos \left(\frac{n_2 \omega}{c} x \operatorname{sen} \theta_i - \omega t \right),$$

debido a (3.25)

$$\Rightarrow \mathbf{B} = \frac{n_1}{c} \frac{n_2}{n_1} E_i \hat{j} \cos \left(\frac{n_2 \omega}{c} x \operatorname{sen} \theta_i - \omega t \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = \frac{n_2}{c} E_i \hat{j} \cos \left(\frac{n_2 \omega}{c} x \operatorname{sen} \theta_i - \omega t \right)$$

lo cual coincide con (3.30).

Igualando la modulación de ambas ondas (con (3.9)):

$$\begin{aligned} \frac{n_2 \omega}{c} x \operatorname{sen} \theta_i - \omega t &= \frac{n_2 \omega}{c} x \operatorname{sen} \theta_i - \omega t \\ n_2 \operatorname{sen} \theta_i &= n_2 \operatorname{sen} \theta_i, \end{aligned}$$

con esto no obtuvimos nada nuevo, pero tampoco llegamos a alguna contradicción.

El hecho de que θ_2 sea mayor que $\pi/2$ significa que, para las condiciones supuestas, debe existir una onda incidente sobre el plano $z = 0$, proveniente de $z = +\infty$, lo que puede parecer extraño. Sin embargo, podemos aprovechar la solución obtenida invirtiendo el sentido del tiempo (después de todo, las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo la operación de inversión temporal). Al hacerlo, la onda que habíamos considerado originalmente como una onda incidente sobre el plano $z = 0$, se convierte en una onda que sale de dicho plano, mientras que se ve una onda en $z > 0$ (B) que parece entrar al plano y una onda en $z < 0$ que también parece entrar al plano (E_i), como se muestra en la figura 3.1

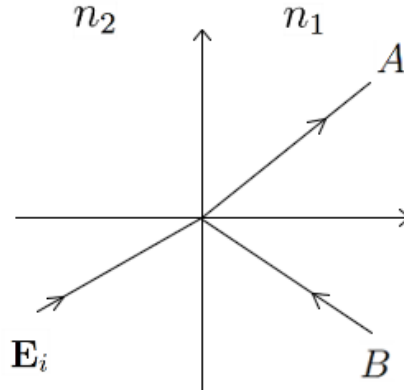


Figura 3.1: Esquema de las ondas mencionadas.

3.1.3. Campo magnético para polarización tipo 's'

Para la polarización perpendicular, "s", consideramos la misma configuración de los vectores de onda y se procede de la misma manera que en las secciones anteriores, ahora con el campo eléctrico en la dirección y

$$\boldsymbol{\kappa}_i = \frac{n_2 \omega}{c} (\cos \theta_i \hat{k} + \operatorname{sen} \theta_i \hat{i}). \quad (3.32)$$

Vemos cómo sería el campo eléctrico

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = E_i \cos(\boldsymbol{\kappa}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{j} \quad (3.33)$$

con E_i como la amplitud de la onda, el campo magnético que lo acompaña es:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i(\mathbf{r}, t) &= E_i \frac{n_2}{c} (-\sin \theta_i \hat{k} + \cos \theta_i \hat{i}) \cos(\boldsymbol{\kappa}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ &= E_i \frac{n_2}{c} (-\sin \theta_i \hat{k} + \cos \theta_i \hat{i}) \cos\left(\frac{n_2 \omega}{c} (z \cos \theta_i \hat{k} + x \sin \theta_i \hat{i}) - \omega t\right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Entonces, al igual que para el campo eléctrico en (3.3), usando las condiciones de frontera, encontramos:

$$\mathbf{B}_i|_{z=0^+} = \frac{n_2}{c} E_i (-\sin \theta_i \hat{k} + \cos \theta_i \hat{i}) \cos\left(\frac{n_2 \omega}{c} x \sin \theta_i - \omega t\right). \quad (3.35)$$

Una onda plana que viaja en la parte derecha, puede describirse así:

$$\mathbf{B}_0 = \frac{n_1}{c} E_0 (-\sin \theta_0 \hat{k} + \cos \theta_0 \hat{i}) \cos\left(\frac{n_1 \omega}{c} x \sin \theta_0 - \omega t\right). \quad (3.36)$$

