



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Estudio del momento angular de la luz en haces paraxiales

Tesis presentada al

**Posgrado en Ciencias Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS  
(FÍSICA APLICADA)**

por

Marco Antonio García Márquez

Asesorado por

Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla Pue.  
Julio de 2023





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Estudio del momento angular de la luz en haces paraxiales

Tesis presentada al

**Posgrado en Ciencias Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS  
(FÍSICA APLICADA)**

por

Marco Antonio García Márquez

Asesorado por

Maximino Luis Arroyo Carrasco

Puebla Pue.  
Julio de 2023



**Título:** Estudio del momento angular de la luz en haces paraxiales  
**Estudiante:** MARCO ANTONIO GARCÍA MÁRQUEZ

COMITÉ

---

Marcela Maribel Méndez Otero  
(FCFM-BUAP)  
Presidente

---

Gilberto Silva Ortigoza  
(FCFM-BUAP)  
Secretario

---

Miguel Ángel Olvera Santamaría  
(FCFM-BUAP)  
Vocal

---

Héctor Manuel Moya Cessa  
(INAOE)  
Suplente

---

Maximino Luis Arroyo Carrasco  
Asesor



# Agradecimientos

Gracias a ustedes, las personas a las que más quiero en este mundo, mi familia, por apoyarme a su manera mientras yo realizaba este trabajo de tesis. A ti mamá, porque me has dado el ejemplo de no rendirme nunca sin importar lo que ocurra, a ti papá, por ayudarme a ser más fuerte ante las adversidades, a ti Marcos por las pláticas que me ayudaban a distraerme un rato y que me quitaban el estrés de encima, a ti Iván, por tu gran ayuda al recordarme conceptos que ya tenía olvidados y gracias también por aquel atinado comentario que hacías, y que me motivaba, cuando andaba distraído, “la tesis no se va a hacer sola” y gracias a ti Lorena, por andar con el pendiente de saber cómo va mi tesis. En verdad que les agradezco muchísimo.

Gracias a usted, Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco, por su asesoramiento, su tiempo y conocimiento, que fueron muy útiles para la realización de este trabajo de tesis, y no solo eso, gracias también por su amistad, los consejos, recomendaciones y las pláticas en el café, muchas gracias por todo.

Gracias a los miembros del comité por aceptar la labor de revisar y evaluar este trabajo de tesis y por los consejos y recomendaciones hechas.

Gracias a todos mis amigos por levantarme los ánimos en aquellos momentos de estrés, Bogart R., Dettle M., Daniel L., Eilitia J., por el apoyo y por las veces que jugábamos para pasar el rato, especialmente gracias a ti, Lic. en Física Ricardo Arturo Torreblanca Bautista, por ser un gran amigo, por la ayuda que me has brindado y por aquellas grandes partidas de ajedrez que tuvimos. Gracias a ti Eduardo C. por tu valiosa amistad. También doy gracias a los amigos que hice durante la Maestría, “los reales”, Jonathan R., Cesar R. y Josue M., por aquellas salidas inolvidables en Zacatecas. Te agradezco también a ti, Daniela C., por tu gran amistad y por las divertidas charlas que tuvimos.

Y, por último, gracias a CONACYT, por el apoyo económico brindado que me permitió llevar a cabo este trabajo.

Muchas gracias a todos ustedes, quienes de una u otra manera me ayudaron a salir adelante.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Resumen</b>	<b>ix</b>
<b>Introducción</b>	<b>xi</b>
<b>1. Marco teórico</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuación de onda . . . . .	1
1.1.1. Ecuación de Helmholtz . . . . .	2
1.2. Haz Bessel . . . . .	3
1.3. Ecuación paraxial de Helmholtz . . . . .	3
1.3.1. Haz Gaussiano . . . . .	4
1.3.2. Haz Laguerre-Gauss . . . . .	5
1.4. Ondas electromagnéticas . . . . .	7
1.4.1. Polarización de la luz . . . . .	7
1.5. Leyes de conservación . . . . .	8
1.5.1. Conservación de la energía . . . . .	8
1.5.2. Momento lineal de un campo electromagnético . . . . .	9
<b>2. Momento angular de la luz</b>	<b>11</b>
2.1. Experimento de la detección mecánica del momento angular de la luz . . . . .	11
2.2. Momento angular de un campo electromagnético . . . . .	18
2.3. Momento angular orbital y de espín . . . . .	19
2.3.1. Momento angular de ondas monocromáticas . . . . .	20
2.4. Momento angular de una onda plana de extensión finita . . . . .	21
<b>3. Descripción vectorial de los haces paraxiales</b>	<b>25</b>
3.1. Introducción . . . . .	25
3.2. Potenciales vectorial y escalar . . . . .	26
3.3. Campos eléctrico y magnético de los haces paraxiales . . . . .	27
3.3.1. Campo eléctrico y magnético del haz Gaussiano . . . . .	29
3.3.2. Campo eléctrico y magnético del haz Laguerre-Gauss . . . . .	30
3.4. Campo eléctrico y magnético del haz Bessel . . . . .	30
<b>4. Momento angular en haces paraxiales</b>	<b>35</b>
4.1. Momento lineal de un haz paraxial . . . . .	35
4.1.1. Momento lineal del haz Laguerre-Gauss . . . . .	37
4.1.2. Momento lineal del haz Gaussiano . . . . .	39
4.2. Momento angular de los haces paraxiales . . . . .	40
4.2.1. Momento angular del haz Laguerre-Gauss . . . . .	40
4.2.2. Momento angular del haz Gaussiano . . . . .	42

4.3. Momento angular del haz Bessel . . . . .	43
<b>5. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>A. Promedio temporal de la densidad de energía, momento lineal y vector de Poynting</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>

# Resumen

Clásicamente la luz es considerada como ondas electromagnéticas, es decir, campos eléctricos y magnéticos acoplados entre sí, que oscilan en el tiempo y se propagan en el espacio. Dicha radiación electromagnética posee momento lineal, momento angular, transporta energía y es capaz de transferir estas magnitudes físicas a la materia al interactuar con ella. Desde una perspectiva cuántica la luz consiste de partículas sin masa, llamadas fotones, cuyas propiedades físicas están cuantizadas, las magnitudes físicas clásicas pueden ser interpretadas a partir del comportamiento promedio de un gran número de fotones. Entre las propiedades físicas de la luz, de particular interés es el estudio del momento angular óptico. Una onda electromagnética posee momento angular por dos razones; ya sea que el vector de polarización de la onda gire alrededor de su eje al propagarse, o bien sean los frentes de onda los que lo hagan. De esta manera, es posible separar el momento angular en dos contribuciones, un momento angular de espín (SAM), que surge de la naturaleza intrínseca del fotón y se manifiesta mediante la polarización de un haz y un momento angular orbital (OAM), relacionado con la distribución espacial del campo y los frentes de onda. En este trabajo de tesis se estudia la teoría que explica el momento angular óptico, su separación en las contribuciones SAM y OAM, para aplicarlo en la descripción de su comportamiento en diferentes distribuciones de ondas electromagnéticas, incluidos algunos haces paraxiales como los haces Gaussianos, Bessel y Laguerre-Gauss.



# Introducción

Los fenómenos naturales han estado presentes desde el inicio del universo. El ser humano, a partir de la ciencia, ha buscado desarrollar leyes que describan estos fenómenos con el objetivo de entenderlos y de poseer un conocimiento más profundo de ellos para poder realizar predicciones, controlarlos y aprovecharlos en beneficio de la humanidad. Dentro de las ciencias, la física es la encargada del estudio de la materia y sus constituyentes, del tiempo, el espacio, la energía, las fuerzas y las interacciones fundamentales a escalas que van desde tamaños tan grandes como el tamaño del universo mismo hasta escalas tan pequeñas como el de partículas subatómicas. El estudio de los fenómenos físicos relacionados con la luz, es decir, los fenómenos ópticos, ha resultado ser importante para el desarrollo científico y tecnológico y de entre las ramas de la física, la óptica es la que estudia las propiedades y comportamiento de la luz, lo que involucra su generación, propagación y detección, incluida también la interacción de la luz con la materia. Desde los inicios de la óptica, la luz fue descrita como rayos que viajan a través de distintos medios siguiendo un conjunto de reglas geométricas [1] y, aunque este enfoque, conocido como óptica geométrica, describe correctamente algunos fenómenos ópticos como la reflexión y refracción de la luz, existen otros fenómenos ópticos que no son descritos adecuadamente, como los fenómenos de interferencia o la difracción, un fenómeno físico en el que la luz se desvía alrededor de los bordes de un obstáculo. Debido a ello, la descripción física de la luz evolucionó a la denominada óptica física u óptica ondulatoria donde la luz es considerada como un fenómeno ondulatorio descrito mediante una función escalar, llamada función de onda, que satisface la ecuación de onda [1]. Sin embargo, esta descripción de la luz, a pesar de poder dilucidar la difracción de la luz, no es capaz de explicar algunos fenómenos que requieren una formulación vectorial como, por ejemplo, la cantidad de luz reflejada y transmitida en un medio ya que dependen del estado de polarización de la luz que incide sobre ellos, requiriéndose así una descripción vectorial de la luz que viene dada por la óptica electromagnética la cual describe a la luz como ondas electromagnéticas, es decir, ondas eléctricas y magnéticas acopladas entre sí que varían en el tiempo y en el espacio, que están caracterizadas por cierta dirección de oscilación, cierta frecuencia o longitud de onda y que son capaces de poseer propiedades mecánicas como la de transportar energía, momento lineal y, en particular, momento angular, una magnitud física que cuantifica la rotación de los campos electromagnéticos que conforman a la luz.

Uno de los primeros trabajos sobre momento angular óptico es de Sadowsky [2], quien calculó el torque que un haz de luz polarizado debería ejercer sobre un medio birrefringente. En 1909 Poynting [3], anticipó mediante una analogía mecánica que la luz circularmente polarizada debería ejercer un torque sobre una placa retardadora debido al cambio del estado de polarización de la luz. Años más tarde, en 1936, Richard A. Beth [4], observó y midió tal transferencia de momento angular, verificando que cada fotón de luz polarizada circularmente a derechas o izquierdas posee un momento angular de  $\pm\hbar$ . A pesar de este hecho, desde al menos 1950 se ha encontrado que en las transiciones atómicas, cuando se emite un fotón, se requiere que este fotón posea un momento angular de  $\hbar$  para el caso de las transiciones dipolares mientras que en las transiciones cuadrupolares o de más alto orden se requiere que el fotón emitido posea múltiples unidades de  $\hbar$  de momento angular [5], pero este momento angular adicional, el cual no fue identificado sino hasta años más tarde, se consideró como un momento lineal desplazado que actúa sobre un radio vector [6].

En 1992, Allen y colaboradores [7], notaron que los haces de luz con frentes de onda helicoidal, es decir, haces cuya fase es de la forma  $\exp[i l \phi]$ , donde  $\phi$  es la coordenada azimutal y  $l$  es un número entero, poseían un momento angular, conocido como momento angular orbital (OAM por sus siglas en inglés) con valor de  $l\hbar$  por fotón, y que era distinto al momento angular observado por Beth en su experimento, el cual se definió como momento angular de espín (SAM por sus siglas en inglés) pues surge de la naturaleza intrínseca del fotón, con un valor de  $\sigma\hbar$  para cada fotón, donde  $\sigma$  describe el grado de polarización del haz. La idea de que estos haces poseen momento angular orbital [8] tiene sus orígenes en las singularidades de fase, es decir, puntos donde la fase del campo no se encuentra definida y que están relacionados con los frentes de onda helicoidales. De acuerdo con Barnett y colaboradores [8], una comparación entre la expresión del vector de Poynting en la aproximación eikonal con la ecuación para la densidad de momento lineal de un superfluido sugirió que los haces con frentes de onda helicoidales, como es el caso del haz Laguerre-Gauss [1], se les pueda asociar un momento angular en su dirección de propagación ya que en la teoría de superfluidos se encuentra, a partir de la densidad de momento lineal, que a cada cuanto de un superfluido descrito por una función de onda con una fase de la forma  $\exp[i l \phi]$  se le puede asociar un momento angular orbital de  $l\hbar$ . Esta analogía dio lugar a la idea de que los haces con frentes de onda helicoidal deban poseer momento angular orbital.

A partir de las ecuaciones de Maxwell se obtiene la expresión para la densidad de momento angular  $\vec{j}$  de una onda electromagnética [5], dada por  $\vec{j} = \vec{r} \times \vec{p}$  donde  $\vec{p} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$  es la densidad de momento lineal de la onda,  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son los campos eléctrico y magnético respectivamente y  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío. Integrando al vector  $\vec{j}$  sobre el espacio donde está definida la onda electromagnética se halla el momento angular total que la onda es capaz de transportar. Este momento angular total puede ser escrito como la suma de dos contribuciones [9], la orbital y la de espín, siendo esta separación un tema de análisis y de estudio [10].

La densidad de momento lineal  $\vec{p}$  para una onda plana transversal propagándose en el vacío es paralela a la dirección de propagación del haz, digamos  $z$ , por lo que al realizar el producto vectorial con  $\vec{r}$  no habrá ninguna contribución de momento angular en la dirección  $z$  sin importar si la onda esta circularmente polarizada o no, en consecuencia, tal onda de luz no tendrá un momento angular para transferir, por ejemplo, a una placa retardadora de ondas cuando la luz incide perpendicularmente a su superficie, sin embargo, Beth [4] pudo calcular y medir tal transferencia. Esta aparente contradicción surge de considerar una onda plana de extensión infinita. Los haces reales están limitados en extensión por sí mismos o por el sistema óptico en el que inciden, es esta apertura finita la que da lugar a una componente del campo eléctrico y magnético a lo largo de la dirección de propagación y, en consecuencia, a un momento angular en la dirección  $z$ . De acuerdo con Simmons y Guttman [11], el borde de la apertura crea un gran gradiente de intensidad que da lugar a una densidad de momento angular acorde a [12]. De esta manera cada campo de iluminación con cierta distribución de intensidad tendrá cierto comportamiento en su momento angular local, el cual buscamos estudiar y describir, al menos para ondas planas, haces Gaussianos, Bessel y los modos Laguerre-Gauss. Además, es de esperar que al promediar el momento angular del haz obtengamos un valor de  $l\hbar$  y  $\sigma\hbar$  por fotón para la contribución orbital y de espín respectivamente.

Entender el momento angular de la luz ha conducido al desarrollo de aplicaciones en diversas áreas de la ciencia. Cuando un haz de luz posee momento angular puede transferirlo a la materia, por ejemplo, a pequeñas partículas micrométricas o nanométricas, causándoles un movimiento de rotación o de giro alrededor del eje de propagación del haz [13, 14, 15]. Esto último ha conducido a la manipulación orientativa de partículas en pinzas ópticas y al transporte de micropartículas a partir de un haz de luz con momento angular [16]. Por otro lado, dentro del área de telecomunicaciones, se ha buscado enviar información a partir de los modos del momento angular orbital [17], e incluso se ha pensado en aplicaciones dentro del área de la astrofísica [18].

En este trabajo de tesis se estudia el momento angular de la luz para ondas planas, para los haces paraxiales Gaussianos y Laguerre-Gauss y los haces Bessel en su límite paraxial. Además, se explica la separación de su momento angular en los momentos angulares orbital y de espín. En el capítulo 1 se parte de la revisión de los fundamentos teóricos necesarios para abordar el

estudio del momento angular en los haces paraxiales. En la sección 1.1 se revisan las ecuaciones de Maxwell las cuales conducen a la ecuación vectorial de onda y se presenta la ecuación de Helmholtz para la descripción escalar de las ondas. En la sección 1.2 se muestran los haces Bessel que son una solución exacta de la ecuación escalar de Helmholtz en espacio libre y son invariantes en propagación. En la sección 1.3 se presenta la ecuación paraxial de Helmholtz usada para la descripción de los haces paraxiales Gaussiano y Laguerre-Gauss. En la sección 1.4 se revisan las ondas electromagnéticas monocromáticas y el concepto de polarización de una onda. Finalmente, en la sección 1.5 se revisan las leyes de conservación de la energía y momento lineal de los campos electromagnéticos que indican que la luz es capaz de almacenar y transportar energía y momento lineal, conceptos necesarios para definir el momento angular.

En el capítulo 2 se estudia el momento angular de una onda electromagnética y se muestra la relación que tiene con el momento lineal. Este capítulo parte de la revisión del primer experimento mecánico de la medición del momento angular de la luz, sección 2.1. En la sección 2.2 se obtiene la ecuación de conservación del momento angular entre campos electromagnéticos y partículas cargadas, en donde se define la densidad de momento angular de una onda electromagnética. En la sección 2.3 se muestra la separación del momento angular total en las contribuciones conocidas como momento angular orbital y momento angular de espín y se aplica para ondas electromagnéticas monocromáticas. Y en la sección 2.4 se estudia el momento angular de ondas planas circularmente polarizadas de extensión finita.

Para calcular las propiedades físicas de la luz como la energía, momento lineal y momento angular para un haz paraxial es necesario conocer las expresiones de los campos electromagnéticos que describen a estos haces por lo que en el capítulo 3 se muestra el procedimiento para obtener las expresiones vectoriales de los haces paraxiales. Este capítulo comienza con una breve discusión acerca de las componentes vectoriales de un haz, resaltando el hecho de que una onda electromagnética debe poseer componentes en la dirección de propagación para poder satisfacer la ley de Gauss eléctrica, sección 3.1. En la sección 3.2 se revisa la teoría electromagnética concerniente a los potenciales escalar y vectorial. En la sección 3.3 se obtienen los campos eléctrico y magnético para los haces paraxiales Gaussiano y Laguerre-Gauss partiendo de un potencial vectorial armónico en el tiempo cuya amplitud recuerda a la amplitud de un haz paraxial de la teoría escalar de la luz. Por último, en la sección 3.4 se muestra un tratamiento vectorial para hallar las expresiones vectoriales de las ondas electromagnéticas que describen a los haces Bessel de alto orden.

En el capítulo 4 se calcula el vector de densidad de momento lineal y angular de los haces paraxiales Gaussiano y Laguerre-Gauss. Se muestra que un haz paraxial puede poseer momento angular debido a su polarización y que también puede poseer momento angular debido a la estructura de fase del haz. En la sección 4.1 se obtiene la expresión del promedio temporal de la densidad de momento lineal de los haces paraxiales y en las subsecciones 4.1.1 y 4.1.2 se analiza el momento lineal de los haces Gaussiano y Laguerre-Gauss y se analiza la trayectoria de su vector de Poynting. En la sección 4.2 se obtienen las expresiones de la densidad de momento angular local de los haces paraxiales y se presentan los valores  $l\hbar$  y  $\sigma\hbar$  como los momentos angulares orbital y de espín por fotón de estos haces. Por último, en la sección 4.3 se obtiene la componente de densidad de momento angular en la dirección de propagación de un haz Bessel de alto orden, en el caso paraxial y no paraxial.

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo. Se presenta además un apéndice A donde se muestran las expresiones de los promedios temporales de las densidades de energía, momento lineal y vector de Poynting de las ondas electromagnéticas monocromáticas.



# Capítulo 1

## Marco teórico

Un campo electromagnético en el espacio es descrito clásicamente a partir de dos campos vectoriales dependientes de la posición y del tiempo: los campos eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ . Un tipo particular de campo electromagnético son las ondas electromagnéticas a partir de las cuales se describe a la luz. En este capítulo se presentan los conceptos teóricos fundamentales para la descripción escalar y vectorial de las ondas electromagnéticas y los fundamentos teóricos necesarios para abordar el estudio del momento angular en los haces paraxiales. En la sección 1.1 se presentan las ecuaciones de Maxwell y las ondas electromagnéticas. Se presenta además la ecuación de Helmholtz para la descripción escalar de una onda. En la sección 1.2 se muestra una solución a la ecuación de Helmholtz que describe a los haces Bessel. En la sección 1.3 se explica la ecuación paraxial de Helmholtz usada para la descripción de los haces paraxiales: el haz Gaussiano y el haz Laguerre-Gauss. En la sección 1.4 se revisan las ondas electromagnéticas monocromáticas y el concepto de polarización de una onda. Finalmente, en la sección 1.5 se presentan las leyes de conservación de la energía y momento lineal de los campos electromagnéticos.

### 1.1. Ecuación de onda

Las ecuaciones de Maxwell relacionan y describen a los campos eléctrico  $\vec{E}$ , magnético  $\vec{B}$  y a los campos de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  y de intensidad magnética  $\vec{H}$  donde estos 2 últimos incluyen la interacción de la radiación electromagnética con la materia.

En su forma diferencial las ecuaciones de Maxwell, en unidades MKS, están definidas por

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

donde  $\vec{J}$  es el vector de densidad de corriente eléctrica y  $\rho$  es la densidad de carga libre.

Las relaciones que describen los efectos de la radiación en la materia, conocidas como ecuaciones constitutivas, están dadas por

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (1.5)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}, \quad (1.6)$$

donde  $\vec{P}$  y  $\vec{M}$  son las polarizaciones eléctrica y magnética del medio respectivamente;  $\varepsilon_0$  y  $\mu_0$  son la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío respectivamente.

En el espacio libre ( $\rho = 0$ ,  $\vec{J} = 0$ ) donde  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$  y  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  las ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Aplicando el operador rotacional a la ley de Faraday (1.9), haciendo uso de la identidad vectorial  $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$  y luego de usar la ley de Gauss eléctrica (1.7) y la ley de Ampere (1.10), se concluye que el campo eléctrico debe satisfacer la ecuación vectorial de onda en el espacio libre

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.11)$$

con  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ . De manera similar se puede concluir que el campo magnético también satisface la ecuación vectorial de onda

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.12)$$

Se concluye que las componentes ( $E_x, E_y, E_z$ ) del campo eléctrico y las componentes ( $B_x, B_y, B_z$ ) del campo magnético deben satisfacer la ecuación de onda, sin embargo, estas ecuaciones no pueden ser resueltas de manera independiente ya que las componentes de los campos electromagnéticos están relacionadas mediante las ecuaciones de Maxwell.

