



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estructura a orden de un lazo de la teoría $\lambda\phi^4$ con dimensiones
extra universales

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

por

M. C. Gibraham Ivanhoe Nápoles Cañedo

asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Dr. Eric Martínez Pascual

Puebla Pue.

Julio 2020



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Estructura a orden de un lazo de la teoría $\lambda\phi^4$ con dimensiones
extra universales

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

por

M. C. Gibraham Ivanhoe Nápoles Cañedo

asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Dr. Eric Martínez Pascual

Puebla Pue.

Julio 2020

Título: Estructura a orden de un lazo de la teoría $\lambda\phi^4$ con dimensiones extra universales

Alumno: M. C. GIBRAHAM IVANHOE NÁPOLES CAÑEDO

COMITÉ

Dr. Gilberto Tavares Velasco
Presidente

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Secretario

Dr. Justiniano Lorenzo Díaz Cruz
Vocal

Dr. Eric Martínez Pascual
Coasesor

Dr. J. Jesús Toscano Chávez
Asesor

*Dedicado a mi madre, quien con amor y esfuerzo
supo hacer de mí un reflejo de su persona.*

*Dedicado a mi padre, quien forjó mi carácter
para nunca ceder y siempre alcanzar
mis objetivos en la vida.*

*Dedicado a mi esposa e hijos, quienes con
paciencia me han apoyado para la
culminación de este trabajo
y con amor han hecho de
mí un mejor padre.*

Agradecimientos

Esta tesis más que un trabajo de investigación representa un compendio de ideas, cada una de ellas desarrolladas en distintos lugares y ambientes, por ello, este trabajo simboliza una parte de mi vida, mis emociones y mis ambiciones. Detrás de cada idea escrita existen personas que estuvieron conmigo y quisiera dedicar en este apartado algunas palabras de agradecimiento por que no hay nada más honorable desde mi perspectiva que dar las gracias a aquellos que alguna vez te tendieron la mano y estuvieron al pendiente latente o en todo momento.

Mi más grande gratitud es hacia mis Padres, personas de una gran calidad humana que descubrieron mi pasión, que entendieron mis necesidades y que me condujeron por el mejor camino que es ser un hombre de bien. Agradezco enormemente a mi Madre, quien con paciencia, sacrificio y esfuerzo me brindó su amor incondicional, me enseñó a enfrentar el mundo y las consecuencias de mis actos, sin ella un reflejo de mi persona no existiría, quizás el reflejo que más aprecio de mí mismo.

Le doy las gracias y mi más alto respeto a mi Padre quien forjó mi carácter y me inculcó la mentalidad de nunca ceder, de culminar mis proyectos y siempre alcanzar mis objetivos en la vida, me enseñó que el mundo no era un lugar fácil pero sí indudablemente el mejor lugar para ser feliz. Le agradezco por preguntar cada año sobre los avances en mi investigación ya que cada año tenía algo nuevo que contarle lo cual me llenaba de motivación, le agradezco por todo lo que me ha enseñado y su ejemplo cabal permanecerá intacto insuperable e inveteradamente en mi memoria.

Agradezco a mis tres Hermanos por la fraternidad que siempre nos ha unido, por ser cada uno de ellos un ejemplo para mí, y por que de cada uno de ellos he tomado lo mejor y lo he hecho parte de mi persona, por que han detallado mi temperamento y me han procurado aunque lejos siempre he estado de ellos.

Le doy gracias a mi Esposa por su lealtad, comprensión, sacrificio y amor. Por confiar en mí en todo instante, por compartir su vida a mi lado, por todo el cariño y atención brindada, por ser mi compañera y mejor amiga día tras día. Agradezco a mis hijos, motor que me impulsa en cada momento por convertirme en alguien mejor, por darle un sentido más preciso a mi vida, por ayudarme a descubrir nuevos sentimientos y por justificar racionalmente mis anhelos y ambiciones.

Agradezco a mis dos asesores de tesis, por sus exigencias, motivaciones y todo lo aprendido. Gracias por todo el conocimiento transmitido, por forjar mi formación académica y por el apoyo concedido cuando más lo he necesitado.

Le doy las gracias a CONACYT por el sustento económico asignado, con el apoyo brindado fue posible formarme como científico y convertirme en un ciudadano íntegro al servicio de mi nación.

Publicaciones

- E. Martínez-Pascual, G. Nápoles-Cañedo, H. Novales-Sánchez, A. Sierra-Martínez, and J. J. Toscano, *Implications of extra dimensions on the effective charge and the beta function in quantum electrodynamics*, Phys. Rev. D **101**, 035034 (2020).

La participación en esta publicación generaron las bases conceptuales, así como las herramientas matemáticas necesarias para desarrollar las investigaciones en esta tesis.