Como la ecuación en el caso anterior en la polarización "p", lo que tenemos es una solución a las ecuaciones de Maxwell, al hacer una integración sobre todas las posibles direcciones en las que puede encontrarse otra onda que sea solución, tendremos una superposición de todas las soluciones, la cual también debe ser una solución

$$\mathbf{B} = \int_0^{2\pi} \frac{n_1}{c} E(\phi) (-\sin \phi \hat{k} + \cos \phi \hat{i}) \cos\left(\frac{n_1 \omega}{c} x \sin \phi - \omega t\right) d\phi. \quad (3.37)$$

Ésta debería ser igual a (3.35) en $z = 0$

$$\int_0^{2\pi} \frac{n_1}{c} E(\phi) (-\sin \phi \hat{k} + \cos \phi \hat{i}) \cos\left(\frac{n_1 \omega}{c} x \sin \phi - \omega t\right) d\phi \quad (3.38)$$

$$= \frac{n_2}{c} E_i (-\sin \theta_i \hat{k} + \cos \theta_i \hat{i}) \cos\left(\frac{n_2 \omega}{c} x \sin \theta_i - \omega t\right). \quad (3.39)$$

Analizándolo por partes, la modulación de la onda debe ser igual

$$\frac{n_1 \omega}{c} x \sin \phi - \omega t = \frac{n_2 \omega}{c} x \cos \theta_i - \omega t \quad (3.40)$$

$$n_1 \sin \phi = n_2 \sin \theta_i \quad (3.41)$$

lo que nos da la Ley de Snell, nuevamente.

Para las otras partes y tomando en cuenta los resultados del análisis hecho para el caso anterior sobre la gráfica de seno, sustituimos (3.16) en (3.37)

$$\int_0^\pi [A\delta(\phi - \theta_1) + B\delta(\phi - \theta_2)] \frac{n_1}{c} (-\sin \phi \hat{k} + \cos \phi \hat{i}) \cos\left(\frac{n_1 \omega}{c} x \sin \phi - \omega t\right) d\phi \quad (3.42)$$

donde A y B son constantes por determinar (no necesariamente deben ser las mismas a las halladas arriba). Siguiendo los mismos pasos planteados anteriormente para la polarización tipo "p", nos queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \int_0^\pi A\delta(\phi - \theta_1) \frac{n_1}{c} (-\sin \phi \hat{k} + \cos \phi \hat{i}) \cos\left(\frac{n_1 \omega}{c} x \sin \phi - \omega t\right) d\phi \\ &+ \int_0^\pi \frac{n_1}{c} B\delta(\phi - \theta_2) (-\sin \phi \hat{k} + \cos \phi \hat{i}) \cos\left(\frac{n_1 \omega}{c} x \sin \phi - \omega t\right) d\phi \end{aligned}$$

de nuevo, utilizando (3.15) y reordenando:

$$\mathbf{B} = \frac{n_1}{c} [(A + B)(-\text{sen } \theta_1 \hat{k}) + (A - B) \cos \theta_1 \hat{i}] \cos \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \theta_1 - \omega t \right) \quad (3.43)$$

comparando esta última ecuación con el campo eléctrico al otro lado (3.35) por componentes

$$A + B = E_i \frac{n_2 \text{sen } \theta_i}{n_1 \text{sen } \theta_1} \quad (3.44)$$

$$A - B = E_i \frac{n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_1} \quad (3.45)$$

$$\Rightarrow 2A = E_i \frac{n_1}{n_2} \left(\frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_1} + \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_1} \right) \quad (3.46)$$

$$\Rightarrow 2B = E_i \frac{n_1}{n_2} \left(\frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_1} - \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_1} \right) \quad (3.47)$$

Solucionando el sistema de ecuaciones conformado (3.44) y (3.45), obtenemos que:

$$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{\tan \theta_1}{2 \tan \theta_i} \right) E_i \quad (3.48)$$

$$B = \left(\frac{1}{2} - \frac{\tan \theta_1}{2 \tan \theta_i} \right) E_i. \quad (3.49)$$

3.1.4. Campo eléctrico para polarización tipo 's'

Veamos si integrando el campo eléctrico podemos conseguir más información. Procedemos de la misma forma que con el campo magnético.