Sea  $U(\vec{r}, t)$  una función compleja dependiente de la posición y del tiempo denominada como función de onda y que representa cualquiera de las componentes de los campos, entonces se cumplirá que

$$\nabla^2 U(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.13)$$

donde  $c$  corresponde a la velocidad de la luz en el vacío.

### 1.1.1. Ecuación de Helmholtz

Una onda monocromática es representada mediante una función de onda  $U(\vec{r}, t)$  que tiene una dependencia armónica en el tiempo con frecuencia  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  descrita por

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) \exp(i\omega t) = a(\vec{r}) \exp[i\varphi(\vec{r})] \exp(i\omega t), \quad (1.14)$$

donde  $U(\vec{r}) = a(\vec{r}) \exp[i\varphi(\vec{r})]$  es la amplitud compleja de la onda,  $a(\vec{r})$  es la amplitud y  $\varphi(\vec{r})$  es la fase que caracteriza los frentes de onda. Sustituyendo (1.14) en la ecuación de onda (1.13) se obtiene que la amplitud compleja  $U(\vec{r})$  debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial conocida como ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 U(\vec{r}) + k^2 U(\vec{r}) = 0, \quad (1.15)$$

donde  $k$  es el número de onda

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (1.16)$$

Una solución a la ecuación de Helmholtz en coordenadas rectangulares es la onda plana. Esta onda tiene la siguiente amplitud compleja

$$U(\vec{r}) = A \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (1.17)$$

donde  $A$  es una constante compleja y  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  es el vector de onda con  $|\vec{k}| = k$ . En particular, para una onda plana propagándose en la dirección  $z$  se tendrá

$$U(\vec{r}) = A \exp(-ikz). \quad (1.18)$$

Una solución a la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas es la onda esférica cuya amplitud compleja es

$$U(\vec{r}) = \frac{A}{r} \exp(-ikr), \quad (1.19)$$

donde  $r$  es la distancia radial medida desde el origen.

## 1.2. Haz Bessel

Un haz Bessel es un haz sin difracción solución de la ecuación de Helmholtz (1.15) expresada en coordenadas cilíndricas, cuya amplitud compleja está dada por [1]:

$$U_l(\vec{r}) = A_l J_l(k_T \rho) \exp[-ik_z z - il\phi], \quad (1.20)$$

donde  $A_l$  es una constante,  $J_l(x)$  es la función de Bessel de primera especie de orden  $l$ , con  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  y las cantidades  $k_T$  y  $k_z$  representan las componentes transversal y longitudinal de vectores de onda que se encuentran en la superficie de un cono, y definen la familia de ondas planas que dan origen a los haces Bessel y cumplen que  $k_T^2 + k_z^2 = k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$ .

La distribución de intensidad de este haz está dada por

$$I_l(\rho) = |A_l|^2 [J_l(k_T \rho)]^2, \quad (1.21)$$

la cual es independiente de la coordenada  $z$  por lo que el perfil de intensidad será el mismo al propagarse el haz en el espacio libre.

## 1.3. Ecuación paraxial de Helmholtz

Los haces paraxiales son una clase particular de ondas obtenidas mediante la modulación lentamente variable de la amplitud de una onda plana propagándose en la dirección  $z$ . Tienen la característica de que los vectores normales a sus frentes de onda son rayos paraxiales, es decir, que hacen pequeños ángulos con el eje de propagación  $z$ .

La amplitud compleja que describe a los haces paraxiales es

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp(-ikz), \quad (1.22)$$

donde  $A(\vec{r})$ , denominada como envolvente compleja, es una función cuya dependencia en la coordenada  $z$  es lentamente variable dentro de la distancia de una longitud de onda y también respecto de variaciones transversales debido a la extensión finita del haz, es decir,  $A(\vec{r})$  cumple con la aproximación de envolvente lentamente variable (SVEA, por sus siglas en inglés) y matemáticamente debe cumplir que [1, 19]

$$\left| \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} \right| \ll |2kA(\vec{r})|, \quad (1.23)$$

$$\left| \frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} \right|, \quad (1.24)$$

$$\left| \frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial y^2} \right|. \quad (1.25)$$

Para la amplitud compleja (1.22) la ecuación de Helmholtz es

$$\frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A(\vec{r})}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} = 0, \quad (1.26)$$

y haciendo uso de la desigualdad (1.24) se obtiene que la envolvente compleja  $A(\vec{r})$  debe satisfacer la ecuación

$$\nabla_T^2 A(\vec{r}) - i2k \frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z} = 0, \quad (1.27)$$

conocida como **ecuación paraxial de Helmholtz** donde  $\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  es el operador Laplaciano transversal. Por lo tanto, las soluciones a esta ecuación son las que describirán a los haces paraxiales.

### 1.3.1. Haz Gaussiano

Una solución a la ecuación paraxial de Helmholtz es la envolvente compleja de la onda paraboloidal y que corresponde a la aproximación de Fresnel de la onda esférica (1.19) [1]. Dicha envolvente está dada por

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{z} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right), \quad (1.28)$$

donde  $A_1$  es una constante y  $\rho^2 = x^2 + y^2$ . La envolvente compleja de un haz Gaussiano es obtenida al aplicar una transformación a la ecuación (1.28) donde  $z$  es reemplazada por la función compleja  $q(z) = z + iz_0$  donde  $z_0$  es un número real conocido como rango de Rayleigh. Entonces, la envolvente compleja de un haz Gaussiano está definida por

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left[-ik \frac{\rho^2}{2q(z)}\right]. \quad (1.29)$$

Al notar que la siguiente ecuación se cumple

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)}, \quad (1.30)$$

donde las expresiones de  $R(z)$  y  $W(z)$  están definidas por

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right], \quad (1.31)$$

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2}, \quad (1.32)$$

con

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}, \quad (1.33)$$

entonces la envolvente compleja de la ecuación (1.29) puede ser separada en amplitud y fase obteniendo así que la amplitud compleja de un haz Gaussiano puede ser expresada como [1]

$$U(\vec{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right], \quad (1.34)$$

donde  $A_0 = \frac{A_1}{iz_0}$ ,  $R(z)$  describe el radio de curvatura de los frentes de onda del haz en la posición  $z$ ,  $W(z)$  es el radio del haz, con el radio mínimo del haz ubicado en  $z = 0$  y con valor de  $W(0) = W_0$

y  $\zeta(z)$  corresponde a un retardo de los frentes de onda del haz en comparación con los de una onda plana o esférica, conocido como efecto Gouy donde

$$\zeta(z) = \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (1.35)$$

La intensidad del haz Gaussiano es descrita por una función gaussiana de la posición radial  $\rho$

$$I(\rho, z) = |A_0|^2 \left( \frac{W_0}{W(z)} \right)^2 \exp \left[ -\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right]. \quad (1.36)$$

### 1.3.2. Haz Laguerre-Gauss

Los haces Laguerre-Gauss son un conjunto completo de soluciones a la ecuación paraxial de Helmholtz expresada en coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$  y resuelta mediante el método de separación de variables. La amplitud compleja que describe al haz Laguerre-Gauss de orden  $(l, m)$  está dada por [1, 19]

$$U_{l,m}(\rho, \phi, z) = A_{l,m} \frac{W_0}{W(z)} \left( \frac{\sqrt{2}\rho}{W(z)} \right)^{|l|} L_m^{|l|} \left( \frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right) \exp \left[ -\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right] \\ \times \exp \left[ -ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} - il\phi + i(|l| + 2m + 1)\zeta(z) \right], \quad (1.37)$$

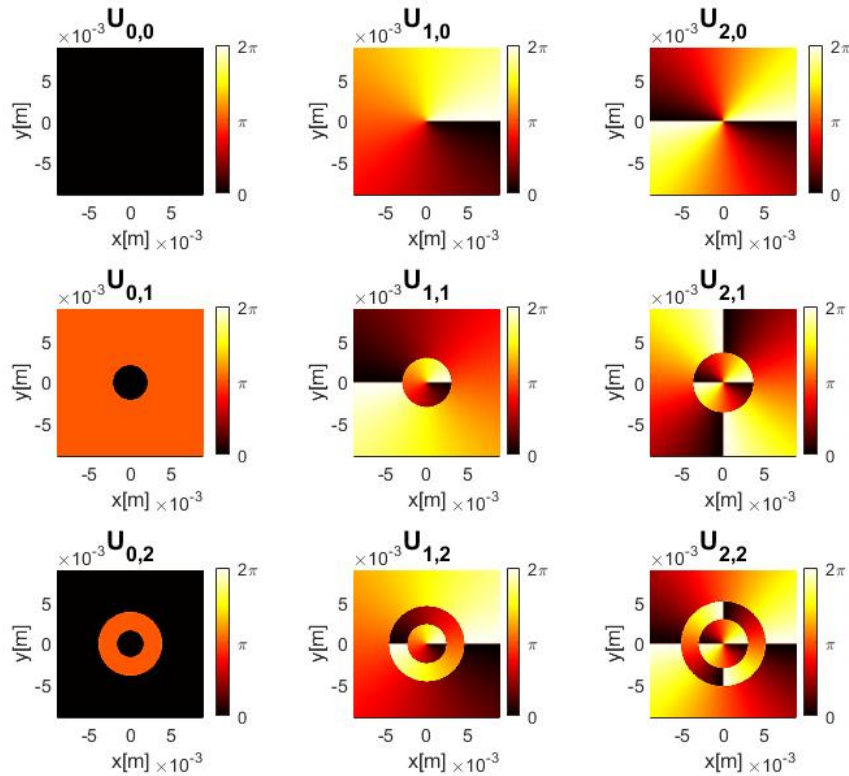


Figura 1.1: Fase del haz Laguerre-Gauss  $U_{l,m}$  en el plano  $z = 0$  con  $\lambda = 633$  nm y  $W_0 = 3$  mm.

donde  $A_{l,m}$  es una constante,  $L_m^{|l|}(x)$  son los polinomios asociados de Laguerre con  $l$  y  $m$  los índices azimutal y radial respectivamente, con  $m \geq 0$ . Además, las expresiones para  $R(z)$ ,  $W(z)$ ,  $W_0$  y  $\zeta(z)$  están dadas por las ecuaciones (1.31), (1.32), (1.33) y (1.35). En particular, si  $l = 0$  y  $m = 0$  la ecuación (1.37) se convierte en la amplitud compleja del haz Gaussiano (1.34).

La fase de este haz, a diferencia de la fase del haz Gaussiano, tiene una dependencia en el ángulo azimutal  $\phi$  que da lugar a que los frentes de onda tengan la forma de helicoides y además este haz tiene un término de fase de Gouy amplificado dado por  $(l + 2m + 1)\zeta(z)$ . En la figura (1.1) se observan las fases de diferentes modos de los haces Laguerre-Gauss en el plano  $z = 0$  con  $\lambda = 633 \text{ nm}$  y  $z_0 = 44,5 \text{ m}$ .

La intensidad óptica de los haces Laguerre-Gauss es

$$I_{l,m}(\rho, z) = |A_{l,m}|^2 \left( \frac{W_0}{W(z)} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{2}\rho}{W(z)} \right)^{2|l|} \left[ L_m^{|l|} \left( \frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right) \right]^2 \exp \left[ -\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right]. \quad (1.38)$$

Su distribución de intensidad es circularmente simétrica ya que depende solamente de las coordenadas  $\rho$  y  $z$ . En general se tendrá una distribución de intensidad de anillos concéntricos de intensidad máxima, que están caracterizados por los polinomios  $L_m^l(x)$ , donde para  $l \neq 0$ , el número  $m + 1$  representa la cantidad de anillos de intensidad máxima y para  $l = 0$ , el haz tendrá  $m$  anillos concéntricos a un disco central brillante como se observa en la figura (1.2), donde se muestran las distribuciones transversales de intensidad para diferentes modos de los haces Laguerre-Gauss en el plano  $z = 0$  con  $\lambda = 633 \text{ nm}$  y  $z_0 = 44,5 \text{ m}$ .

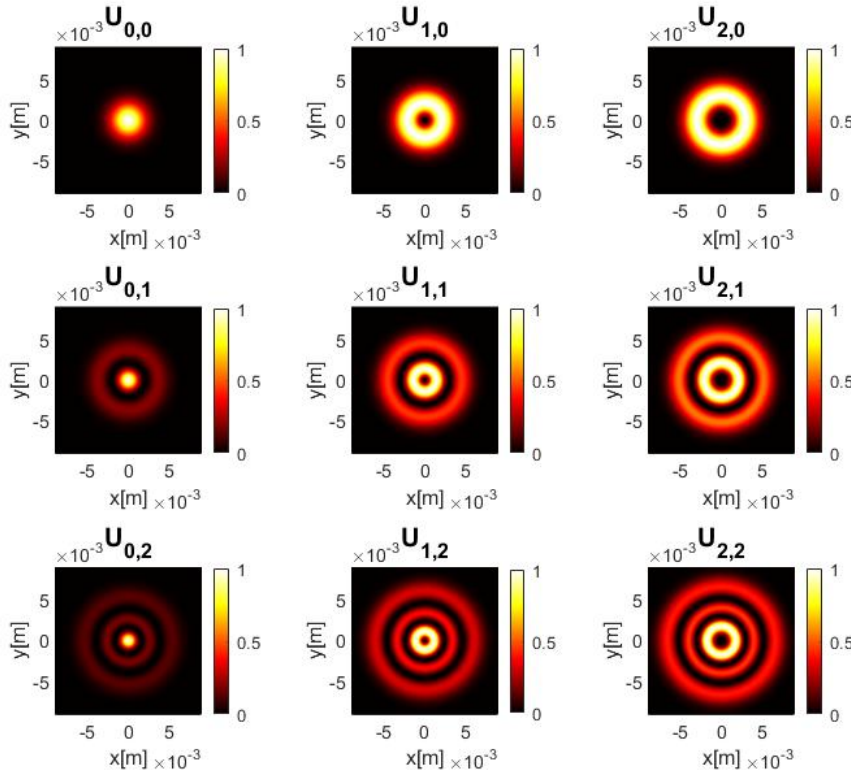


Figura 1.2: Intensidad del haz Laguerre-Gauss  $U_{l,m}$  en el plano  $z = 0$ ,  $\lambda = 633 \text{ nm}$  y  $W_0 = 3 \text{ mm}$ .

## 1.4. Ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas monocromáticas son ondas cuyas componentes de campo eléctrico y magnético son armónicas en el tiempo con la misma frecuencia de oscilación  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ , con  $\omega$  la frecuencia angular de oscilación

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t), \quad (1.39)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) \exp(i\omega t), \quad (1.40)$$

donde  $\vec{E}(\vec{r})$  y  $\vec{B}(\vec{r})$  son las amplitudes complejas de los campos eléctrico y magnético. Las ecuaciones de Maxwell en el vacío (1.7 - 1.10) para campos armónicos se convierten en

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad (1.41)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0, \quad (1.42)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -i\omega \vec{B}(\vec{r}), \quad (1.43)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \mu_0 i\omega \vec{E}(\vec{r}). \quad (1.44)$$

Si cada una de las componentes de las amplitudes vectoriales complejas  $\vec{E}(\vec{r})$  y  $\vec{B}(\vec{r})$  representan ondas planas propagándose en la dirección  $\vec{k}$  entonces se tendrá

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)], \quad (1.45)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \exp[-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)], \quad (1.46)$$

que se tratan de las expresiones que describen a una onda electromagnética monocromática plana donde  $\vec{E}_0$  y  $\vec{B}_0$  son vectores constantes que, de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell, deben satisfacer que  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{B}_0$  y  $\vec{k}$  son ortogonales entre sí.

### 1.4.1. Polarización de la luz

Al propagarse una onda electromagnética el vector de campo eléctrico va oscilando y en general puede ir cambiando de dirección. La polarización de una onda electromagnética describe el comportamiento de estas oscilaciones, es decir, describe el comportamiento del extremo final del vector de campo eléctrico en un punto en el espacio.

El campo eléctrico de una onda plana propagándose en la dirección  $z$ , de acuerdo con la sección anterior, debe oscilar en el plano transversal al eje  $z$  por lo que la ecuación que describe al campo debe ser

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \exp[-i(kz - \omega t)], \quad (1.47)$$

donde

$$\vec{E}_0 = E_{0x} \exp(i\delta_x) \hat{i} + E_{0y} \exp(i\delta_y) \hat{j}, \quad (1.48)$$

con  $E_{0x}$  y  $E_{0y}$  constantes positivas y las fases iniciales de las componentes están dadas por  $\delta_x$  y  $\delta_y$ . Dependiendo del valor de las amplitudes y de la diferencia de fase relativa de las componentes del campo

$$\delta = \delta_y - \delta_x, \quad (1.49)$$

se obtienen las distintas polarizaciones; lineal, circular y elíptica. Si  $\delta = 0$  o si  $\delta = \pi$  la onda estará linealmente polarizada, si  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$  y  $E_{0x} = E_{0y}$  la onda estará circularmente polarizada a izquierdas o a derechas. La onda estará elípticamente polarizada en cualquier otro caso.

Para nombrar los estados de polarización a izquierdas o a derechas se seguirá la convención usada en [20], en la que si el extremo final del campo eléctrico es visto moverse en dirección antihoraria por un observador mientras se le aproxima la onda, se dirá que el campo posee polarización a

derechas lo cual ocurre cuando el seno de la diferencia de fase  $\delta$  es negativo, en caso contrario se tendrá polarización a izquierdas.

Una onda electromagnética circularmente polarizada a izquierdas o derechas está dada por

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= (E_0\hat{i} + e^{\pm i\frac{\pi}{2}} E_0\hat{j}) \exp[-i(kz - \omega t)] \\ &= E_0(\hat{i} \pm i\hat{j}) \exp[-i(kz - \omega t)],\end{aligned}\tag{1.50}$$

donde  $E_0$  es una constante.

## 1.5. Leyes de conservación

Un campo electromagnético es capaz de ejercer una fuerza sobre una partícula cargada de carga  $q$  moviéndose a una velocidad  $\vec{v}$  dada por

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right),\tag{1.51}$$

conocida como fuerza de Lorentz. Debido a ello, un campo electromagnético debe ser capaz de transportar energía y momento lineal y las expresiones matemáticas de estas magnitudes físicas han de estar dadas en términos de los campos eléctrico y magnético.

A continuación se muestran las leyes de conservación de la energía y momento lineal para campos electromagnéticos y partículas cargadas en donde se identifican las expresiones de la energía y momento lineal de un campo electromagnético.

### 1.5.1. Conservación de la energía

El teorema de Poynting establece la conservación de la energía para un sistema de partículas cargadas y campos electromagnéticos, además indica que los campos electromagnéticos son capaces de almacenar y transportar energía. El trabajo por unidad de tiempo que un campo electromagnético realiza sobre una distribución continua de cargas  $\rho(\vec{r}, t)$  y corrientes  $\vec{J} = \rho(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)$  en un medio lineal, homogéneo, isótropo con permeabilidad eléctrica  $\varepsilon$  y permeabilidad magnética  $\mu$  confinadas en un volumen finito  $V$  está dado por

$$\frac{dW_{mec}}{dt} = \int_V (\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dV = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV,\tag{1.52}$$

que físicamente representa la conversión de energía electromagnética en energía mecánica de las cargas libres. De la ley de Ampere (1.4), el vector de densidad de corriente eléctrica  $\vec{J}$  puede expresarse en términos de los campos  $\vec{D}$  y  $\vec{H}$  obteniendo así que

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \int_V \left( \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV,\tag{1.53}$$

y luego de hacer uso de la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}),\tag{1.54}$$

y de la ley de Faraday (1.3), la ecuación (1.53) es expresada como

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV = - \int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV = - \oint_A \vec{S} \cdot \hat{n} da,\tag{1.55}$$

donde  $w$  y  $\vec{S}$  están dados por

$$w = \frac{1}{2} \left( \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \vec{B} \right),\tag{1.56}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (1.57)$$

La ecuación (1.55) se interpreta como una ecuación de conservación de energía [5], en donde  $w$  es identificado como la densidad de energía electromagnética y el término de la derecha de la ecuación (1.55), obtenido de aplicar el teorema de la divergencia, es una integral sobre la superficie  $A$  que encierra al volumen  $V$  (con  $\hat{n}$  el vector unitario normal al elemento diferencial de superficie  $da$ ) del campo vectorial  $\vec{S}$ , conocido como vector de Poynting, que representa la energía por unidad de tiempo por unidad de área transportada por el campo electromagnético en un punto y que además indica la dirección del flujo de la energía electromagnética.

Por lo tanto, la ecuación (1.55) puede entenderse físicamente de la siguiente manera: La disminución en la energía electromagnética almacenada por el campo en el volumen  $V$  al transcurrir el tiempo se debe a que el campo realiza trabajo sobre las partículas cargadas y a un flujo de energía transportado por el campo electromagnético hacia el exterior de la superficie  $A$ .

