BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TÍTULO DE LA TESIS

GRADOS DE ADQUISICIÓN EN LA COMPRENSIÓN DE ÁNGULOS Y TRIÁNGULOS DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SEGÚN EL MODELO DE VAN HIELE.

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

MARIANA TRINIDAD RAMOS ROMERO

DIRECTORA DE TESIS

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR

PUEBLA, PUE. DICIEMBRE, 2023

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a la Doctora Lidia por todo el apoyo que me dio, por creer en mí, y por reconocer cada uno de mis logros. Gracias por todas las experiencias dadas en todos los años de carrera que tuve.

También quiero agradecer a la Licenciada Abigail García por apoyo incondicional que me brindó, fue una pieza fundamental en mi término de la carrera, por esos regaños y sobre todo por esas palabras motivacionales, por creer siempre en mí y no dejarme sola, sabes que eres más que una amiga, sé que las palabras no son suficientes para darte mi agradecimiento, pero con hechos lo demuestro. A mis sinodales por el apoyo brindado en el trayecto de la licenciatura, gracias por ser mis profesores.

Gracias a mi papá por apoyarme con mis estudios, por darme de herencia una carrera con la cual valerme sola, aunque sé que es exigente y a veces muy duro, sé que está muy orgulloso de mi por todo lo que he logrado en el camino, él me entendió cuando tuve inconvenientes con un profesor, me escuchó. A pesar de a veces hacerme sentir mal con sus palabras, me hace ver de todo lo que soy capaz, gracias papá.

Gracias a mi mamá porque tú me apoyabas cuando me atrasaba con mis apuntes, te desvelabas conmigo por pasar mis apuntes a limpio, cuando tenía mucha tarea me servías la comida y me procuraste por mucho tiempo, ahora tu apoyo moral es muy importante, espero que estés orgullosa de mí.

Hija mía gracias por entender que te tenía que dejar algunas ocasiones llorando porque querías estar conmigo, y a pesar de tu corta edad has comprendido y me has apoyado bastante con quedarte a cuidado de alguien más, en algún momento sabrás que todo esto es por ti y para ti, yo también me fui llorando muchas ocasiones por dejarte.

Por último, quiero agradecer a mis amigos Mtra. Pati, Mtro. Gabo, Lic. Fani, Lic. Eli, Lic. Judith, Lic. Norma, que creyeron en mí, me motivaron, incluso no me dejaron caer cuando perdí las ganas de seguir estudiando, me han dado un apoyo incondicional, y sé que siempre

estarán para mi cuando los necesite, fueron parte fundamental en mi trayecto de la licenciatura, así como también agradecer a todos mis compañeros.

Índice general

Introducción ……..……. 1

Capítulo 1. Marco Teórico ……...…….. 5

1.1 Teoría de Van Hiele ……..…… 5

1.1.1 Niveles de Van Hiele ……. 7

1.1.2 Fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele ……...…. 10

1.1.3 Comportamiento en cada Nivel de Van Hiele …….. 12

1.2 Descripción del Método de adquisición …….. 13

1.2.1 Grados de Adquisición …….…… 13

1.2.2 Tipos de Respuesta ……..…. 15

Capítulo 2. Método ……...… 19

2.1 Tipo de estudio ……... 19

2.2 Muestra ……... 19

2.3 Cuestionario ……... 19

Capítulo 3. Resultados ……. 25

3.1 Resultados Cuantitativos …… 25

3.2 Resultados Cualitativos …….. 46

Capítulo 4. Conclusiones ……. 64

Referencias …….. 67

Anexo I ……..… 69

Anexo II ……...…… 75

Introducción

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003) considera a la geometría como la materia en la que el alumno estudia las formas y estructuras geométricas y aprende a analizar sus características y relaciones.

La enseñanza de la geometría ha estado limitada al hecho de conceptualizar figuras y plasmarlas sobre papel, pues los alumnos no suelen contar con objetos o formar ejemplos reales que le permitan entender mejor los contenidos. El educador tiene la obligación de buscar y/o crear estrategias que permitan el desarrollo y razonamiento intelectual de los estudiantes (Vargas y Gamboa, 2013).

Parte de la importancia de la geometría es que ayuda a las personas a desarrollar destrezas mentales de diversos tipos como la intuición espacial, la integración, la manipulación y experimentación por la deducción.

Los conceptos básicos de geometría son ángulos y triángulos, los cuales son vistos de manera obligatoria en los programas de educación básica en el sistema educativo de México, ya que estos tienen una gran aplicación en problemas de nuestra vida cotidiana y a su vez una gran conexión con diversos conceptos matemáticos.

El concepto de triángulo es el ejemplo más ilustrativo, ya que su estudio comienza desde la educación preescolar y se prolonga hasta la educación media superior. El concepto de ángulo es visto por primera vez en cuarto año de primaria y también se prolonga hasta la educación media superior, puesto que son capaces de usarlo, medirlo y aplicarlo (Hernández et al, 2021).

La teoría de Van Hiele fue desarrollada por el matrimonio formado por Pierre Marie van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, quienes, en sus tesis doctorales, presentaron, respectivamente, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la Geometría (Van Hiele, 1957) y un ejemplo concreto de aplicación de ese modelo en unos cursos de Geometría (Van Hiele-

Geldof, 1957). En su modelo describen el razonamiento geométrico a través de cinco niveles y proponen cinco fases para guiar el proceso de enseñanza.

En Burger y Shaughnessy (1990) se observó que algunos estudiantes oscilaban en sus respuestas entre dos niveles consecutivos de razonamiento, empleando a veces uno de los niveles y a veces el otro. A su vez, buscaron un consenso en las opiniones de los evaluadores.

Fuys et al. (1988) en su investigación se observó el empleo de estrategias de dos niveles consecutivos por parte de algunos alumnos, los cuales tenían el nivel inferior ante alguna situación en la cual no se sentían seguros. La conclusión de los investigadores fue que no está claro que el paso de un nivel a otro sea discreto, aunque si se produce un momento de salto o avance brusco. La asignación de un nivel de razonamiento mostrado por los estudiantes en cada tarea también la resumen estos investigadores indicando de uno a dos niveles consecutivos. Por lo que, utilizan el símbolo 1-2 para indicar la transición entre los niveles 1 y 2 de los estudiantes que formularon propiedades y dieron algunos argumentos deductivos simples, pero que no son capaces de hacer demostraciones por sí mismos.

El enfoque importante de esta investigación ha sido la manera de determinar el nivel de pensamiento de los estudiantes en las preguntas abiertas, ya que la mayoría de los estudiantes muestran un nivel dominante de pensamiento al responderlas. Ofreciendo así, una forma alternativa de evaluar la adquisición de los niveles de van Hiele.

Por lo que, Pastor (1993) en su tesis doctoral concluye que los niveles de Van Hiele son continuos ya que tienen una adquisición gradual de un nivel de razonamiento por un estudiante, definiendo el concepto de **Grado de Adquisición** de un nivel de van Hiele. Esta visión proporciona mayor información sobre la forma de razonamiento de los estudiantes y mayor precisión en su evaluación que la asignación de un simple y único nivel de razonamiento, empleada en todos los trabajos anteriores sobre el Modelo de van Hiele que conocemos (Gutiérrez y Jaime, 1991).

La investigación que se reporta en esta tesis utiliza el método propuesto en el artículo de Gutiérrez y Jaime (1991) para medir la transición entre niveles de Van Hiele. Así, el objetivo de este trabajo es analizar la comprensión de los conceptos de ángulo y triángulo con base al Modelo de Van Hiele, mediante un método que permite medir la transición de un nivel a otro.

El análisis de las respuestas es mixto, ya que se presentará de manera cuantitativa, en el cual se hace el análisis de los grados de adquisición, seguido del análisis cualitativo, en el cual se describe lo que el alumno realiza, y se pretende entender lo que este piensa.

Capítulo 1. Marco Teórico

Los conceptos de ángulo y triángulo son de los temas más estudiados por un largo periodo desde el nivel básico, hasta el nivel medio superior. Rotaeche y Montiel (2017), Clements y Burns (2000), Mitchelmore y White (2000) y Casas y Luengo (2005) hacen mención en sus investigaciones que hay cuatro clases particulares de la definición de ángulo que suelen ser más frecuentes:

- Cantidad de giro, entre dos líneas
- Un par de rayos con un punto en común
- Una región formada por la intersección
- La cantidad de inclinación entre dos líneas rectas.

Cabe mencionar que la dificultad de este concepto se debe a la diversidad de definiciones en los libros de texto. Según Rotaeche y Montiel (2017) las dificultades más comunes que presentan los estudiantes con el uso de los conceptos de ángulo son:

- La coordinación de las distintas componentes del concepto.
- Identificar el ángulo dentro de otras figuras.
- Reconocer como ángulos los de medida 0°, 180° y 360°.

Brosseau (2000) establece que el proceso para adquirir un conocimiento matemático pasa por diversas fases y se basa en juegos específicos, donde el actor interactúa con un medio a distintos niveles, evolucionando sus nociones y su lenguaje.

1.1 Teoría de van Hiele

El modelo de van Hiele está formado por dos partes, la primera es descriptiva y la segunda deductiva. En la parte descriptiva se identifican diferentes formas de razonamiento

geométrico de los estudiantes, los cuales son llamados "niveles de razonamiento", a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan al máximo grado de desarrollo intelectual. En la parte deductiva marca unas pautas a seguir por los profesores para favorecer el razonamiento geométrico de los estudiantes, es decir, el modelo da a los profesores directrices sobre cómo se puede ayudar a los alumnos para que puedan alcanzar con más facilidad un nivel superior de razonamiento, a estas directrices se les conoce como las "fases de aprendizaje".

El proceso de aprendizaje de la geometría del razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles de razonamiento que son secuenciales, ordenados y recursivos, ya que esta secuencia se repite conforme al tema que se esté revisando (Fuys et al., 1985 y Mayberry, 1983). Usiskin (1982) descubrió que a los estudiantes individuales se les puede asignar un nivel de van Hiele, pero que los estudiantes en transición de un nivel al siguiente son difíciles de clasificar de manera confiable.

Mayberry (1983) también encontró que los estudiantes pueden estar en diferentes niveles para diferentes conceptos y que muchos estudiantes nunca alcanzan el nivel de deducción formal, una conclusión compartida por Usiskin (1982).

La componente instructiva del modelo se basa en las fases de aprendizaje de este mismo, las cuales fomentan el desarrollo de la capacidad del razonamiento geométrico de los estudiantes y su paso a través de los niveles de razonamiento.

El modelo de Van Hiele ayuda a explicar cómo en el proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento geométrico de los estudiantes transcurre por una serie de niveles. Ningún nivel de razonamiento es independiente de otro y no es posible saltarse ninguno (Vargas y Gamboa, 2013), es decir, no puede tener el nivel 1 y el nivel 3 completos, pero el nivel 2 no comprendido, para poder llegar a alcanzar el nivel 3 debe tener comprendido y completo el nivel 2, esto es, para ella solo existen 6 patrones posibles de los cuales los estudiantes pueden tener los niveles de razonamiento (Mayberry, 1983).

De acuerdo con Fouz y De Donosti (2005) el punto clave en la utilización del modelo de Van Hiele es precisamente la evaluación, es decir, interesa la valoración de un individuo tomando en cuenta las razones por las que dio determinada respuesta.

1.1.1 Niveles de Van Hiele

EL modelo propone cinco niveles de razonamiento geométrico, en los cuales se describe el dominio, la comprensión de las nociones y capacidades geométricas en los diversos temas de la geometría, se suelen nombrar con números del 1 a 5, siendo esta notación la más utilizada; aunque también existe la notación del 0 al 4, nosotros nos basaremos en la primera.

Las siguientes son las principales características que permiten reconocer cada uno de los cinco niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele a partir de la actividad de los estudiantes (Burger y Shaughnessy, 1986; Crowley, 1987; Fuys, Geddes y Tischler, 1984; Gutiérrez y Jaime, 1990; y Usiskin, 1982) utilizando descripciones de Dina Van Hiele (Van Hiele-Geldof, 1957):

Nivel 1 (Reconocimiento o Visualización)

- Los estudiantes pueden aprender nombres de figuras y reconocer una forma como un todo, sin tener en cuenta explícitamente las propiedades de sus componentes.
- Además, pueden identificar, nombrar, comparar y operar sobre figuras geométricas de acuerdo a su apariencia entre ellas.
- Sin embargo, no suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.

En la última de las características del nivel 1 que se está enunciando, se dice que los estudiantes no suelen reconocer explícitamente.

Nivel 2 (Análisis)

- Los estudiantes razonan sobre conceptos geométricos por medio de un análisis informal de componentes y atributos. Se establecen las propiedades necesarias del concepto.
- Además, puede identificar propiedades de figuras, es decir, analiza, relaciona y descubre propiedades de manera empíricamente.
- Sin embargo, no son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades.

El nivel 2 es el primero que ofrece un razonamiento que podemos llamar matemático, pues es el primero en el que los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar las propiedades que aún no conocían.

Nivel 3 (Clasificación)

- Los estudiantes ordenan lógicamente las propiedades de los conceptos, forma definiciones abstractas y puede distinguir entre la necesidad y la suficiencia de un conjunto de propiedades para determinar un concepto.
- Además, interrelacionan lógicamente propiedades y/o reglas previamente descubiertas al dar o seguir argumentos informales, pero no opera dentro de un sistema matemático.
- Los estudiantes pueden describir una figura de manera formal, es decir, pueden dar definiciones matemáticamente correctas, comprenden las definiciones y los requisitos de una definición correcta.

Si la capacidad de razonamiento propia del nivel 2 no permitía a los estudiantes entender que algunas propiedades pueden deducirse de otras, al alcanzar el nivel 3, habrán adquirido esta habilidad.

Nivel 4 (Deducción Formal)

- Los estudiantes comprenden la importancia de la deducción y las funciones de los postulados, teoremas y pruebas.
- Además, demuestran teoremas deductivamente y establecen relaciones entre los teoremas.
- Los estudiantes pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas, es decir, el sentido y la utilidad de términos no definidos, es decir, el estudiante razona formalmente dentro del contexto matemático.

La mayoría de los autores ponen ejemplos de los diferentes niveles de razonamiento basándose en el estudio de cuadriláteros, los estudiantes del nivel 4 son capaces de hacer demostraciones formales de las propiedades que ya habían demostrado de manera informal con anterioridad, y así descubrir nuevas propiedades más complejas y ser capaces de demostrarlas.

Nivel 5 (Rigor)

- Los estudiantes pueden comparar sistemas basados en diferentes axiomas y pueden estudiar diversos temas de geometría en ausencia de modelos concretos.
- Además, los estudiantes comprenden la necesidad de rigor y son capaces de hacer deducciones abstractas.

De este nivel, casi no se encuentra información, ya que los autores creen que este nivel es inalcanzable en un estudiante de bachillerato, se cree que este nivel solo es alcanzado en el nivel superior con aptitudes geométricas, es decir alguna licenciatura de Ciencias Exactas.

Los cuatro niveles representan cuatro grados de sofisticación en el razonamiento matemático van Hiele (1986) redacta: "el pensamiento del segundo nivel no es posible sin la capacidad del primer nivel, pensar en el tercero no es posible sin la capacidad de razonamiento del segundo; pensar en el cuarto no es posible sin el tercero" (p. 51).

Entre las características de los niveles 1, 2 y 3 siempre hay alguna que se refiere a habilidades que aún no saben usar los estudiantes. Por lo que, *lo que es implícito en un nivel se convierte en explicito para el siguiente nivel*, estas características se muestran en la tabla 1.

	ELEMENTOS EXPLÍCITOS	ELEMENTOS IMPLÍCITOS
NIVEL 1	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
NIVEL 2	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
NIVEL 3	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
NIVEL 4	Deducción formal de teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)

Tabla 1. Características de los niveles de Van Hiele.

1.1.2 Fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele

Según Pierre van Hiele el paso de un nivel a otro necesita asegurarse con las instrucciones adecuadas, estas no dependen de la edad o madurez intelectual de los estudiantes, lo que se

pretende es que los alumnos adquieran de manera comprensiva los conocimientos necesarios para poder utilizarlos y combinarlos, las cuales constan de cinco fases:

Fase 1: Información. Los estudiantes se familiarizan con el dominio de trabajo, es decir, el profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que se va a trabajar. Por lo que, los alumnos aprenderán a manejar el material y van a adquirir una serie de conocimientos básicos.

Fase 2: Orientación Dirigida. Los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones que se basan en el material que ha sido proporcionado de manera secuencial.

Fase 3: Explicitación. Los estudiantes expresan e intercambian sus experiencias y opiniones acerca del material revisado. Comentan las regularidades que han observado y explican cómo han resuelto la actividad.

Fase 4: Orientación Libre. En esta fase, los alumnos se enfrentan a tareas más complejas, y deberán aplicar los conocimientos y el lenguaje que acaban de adquirir en el campo de estudio.

Fase 5: Integración. Los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades de manera más general del tema en estudio. Aprenden a relacionar los nuevos conocimientos con otros temas que ya habían estudiado con anterioridad.

Gutiérrez y Jaime (1998) en su artículo llegaron a la conclusión de que un nivel de razonamiento de van Hiele no se puede considerar como un proceso atípico alcanzado por los estudiantes, sino como un conjunto de procesos. Ellos proponen cuatro procesos de razonamiento matemático para poder caracterizar cada nivel del Modelo de van Hiele:

> **Reconocimiento:** De tipos por sus formas y familias de figuras geométricas, identificación de componentes y propiedades de las figuras.
>
> **Definición:** De un concepto geométrico. Este proceso puede ser visto de dos maneras, como la formulación de definiciones y conceptos que están aprendiendo los

estudiantes y como el uso que dan los estudiantes a una definición leída en un libro de texto.

Clasificación: De las figuras o conceptos geométricos en familias o clases.

Demostración: De las propiedades o afirmaciones, es decir, explicar de alguna manera convincente porque alguna propiedad o afirmación es verdadera.

Todos estos procesos son parte de uno o más niveles de razonamiento del modelo de van Hiele. En la figura 1 se resumen las principales características de cada proceso utilizando los diferentes niveles de Van Hiele. Los niveles deben identificarse con mucha precisión

Niveles de Van Hiele/ Procesos	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**
Identificación	Atributos físicos	Propiedades matemáticas		
Uso de definiciones		Sólo definiciones con estructura sencilla	Cualquier definición	Acepta varias definiciones equivalentes
Formulación de definiciones	Lista de propiedades físicas	Lista de propiedades matemáticas	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes	Pueden probar la equivalencia de definiciones
Clasificación	Exclusivamente basada en atributos físicos	Exclusivamente basada en atributos matemáticos	Se mueve entre inclusiva y exclusiva	
Prueba		Verificación con ejemplos	Pruebas lógicas informales	Pruebas matemáticas formales

Figura 1. Características de los niveles de Van Hiele (Hernández, et al. 2021).