Primero, utilizando las condiciones a la frontera encontramos:

$$\mathbf{E}_i|_{z=0^+} = E_i \hat{j} \cos \left(\frac{n_2 \omega}{c} x \text{sen } \theta_i - \omega t \right), \quad (3.50)$$

ahora, tomamos una onda que viaje al otro lado de la frontera, en la parte derecha:

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{j} \cos \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \theta_0 - \omega t \right). \quad (3.51)$$

Al igual que en el caso del campo magnético, lo que tenemos es una solución a las ecuaciones de Maxwell, al hacer una integración sobre todas las posibles direcciones en las que puede encontrarse otra onda que sea solución, tendremos una superposición de todas las soluciones, la cual también debe ser una solución, como se mencionó anteriormente, procedemos a integrar:

$$\mathbf{E} = \int_0^{2\pi} E(\theta) \hat{j} \cos \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \theta - \omega t \right) d\phi. \quad (3.52)$$

La solución \mathbf{E} debería ser igual a (3.50), igualando la modulación de ambas ondas:

$$\begin{aligned} \frac{n_1 \omega}{c} x \text{sen } \theta - \omega t &= \frac{n_2 \omega}{c} x \text{sen } \theta_i - \omega t \\ n_1 \text{sen } \theta &= n_2 \text{sen } \theta_i. \end{aligned}$$

Revisamos que podemos encontrar si comparamos por componentes:

$$E(\phi) = E_i \quad (3.53)$$

$$A + B = E_i. \quad (3.54)$$

Nuevamente, al igual que en la otra polarización, al revisar las componentes del campo en dirección perpendicular al plano xz no obtenemos nueva información sobre nuestras ondas, ni contradicciones.

Como en el caso de la polarización "p", hallamos que para una sola onda plana de amplitud E_i en la región $z < 0$, tenemos una onda saliendo del plano $z = 0$ de amplitud A y otra que debe provenir de $z = +\infty$ de amplitud B . Nuevamente, cambiando el sentido del tiempo, lo que tenemos es una onda en $z < 0$ que sale del plano $z = 0$ y dos ondas planas en la región $z > 0$, una que incide sobre el plano $z = 0$ y una que sale de ese plano.

Haciendo los cambios $E_i \rightarrow E_t$, $A \rightarrow E_i$, $B \rightarrow E_r$ de (3.48) y (3.49) (donde E_t y E_r reciben su nombre por las amplitudes de las ondas transmitidas y reflejadas), tenemos:

$$E_i = \left(\frac{1}{2} + \frac{\tan \theta_1}{2 \tan \theta_i} \right) E_t \quad (3.55)$$

$$E_r = \left(\frac{1}{2} - \frac{\tan \theta_1}{2 \tan \theta_i} \right) E_t. \quad (3.56)$$

3.2. Relaciones de Fresnel

3.2.1. Relaciones de Fresnel para polarización en 'p'

Aquí, como hemos tomado las ondas de forma inversa, lo que aparece en esas ecuaciones como la amplitud de la onda incidente, será la amplitud de la onda transmitida.

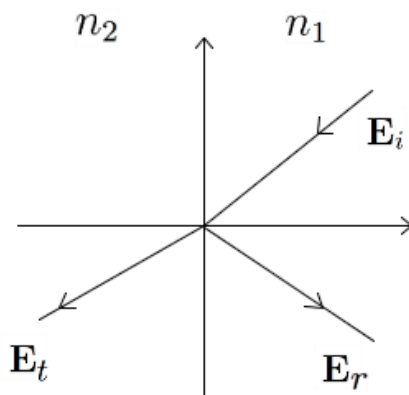


Figura 3.2: Esquema de las ondas mencionadas.

Tomamos E_i como la onda que incide desde la derecha y calcularemos de (3.27) y (3.28) qué son E_t y E_r lo que nos llevará a los coeficientes de Fresnel, ya que éstos se definen como las relaciones entre las amplitudes de las ondas transmitida y reflejada sobre la amplitud de la onda incidente.

Renombraremos nuestras constantes de la siguiente forma $A = E_i$, $B = E_r$ y $E_i = E_t$ y al usar (3.27) y (3.28) se obtienen las ecuaciones usuales de Fresnel [3]

$$E_i = \frac{E_t(n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_i)}{2n_1 \cos \theta_1} \quad (3.57)$$

$$E_r = \frac{E_t(n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_i)}{2n_1 \cos \theta_1}. \quad (3.58)$$

Entonces para obtener $\frac{E_t}{E_i}$ y procedemos a despejar lo primero de (3.57)

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_i} \quad (3.59)$$

y luego sustituirlo en (3.58) para obtener $\frac{E_r}{E_i}$:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_i}{2n_1 \cos \theta_1} \cdot \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_i} E_i \\ \implies \frac{E_r}{E_i} &= \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_i}. \end{aligned}$$

Con esto obtenemos los coeficientes de Fresnel, como son cantidades reales, E_r y E_t están en fase.

3.2.2. Relaciones de Fresnel para polarización 's'

Pasamos ahora a resolver el problema para nuestro segundo caso, la polarización tipo "s", perpendicular.