- I. García-Jiménez, J. Montaña, G. I. Nápoles-Cañedo, H. Novales-Sánchez, J. J. Toscano, and E. S. Tututi, *Diphoton Higgs signal strength in a Standar Model extension to extra dimensions*, aceptado para su publicación en J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., JPhysG-103228.R1 (2020).

La colaboración en este artículo sirvió como entrenamiento en las técnicas aplicadas en la presente tesis que aportaron resultados con implicaciones similares a los obtenidos en esta investigación.

- M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, G. I. Nápoles-Cañedo, J. J. Toscano, *One-loop order effects from one universal extra dimension on $\lambda\phi^4$ theory*, presentado para su publicación en Int. J. Theor. Phys., arXiv:2002.10015, (2020).

Este artículo resume el trabajo hecho en el Capítulo 4 de esta tesis, que ejemplifica el proceso de compactificación, regularización y remoción de las divergencias UV para la teoría de un campo escalar real auto-interactuante en el contexto de una sola dimensión extra.

- E. Martínez-Pascual, G. I. Nápoles-Cañedo, J. J. Toscano, *One-loop order effects from n universal extra dimensions on $\lambda\phi^4$ theory*, en preparación.

Este artículo resume el trabajo hecho en el Capítulo 5 de esta tesis, que generaliza los procedimientos y técnicas implementadas en una dimensión extra a n dimensiones extra universales, exponiendo el proceso de compactificación, regularización y remoción de las divergencias UV para la teoría de un campo escalar real auto-interactuante $\lambda\phi^4$.

Índice general

Índice de figuras	XI
Resumen	XIII
Introducción	XV
1. Modelo extra dimensional de un campo escalar y el Kernel de Feynman.	1
1.1. Aspectos introductorios y características generales del modelo.	1
1.2. El Kernel de Feynman para un campo escalar real en dimensiones extra.	6
2. Funciones de Green y la teoría del campo escalar auto-interactuante en dimensiones extra.	11
2.1. Funcional generatriz y la función de Green de k -puntos.	11
2.1.1. La funcional de vacío para un campo Klein-Gordon no interactuante.	11
2.1.2. Funcional generatriz para campos interactuantes y la función de Green de k -puntos.	12
2.2. Descripción del modelo escalar dimensionalmente reducido para una dimensión extra.	14
2.3. Descripción del modelo escalar dimensionalmente reducido para n UEDs	16
2.3.1. Funciones de vértice estándar del modelo auto-interactuante para n UEDs.	18
3. Regularización dimensional y la función de Epstein.	23
3.1. Funciones zeta.	24
3.2. Regularización dimensional de las funciones escalares a un lazo.	26
3.3. La función unidimensional de Epstein en serie de potencias.	28
3.3.1. Obtención de una serie de potencias para $E_1^{c^2}(s)$: enfoque preliminar.	29
3.3.2. Serie de potencias para $E_1^{c^2}(s)$: enfoque general.	30
3.3.3. Expansión asintótica para la función de Epstein multidimensional	40
4. Estructura a orden de un lazo de la teoría $\lambda\phi^4$ con una dimensión extra.	43
4.1. Descripción de las SVFs renormalizadas de dos y cuatro puntos.	43
4.2. Regularización de las SVFs de dos y cuatro puntos en presencia de una dimensión extra.	45
4.3. Renormalización a un lazo de la SVF de dos puntos en presencia de una dimensión extra	47
4.4. Renormalización a un lazo de la SVF de cuatro puntos en presencia de una dimensión extra.	48
4.5. Desacoplo de la contribución KK en presencia de una dimensión extra.	50
5. Estructura a orden de un lazo de la teoría $\lambda\phi^4$ con n dimensiones extra.	53
5.1. Descripción renormalizada para las funciones de vértice estándar de dos y cuatro puntos.	53
5.1.1. Regularización de las SVFs de dos y cuatro puntos en presencia de n dimensiones extra.	56
5.2. Renormalización a un lazo de la SVF de dos puntos en presencia de n dimensiones extra.	56
5.3. Renormalización a un lazo de la SVF de cuatro puntos en presencia de n dimensiones extra.	58
5.4. Desacoplo de la contribución KK en presencia de n dimensiones extra.	62
6. Conclusiones y comentarios finales	67
A. Series de potencias para la función modificada de Bessel de segundo tipo	71

A.1. Enfoque mediante los polinomios de Bessel	71
A.1.1. Polinomios de Bessel para $\nu = \alpha + 1/2$ con $\alpha \in \mathbb{R}$	72
A.2. Enfoque usando una representación integral	72
A.3. Enfoque mediante la transformada de Fourier	73
B. Función zeta inhomogénea de Epstein y su representación polilogarítmica	75
C. Interacciones de orden mayor que cuatro.	79
C.1. Polinomios en términos de las variables de Mandelstam.	79