1.1.3 Comportamiento en cada nivel de Van Hiele

En el trabajo de Fouz y De Donosti (2005) se describen algunos comportamientos de los estudiantes en un nivel determinado, de los cuales solo haré mención de los que se ocuparán en esta investigación.

Nivel 1 (Reconocimiento o Visualización)

- El alumno reconoce al triángulo por su forma.
- El alumno reconoce al ángulo por su apariencia, los marca como esquinas.
- Es capaz de producir esas figuras, porque se pueden ver.
- Señala ángulos y triángulos en diferentes posiciones.

Nivel 2 (Análisis)

- Señala que la figura tiene tres lados rectos y tres ángulos.
- Describe una definición a partir del ángulo para determinar ángulos iguales.
- Es capaz de asociar el nombre "triángulo Isósceles" con un triángulo específico, sabiendo que dos de sus lados son iguales, y sacar la conclusión de que los dos ángulos correspondientes son iguales.
- El alumno será capaz de reconocer ciertas propiedades del triángulo equilátero y escaleno.
- Aprende a saber la diferencia de triángulo acutángulo, obtusángulo y rectángulo, mediante las definiciones.
- Deduce que la suma de los ángulos internos de un triángulo suma 180°, no importando que triángulo sea.
- Es capaz de reconocer la semejanza e igualdad de ángulos.

Nivel 3 (Clasificación)

- Selecciona propiedades que caracterizan una serie de formas y prueba, mediante dibujos o construcciones, que son suficientes.
- Justifica la igualdad de los ángulos opuestos de un paralelogramo.

Nivel 4 (Deducción Formal)

- Prueba de forma rigurosa que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°.

- Demuestra qué si un triángulo es isósceles los ángulos de la base son iguales y viceversa.
- Demuestra por qué los ángulos son semejantes.

1.2 Descripción del método de grados de adquisición

Los niveles de van Hiele son continuos, ya que en el proceso de un nivel al siguiente no se puede dar un salto brusco, si no se lleva un procedimiento paso a paso (Pastor, 1993). La elección del instrumento que se usará para la evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes es un elemento importante en este tipo de investigaciones.

Los **Grados de Adquisición** nos proporcionan mayor información sobre la forma de razonamiento de los estudiantes y se puede hacer una mejor precisión en su evaluación en los ítems de respuesta libre correcta. Una vez que se tiene el proceso de adquisición de los niveles de Van Hiele, se tiene que encontrar el procedimiento para poder evaluar a los estudiantes su proceso de adquisición que se encuentra en un nuevo nivel.

Por lo que Gutiérrez y Jaime (1993) han construido un método de interpretación de los estudiantes que permitirá identificar su nivel de razonamiento, y la transición de un nivel a otro. Para ello han definido unos **Tipos de Respuesta** en los que se tiene en cuenta parámetros de razonamiento del problema propuesto, así como la exactitud de sus respuestas desde el punto de vista matemático.

1.2.1 Grados de Adquisición

Cuando nosotros proponemos ítems de respuesta libre se puede interpretar la contestación que dieron los estudiantes en términos de un nivel de razonamiento de Van Hiele, y se puede identificar y observar la presencia de uno u otro nivel y graduar la calidad de la respuesta.

La adquisición progresiva de un nivel de razonamiento es un proceso de dominio, pues este va desde el dominio nulo hasta el dominio completo. Por lo que les fue conveniente dividir

este proceso continuo en cinco períodos caracterizados por las formas cualitativas en que razonan los estudiantes los niveles de Van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1998), y están determinadas por las siguientes características:

Adquisición Nula: No se emplean las características de este nivel de razonamiento.

Adquisición Baja: Empieza la consciencia de las características, métodos y exigencias propias del nivel, pero es muy pobre la utilización que se hace de ellos.

Adquisición Intermedia: Todavía no se domina este nivel, ante las situaciones que resultan ser complicadas, hay saltos frecuentes entre dos niveles consecutivos de razonamiento.

Adquisición Alta: El nivel habitual de trabajo es bueno y es poco frecuente que el alumno presente retroceso de ese nivel. Suele hacerse uso inadecuado de los contextos de este nivel de razonamiento.

Adquisición Completa: Hay un dominio completo de los contextos y métodos propios para este nivel.

Estos períodos representan diferencias fundamentales en el grado de adquisición de un determinado nivel. La división propuesta de cada nivel de van Hiele en períodos no implica que el progreso a través de los niveles de van Hiele no sea continuo.

En el método Gutiérrez y Jaime (1993) se cuantificará la adquisición de un nivel de pensamiento graduado del 0 al 100. Mediante esto se identifican varias formas distintas de razonamiento durante la adquisición de un nivel a otro. En la Figura 2 se muestra la asignación del valor numérico de las interpretaciones, tanto cuantitativas como cualitativas, el grado de adquisición de un nivel podría ser de utilidad para los investigadores.

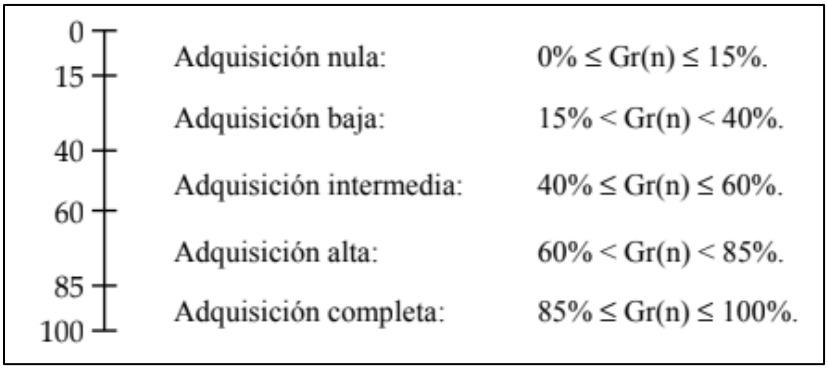


Figura 2. Valores cualitativos y cuantitativos de los grados de adquisición de un nivel de Van Hiele

Los estudiantes no son conscientes de la existencia o necesidad de métodos de pensamiento específico para un nuevo nivel. Una vez que ellos comienzan a ser conscientes de los métodos de pensamiento intentan utilizarlos. Sin embargo, por su falta de experiencia, los alumnos solo hacen algunos intentos de trabajar en un nivel sin tener éxito.

1.2.2 Tipos de Respuesta

Es más importante observar el tipo de razonamiento de los alumnos que su capacidad para resolver correctamente los problemas en un tiempo determinado. Una respuesta parcialmente correcta también puede brindarnos información. Una respuesta incorrecta puede darnos una cantidad insignificante de información, pero el caso es diferente cuando se considera en conjunto con otras respuestas. Tomamos en cuenta tanto los niveles de van Hiele reflejados por las respuestas como la precisión matemática. No damos el mismo valor a una respuesta completamente incorrecta que a una parcialmente incorrecta o a una correcta.

Para determinar a qué tipo pertenece una respuesta, es necesario considerarla desde el punto de vista del nivel de van Hiele que refleja, ya que una respuesta puede ser adecuada según los criterios de un determinado nivel de pensamiento. Los tipos de respuestas que proponen Gutiérrez y Jaime (1993) son aplicables a ítems de respuesta libre, tanto orales como escritos, pero no a ítems de elección múltiple, dado que los ítems de respuesta libre dan mucha más información sobre los razonamientos de los estudiantes. Cualquier respuesta a un elemento abierto puede asignarse a uno de los siguientes tipos:

Tipo 0. Sin respuesta o respuestas que no se pueden codificar.

Tipo 1. Respuestas que indican que el alumno no ha alcanzado un nivel determinado pero que no dan información sobre ningún nivel inferior.

Tipo 2. Respuestas incorrectas e insuficientemente elaboradas que dan alguna indicación de un determinado nivel de razonamiento; respuestas que contienen explicaciones, procesos de razonamiento o resultados incorrectos y reducidos.

Tipo 3. Respuestas correctas, pero insuficientemente elaboradas que dan alguna indicación de un determinado nivel de razonamiento; respuestas que contienen muy pocas explicaciones, procesos de razonamiento incipientes o resultados muy incompletos.

Tipo 4. Respuestas correctas o incorrectas que reflejan claramente rasgos característicos de dos niveles de van Hiele consecutivos y que contienen procesos de razonamiento claros y justificaciones suficientes.

Tipo 5. Respuestas incorrectas que reflejan claramente un nivel de razonamiento; respuestas que presentan razonamientos completos pero incorrectos o respuestas que presentan razonamientos correctos que no conducen a la solución del problema planteado.

Tipo 6. Respuestas correctas que reflejan claramente un determinado nivel de razonamiento pero que están incompletas o insuficientemente justificadas.

Tipo 7. Respuestas correctas, completas y suficientemente justificadas que reflejen claramente un determinado nivel de razonamiento.

Las respuestas de los tipos 0 y 1 indican que no hay nivel. Sin embargo, existe una diferencia entre ellos, ya que las respuestas de Tipo 1 indican que no se ha alcanzado un nivel específico. El valor numérico que asignamos a ambos tipos es el mismo y, en consecuencia, desde este punto de vista, ambos tipos podrían unirse en uno solo; pero son cualitativamente diferentes. Por ello pensamos que puede ser de ayuda diferenciarlos.

Las respuestas de los Tipos 2 y 3 apuntan al inicio de la adquisición de un nivel. En ambos casos las respuestas son muy incompletas y generalmente muy cortas. Debido a su carácter

incompleto, no permiten que el evaluador identifique claramente un nivel del razonamiento del estudiante. El evaluador solo podrá identificar vagos rastros o destellos de ese nivel de razonamiento.

El tipo 4 indica respuestas para las que el alumno utiliza dos niveles de razonamiento, pero ninguno de los niveles es claramente predominante. Este tipo de respuesta caracteriza a los estudiantes que se encuentran en una fase intermedia de transición entre dos niveles, porque son conscientes de la conveniencia de utilizar métodos de pensamiento del nivel superior, pero no pueden prescindir de los métodos del nivel inferior. En cuanto a su precisión matemática y completitud, este tipo de respuesta tiene características similares a las de los tipos 5, 6 y 7.

Los tipos 5 y 6 corresponden a respuestas que reflejan claramente el uso por parte del alumno de un nivel de razonamiento específico predominante, aunque en ocasiones puede aparecer un nivel inferior. Estas respuestas reflejan una fase avanzada en la transición entre dos niveles, con diferentes grados de adquisición del nivel superior, pues la adquisición de un nivel de pensamiento depende de sus métodos de razonamiento y del adecuado desarrollo de los conceptos matemáticos Por lo tanto, se puede observar una adquisición incompleta de un nivel (a) cuando el estudiante utiliza métodos de razonamiento de este nivel de manera imperfecta y en ocasiones necesita recurrir a métodos del nivel inferior, o (b) cuando el estudiante es incapaz de completar la respuesta o darse cuenta de que no es correcto.

Finalmente, el Tipo 7 indica que el estudiante ha adquirido totalmente un determinado nivel, ya que es capaz de resolver toda la actividad utilizando únicamente métodos de razonamiento propios de ese nivel.

Los ocho tipos de respuestas reflejan los diversos grados de adquisición de los niveles de pensamiento de van Hiele definidos anteriormente. Los tipos 0 y 1 indican sin adquisición, los tipos 2 y 3 indican adquisición baja, el tipo 4 indica adquisición intermedia, los tipos 5 y 6 indican adquisición alta y el tipo 7 indica adquisición completa del nivel.

Así, podemos asignar un vector (*N*, t) a cada respuesta de una prueba, donde N es el nivel de van Hiele reflejado en la respuesta y t es el tipo de respuesta **(*N* está vacío cuando t es cero)**.

Los tipos de respuestas se cuantifican en términos de la escala de adquisición del nivel de razonamiento reflejado. La Tabla 2 muestra el peso numérico asignado a cada tipo, según la interpretación de la figura 2.

Peso de diferentes respuestas

Tipo(t)	0	1	2	3	4	5	6	7
Peso	0	0	20	25	50	75	80	100

Tabla 2. Ponderación de los diferentes tipos de respuesta

El grado de adquisición de un nivel de van Hiele por parte de un alumno se determina calculando la media aritmética de los pesos de los vectores (*N*, t) para todos los elementos que podrían haber sido respondidos en ese nivel. Cabe resaltar, que cada test tendrá una adquisición distinta, ya que depende de los conocimientos matemáticos que el alumno tenga conocimiento. Con estas ponderaciones es muy fácil saber qué nivel de adquisición ha adquirido el alumno en su respuesta dependiendo si esta fue respuesta en el nivel 2 o 3, es decir, qué niveles tiene completos y cuáles están en alto, intermedio, bajo o nulo.

Capítulo 2. Método

2.1 Tipo de estudio

En este trabajo se presenta un estudio de tipo mixto, de una prueba de Geometría que fue diseñada para evaluar el nivel de van Hiele del pensamiento de un grupo de estudiantes de Bachillerato. El cuestionario fue realizado por Hernández et al. (2021) para evaluar el nivel de comprensión de los conceptos de triángulos y ángulos. Las respuestas se analizan mediante los niveles y grados de adquisición con respecto a los tipos de respuesta propuestos por Gutiérrez y Jaime (1997). Aunque las preguntas podían alcanzar el nivel 3 de van Hiele, los resultados nos arrojan el uso de los primeros dos niveles, en específico:

Nivel 1 (Reconocimiento o visualización) Reconocimiento o visualización: El estudiante no diferencia partes de las figuras geométricas, sino que conoce las formas como un todo.

Nivel 2 (Análisis) El estudiante reconoce las formas, pero no establece relaciones entre propiedades de distintas familias de figuras.

2.2 Participantes

La prueba se administró a 93 alumnos de los tres niveles de un bachillerato particular de la ciudad de Puebla, del turno matutino. Dos grupos con un total de 36 alumnos, eran de 2º semestre y se encontraban cursando la materia de Geometría analítica. Dos grupos eran de 4º semestre que se encontraban cursando la materia de probabilidad y estadística, y hacían un total de 31 alumnos. Finalmente, 26 alumnos eran de 6º semestre, los cuales ya habían visto con anterioridad conceptos de Geometría analítica. El cuestionario se les aplicó de manera individual en una sesión de 50 minutos.

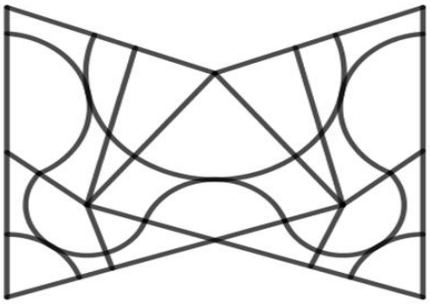
2.3 Cuestionario

En esta sección se presenta el cuestionario y las posibles respuestas de los alumnos al usar los conocimientos matemáticos adquiridos hasta el momento de la prueba.

Resuelve lo que se te pide.

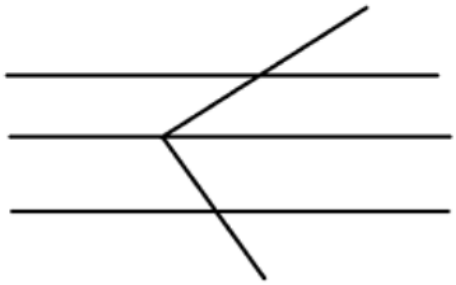
1. Observa la figura

   Marca aquellos que tú crees que son ángulos y explica por qué los seleccionaste así.

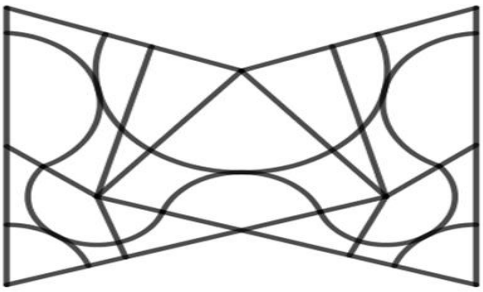


b. ¿Cuál es la definición de ángulo que tú recuerdas?

1. Marca con el mismo color los ángulos iguales en la siguiente figura.

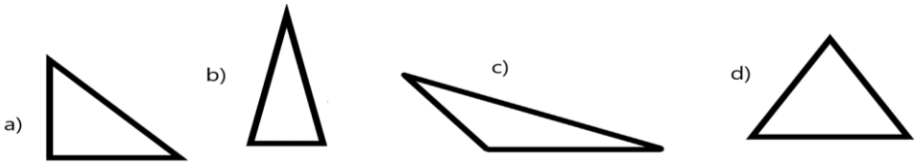


2. a) Identifica todos los triángulos que observes y márcalos con colores diferentes. Enuméralos y explica por qué cada uno de ellos es un triángulo.



b) Para ti ¿qué es un triángulo o qué idea tienes de triángulo?

4. Observa los siguientes triángulos:



. Indica qué triángulos son equiláteros, isósceles o escalenos. Explica por qué los seleccionaste de esta manera.

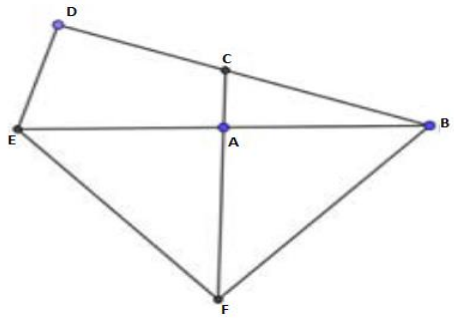
a. Indica qué triángulos son acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Explica por qué los seleccionaste de esta manera.

b. Escribe las propiedades que comparten los triángulos equiláteros y los triángulos acutángulos.

c. Escribe propiedades que son verdaderas para los triángulos equiláteros, pero no para los acutángulos.

d. Escribe propiedades que son verdaderas para los triángulos acutángulos, pero no para los triángulos equiláteros.

5. En la siguiente figura, determina ¿cuál es el triángulo de mayor área?, justifica tu respuesta



Los reactivos miden los niveles y procesos de van Hiele con respecto al Cuadro 2:

Niveles de Van Hiele / Procesos	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Identificación	1a, 1b, 2, 3a, 3b, 4a, 4b, 4c, 4d, 4e y 5	2 y 5	
Uso de definiciones		1a, 1b, 3a, 3b, 4a, 4b, 4c, 4d, 4e y 5	
Formulación de definiciones			5
Clasificación	2, 4a, 4b, 4c, 4d, 4e y 5	5	
Prueba		5	5

Cuadro 1. Clasificación de los ítems respecto a los procesos y los niveles de Van Hiele

Pregunta 1a. Se evalúa el nivel 1 en el proceso de Identificación y, en el nivel 2, el uso de definiciones. Los alumnos deben responder identificando ángulos por la forma y la definición que ellos recuerden.