Según la literatura, las relaciones de Fresnel para la polarización perpendicular, describen o relacionan a la amplitud incidente del primer medio, con la amplitud de la onda reflejada en el mismo medio y a la amplitud de la onda incidente en el primer medio con la amplitud de la onda transmitida en el segundo medio. Si adaptamos esto a nuestro problema, tenemos que hacer lo siguiente para poder obtener esta relación de nuevo:

De (3.55)

$$E_t = E_i \frac{1}{\frac{\tan \theta_i + \tan \theta_1}{2 \tan \theta_i}} = E_i \frac{2 \tan \theta_i}{\tan \theta_i + \tan \theta_1}$$

y sustituyendo en (3.56)

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\tan \theta_i - \tan \theta_1}{2 \tan \theta_i} \cdot E_i \frac{2 \tan \theta_i}{\tan \theta_i + \tan \theta_1} \\ &= E_i \frac{\tan \theta_i - \tan \theta_1}{\tan \theta_i + \tan \theta_1} \\ &= \frac{\frac{\sin \theta_i}{\cos \theta_i} - \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1}}{\frac{\sin \theta_i}{\cos \theta_i} + \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1}} \\ &= E_i \frac{\sin \theta_i \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_i}{\sin \theta_i \cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_i} \\ &= E_i \frac{n_2 \sin \theta_i \cos \theta_1 - n_2 \sin \theta_1 \cos \theta_i}{n_2 \sin \theta_i \cos \theta_1 + n_2 \sin \theta_1 \cos \theta_i} \\ &= E_i \frac{n_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 - n_2 \sin \theta_1 \cos \theta_i}{n_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + n_2 \sin \theta_1 \cos \theta_i} \\ &= E_i \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_i} \\ \implies \frac{E_r}{E_i} &= \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_i} \end{aligned}$$

este resultado nos deja lo mismo que se muestra en la literatura.

3.3. Reflexión total interna

Las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales parciales, y afortunadamente, admiten soluciones que son ondas planas, lo cual se verifica usualmente en los libros de texto por simple sustitución. Sin embargo, las ondas planas no son todas las soluciones que existen para las ecuaciones de Maxwell y, de hecho, en algunas ocasiones es necesario emplear otras soluciones, las cuales, curiosa y afortunadamente, se pueden construir a partir de las ondas planas. La idea básica es que los parámetros que aparecen en las ondas planas pueden sustituirse por números complejos y el resultado sigue siendo solución de las ecuaciones de Maxwell, debido a que muchas ecuaciones sólo involucran objetos reales. Aunque las soluciones obtenidas de esta manera sean complejas, sus partes real e imaginaria son soluciones reales de esas ecuaciones.

De hecho, es muy conveniente expresar las ondas planas mediante el uso de cantidades complejas. En este trabajo utilizaremos la fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sen \theta$.

3.3.1. Polarización tipo 'p'

Para la polarización tipo "p" la expresión (3.10) se puede escribir como:

$$\mathbf{E}_0 = \text{Re} \left[E_0 (-\sen \theta_0 \hat{k} + \cos \theta_0 \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} (x \sen \theta_0 + z \cos \theta_0) - \omega t \right) \right], \quad (3.60)$$

aunque el factor $E_0 (-\sen \theta_0 \hat{k} + \cos \theta_0 \hat{i})$ podría haberse dejado fuera de la operación de tomar la parte real, conviene escribir así el campo eléctrico, dejando abierta la posibilidad de que dicho factor también sea complejo.

Recordando que

$$\cos(i\alpha) = \cosh \alpha, \quad \sen(i\alpha) = i \senh \alpha \quad (3.61)$$

al sustituir θ_0 por $i\theta_0$ en (3.60) se obtiene

$$\mathbf{E}_0 = \text{Re} \left[E_0 (-i \senh \theta_0 \hat{k} + \cosh \theta_0 \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} (ix \senh \theta_0 + z \cosh \theta_0) - \omega t \right) \right], \quad (3.62)$$

lo que es parte de una solución de las ecuaciones de Maxwell (el campo \mathbf{B} se puede deducir a partir de (3.62)) pero, suponiendo que θ_0 es real, contiene un factor exponencial real en la coordenada x que no puede coincidir con (3.8).