Índice de figuras

1.1.	La identificación de los puntos frontera de un segmento dan lugar al toro unidimensional $T^1 = S^1$.	2
1.2.	Construcción del Toro bidimensional T^2 identificando las fronteras en las direcciones señaladas.	2
1.3.	Se observa una sección del toro 3-dimensional T^3 .	3
1.4.	El efecto de aplicar el grupo cíclico \mathbb{Z}_2 a S^1 es el segmento o línea que conforma la variedad S^1/\mathbb{Z}_2 .	3
1.5.	El producto cartesiano $S^1/\mathbb{Z}_2 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ es continuamente deformable a un plano.	4
1.6.	La banda de Möbius es el resultado de la acción del grupo \mathbb{Z}_2 sobre el toro T^2 .	5
1.7.	La superficie tipo Calabi-Yau es aproximadamente T^4/\mathbb{Z}_2 .	5
1.8.	El producto $S^1/\mathbb{Z}_2 \times S^1/\mathbb{Z}_2 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ es continuamente deformable a un cubo.	6
2.1.	Ejemplos de funciones de Green Estándar (SGFs).	12
2.2.	Ejemplos de funciones de Green No Estándar (NSGFs).	13
2.3.	Algunos ejemplos para funciones de Green en el caso no interactuante.	13
2.4.	Propagador modo cero (línea sólida) y excitado (línea punteada).	21
3.1.	Para $\nu \leq 0$ los polos caen en $\text{Re}(a) \leq 0$, lo cual fija que $a_0 = 0$.	31
3.2.	Para $\nu > 0$ los polos sucederán en $\text{Re}(a) \leq \nu$, lo cual fija que $a_0 = \nu$.	31
3.3.	En la figura observamos que a_0 puede elegirse como algún valor finito sobre el eje real a la derecha de los polos del término $\Gamma(a)\Gamma(a - \nu)$.	32
3.4.	Fijamos $a_0 = 0$ ya que tanto los polos de $\Gamma(a)$ como el polo de orden dos situado en s y el polo $s - 1/2$ se encuentran antes de cero.	33
3.5.	En este caso fijamos $a_0 = 1/2$ ya que tanto los polos de $\Gamma(a)$ como el polo de orden dos situado en $s - 1/2$ y el polo en s se encuentran antes de $1/2$.	33
3.6.	En esta situación $a_0 = s$ pues todos los polos quedan sobre s o antes de s .	34
3.7.	En esta situación $a_0 = 0$ pues todos los polos quedan en cero o antes de cero.	34
3.8.	Contorno de integración en el plano complejo.	35
4.1.	Contribuciones a la SVF de dos puntos $\Gamma_2(p)$ para una dimensión extra sin contratérmino.	44
4.2.	Contribuciones a la SVF de cuatro puntos $\Gamma_4(p_i)$ sin el contratérmino.	45
5.1.	Contribuciones a las SVF de dos puntos $\Gamma_2(p)$ para n dimensiones extra sin contratérmino.	55
5.2.	Contribuciones a las SVF de cuatro puntos $\Gamma_4(p_i)$ para n dimensiones extra sin el contratérmino.	55