### 1.5.2. Momento lineal de un campo electromagnético

La fuerza que ejerce un campo electromagnético sobre la distribución continua de cargas que están contenidas en un volumen  $V$  es

$$\frac{d\vec{P}_{mec}}{dt} = \int_V (\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV, \quad (1.58)$$

donde  $\vec{P}_{mec}$  corresponde al momento lineal total de todas las partículas. El integrando de esta ecuación puede ser reescrito al expresar  $\rho$  y  $\vec{J}$  en términos de los campos eléctrico y magnético con ayuda de la ley de Gauss eléctrica (1.1) y la ley de Ampere (1.4)

$$\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = \varepsilon(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} - \frac{1}{\mu}\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) - \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \times \vec{B}. \quad (1.59)$$

Notando que

$$\frac{\partial\vec{E} \times \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (1.60)$$

se tendrá que

$$\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = \varepsilon \left[ (\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \right] + \frac{1}{\mu} \left[ (\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right] - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}), \quad (1.61)$$

donde se ha agregado el término  $(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} = 0$ . Por lo tanto, la ecuación (1.58) queda como

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_{mec}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \int_V \left[ \varepsilon \left( (\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu} \left( (\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right) \right] dV, \end{aligned} \quad (1.62)$$

que puede ser expresada de forma más compacta como

$$\frac{d\vec{P}_{mec}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \int_V \nabla \cdot T dV = \int_A T \cdot \hat{n} da, \quad (1.63)$$

donde  $T$  es el tensor de tensión de Maxwell cuyos elementos están dados en términos de las componentes cartesianas de los campos eléctrico  $(E_x, E_y, E_z)$  y magnético  $(B_x, B_y, B_z)$

$$T_{ij} = \varepsilon E_i E_j + \frac{1}{\mu} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \vec{B}), \quad (1.64)$$

con

$$(\nabla \cdot T)_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial r_j}, \quad (1.65)$$

donde  $(r_1, r_2, r_3) = (x, y, z)$  y

$$(T \cdot \hat{n})_i = \sum_j T_{ij} n_j. \quad (1.66)$$

Entonces, en analogía con el teorema de Poynting (1.55), la ecuación (1.63) es la ecuación de conservación del momento lineal [5] donde el primer término de la ecuación (1.63) corresponde a la razón de cambio del momento lineal de las cargas encerradas en el volumen  $V$  debido a la transferencia de momento lineal desde el campo electromagnético, el segundo término corresponde a la razón de cambio del momento lineal del campo electromagnético, donde se concluye que la densidad de momento lineal  $\vec{p}$  del campo electromagnético es

$$\vec{p} = \varepsilon \vec{E} \times \vec{B} = \varepsilon \mu \vec{S}, \quad (1.67)$$

que está estrechamente relacionado con el vector de Poynting  $\vec{S}$  y el término del lado derecho de la ecuación (1.63) representa un flujo de momento por unidad de tiempo a través de la superficie  $A$  que encierra al volumen  $V$ , es decir, se trata de la fuerza neta ejercida sobre el volumen  $V$  debida al campo electromagnético, que es lo que da lugar al fenómeno de presión de radiación.

## Capítulo 2

# Momento angular de la luz

Una onda electromagnética que constituye a la luz almacena y transporta energía de acuerdo con el teorema de Poynting y es capaz de transportar momento lineal y ejercer fuerzas. Además de estas magnitudes físicas, una onda electromagnética es capaz de poseer momento angular, que es una magnitud física que cuantifica la rotación de la onda y que se manifiesta al interactuar con la materia. En este capítulo se estudia el momento angular de una onda electromagnética y se muestra la relación que tiene con la densidad de momento lineal. El estudio parte de la revisión del primer experimento mecánico de la medición del momento angular de la luz, sección 2.1. En la sección 2.2 se obtiene la ecuación de conservación del momento angular entre campos electromagnéticos y partículas cargadas, en donde se define la densidad de momento angular de una onda electromagnética. En la sección 2.3 se muestra la separación del momento angular total en las contribuciones conocidas como momento angular orbital y momento angular de espín y se aplica para ondas electromagnéticas monocromáticas. Por último, en la sección 2.4, se estudia el momento angular de ondas planas circularmente polarizadas de extensión finita.

### 2.1. Experimento de la detección mecánica del momento angular de la luz

En 1909, J. H. Poynting [3] infirió mediante una analogía mecánica que un haz de luz de longitud de onda  $\lambda$  circularmente polarizado debería ejercer un torque por unidad de área sobre una placa retardadora de un cuarto de onda que deja plano polarizada la luz, igual a  $\frac{\lambda}{2\pi}$  veces la densidad de energía de la luz. Entonces planteó una propuesta para medir el momento angular asociado con la luz circularmente polarizada. Su idea era hacer que luz linealmente polarizada incida de forma perpendicular a través de un gran número de placas retardadoras de cuarto de onda que se encuentran suspendidas en su centro por una fibra (formando un péndulo de torsión). Las placas retardadoras cambiarán el estado de polarización de la luz a circular habiendo con ello una transferencia de momento angular hacia las placas retardadoras que se vería como una oscilación del péndulo de torsión. Sin embargo, Poynting esperaba que la magnitud de la torca fuera tan pequeña que consideró que no sería capaz de medirla. Años más tarde, en 1936, Richard A. Beth [4], siguiendo la idea de Poynting, logró detectar y medir la transferencia de momento angular de la luz que incidía sobre una placa retardadora colgante de media onda. En su experimento usó un sistema de placas retardadoras junto con un espejo que devolvía la luz a través de las placas con el objetivo de aumentar el torque de la luz. Además, en la realización de su experimento, tuvo en consideración los posibles factores que pudieran interferir con la detección del fenómeno, como perturbaciones mecánicas, electrostáticas, fricción con el aire y variaciones en la presión de radiación de la luz.

La teoría detrás del experimento de la medición del momento angular de la luz es la siguiente:

Se considera una onda electromagnética propagándose en un medio birrefringente, como un cristal ópticamente anisótropo, el cual debido a la estructura periódica de sus átomos o moléculas causa que la polarización eléctrica inducida  $\vec{P}$ , tanto la magnitud como la dirección, dependan de la dirección del campo eléctrico aplicado, es decir, que se tenga una relación dada por [20]

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

donde el arreglo de coeficientes  $\chi_{ij}$  es llamado tensor de susceptibilidad eléctrica. O bien, la respuesta del medio puede ser descrita por el tensor de permitividad eléctrica  $\varepsilon$  de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

El tensor de permitividad eléctrica  $\varepsilon$  para un cristal homogéneo, no absorbente y no magnético es simétrico [20] y en consecuencia existe un conjunto especial de ejes ortogonales conocidos como ejes dieléctricos principales, que corresponden a los eigenvectores de  $\varepsilon$ , con respecto a los cuales la matriz  $\varepsilon$  es diagonal, es decir, las magnitudes  $\varepsilon_{ij}$  dependen de la elección de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  relativos a la estructura cristalina del medio. Entonces, con respecto a los ejes principales dieléctricos denotados por los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  se tendrá

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

donde los tres elementos diagonales, que corresponden a sus eigenvalores, son las tres constantes dieléctricas principales del medio.

Se definen los índices de refracción principales del medio  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$  por

$$n_i^2 = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0}, \quad (2.4)$$

por lo tanto, en el sistema coordenado principal del cristal se tiene

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Los medios en los que los tres índices de refracción son diferentes se denominan biaxiales, aquellos en los que solo 2 elementos son iguales, por ejemplo,  $n_x = n_z \neq n_y$  se denominan uniaxiales, y cuando los tres son iguales se trata de un material isotrópico. Una dirección que caracteriza a un cristal es su eje óptico, el cual se trata de una dirección de isotropía en el cristal (el cual es un medio anisótropo). Si una onda electromagnética se propaga en esta dirección, entonces los campos oscilarán en la dirección perpendicular sufriendo un mismo índice de refracción por lo que no habrá birrefringencia. Los cristales uniaxiales poseen solo un eje óptico, que en el caso mencionado donde  $n_x = n_z \neq n_y$  el eje óptico sería el eje  $y$ , mientras que los cristales biaxiales poseen dos ejes ópticos [20].

La expresión de una onda electromagnética plana que se propaga en la dirección  $+z$  de un medio birrefringente cuyas componentes oscilan en las direcciones principales del medio  $x$  y  $y$ , caracterizadas por los índices de refracción  $n_x$  y  $n_y$  es

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = A \cos \theta \exp[-i(n_x k z - \omega t)] \hat{i} + A \sin \theta \exp[-i(n_y k z - \omega t)] \hat{j}, \quad (2.6)$$

donde el campo eléctrico que representa físicamente a la onda corresponde a la parte real de (2.6), es decir,

$$\vec{E} = A \cos \theta \cos(\omega t - n_x k z) \hat{i} + A \sin \theta \cos(\omega t - n_y k z) \hat{j}, \quad (2.7)$$

donde  $A$  y  $\theta$  son constantes que definen la amplitud de las componentes del campo eléctrico,  $n_x$  y  $n_y$  son los índices de refracción que ven las componentes de la onda electromagnética al propagarse en el medio birrefringente y  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda.

El campo eléctrico ejerce una torca sobre los dipolos del material, cuyo valor macroscópico es expresado en términos de la densidad de polarización del medio  $\vec{P}$

$$\vec{\tau} = \int_V \vec{P} \times \vec{E} dV = \int_V \vec{D} \times \vec{E} dV. \quad (2.8)$$

De acuerdo con Beth [4] este torque surge del hecho de que el campo eléctrico  $\vec{E}$  de la luz no es, en general, paralelo al campo de polarización eléctrica  $\vec{P}$  del material debido a que la permitividad eléctrica del medio  $\varepsilon$  es un tensor.

A partir de la ecuación (2.3) se obtiene la expresión para el vector de desplazamiento eléctrico dado por

$$\vec{D} = \varepsilon_0 n_x^2 A \cos \theta \cos(\omega t - n_x k z) \hat{i} + \varepsilon_0 n_y^2 A \sin \theta \cos(\omega t - n_y k z) \hat{j}, \quad (2.9)$$

por lo que el torque por unidad de volumen, dado por el integrando de la ecuación (2.8), en cualquier punto del cristal es

$$\vec{D} \times \vec{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (n_x^2 - n_y^2) A^2 \sin 2\theta \cos(\omega t - n_x k z) \cos(\omega t - n_y k z) \hat{k}. \quad (2.10)$$

Dado que los campos ópticos oscilan rápidamente es conveniente realizar un promedio temporal de la ecuación (2.10), (ver apéndice A, ecuación (A.5)), obteniéndose

$$\langle \vec{D} \times \vec{E} \rangle = \left( \frac{A}{2} \right)^2 \varepsilon_0 (n_x^2 - n_y^2) \sin 2\theta \cos(kz(n_x - n_y)) \hat{k}, \quad (2.11)$$

e integrando (2.11) respecto de  $z$  desde la posición  $z_1$  a  $z_2$  se obtiene la torca por unidad de área que ejerce la onda electromagnética (2.7) sobre el medio birrefringente que se encuentra entre los planos  $z_1$  y  $z_2$  [4]

$$\varepsilon_0 \left( \frac{A}{2} \right)^2 \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right) (n_x + n_y) \sin 2\theta (\sin 2\Delta_2 - \sin 2\Delta_1) \hat{k}, \quad (2.12)$$

con  $2\Delta_i = \frac{2\pi}{\lambda} z_i (n_x - n_y)$  es la diferencia de fase relativa de las componentes del campo eléctrico en el plano  $z_i$  del medio.

El mismo resultado para el torque por unidad de área de la ecuación (2.12), según Beth [4], es obtenido al asignar un momento angular por fotón de  $\pm \hbar$  para ondas planas circularmente polarizadas viajando en el vacío de la siguiente manera: luz circularmente polarizada será parcialmente reflejada y transmitida al incidir en un medio birrefringente y sus amplitudes pueden ser obtenidas de las ecuaciones de Fresnel. Al calcular el momento angular de las ondas incidente y reflejada que viajan en el vacío con ayuda de la suposición mencionada y teniendo en cuenta la conservación de momento angular cuando la luz incide en el medio birrefringente se puede obtener el momento angular transmitido al medio, el cual coincide con la ecuación (2.12).

El experimento de Beth tuvo como objetivo corroborar que el momento de fuerza de la luz variaba de acuerdo con la ecuación (2.12). La idea general para la medición de este fenómeno fue la siguiente: luz circularmente polarizada incide en una placa retardadora de media onda, suspendida en su centro por una fina fibra de cuarzo formando así un péndulo de torsión. De acuerdo con Beth, la luz debería ejercer un torque sobre la placa retardadora colgante que la pondría a oscilar. Al medir las amplitudes de estas oscilaciones fue capaz de calcular la torca de la luz, sin embargo, no se

presentan muchos detalles acerca del procedimiento del cálculo y es por ello que a partir de la teoría que describe el movimiento de oscilación de un péndulo de torsión se muestra cómo obtener la torca de la luz. Para ello, es importante describir de forma general el arreglo experimental de Beth [4] y sus configuraciones. Su arreglo experimental para la detección del momento angular consiste en un conjunto de 3 placas retardadoras de cuarzo, ver figura (2.1), donde cada placa tiene indicado sus ejes principales, uno de ellos es el eje lento, definido así pues esta dirección está caracterizada por un índice de refracción mayor que el de la dirección perpendicular, que corresponde al eje rápido.

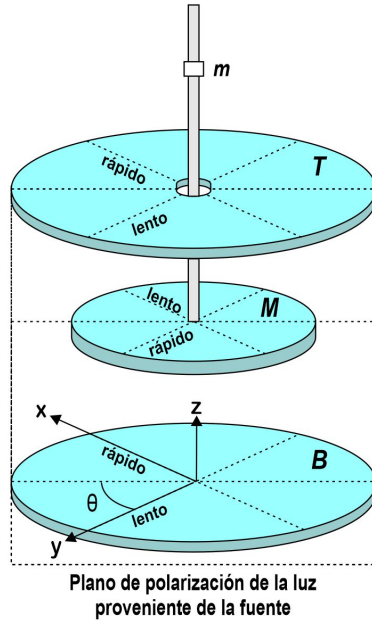


Figura 2.1: Sistema de placas retardadoras usado en el experimento de la medición mecánica del momento angular de la luz.

La placa retardadora colgante, etiquetada por  $M$  en la figura (2.1), es de media onda, la placa retardadora etiquetada por  $T$  es de cuarto de onda y está fija en las paredes del experimento. Los ejes principales de la placa  $T$  están girados  $90^\circ$  respecto a los de la placa colgante  $M$  y además, sobre la superficie superior de la placa  $T$  hay una capa de aluminio reflejante. Debajo de la placa retardadora  $M$  se colocó una segunda placa retardadora de cuarto de onda, etiquetada por  $B$ , con sus ejes principales en la misma dirección que los de la placa superior  $T$ . Esta placa retardadora  $B$  tiene la característica de que puede ser rotada sobre el eje  $z$  de forma manual. Dado que la placa retardadora  $B$  puede ser rotada, se establecen las siguientes posiciones: la posición  $R$  de la placa  $B$  indica que el eje lento de la placa retardadora  $B$  coincide con el eje rápido de la placa retardadora  $M$  como en la figura (2.1), donde  $\theta = 45^\circ$  y la posición  $L$  de la placa  $B$  indica que los ejes principales lentos de las placas retardadoras  $B$  y  $M$  coinciden, donde  $\theta = -45^\circ$ . En lo que sigue a continuación será entendido que cualquier cambio de posición o giro de la placa retardadora  $B$  será de la posición  $R$  a  $L$  o de  $L$  a  $R$ , a menos que se indique lo contrario.

La luz proveniente de una lámpara colocada debajo del sistema de placas retardadoras pasa a través de una lente y luego por un prisma de Nicol, el cual es capaz de polarizar linealmente la luz con su plano de polarización indicado con línea punteada en la figura (2.1). Luego la luz entra en el sistema de placas, pasando por la placa retardadora  $B$  y la placa  $M$  hasta llegar a la superficie superior de la placa retardadora  $T$ , donde la luz es reflejada por una capa de aluminio reflejante y, en consecuencia, la luz pasa nuevamente por el sistema de placas.

La polarización de la luz al pasar a través del sistema de placas retardadoras, en el caso en el que la placa  $B$  esta fija en la posición  $R$ , ira cambiando como se observa en la figura (2.2), donde

se muestra la polarización que tiene la luz entre cada placa retardadora. Además, se muestra el vector de campo eléctrico (flecha roja) y las direcciones que sigue su extremo final (flecha azul) donde  $E_x$  y  $E_y$  son las componentes del campo eléctrico del haz, las cuales irán cambiando de fase al propagarse. En los diagramas ubicados en la parte superior de la figura (2.2) la luz viaja en la dirección  $+z$  y en las gráficas inferiores en la dirección  $-z$ . Esto es importante debido a la convención tomada para denotar los estados de polarización circular de la sección 1.4. La figura (2.2) es entendida como sigue: La luz de la fuente es polarizada linealmente por el prisma de Nicol a un ángulo de  $45^\circ$  respecto del eje  $x$  que, en este caso, coincide con el eje rápido de la placa retardadora inferior  $B$  de cuarto de onda. Cuando la luz atraviesa la placa  $B$ , la componente  $E_y$  del campo se atrasa respecto de la componente  $E_x$  por un cuarto de longitud de onda causando que la polarización de la luz pase a ser circular a derechas y así llegará a la placa retardadora de media onda  $M$  y al atravesarla el campo tendrá polarización circular a izquierdas. Luego, la luz transmitida incidirá sobre la placa retardadora de cuarto de onda  $T$  y, al llegar a la superficie superior de la placa, la polarización de la luz será lineal. En ese mismo instante la luz se reflejará en la capa de aluminio y volverá a cruzar la placa retardadora de cuarto de onda  $T$  y al salir de ella la polarización del campo será circular a izquierdas. Posteriormente el campo cruzará por segunda vez la placa retardadora de media onda  $M$  e invertirá su polarización, de esta manera el campo será polarizado circularmente a derechas. Finalmente, la luz atravesará otra vez la placa retardadora de cuarto de onda  $B$ , obteniendo a la salida polarización lineal.

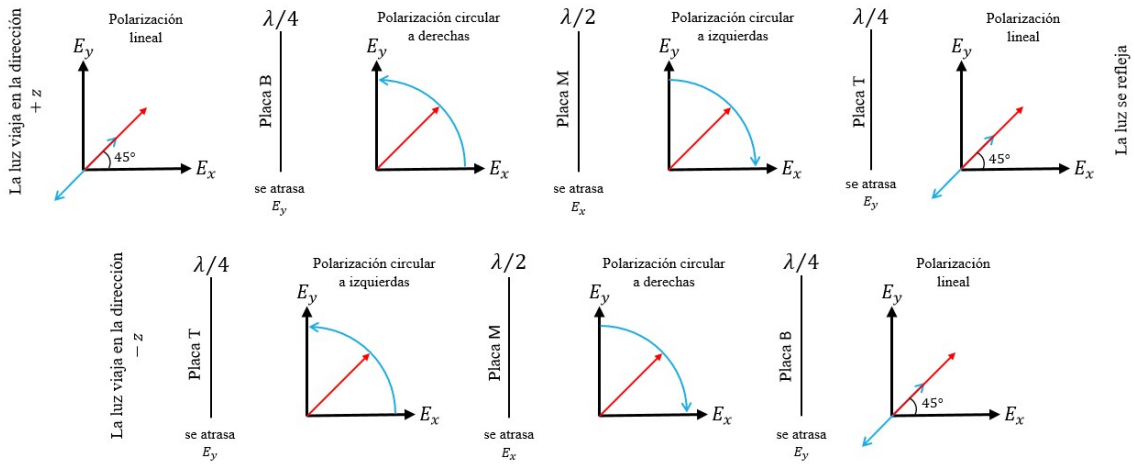


Figura 2.2: Polarización de la luz a través del sistema de placas retardadoras. La placa retardadora  $B$  está en la posición  $R$ .

De acuerdo con la ecuación (2.12) es de esperarse que el péndulo de torsión sufra un torque producido por el cambio de la polarización circular de la luz al atravesar la placa retardadora colgante  $M$ .

Note que si la placa retardadora  $B$  es girada  $90^\circ$ , es decir, si se posiciona en la configuración denominada como  $L$ , entonces las polarizaciones circulares mencionadas en la figura (2.2) se invierten y con ello la dirección del torque sobre la placa retardadora  $M$  también se invierte.

Beth buscaba determinar el valor del cambio en el torque de la luz sobre la placa  $M$  cuando la placa inferior  $B$  es girada de las posiciones  $R$  a  $L$  o  $L$  a  $R$ . Es por ello que Beth llevo a cabo un método de resonancia y antirresonancia entre el movimiento de oscilación del péndulo y la dirección de la torca de la luz, es decir, al estar oscilando la placa colgante  $M$ , la placa  $B$  fue girada de las posiciones  $R$  a  $L$  de tal manera que la torca de la luz aumente la amplitud del péndulo (secuencias de resonancia), o bien, que haga que decrementsen las amplitudes del péndulo (secuencias de antirresonancia). Al medir las amplitudes de las oscilaciones durante estas secuencias

de resonancia y antirresonancia fue capaz de calcular el torque que ejerce la luz. A continuación, se muestra cómo obtener dicho torque a partir de las medidas de las amplitudes del péndulo de torsión.

Matemáticamente se puede describir el movimiento del péndulo de torsión mediante la segunda ley de Newton en su forma angular. Si la placa retardadora  $B$  se coloca en la posición  $R$  y se deja fija, el torque debido a la luz sobre la placa retardadora  $M$  será en sentido antihorario y la ecuación diferencial que describe su movimiento angular será

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\kappa\varphi + \tau_{luz}, \quad (2.13)$$

donde  $I$  es el momento de inercia de la placa retardadora  $M$ ,  $\kappa$  la constante de torsión de la fibra del péndulo de torsión y  $\tau_{luz}$  el torque de la luz. De acuerdo con [4], el torque de la luz puede ser considerado como constante para una posición fija de la placa retardadora  $B$  debido a que las amplitudes alcanzadas por el péndulo de torsión son de pocos grados. De acuerdo con la ecuación (2.12) la torca debida a la luz será constante siempre que las componentes de la onda se mantengan vibrando a lo largo de los ejes principales sin cambiar su dirección de vibración, lo cual se cumple de manera aproximada en el experimento. Además, se deben de mantener constantes la intensidad de la fuente y su estado de polarización al incidir y al salir de la placa retardadora  $M$ .