En cambio, si primero sustituimos θ_0 por su complemento $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ en (3.10) (lo que solo significa que θ_0 sea el ángulo que forma el vector de propagación con el eje x , en lugar del eje z) de (3.60) se tiene

$$\mathbf{E}_0 = \text{Re} \left[E_0 (-\cos \theta_0 \hat{k} + \sen \theta_0 \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} (x \cos \theta_0 + z \sen \theta_0) - \omega t \right) \right], \quad (3.63)$$

recordando que lo que hacemos es tratar de encontrar una expresión que sea consistente con (3.8) si hacemos la sustitución de θ_0 por $i\theta_0$ se obtiene el campo eléctrico,

$$\mathbf{E}_0 = \text{Re} \left[E_0 (-\cosh \theta_0 \hat{k} + i \senh \theta_0 \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} (x \cosh \theta_0 + iz \senh \theta_0) - \omega t \right) \right]. \quad (3.64)$$

Este campo eléctrico evaluado en $z = 0$ sí puede coincidir con (3.8). De hecho, en $z = 0$ la dependencia en x del campo (3.64) coincide con la del campo dado en (3.8) si

$$n_2 \sen \theta_i = n_1 \cosh \theta_0$$

lo cual, recordando que los valores de $\cosh \theta_0$ son mayores que o iguales a 1 para θ_0 real, lleva a la condición $\frac{n_2}{n_1} \sen \theta_i \geq 1$, que cubre el caso no considerado en las secciones anteriores.

Repitiendo básicamente los pasos presentados en la sección 3.1.1, en lugar de la ecuación (3.12) tenemos

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[E_i \left(-\frac{n_2^2}{n_1^2} \operatorname{sen} \theta_i \hat{k} + \cos \theta_i \hat{i} \right) \exp i \left(\frac{n_2 \omega}{c} x \operatorname{sen} \theta_i - \omega t \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} E(\phi) (-\cosh \phi \hat{k} + i \operatorname{senh} \phi \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \cosh \phi - \omega t \right) d\phi, \end{aligned} \quad (3.65)$$

donde ahora $E(\phi)$ es una función por determinar que puede tener valores complejos y esta condición debe satisfacerse para toda x y toda t . Esto implica que los argumentos de Re son iguales. La prueba es muy simple: si $\operatorname{Re}(ze^{it}) = \operatorname{Re}(\omega e^{it})$, para toda t , entonces en particular la igualdad se cumple para $t = 0$ y $t = \pi/2$, lo que lleva a $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \omega$ y $\operatorname{Re}(zi) = \operatorname{Re}(\omega i)$, por lo que las partes reales e imaginarias de z y ω son iguales, respectivamente.

Luego, si $\phi_1 \in [0, \infty)$ se define por

$$\cosh \phi_1 = \frac{n_2}{n_1} \operatorname{sen} \theta_i, \quad (3.66)$$

tomando en cuenta que $\cosh \phi_1 = \cosh(-\phi_1)$, entonces la función $E(\phi)$ tendría la forma

$$E(\phi) = A\delta(\phi - \phi_1) + B\delta(\phi + \phi_1), \quad (3.67)$$

donde A y B son constantes por determinar. Sustituyendo (3.67) en (3.65) y haciendo uso de (3.66), se obtienen las ecuaciones

$$(A + B) = E_i \frac{n_2}{n_1}, \quad i(A - B) \operatorname{senh} \phi_1 = E_i \cos \theta_i \quad (3.68)$$

cuya solución es

$$A = \frac{E_i}{2} \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{\cos \theta_i}{i \operatorname{senh} \phi_1} \right) \quad (3.69)$$

$$B = \frac{E_i}{2} \left(\frac{n_2}{n_1} - \frac{\cos \theta_i}{i \operatorname{senh} \phi_1} \right). \quad (3.70)$$

Cabe señalar que con lo anterior, en particular de (3.69), (3.70) y (3.67), el campo para $z > 0$, va a tener exponenciales en z crecientes y decrecientes (ver (3.64)), es decir, una parte del campo crece sin límite al alejarse de $z = 0$. A diferencia de la sección anterior, no invertiremos el tiempo, sino que supondremos que en $z > 0$ existe una onda 'evanescente' como (3.64) con $\theta_0 \geq 0$ para que la amplitud del campo no crezca exponencialmente al alejarse del plano $z = 0$. Es decir, invertimos los papeles y comenzamos suponiendo que en $z \geq 0$ hay un campo de la forma (3.64), con $\theta_0 \geq 0$ y determinaremos cómo deben ser los campos electromagnéticos en la región $z < 0$.