Pregunta 1b. Se evalúan los niveles y procesos que mostraron en la pregunta 1a, en esta pregunta se pide una definición que ellos recuerden de ángulos.

Pregunta 2. Se espera que el alumno analice la figura e identifique algunos de sus componentes, relaciones o propiedades. Aunque no se pide justificación, se puede observar la identificación de semejanza de ángulos, lo cual se evalúa en el nivel 2 en el proceso de identificación de propiedades matemáticas.

Pregunta 3a. Se evalúan los mismos niveles y procesos que la pregunta 1a solo que para el concepto de triángulo.

Pregunta 3b. Se evalúan los niveles y procesos que mostraron en la 3a, en esta pregunta se pide la definición de triángulo que ellos recuerden.

Pregunta 4a. En este reactivo se evalúa el nivel 1 en el proceso de identificación y clasificación, y en el nivel 2 se evalúa el proceso de uso de definiciones. Los alumnos deberán responder con respecto a la identificación y clasificación de los tipos de triángulo como equilátero, isósceles y escaleno, con respecto a sus lados.

Pregunta 4b. En esta pregunta se evalúan los mismos niveles y procesos de la pregunta 4a, pero los alumnos tendrán que responder respecto a la identificación y clasificación de triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos, relacionada con los tipos de ángulos internos.

Pregunta 4c. En esta pregunta se evalúan los mismos niveles y procesos de la pregunta 4a, sin embargo, los alumnos deberán identificar las propiedades que comparten los triángulos equiláteros y los acutángulos.

Pregunta 4d. En esta pregunta se evalúan los mismos niveles y procesos de la pregunta 4a, así, los alumnos deberán identificar qué propiedades tienen los triángulos equiláteros, pero no tienen los triángulos acutángulos.

Pregunta 4e. En esta pregunta se evalúan los mismos niveles y procesos de la pregunta 4a, y de la misma manera se identificarán las propiedades que en la pregunta anterior 4d, pero de manera inversa.

Pregunta 5. Este reactivo se diseñó para evaluar todos los niveles y procesos del modelo, ya que se pide a los alumnos identificar y justificar su selección. Se espera que el estudiante responda de manera correcta las propiedades y justifique la selección del triángulo de mayor área.

Después de haber analizado rigurosamente las respuestas, se les asignará un vector (N, t), donde N es el Nivel de razonamiento de Van Hiele y t el tipo de respuesta que haya dado el estudiante. Una vez que ya se tienen los vectores cuantificados para cada uno de sus valores de cada una de las preguntas, se les asignará los valores de las ponderaciones de la Figura 2 en la cual se tendrán los valores cuantitativos de manera porcentual, es decir, se tendrán los porcentajes respectivos de cada adquisición que los alumnos tuvieron en cada una de sus preguntas, para poder llenar la tabla, dependiendo del tipo de su respuesta

Capítulo 3. Resultados

En esta sección se muestran los resultados cuantitativos y cualitativos de este trabajo.

3.1 Resultados Cuantitativos

En la parte cuantitativa se muestran los resultados de los grados de adquisición, basándome en el método de Gutiérrez y Jaime (1993), para poder observar su transición de los niveles de Van Hiele.

Después de analizar las respuestas se puntuaron todas las pruebas y después se asignó un vector (N, t), para cada una de ellas, para poder evaluarlas y clasificarlas. Al evaluar las pruebas de cada alumno, en esta tesis pude observar que la mayoría de los alumnos tenían los conocimientos sobre matemáticas bien reforzados y comprendidos. Cabe destacar que algunos alumnos dejaron las preguntas en blanco, por lo que se les asignó un tipo de respuesta 0.

En las siguientes tablas de la 4 a la 12 se muestran ejemplos de los vectores (N, t) obtenidos de algunos alumnos y una descripción de los mismos, para observar cómo varía su tipo de respuesta en cada pregunta. En cada ejemplo se irá analizando cómo es que se les fueron posicionando los vectores (N, t) después de revisar las muestras detenidamente. En el Anexo 1 se encuentran todas las tablas por grupo.

En la tabla 3, el alumno 4B10 realizó un test en el cual el 90% de sus respuestas se encontraron en el segundo nivel de Van Hiele teniendo una respuesta tipo 7, solo la respuesta 5 tuvo un razonamiento en el nivel uno de Van Hiele, sus respuestas fueron correctas, aunque insuficientemente justificadas, por lo que se ubicó como tipo 3 teniendo un grado de adquisición alto para los dos primeros niveles de Van Hiele.

Alumno 4B10											
Pregunta											
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
Nivel(n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
Tipo(t)	7	7	6	7	7	7	7	6	7	7	3

Tabla 3. Ponderaciones de los tipos de la respuesta del alumno 4B10

En la tabla 4, el alumno 6A5 tuvo un razonamiento en el nivel 2 de van Hiele con sus respuestas correctas y justificadas, la mayoría se ubicaron como tipo 7, a excepción de las preguntas 1a, 1b y 4c que, a pesar de estar correctas, tienen justificaciones incorrectas e incipientes, por lo que se ubicaron como tipo 6. La pregunta 5 se encuentra en el nivel 1 de Van Hiele siendo correcta la respuesta, siendo de tipo 7, eso quiere decir que tiene completo el nivel 1. Por lo que el alumno tiene un buen nivel de razonamiento.

Alumno 6A5											
Pregunta											
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
Nivel(n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
Tipo(t)	6	6	2	7	7	7	7	6	7	7	7

Tabla 4. Ponderaciones de los tipos de la respuesta del alumno 6A5

En la tabla 5, el alumno 6B12 tuvo un razonamiento en el nivel uno de van Hiele, casi todas sus respuestas llegaron al nivel 2, a excepción de la pregunta 5, pues esta se localiza en el nivel 1 de Van Hiele, solo que la mayoría no alcanzó el mayor nivel de adquisición para el segundo nivel, pues la pregunta 2 no escribe ninguna información relevante, por lo que se ubicó como tipo 1. Las preguntas 1a, 1b y 4c está respondiendo esas preguntas de manera incorrecta y no tiene las suficientes argumentaciones, por lo que se ubicó cómo tipo 2. La pregunta 3a tiene argumentaciones correctas, pero a su vez incorrectas, por lo que se ubicó como tipo 4. Las preguntas 4b y 4e están hasta cierto punto correctas, ya que la información dada no es apropiada es decir no está argumentada suficientemente, por lo que se ubicó como tipo 6. Las preguntas 3b, 4a y 4d tiene completo el nivel 2 dado que su respuesta es clara y suficiente, por lo que se ubicó como tipo 7 en estas preguntas. En la pregunta 5 que se posiciona en el nivel uno de van Hiele, el alumno no dio una justificación clara y concreta

para explicar el por qué era el triángulo más grande, muy independiente de que señalo el triángulo incorrecto, por lo que se ubicó como tipo 2. Cabe mencionar que el alumno no tiene muy claras la mayoría de las propiedades que se piden en el test.

Alumno 6B12											
	Pregunta										
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
Nivel(n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
Tipo(t)	2	2	1	4	7	7	6	2	7	6	2

Tabla 5. Ponderaciones de los tipos de la respuesta del alumno 6B12

En la tabla 6, el alumno 2B16 para la mayoría de las preguntas alcanzó el nivel 2 de Van Hiele con excepción de la pregunta 5. Para la pregunta 2 el alumno no ha alcanzado una adquisición determinada, por lo que se ubicó como tipo 1. Para las preguntas 1a, 1b, 3a, 3b, 4c, 4d y 4e en la mayoría de sus respuestas estuvo incorrecto su razonamiento, no tiene claras las definiciones, o incluso no puede explicarlas, por lo que se ubicó como tipo 2. En la pregunta 5, a pesar de que tuvo un reconocimiento con la figura de que era un triángulo, su respuesta fue incorrecta por lo cual tuvo una respuesta tipo 2. Es claro que el alumno respondió la mayoría de su test de manera incorrecta.

Alumno 2B16											
	Pregunta										
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
Nivel(n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
Tipo(t)	2	2	1	2	2	3	3	2	2	2	2

Tabla 6. Ponderaciones de los tipos de la respuesta del alumno 2B16

En la tabla 7, el alumno 4A7 a pesar de haber alcanzado el nivel 2 de Van Hiele, la pregunta 4e la dejo en blanco, o tuvo un argumento que no dio ninguna información sobre lo que se pedía teniendo así un tipo de respuesta 0. En la pregunta 5, se encuentra en el nivel 1 de van Hiele, su respuesta es correcta, pero no da ninguna información adicional o completa que se refiera a porqué era la de área más grande, por lo que se ubicó como tipo 3. Las preguntas 1a y 1b la cual fueron incorrectas, pues no tiene argumentaciones claras que justifiquen su afirmación que él está dando, por lo que se ubicó como tipo 2. Las preguntas 2 y 4c son

correctas, pero no está dando un argumento correcto y justificado lo que él está indicando en sus preguntas, por lo que se ubicó como tipo 3. La pregunta 3b que su respuesta es casi correcta, pues carece de información relevante para que esté justificada correctamente, por lo que se ubicó como tipo 6. En las preguntas 3a, 4a, 4b y 4d alcanzo el nivel 2 de van Hiele, su respuesta fue correcta en cada una de las preguntas, pues no solo sabe ubicar ángulos y los triángulos por su figura, sino que también recuerda las definiciones de cada uno de estos temas, por lo que se ubicó como tipo 7.

Alumno 4A7											
	Pregunta										
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
Nivel(n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2		1
Tipo(t)	2	2	3	7	6	7	7	3	7	0	3

Tabla 7. Ponderaciones de los tipos de la respuesta del alumno 4A7

En la tabla 8, el alumno 2A7 tuvo un razonamiento nivel 2 de Van Hiele en 7 preguntas, y en los 4 restantes solo alcanzó el nivel 1 de Van Hiele. Se puede observar, que el alumno tuvo un razonamiento un poco bajo para el segundo nivel. En la pregunta 2 se encuentra en el nivel 2 es evidente que el alumno no ha comprendido las definiciones de ángulos semejantes, por lo que se ubicó como tipo 1. Las respuestas a las preguntas 1a, 1b y 4d se encuentran en el nivel 2, a pesar de esto, las preguntas están insuficientemente elaboradas, pues carecen de algún argumento completo y concreto, es decir, que están incorrectas, por lo que se ubicó como tipo 2. En las preguntas 3a y 3b también están en el nivel 2, pero sus respuestas no estuvieron correctamente justificadas, pero sí reflejan un nivel de razonamiento, por lo que se ubicó como tipo 6. En las preguntas 4b y 4c se encuentra en el nivel 1 de van Hiele, su respuesta contiene resultados incorrectos y no están justificados correctamente, por lo que se ubicó como tipo 2. Para la pregunta 5 se encuentra en el nivel 1 de van Hiele, marca el triángulo de mayor área correctamente, pero no tiene una justificación con la cual diga porque lo selecciona, por lo que se ubicó como tipo 3. Y, por último, la pregunta 4a, a pesar de estar en el nivel 1 de van Hiele, su respuesta esta insuficientemente justificada, por lo que se ubicó como tipo 6.

Alumno 2A7

	Pregunta										
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
Nivel(n)	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	1
Tipo(t)	2	2	1	6	6	6	2	2	2	3	3

Tabla 8. Ponderaciones de los tipos de la respuesta del alumno 2A7

En la tabla 9, el alumno 2A6 dejó las últimas 3 preguntas sin responder o dio alguna respuesta que no se pudo codificar, por eso es tipo 0, y cuando tenemos respuestas de tipo 0 no podemos asignarle un nivel de van Hiele. Solo la pregunta 4 c se encuentra en el nivel 1 de van Hiele con una respuesta tipo 2 dando una argumentación incorrecta. A pesar de tener el resto de las respuestas en el nivel 2. La pregunta 2 tuvo una respuesta tipo 1, la cual nos dice que no ha alcanzado el nivel 2 de Van Hiele, pero si tiene el nivel 1 completo, pues sabe reconocer los ángulos por su forma. Las preguntas 1a y 1b tuvieron una respuesta con procesos de razonamiento incorrectos, por lo que se clasificó de tipo 2. Las preguntas 3a, 3b y 4b tuvieron una respuesta correcta, pero su razonamiento es incipiente, por lo que se ubicó como tipo 3. Por último, la pregunta 4a tuvo respuestas correctas y otras incorrectas, pero están insuficientemente justificadas, por eso se clasificó de tipo 4.

Alumno 2A6

	Pregunta										
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
Nivel(n)	2	2	2	2	2	2	2	1			
Tipo(t)	2	2	1	3	3	4	3	2	0	0	0

Tabla 9. Ponderaciones de los tipos de la respuesta del alumno 2A6

En la tabla 10, el alumno 2B8 en las primeras preguntas muestra un resultado que se encuentra en el segundo nivel de van Hiele. La pregunta 2 tiene una respuesta incorrecta, ya que el alumno no da alguna respuesta que proporcione alguna información, por lo que se ubicó como tipo 1. Para las preguntas 1a, 1b, 3a y 3b tienen una respuesta incorrecta, a pesar de tener una justificación, esta no es clara, por lo que se ubicó como tipo 2. Para la pregunta 4a el alumno dio una respuesta correcta dando un determinado nivel de razonamiento pues recuerda perfectamente las definiciones de triángulo y las tiene claras, por lo que se ubicó

como tipo 7. Podemos observar que la pregunta 4b, el alumno dejó la pregunta sin respuesta, o solo contestó con una sola palabra que no coincide con lo que se pregunta, la cual no se puede asignar a algún nivel, por lo que se ubicó como tipo 0. En las 4 preguntas faltantes el alumno tuvo respuestas que se encuentran en el nivel 1 de Van Hiele pues solo saben reconocer las figuras, y aun así tuvieron errores al seleccionar los triángulos que pedían, y en las propiedades que tenían en común. Las preguntas 4d y 4e el no dio ninguna información, y selecciono mal los triángulos que se le pedían, esto es no ha alcanzado un nivel determinado, por lo que se ubicó como tipo 1. En la pregunta 4c tiene un razonamiento incorrecto e insuficiente en la argumentación que da, por lo que se ubicó como tipo 2. Por último, en la pregunta 5 a pesar de estar correcta no está suficientemente justificada, dado que no argumento lo que él estaba seleccionando, por lo que se ubicó como tipo 3.

Alumno 2B8											
	Pregunta										
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
Nivel(n)	2	2	2	2	2	2		1	1	1	1
Tipo(t)	2	2	1	2	2	7	0	2	1	1	3

Tabla 10. Ponderaciones de los tipos de la respuesta del alumno 2B8

En la tabla 11, el alumno 2B13 en las preguntas 2 y 3a tuvo una respuesta sin alguna argumentación, por lo que no se puede describir en qué nivel de Van Hiele se encuentran, por lo que se ubicó como tipo 0. Las preguntas 4a, 4b, 4c y 5 tuvieron un razonamiento que se localiza en el nivel 1 de van Hiele; en la pregunta 4c su respuesta era incorrecta con argumentaciones reducidas, por lo que se ubicó como tipo 2. En las preguntas 4a, 4b y 5 tuvieron una respuesta correcta, pero tuvo un razonamiento incipiente ya que carece de alguna justificación, por lo que se ubicó como tipo 3. El resto de las preguntas se encuentran en el nivel 2 de van Hiele, pues hacía mención de propiedades de los triángulos y ángulos, aunque no los tenía claros. Las preguntas 1a y 1b su respuesta fue incorrecta, ya que no tenía clara la idea y no dio mucha información, por lo que se ubicó como tipo 1. Para las preguntas 4d y 3e su respuesta fue incorrecta, ya que la mayoría de los alumnos que tienen este tipo de razonamiento confunden las definiciones o no tienen claras estas, por lo que se ubicó como tipo 2. En la pregunta 3b el alumno tuvo una respuesta correcta, pero fue insuficientemente justificada, por lo que se ubicó como tipo 3.

Alumno 2B13											
	Pregunta										
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
Nivel(n)	2	2			2	1	1	1	2	2	1
Tipo(t)	1	1	0	0	3	3	3	2	2	2	3

Tabla 11. Ponderaciones de los tipos de la respuesta del alumno 2B13

En la tabla 12, el alumno 2B9 dejó la mayoría de las preguntas las dejo sin responder, tampoco se les puede otorgar un nivel de Van Hiele, por lo que se ubicaron como tipo 0. Las 3 preguntas que contestó tienen un razonamiento en el nivel 2 de van Hiele. La pregunta 2 fue incorrecta y no dan información sobre un nivel determinado de razonamiento, por lo que se ubicó como tipo 1. La pregunta 1a en su respuesta llega a dar alguna indicación de un determinado nivel de razonamiento, pero sus respuestas son incompletas, por lo que se ubicó como tipo 2. Y por último la pregunta 3a a pesar de estar correcta, su razonamiento está incompleto, pues carece de información para respaldar su argumento, por lo que se ubicó como tipo 3. Sus respuestas que contestó la mayoría son incorrectas, pues no está dando una justificación precisa. Se observa que el estudiante solo tiene clara la definición de triángulo, aunque no sabe explicarla. El alumno no tiene clara la definición de ángulos y mucho menos supo relacionar propiedades de los triángulos.

Alumno 2B9											
	Pregunta										
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
Nivel(n)	2		2	2							
Tipo(t)	2	0	1	3	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 12. Ponderaciones de los tipos de la respuesta del alumno 2B9

Una vez que asignamos a cada respuesta un nivel N de van Hiele y un tipo de respuesta t, se determinó el grado de adquisición de un nivel obtenido por el alumno, cuantificando los vectores (N, t) correspondientes a todas las preguntas mostrando cuál es el nivel que predomina, y en cuál hace falta refuerzo. Recordando que el peso de adquisición de un nivel de van Hiele se determina mediante el cálculo de la media aritmética de los pesos de los vectores (N, t), de la misma manera nos describe qué grado de adquisición alcanzó el alumno

para cada nivel, y este se va encontrando conforme al porcentaje que se obtiene del promedio conforme a la asignación de los límites. En la tabla 2, asignamos el peso de adquisición para cada tipo de respuesta que van del 0 al 7. En la Figura 2, muestra cómo se va ponderando los promedios de los grados de adquisición, el alumno tuvo una adquisición completa si su promedio se encuentra en el intervalo [85, 100], la adquisición alta está en el intervalo (60,85), la adquisición intermedia está promediada en el intervalo [40, 60], la adquisición baja está en el intervalo (15, 40) y si no hubo adquisición (ninguna adquisición) se encuentra en el intervalo [0, 15]. En las siguientes tablas de la 13 a la 22 se muestran los pesos asignados para las 11 preguntas para cada uno de los alumnos anteriores, y asumimos la estructura jerárquica de los niveles de Van Hiele.