La solución general de la ecuación diferencial (2.13) es

$$\varphi = \Theta_R \sin(\omega t + \varphi_{0R}) + \frac{\tau_{luz}}{\kappa}, \quad (2.14)$$

con  $\Theta_R$  una constante,  $\varphi_{0R}$  la fase inicial y  $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$  la frecuencia natural de oscilación del péndulo. Note de la ecuación (2.14) que el movimiento de oscilación del péndulo será alrededor del ángulo

$$\varphi_1 = \frac{\tau_{luz}}{\kappa}. \quad (2.15)$$

En el caso en que la placa retardadora  $B$  se fija en la posición  $L$  se tiene que la torca debida a la luz sobre la placa retardadora  $M$  será en sentido horario por lo que la ecuación diferencial que describe el movimiento angular del péndulo de torsión es

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\kappa\varphi - \tau_{luz}, \quad (2.16)$$

cuya solución general es

$$\varphi = \Theta_L \sin(\omega t + \varphi_{0L}) - \frac{\tau_{luz}}{\kappa}, \quad (2.17)$$

con  $\Theta_L$  una constante y  $\varphi_{0L}$  la fase inicial. Además, en este caso el movimiento de oscilación del péndulo será alrededor del ángulo

$$\varphi_2 = -\frac{\tau_{luz}}{\kappa}. \quad (2.18)$$

Por lo tanto se puede concluir que un cambio en la posición de la placa inferior  $B$  de la posición  $R$  a  $L$  es equivalente a un cambio en la posición angular de equilibrio alrededor de la cual el péndulo de torsión ejecuta sus oscilaciones, donde dicho cambio esta dado por  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

En el experimento de Beth, cuando la placa retardadora  $M$  está oscilando (el péndulo de torsión oscila), la placa  $B$  se mantiene fija, digamos en la posición  $R$ , y en el instante en el que el péndulo alcanza su extremo final de oscilación y se detiene momentáneamente, la placa  $B$  es girada a la posición  $L$  invirtiendo con ello la dirección del torque de la luz sobre el péndulo con el objetivo de que el torque haga que el movimiento de la siguiente oscilación alcance mayores (menores) amplitudes, es decir, para tener resonancia (antirresonancia). En la figura (2.3) se muestra dicho instante donde se observa una marca en forma de estrella sobre la placa  $M$  que sirve como referencia para saber cuáles son las amplitudes alcanzadas por el péndulo. Justo antes de que la placa  $B$  sea girada de la posición  $R$  a la  $L$  el péndulo tendrá una amplitud  $\Theta_R$  medida desde el punto de

equilibrio  $\varphi_1$ , de acuerdo con la ecuación (2.14), y cuando la placa  $B$  se gira a la posición  $L$  el péndulo tendrá una amplitud  $\Theta_L$  medida desde el punto de equilibrio  $\varphi_2$  de acuerdo con (2.17). De esto se concluye que

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Theta_L - \Theta_R. \quad (2.19)$$

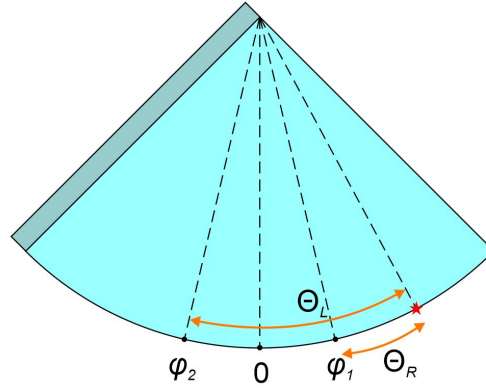


Figura 2.3: Vista superior de una sección del péndulo de torsión. Se muestran los ángulos de equilibrio  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  y las amplitudes angulares  $\Theta_R$  y  $\Theta_L$

Entonces, el cambio en el torque de la luz sobre la placa  $M$  cuando la placa retardadora  $B$  es girada de la posición  $R$  a  $L$  es

$$\Delta\tau = 2\tau_{\text{ luz }} = \kappa(\varphi_1 - \varphi_2) = \kappa(\Theta_L - \Theta_R), \quad (2.20)$$

donde se ha hecho uso de las ecuaciones (2.15), (2.18) y (2.19). La ecuación (2.20) indica que al medir las amplitudes angulares alcanzadas por el péndulo de torsión es posible hallar la torca que la luz circularmente polarizada ejerce sobre el péndulo.

Experimentalmente, la posición del péndulo de torsión fue tomada indirectamente (sin observar el péndulo de torsión, con el objetivo de que la luz externa no incidiera sobre el sistema de placas retardadoras) al observar con un telescopio un pequeño espejo unido a la fibra, etiquetado por  $m$  en la figura (2.1), que permite ver una regla graduada posicionada a una distancia  $r = 338\text{cm}$  del eje de la fibra, de modo que las posiciones del péndulo de torsión se miden en centímetros sobre la escala mencionada, es decir, observar diferentes posiciones sobre la regla con el telescopio se traduciría como un movimiento angular del péndulo de torsión. Matemáticamente la relación entre las amplitudes angulares,  $\Theta_R$  y  $\Theta_L$ , con las amplitudes medidas en centímetros sobre la escala,  $A_R$  y  $A_L$ , es

$$\begin{aligned} A_R &= 2r\Theta_R, \\ A_L &= 2r\Theta_L, \end{aligned} \quad (2.21)$$

por lo que el cambio en el torque de la luz sobre la placa  $M$  de acuerdo con la ecuación (2.20) estará dado por

$$\Delta\tau = \frac{\kappa}{2r}(A_L - A_R) = Kx, \quad (2.22)$$

donde  $K = \frac{\kappa}{2r}$  y  $x = A_L - A_R$  es el cambio en la amplitud del péndulo medida sobre la escala. Por lo tanto se ha obtenido la fórmula para el cálculo del cambio del momento angular usada por Beth [4].

El experimento de Richard Beth logró detectar y medir por primera vez el cambio en el momento angular de la luz al atravesar una placa retardadora de media longitud de onda mostrando además que el momento de fuerza variaba de acuerdo con las variables del experimento las cuales son intensidad, polarización y fase relativa de las componentes de la luz.

## 2.2. Momento angular de un campo electromagnético

El momento angular de una partícula en la posición  $\vec{r}$  con momento lineal  $\vec{p}$  está dado por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (2.23)$$

y dado que el campo electromagnético posee momento lineal entonces parece natural suponer que también debería tener momento angular.

El momento de torsión o torca que la fuerza de Lorentz (1.51) ejerce sobre una partícula cargada en la posición  $\vec{r}$  respecto del origen  $O$  es la cantidad vectorial

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.24)$$

Si existe una distribución continua de cargas y corrientes encerradas en un volumen  $V$  en un medio homogéneo, isótropo, descrito por la permitividad  $\varepsilon$  y la permeabilidad  $\mu$ , entonces la torca debida al campo electromagnético sobre la distribución de cargas y corrientes será

$$\frac{d\vec{L}_{mec}}{dt} = \int_V \vec{r} \times (\rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV, \quad (2.25)$$

donde  $\vec{L}_{mec}$  corresponde al momento angular mecánico total de la distribución. Con ayuda de las ecuaciones de Maxwell,  $\rho$  y  $\vec{J}$  son expresadas en términos de los campos eléctrico y magnético y luego de un procedimiento similar al seguido en la sección 1.5.2 se obtiene que

$$\frac{d\vec{L}_{mec}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \int_V \vec{r} \times (\nabla \cdot \vec{T}) dV, \quad (2.26)$$

además, usando que

$$\vec{r} \times (\nabla \cdot \vec{T}) = -\nabla \cdot (\vec{T} \times \vec{r}), \quad (2.27)$$

entonces se tendrá, luego de usar el teorema de la divergencia, que la ecuación (2.26) es expresada como

$$\frac{d\vec{L}_{mec}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) dV = - \int_A (\vec{T} \times \vec{r}) \cdot \hat{n} da, \quad (2.28)$$

que se trata de la expresión de la conservación del momento angular [5], análoga a la ecuación de conservación del momento lineal. El primer término de la ecuación (2.28) se trata de la razón de cambio en el tiempo del momento angular mecánico de la distribución de cargas, el segundo término es identificado como la razón de cambio del momento angular total del campo electromagnético. A partir de este término, se identifica la densidad de momento angular de un campo electromagnético y que está dada por

$$\vec{j} = \varepsilon \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}), \quad (2.29)$$

y que puede ser expresado en términos de la densidad de momento lineal  $\vec{p}$  del campo electromagnético de la siguiente manera

$$\vec{j} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (2.30)$$

Por lo tanto, el momento angular total del campo electromagnético es la integral de volumen de  $\vec{j}$

$$\vec{L} = \int_V \varepsilon \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) dV. \quad (2.31)$$

Y el término de la derecha en la ecuación (2.28) representa un flujo de momento angular por unidad de tiempo a través de la superficie  $A$  que encierra al volumen  $V$ .

Para una onda electromagnética propagándose en espacio libre las densidades de energía  $w$ , momento lineal  $\vec{p}$  y momento angular  $\vec{j}$  son

$$w = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B} \right), \quad (2.32)$$

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}, \quad (2.33)$$

$$\vec{j} = \varepsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}), \quad (2.34)$$

donde las magnitudes físicas totales son obtenidas al integrar sobre todo el espacio.

## 2.3. Momento angular orbital y de espín

El momento angular total de una onda electromagnética propagándose en el vacío está dado por

$$\vec{L} = \int_V \varepsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) dV, \quad (2.35)$$

donde los campos eléctrico y magnético satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vacío (1.7 - 1.10). El momento angular total (2.35) puede ser separado en dos contribuciones, llamadas momento angular orbital y momento angular de espín, [5, 9] de la siguiente manera:

A partir de la relación entre el campo magnético  $\vec{B}$  y el potencial vectorial  $\vec{A}$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (2.36)$$

y de usar la identidad vectorial

$$\begin{aligned} \vec{E} \times (\nabla \times \vec{A}) &= E_\alpha (\nabla A_\alpha) - (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{A} \\ &= E_\alpha (\nabla A_\alpha) - \nabla_\alpha (E_\alpha \vec{A}) + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{E}), \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde se ha usado el convenio de suma de Einstein,  $E_\alpha$  y  $A_\alpha$  representan las componentes cartesianas de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{A}$  respectivamente y  $\nabla_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial r_\alpha}$ , la ecuación (2.35) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \varepsilon_0 \int_V \vec{r} \times \vec{E} \times (\nabla \times \vec{A}) dV \\ &= \varepsilon_0 \int_V \left[ E_\alpha (\vec{r} \times \nabla) A_\alpha - \vec{r} \times \nabla_\alpha (E_\alpha \vec{A}) + \vec{r} \times \vec{A} (\nabla \cdot \vec{E}) \right] dV, \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde el tercer término del integrando en la ecuación (2.38) es cero debido a la ley de Gauss eléctrica.

Por otro lado, se tiene que el segundo término del integrando de la ecuación (2.38) puede ser escrito como

$$\vec{r} \times \nabla_\alpha (E_\alpha \vec{A}) = -\vec{E} \times \vec{A} + \nabla_\alpha (E_\alpha \vec{r} \times \vec{A}), \quad (2.39)$$

y por lo tanto

$$\vec{L} = \varepsilon_0 \int_V \left[ E_\alpha (\vec{r} \times \nabla) A_\alpha + \vec{E} \times \vec{A} - \nabla_\alpha (E_\alpha \vec{r} \times \vec{A}) \right] dV. \quad (2.40)$$

El tercer término de la ecuación (2.40) se puede expresar como una integral de superficie de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_V \nabla_\alpha (E_\alpha \vec{r} \times \vec{A}) dV &= \int_V \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i \nabla_\alpha (E_\alpha r_j A_k) dV \\ &= \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i \int_V (\nabla_m \hat{e}_m) \cdot (E_\alpha r_j A_k \hat{e}_\alpha) dV = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i \int_V \nabla \cdot (\vec{E} r_j A_k) dV \\ &= \int_A (\vec{r} \times \vec{A}) \vec{E} \cdot d\vec{a}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde  $\varepsilon_{ijk}$  es el tensor de Levi-Civita,  $\hat{e}_i$  con  $i = 1, 2, 3$  representa cada uno de los vectores unitarios de la base cartesiana  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ . Se ha usado el teorema de la divergencia para expresar la integral de volumen como una integral sobre la superficie que encierra al volumen  $V$ .

Por lo tanto, el momento angular total de la onda electromagnética será

$$\vec{L} = \varepsilon_0 \int_V \left[ \sum_{\alpha} E_{\alpha}(\vec{r} \times \nabla) A_{\alpha} + \vec{E} \times \vec{A} \right] dV - \int_A (\vec{r} \times \vec{A}) \vec{E} \cdot d\vec{a}. \quad (2.42)$$

Para campos producidos en un tiempo finito en el pasado y que por lo tanto están localizados en una región finita del espacio, o bien, para campos que decrecen rápidamente en un volumen suficientemente grande, la integral de superficie de la ecuación (2.42) es cero y con ello el momento angular total estará dado por

$$\vec{L} = \varepsilon_0 \int_V \sum_{\alpha} E_{\alpha}(\vec{r} \times \nabla) A_{\alpha} dV + \varepsilon_0 \int_V \vec{E} \times \vec{A} dV, \quad (2.43)$$

donde el primer término es llamado Momento Angular Orbital (OAM por sus siglas en inglés) por analogía con la teoría cuántica debido a la presencia del operador de momento angular orbital  $\vec{L} = -i\hbar(\vec{r} \times \nabla)$ , mientras que el segundo término es definido como Momento Angular de Espín (SAM) y se trata de una cantidad global pues para obtenerlo se ha usado el teorema de la divergencia.

Tanto la parte orbital como la de espín del momento angular de la luz dependen de la elección de la norma, o bien, dependen del potencial vectorial  $\vec{A}$ , el cual no es un campo vectorial único en el sentido de que los campos eléctrico y magnético pueden ser obtenidos a partir de distintos potenciales vectoriales ( $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son invariantes ante transformaciones de norma [9]), sin embargo, dado que  $\vec{A}$  puede ser expresado como la suma de una parte transversal  $\vec{A}_{\perp}$  (que es un invariante de norma) y una parte longitudinal  $\vec{A}_{\parallel}$

$$\vec{A} = \vec{A}_{\perp} + \vec{A}_{\parallel}, \quad (2.44)$$

donde

$$\nabla \cdot \vec{A}_{\perp} = 0, \quad (2.45)$$

y

$$\nabla \times \vec{A}_{\parallel} = 0, \quad (2.46)$$

entonces se tendrá que  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}_{\perp}$ . Al reemplazar esta ecuación en (2.36) y siguiendo un procedimiento análogo al mostrado se obtienen los momentos angulares orbital y de espín dependientes de la parte transversal del potencial vectorial  $\vec{A}_{\perp}$  y por lo tanto serán invariantes en norma. Aún así se ha cuestionado la validez de la separación del momento angular de la luz debido a que los momentos angulares orbital y de espín, vistos como generadores de rotaciones de los campos electromagnéticos, donde el OAM genera rotaciones de los campos en el espacio sin variar la dirección de los mismos y el SAM rota la dirección de los campos dejando invariante la amplitud, son imposibles de realizar individualmente sin violar las ecuaciones de Maxwell [10].

### 2.3.1. Momento angular de ondas monocromáticas

En la sección 1.4 se mostraron las expresiones complejas que describen a una onda electromagnética monocromática, sin embargo, físicamente lo que representa a una onda es la parte real de dichas funciones complejas, es por ello que para calcular las densidades de momento lineal y angular de las ondas electromagnéticas, los campos eléctrico y magnético deben estar dados por

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t)\} = \frac{1}{2} \left[ \vec{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t) + \vec{E}^*(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \right], \quad (2.47)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{B}(\vec{r}) \exp(i\omega t)\} = \frac{1}{2} \left[ \vec{B}(\vec{r}) \exp(i\omega t) + \vec{B}^*(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \right], \quad (2.48)$$

donde  $\vec{E}(\vec{r})$  y  $\vec{B}(\vec{r})$  son las amplitudes complejas de los campos eléctrico y magnético.

El promedio temporal de la densidad de momento lineal de la onda electromagnética monocromática es (ver apéndice A, ecuación (A.9))

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} \text{Re}\{\vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\}, \quad (2.49)$$

por lo que su momento angular total será obtenido al calcular matemáticamente la parte real de

$$\vec{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) dV. \quad (2.50)$$

De la ley de Faraday para una onda monocromática, ecuación (1.43), se tiene

$$\vec{B} = \frac{i}{\omega} \nabla \times \vec{E}, \quad (2.51)$$

y al sustituir  $\vec{B}$  en la ecuación (2.50) se tendrá

$$\vec{L} = \frac{i\varepsilon_0}{2\omega} \int_V \vec{r} \times \vec{E}^* \times (\nabla \times \vec{E}) dV, \quad (2.52)$$

y luego de un procedimiento matemático análogo al mostrado en la sección 2.3 se obtiene [21]

$$\begin{aligned} \vec{L} &= -\frac{\varepsilon_0}{2i\omega} \int_V \left[ E_\alpha^* (\vec{r} \times \nabla) E_\alpha - \vec{r} \times \nabla_\alpha (E_\alpha^* \vec{E}) \right] dV \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2i\omega} \int_V \sum_\alpha E_\alpha^* (\vec{r} \times \nabla) E_\alpha dV - \frac{\varepsilon_0}{2i\omega} \int_V \vec{E}^* \times \vec{E} dV, \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde el primer término es el momento angular orbital, el cual, además de depender de las componentes complejas del campo eléctrico, depende del vector de posición  $\vec{r}$  y el segundo término es el momento angular de espín, el cual depende únicamente de las componentes del campo, para ondas monocromáticas.

## 2.4. Momento angular de una onda plana de extensión finita

A partir de la expresión para la densidad de momento lineal  $\vec{p} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$  se deduce que para una onda plana ideal  $\vec{p}$  es paralela a la dirección de propagación del haz, digamos  $z$ , pues sus campos eléctrico y magnético oscilan en la dirección perpendicular a su dirección de propagación. Por lo tanto, al realizar el producto vectorial del vector de posición  $\vec{r}$  con  $\vec{p}$  no habrá componente de momento angular en la dirección de propagación  $z$  sin importar si la onda se encuentra polarizada circularmente o no, por lo que, en consecuencia, no tendrá un momento angular para transferir a una placa retardadora de ondas cuando incide perpendicularmente a su superficie, sin embargo, en la sección 2.1 se revisó el experimento de Beth [4] donde se mostró que se pudo calcular y medir tal transferencia de momento angular. Esta aparente contradicción surge de considerar una onda plana de extensión infinita ya que los haces reales están limitados en extensión transversal por sí mismos o por el sistema óptico en el que inciden. Esta extensión finita da lugar a que los campos electromagnéticos posean componentes en la dirección de propagación y que por lo tanto también haya momento angular en esa dirección [11]. Esto conduce a estudiar el momento angular de una onda plana de extensión finita.

Se propone que el campo eléctrico que describe a una onda plana de extensión finita circularmente polarizada a izquierdas y derechas propagándose en la dirección  $z$  sea como la expresión de

una onda plana ideal circularmente polarizada de la ecuación (1.50) pero cuya envolvente compleja  $E_0$  se trata de una función, es decir, se tendrá

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0(x, y, z)(\hat{i} \pm i\hat{j}) \exp[-i(kz - \omega t)], \quad (2.54)$$

con  $E_0 = E_0(x, y, z) = E_0(\rho, z)$  una función radialmente simétrica de extensión finita en el plano transversal  $xy$  y que es lentamente variable con  $\rho$  y  $z$ , es decir, al propagarse la onda una distancia del orden de una longitud de onda su amplitud no tendrá gran cambio.

Sustituyendo (2.54) en la ley de Faraday (1.9) se obtiene que su correspondiente campo magnético es

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mp \frac{i}{c} \left[ E_0(x, y, z)(\hat{i} \pm i\hat{j}) - \frac{i}{k} \left( \frac{\partial E_0(x, y, z)}{\partial x} \pm i \frac{\partial E_0(x, y, z)}{\partial y} \right) \hat{k} \right] \exp[-i(kz - \omega t)], \quad (2.55)$$

donde se ha hecho uso de la desigualdad (1.23). Este campo magnético posee una componente en la dirección de propagación  $z$  de la onda y sugiere que el campo eléctrico también debería tener una componente en esta misma dirección.

Al sustituir  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  de la ecuación (2.55) en la ley de Ampere (1.10), haciendo uso de la teoría y las desigualdades mostradas en la sección 1.3 y al despejar el campo eléctrico se obtiene

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left[ E_0(x, y, z)(\hat{i} \pm i\hat{j}) - \frac{i}{k} \left( \frac{\partial E_0(x, y, z)}{\partial x} \pm i \frac{\partial E_0(x, y, z)}{\partial y} \right) \hat{k} \right] \exp[-i(kz - \omega t)], \quad (2.56)$$

que a diferencia del campo eléctrico de la ecuación (2.54), este posee una componente en la dirección de propagación  $z$ . Los campos eléctrico y magnético de las ecuaciones (2.56) y (2.55) satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vacío por lo tanto se concluye que estos son los campos que describen a una onda plana circularmente polarizada de extensión finita. Note que cuando  $E_0$  es una constante los campos eléctrico y magnético corresponden a los de una onda plana ideal.