Cuando $z \rightarrow 0^+$

$$\mathbf{E}_0 = \operatorname{Re} \left[E_0 (-\cosh \theta_0 \hat{k} + i \operatorname{senh} \theta_0 \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \cosh \theta_0 - \omega t \right) \right]. \quad (3.71)$$

Por otro lado, debido a las condiciones de frontera, cuando $z \rightarrow 0^-$

$$\mathbf{E}_0 = \operatorname{Re} \left[E_0 \left(-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cosh \theta_0 \hat{k} + i \operatorname{senh} \theta_0 \hat{i} \right) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \cosh \theta_0 - \omega t \right) \right] \quad (3.72)$$

como sucede en (3.8). Proponemos un campo en $z < 0$ de la forma

$$\mathbf{E}_0 = \operatorname{Re} \left[\int_0^{2\pi} E(\phi) (-\operatorname{sen} \phi \hat{k} + \cos \phi \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_2 \omega}{c} (x \operatorname{sen} \phi + z \cos \phi) - \omega t \right) d\phi \right], \quad (3.73)$$

Onda que incide en una interfaz
3.3 Reflexión total interna

tal como en (3.11). Luego, al igual que en las secciones pasadas, igualamos las expresiones para el campo cuando $z \rightarrow 0^-$ con el campo cuando $z < 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \left(-\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cosh \theta_0 \hat{k} + i \sinh \theta_0 \hat{i} \right) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \cosh \theta_0 - \omega t \right) \\ &= \int_0^{2\pi} E(\phi) (-\sin \phi \hat{k} + \cos \phi \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_2 \omega}{c} x \sin \phi - \omega t \right) d\phi \end{aligned} \quad (3.74)$$

lo que lleva a que $\cosh \theta_0 = \frac{n_2}{n_1} \sin \phi$ (que se debe comparar con (3.66)) y

$$E(\phi) = \tilde{A} \delta(\phi - \phi_1) + \tilde{B} \delta(\phi - (\pi - \phi_1)) \quad (3.75)$$

donde \tilde{A} y \tilde{B} son constantes y ϕ_1 es el único ángulo en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ tal que

$$\sin \phi_1 = \frac{n_1}{n_2} \cosh \theta_0$$

comparando componente a componente,

$$-E_0 \frac{n_1^2}{n_2^2} \cosh \theta_0 = -\tilde{A} \sin \phi_1 - \tilde{B} \sin \phi_1 \quad (3.76)$$

$$iE_0 \sinh \theta_0 = \tilde{A} \cos \phi_1 - \tilde{B} \cos \phi_1 \quad (3.77)$$

así

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \frac{n_1}{n_2} E_0 \quad (3.78)$$

$$\tilde{A} - \tilde{B} = iE_0 \frac{\sinh \theta_0}{\cos \phi_1}. \quad (3.79)$$

Entre otras cosas, el desarrollo anterior muestra que en $z < 0$ debe haber un campo expresable como dos ondas planas que se propagan en las direcciones $\sin \phi_1 \hat{i} + \cos \phi_1 \hat{k}$ y $\sin \phi_1 \hat{i} - \cos \phi_1 \hat{k}$, es decir

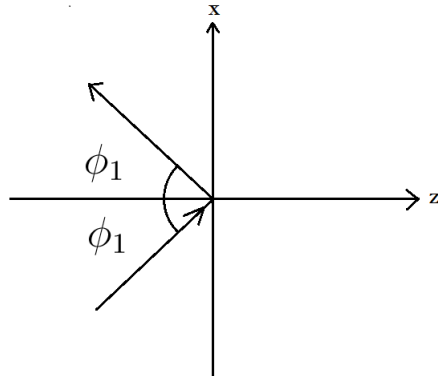


Figura 3.3: Configuración de las ondas que muestran la reflexión total interna.

Tenemos lo que se denomina una 'Reflexión total interna' en la región $z < 0$. (Lo cual se sabe que puede ocurrir con las ondas evanescentes, en [4] se describen 4 situaciones en las que se puede dar el fenómeno.)

Resolvemos para \tilde{A} y \tilde{B}

$$\tilde{A} = \frac{E_0}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} + i \frac{\sinh \theta_0}{\cos \phi_1} \right) \quad \tilde{B} = \frac{E_0}{2} \left(\frac{n_1}{n_2} - i \frac{\sinh \theta_0}{\cos \phi_1} \right) \quad (3.80)$$

notamos que \tilde{B} es el conjugado de \tilde{A} y tenemos un cambio de fase de la onda cuando se refleja, lo cual es debido a que hay un factor complejo en la fase. Esto se debe a que lo resultante puede escribirse como una función exponencial, según la fórmula de Euler y al multiplicarse con la onda que ya teníamos, nos crea un desfase, en otras palabras:

$$\exp(i\omega t) \cdot \exp(i\alpha) = \exp\left(i\omega\left(t + \frac{\alpha}{\omega}\right)\right). \quad (3.81)$$