En la tabla 13, asignamos el grado de adquisición para cada uno de sus vectores, como se observó en la tabla 3 el estudiante 4B10 en la pregunta 5 tuvo un razonamiento en el nivel 1 de Van Hiele con una respuesta tipo 3 teniendo una adquisición baja (peso=25) y sin adquisición para el nivel 2 (peso=0). Para las preguntas 2 y 4c, su razonamiento se encuentra en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 6 teniendo una adquisición alta (peso=80) y el nivel 1 de Van hiele con una adquisición completa (peso=100). Para el resto de las preguntas respondió en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 7, teniendo un nivel de adquisición completo (peso=100) para los niveles 1 y 2 de Van Hiele. Al realizar el promedio aritmético para el nivel 1 el promedio fue de 93.1818 el cual nos dice que su grado de adquisición es completo para el nivel 1. Para el nivel 2 su promedio aritmético fue de 87.2727 el cual se encuentra en el grado de adquisición completo. Es decir, el alumno tiene los niveles 1 y 2 de van Hiele completos.

	preguntas											
Nivel	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	Promedio
1	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	25	93,18181818
2	100	100	80	100	100	100	100	80	100	100	0	87,27272727

Tabla 13. Peso de adquisición del estudiante 4B10

En la tabla 14, se asigna el grado de adquisición para cada uno de sus vectores de las preguntas, como se vio en la tabla 4 el estudiante 6A5 en la pregunta 2 el alumno tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 2, es decir, teniendo una

adquisición completa en el nivel 1 (peso=100) y una adquisición baja en el nivel 2 (peso=20). En la pregunta 5 tuvo un razonamiento en el nivel 1 de van Hiele con una respuesta tipo 7, lo cual tiene una adquisición completa (peso=100) y sin adquisición en el nivel 2 (peso=0). En las preguntas 1a, 1b y 4c, él tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 6, teniendo el nivel 1 con una adquisición completa (peso =100) y una adquisición alta en el nivel 2 (peso=80). Para el resto de las preguntas, tuvo un excelente razonamiento respondiendo en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 7, teniendo una adquisición completa para los niveles 1 y 2 (peso=100). Al realizar el promedio aritmético del alumno 6A5 de su test para el nivel 1 fue de 100%, lo cual tiene una adquisición completa para el nivel 1. Para el nivel 2 su promedio aritmético es de 78.1818 lo cual se le asigna una adquisición alta.

	preguntas											
Nivel	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	Promedio
1	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
2	80	80	20	100	100	100	100	80	100	100	0	78,18181818

Tabla 14. Peso de adquisición del estudiante 6A5

En la tabla 15, se asigna el grado de adquisición para cada uno de los vectores de las preguntas, como se observa en la tabla 5 el estudiante 6B12 en la pregunta 2 el alumno tuvo un razonamiento en el nivel 2 de van Hiele con una respuesta tipo 1, lo cual tiene una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y sin adquisición para el nivel 2 (peso=0). En la pregunta 5, tuvo un razonamiento bajo en el nivel 1 de Van Hiele con una respuesta tipo 2, teniendo una adquisición baja para el nivel 1 (peso=20) y sin adquisición en el nivel 2 (peso=0). En las preguntas 1a, 1b y 4c, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van hiele con una respuesta tipo 2, esto es, tiene una adquisición baja en el nivel 2 (peso=20) y adquisición completa en el nivel 1 (peso=100). En la pregunta 3A, tiene un razonamiento intermedio en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 4, teniendo una adquisición intermedia en el nivel 2(peso=50) y adquisición completa en el nivel 1(peso=100). En las preguntas 4b y 4e su razonamiento es alto en el nivel 2 con una respuesta tipo 6, por lo que tiene una adquisición alta en el nivel 2(peso=80) y una adquisición completa en el nivel 1(peso=100). En las preguntas 3b, 4a y 4d, tuvo un excelente razonamiento para el nivel 2, es decir, tuvo una adquisición completa en los niveles 1 y 2(peso=100). Al obtener el

promedio aritmético del alumno 6B12 de su encuesta, para el nivel 1 fue de 92.7272, por lo que tiene una adquisición completa para el nivel 1. Para el nivel 2 su promedio es de 51.8181, es decir, tiene una adquisición intermedia en este nivel.

	preguntas											
Nivel	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	Promedio
1	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	20	92,72727273
2	20	20	0	50	100	100	80	20	100	80	0	51,81818182

Tabla 15. Peso de adquisición del estudiante 6B12

En la tabla 16, se asigna el grado de adquisición para cada uno de los vectores del cuestionario, como se observa en la tabla 6 el estudiante 2B16 en la pregunta 5 el alumno tuvo un razonamiento bajo en el nivel 1 con una respuesta tipo 2, lo cual tiene una adquisición baja para el nivel 1 (peso=20) y sin adquisición para el nivel 2 (peso=0). En la pregunta 2, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 1, por lo que tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y sin ninguna adquisición para el nivel 2 (peso=0). En las preguntas 4a y 4b, él tuvo un razonamiento en el nivel 2 con una respuesta tipo 3, es decir, tiene una adquisición baja para el nivel 2 (peso=25) y una adquisición completa para el nivel 1(peso=100). Para el resto de las preguntas, el razonamiento del alumno fue aún más bajo en el nivel 2 con una respuesta tipo 2, lo cual tiene una adquisición baja para el nivel 2 (peso=20) y una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100). Cabe mencionar que las respuestas de tipo 2 y 3 se encuentran en una adquisición baja, pero hay una diferencia, ya que las respuestas tipo dos como se había mencionado son respuestas incorrectas, sin embargo, las respuestas de tipo 3 son correctas, pero carecen de alguna explicación, y por su peso se encuentran ambas en un grado de adquisición bajo. Sacando el promedio aritmético de la encuesta del alumno 2B16, para el nivel 1 fue de 93.1818, lo cual indica que tuvo una adquisición completa para este nivel. Para el nivel 2 el promedio fue de 17.2727, es decir, tiene una adquisición baja para el nivel 2. A pesar de que sabe reconocer las figuras geométricas (triángulos) e identificar a los ángulos, no tiene claras las definiciones, no sabe relacionar las propiedades con cada una de las representaciones.

	preguntas											
Nivel	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	Promedio
1	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	25	93,18181818
2	20	20	0	20	20	25	25	20	20	20	0	17,27272727

Tabla 16. Peso de adquisición del estudiante 2B16

En la tabla 17, se asigna el grado de adquisición para cada uno de los vectores del cuestionario, como se observa en la tabla 7 el estudiante 4A7 en la pregunta 4e el alumno no tuvo razonamiento para ninguno de, los dos niveles de Van Hiele, por lo que, no adquirió ninguna adquisición, ya que su respuesta fue tipo 0, es decir, dejo la respuesta sin responder o dio alguna respuesta que no dice nada de lo que se pregunta, por lo tanto, no tuvo ninguna adquisición para el nivel 1 (peso=0) ni para el nivel 2 (peso=0). En la pregunta 5, tuvo un razonamiento en el nivel 1 de Van Hiele con una respuesta tipo 3, por lo cual, tiene una adquisición baja en el nivel 1 (peso=25) y sin ninguna adquisición en el nivel 2 (peso=0). En las preguntas 1a y 1b, tuvo un razonamiento bajo en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 1, por lo que tuvo una adquisición baja en el nivel 2 (peso=20) y una adquisición completa en el nivel 1 (peso=100). En las preguntas 2 y 4c, tuvo un razonamiento bajo en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 3, es decir, tiene una adquisición baja para el nivel 2 (peso=25) y una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100). En la pregunta 3b, tuvo un razonamiento alto en el nivel 2 de van Hiele con una respuesta tipo 6, teniendo una adquisición alta para el nivel 2 (peso=80) y una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100). En el resto de las preguntas, él tuvo un razonamiento completo en el nivel 2 con una respuesta tipo 7, teniendo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y para el nivel 2 (peso=100). Realizando el promedio aritmético para el cuestionario del alumno 4A7, para el nivel 1 fue de 84.0909 lo cual indica que tiene una adquisición alta en el nivel 1. Para el nivel 2 fue de 51.8181, es decir, tiene una adquisición intermedia para este nivel.

	preguntas											
Nivel	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	Promedio
1	100	100	100	100	100	100	100	100	100	0	25	84,09090909
2	20	20	25	100	80	100	100	25	100	0	0	51,81818182

Tabla 17. Peso de adquisición del estudiante 4A7

En la tabla 18, se asigna el grado de adquisición para cada uno de los vectores del cuestionario, como se observa en la tabla 8 el estudiante 2A7 en la pregunta 5 el alumno tuvo un razonamiento en el nivel 1 de Van Hiele con una respuesta tipo 3, por lo cual, tiene una adquisición baja en el nivel 1 (peso=25) y sin ninguna adquisición en el nivel 2 (peso=0). En la pregunta 2, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 1, por lo que tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y sin ninguna adquisición para el nivel 2 (peso=0). En las preguntas 1a, 1b y 4d, él tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 2, por lo que tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y una adquisición baja para el nivel 2 (peso=20). En la pregunta 4e, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 3, es decir, tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y una adquisición baja para el nivel 2 (peso=25). En las preguntas 3a y 3b, tuvo un razonamiento alto en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 6, teniendo una adquisición alta para el nivel 2 (peso=80) y una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100). En la pregunta 4a, tuvo un razonamiento alto en el nivel 1 de Van Hiele con una respuesta tipo 6, teniendo una adquisición alta para el nivel 1 (peso=80) y sin ninguna adquisición para el nivel 2 (peso=0). En las preguntas 4b y 4c, un razonamiento bajo en el nivel 1 de Van Hiele con una respuesta tipo 2, teniendo una adquisición baja para el nivel 1 (peso=20) y sin ninguna adquisición para el nivel 2 (peso=0). Al realizar el promedio aritmético del alumno 2A7 de su test para el nivel 1 fue de 76.8181, lo cual tiene una adquisición alta para el nivel 1. Para el nivel 2 su promedio aritmético es de 22.2727 lo cual se le asigna una adquisición baja.

	preguntas											
Nivel	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	Promedio
1	100	100	100	100	100	80	20	20	100	100	25	76,81818182
2	20	20	0	80	80	0	0	0	20	25	0	22,27272727

Tabla 18. Peso de adquisición del estudiante 2A7

En la tabla 19, se asigna el grado de adquisición para cada uno de los vectores del cuestionario, como se observa en la tabla 9 el estudiante 2A6 en la pregunta 4c el alumno tuvo un razonamiento en el nivel 1 de Van Hiele con una respuesta tipo 2, por lo cual, tiene una adquisición baja en el nivel 1 (peso=20) y sin ninguna adquisición en el nivel 2 (peso=0). En la pregunta 2, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de van Hiele con una respuesta tipo 1,

por lo que tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y sin ninguna adquisición para el nivel 2 (peso=0). En las preguntas 1a y 1b, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 2, por lo que tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y una adquisición baja para el nivel 2 (peso=20). En las preguntas 3a, 3b y 4b, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 3, es decir, tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y una adquisición baja para el nivel 2 (peso=25). En la pregunta 4a, tuvo un razonamiento intermedio en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 4, teniendo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y una adquisición intermedia para el nivel 2 (peso=50). Para las preguntas 4d, 4e y 5, no tuvo un razonamiento en ningún nivel, teniendo una respuesta tipo 0, esto es, el alumno no tiene ninguna adquisición para el nivel 1 (peso=0) ni para el nivel 2 (peso=0), cabe resaltar que por no tener respuesta en esas preguntas el alumno no es capaz de razonar en ninguno de los niveles de Van Hiele. Al realizar el promedio aritmético del alumno 2A6 de su test para el nivel 1 fue de 65.4545, lo cual tiene una adquisición alta para el nivel 1. Para el nivel 2 su promedio aritmético es de 15 lo cual indica que no tiene ninguna adquisición para este nivel.

	preguntas											
Nivel	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	Promedio
1	100	100	100	100	100	100	100	20	0	0	0	65,45454545
2	20	20	0	25	25	50	25	0	0	0	0	15

Tabla 19. Peso de adquisición del estudiante 2A6

En la tabla 20, se asigna el grado de adquisición para cada uno de los vectores del cuestionario, como se observa en la tabla el estudiante 2B8 en la pregunta 5 el alumno tuvo un razonamiento en el nivel 1 de Van Hiele con una respuesta tipo 3, por lo cual, tiene una adquisición baja en el nivel 1 (peso=25) y sin ninguna adquisición en el nivel 2 (peso=0). En las preguntas 1a ,1b, 2a y 3b, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 2, por lo que tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y una adquisición baja para el nivel 2 (peso=20). En la pregunta 2, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 1, por lo que tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y sin ninguna adquisición para el nivel 2 (peso=0). Para la pregunta 4a, tuvo un excelente razonamiento respondiendo en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 7, teniendo una adquisición completa para los niveles 1 (peso=100) y 2 (peso=100). En

la pregunta 4c, tuvo un razonamiento en el nivel 1 de Van Hiele con una respuesta tipo 2, por lo cual, tiene una adquisición baja en el nivel 1 (peso=20) y sin ninguna adquisición en el nivel 2 (peso=0). En las preguntas 4b, 4d y 4e, no tuvo razonamiento en ningún nivel de Van Hiele, teniendo una respuesta tipo 0, esto es, el alumno no tiene ninguna adquisición para el nivel 1(peso=0) ni para el nivel 2(peso=0) ya que, no se le puede asignar algún nivel, pues no da ninguna información de algún razonamiento. Sacando el promedio aritmético de la encuesta del alumno 2B8, para el nivel 1 fue de 58.6363, lo cual indica que tuvo una adquisición intermedia para este nivel. Para el nivel 2 el promedio fue de 16.3636, es decir, tiene una adquisición baja para este nivel.

	preguntas											
Nivel	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	Promedio
1	100	100	100	100	100	100	0	20	0	0	25	58,63636364
2	20	20	0	20	20	100	0	0	0	0	0	16,36363636

Tabla 20. Peso de adquisición del estudiante 2B8

En la tabla 21, se asigna el grado de adquisición para cada uno de los vectores del cuestionario, como se observa en la tabla 11, el estudiante 2B13 en las preguntas 4a, 4b y 5, tuvo un razonamiento en el nivel 1 de Van Hiele con una respuesta tipo 3, por lo cual, tiene una adquisición baja en el nivel 1 (peso=25) y sin ninguna adquisición en el nivel 2 (peso=0). En las preguntas 1a y 1b, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 1, por lo que tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y sin ninguna adquisición para el nivel 2 (peso=0). En la pregunta 3b, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de van Hiele con una respuesta tipo 3, es decir, tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y una adquisición baja para el nivel 2 (peso=25). En las preguntas 4d y 4e, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 2, por lo que tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y una adquisición baja para el nivel 2 (peso=20). En la pregunta 4c, tuvo un razonamiento en el nivel 1 de Van Hiele con una respuesta tipo 2, por lo cual, tiene una adquisición baja en el nivel 1 (peso=20) y sin ninguna adquisición en el nivel 2 (peso=0). En las preguntas 2 y 3a, no tuvo razonamiento en ningún nivel de van Hiele, teniendo una respuesta tipo 0, esto es, el alumno no tiene ninguna adquisición para el nivel 1(peso=0) ni para el nivel 2(peso=0) dado que no dio alguna información para su razonamiento. Al realizar el promedio aritmético del alumno 2B13 de

su test para el nivel 1 fue de 54.0909, lo cual tiene una adquisición intermedia para este nivel. Para el nivel 2 su promedio aritmético es de 5.9090, lo cual indica que no tiene ninguna adquisición para este nivel.

	preguntas											
Nivel	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	Promedio
1	100	100	0	0	100	25	25	20	100	100	25	54,09090909
2	0	0	0	0	25	0	0	0	20	20	0	5,909090909

Tabla 21. Peso de adquisición del estudiante 2B13

En la tabla 22, se asigna el grado de adquisición para cada uno de los vectores del cuestionario, como se observa en la tabla 12, el estudiante 2B9 en la pregunta 1a, el alumno tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 2, por lo que tuvo una adquisición completa para el nivel 1(peso=100) y una adquisición baja para el nivel 2 (peso=20). En la pregunta 2, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de Van Hiele con una respuesta tipo 1, por lo que tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y sin ninguna adquisición para el nivel 2 (peso=0). En la pregunta 3a, tuvo un razonamiento en el nivel 2 de van Hiele con una respuesta tipo 3, es decir, tuvo una adquisición completa para el nivel 1 (peso=100) y una adquisición baja para el nivel 2 (peso=25). En el resto de las preguntas, el alumno no tuvo razonamiento en ningún nivel de van Hiele, teniendo una respuesta tipo 0, esto es, el alumno no tiene ninguna adquisición para el nivel 1 (peso=0) ni para el nivel 2 (peso=0), se desconoce la razón por las cuales dejo tantas preguntas sin contestar, tal vez sea que no tiene claros los temas que se preguntan en este test, o simplemente no tuvo la intención de contestarlas, o tal vez no le dio tiempo de responderlas. Al realizar el promedio aritmético del alumno 2B9 de su test para el nivel 1 fue de 27,2727, lo cual tiene una adquisición baja para el nivel 1. Para el nivel 2 su promedio aritmético es de 4.9090, lo cual indica que no tiene ninguna adquisición para este nivel, ya que el alumno dejó la mayoría de sus preguntas sin contestar, esto le baja su grado de adquisición.

	preguntas											
Nivel	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	Promedio
1	100	0	100	100	0	0	0	0	0	0	0	27,27272727
2	20	0	0	25	0	0	0	0	0	0	0	4,090909091

Tabla 22. Peso de adquisición del estudiante 2B9

Después de analizar cada uno de los valores de las tablas de peso de adquisición, se realiza el conteo de cuantos alumnos cumplen con los parámetros de cada una de las adquisiciones, para así poder tener una frecuencia de cómo es que los alumnos tienen un razonamiento dado en cada uno de los niveles de Van Hiele. Cada una de las ponderaciones fue revisada minuciosamente, para poder asignar el tipo de respuesta, y así dar un peso de adquisición para cada una de las preguntas del test por alumno.