Debido a la simetría cilíndrica de la envolvente compleja  $E_0$  será conveniente expresar a los campos eléctrico y magnético en coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ . En la base de las coordenadas cilíndricas los vectores unitarios  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  de las coordenadas rectangulares están dados por

$$\hat{i} = \cos(\phi)\hat{\rho} - \text{sen}(\phi)\hat{\phi}, \quad (2.57)$$

$$\hat{j} = \text{sen}(\phi)\hat{\rho} + \cos(\phi)\hat{\phi}, \quad (2.58)$$

donde  $\hat{\rho}$  y  $\hat{\phi}$  son los vectores unitarios base de las coordenadas cilíndricas. De las ecuaciones (2.57) y (2.58) se tiene que

$$\hat{i} \pm i\hat{j} = \exp[\pm i\phi](\hat{\rho} \pm i\hat{\phi}), \quad (2.59)$$

además, haciendo uso de la regla de la cadena se halla que

$$\frac{\partial E_0(\rho, z)}{\partial x} \pm i \frac{\partial E_0(\rho, z)}{\partial y} = \exp[\pm i\phi] \frac{\partial E_0(\rho, z)}{\partial \rho}. \quad (2.60)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (2.59) y (2.60) el campo eléctrico de la ecuación (2.56) en coordenadas cilíndricas es

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left[ E_0(\rho, z)(\hat{\rho} \pm i\hat{\phi}) - \frac{i}{k} \frac{\partial E_0(\rho, z)}{\partial \rho} \hat{z} \right] \exp[-i(kz - \omega t \mp \phi)], \quad (2.61)$$

y el campo magnético

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mp \frac{i}{c} \left[ E_0(\rho, z)(\hat{\rho} \pm i\hat{\phi}) - \frac{i}{k} \frac{\partial E_0(\rho, z)}{\partial \rho} \hat{z} \right] \exp[-i(kz - \omega t \mp \phi)]. \quad (2.62)$$

De acuerdo con la ecuación (2.53) el momento angular orbital está dado por

$$\vec{L}_{orbital} = -\frac{\varepsilon_0}{2i\omega} \int_V \sum_{\alpha} E_{\alpha}^* (\vec{r} \times \nabla) E_{\alpha} dV, \quad (2.63)$$

con  $\alpha = x, y, z$ . Para calcular este momento angular se necesitan las componentes cartesianas de la amplitud compleja del campo eléctrico y que en coordenadas cilíndricas son

$$E_x = E_0(\rho, z) \exp[-ikz], \quad (2.64)$$

$$E_y = \pm i E_0(\rho, z) \exp[-ikz], \quad (2.65)$$

$$E_z = -\frac{i}{k} \frac{\partial E_0(\rho, z)}{\partial \rho} \exp[-ikz \pm i\phi]. \quad (2.66)$$

Además, se tiene que

$$\vec{r} \times \nabla = \left[ -\frac{z}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \hat{\rho} + \left[ z \frac{\partial}{\partial \rho} - \rho \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\phi} + \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \hat{z}, \quad (2.67)$$

por lo que el momento angular orbital en la dirección  $z$  de propagación de la onda estará dado por

$$\begin{aligned} L_{orbitalz} &= -\frac{\varepsilon_0}{2i\omega} \int_V \sum_{\alpha} E_{\alpha}^* \frac{\partial}{\partial \phi} E_{\alpha} dV \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2i\omega} \int_V \left[ \frac{i}{k} \frac{\partial E_0^*}{\partial \rho} \exp[ikz \mp i\phi] \frac{\partial}{\partial \phi} \left( -\frac{i}{k} \frac{\partial E_0}{\partial \rho} \exp[-ikz \pm i\phi] \right) \right] dV \\ &= \mp \frac{\varepsilon_0}{2\omega k^2} \int_V \left| \frac{\partial E_0}{\partial \rho} \right|^2 dV, \end{aligned} \quad (2.68)$$

y asumiendo que  $E_0(\rho, z)$  es una función real se tendrá que

$$L_{orbitalz} = \mp \frac{\varepsilon_0}{2\omega k^2} \int_V \left( \frac{\partial E_0}{\partial \rho} \right)^2 dV, \quad (2.69)$$

y la densidad de momento angular orbital, que se trata del integrando de la ecuación (2.69), será

$$j_{orbitalz} = \mp \frac{\varepsilon_0}{2\omega k^2} \left( \frac{\partial E_0(\rho, z)}{\partial \rho} \right)^2, \quad (2.70)$$

que se trata de una cantidad pequeña debido a que la variación de la envolvente  $E_0$  respecto de  $\rho$  es lenta.

Por otro lado, de la ecuación (2.53) el momento angular de espín está dado por

$$\vec{L}_{spin} = -\frac{\varepsilon_0}{2i\omega} \int_V \vec{E}^* \times \vec{E} dV, \quad (2.71)$$

donde el producto vectorial es calculado a partir de la amplitud compleja del campo eléctrico (2.61)

$$\vec{E}^* \times \vec{E} = \left[ \mp E_0^* \frac{\partial E_0}{\partial \rho} \pm E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial \rho} \right] \hat{\rho} + \frac{i}{k} \left[ E_0^* \frac{\partial E_0}{\partial \rho} + E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial \rho} \right] \hat{\phi} \pm 2i |E_0|^2 \hat{z}, \quad (2.72)$$

por lo que el momento angular de espín en la dirección de propagación  $z$ , asumiendo que  $E_0(\rho, z)$  es una función real, es

$$L_{spinz} = \mp \frac{\varepsilon_0}{\omega} \int_V E_0^2 dV. \quad (2.73)$$

En resumen, la componente  $z$  del momento angular total de una onda plana de extensión finita circularmente polarizada a izquierdas o a derechas está dada por

$$L_z = L_{orbitalz} + L_{espinz} = \int_V \left[ \mp \frac{\varepsilon_0}{2\omega k^2} \left( \frac{\partial E_0(\rho, z)}{\partial \rho} \right)^2 \mp \frac{\varepsilon_0}{\omega} E_0^2 \right] dV = \mp \frac{\varepsilon_0}{\omega} \int_V E_0^2 dV, \quad (2.74)$$

donde se ha despreciado el primer término debido a que  $E_0$  es una función lentamente variable de  $\rho$ , quedando únicamente el término de espín.

No es posible obtener una expresión explícita de la densidad de momento angular de espín debido a que la función  $E_0$  está implícita, sin embargo, si podemos hallar la razón entre el momento angular y la energía almacenada por el campo electromagnético (2.32).

El promedio temporal de la energía electromagnética está dada por (ver apéndice A, ecuación (A.12))

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \left[ \varepsilon_0 \vec{E}^* \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^* \cdot \vec{B} \right]. \quad (2.75)$$

Al usar las amplitudes complejas de las ecuaciones (2.61) y (2.62) se encuentra

$$\langle w \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2k^2} \left( \frac{\partial E_0}{\partial \rho} \right)^2 + \varepsilon_0 E_0^2 = \varepsilon_0 E_0^2, \quad (2.76)$$

donde se ha despreciado el primer término. Por lo tanto, el cociente entre el momento angular de espín y la energía electromagnética total  $W$  de la onda plana circularmente polarizada de extensión finita es

$$\frac{L_{espinz}}{W} = \frac{\mp \frac{\varepsilon_0}{\omega} \int_V E_0^2 dV}{\varepsilon_0 \int_V E_0^2 dV} = \mp \frac{1}{\omega}, \quad (2.77)$$

y a partir de este resultado puede ser interpretado que cada fotón de energía  $\hbar\omega$  de luz circularmente polarizada a izquierdas o derechas tiene asociado un momento angular de  $\mp\hbar$  en la dirección de propagación, un resultado que coincide con lo planteado en el artículo de Beth [4].

## Capítulo 3

# Descripción vectorial de los haces paraxiales

Las propiedades físicas de la luz como la energía, momento lineal y momento angular están dadas en términos de los campos eléctrico y magnético que describen a la luz y, por lo tanto, para calcularlas para un haz paraxial es necesario conocer las expresiones de los campos electromagnéticos que describen a estos haces.

En este capítulo se muestran las expresiones vectoriales de los campos eléctrico y magnético de los haces paraxiales partiendo del conocido potencial vectorial que está estrechamente relacionado con los campos electromagnéticos. En la sección 3.1 se muestra que una onda electromagnética debe poseer componentes en la dirección de propagación para poder satisfacer la ley de Gauss eléctrica. En la sección 3.2 se revisa la teoría electromagnética concerniente a los potenciales escalar y vectorial y se muestra que en el espacio libre y bajo cierta condición conocida como norma de Lorenz el potencial vectorial satisface la ecuación vectorial de onda en el vacío. En la sección 3.3 se obtienen los campos eléctrico y magnético para haces paraxiales partiendo de un potencial vectorial armónico en el tiempo cuya amplitud recuerda a la amplitud de un haz paraxial de la teoría escalar de la luz. En particular se describen vectorialmente a los haces Gaussianos y Laguerre-Gauss. Por último, en la sección 3.4 se muestra un tratamiento vectorial para hallar las expresiones vectoriales de las ondas electromagnéticas que describen a los haces Bessel de alto orden.

### 3.1. Introducción

En la sección 1.1 se mostró que en el vacío el campo eléctrico debe satisfacer la ecuación vectorial de onda

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

y que cada una de sus componentes debe satisfacerla también. A partir de este hecho y bajo la aproximación paraxial se obtuvo la ecuación paraxial de Helmholtz con la que se describió escalarmente a los haces paraxiales. Sin embargo, si se busca una solución a esta ecuación vectorial de onda (3.1) linealmente polarizada de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) \exp(i\omega t)\hat{i}, \quad (3.2)$$

donde  $U(\vec{r})$  es la amplitud compleja de un haz paraxial que se propaga en la dirección  $z$ , ver ecuación (1.22), entonces debe cumplir con la ley de Gauss, es decir, que  $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$  sea igual a cero. Dado que el campo eléctrico (3.2) esta linealmente polarizado en la dirección  $x$  entonces se

tendrá

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \exp(i\omega t), \quad (3.3)$$

sin embargo, en general  $\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \neq 0$  (para una onda plana ideal si es cero pues su amplitud es constante). Por lo tanto, la propuesta de campo eléctrico linealmente polarizado de la ecuación (3.2) podría ser solución aproximada a la ecuación de onda pues  $U(\vec{r})$  es la amplitud compleja de un haz paraxial pero podría no representar un campo eléctrico en el vacío. Por otro lado, de acuerdo con Lax, Louisell y McKnight [22] si un campo eléctrico representa a una onda linealmente polarizada en la dirección  $x$ , como el de la ecuación (3.2), entonces la amplitud de esta onda debe ser independiente de la coordenada  $x$ . Es por ello que se espera que el campo eléctrico posea una componente de campo en la dirección de propagación de la onda con el fin de satisfacer la condición  $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$ , un resultado que ya se anticipaba desde la sección 2.4 cuando se describió a una onda plana de extensión finita.

Lax, Louisell y McKnight [22] mostraron además que si el campo eléctrico es expresado como una serie de potencias de un parámetro  $f$  dado por el cociente entre la cintura del haz  $W_0$  y la longitud de difracción  $2z_0$ , es decir,  $f = \frac{W_0}{2z_0}$  con  $W_0 \ll 2z_0$  (condición de aproximación paraxial) y el campo es sustituido en las ecuaciones de Maxwell, entonces el término de menor orden en  $f$  del campo, el cual puede depender de las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  y es transversal en el sentido de que tiene componentes del campo en la dirección transversal a  $z$ , debe satisfacer la ecuación paraxial de Helmholtz, lo cual justifica el hecho de poder describir a los haces paraxiales de forma escalar.

En la siguiente sección se mostrará que al igual que el campo eléctrico, el conocido potencial vectorial cumple con la ecuación vectorial de onda, con la ventaja de que la divergencia de este campo no necesariamente debe ser cero por lo que se podrán obtener soluciones linealmente polarizadas del potencial vectorial a partir de las cuales los campos eléctrico y magnético serán obtenidos.

## 3.2. Potenciales vectorial y escalar

A partir de la ley de Gauss magnética (1.8) se deduce que el campo magnético puede ser expresado en términos del llamado potencial vectorial  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  como

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (3.4)$$

pues el operador divergencia aplicado al rotacional de cualquier campo vectorial es cero. De la ley de Faraday (1.9) y de la ecuación (3.4) se deduce que el campo eléctrico puede ser expresado como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.5)$$

donde  $\Phi(\vec{r}, t)$  es conocido como potencial escalar. En términos de estos potenciales escalar y vectorial la ley de Ampere en el vacío (1.10) es dada por

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.6)$$

y haciendo uso de la identidad vectorial  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$  se obtiene

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right). \quad (3.7)$$

Por otro lado, la ley de Gauss eléctrica (1.7) está dada por

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t}. \quad (3.8)$$

**Descripción vectorial de los haces paraxiales**  
**3.3 Campos eléctrico y magnético de los haces paraxiales**

---

Las ecuaciones (3.7) y (3.8) están acopladas, sin embargo, dado que el potencial vectorial  $\vec{A}$  y el potencial escalar  $\Phi$  no son únicos en el sentido de que existen otros potenciales vectorial  $\vec{A}'$  y escalar  $\Phi'$  que conducen a los mismos campos eléctrico  $\vec{E}$  y magnético  $\vec{B}$  entonces el desacoplamiento de las ecuaciones (3.7) y (3.8) puede llevarse a cabo debido a esta arbitrariedad en la definición de los potenciales. Estos potenciales primados están definidos de la siguiente manera

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla F, \quad (3.9)$$

y

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (3.10)$$

con  $F(\vec{r}, t)$  una función arbitraria. Por lo tanto, el hecho de que se tenga la libertad de elegir cualquier función  $F(\vec{r}, t)$  para definir los potenciales, y con ello los campos, da la posibilidad de elegir los potenciales de tal manera que cumplan con la siguiente condición [5]

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0, \quad (3.11)$$

conocida como norma de Lorenz.

Imponiendo la condición (3.11) en las ecuaciones (3.7) y (3.8) se encuentra que

$$\nabla^2 \vec{A}' - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} = 0, \quad (3.12)$$

$$\nabla^2 \Phi' - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} = 0, \quad (3.13)$$

es decir, en espacio libre y dentro de la norma de Lorenz los potenciales vectorial y escalar satisfacen la ecuación de onda [5, 23].

### 3.3. Campos eléctrico y magnético de los haces paraxiales

Los campos eléctrico y magnético, al igual que el potencial vectorial, satisfacen la ecuación vectorial de onda pero a diferencia de los campos electromagnéticos, para el potencial vectorial no es necesario que  $\nabla \cdot \vec{A}'(\vec{r}, t)$  sea igual a cero, como debe ocurrir con los campos electromagnéticos debido a la ley de Gauss, donde esta divergencia de  $\vec{A}'(\vec{r}, t)$  solo define cómo es el potencial escalar  $\Phi'$  de acuerdo con (3.11). Por lo tanto, pueden existir soluciones linealmente polarizadas del potencial vectorial [23] que darán lugar a las expresiones de los campos eléctrico y magnético.

Si se considera en la ecuación (3.12) que el potencial vectorial es armónico en el tiempo, con una frecuencia angular  $\omega$ , con una amplitud compleja dada por la función escalar  $\psi(\vec{r})$  que solo depende de la posición y que está polarizado en la dirección dada por un vector unitario  $\hat{n}$ , es decir,

$$\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}'(\vec{r}) \exp[i\omega t] = \psi(\vec{r}) \exp[i\omega t] \hat{n}, \quad (3.14)$$

entonces se concluye que la amplitud compleja  $\psi(\vec{r})$  debe satisfacer la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + k^2 \psi(\vec{r}) = 0, \quad (3.15)$$

y no se imponen otras restricciones a  $\psi(\vec{r})$ .

Para describir a los haces paraxiales se asume que

$$\psi(\vec{r}) = u(\vec{r}) \exp(-ikz), \quad (3.16)$$

donde  $u(\vec{r})$  es la envolvente compleja, una función lentamente variable con la posición que cumple con la aproximación de envolvente lentamente variable y el factor  $\exp(-ikz)$  define a  $z$  como la

**Descripción vectorial de los haces paraxiales**  
3.3 Campos eléctrico y magnético de los haces paraxiales

---

dirección de propagación. Sustituyendo la ecuación (3.16) en (3.15) se concluye que  $u(\vec{r})$  debe satisfacer la ecuación paraxial de Helmholtz

$$\nabla_T^2 u(\vec{r}) - 2ik \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial z} = 0, \quad (3.17)$$

donde  $u(\vec{r})$  será la función que describa la distribución de amplitud del haz paraxial.

Para describir a un haz paraxial se propone que el potencial vectorial esté dado por [12]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = (\alpha \hat{i} + \beta \hat{j}) u(\vec{r}) \exp[-i(kz - \omega t)], \quad (3.18)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes complejas tales que  $(\alpha \hat{i} + \beta \hat{j})$  es un vector unitario complejo en el sentido de que debe satisfacer que  $\hat{n} \cdot \hat{n}^* = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

De la ecuación (3.11) se tiene que el potencial escalar para campos armónicos es

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{i}{\epsilon_0 \mu_0 \omega} \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}), \quad (3.19)$$

por lo que de (3.5) y (3.19) se encuentra que el campo eléctrico en términos del potencial vectorial está dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega \vec{A}(\vec{r}) - i \frac{c}{k} \nabla (\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})), \quad (3.20)$$

donde se ha considerado únicamente la dependencia espacial. La dependencia temporal es recuperada al multiplicar por el factor  $\exp(i\omega t)$ .

Entonces al sustituir (3.18) en (3.20) se encuentra

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -i\omega(\alpha \hat{i} + \beta \hat{j}) u(\vec{r}) \exp(-ikz) - i \frac{c}{k} \nabla \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \exp(-ikz) + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \exp(-ikz) \right) \\ &= \left[ \frac{c}{k} \left( -i\alpha k^2 u - i\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \hat{i} + \frac{c}{k} \left( -i\beta k^2 u - i\beta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \hat{j} \right. \\ &\quad \left. - i \frac{c}{k} \left( \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( -iku + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial y} \left( -iku + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \hat{k} \right] \exp(-ikz). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ahora bien, dado que  $u(\vec{r})$  cumple con la aproximación de envolvente lenta de la sección 1.3 y además satisface las desigualdades (1.23), (1.24) entonces se pueden despreciar las primeras derivadas parciales de  $u(\vec{r})$  respecto de  $z$  y las segundas derivadas parciales respecto de las coordenadas transversales  $x$  y  $y$  en comparación con el valor de la magnitud de  $u(\vec{r})$ , por lo que la amplitud compleja del campo eléctrico puede ser aproximada a

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega \left[ \alpha u \hat{i} + \beta u \hat{j} - \frac{i}{k} \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \right] \exp(-ikz). \quad (3.22)$$

El campo magnético correspondiente es obtenido al sustituir (3.18) en la ecuación (3.4)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \left[ \beta \left( ik u - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{i} - \alpha \left( ik u - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{j} + \left( \beta \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \right] \exp(-ikz), \quad (3.23)$$

y nuevamente en la aproximación paraxial la amplitud compleja del campo magnético puede ser aproximada a

$$\vec{B}(\vec{r}) = -ik \left[ -\beta u \hat{i} + \alpha u \hat{j} + \frac{i}{k} \left( \beta \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \right] \exp(-ikz). \quad (3.24)$$

Por lo tanto, los campos eléctrico y magnético correspondientes al potencial vectorial de la ecuación (3.18) están dados por (3.22) y (3.24) en donde  $u(\vec{r})$  es la envolvente compleja de un haz paraxial, como el haz Gaussiano o el haz Laguerre-Gauss. Estos campos no son estrictamente transversales

en el sentido de que además de poseer componentes que oscilan en la dirección  $x$  y  $y$  tienen pequeñas componentes de campo en la dirección  $z$  de propagación que dependen de la variación transversal de la distribución de amplitud  $u(\vec{r})$ .

La polarización de estos campos está dada en función de los valores de las constantes complejas  $\alpha$  y  $\beta$  que aparecen como factores en las componentes transversales de (3.22) y (3.24), donde las magnitudes de  $\alpha$  y  $\beta$  son tales que  $(\alpha\hat{i} + \beta\hat{j})$  es un vector complejo unitario y dependiendo de sus amplitudes y de los valores relativos de sus fases se tendrá polarización lineal, circular o elíptica.

El campo eléctrico estará linealmente polarizado en la dirección  $x$  si  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$  y estará dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega \left[ u\hat{i} - \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial x} \hat{k} \right] \exp(-ikz), \quad (3.25)$$

y su respectivo campo magnético será

$$\vec{B}(\vec{r}) = -ik \left[ u\hat{j} - \frac{i}{k} \frac{\partial u}{\partial y} \hat{k} \right] \exp(-ikz), \quad (3.26)$$

mientras que el campo eléctrico estará linealmente polarizado en la dirección  $y$  si  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ .

Por otro lado, se tendrá polarización circular a izquierdas si  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $\beta = \frac{i}{\sqrt{2}}$  y el campo eléctrico estará dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{i\omega}{\sqrt{2}} \left[ u\hat{i} + iu\hat{j} - \frac{i}{k} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \right] \exp(-ikz), \quad (3.27)$$

y su campo magnético correspondiente será

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{ik}{\sqrt{2}} \left[ -iu\hat{i} + u\hat{j} + \frac{i}{k} \left( i \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \right] \exp(-ikz), \quad (3.28)$$

mientras que el campo estará polarizado circularmente a derechas si  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $\beta = \frac{-i}{\sqrt{2}}$ .