3.3.2. Polarización tipo 's'

Para la polarización tipo "s" seguiremos los mismos pasos que en la subsección pasada, entonces tomaremos la ec. (3.35) y la reescribiremos como sigue:

$$\mathbf{B}_0 = \text{Re} \left[\frac{n_1}{c} E_0 (-\sin \theta_0 \hat{k} + \cos \theta_0 \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} (z \cos \theta_0 \hat{k} + x \sin \theta_0 \hat{i}) - \omega t \right) \right]. \quad (3.82)$$

Al igual que en la subsección anterior, dejaremos abierta la posibilidad de que el factor E_0 también sea complejo.

Procedemos a sustituir θ_0 por $i\theta_0$ y recordamos las identidades (3.61), con lo que obtenemos:

$$\mathbf{B}_0 = \text{Re} \left[\frac{n_1}{c} E_0 (-i \sinh \theta_0 \hat{k} + \cosh \theta_0 \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} (z \cosh \theta_0 + ix \sinh \theta_0) - \omega t \right) \right], \quad (3.83)$$

de nuevo, si sustituimos θ_0 por su complemento $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ desde antes, entonces obtenemos:

$$\mathbf{B}_0 = \text{Re} \left[\frac{n_1}{c} E_0 (-\cos \theta_0 \hat{k} + \sin \theta_0 \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} (z \sin \theta_0 + x \cos \theta_0) - \omega t \right) \right], \quad (3.84)$$

ahora procedemos a sustituir θ_0 por $i\theta_0$, se tiene:

$$\mathbf{B}_0 = \text{Re} \left[\frac{n_1}{c} E_0 (-\cosh \theta_0 \hat{k} + i \sinh \theta_0 \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} (iz \sinh \theta_0 + x \cosh \theta_0) - \omega t \right) \right]. \quad (3.85)$$

Evaluamos este campo en $z = 0$ y vemos si puede coincidir con (3.35), observamos que en $z = 0$ la dependencia en x del campo (3.85) coincide con la del campo dado en (3.35) si

$$n_2 \sin \theta_i = n_1 \cosh \theta_0$$

lo cual, como mencionamos anteriormente, nos lleva a la condición $\frac{n_2}{n_1} \sin \theta_i \geq 1$.

Al realizar el desarrollo como en la sección 3.1.1, en lugar de la ec. (3.39) tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{Re} \left[\frac{n_2}{c} E_i (-\sin \theta_i \hat{k} + \cos \theta_i \hat{i}) \cos \left(\frac{n_2 \omega}{c} x \sin \theta_i - \omega t \right) \right] \\ &= \text{Re} \int_0^{2\pi} E(\phi) \left[\frac{n_1}{c} (-\cosh \phi \hat{k} + i \sinh \phi \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \cosh \phi - \omega t \right) \right] d\phi. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Como las condiciones para $E(\phi)$ son las mismas que para el campo eléctrico, volvemos a definir $\phi_1 \in [0, \infty)$ según (3.66) y tomando en cuenta que $\cosh \phi_1 = \cosh(-\phi_1)$ entonces la función $E(\phi)$ debe tener la forma de la ec. (3.67). Sustituimos (3.67) en la ecuación anterior, tenemos

$$(A + B) = E_i \frac{n_2 \sin \theta_i}{n_1 \cosh \phi_1} \quad i(A - B) = E_i \frac{n_2 \cos \theta_i}{n_1 \sinh \phi_1} \quad (3.87)$$

cuya solución es

$$A = \frac{E_i}{2} \left(1 + \frac{n_2 \cos \theta_i}{i n_1 \sinh \phi_1} \right) \quad (3.88)$$

$$B = \frac{E_i}{2} \left(1 - \frac{n_2 \cos \theta_i}{i n_1 \sinh \phi_1} \right). \quad (3.89)$$

Al igual que en el ejemplo pasado, una parte del campo crece sin límite al alejarse de $z = 0$ con lo que suponemos una onda evanescente en $z > 0$ con $\theta_0 \geq 0$. Con esto, volvemos a invertir los papeles y comenzamos suponiendo que en $z \geq 0$ hay un campo de la forma (3.83) con $\theta_0 \geq 0$ para pasar a determinar como deben ser los campos en la región $z < 0$.