Aunque el Modelo de Van Hiele tiene entre sus características centrales la jerarquía de los niveles de razonamiento, es decir, un estudiante puede progresar en la capacidad de razonamiento pasando de un nivel al siguiente e iniciando la adquisición del segundo nivel cuando haya adquirido completamente el primero, la realidad de la enseñanza hace que con cierta frecuencia aparezcan situaciones diferentes. Algunos estudiantes muestran una adquisición incompleta en los niveles de razonamiento.

La tabla 23 resume los diferentes grados de adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele alcanzados por los alumnos de los 6 grupos, obtenido de nuestros vectores (N, t) de cada pregunta. Observando la tabla 23, se puede ver que el nivel de adquisición completa del nivel 1 prevaleció para los grupos 6A con 13 alumnos, 4B con 10 alumnos y 2A con 10 alumnos, (aunque la mayoría tuvo una adquisición intermedia en el nivel 2 y solo los del grupo 4B la mayoría tuvo una adquisición baja). Para los estudiantes de 2B predominó la adquisición alta para el nivel 1 con 9 alumnos (aunque la mayoría de ellos tuvo una baja adquisición para el nivel 2). Para los estudiantes de 4A prevaleció una adquisición alta con 8 alumnos y completa con 7 alumnos en el nivel 1 (la mayoría de ellos tuvo una adquisición intermedia para el nivel 2). Para la mayoría de los estudiantes de 6B su adquisición fue completa con 8 alumnos en el nivel 1 (la mayoría tiene una adquisición alta con en el nivel 2).

		Grado de adquisición				
Grupo	Nivel de van hiele	Adquisición Nula	Adquisición Baja	Adquisición intermedia	Adquisición Alta	Adquisición Completa
2A	1	0	0	1	8	10
2A	2	4	8	7	0	0
2B	1	0	1	2	9	5
2B	2	2	10	4	1	0
4A	1	0	0	1	8	7
4A	2	3	6	7	0	0
4B	1	0	0	0	5	10
4B	2	1	5	4	4	1
6A	1	0	0	0	1	13
6A	2	0	2	9	3	0
6B	1	0	0	1	3	8
6B	2	0	4	3	5	0

Tabla 23. Número de alumnos que obtienen grados de adquisición de cada nivel de Van Hiele

Algo interesante es que se cumple la teoría de Mayberry (1983) pues en todas las preguntas no sucede que algún alumno tenga un nivel bajo de adquisición en el nivel 1 y una adquisición alta en el nivel 2. La mayor concentración de mejor grado de adquisición se encuentra principalmente para los grupos en el primer y segundo nivel, es decir, los conocimientos matemáticos de los alumnos son reforzados respectivamente conforme pasan de nivel académico en los años cursados de preparatoria de manera sensacional. Aunque si se esperaba que los que tuvieran una excelente adquisición para estos temas son los alumnos de 2os, pues ellos acababan de revisarlos en su materia de Geometría Analítica.

Esta prueba es válida, ya que se confirma con la existencia de los grados de adquisición de los dos niveles para cada alumno. Después de haber analizado cada uno de los parámetros encontrados en nuestra tabla 23, y al agrupar cada una de nuestras tablas encontradas al sacar el promedio aritmético de cada nivel, en estos estudiantes se encontraron 10 perfiles de razonamiento que corresponden a diferentes etapas de desarrollo. Las características de los perfiles que se han encontrado en nuestro test para cada uno de los alumnos, se muestran en la tabla 24.

Los perfiles sucesivos representan una secuencia que va de los estudiantes que adquirieron completamente los niveles 1 y 2 (Perfil 1), los estudiantes que tienen una adquisición completa el nivel 1 y una adquisición alta en el nivel 2 (Perfil 2), los estudiantes que tienen

una adquisición completa el nivel 1 y una adquisición intermedia en el nivel 2 (Perfil 3), los estudiantes que tienen una adquisición completa el nivel 1 y una adquisición baja en el nivel 2 (Perfil 4), los estudiantes que tienen una adquisición alta el nivel 1 y una adquisición intermedia en el nivel 2 (Perfil 5), los estudiantes que tienen una adquisición alta el nivel 1 y una adquisición baja en el nivel 2 (Perfil 6), los estudiantes que tienen una adquisición alta el nivel 1 y una adquisición nula en el nivel 2 (Perfil 7), los estudiantes que tienen una adquisición intermedia el nivel 1 y una adquisición baja en el nivel 2 (Perfil 8), los estudiantes que tienen una adquisición intermedia el nivel 1 y una adquisición nula en el nivel 2 (Perfil 9), y por último los estudiantes que tienen una adquisición baja el nivel 1 y una adquisición nula en el nivel 2 (Perfil 10).

	Grado de Adquisición	
Perfil	**Nivel 1**	**Nivel 2**
1	Completa	Completa
2	Completa	Alta
3	Completa	Intermedia
4	Completa	Baja
5	Alta	Intermedia
6	Alta	Baja
7	Alta	Nula
8	Intermedia	Baja
9	Intermedia	Nula
10	Baja	Nula

Tabla 23. Características de los perfiles observados de la adquisición de los Niveles de Van Hiele

Una vez encontrados y descritos cada uno de los perfiles, se revisan las tablas de peso de adquisición del total de alumnos, para ver cuántos alumnos se encuentran en cada perfil para poder agruparlos en cada uno. La mayoría de los alumnos se encuentran en los Perfiles 2 a 6, eso quiere decir, que los alumnos sí tienen un buen nivel de razonamiento, por lo que sus conocimientos matemáticos no son deficientes.

En la tabla 25, se muestra el conteo de todos los alumnos agrupados en cada uno de los perfiles. Para el grupo 2A, siete alumnos se encuentran en el Perfil 3, tres alumnos se

encuentran en el Perfil 4, cuatro alumnos se encuentran en el Perfil 6, cuatro alumnos están en el Perfil 7, y un solo alumno está en el Perfil 8.

Para el grupo 2B, un alumno se encuentra en el Perfil 2, tres alumnos están en el Perfil 3, un alumno se localiza en el Perfil 4, un alumno se localiza en el Perfil 5, ocho alumnos se encuentran en el Perfil 6, un alumno está en el Perfil 8, un alumno está en el Perfil 9, y solo un alumno se localiza en el perfil 10. Podemos observar que este grupo, siendo de segundo semestre de bachiller, es el que tuvo adquisiciones más bajas en los dos niveles de Van Hiele.

Para el grupo 4A, cuatro alumnos se encuentran en el Perfil 3, tres alumnos se localizan en el Perfil 4, 3 alumnos están en el Perfil 5, cinco alumnos se localizan en el Perfil 6 y un solo alumno se encuentra en el Perfil 9.

Para el grupo 4B, un alumno se encuentra en el Perfil 1, este perfil es el único que tiene los dos niveles completos con un nivel de razonamiento excelente, así como el único alumno de todos los encuestados. Cuatro alumnos se localizan en el Perfil 2, cuatro alumnos están en el Perfil 3, un alumno se localiza en el Perfil 4, cuatro alumnos se localizan en el Perfil 6, y solo un alumno se localiza en el Perfil 7.

Para el grupo 6A, tres alumnos se localizan en el Perfil 2, ocho alumnos se encuentran en el Perfil 3, un alumno está en el Perfil 4 y dos alumnos se localizan en el Perfil 6.

Para el grupo 6B, cinco alumnos se localizan en el Perfil 2, dos alumnos se encuentran en el Perfil 3, un alumno está en el Perfil 4, un alumno se localiza en el Perfil 5, dos alumnos se localizan en el Perfil 6, y solo un alumno se localiza en el Perfil 8.

	Grupos					
	2A	2B	4A	4B	6A	6B
Perfil 1	0	0	0	1	0	0
Perfil 2	0	1	0	4	3	5
Perfil 3	7	3	4	4	8	2
Perfil 4	3	1	3	1	1	1
Perfil 5	0	1	3	0	0	1
Perfil 6	4	8	5	4	2	2
Perfil 7	4	0	0	1	0	0
Perfil 8	1	1	0	0	0	1
Perfil 9	0	1	1	0	0	0
Perfil 10	0	1	0	0	0	0

Tabla 24. Distribución de los Grados de Adquisición de los Estudiantes según los Perfiles

Haciendo un conteo General de los Perfiles para los 93 alumnos y reafirmando lo que se había dicho con anterioridad que la mayoría de los alumnos se concentran en los Perfiles 2 a 6 cumpliendo las características mencionadas en la Tabla 23. Tenemos que:

Para el Perfil 1 se encuentra 1 alumno

Para el Perfil 2 se encuentran 13 alumnos

Para el Perfil 3 se encuentran 23 alumnos

Para el Perfil 4 se encuentran 10 alumnos

Para el Perfil 5 se encuentran 5 alumnos

Para el Perfil 6 se encuentran 25 alumnos

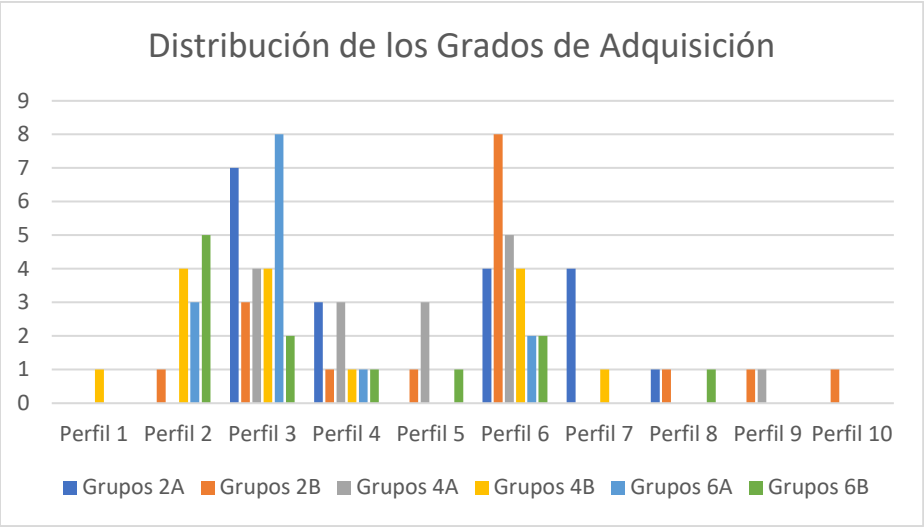
Para el Perfil 7 se encuentran 5 alumnos

Para el Perfil 8 se encuentran 3 alumnos

Para el Perfil 9 se encuentran 2 alumnos

Para el Perfil 10 se encuentra 1 alumno

Esto es, que la mayoría de los estudiantes tienen una adquisición completa-alta para el nivel 1 de Van Hiele, y una adquisición alta-baja para el nivel 2 de Van Hiele. La información anterior se muestra en la Gráfica 1, con los datos que tenemos en la tabla 24.



Gráfica 1. Distribución de los Grados de Adquisición de los Estudiantes según los Perfiles

3.2 Resultados Cualitativos

En esta sección se presentan las respuestas que dieron los alumnos y su análisis. A los alumnos solo se les dio la indicación de contestar el cuestionario con lo que ellos recordaran. Se van comentando las diferentes respuestas según el nivel y el tipo de respuesta. En la tabla 25 se muestra las preguntas desglosadas de cómo contestaron en cada pregunta y en qué nivel se denotan, así como el número de alumnos que se concentran en cada una, las cuales se seccionan por grupo.

		Preguntas										
Grupo		1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
2A	Nivel 1	-	-	-	-	-	10	12	8	2	2	16
	Nivel 2	19	19	19	19	19	8	6	10	15	14	-
	Sin respuesta	-	-	-	-	-	1	1	1	2	3	3
2B	Nivel 1	-	2	-	-	-	4	5	4	1	2	14
	Nivel 2	17	14	15	14	16	9	9	10	15	13	-
	Sin respuesta	-	1	2	3	1	4	3	3	1	2	3
4A	Nivel 1	-	-	-	-	-	6	4	4	1	1	13
	Nivel 2	16	16	14	16	15	10	11	10	14	12	1
	Sin respuesta	-	-	2	-	1	-	1	2	1	3	2
4B	Nivel 1	-	-	-	-	-	3	3	3	1	4	15
	Nivel 2	15	15	15	15	15	12	11	11	13	10	-
	Sin respuesta	-	-	-	-	-	-	1	1	1	1	-
6A	Nivel 1	-	-	-	-	-	4	4	-	1	-	13
	Nivel 2	14	14	14	14	14	9	9	13	8	13	-
	Sin respuesta	-	-	-	-	-	1	1	1	3	1	1
6B	Nivel 1	-	-	-	-	-	2	-	-	1	-	11
	Nivel 2	12	12	12	12	12	10	10	11	8	8	-
	Sin respuesta	-	-	-	-	-	-	2	1	3	4	1

Tabla 25. Distribución de las respuestas de los alumnos para cada nivel

Los alumnos de 2A no tuvieron tanta variación en las primeras preguntas, se nota un razonamiento homogéneo en la parte de ángulos, que si los reconocen por su forma, y también tienen conocimiento de su definición, para las preguntas de 1a a 3b los 19 alumnos se posicionaron en el segundo nivel de van Hiele; para la pregunta 4a, 10 alumnos tuvieron el nivel 1 de van Hiele, 8 en el nivel 2 y solamente un alumno dejó la pregunta sin responder; para la pregunta 4b, 12 alumnos se encuentran en el nivel 1, 6 en el nivel 2 y solo un alumno no respondió la pregunta; en la pregunta 4c, 8 alumnos respondieron en el nivel 1 de van Hiele, 10 en el nivel 2 y solo un alumno dejo la pregunta sin respuesta; para la pregunta 4d la respuesta de 2 alumnos se encuentra en el nivel 1 de van Hiele, 15 en el nivel 2 y 2 alumnos dejaron la pregunta sin responder; en la pregunta 4e, 2 alumnos se encuentran en el nivel 1

de Van Hiele, 14 en el nivel 2 y 3 alumnos dejaron la pregunta sin responder; y para la pregunta 5 la respuesta de 16 alumnos se posicionó en el nivel 1 de van Hiele y 3 alumnos dejaron la pregunta sin responder.

Los alumnos de 2B tuvieron una gran variación en cómo contestaron sus preguntas, para la pregunta 1a los 17 alumnos se posicionaron en el segundo nivel de van Hiele; en la pregunta 1b la respuesta de 2 alumnos se localiza en el nivel 1 de van Hiele, 14 en el nivel 2 y solo 1 alumno dejó la pregunta en blanco; para la pregunta 2 la respuesta de 15 alumnos se presentó en el nivel 2 de van Hiele y 2 alumnos no tuvieron respuesta; para la pregunta 3a 14 alumnos respondieron en el nivel 2 de van Hiele y 3 alumnos dejaron sin respuesta su pregunta; para la pregunta 3b 16 alumnos se encuentran en el nivel 2 de van Hiele y solo un alumno dejo sin responder; para la pregunta 4a 4 alumnos tuvieron el nivel 1 de van Hiele, 9 en el nivel 2 y solamente 4 alumnos dejaron la pregunta sin responder; para la pregunta 4b 5 alumnos se encuentran en el nivel 1, 9 en el nivel 2 y 3 alumnos no respondieron la pregunta; en la pregunta 4c 4 alumnos respondieron en el nivel 1 de van Hiele, 10 en el nivel 2 y 3 alumnos dejaron la pregunta sin respuesta; para la pregunta 4d la respuesta de 1 alumnos se encuentra en el nivel 1 de van Hiele, 15 en el nivel 2 y 1 alumnos dejaron la pregunta sin responder; en la pregunta 4e 2 alumnos se encuentran en el nivel 1 de Van Hiele, 13 en el nivel 2 y 2 alumnos dejaron la pregunta sin responder; y para la pregunta 5 la respuesta de 14 alumnos se posicionó en el nivel 1 de van Hiele y 3 alumnos dejaron la pregunta sin responder.

Los alumnos de 4A tuvieron un poco de variación en las primeras preguntas, se notan diferentes tipos de razonamiento en el tema de ángulos, que sí los reconocen por su forma, y también tienen conocimiento de su definición. Para las preguntas 1a y 1b las respuestas de 16 alumnos se posicionaron en el segundo nivel de van Hiele; para la pregunta 2 15 alumnos respondieron posicionándose en el nivel 2 de van Hiele y 2 alumnos dejaron su pregunta sin responder; para la pregunta 3a 14 alumnos tuvieron un nivel 2 de van Hiele y 3 alumnos la dejaron sin respuesta; para la pregunta 3b 16 alumnos respondieron en el nivel 1 de van Hiele mientras que solo un alumno dejo su pregunta sin respuesta; para la pregunta 4a 10 alumnos tuvieron el nivel 1 de van Hiele, 8 en el nivel 2 y solamente un alumno dejó la pregunta sin responder; para la pregunta 4b 12 alumnos se encuentran en el nivel 1, 6 en el nivel 2 y solo un alumno no respondió la pregunta; en la pregunta 4c 8 alumnos respondieron en el nivel 1

de van Hiele, 10 en el nivel 2 y solo un alumno dejo la pregunta sin respuesta; para la pregunta 4d la respuesta de 2 alumnos se encuentra en el nivel 1 de van Hiele, 15 en el nivel 2 y 2 alumnos dejaron la pregunta sin responder; en la pregunta 4e 2 alumnos se encuentran en el nivel 1 de Van Hiele, 14 en el nivel 2 y 3 alumnos dejaron la pregunta sin responder; y para la pregunta 5 la respuesta de 16 alumnos se posicionó en el nivel 1 de van Hiele y 3 alumnos dejaron la pregunta sin responder.

Los alumnos de 4B no tuvieron tanta variación en las primeras preguntas, se nota un razonamiento parejo en la parte de ángulos, que si los reconocen por su forma, y también tienen conocimiento de su definición, para las preguntas de 1a a 3b los 15 alumnos se posicionaron en el segundo nivel de van Hiele; para la pregunta 4a 3 alumnos tuvieron el nivel 1 de van Hiele y 8 en el nivel 2; para la pregunta 4b 3 alumnos se encuentran en el nivel 1, 11 en el nivel 2 y solo un alumno no respondió la pregunta; en la pregunta 4c 3 alumnos respondieron en el nivel 1 de van Hiele, 11 en el nivel 2 y solo un alumno dejo la pregunta sin respuesta; para la pregunta 4d la respuesta de 1 alumno se encuentra en el nivel 1 de van Hiele, 13 en el nivel 2 y 1 alumno dejo la pregunta sin responder; en la pregunta 4e 4 alumnos se encuentran en el nivel 1 de Van Hiele, 10 en el nivel 2 y 1 alumno dejó la pregunta sin responder; y para la pregunta 5 la respuesta de 15 alumnos se posicionó en el nivel 1 de van Hiele.