### 3.3.1. Campo eléctrico y magnético del haz Gaussiano

El campo eléctrico del haz Gaussiano es obtenido al sustituir la envolvente compleja del haz Gaussiano (1.29), denotada por  $u_G(\vec{r})$ , en la ecuación (3.22) donde se tendrá, al hacer uso de la regla de la cadena, que

$$\frac{\partial u_G(\vec{r})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A_1}{q(z)} \exp \left[ -ik \frac{\rho^2}{2q(z)} \right] \right) = -ik \frac{x}{q(z)} u_G(\vec{r}), \quad (3.29)$$

y

$$\frac{\partial u_G(\vec{r})}{\partial y} = -ik \frac{y}{q(z)} u_G(\vec{r}), \quad (3.30)$$

por lo que el campo eléctrico queda como

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -i\omega \left[ \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} - \frac{\alpha x + \beta y}{q(z)} \hat{k} \right] u_G(\vec{r}) \exp(-ikz) \\ &= -i\omega \left[ \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} - (\alpha x + \beta y) \left( \frac{1}{R(z)} - i \frac{2}{kW^2(z)} \right) \hat{k} \right] u_G(\vec{r}) \exp(-ikz), \end{aligned} \quad (3.31)$$

y se encuentra que el campo magnético es

$$\vec{B}(\vec{r}) = -ik \left[ -\beta\hat{i} + \alpha\hat{j} + \frac{\beta x - \alpha y}{q(z)} \hat{k} \right] u_G(\vec{r}) \exp(-ikz). \quad (3.32)$$

### 3.3.2. Campo eléctrico y magnético del haz Laguerre-Gauss

El campo eléctrico del haz Laguerre-Gauss es obtenido al sustituir la envolvente compleja del haz Laguerre-Gauss obtenida de (1.37) y denotada por  $u_{l,m}(\vec{r})$ , en la ecuación (3.22). De la regla de la cadena

$$\frac{\partial u_{l,m}}{\partial x} = \cos \phi \frac{\partial u_{l,m}}{\partial \rho} - \frac{\sin \phi}{\rho} \frac{\partial u_{l,m}}{\partial \phi}, \quad (3.33)$$

y

$$\frac{\partial u_{l,m}}{\partial y} = \sin \phi \frac{\partial u_{l,m}}{\partial \rho} + \frac{\cos \phi}{\rho} \frac{\partial u_{l,m}}{\partial \phi}, \quad (3.34)$$

y al sustituir (3.33) y (3.34) en (3.22) y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial u_{l,m}}{\partial \phi} = -i l u_{l,m} \quad (3.35)$$

se tendrá que el campo eléctrico del haz Laguerre-Gauss de orden  $(l, m)$  es

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega [\alpha u_{l,m} \hat{i} + \beta u_{l,m} \hat{j} - \frac{i}{k} \left( (\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi) \frac{\partial u_{l,m}}{\partial \rho} - i \frac{l}{\rho} (\beta \cos \phi - \alpha \sin \phi) \right) u_{l,m} \hat{k}] \exp(-ikz), \quad (3.36)$$

y el campo magnético será

$$\vec{B}(\vec{r}) = -ik [-\beta u_{l,m} \hat{i} + \alpha u_{l,m} \hat{j} + \frac{i}{k} \left( (\beta \cos \phi - \alpha \sin \phi) \frac{\partial u_{l,m}}{\partial \rho} + i \frac{l}{\rho} (\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi) \right) u_{l,m} \hat{k}] \exp(-ikz), \quad (3.37)$$

donde las componentes de los campos en la dirección de propagación dependen de la variación transversal de la amplitud compleja, del número  $l$  que caracteriza los frentes de onda del haz haciendo que sean helicoides y además dependen del estado de polarización de la onda mediante  $\alpha$  y  $\beta$ . Estas componentes son importantes pues, como se verá, dan lugar a que la onda posea una densidad de momento lineal  $\vec{p}$  que apunta no solo en la dirección  $z$  si no también en la dirección transversal al eje  $z$ .

## 3.4. Campo eléctrico y magnético del haz Bessel

En la sección 1.2 se revisó la expresión escalar de los haces Bessel (1.20), que son una solución exacta de la ecuación escalar de Helmholtz (1.15) en espacio libre y son invariantes en propagación. Para obtener su densidad de momento lineal y angular se requiere una expresión vectorial de estos haces la cual puede ser obtenida al resolver la ecuación vectorial de Helmholtz para el potencial vectorial

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) + k^2 \vec{A}(\vec{r}) = 0, \quad (3.38)$$

que de acuerdo con [24] la solución más general de (3.38) es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_l \left( a_l \vec{M}_l(\vec{r}) + b_l \vec{N}_l(\vec{r}) + c_l \vec{L}_l(\vec{r}) \right), \quad (3.39)$$

con  $a_l$ ,  $b_l$  y  $c_l$  constantes que son determinadas a partir de las condiciones de frontera y donde las funciones  $\vec{L}_l(\vec{r})$ ,  $\vec{M}_l(\vec{r})$  y  $\vec{N}_l(\vec{r})$  son soluciones independientes de la ecuación vectorial de Helmholtz dadas por

$$\vec{L}_l(\vec{r}) = \nabla U_l(\vec{r}), \quad (3.40)$$

$$\vec{M}_l(\vec{r}) = \nabla \times \hat{a} U_l(\vec{r}), \quad (3.41)$$

$$\vec{N}_l(\vec{r}) = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{M}_l(\vec{r}), \quad (3.42)$$

con  $\hat{a}$  un vector unitario constante y  $U_l(\vec{r})$  una solución de la ecuación escalar de Helmholtz, en particular se considera que se trata del haz Bessel de orden  $l$  (1.20). Por lo tanto, con cada función  $U_l(\vec{r})$  habrá 3 soluciones a la ecuación (3.38) siempre que  $U_l(\vec{r})$  cumpla con la ecuación escalar de onda

$$\nabla^2 U_l(\vec{r}) + k^2 U_l(\vec{r}) = 0, \quad (3.43)$$

por ejemplo, para la función  $\vec{L}_l(\vec{r})$

$$\nabla^2 \vec{L}_l(\vec{r}) + k^2 \vec{L}_l(\vec{r}) = \nabla^2(\nabla U_l) + k^2 \nabla U_l = \nabla^2(\nabla U_l) - \nabla(\nabla^2 U_l) = -\nabla \times \nabla \times (\nabla U_l) = 0, \quad (3.44)$$

donde se ha utilizado la ecuación (3.43), la identidad vectorial  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$  y el hecho de que el rotacional del gradiente de un campo escalar es idénticamente cero.

Algunas características de estas funciones vectoriales son que  $\vec{M}_l(\vec{r})$  es perpendicular tanto a  $\vec{L}_l(\vec{r})$  (para una misma función  $U_l(\vec{r})$ ) como al vector unitario  $\hat{a}$  ya que

$$\vec{M}_l = \nabla \times (U_l \hat{a}) = \nabla U_l \times \hat{a} = \vec{L}_l \times \hat{a}. \quad (3.45)$$

Dado que las ecuaciones (3.41) y (3.42) están dadas como rotacionales de campos vectoriales entonces se cumple que  $\vec{M}_l$  y  $\vec{N}_l$  son solenoidales, es decir,

$$\nabla \cdot \vec{M}_l = 0, \quad (3.46)$$

$$\nabla \cdot \vec{N}_l = 0. \quad (3.47)$$

Por otro lado, por la definición de  $\vec{L}_l$  se cumple que

$$\nabla \times \vec{L}_l = 0. \quad (3.48)$$

Además,  $\vec{M}_l$  y  $\vec{N}_l$  están relacionados de la siguiente manera

$$\nabla \times \vec{N}_l = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times \vec{M}_l = \frac{1}{k} (\nabla \nabla \cdot \vec{M}_l - \nabla^2 \vec{M}_l), \quad (3.49)$$

pero dado que  $\vec{M}_l$  satisface la ecuación de Helmholtz y la ecuación (3.46) entonces se obtiene que

$$\vec{M}_l(\vec{r}) = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{N}_l(\vec{r}), \quad (3.50)$$

y a partir de esta relación se puede intuir que los vectores  $\vec{M}_l(\vec{r})$  y  $\vec{N}_l(\vec{r})$  son apropiados para representar a los campos eléctrico y magnético pues cada uno es proporcional al rotacional del otro.

A partir de la ecuación (3.39) y de la relación entre el potencial vectorial y el campo magnético (3.4) se encuentra que  $\vec{B}(\vec{r})$  está dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_l \left( a_l \nabla \times \vec{M}_l + b_l \nabla \times \vec{N}_l + c_l \nabla \times \vec{L}_l \right) = k \sum_l (a_l \vec{N}_l + b_l \vec{M}_l), \quad (3.51)$$

y mediante la ley de Ampere se encuentra el campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{i}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega} \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = -ic \sum_l (a_l \nabla \times \vec{N}_l + b_l \nabla \times \vec{M}_l) = -i\omega \sum_l (a_l \vec{M}_l + b_l \vec{N}_l), \quad (3.52)$$

donde se usaron las ecuaciones (3.42) y (3.50) y el hecho de que el rotacional del vector  $\vec{L}_l(\vec{r})$  es idénticamente cero, ecuación (3.48). Se ha supuesto que los campos eléctrico y magnético son armónicos en el tiempo.

**Descripción vectorial de los haces paraxiales**  
3.4 Campo eléctrico y magnético del haz Bessel

---

Por lo tanto, para hallar el campo eléctrico se requiere obtener las expresiones de  $M_l$  y  $N_l$  para un haz Bessel de orden  $l$  cuya expresión escalar es

$$U_l(\vec{r}) = J_l(k_T \rho) e^{-ik_z z - il\phi}. \quad (3.53)$$

Considerando que  $\hat{a} = \hat{z}$  se obtiene

$$\vec{M}_l = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial U_l}{\partial \phi} \hat{\rho} - \rho \frac{\partial U_l}{\partial \rho} \hat{\phi} \right] = \frac{1}{\rho} \left[ -il J_l \hat{\rho} - \frac{k_T \rho}{2} (J_{l-1} - J_{l+1}) \hat{\phi} \right] e^{-ik_z z - il\phi}, \quad (3.54)$$

y después de usar las relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel [25]

$$J_{l-1}(x) + J_{l+1}(x) = \frac{2l}{x} J_l(x), \quad (3.55)$$

$$J_{l-1}(x) - J_{l+1}(x) = 2J'_l(x), \quad (3.56)$$

se encuentra que

$$\vec{M}_l = \frac{k_T}{2} \left[ -i (J_{l-1} + J_{l+1}) \hat{\rho} - (J_{l-1} - J_{l+1}) \hat{\phi} \right] e^{-ik_z z - il\phi}, \quad (3.57)$$

donde se ha omitido el argumento de las funciones de Bessel, el cual es  $k_T \rho$ . De la misma manera y usando las mismas relaciones de recurrencia (3.55) y (3.56) se encuentra que

$$\vec{N}_l = \frac{k_T}{2k} \left[ -ik_z (J_{l-1} - J_{l+1}) \hat{\rho} - k_z (J_{l-1} + J_{l+1}) \hat{\phi} + 2k_T J_l \hat{z} \right] e^{-ik_z z - il\phi}. \quad (3.58)$$

A partir de las ecuaciones (3.57) y (3.58) se tendrá que cualquier onda electromagnética puede ser expresada como

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) = -i\omega \frac{k_T}{2} \sum_l \left[ \left( \left[ -i(a_l + \frac{k_z}{k} b_l) J_{l-1} - i(a_l - \frac{k_z}{k} b_l) J_{l+1} \right] \hat{\rho} \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ -(a_l + \frac{k_z}{k} b_l) J_{l-1} + (a_l - \frac{k_z}{k} b_l) J_{l+1} \right] \hat{\phi} + 2b_l \frac{k_T}{k} J_l \hat{z} \right) e^{-ik_z z - il\phi} \right]. \quad (3.59) \end{aligned}$$

Buscamos hallar los estados de polarización circular y lineal del haz Bessel, los cuales son obtenidos de la siguiente manera. Se usan las relaciones entre los vectores unitarios de los sistemas de coordenadas rectangular y cilíndrico (2.59) para reescribir el campo eléctrico de la ecuación (3.59) obteniendo

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) = -\omega \frac{k_T}{2} \sum_l \left[ \left( (a_l + \frac{k_z}{k} b_l) J_{l-1} (\hat{i} - i\hat{j}) e^{i\phi} \right. \right. \\ \left. \left. + (a_l - \frac{k_z}{k} b_l) J_{l+1} (\hat{i} + i\hat{j}) e^{-i\phi} + 2ib_l \frac{k_T}{k} J_l \hat{k} \right) e^{-ik_z z - il\phi} \right], \quad (3.60) \end{aligned}$$

se observa que si  $b_l = \frac{k}{k_z} a_l$  entonces el campo eléctrico será

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) = -\omega k_T \sum_l a_l \left( J_{l-1} (\hat{i} - i\hat{j}) e^{i\phi} + i \frac{k_T}{k_z} J_l \hat{k} \right) e^{-ik_z z - il\phi} \\ = -\omega k_T \sum_l a_{l+1} \left( J_l (\hat{i} - i\hat{j}) + i \frac{k_T}{k_z} J_{l+1} e^{-i\phi} \hat{k} \right) e^{-ik_z z - il\phi}, \quad (3.61) \end{aligned}$$

donde se ha hecho un cambio en el índice de la sumatoria  $l \rightarrow l + 1$ . De esta manera, el campo eléctrico estará dado como las superposición de haces Bessel con polarización circular a derechas

debido al factor  $(\hat{i} - i\hat{j})$ . Por lo tanto, el campo eléctrico del haz Bessel de orden  $l$  circularmente polarizado a derechas es

$$\vec{E}_R(\vec{r}) = -\omega k_T \left( J_l(k_T \rho)(\hat{i} - i\hat{j}) + i \frac{k_T}{k_z} J_{l+1}(k_T \rho) e^{-i\phi} \hat{k} \right) e^{-ik_z z - il\phi}. \quad (3.62)$$

Por otra parte, si  $b_l = -\frac{k}{k_z} a_l$  entonces el campo eléctrico (3.60) queda como

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\omega k_T \sum_l a_l \left( J_{l+1}(\hat{i} + i\hat{j}) e^{-i\phi} - i \frac{k_T}{k_z} J_l \hat{k} \right) e^{-ik_z z - il\phi} \\ &= -\omega k_T \sum_l a_{l-1} \left( J_l(\hat{i} + i\hat{j}) - i \frac{k_T}{k_z} J_{l-1} e^{i\phi} \hat{k} \right) e^{-ik_z z - il\phi}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde se ha hecho un cambio en el índice de la sumatoria  $l \rightarrow l-1$ . Por lo tanto, el campo eléctrico estará dado como las superposición de haces Bessel de orden  $l$  con polarización circular a izquierdas debido al factor  $(\hat{i} + i\hat{j})$

$$\vec{E}_L(\vec{r}) = -\omega k_T \left( J_l(k_T \rho)(\hat{i} + i\hat{j}) - i \frac{k_T}{k_z} J_{l-1}(k_T \rho) e^{i\phi} \hat{k} \right) e^{-ik_z z - il\phi}. \quad (3.64)$$

Las ondas electromagnéticas con polarización lineal en las direcciones  $x$  y  $y$  de acuerdo con [20] están dadas respectivamente por

$$\vec{E}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{E}_R + \vec{E}_L), \quad (3.65)$$

$$\vec{E}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} (\vec{E}_R - \vec{E}_L), \quad (3.66)$$

por lo que al sustituir las expresiones (3.62) y (3.64) se encuentra que el haz Bessel linealmente polarizado en la dirección  $x$  es

$$\vec{E}_x = -\frac{\omega k_T}{\sqrt{2}} \left[ 2J_l(k_T \rho) \hat{i} + i \frac{k_T}{k_z} (J_{l+1}(k_T \rho) e^{-i\phi} - J_{l-1}(k_T \rho) e^{i\phi}) \hat{k} \right] e^{-ik_z z - il\phi}, \quad (3.67)$$

y el polarizado en la dirección  $y$  es

$$\vec{E}_y = -\frac{\omega k_T}{\sqrt{2}} \left[ 2J_l(k_T \rho) \hat{j} - \frac{k_T}{k_z} (J_{l+1}(k_T \rho) e^{-i\phi} + J_{l-1}(k_T \rho) e^{i\phi}) \hat{k} \right] e^{-ik_z z - il\phi}. \quad (3.68)$$

De esta manera, la expresión más general del campo eléctrico del haz Bessel de orden  $l$  estará dada como una combinación de los haces con estados de polarización ortogonales [26], es decir,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \alpha \vec{E}_x(\vec{r}) + \beta \vec{E}_y(\vec{r}) = -\frac{2}{\sqrt{2}} \omega k_T \left[ J_l(k_T \rho) (\alpha \hat{i} + \beta \hat{j}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \frac{k_T}{k_z} ((\alpha + i\beta) J_{l+1}(k_T \rho) e^{-i\phi} - (\alpha - i\beta) J_{l-1}(k_T \rho) e^{i\phi}) \hat{k} \right] e^{-ik_z z - il\phi}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

o bien, en coordenadas cilíndricas el campo es expresado como

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\frac{2}{\sqrt{2}} \omega k_T \left[ J_l(k_T \rho) (\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi) \hat{\rho} + J_l(k_T \rho) (\beta \cos \phi - \alpha \sin \phi) \hat{\phi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \frac{k_T}{k_z} ((\alpha + i\beta) J_{l+1}(k_T \rho) e^{-i\phi} - (\alpha - i\beta) J_{l-1}(k_T \rho) e^{i\phi}) \hat{z} \right] e^{-ik_z z - il\phi}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

**Descripción vectorial de los haces paraxiales**  
3.4 Campo eléctrico y magnético del haz Bessel

---

donde nuevamente la polarización del campo está dada en función de los valores de las constantes complejas  $\alpha$  y  $\beta$ , donde  $(\alpha\hat{i} + \beta\hat{j})$  es un vector complejo unitario y los diferentes estados de polarización lineal, circular a izquierdas o a derechas están dados como en la sección 3.3.

El campo magnético correspondiente a la ecuación (3.70) se puede hallar a partir de la ley de Faraday (1.43) obteniéndose

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) = & \frac{2}{\sqrt{2}}k_Tk_z \left[ \left( \frac{1}{4} \left( \frac{k_T}{k_z} \right)^2 \left[ -i(\alpha + i\beta)(J_l + J_{l+2})e^{-i\phi} + i(\alpha - i\beta)(J_{l-2} + J_l)e^{i\phi} \right] \right. \right. \\ & + (\beta \cos \phi - \alpha \sen \phi)J_l \left. \right) \hat{\rho} + \left( \frac{1}{4} \left( \frac{k_T}{k_z} \right)^2 \left[ -(\alpha + i\beta)(J_l - J_{l+2})e^{-i\phi} + (\alpha - i\beta)(J_{l-2} - J_l)e^{i\phi} \right] \right. \\ & \left. \left. - (\alpha \cos \phi + \beta \sen \phi)J_l \right) \hat{\phi} + \frac{1}{2} \frac{k_T}{k_z} \left( (\alpha - i\beta)e^{i\phi}J_{l-1} + (\alpha + i\beta)e^{-i\phi}J_{l+1} \right) \hat{z} \right] e^{-ik_zz - il\phi}. \quad (3.71) \end{aligned}$$

Estos campos están expresados en términos de potencias del factor  $\frac{k_T}{k_z}$ , es decir, la razón entre las componentes transversal y longitudinal del vector de onda, lo que permite estudiar la densidad de momento angular en los casos paraxial y no paraxial de acuerdo con [26], pues si  $k_T \ll k_z$  entonces se tendrá la aproximación paraxial.

## Capítulo 4

# Momento angular en haces paraxiales

En el capítulo anterior se encontraron las expresiones de los campos eléctrico y magnético que describen a los haces paraxiales Gaussiano y Laguerre-Gauss. En este capítulo se obtiene el vector de densidad de momento angular de los haces paraxiales Gaussiano y Laguerre-Gauss partiendo de hallar la densidad de momento lineal o vector de Poynting de los haces paraxiales, el cual posee componentes no solo en la dirección de propagación de la onda, sino también en su dirección transversal que son debidas a que los haces paraxiales tienen pequeñas componentes de campo en la dirección de propagación. Se muestra que un haz paraxial puede poseer momento angular debido a su polarización, es decir, si su vector de campo eléctrico gira mientras el haz se propaga y también puede poseer momento angular debido a la estructura de fase del haz, si su frente de onda es helicoidal entonces será capaz de transportar momento angular, como ocurre con los haces Laguerre-Gauss. En la sección 4.1 se obtiene la expresión del promedio temporal de la densidad de momento lineal en coordenadas cilíndricas debido a la simetría que poseen las distribuciones de intensidad de los haces Gaussiano y Laguerre-Gauss. En las subsecciones 4.1.1 y 4.1.2 se obtienen las densidades de momento lineal y se analiza la trayectoria del vector de Poynting de los haces Laguerre-Gauss y Gaussiano respectivamente. En la sección 4.2 se obtienen las expresiones de la densidad de momento angular local de los haces paraxiales y se presentan los valores  $l\hbar$  y  $\sigma\hbar$  como los momentos angulares orbital y de espín por fotón de estos haces. Finalmente, en la sección 4.3 se obtiene la componente de densidad de momento angular en la dirección de propagación de un haz Bessel de alto orden, en el caso paraxial y no paraxial.

### 4.1. Momento lineal de un haz paraxial

La densidad de momento lineal instantánea de una onda electromagnética propagándose en el vacío está dada por la ecuación (2.33) y para los campos eléctrico y magnético armónicos en el tiempo (2.47) y (2.48) la densidad de momento lineal promediada en el tiempo se obtiene a partir del producto vectorial de las amplitudes complejas de los campos, ver apéndice A, ecuación (A.9), es decir,

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \left[ \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r}) + \vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right]. \quad (4.1)$$

Para calcular la densidad de momento lineal de un haz paraxial se deben usar las amplitudes complejas de los campos que describen al haz y que están dadas por las ecuaciones (3.22) y (3.23) donde los complejos conjugados de estas amplitudes son

$$\vec{E}^*(\vec{r}) = i\omega \left[ \alpha^* u^* \hat{i} + \beta^* u^* \hat{j} + \frac{i}{k} \left( \alpha^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + \beta^* \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \hat{k} \right] \exp(ikz), \quad (4.2)$$

## Momento angular en haces paraxiales

### 4.1 Momento lineal de un haz paraxial

$$\vec{B}^*(\vec{r}) = ik \left[ \beta^* \left( -u^* + \frac{i}{k} \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) \hat{i} - \alpha^* \left( -u^* + \frac{i}{k} \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) \hat{j} - \frac{i}{k} \left( \beta^* \frac{\partial u^*}{\partial x} - \alpha^* \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \hat{k} \right] \exp(ikz). \quad (4.3)$$

Para el campo magnético se ha usado la expresión (3.23) donde se mantienen las derivadas parciales de  $u(\vec{r})$  respecto de  $z$  en vez de (3.24) ya que de esta manera, como se verá a continuación, la densidad de momento lineal podrá ser expresada en términos del operador gradiente.