Cuando la onda se acerca por la derecha $z \rightarrow 0^+$ tenemos que

$$\mathbf{B}_0 = \text{Re} \left[\frac{n_1}{c} E_0 (-\cosh \theta_0 \hat{k} + i \sinh \theta_0 \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \cosh \theta_0 - \omega t \right) \right]. \quad (3.90)$$

Por otro lado, cuando nos acercamos por la izquierda $z \rightarrow 0^-$

$$\mathbf{B}_0 = \text{Re} \left[\frac{n_1}{c} E_0 (-\cosh \theta_0 \hat{k} + i \sinh \theta_0 \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \cosh \theta_0 - \omega t \right) \right] \quad (3.91)$$

y, como lo hicimos para el campo eléctrico, proponemos un campo en $z < 0$ de la forma

$$\mathbf{B}_0 = \text{Re} \left[\frac{n_2}{c} \int_0^{2\pi} E(\phi) (-\sin \phi \hat{k} + \cos \phi \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_2 \omega}{c} (x \sin \phi + z \cos \phi) - \omega t \right) d\phi \right], \quad (3.92)$$

como en (3.37). Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{n_1}{c} E_0 (-\cosh \theta_0 \hat{k} + i \sinh \theta_0 \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_1 \omega}{c} x \cosh \theta_0 - \omega t \right) \\ &= \frac{n_2}{c} \int_0^{2\pi} E(\phi) (-\sin \phi \hat{k} + \cos \phi \hat{i}) \exp i \left(\frac{n_2 \omega}{c} x \sin \phi - \omega t \right) d\phi \end{aligned} \quad (3.93)$$

lo que lleva a que $\cosh \theta_0 = \frac{n_2}{n_1} \sin \phi$ (que también se debe comparar con (3.66)) y (3.67) donde \tilde{A} y \tilde{B} son constantes y ϕ_1 es el único ángulo en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ tal que

$$\sin \phi = \frac{n_1}{n_2} \cosh \theta_0 \quad (3.94)$$

y haciendo la comparación componente a componente,

$$\tilde{A} = \frac{n_1}{2n_2} E_0 \left(\frac{n_2}{n_1} + i \frac{\sinh \theta_0}{\cos \phi_1} \right) \quad \tilde{B} = \frac{n_1}{2n_2} E_0 \left(\frac{n_2}{n_1} - i \frac{\sinh \theta_0}{\cos \phi_1} \right) \quad (3.95)$$

donde de nuevo podemos ver que \tilde{B} es el conjugado de \tilde{A} y al igual que en la sección anterior, tenemos factores complejos, lo cual nos dice que tenemos un cambio de fase de onda cuando ésta se refleja al igual que en (3.81).

Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesis pudimos comprobar que es posible obtener la solución del problema de una onda plana que incide sobre la frontera entre dos medios no conductores, sin suponer cuál es la forma que debe tener dicha solución. tanto para la incidencia paralela como para la incidencia perpendicular.

Pudimos llegar a la situación usual al invertir el tiempo, es decir, el orden y dirección en el que suceden los eventos.

Con esto hemos logrado que sean las mismas ecuaciones las que nos indiquen las características que deben tener las ondas resultantes.

Hemos mostrado que de acuerdo con lo establecido en la (2.15), conociendo los campos en la frontera entre los dos medios, los campos en cada región están determinados en forma única y en principio este resultado se puede aplicar para cualquier tipo de onda, no solamente una onda plana.

Como sería de esperarse, los resultados aquí hallados coinciden con los presentados en la literatura donde las propiedades de la solución dependen de la suposición de la existencia de una onda plana en un lado de la frontera entre los dos medios que se extiende a todo el volumen infinito de esa región, que ha existido desde siempre y seguirá presente indefinidamente. Como se sabe, esto no hace que la solución no sea útil, ya que considerando un paquete de ondas se tendría una situación realista que se puede tratar conociendo los efectos para una plana arbitraria.

Bibliografía

- [1] D.J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*, 4ta edición. Pearson, 2013.
- [2] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*, 3ra edición. Wiley, 1999.
- [3] F.J. Milford J.R. Reitz and R.W. Christy. *Foundations of Electromagnetic Theory*, 3ra edición. Addison-Wesley, 1979.
- [4] Akhlesh Lakhtakia and Tom G Mackay. Total internal reflection of evanescent plane waves. *European Journal of Physics*, 29:59–61, 2008.
- [5] E. Wolf M. Born. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, 7ma edición. Cambridge University Press, 1999.
- [6] R.K. Wangsness. *Electromagnetic Fields*, 3ra edición. Wiley, 1986.
- [7] A. Zangwill. *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2013.