Los alumnos de 6A no tuvieron tanta variación en las primeras preguntas, se nota un razonamiento homogéneo en la parte de ángulos, que sí los reconocen por su forma, y también tienen conocimiento de su definición, para las preguntas de 1a a 3b los 14 alumnos se posicionaron en el segundo nivel de van Hiele; para la pregunta 4a 4 alumnos tuvieron el nivel 1 de van Hiele y 9 en el nivel 2 y solamente un alumno dejo la pregunta sin responder; para la pregunta 4b 4 alumnos se encuentran en el nivel 1, 9 en el nivel 2 y solo un alumno no respondió la pregunta; en la pregunta 4c 13 alumnos respondieron en el nivel 2 de van Hiele y solo un alumno dejo la pregunta sin respuesta; para la pregunta 4d la respuesta de 1 alumno se encuentra en el nivel 1 de van Hiele, 8 en el nivel 2 y 3 alumnos dejaron la pregunta sin responder; en la pregunta 4e 13 alumnos se encuentran en el nivel 1 de Van Hiele y 1 alumno dejo la pregunta sin responder; y para la pregunta 5 la respuesta de 13 alumnos se posicionó en el nivel 1 de van Hiele y solo un alumno no respondió la pregunta.

Los alumnos de 6B no tuvieron tanta variación en las primeras preguntas, se nota un razonamiento parejo en la parte de ángulos, que si los reconocen por su forma, y también tienen conocimiento de su definición, para las preguntas de 1a a 3b los 12 alumnos se posicionaron en el segundo nivel de van Hiele; para la pregunta 4a 2 alumnos tuvieron el nivel 1 de van Hiele y 10 en el nivel 2; para la pregunta 4b 10 alumnos se encuentran en el nivel 2 y 2 alumnos no respondieron la pregunta; en la pregunta 4c 11 alumnos respondieron en el nivel 2 de van Hiele y solo un alumno dejó la pregunta sin respuesta; para la pregunta 4d la respuesta de 1 alumno se encuentra en el nivel 1 de van Hiele, 8 en el nivel 2 y 3 alumnos dejaron la pregunta sin responder; en la pregunta 4e 8 alumnos se encuentran en el nivel 2 de Van Hiele y 4 alumnos dejaron la pregunta sin responder; y para la pregunta 5 la respuesta de 11 alumnos se posicionó en el nivel 1 de van Hiele y solamente un alumno dejó la pregunta sin responder.

En esta parte se presenta el análisis cualitativo de las preguntas que dieron los alumnos con respecto al nivel de Van Hiele, cada pregunta mostrando las 3 respuestas con mayor frecuencia en la manera en cómo respondieron.

Pregunta 1a

Las siguientes son tres respuestas para la pregunta 1a, en este ítem se ilustran diferentes tipos de respuestas para el Nivel 2 de Van Hile y se muestran distintos tipos de respuesta.

La respuesta del alumno 2A16 es de tipo 2 en el nivel, ya que esta es incorrecta porque no tiene el conocimiento de lo que es un Ángulo, como se muestra en la Figura 3. Se observa que el alumno solo reconoce al ángulo por la manera en cómo se representa, pero no puede hacer una relación con lo que realmente es su concepto.

Figura 3. Respuesta a la pregunta 1a del alumno 2A16

La respuesta del alumno 4A3 es de tipo 3, ya que su razonamiento es correcto, pero está insuficientemente elaborada, porque ve al ángulo como un vértice, aunque cuando marca los ángulos en la figura se refiere solo a las esquinas, pero sí tiene claro que está entre líneas rectas como se muestra en la Figura 4.

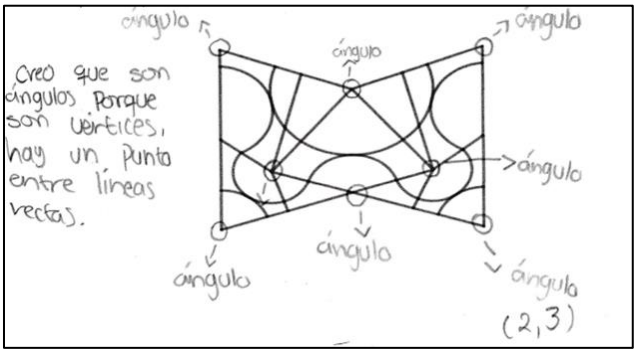


Figura 4. Respuesta a la pregunta 1a del alumno 4A3

La respuesta del alumno 2B2 es de tipo 4. Esto significa que el estudiante tiene una comprensión adecuada del concepto de ángulo, pero su explicación es inexacta o poco clara. Es importante que el estudiante tenga una noción del concepto de ángulo y reconozca que se relaciona con las aristas o líneas rectas. Sin embargo, si el estudiante mencionó ángulos en líneas curvas, esto indica una falta de precisión en su explicación y una posible confusión entre los conceptos de ángulo y curvatura como se muestra en la Figura 5.

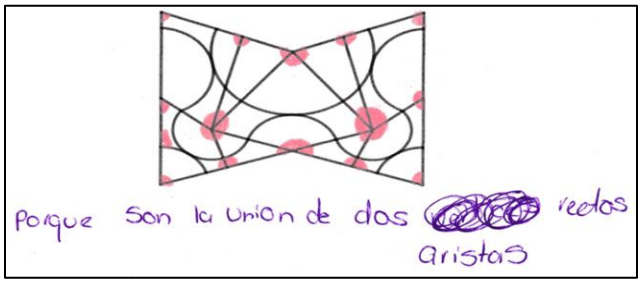


Figura 5. Respuesta a la pregunta 1a del alumno 2B2

Pregunta 1b

En la pregunta 1b se les pide que den una definición de ángulo, en las respuestas que presento son las que tuvieron más porcentaje, y estas se encuentran en el Nivel 2 de Van Hiele y se muestran algunos tipos de respuesta.

La respuesta del alumno 2A5 es de tipo 2, esto quiere decir que el estudiante tiene una comprensión básica del concepto de ángulo, pero su explicación es insuficientemente elaborada y no es precisa. El estudiante describe un ángulo como "una porción que parte de una misma línea", esto indica una comprensión limitada y una falta de claridad en la definición del ángulo. Por lo que, esta descripción es incorrecta, ya que un ángulo se forma entre dos líneas o segmentos de línea, no como una porción que parte de una misma línea como se muestra en la Figura 6.

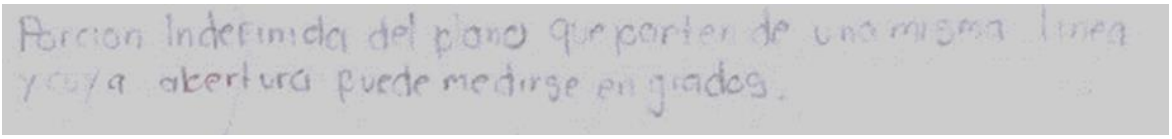


Figura 6. Respuesta a la pregunta 1b del alumno 2A5

La respuesta del alumno 6A10 es de tipo 3, esto implica que el estudiante tiene una comprensión adecuada del concepto de ángulo al reconocer que se forma por dos líneas rectas, pero su explicación es insuficientemente elaborada y no se relaciona claramente con la definición precisa del ángulo como se muestra en la Figura 7.

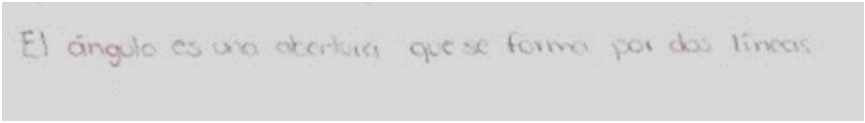


Figura 7. Respuesta a la pregunta 1b del alumno 6A10

La respuesta del alumno 4B9 es de tipo 4, pues su respuesta es correcta, tiene procesos de razonamientos claros, pero de la misma manera su respuesta es incorrecta, puesto que él dice que es una medida marcada por el conjunto. La parte correcta es intersección de una o más líneas, y esa parte carece de una argumentación completa. Algo que también se observa es que tiene claro que los grados se miden de los 0° a los 360° como se muestra en la Figura 8.

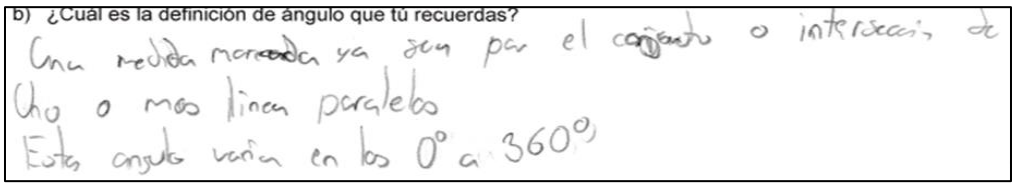


Figura 8. Respuesta a la pregunta 1b del alumno 4B9

Pregunta 2

Para la pregunta 2 se pide marcar los ángulos iguales en la figura, aunque en esta pregunta no se solicitó una justificación, la pregunta tiene nivel dos de van Hiele, ya que algunas respuestas muestran conocimiento y aplicación de propiedades de ángulos, además de que pueden identificar su forma.

La respuesta del alumno 6B8 es tipo 1, porque su respuesta no proporciona ninguna información relevante, es decir, en la figura se puede observar que él marca ángulos complementarios, los cuales se cortan por una transversal y estos suman 180°, dejando de un lado que deben ser semejantes, y solo marca 2 ángulos que son complementarios con distinto color, dejando en blanco el resto de los ángulos del otro lado de la transversal como se muestra en la Figura 9.

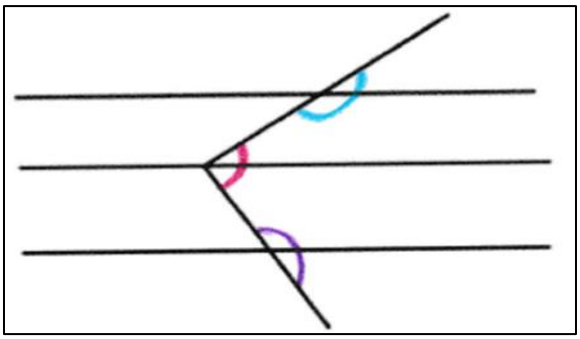


Figura 9. Respuesta a la pregunta 2 del alumno 6B8

La respuesta del alumno 4B13 se clasifica como tipo 2. El alumno muestra cierta comprensión de los ángulos que son iguales en la figura, pero deja varios ángulos en blanco, lo que indica una falta de comprensión. Además, el alumno marca con el mismo color ángulos que no coinciden entre la primera línea y la tercera línea paralelas. Se observa una confusión o una interpretación incorrecta por parte del alumno en relación con los ángulos que son iguales como se muestra en la Figura 10.

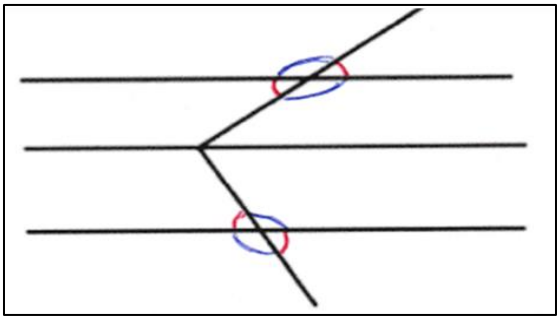


Figura 10. Respuesta a la pregunta 2 del alumno 4B13

La respuesta del alumno 4A9 se clasifica como tipo 3. El alumno muestra tener un entendimiento más claro de las propiedades de los ángulos, ya que los ángulos marcados son correctos. Aunque deja algunos ángulos en blanco, se observa que son pocos en comparación con la respuesta anterior como se muestra en la Figura 11.

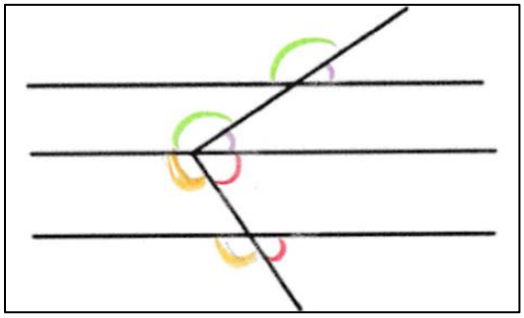


Figura 11. Respuesta a la pregunta 2 del alumno 4A9

Pregunta 3a

En la pregunta 3a se les pide identificar los triángulos, enumerarlos y explicar por qué es un triángulo, este ítem está evaluando el nivel dos de van Hiele y los conocimientos que los alumnos tienen del concepto de triángulo.

La respuesta del alumno 4B4 es de tipo 7, pues demostró un alto nivel de razonamiento al responder correctamente la pregunta sobre los triángulos. Además de ser consciente de que los triángulos tienen tres lados rectos, también mencionó otra propiedad fundamental: la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180°. El 44% de los alumnos dieron una respuesta similar (obsérvese Anexo 2), lo cual indica que una parte considerable de la clase

ha comprendido adecuadamente esta propiedad de los triángulos como se muestra en la Figura 12.

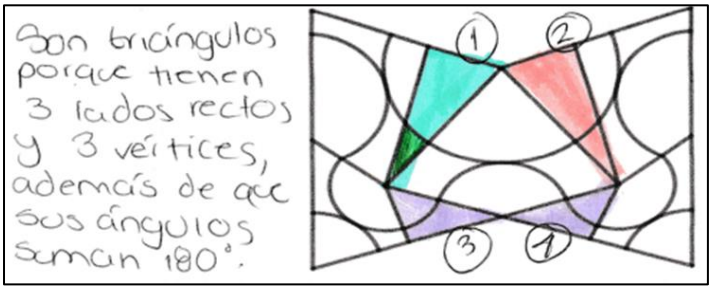


Figura 12. Respuesta a la pregunta 3a del alumno 4B4

La respuesta del alumno 2A2 es de tipo 3, ya que proporciona una definición clara de que un triángulo está formado por tres líneas rectas y presenta justificaciones suficientes para respaldar esa afirmación. Sin embargo, sí menciona que "todas las partes de un triángulo van unidas" como parte de su justificación, esa parte específica de su respuesta sigue siendo incorrecta e insuficiente para justificar la definición del triángulo como se muestra en la Figura 13.

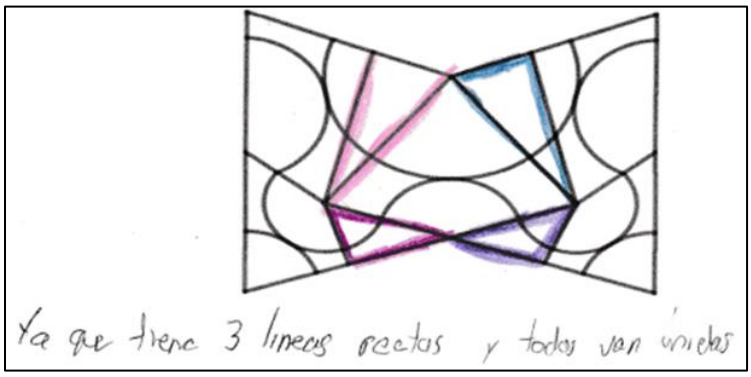


Figura 13. Respuesta a la pregunta 3a del alumno 2A2

La respuesta del alumno 2A12 es de tipo 4 en la cual menciona que los triángulos 1, 2, 5 y 6 tienen ángulos rectos. Aunque parte de su respuesta está justificada al mencionar que un triángulo tiene tres lados, también presenta deficiencias en su razonamiento al enumerar los triángulos 3, 4 y 7, que en realidad no son triángulos debido a que tienen cuatro lados como se muestra en la Figura 14.

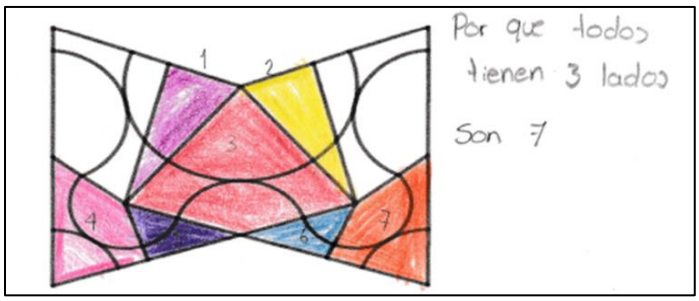


Figura 14. Respuesta a la pregunta 3a del alumno 2A12

Pregunta 3b

Para la pregunta 3b, se les solicita decir qué es un triángulo, que expliquen la idea que tienen, esto es con el fin de reforzar las respuestas de la pregunta anterior. Esta pregunta está redactada con la finalidad de que sus respuestas reflejen el nivel 2 de van Hiele.

La respuesta del alumno 4B4 es de tipo 7, lo cual indica que tiene un nivel completo de razonamiento al contestar correctamente la pregunta sobre su idea de lo que es un triángulo. Su respuesta incluye la afirmación de que un triángulo tiene 3 lados, lo cual corresponde a una definición básica e inicial de un triángulo. Además, el alumno menciona que la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180°, lo que indica un conocimiento adicional de las propiedades específicas de los triángulos. El 48% de los alumnos han dado respuestas similares que indican un buen nivel de comprensión generalizada en la clase como se muestra en la Figura 15.

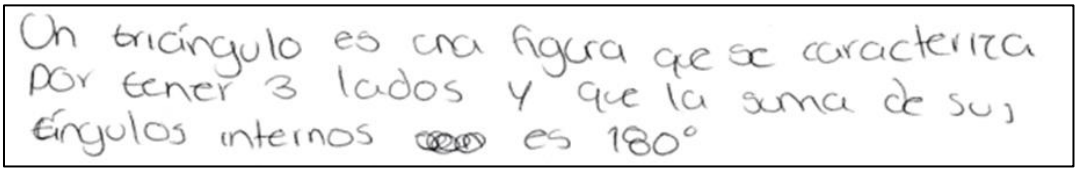


Figura 15. Respuesta a la pregunta 3b del alumno 4B4

La respuesta del alumno 2A5 es tipo 6, lo cual indica un nivel alto de razonamiento. Reconoce que un triángulo es una figura geométrica formada por la unión de 3 líneas, aunque no especifica si son líneas rectas o curvas. Sin embargo, la respuesta es incompleta y carece de una definición más precisa como se muestra en la Figura 16.