Entonces para hallar  $\langle \vec{p} \rangle$  se necesita hallar  $\vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$  y su complejo conjugado de acuerdo con (4.1). Se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) &= i\omega \left[ -|\alpha|^2 u \frac{\partial u^*}{\partial x} + |\beta|^2 u^* \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\beta^* \frac{\partial |u|^2}{\partial y} \right] \hat{i} \\ &\quad - i\omega \left[ -|\alpha|^2 u^* \frac{\partial u}{\partial y} + |\beta|^2 u \frac{\partial u^*}{\partial y} + \alpha^*\beta \frac{\partial |u|^2}{\partial x} \right] \hat{j} + i\omega(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \left( -ik|u|^2 + u^* \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{k}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde se han despreciado los productos de las primeras derivadas parciales de  $u(\vec{r})$ . Por lo tanto, al sumar (4.4) con su complejo conjugado y luego de organizar los términos se encuentra que la densidad de momento lineal (4.1) queda como

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} \rangle &= \frac{\varepsilon_0}{4} \left[ i\omega(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \left[ \left( u^* \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \hat{i} + \left( u^* \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \hat{j} + \left( u^* \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) \hat{k} \right] \right. \\ &\quad \left. - i\omega(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) \left( \frac{\partial |u|^2}{\partial y} \hat{i} - \frac{\partial |u|^2}{\partial x} \hat{j} \right) + 2k\omega(|\alpha|^2 + |\beta|^2)|u|^2 \hat{k} \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

que puede ser expresada en términos del gradiente de  $u(\vec{r})$  de la siguiente manera

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} \left[ i\omega [u^* \nabla u - u \nabla u^*] - i\omega(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) \left( \frac{\partial |u|^2}{\partial y} \hat{i} - \frac{\partial |u|^2}{\partial x} \hat{j} \right) + 2k\omega |u|^2 \hat{k} \right], \quad (4.6)$$

donde se ha hecho uso de que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  y donde se ha retenido el término  $\left( u^* \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial u^*}{\partial z} \right)$  en la componente en  $z$ , el cual es pequeño y podría ser despreciado frente al término  $2k|u(\vec{r})|^2$  con el objetivo de poder escribir el operador gradiente.

La ecuación (4.6) es válida para cualquier haz paraxial con envolvente compleja  $u = u(x, y, z)$ , sin embargo, las distribuciones de intensidad de los haces Gaussiano (1.36) y Leguerre-Gauss (1.38) son independientes de la coordenada azimutal  $\phi$ , es decir, son cilíndricamente simétricas, por lo que es conveniente expresar a la ecuación (4.6) en coordenadas cilíndricas.

Utilizando la regla de la cadena se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{\partial |u|^2}{\partial x} &= \cos \phi \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial |u|^2}{\partial y} &= \sin \phi \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

por consiguiente, se tendrá que

$$\frac{\partial |u|^2}{\partial y} \hat{i} - \frac{\partial |u|^2}{\partial x} \hat{j} = -\frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} (-\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}) = -\frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \hat{\phi}, \quad (4.8)$$

donde  $\hat{\phi}$  es el vector unitario base de las coordenadas cilíndricas.

Por lo tanto, el promedio temporal de la densidad de momento lineal de un haz paraxial es [7]

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} \rangle &= \frac{\varepsilon_0}{4} \left[ i\omega [u^* \nabla u - u \nabla u^*] - \omega \sigma \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \hat{\phi} + 2k\omega |u|^2 \hat{z} \right] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{4} \left[ -2\omega \text{Im}\{u^* \nabla u\} - \omega \sigma \frac{\partial |u|^2}{\partial \rho} \hat{\phi} + 2k\omega |u|^2 \hat{z} \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $\sigma = -i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)$  es una constante compleja cuyo valor depende del estado de polarización de la luz; para luz linealmente polarizada  $\sigma = 0$  y para luz circularmente polarizada a derechas e izquierdas  $\sigma = \pm 1$  respectivamente.

#### 4.1.1. Momento lineal del haz Laguerre-Gauss

La envolvente compleja de un haz Laguerre-Gauss, de acuerdo con la ecuación (1.37), está dada por

$$u_{l,m}(\rho, \phi, z) = A_{l,m} \frac{W_0}{W(z)} \left( \frac{\sqrt{2}\rho}{W(z)} \right)^{|l|} L_m^{|l|} \left( \frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right) \exp \left[ -\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right] \times \exp \left[ -ik \frac{\rho^2}{2R(z)} - il\phi + i(|l| + 2m + 1)\zeta(z) \right]. \quad (4.10)$$

En coordenadas cilíndricas y para la envolvente compleja (4.10) el operador  $\nabla u(\rho, \phi, z)$  de la ecuación (4.9) está dado por

$$\nabla u_{l,m} = \frac{\partial u_{l,m}}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{l,m}}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial u_{l,m}}{\partial z} \hat{z}, \quad (4.11)$$

donde

$$\frac{\partial u_{l,m}}{\partial \phi} = -il u_{l,m}, \quad (4.12)$$

de manera que

$$u_{l,m}^* \nabla u_{l,m} - u_{l,m} \nabla u_{l,m}^* = \left( u_{l,m}^* \frac{\partial u_{l,m}}{\partial \rho} - u_{l,m} \frac{\partial u_{l,m}^*}{\partial \rho} \right) \hat{\rho} - 2i \frac{l}{\rho} |u_{l,m}|^2 \hat{\phi} + \left( u_{l,m}^* \frac{\partial u_{l,m}}{\partial z} - u_{l,m} \frac{\partial u_{l,m}^*}{\partial z} \right) \hat{z}. \quad (4.13)$$

Sustituyendo la ecuación (4.13) en (4.9) se obtiene

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} \left[ -2\omega \operatorname{Im} \left\{ u_{l,m}^* \frac{\partial u_{l,m}}{\partial \rho} \right\} \hat{\rho} + \left( 2\omega \frac{l}{\rho} |u_{l,m}|^2 - \omega \sigma \frac{\partial |u_{l,m}|^2}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + 2k\omega |u_{l,m}|^2 \hat{z} \right], \quad (4.14)$$

donde se ha despreciado la componente en  $z$  de la ecuación (4.13) respecto de la componente en  $z$  de (4.9) pues  $u(\vec{r})$  es lentamente variable. En adición, luego de realizar las derivadas correspondientes, se encuentra que

$$\operatorname{Im} \left\{ u_{l,m}^* \frac{\partial u_{l,m}}{\partial \rho} \right\} = -k \frac{\rho}{R(z)} |u_{l,m}|^2 = -k \frac{\rho z}{z^2 + z_0^2} |u_{l,m}|^2, \quad (4.15)$$

por lo que se tendrá que el promedio temporal del vector de densidad de momento lineal del haz Laguerre-Gauss es [12]

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} k\omega \left[ \frac{\rho z}{z^2 + z_0^2} |u_{l,m}|^2 \hat{\rho} + \left( \frac{l}{k\rho} |u_{l,m}|^2 - \frac{\sigma}{2k} \frac{\partial |u_{l,m}|^2}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + |u_{l,m}|^2 \hat{z} \right], \quad (4.16)$$

el cual posee componentes en las direcciones  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\phi}$  y  $\hat{z}$ . Dado que posee componente radial, denotada por  $\langle \vec{p}_\rho \rangle$ , el haz al propagarse se va esparciendo a causa de que hay un flujo de energía en la dirección radial. Por otro lado, la componente azimutal  $\langle \vec{p}_\phi \rangle$  indica que el vector de Poynting irá girando alrededor del eje  $z$  mientras el haz se propaga y como se verá, es esta componente la que da lugar

## Momento angular en haces paraxiales

### 4.1 Momento lineal de un haz paraxial

a que el haz posea momento angular en la dirección de propagación. Allen y Padgett [27, 28] estudiaron la trayectoria del vector de Poynting la cual debe cumplir que en cada punto el vector de Poynting sea tangente a la curva, es decir, que

$$\frac{d\vec{r}(\xi)}{d\xi} = \langle \vec{S} \rangle \quad (4.17)$$

donde  $\vec{r}(\xi)$  es llamada la curva integral de  $\langle \vec{S} \rangle$  y  $\xi$  es el parámetro de la curva. A partir de la ecuación (4.17) se encuentra que la forma en la que varía el ángulo azimutal  $\theta$  de la trayectoria del vector de Poynting con la distancia  $z$  desde la cintura del haz es [28]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\langle \vec{p}_\phi \rangle}{\langle \vec{p}_z \rangle} = \frac{l}{k\rho^2} - \frac{\sigma}{2k\rho} \frac{1}{|u_{l,m}|^2} \frac{\partial |u_{l,m}|^2}{\partial \rho} \\ &= \frac{l}{k\rho^2} - \frac{\sigma|l|}{k\rho^2} + \frac{2\sigma}{kW^2(z)} + \frac{4\sigma}{kW^2(z)} \frac{L_{m-1}^{|l|+1}\left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right)}{L_m^{|l|}\left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right)}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde se observa que la rotación del vector de Poynting al propagarse el haz depende del estado de polarización de la luz mediante el factor  $\sigma$  y también del orden del modo Laguerre-Gauss.

En particular para un haz Laguerre-Gauss linealmente polarizado donde  $\sigma = 0$  se tiene

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{l}{k\rho^2} = \frac{l}{2} \left( \frac{W(z)}{\rho} \right)^2 \frac{z_0}{z_0^2 + z^2}, \quad (4.19)$$

y si se elige un radio que corresponda a un punto fijo dentro de la distribución de intensidad relativa, tal que  $\frac{W(z)}{\rho}$  es una constante [27] y se integra respecto de  $z$  la ecuación (4.19) se obtiene

$$\theta = \frac{l}{2} \left( \frac{W(z)}{\rho} \right)^2 \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right), \quad (4.20)$$

que indica como es la rotación del vector de Poynting, la cual depende de la fase de Gouy y depende del valor del cociente  $\frac{W(z)}{\rho}$ . En particular, en el caso en que  $m = 0$  y  $l \neq 0$  se puede hallar que el radio de intensidad máxima del haz es

$$\rho = \frac{\sqrt{|l|}}{\sqrt{2}} W(z), \quad (4.21)$$

y al sustituir la ecuación (4.21) en la ecuación (4.20) se obtiene

$$\theta = \frac{l}{|l|} \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right) = \pm \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right), \quad (4.22)$$

por lo que para un modo Laguerre-Gauss linealmente polarizado, con  $m = 0$  el vector de Poynting para el radio de campo máximo (4.21) rotará a lo más  $\pm \frac{\pi}{2}$  al propagarse el haz desde  $z = 0$  hasta  $z \rightarrow \infty$ .

En el caso más general, para un haz Laguerre-Gauss de orden  $(l, m)$  y con valor de  $\sigma$  arbitrario se encuentra [28]

$$\theta = \left( \frac{l - \sigma|l|}{2} \frac{W^2(z)}{\rho^2} + \sigma + 2\sigma \frac{L_{m-1}^{|l|+1}\left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right)}{L_m^{|l|}\left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right)} \right) \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right), \quad (4.23)$$

y de esta manera, en general, la trayectoria del vector de Poynting será una espiral que depende del cociente  $\frac{W(z)}{\rho}$ , del estado de polarización del haz y de orden del modo Laguerre-Gauss.

Las componentes radial y azimutal de la densidad de momento lineal (4.16) son simétricas alrededor del eje  $z$ , es decir, son independientes de la coordenada azimutal  $\phi$ , por lo que al integrar sobre el plano transversal del haz se obtiene que el momento angular total solo tiene componente en la dirección de propagación  $z$ , es decir, para la componente radial se tendrá

$$\begin{aligned} \int \langle \vec{p}_\rho \rangle \rho d\rho d\phi &= \frac{\varepsilon_0}{2} k\omega \int \left( \frac{z}{z^2 + z_0^2} \rho |u_{l,m}|^2 \right) \hat{\rho} \rho d\rho d\phi \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} k\omega \int_0^\infty \left( \frac{z}{z^2 + z_0^2} \rho^2 |u_{l,m}|^2 \right) \left[ \int_0^{2\pi} \hat{\rho} d\phi \right] d\rho = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde, debido a que  $|u_{l,m}|^2$  es independiente de la coordenada  $\phi$ , la integral respecto de la coordenada azimutal afecta únicamente al vector unitario  $\hat{\rho}$ , dando como resultado cero. Por otro lado, la integral sobre la componente azimutal es

$$\begin{aligned} \int \langle \vec{p}_\phi \rangle \rho d\rho d\phi &= \frac{\varepsilon_0}{2} k\omega \int \left( \frac{l}{k\rho} |u_{l,m}|^2 - \frac{\sigma}{2k} \frac{\partial |u_{l,m}|^2}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} \rho d\rho d\phi \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} k\omega \int_0^\infty \left( \frac{l}{k\rho} |u_{l,m}|^2 - \frac{\sigma}{2k} \frac{\partial |u_{l,m}|^2}{\partial \rho} \right) \rho d\rho \left[ \int_0^{2\pi} \hat{\phi} d\phi \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde nuevamente la integral sobre la coordenada azimutal se realiza sobre el vector unitario  $\hat{\phi}$  que hace que la integral sea cero, quedando únicamente un momento lineal neto en la dirección de propagación  $z$ .

#### 4.1.2. Momento lineal del haz Gaussiano

De acuerdo con la sección 1.3 el haz Gaussiano corresponde al haz Laguerre-Gauss de orden  $(0, 0)$  por lo que de la ecuación (4.16) se halla que el promedio temporal de la densidad de momento lineal del haz Gaussiano es

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} k\omega \left[ \frac{\rho z}{z^2 + z_0^2} |u_G|^2 \hat{\rho} - \frac{\sigma}{2k} \frac{\partial |u_G|^2}{\partial \rho} \hat{\phi} + |u_G|^2 \hat{z} \right], \quad (4.26)$$

donde la derivada parcial respecto de la coordenada radial de  $|u_G|^2$  está dada por

$$\frac{\partial |u_G|^2}{\partial \rho} = -\frac{4\rho}{W^2(z)} |u_G|^2, \quad (4.27)$$

por lo tanto, se tendrá

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} k\omega \left[ \frac{\rho z}{z^2 + z_0^2} \hat{\rho} + \frac{\sigma z_0 \rho}{z^2 + z_0^2} \hat{\phi} + \hat{z} \right] |u_G|^2, \quad (4.28)$$

cuya componente azimutal depende del estado de polarización del haz.

La rotación del vector de Poynting para el haz Gaussiano se obtiene de la ecuación (4.23) y se encuentra que [28]

$$\theta = \sigma \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right), \quad (4.29)$$

que indica que la rotación del vector de Poynting para un haz polarizado depende del valor de  $\sigma$ , que como se verá más adelante, se trata de la contribución al momento angular de espín de la luz.

## 4.2. Momento angular de los haces paraxiales

El promedio temporal de la densidad de momento angular de una onda electromagnética propagándose en el vacío está dada por

$$\langle \vec{j} \rangle = \vec{r} \times \langle \vec{p} \rangle = -z \langle p_\phi \rangle \hat{\rho} - [\rho \langle p_z \rangle - z \langle p_\rho \rangle] \hat{\phi} + \rho \langle p_\phi \rangle \hat{z}, \quad (4.30)$$

y para hallarlo para cualquier haz paraxial es necesario sustituir los valores correspondientes de las componentes de su momento lineal.

### 4.2.1. Momento angular del haz Laguerre-Gauss

Sustituyendo en (4.30) las componentes del vector de densidad de momento lineal del haz Laguerre-Gauss (4.16) se obtiene

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} k \omega \left[ \left( -\frac{lz}{k\rho} |u_{l,m}|^2 + \frac{\sigma z}{2k} \frac{\partial |u_{l,m}|^2}{\partial \rho} \right) \hat{\rho} - \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \rho |u_{l,m}|^2 \hat{\phi} + \left( \frac{l}{k} |u_{l,m}|^2 - \frac{\sigma \rho}{2k} \frac{\partial |u_{l,m}|^2}{\partial \rho} \right) \hat{z} \right], \quad (4.31)$$

por lo que el momento angular total del haz será la integral de volumen sobre todo el espacio de la ecuación (4.31). Las componentes radial y azimutal de la densidad de momento angular (4.31) son simétricas alrededor del eje  $z$  por lo que al integrar sobre el plano transversal del haz solo se tendrá componente de momento angular en la dirección  $z$ .

De la ecuación (4.30) se tiene que la densidad de momento angular en la dirección de propagación es debida a la componente azimutal de la densidad de momento lineal, o bien, de la componente azimutal del vector de Poynting. Esta densidad de momento angular está dada por [7]

$$\langle j_z \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} \omega l |u_{l,m}|^2 - \frac{\varepsilon_0}{4} \omega \sigma \rho \frac{\partial |u_{l,m}|^2}{\partial \rho}. \quad (4.32)$$

Si el haz se encuentra linealmente polarizado entonces  $\sigma = 0$  y se tendrá que

$$\langle j_z \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} \omega l |u_{l,m}|^2, \quad (4.33)$$

por lo que la densidad de momento angular (4.33) no es debida a la polarización del haz, más bien, este momento angular es debido a la estructura de fase del haz Laguerre-Gauss, que es de la forma  $\exp[-il\phi]$ , por lo tanto el primer término en (4.32) es identificado como la densidad de momento angular orbital. Que el haz tenga una polarización distinta a la lineal da lugar al segundo término de la ecuación (4.32), que es identificado con la densidad de momento angular de espín, el cual depende del estado de polarización de la luz mediante el factor  $\sigma$  y depende de la variación transversal de la intensidad del haz, lo cual es consistente con la densidad de momento angular de la ecuación (2.38) donde el término identificado como la densidad de momento angular de espín está dado como el producto de una posición con la derivada espacial de los campos y la densidad de momento angular orbital está relacionada con la estructura espacial del haz.

En particular y a manera de ejemplo, el modo Laguerre-Gauss de orden  $(1, 0)$  posee momento angular orbital debido a que su frente de onda es helicoidal y esta caracterizado por el número  $l = 1$ . Este haz además puede poseer momento angular de espín si su campo eléctrico gira mientras el haz se propaga. En la figura (4.1) se muestra el valor local de la densidad de momento angular dada por la ecuación (4.32) en el plano  $z = 0$  para este haz con polarización lineal ( $\sigma = 0$ ) y circular a derechas ( $\sigma = 1$ ) donde la longitud de onda del haz es  $\lambda = 633nm$ , el rango de Rayleigh es  $z_0 = 44,5m$  y  $W(0) = W_0 = 3mm$ , donde  $j_0$  corresponde a una constante de normalización de la densidad de momento angular para el haz linealmente polarizado. Se observa que el haz con polarización circular alcanza valores más grandes en su densidad de momento angular en comparación con el haz linealmente polarizado lo que conduce a que el momento angular total sea mayor para el haz polarizado circularmente.

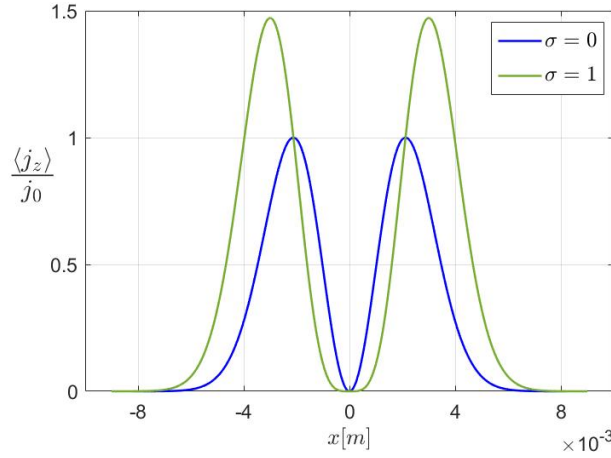


Figura 4.1: Densidad de momento angular normalizado del haz Laguerre-Gauss (1,0) como función de la posición.