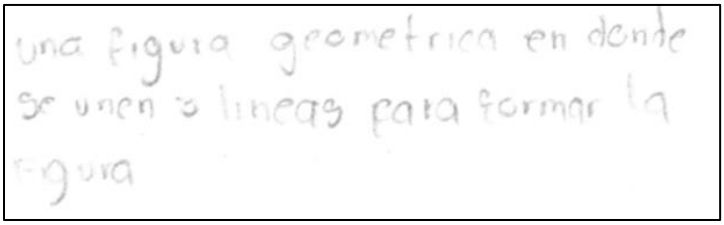


Figura 16. Respuesta a la pregunta 3b del alumno 2A5

La respuesta del alumno 4A11 es de tipo 3 de razonamiento (Figura 17). Aunque su respuesta es correcta al mencionar que un triángulo es una figura de 3 lados (el alumno llama "punta"), se observa que la explicación es breve y carece de detalles adicionales. El reconocimiento por parte del alumno de que un triángulo está compuesto por 3 lados y aristas es un indicador de comprensión básica del concepto. Sin embargo, una respuesta tipo 3 generalmente implica una descripción más superficial y limitada del tema.

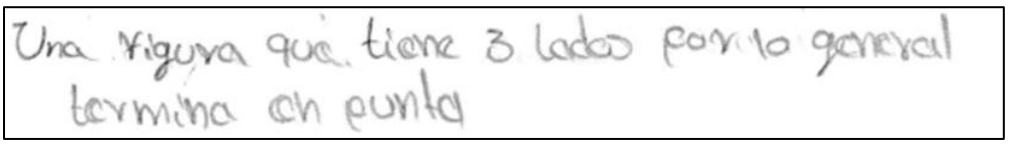
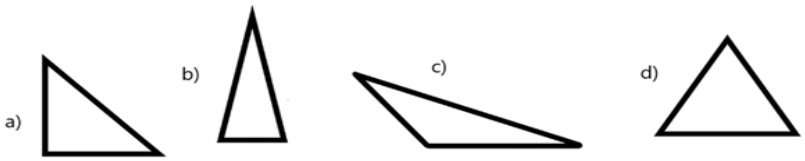


Figura 17. Respuesta a la pregunta 3b del alumno 4A11

Pregunta 4a

En la pregunta 4 para los incisos a y b, se les pide que observen los siguientes triángulos



Para el inciso a, deben indicar cuál de estos es equilátero, isósceles y escaleno, de la misma manera se les pide justificar su respuesta. En este inciso, los alumnos empiezan a tener dificultades, porque a pesar de que la pregunta está diseñada para el nivel 2 de van Hiele, muchos alumnos llegan solo al primer nivel.

La respuesta del alumno 6B8 es de tipo 7, pues ha demostrado un nivel completo de razonamiento al contestar correctamente y justificar su respuesta (Figura 18). El estudiante

6B8 ha comprendido y relacionado la definición de cada uno de los tipos de triángulos (equilátero, isósceles y escaleno) con las figuras correspondientes. Esta habilidad demuestra una comprensión clara de los conceptos y propiedades de los triángulos.

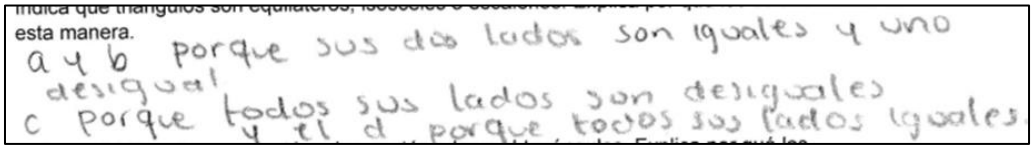


Figura 18. Respuesta a la pregunta 4a del alumno 6B8

La respuesta del alumno 2A17 es de tipo 2, y se ubica en el nivel 1 de van Hiele. Se puede observar que el alumno no leyó completamente la pregunta, ya que solo menciona que la opción d) es un triángulo debido a sus lados iguales. Sin embargo, no menciona explícitamente si se refiere al triángulo equilátero ni proporciona una justificación clara de su respuesta. En este caso, el alumno 2A17 ha identificado un triángulo basado en la igualdad de sus lados, pero no ha proporcionado una explicación clara o ha demostrado comprensión más allá de ese punto como se muestra en la Figura 19.

Figura 19. Respuesta a la pregunta 4a del alumno 2A17

La respuesta del alumno 6A2 es de tipo 7, puesto que responde qué triángulo es cada uno de los presentados en la pregunta como se muestra en la Figura 20. Sin embargo, se puede observar que el alumno 6A2 se encuentra en el nivel uno de van Hiele, ya que solo clasifica los triángulos por su forma y no proporciona una justificación explícita de su respuesta, a pesar de que se les pidió hacerlo.

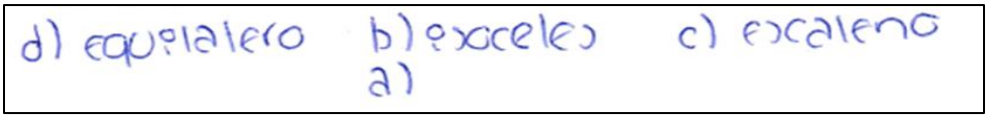


Figura 20. Respuesta a la pregunta 4a del alumno 6A2

Pregunta 4b

Para la pregunta 4b se pide que identifiquen cuál de los triángulos son acutángulos, rectángulos y obtusángulos, y a continuación se presentan algunas respuestas que dieron los estudiantes sobre esta pregunta.

La respuesta del alumno 6A12 es de tipo 7, él identifica correctamente los triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos, lo cual indica un nivel 2 de van Hiele (Figura 21). Es muy bueno saber que el estudiante 6A12 no solo reconoce visualmente las figuras, sino que también tiene un claro entendimiento de las definiciones y conceptos requeridos en la pregunta. Esto demuestra un nivel sólido de comprensión de las propiedades de los triángulos y su clasificación en términos de sus ángulos.

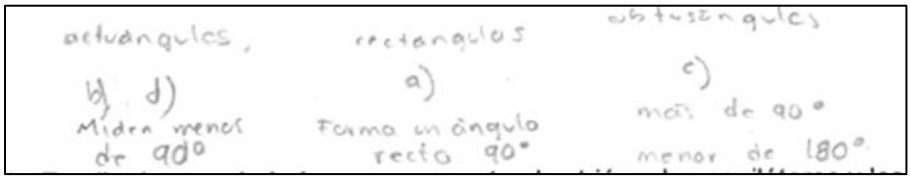


Figura 21. Respuesta a la pregunta 4b del alumno 6A12

La respuesta del alumno 2A3 es de tipo 7, muestra un reconocimiento de las figuras geométricas al colocar adecuadamente los incisos correspondientes a los triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos, lo cual indica un reconocimiento correcto de las figuras. Sin embargo, no proporciona una justificación explícita de su respuesta, por lo que esta se clasifica en el nivel 1 de van Hiele. Aunque el alumno tiene una idea clara de qué es cada tipo de triángulo, al no poder redactar adecuadamente la definición de cada uno, no tiene una comprensión completa de las características que los distinguen como se muestra en la Figura 22.

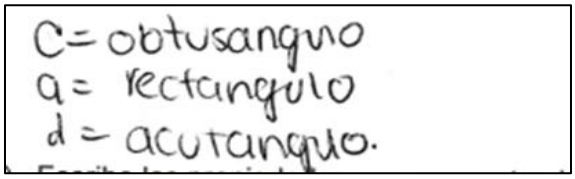


Figura 22. Respuesta a la pregunta 4b del alumno 2A3

La respuesta del alumno 4A14 es de tipo 2 y un nivel 1 en el modelo de van Hiele, considera que todos los elementos presentados son triángulos, pero no demuestra una comprensión clara de las definiciones solicitadas. Además, su respuesta carece de justificación, lo que indica una falta de conocimiento y explicación adecuada como se muestra en la Figura 23.

Al no poder diferenciar los triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos, el alumno 4A14 muestra una limitación en su comprensión de las características geométricas necesarias para clasificar correctamente los triángulos según sus ángulos.

Figura 23. Respuesta a la pregunta 4b del alumno 4A14

Pregunta 4c

En la pregunta 4c, tienen que describir las propiedades que tienen en común los triángulos equiláteros y los acutángulos. Este inciso está diseñado para llegar al nivel 2 de van Hiele, pero algunos alumnos solo se quedan en el nivel 1.

La respuesta del alumno 2B16 es de tipo 2 según la clasificación de van Hiele, que se encuentra en el nivel 2 de desarrollo geométrico (Figura 24). La respuesta del alumno, al mencionar que un triángulo equilátero tiene "2 lados iguales y uno desigual", no coincide con la definición de un triángulo equilátero. En este nivel de razonamiento, es usual que los estudiantes tengan una comprensión limitada de las propiedades geométricas y cometan errores al identificar y describir figuras.

Figura 24. Respuesta a la pregunta 4c del alumno 2B16

La respuesta de alumno 6A8 es de tipo 3, y se encuentra en el nivel 2 de van Hiele, esto indica que tiene una comprensión limitada de las propiedades geométricas, pero es capaz de proporcionar respuestas correctas, aunque incompletas. Su respuesta menciona solo una propiedad compartida entre los triángulos equiláteros y acutángulos, es importante resaltar la necesidad de proporcionar información adicional para una respuesta más completa como se muestra en la Figura 25.

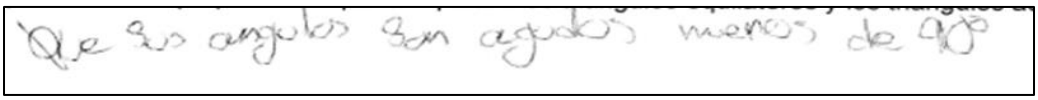


Figura 25. Respuesta a la pregunta 4c del alumno 6A8

La respuesta del alumno 2A9 es de tipo 2 y se encuentra en el nivel 1 de van Hiele, lo cual indica que está en una etapa inicial de comprensión de las propiedades geométricas, lo que implica que el alumno puede tener claridad en las definiciones individuales de los triángulos equiláteros y acutángulos, pero tiene dificultades para relacionarlas y establecer conexiones lógicas entre ellas como se muestra en la Figura 26. El alumno está en un proceso de razonamiento reducido y necesita apoyo adicional para desarrollar su capacidad de relacionar las propiedades de los triángulos equiláteros y acutángulos.

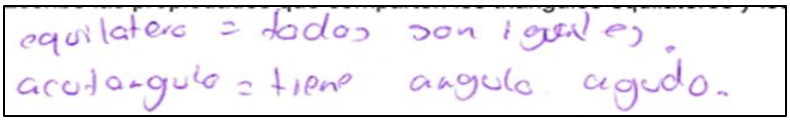


Figura 26. Respuesta a la pregunta 4c del alumno 2A9

Pregunta 4d

En la pregunta 4d, se les pide a los alumnos que ahora digan qué propiedades son verdaderas para los triángulos equiláteros y no para los acutángulos. A continuación, muestro algunas respuestas de los alumnos, la mayoría de estas se encuentran en el nivel 2 del modelo de van Hiele.

La respuesta del alumno 4B13 es de tipo 7 y comprende correctamente las propiedades de un triángulo equilátero. Al afirmar que “todos sus lados y ángulos miden igual”, el alumno demuestra comprensión de la característica fundamental de un triángulo equilátero. Esto indica un buen conocimiento de las propiedades específicas de este tipo de triángulo como se muestra en la Figura 27.

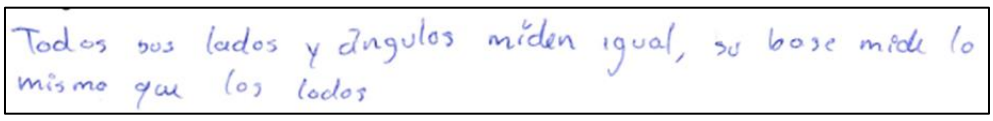


Figura 27. Respuesta a la pregunta 4d del alumno 4B13

La respuesta del alumno 2B10 es de tipo 2 y no tiene una comprensión precisa de la definición de un triángulo equilátero, al afirmar que tiene “dos lados equivalentes y uno diferente”, se confunde con la definición de un triángulo isósceles (Figura 28). Es importante señalar al alumno 2B10 que un triángulo equilátero tiene todos sus lados de igual longitud, no dos lados iguales y uno diferente. La respuesta dada por el alumno es incorrecta en este caso.

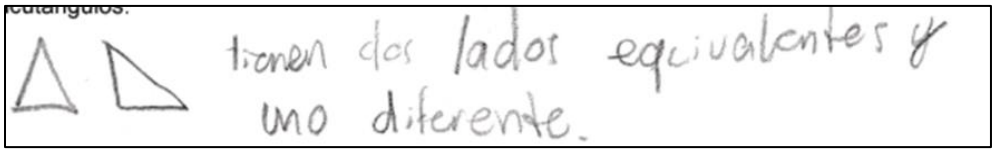


Figura 28. Respuesta a la pregunta 4d del alumno 2B10

La respuesta del alumno 2A9 es de tipo 3, su respuesta es correcta cuando menciona que tiene tres lados iguales (Figura 29). Pero no está suficientemente justificada, ya que dice que sus ángulos son agudos, y los ángulos agudos miden menos de 90°, mientras que los del triángulo equilátero miden 60°. Está dando a entender que los ángulos de un triángulo equilátero son agudos y no necesariamente iguales, lo cual es incorrecto.

Figura 29. Respuesta a la pregunta 4d del alumno 2A9

Pregunta 4e

En la pregunta 4e se le pide al alumno que ahora mencione que propiedades se cumplen para los triángulos acutángulos, pero no para los triángulos equiláteros. Las respuestas que se muestran se encuentran en el nivel 2 del modelo de van Hiele.

La respuesta del alumno 4A6 es de tipo 2 y no tiene una comprensión precisa de las propiedades de los triángulos acutángulos como se muestra en la Figura 30. En su respuesta, menciona erróneamente que los ángulos agudos pueden medir más de 90 grados, lo cual es incorrecto.

Figura 30. Respuesta a la pregunta 4e del alumno 4A6

La respuesta del alumno 4B4 es de tipo 6 al mencionar que los triángulos acutángulos tienen lados distintos como se muestra en la Figura 31. Esta respuesta es incorrecta ya que no tiene claras las propiedades de los triángulos acutángulos. Es importante destacar que los triángulos acutángulos son aquellos que tienen todos sus ángulos internos agudos, es decir, que miden menos de 90 grados.

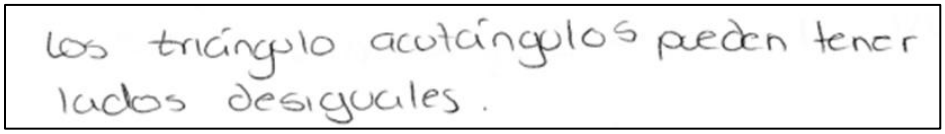


Figura 31. Respuesta a la pregunta 4e del alumno 4B4

La respuesta del alumno 2A10 es de tipo 3 al mencionar que los ángulos de los triángulos acutángulos son menores de 90 grados, lo cual es correcto como se muestra en la Figura 32. Sin embargo, su respuesta es incompleta al no mencionar que los ángulos en un triángulo acutángulo deben ser distintos. Esto es una característica específica de los triángulos acutángulos.

Figura 32. Respuesta a la pregunta 4e del alumno 2A10

Pregunta 5

Para la pregunta 5, se les pide a los alumnos que observen la figura, que digan cuál es el triángulo de mayor área y que justificaran su respuesta. En esta pregunta los alumnos alcanzan solo el nivel 1 en el modelo de van Hiele.

La respuesta del alumno 4A7 es de tipo 3 al encerrar correctamente el triángulo que tiene la mayor área. Sin embargo, su respuesta es incipiente, ya que no proporciona una justificación o explicación para respaldar su elección como se muestra en la Figura 33.

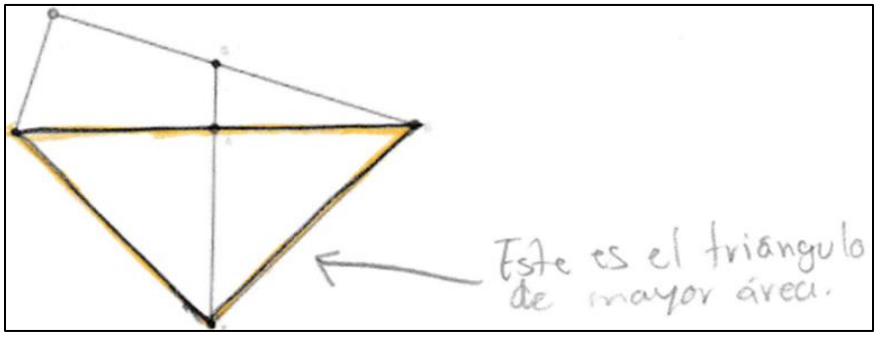


Figura 33. Respuesta a la pregunta 4e del alumno 2A10

El alumno 2B2 muestra un nivel de razonamiento tipo 2 en su respuesta. Su elección del triángulo de mayor área es incorrecta, ya que se basa en el espacio de la base, lo cual no es una justificación válida para determinar el área de un triángulo como se muestra en la Figura 34. Además, al dibujar los triángulos 2 y 3, no logra reconocer al triángulo que los contiene y que ese es el de mayor área.

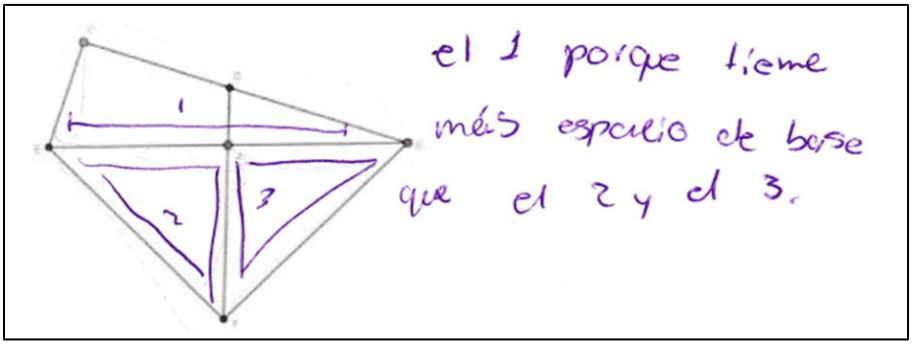


Figura 34. Respuesta a la pregunta 4e del alumno 2A10

La respuesta del alumno 6B4 es de tipo 7. El alumno ha encerrado el triángulo que considera el de mayor área, lo cual es correcto. Sin embargo, su justificación se limita a mencionar que este triángulo ocupa la mayor área, sin mencionar ninguna otra propiedad adicional como se muestra en la Figura 35.

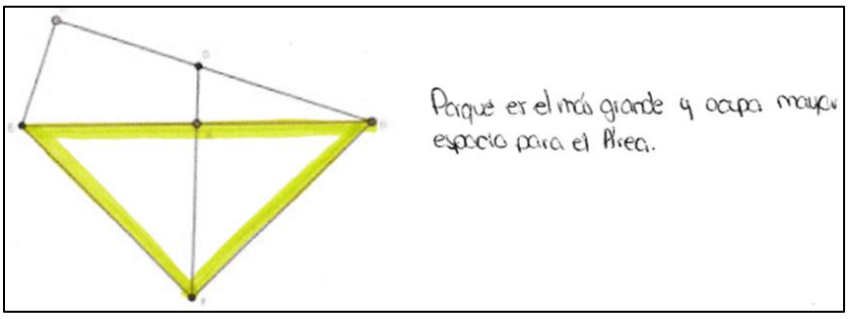


Figura 35. Respuesta a la pregunta 4e del alumno 2A10

Capítulo 4. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado el método de Gutiérrez y Jaime (1991) para evaluar los niveles de Van Hiele del pensamiento de los estudiantes basado en una interpretación flexible del modelo a través de grados de adquisición. Se han mostrado algunas respuestas representativas en la parte cuantitativa y en la parte cualitativa de los alumnos con respecto a los niveles para que se pueda identificar las características de los niveles de razonamiento.

La forma en cómo se evaluaron los niveles de pensamiento dada en esta tesis permite la posibilidad de identificar dos niveles de razonamiento consecutivos en un alumno. Algo que se verificó de manera clara es que en todos los alumnos la adquisición del nivel inferior fue más completa que la del nivel superior.

Se observa que la mayoría de los alumnos pueden manipular la presencia de dos niveles consecutivos, teniendo una buena adquisición. No se encuentra ninguna contradicción con la estructura jerárquica de los niveles.

De los resultados se puede concluir que la mayoría de los estudiantes ha respondido el cuestionario utilizando un razonamiento propio de los niveles 1 y 2 de Van Hiele. Esto significa que, los que presentaron un nivel 1 de razonamiento, usan únicamente la percepción o lo susceptible para diferenciar los tipos de figuras. Estos alumnos no tienen una definición clara y precisa de los conceptos ángulo y triángulo, puesto que no pueden diferenciar entre lados conformados por segmentos de rectas y los formados por segmentos de líneas curvas.

Los que presentaron un nivel 2 usan definiciones básicas o aplican algunos conceptos que tienen claros, como son los ángulos y triángulos, aquí ya distinguen que estos son conformados por líneas rectas. A veces, los estudiantes pueden tener dificultades para expresar completamente sus ideas o pueden tener problemas para encontrar las palabras adecuadas para describir un concepto.

Aunque es importante que el alumno pueda identificar visualmente y clasificar correctamente los triángulos como equilátero, isósceles y escaleno, es importante fomentar el desarrollo de habilidades de justificación y razonamiento más allá de la clasificación visual.

En la pregunta 5, que requiere identificar el triángulo de mayor área, es relevante que los alumnos no solo den la respuesta correcta, sino que también justifiquen su elección. Esto implica proporcionar una razón lógica o utilizar algún método de cálculo para respaldar su respuesta.

En Hernández et al. (2021) se observó que el lenguaje usado por cada estudiante está relacionado con su nivel de razonamiento. Puesto que, a mayor nivel, el lenguaje usado es más formal y mejor estructurado, también es más rico en el uso de definiciones y conceptos geométricos, ya que los alumnos tienen claros estos conceptos y les es fácil manipularlos. Esta coincide con lo descrito por Van Hiele.

Como una consecuencia de este trabajo se deduce la necesidad de diseñar actividades para el tema de ángulos y triángulos que favorezcan el tránsito del nivel 2 al nivel 3. Los resultados de esta tesis coinciden con los del estudio previo ya mencionado.

Una de las aportaciones de esta tesis es que el método de Gutiérrez y Jaime (1991) más que ser útil para preguntas abiertas, este sirve para pruebas de varias preguntas, y no solo eso, también es adecuado para un número grande de alumnos. Cabe mencionar, que en esta tesis se obtuvo que los estudiantes participantes, de nivel medio superior, dominan el primer nivel de Van Hiele, y en el 2º nivel están en transición. Es importante que los alumnos refuercen su proceso de razonamiento y trabajen en desarrollar una comprensión más profunda de las propiedades de los ángulos. Esto debe incluir la capacidad de explicar y justificar sus respuestas.

Referencias

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 31-48.

Clements, DH y Burns, BA (2000). Desarrollo de estrategias por parte de los estudiantes para la medición de giros y ángulos. *Estudios Educativos en Matemáticas, 41* (1), 31-45.

Fouz, F., & De Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. *Un paseo por la geometría*, *16*, 67-81.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1984). English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele. (Brooklyn College, New York).

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *3*, i-196.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics education*, *22*(3), 237-251.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on learning problems in mathematics*, *20*, 27-46.

Hernandez, L., Molina, I. & Reinoso, J. (2021*). Estudio de la comprensión de ángulos y triángulos de estudiantes de preparatoria según el Modelo de Van Hiele.* En Macías y Herrera (Ed). Matemáticas y sus aplicaciones 16, Cap.3, 77-104. Editorial BUAP.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 58-69.

Pastor, A. J. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (Tesis de doctorado). Universitat de Valencia (Spain).

Pastor, A. J., & Rodríguez, Á. G. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. In *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Alfar.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. The University of Chicago (ERIC Document Reproduction Service No. ED 220 288).

Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia, 27*(1), 74-94.

Anexo 1

En este anexo se agregan las tablas de las ponderaciones de todos los alumnos por grupo, de los cuales se seleccionaron algunos para mostrar en los resultados cualitativos.

		Alumnos																		
		2A1	2A2	2A3	2A4	2A5	2A6	2A7	2A8	2A9	2A10	2A11	2A12	2A13	2A14	2A15	2A16	2A17	2A18	2A19
Preguntas																				
1a	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Tipo (t)	3	3	3	2	4	2	2	2	4	2	2	2	2	3	2	2	2	2	3
1b	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Tipo (t)	3	3	3	2	4	2	2	2	4	2	2	2	2	3	2	2	4	2	3
2	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Tipo (t)	4	4	4	1	2	2	1	1	1	1	1	1	4	1	1	1	2	1	2
3a	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Tipo (t)	7	7	4	6	3	6	3	6	7	6	6	6	3	6	3	6	3	4	7
3b	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	Tipo (t)	7	7	6	6	3	6	3	6	7	6	6	6	3	6	3	6	3	6	7
4a	Nivel (n)	2	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	1	2	2		1	1	1	2
	Tipo (t)	7	7	7	4	7	7	4	6	7	2	2	7	7	4	0	6	6	2	7
4b	Nivel (n)	2	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1		1	1	2
	Tipo (t)	7	7	7	7	7	7	3	2	7	7	2	7	7	7	2	0	7	2	7
4c	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	2	2	2	1		1	1	2
	Tipo (t)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2	0	2	2	3
4d	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	*	2	2	2	2	2	2	2	2		1	2	1
	Tipo (t)	2	2	2	3	3	3	0	2	2	3	7	7	7	3	1	0	2	3	2
4e	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	*	2	2	2	2	2	2	2	2		1	1	2
	Tipo (t)	2	2	2	3	3	7	0	3	3	7	3	7	7	3	2	0	2	2	7
5	Nivel (n)	1	1	1		1	1		1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Tipo (t)	3	3	6	0	2	2	0	3	3	0	3	3	3	3	2	1	2	6	2

			Alumnos															
			2B1	2B2	2B3	2B4	2B5	2B6	2B7	2B8	2B9	2B10	2B11	2B12	2B13	2B14	2B15	2B16	2B17
Preguntas	1a	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	2	3	3	2	3	2	2	2	2	2	1	1	1	3	3	2	3
	1b	Nivel (n)	1	1	2	2	2	2	2	2		2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	3	3	3	2	2	2	2	2	0	2	1	1	1	3	3	2	3
	2	Nivel (n)	2	2	2	2	2		2	2	2	2	2	2		2	2	2	2
		Tipo (t)	3	2	3	3	3	0	1	1	1	2	1	1	0	1	3	1	3
	3a	Nivel (n)	2	2		2	2		2	2	2	2	2	2		2	2	2	2
		Tipo (t)	6	6	0	7	6	0	7	2	3	3	7	2	0	2	3	2	7
	3b	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2		2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	6	6	3	7	6	7	7	2	0	3	7	2	3	3	3	2	7
	4a	Nivel (n)	1	2	2	2	1	2		2		1			1	2	2	2	2
		Tipo (t)	3	6	6	7	2	7	0	7	0	2	0	0	3	6	7	3	6
	4b	Nivel (n)	2	2	2	2	1	1	1			2	1		1	2	2	2	2
		Tipo (t)	7	2	2	7	3	3	2	0	0	2	2	0	3	3	7	3	7
	4c	Nivel (n)	2	2	2	2	2	1	2	1		2	1		1		2	2	2
		Tipo (t)	2	2	2	7	2	2	2	2	0	2	2	0	2	0	6	2	6
	4d	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	1		2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	6	6	2	7	2	6	2	1	0	2	2	7	2	7	7	2	7
	4e	Nivel (n)	2	2	2	2	1	2	2	1		2	2	2	2		2	2	2
		Tipo (t)	6	2	2	7	1	6	2	1	0	2	2	7	2	0	2	2	7
	5	Nivel (n)	1	1	1	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1
		Tipo (t)	3	2	1	2	1	3	3	3	0	0	0	2	3	2	3	2	3

			Alumnos															
			4A1	4A2	4A3	4A4	4A5	4A6	4A7	4A8	4A9	4A10	4A11	4A12	4A13	4A14	4A15	4A16
Preguntas		Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	1a	Tipo (t)	2	2	3	2	3	2	2	2	3	2	2	2	2	2	3	3
		Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	1b	Tipo (t)	2	2	3	2	3	2	2	2	3	2	3	2	2	2	3	3
		Nivel (n)	2	2	2	2			2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	2	Tipo (t)	1	3	2	2	0	0	3	1	3	3	3	3	1	1	3	2
		Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	3a	Tipo (t)	3	3	2	3	7	2	7	3	3	3	3	2	2	3	7	3
		Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2		2	2	2	2	2	2	2	2
	3b	Tipo (t)	3	7	7	3	6	7	6	0	3	2	3	6	2	3	7	7
		Nivel (n)	2	1	1	2	2	2	2	1	2	2	1	2	1	2	2	1
	4a	Tipo (t)	7	2	7	7	7	7	7	7	7	7	7	2	2	7	7	2
		Nivel (n)	2	1	2	2	2	2	2		2	2	1	2	2	1	2	1
	4b	Tipo (t)	7	2	7	7	7	7	7	0	7	2	7	6	6	2	7	2
		Nivel (n)	2	1	2	2	2	2	2		2	2	1	2		1	2	1
	4c	Tipo (t)	6	3	3	3	2	3	3	0	2	2	2	2	0	3	6	2
		Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2		2	2	2	2	2	2	2	1
	4d	Tipo (t)	2	2	7	7	7	7	7	0	7	7	7	2	7	7	2	7
		Nivel (n)	2	2	2	2	2	2			2	2	2		2	2	2	1
	4e	Tipo (t)	2	2	2	7	2	2	0	0	7	7	7	0	2	2	2	2
		Nivel (n)	1	2	1	1	1	1	1		1	1	1		1	1	1	1
	5	Tipo (t)	2	3	2	2	3	2	3	0	3	3	3	0	3	3	3	2

			Alumnos														
			4B1	4B2	4B3	4B4	4B5	4B6	4B7	4B8	4B9	4B10	4B11	4B12	4B13	4B14	4B15
Preguntas	1a	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	6	2	2	4	2	4	6	7	4	7	2	2	6	2	2
	1b	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	6	2	2	4	2	4	6	7	4	7	6	4	2	2	2
	2	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	1	2	2	6	1	2	2	2	2	6	2	6	2	2	2
	3a	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
	3b	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	3	3	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
	4a	Nivel (n)	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1
		Tipo (t)	2	3	2	7	7	7	3	3	3	7	7	3	7	2	2
	4b	Nivel (n)	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2		2	1	1
		Tipo (t)	1	1	2	7	1	7	7	3	3	7	7	0	7	7	7
	4c	Nivel (n)	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2		2	1	1
		Tipo (t)	2	2	2	7	2	7	2	2	2	6	6	0	7	2	2
	4d	Nivel (n)	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2		2	2	2
		Tipo (t)	2	2	7	7	7	2	7	7	7	7	7	0	7	7	2
	4e	Nivel (n)	2	1	1	2	2	2	2	1	2	2	2		2	1	2
		Tipo (t)	2	2	2	7	2	2	7	7	7	7	7	0	2	7	7
	5	Nivel (n)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		Tipo (t)	3	2	2	3	2	3	3	3	2	3	2	7	7	7	3

			Alumnos													
			6A1	6A2	6A3	6A4	6A5	6A6	6A7	6A8	6A9	6A10	6A11	6A12	6A13	6A14
Preguntas		Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	1a	Tipo (t)	2	3	2	3	6	6	2	4	2	3	6	4	4	6
		Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	1b	Tipo (t)	2	3	3	3	6	6	2	4	2	3	6	4	2	6
		Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	2	Tipo (t)	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	3a	Tipo (t)	7	7	7	7	7	7	7	7	6	7	7	6	6	6
		Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	3b	Tipo (t)	7	7	7	7	7	7	7	7	6	7	7	7	6	6
		Nivel (n)	2	1		1	2	2	2	1	2	2	1	2	2	2
	4a	Tipo (t)	7	7	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	2	6
		Nivel (n)	2	1		1	2	2	2	1	2	2	1	2	2	2
	4b	Tipo (t)	7	7	0	7	7	7	7	7	7	7	2	7	7	3
		Nivel (n)	2	2		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	4c	Tipo (t)	3	3	0	3	6	3	2	3	2	3	2	6	6	3
		Nivel (n)	2	2	2		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	4d	Tipo (t)	2	7	7	0	7	7	2	7	6	7	2	7	6	6
		Nivel (n)	2	2	2		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	4e	Tipo (t)	2	2	2	0	7	7	2	3	2	3	3	7	3	3
		Nivel (n)	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	5	Tipo (t)	2	3	7	0	7	7	3	3	6	7	3	6	3	6

			Alumnos											
			6B1	6B2	6B3	6B4	6B5	6B6	6B7	6B8	6B9	6B10	6B11	6B12
Preguntas	1a	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	2	2	6	6	4	4	4	6	6	4	6	2
	1b	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	2	2	6	6	4	4	4	6	6	4	6	2
	2	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	3a	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	7	7	7	7	6	7	6	7	7	7	4	4
	3b	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	7	7	7	7	6	7	6	7	7	7	4	7
	4a	Nivel (n)	2	2	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2
		Tipo (t)	2	7	2	7	4	7	4	7	7	7	7	7
	4b	Nivel (n)	2	2	2	2		2		2	2	2	2	2
		Tipo (t)	2	7	2	7	0	6	0	6	7	7	2	6
	4c	Nivel (n)	2	2	2	2	2	2		2	2	2	2	2
		Tipo (t)	2	7	2	7	2	6	0	7	7	6	2	2
	4d	Nivel (n)	2	2		2	1	2		2	2		2	2
		Tipo (t)	7	7	0	7	2	7	0	7	7	0	6	7
	4e	Nivel (n)	2	2		2		2		2	2		2	2
		Tipo (t)	2	4	0	7	0	2	0	6	4	0	6	6
	5	Nivel (n)	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1
		Tipo (t)	7	3	3	7	2	7	0	7	7	3	3	2

Anexo 2

En esta sección se agregan las tablas de cómo es que respondieron los alumnos y con qué frecuencia por grupo.

2A												
					19 alumnos							
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	
1,1											1	
1,2						3	5	8	2	2	5	
1,3											8	
1,6						4					2	
1,7						3	7					
2,1			11									
2,2	13	12	5					7	5	3		
2,3	4	4		6	6		1	3	7	6		
2,4	2	3	3	2		3						
2,6				8	10							
2,7				3	3	5	5		3	5		
0						1	1	1	2	3	3	

2B												
					17 alumnos							
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	
1,1									1		2	
1,2						2	2	4		2	5	
1,3			2			2	3				7	
2,1	3	3	7									
2,2	8	7	2	4	3		3	7	8	8		
2,3	5	4	6	3	5	1	2					
2,4	1											
2,6				3	3	4		2	2	2		
2,7				4	5	4	4	1	5	3		
0		1	2	3	1	4	3	3	1	2	3	

4A												
					16 alumnos							
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5	
1,2						3	3	2		1	5	
1,3								2			8	
1,7						3	1		1			
2,1			4									
2,2	11	10	3	4	2	1	1	4	4	8		
2,3	5	6	7	9	5			4			1	
2,6					3		2	2				
2,7				3	5	9	8		10	4		
0			2		1		1	2	1	3	2	

4B											
					15 alumnos						
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
1,2						3	1	3	1	2	5
1,3											7
1,7							2			2	3
2,1			2				3				
2,2	7	6	10			1		6		4	
2,3				2	3	5	2	3	3		
2,4	3	4									
2,6	3	3	3					2			
2,7	2	2		13	12	6	6		10	6	
0							1	1	1	1	

6A											
					14 alumnos						
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
1,2							1				1
1,3											5
1,6											3
1,7						4	3				4
2,1			4								
2,2	4	4	10			1		3	3	5	
2,3	3	4					1	7		5	
2,4	3	2									
2,6	4	4		4	3	1		3	3		
2,7				10	11	7	8		7	3	
0						1	1	1	1	1	1

6B											
					12 alumnos						
	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
1,2									1		2
1,3											4
1,4						2					
1,7											5
2,1			12								
2,2	3	3					3	5		2	
2,3											
2,4	4	4		2	1					2	
2,6	5	5		2	2	2	3	2	1	3	
2,7				8	9	8	4	4	7	1	
0							2	1	3	4	1

Aquí se encuentra la tabla general, de los alumnos como fueron contestando, de acuerdo a su ponderación de tipo de respuesta y el nivel, es decir el vector (N, t).

	1a	1b	2	3a	3b	4a	4b	4c	4d	4e	5
1,1										1	3
1,2							11	12	17	4	7	23
1,3			2				2	3	2			39
1,4							2					
1,6							4					5
1,7							10	13		1	2	12
2,1	3	3	40					3				
2,2	46	42	30	8	5	3	7	32	20	30		
2,3	17	18	13	20	19	6	6	17	10	11	1	
2,4	13	13	3	4	1	3				2		
2,6	12	12	3	17	21	7	5	11	6	5		
2,7	2	2		41	45	39	35	5	42	22		
0		1	4	3	2	6	9	9	9	14	10	
SUMA	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93