El flujo de momento angular del haz Laguerre-Gauss a través del plano transversal del haz está dado por

$$\int \langle j_z \rangle \rho d\rho d\phi = \frac{\varepsilon_0}{2} \omega l \int |u_{l,m}|^2 \rho d\rho d\phi - \frac{\varepsilon_0}{4} \omega \sigma \int \rho \frac{\partial |u_{l,m}|^2}{\partial \rho} \rho d\rho d\phi, \quad (4.34)$$

donde al usar integración por partes respecto de la coordenada radial  $\rho$  se obtiene

$$\int \langle j_z \rangle \rho d\rho d\phi = \frac{\varepsilon_0}{2} \omega l \int |u_{l,m}|^2 \rho d\rho d\phi + \frac{\varepsilon_0}{2} \omega \sigma \int |u_{l,m}|^2 \rho d\rho d\phi - \frac{\varepsilon_0}{2} \pi \omega \sigma \rho^2 |u_{l,m}|^2 \Big|_0^\infty, \quad (4.35)$$

donde el tercer término del lado derecho de la igualdad en (4.35) resulta ser cero al evaluar  $\rho = 0$  y cuando  $\rho \rightarrow \infty$  el término es cero debido a la extensión finita del haz Laguerre-Gauss. De esta manera el momento angular por unidad de longitud en la dirección de propagación del haz es

$$\int \langle j_z \rangle \rho d\rho d\phi = \frac{\varepsilon_0}{2} \omega (l + \sigma) \int |u_{l,m}|^2 \rho d\rho d\phi. \quad (4.36)$$

Por otro lado, el flujo de energía por unidad de longitud a través del plano transversal del haz es

$$\int \frac{\langle S_z \rangle}{c} \rho d\rho d\phi = \int c \langle p_z \rangle \rho d\rho d\phi = \frac{\varepsilon_0}{2} \omega^2 \int |u_{l,m}|^2 \rho d\rho d\phi, \quad (4.37)$$

por lo que la razón entre el flujo de momento angular y la energía por unidad de longitud está dada por

$$\frac{\int \langle j_z \rangle \rho d\rho d\phi}{\int c \langle p_z \rangle \rho d\rho d\phi} = \frac{\frac{\varepsilon_0}{2} \omega (l + \sigma) \int |u_{l,m}|^2 \rho d\rho d\phi}{\frac{\varepsilon_0}{2} \omega^2 \int |u_{l,m}|^2 \rho d\rho d\phi} = \frac{l}{\omega} + \frac{\sigma}{\omega} \quad (4.38)$$

donde el primer término corresponde a la contribución orbital del momento angular y el segundo término a la de espín. Esta relación conduce a que la cantidad  $l\hbar$  sea identificada como el momento angular orbital por fotón para los haces Laguerre-Gauss [7] y que en promedio  $\sigma\hbar$  sea el momento angular de espín por fotón donde  $\sigma$  es igual a cero si el haz está linealmente polarizado,  $\pm 1$  para polarización circular a derechas o a izquierdas respectivamente y en general  $-1 < \sigma < 1$  para polarización elíptica pues si la energía se irradia en fotones de energía  $\hbar\omega$ , el momento angular se transfiere en unidades de  $\hbar$ .

### 4.2.2. Momento angular del haz Gaussiano

Para el haz Laguerre-Gauss de orden  $(0,0)$  se tendrá, de acuerdo con (4.31) que el promedio temporal de la densidad de momento angular es

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} k \omega \left[ \frac{\sigma z}{2k} \frac{\partial |u_G|^2}{\partial \rho} \hat{\rho} - \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \rho |u_G|^2 \hat{\phi} - \frac{\sigma \rho}{2k} \frac{\partial |u_G|^2}{\partial \rho} \hat{z} \right], \quad (4.39)$$

por lo que al hacer uso de la ecuación (4.27) se tendrá que la densidad de momento angular del haz Gaussiano está dada por

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{\varepsilon_0 \omega}{W^2(z)} \left[ -\sigma \rho z \hat{\rho} - z_0 \rho \hat{\phi} + \sigma \rho^2 \hat{z} \right] |u_G|^2. \quad (4.40)$$

Las componentes radial y azimutal son simétricas alrededor del eje  $z$  por lo que al integrar para hallar el momento angular neto se encuentra que solo habrá componente de momento angular en la dirección de propagación siempre que el haz posea una polarización distinta a la lineal donde  $\sigma = 0$ .

La densidad de momento angular en la dirección de propagación del haz Gaussiano es

$$\langle j_z \rangle = -\frac{\varepsilon_0}{4} \omega \sigma \rho \frac{\partial |u_G|^2}{\partial \rho} = \varepsilon_0 \omega \sigma \frac{\rho^2}{W^2(z)} |u_G|^2, \quad (4.41)$$

donde su momento angular depende de la variación de la intensidad del haz y de su estado de polarización. Este haz posee frentes de onda paraboloïdales y no posee momento angular orbital, lo que está en concordancia con el hecho de que, dentro de la aproximación paraxial, un haz poseerá momento angular orbital si sus frentes de onda definen helicoides [7, 12].

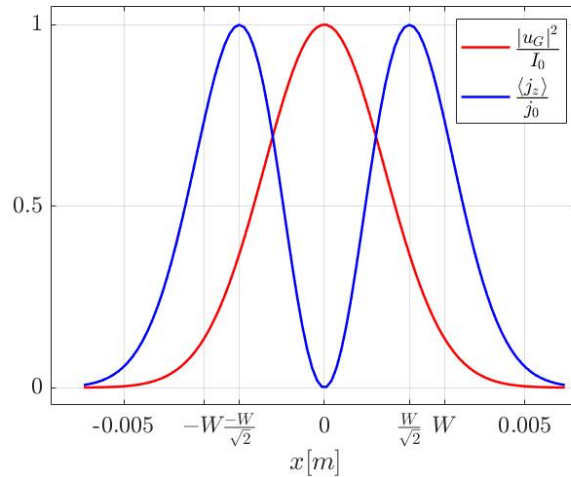


Figura 4.2: Densidad de momento angular y perfil de intensidad normalizados del haz Gaussiano como función de la posición

En la figura (4.2) se muestra la densidad de momento angular normalizada del haz Gaussiano circularmente polarizado como función de la posición para  $z = 0$  con  $\lambda = 633nm$ ,  $z_0 = 44,5m$ ,  $W(0) = W_0 = 3mm$  y  $\sigma = 1$ . Se observa que sobre el eje de propagación, es decir, para  $\rho = 0$ , la densidad de momento angular es cero y que aumenta su valor al aumentar la distancia radial hasta llegar a un máximo en donde  $\rho^2 = \frac{1}{2}W^2(z)$ , en donde cambia la concavidad del perfil de intensidad del haz Gaussiano  $|u_G|^2$  y después decrece y tiende a cero. Sin embargo, en promedio

el momento angular de espín por fotón será  $\sigma\hbar$ , un resultado obtenido de hallar la razón entre el flujo de la densidad de momento angular y la densidad de energía en la dirección de propagación del haz Gaussiano, que es

$$\frac{\int \langle j_z \rangle \rho d\rho d\phi}{\int c \langle p_z \rangle \rho d\rho d\phi} = \frac{\sigma}{\omega}. \quad (4.42)$$

### 4.3. Momento angular del haz Bessel

La densidad de momento lineal del haz Bessel promediada en el tiempo se obtiene a partir del producto vectorial de las amplitudes complejas de los campos (3.70) y (3.71), de acuerdo con la ecuación (A.9). En particular, se busca calcular la densidad de momento angular en la dirección de propagación de la onda, que de acuerdo con la ecuación (4.30) está dada por

$$\langle j_z \rangle = \rho \langle p_\phi \rangle, \quad (4.43)$$

es decir, depende de la componente azimutal del vector de densidad de momento lineal dada por

$$\langle p_\phi \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} \left( \vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) + \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r}) \right)_\phi, \quad (4.44)$$

donde

$$\left( \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r}) \right)_\phi = E_z B_\rho^* - E_\rho B_z^*. \quad (4.45)$$

Sustituyendo las componentes correspondientes, y luego de las simplificaciones se encuentra

$$\begin{aligned} \langle p_\phi \rangle = \frac{\varepsilon_0 |E_0|^2}{4 \omega} & \left[ \left( \frac{2l}{\rho} J_l^2 - \sigma \frac{dJ_l^2}{d\rho} \right) + 4 \left( \frac{k_T}{k_z} \right)^2 \frac{l}{\rho} J_l^2 |\alpha \sin \phi - \beta \cos \phi|^2 \right. \\ & + k_z \left( \frac{k_T}{k_z} \right)^3 \left( (1 - \sigma) J_{l-1} J_{l-2} + (1 + \sigma) J_{l+1} J_{l+2} - \sigma J_l (J_{l-1} - J_{l+1}) \right. \\ & \left. \left. - [ (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \cos 2\phi + 2 \operatorname{Re}\{\alpha^* \beta\} \sin 2\phi ] (J_{l-1} J_{l+2} + J_{l+1} J_{l-2}) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde  $E_0$  es una constante y al igual que en la sección 4.1 se tiene que  $\sigma = -i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)$  es una constante compleja cuyo valor depende del estado de polarización de la luz; para luz linealmente polarizada  $\sigma = 0$  y para luz circularmente polarizada a derechas e izquierdas  $\sigma = \pm 1$  respectivamente de acuerdo con la notación empleada hasta ahora para describir a las ondas monocromáticas y la convención usada para describir los estados de polarización circulares.

Se sigue que la densidad de momento angular del haz Bessel en la dirección de propagación  $z$  de la onda está dada por [26]

$$\begin{aligned} \langle j_z \rangle = \frac{\varepsilon_0 |E_0|^2}{2 \omega} & \left[ \left( l J_l^2 - \frac{1}{2} \sigma \rho \frac{dJ_l^2}{d\rho} \right) + 2 \left( \frac{k_T}{k_z} \right)^2 l J_l^2 |\alpha \sin \phi - \beta \cos \phi|^2 \right. \\ & + \frac{k_z}{2} \left( \frac{k_T}{k_z} \right)^3 \rho \left( (1 - \sigma) J_{l-1} J_{l-2} + (1 + \sigma) J_{l+1} J_{l+2} - \sigma J_l (J_{l-1} - J_{l+1}) \right. \\ & \left. \left. - [ (|\alpha|^2 - |\beta|^2) \cos 2\phi + 2 \operatorname{Re}\{\alpha^* \beta\} \sin 2\phi ] (J_{l-1} J_{l+2} + J_{l+1} J_{l-2}) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

que es el momento angular para el caso no paraxial del haz Bessel, el cual además de depender de la distancia radial  $\rho$ , depende de la coordenada azimutal  $\phi$ . Sin embargo, en el caso paraxial, al

considerar que  $k_T \ll k_z$ , el momento angular se puede aproximar a

$$\langle j_z \rangle = \frac{\varepsilon_0 |E_0|^2}{2 \omega} \left( l J_l^2 - \frac{1}{2} \sigma \rho \frac{dJ_l^2}{d\rho} \right), \quad (4.48)$$

un resultado que recuerda a la expresión de la densidad de momento angular del haz Laguerre-Gauss (4.32) el cual también tiene una fase dada por el factor  $\exp[-il\phi]$ . Este resultado era de esperarse ya que de acuerdo con [12], los haces paraxiales con frentes de onda helicoidal poseen momento angular orbital.

## Capítulo 5

# Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudió el momento angular de la luz en haces paraxiales, en particular se estudió para las ondas planas de extensión finita, los haces Gaussianos, Laguerre-Gauss y los haces Bessel en su límite paraxial.

Se analizó el experimento de la medición mecánica del momento angular de la luz, el cual es considerado como la primera medición del momento angular de espín del fotón. Este experimento mostró que la luz circularmente polarizada puede ejercer un torque sobre un medio birrefringente debido a que el medio es capaz de alterar el estado de polarización de la luz incidente. Teóricamente se muestra que las ondas planas ideales circularmente polarizadas no son capaces de transportar momento angular en la dirección de propagación, sin embargo, cuando dichas ondas mantienen sus frentes de onda planos, pero se ven limitadas en extensión transversal, entonces son capaces de transportar momento angular de espín. Esto se debe a que estas ondas poseen componentes de campo eléctrico y magnético en la dirección de propagación de la onda originadas por el confinamiento transversal de la onda, es decir, por el fenómeno de difracción.

Se encontró que los campos electromagnéticos de los haces paraxiales Gaussiano y Laguerre-Gauss, incluidos los haces Bessel del alto orden, no son estrictamente transversales pues poseen componentes en la dirección de propagación. Las ecuaciones para la densidad de momento lineal o vector de Poynting para los haces Laguerre-Gauss y Gaussiano indican que el haz al propagarse se irá ensanchando a causa de que hay un flujo de energía en la dirección radial. Por otro lado, la componente azimutal indica que el vector de Poynting irá girando alrededor del eje  $z$  mientras el haz se propaga. Para los haces Gaussianos el giro del vector de Poynting depende del estado de polarización de la luz mediante el factor  $\sigma$  mientras que para el haz Laguerre-Gauss la trayectoria del vector de Poynting para un punto en la distribución de intensidad será una espiral que además de depender del estado de polarización de la luz, depende del orden del haz. Además, se mostró que la componente azimutal del vector de Poynting es la que da lugar a que el haz posea momento angular en la dirección de propagación.

Se mostró que la densidad de momento angular del haz Laguerre-Gauss de orden  $(l, m)$  posee dos contribuciones, una que depende de la estructura de fase del haz, que es de la forma  $\exp[-il\phi]$  y que es identificado como la densidad de momento angular orbital y un segundo término que depende del estado de polarización del haz identificado como la densidad de momento angular de espín el cual depende de la variación transversal del perfil de intensidad del haz. Para el haz Gaussiano se mostró que su momento angular solo tiene una contribución debida al estado de polarización del haz. Por otra parte, se mostró que la densidad de momento angular del haz Bessel de alto orden en la dirección de propagación depende de la coordenada radial y azimutal, sin embargo, en la aproximación paraxial, es similar a la expresión obtenida para los haces Laguerre-Gauss.



## Apéndice A

# Promedio temporal de la densidad de energía, momento lineal y vector de Poynting

Es conveniente representar a los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética monocromática a partir de exponenciales complejas

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t), \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) \exp(i\omega t), \quad (\text{A.2})$$

donde  $\vec{E}(\vec{r})$  y  $\vec{B}(\vec{r})$  son las amplitudes complejas de los campos eléctrico y magnético y  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda. Es entendido que lo que representa físicamente a la onda es la parte real de estas funciones complejas, es decir,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t)\} = \frac{1}{2} \left[ \vec{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t) + \vec{E}^*(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \right], \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{B}(\vec{r}) \exp(i\omega t)\} = \frac{1}{2} \left[ \vec{B}(\vec{r}) \exp(i\omega t) + \vec{B}^*(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \right]. \quad (\text{A.4})$$

Debido a las altas frecuencias de oscilación de los campos, que para frecuencias ópticas es de aproximadamente  $10^{15}$  Hz, las magnitudes físicas como la densidad de energía  $w$  (2.32), densidad de momento lineal  $\vec{p}$  o el vector de Poynting  $\vec{S}$  (2.33), las cuales están dadas a partir de productos escalares y vectoriales entre los campos, son funciones que varían extremadamente rápido en el tiempo y su valor instantáneo no puede ser medido. Para obtener su valor es conveniente realizar un promedio temporal de esas cantidades donde el promedio en el tiempo de una función  $f(t)$  en un intervalo de tiempo  $T$  esta dado por [29]

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(t) dt. \quad (\text{A.5})$$

La densidad de momento lineal es

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \langle \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t)\} \times \text{Re}\{\vec{B}(\vec{r}) \exp(i\omega t)\} \rangle \\ &= \frac{\epsilon_0}{4} \left[ \vec{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t) + \vec{E}^*(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \right] \times \left[ \vec{B}(\vec{r}) \exp(i\omega t) + \vec{B}^*(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \right] \\ &= \frac{\epsilon_0}{4} \left[ \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \exp(i2\omega t) + \vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r}) \exp(-i2\omega t) + \vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) + \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

## Promedio temporal de la densidad de energía, momento lineal y vector de Poynting

---

La ecuación (A.6) se trata de la densidad de momento lineal instantánea de una onda electromagnética. Se observa que la frecuencia de oscilación de  $\vec{p}$  es del doble de la frecuencia de oscilación de los campos electromagnéticos.

Al llevar a cabo el promedio temporal de la densidad de momento lineal se debe promediar los términos que dependen del tiempo, es decir, los dos primeros términos con factores  $\exp(i2\omega t)$  y  $\exp(-i2\omega t)$ . Promediando estas funciones se encuentra que

$$\begin{aligned} \langle \exp(i2\omega t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \exp(i2\omega t) dt \\ &= \frac{\exp(i2\omega t)}{2i\omega T} [\exp(i\omega T) - \exp(-i\omega T)] = \frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega T} \exp(i2\omega t), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

y de manera similar

$$\langle \exp(-i2\omega t) \rangle = \frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega T} \exp(-i2\omega t), \quad (\text{A.8})$$

por lo que para un intervalo  $T$  igual a un número entero  $n$  de periodos de oscilación de la onda,  $T = n\frac{2\pi}{\omega}$ , los promedios temporales (A.7) y (A.8) serán cero, o bien, después de un intervalo  $T$  de varios periodos, donde  $T \gg \frac{2\pi}{\omega}$ , el factor  $\frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega T}$  será muy pequeño por lo que los dos primeros términos de (A.6) al promediarse en el tiempo se harán cero y se obtendrá

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} \rangle &= \varepsilon_0 \langle \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} [\vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) + \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r})] \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \text{Re}\{\vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\} = \frac{\varepsilon_0}{2} \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r})\}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Debido a la relación entre el vector de Poynting y la densidad de momento lineal (1.67), se tendrá que el promedio temporal del vector de Poynting, es decir, la irradiancia será

$$\langle \vec{S} \rangle = c^2 \langle \vec{p} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \text{Re}\{\vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\}. \quad (\text{A.10})$$

De manera análoga se encuentra lo siguiente para la densidad de energía de una onda electromagnética propagándose en el vacío.

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{8} \left( \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \exp(i2\omega t) + \vec{E}^*(\vec{r}) \cdot \vec{E}^*(\vec{r}) \exp(-i2\omega t) + 2|\vec{E}(\vec{r})|^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{8\mu_0} \left( \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) \exp(i2\omega t) + \vec{B}^*(\vec{r}) \cdot \vec{B}^*(\vec{r}) \exp(-i2\omega t) + 2|\vec{B}(\vec{r})|^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Por lo tanto, haciendo uso de las ecuaciones (A.7) y (A.8) se halla que el promedio temporal de la densidad de energía es

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4} \left( \varepsilon_0 |\vec{E}(\vec{r})|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}(\vec{r})|^2 \right) = \frac{1}{4} \left( \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}^*(\vec{r}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{B}^*(\vec{r}) \right) \quad (\text{A.12})$$

# Bibliografía

- [1] Saleh, B. E., & Teich, M. C. (2019). *Fundamentals of photonics*. John Wiley & sons.
- [2] Sadowsky A. (1899). Ponderomotive action of electromagnetic and light waves. *Acta et Comm Imp Universitatis Jurievensis*, 7(1), 1–126.
- [3] Poynting, J. H. (1909). The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 82(557), 560–567.
- [4] Beth, R. A. (1936). Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light. *Physical Review*, 50(2), 115–125.
- [5] Jackson, J. D. (1998). *Classical Electrodynamics*. Wiley.
- [6] Yao, A. M., & Padgett, M. J. (2011). Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Advances in optics and photonics*, 3(2), 161–204.
- [7] Allen, L., Beijersbergen, M. W., Spreeuw, R. J. C., & Woerdman, J. P. (1992). Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes. *Physical Review A*, 45(11), 8185–8189.
- [8] Barnett, S. M., Allen, L., Cameron, R. P., Gilson, C. R., Padgett, M. J., Speirits, F. C., & Yao, A. M. (2016). On the natures of the spin and orbital parts of optical angular momentum. *Journal of Optics*, 18(6), 064004.
- [9] Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J., & Grynberg, G. (1989). *Photons and Atoms*. Wiley.
- [10] Barnett, S. M. (2010). Rotation of electromagnetic fields and the nature of optical angular momentum. *Journal of Modern Optics*, 57(14–15), 1339–1343.
- [11] Simmons, J. W., & Guttman, M. J. (1970). *States, Waves, and Photons: a Modern Introduction to Light*. Addison-Wesley.
- [12] Allen, L., Padgett, M., & Babiker, M. (1999). IV The Orbital Angular Momentum of Light. *Progress in Optics*, 291–372.
- [13] He, H., Friese, M. E. J., Heckenberg, N. R., & Rubinsztein-Dunlop, H. (1995). Direct Observation of Transfer of Angular Momentum to Absorptive Particles from a Laser Beam with a Phase Singularity. *Physical Review Letters*, 75(5), 826–829.
- [14] Friese, M. E. J., Enger, J., Rubinsztein-Dunlop, H., & Heckenberg, N. R. (1996). Optical angular-momentum transfer to trapped absorbing particles. *Physical Review A*, 54(2), 1593–1596.
- [15] O’Neil, A. T., MacVicar, I., Allen, L., & Padgett, M. J. (2002). Intrinsic and Extrinsic Nature of the Orbital Angular Momentum of a Light Beam. *Physical Review Letters*, 88(5).

- [16] Ladavac, K., & Grier, D. G. (2004). Microoptomechanical pumps assembled and driven by holographic optical vortex arrays. *Optics Express*, 12(6), 1144.
- [17] Gibson, G., Courtial, J., Padgett, M. J., Vasnetsov, M., Pas'ko, V., Barnett, S. M., & Franke-Arnold, S. (2004). Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum. *Optics Express*, 12(22), 5448.
- [18] Harwit, M. (2003). Photon Orbital Angular Momentum in Astrophysics. *The Astrophysical Journal*, 597(2), 1266–1270.
- [19] Siegman, A. E. (1986). *Lasers*. University science books.
- [20] Yariv, A., & Yeh, P. (1984). *Optical waves in crystals* (Vol. 5). New York: Wiley.
- [21] Van Enk, S. J., & Nienhuis, G. (1992). Eigenfunction description of laser beams and orbital angular momentum of light. *Optics Communications*, 94(1-3), 147-158.
- [22] Lax, M., Louisell, W. H., & McKnight, W. B. (1975). From Maxwell to paraxial wave optics. *Physical Review A*, 11(4), 1365.
- [23] Haus, H. A. (1984). *Waves and Fields in Optoelectronics*. Prentice Hall.
- [24] Stratton, J. A. (1941). *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill Companies.
- [25] Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F. E. (2012). *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Academic Press.
- [26] Volke-Sepulveda, K., Garcés-Chávez, V., Chávez-Cerda, S., Arlt, J., & Dholakia, K. (2002). Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 4(2), S82.
- [27] Padgett, M. J., & Allen, L. (1995). The Poynting vector in Laguerre-Gaussian laser modes. *Optics Communications*, 121(1-3), 36-40.
- [28] Allen, L., & Padgett, M. J. (2000). The Poynting vector in Laguerre-Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density. *Optics Communications*, 184(1-4), 67-71.
- [29] Hecht, E. (2016). *Óptica*. Pearson Educación.