Resumen

La presente tesis realiza un estudio del impacto a un lazo de dimensiones extra sobre los parámetros físicos para una teoría de un campo escalar real auto-interactuante en el marco de dimensiones extra universales (UED) por sus siglas en inglés (*Universal Extra Dimensions*) y en un régimen de baja energía. Como primer paso en la investigación se abordan distintos escenarios extra dimensionales con la finalidad de motivar el estudio e introducir los conceptos claves detrás de los modelos con dimensiones extra. El escenario de la teoría consta de una geometría espacio temporal factorizable $\mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$ de dimensión $(4 + n)$, donde \mathcal{M}^4 es el espacio tiempo de Minkowski y \mathcal{N}^n corresponde a las dimensiones extra compactas, que se construye como el producto de n -copias de la variedad unidimensional S^1/\mathbb{Z}_2 . La cuantización de la teoría se realiza mediante la formulación por integral de trayectoria, partiendo de una Lagrangiana de Klein-Gordon que depende del campo escalar Φ en altas dimensiones y un potencial auto-interactuante $\lambda_{(4+n)}\Phi^4$. La reducción dimensional de la teoría de campo definida sobre el espacio tiempo $\mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$ tiene lugar a través de un proceso de compactificación que consiste básicamente en integrar a las dimensiones extra y como resultado se obtiene la teoría dimensionalmente reducida descrita por los sectores: (i) solamente el campo de modo cero o campo ligero $\phi^{(0)} \equiv \phi$, (ii) interacciones entre el campo de modo cero y campos excitados de Kaluza-Klein (KK) $\phi^{(m)}$, (iii) el sector compuesto puramente de campos excitados KK y (iv) el sector que contiene todos los operadores invariantes de Lorentz de dimensión canónica mayor que cuatro. Cuanticamente la teoría contiene distintas funciones de Green de k -puntos y como consecuencia es posible definir a los propagadores en el modelo y a las funciones de vértice estándar de k -puntos, con los cuales se recuperan las funciones de Green cuyas partículas externas son aquellas solamente asociadas al campo ligero. Particularmente nuestro interés se centra en el estudio de las funciones de vértice estándar de dos y cuatro puntos en un límite de baja energía a nivel de un lazo, donde se distinguen dos contribuciones que impactan a dichas funciones de vértice estándar; la primera contribución se atribuye al campo ligero circulando dentro del lazo, mientras que en la segunda circulan una infinidad de campos excitados KK. Concretamente es a este nivel donde la presente tesis hace mayor contribución al tratar con la regularización y renormalización de esta teoría que contiene no solamente un número infinito de grados de libertad, sino también un número infinito de campos escalares. Mostraremos que el método de regularización dimensional aplicado a las integrales de un lazo divergentes presentes en esta teoría implica la presencia del producto $E_l^{c^2} \Gamma$, siendo $E_l^{c^2}$ la función inhomogénea multidimensional de Epstein con c^2 un parámetro adimensional proporcional a R^2 , donde R es el radio de compactificación del modelo, mientras que Γ es la bien conocida función gamma. En otras palabras, mostraremos que la infinidad de divergencias ultravioletas (UV) presentes a un lazo, las cuales impactan a la masa y a la constante de acoplamiento de la teoría pueden ser analíticamente controladas sin la necesidad de imponer un corte en la contribución de modos excitados. Para extraer explícitamente tales divergencias se justifica la propuesta de una representación asintótica en serie de potencias de c^2 que permite aislar a dichas divergencias. Posteriormente adoptamos el esquema de renormalización por Substracción Mínima (MS) por sus siglas en inglés (*Minimal Scheme*), que tiene la finalidad de cancelar a los polos que pudieran aparecer en las cantidades calculadas mediante la determinación de los contratérminos apropiados. Como consecuencia de la implementación del esquema-(MS) se obtienen las funciones de vértice de dos y cuatro puntos renormalizadas, así como la función beta β ; sin embargo, dichos resultados no satisfacen el teorema de desacoplo explícitamente, es decir, cuando $R \rightarrow 0$ los efectos de las dimensiones extra no desaparecen. En cambio, al realizar el cálculo de las funciones de vértice de dos y cuatro puntos así como su respectiva función beta en un esquema dependiente de masa, el desacoplo es explícito. Los resultados originales presentados en esta tesis son: la cuantización por integral de trayectoria de la teoría para un campo escalar auto-interactuante en un escenario UED, la obtención de las funciones de vértice estándar, la justificación matemática de una serie asintótica de potencias en c de la función de Epstein, la regularización y renormalización de las funciones de vértice de dos y cuatro puntos ligeras, incluso en un esquema dependiente de masa donde el teorema de desacoplo se satisface.

Introducción

Aspectos generales detrás de los modelos extradimensionales.

Teorías fundamentales que se encuentran a la escala de Planck no son consideradas teorías de campo o partículas en el sentido de Wigner. En cambio, dichas teorías formuladas a la escala de Planck resultan ser interesantes, elegantes e intentan resolver problemas de la física actual que representan un gran reto como lo es encontrar una teoría cuántica de la gravedad. Estas teorías resultan ser tan hipotéticas que anteponen lo teórico dejando a un lado la parte experimental, lo cual conduce a buscar alternativas de modelos que incluyan un ingrediente fenomenológico con una proyección más física y realista. Una posibilidad en la búsqueda de una teoría de la gravedad desde un enfoque de partículas son dimensiones extra. La idea de dimensiones extra en teoría de campos data de 1920 [1, 2] donde ya existían propuestas e ideas en torno a este tipo de modelos. Tales formulaciones necesariamente se encuentran a escalas de energía muy por encima de lo que es producido en los aceleradores y colisionadores de partículas actuales. El optimismo por parte de los científicos de ver alguna señal que motive la existencia de dichas teorías fundamentales ha llevado a los físicos a intentar observar sus efectos de forma perturbativa y a una escala de energía menor, es por ello que actualmente en el Gran Colisionador de Hadrones, experimentos centrados en la búsqueda de dimensiones extra son contemplados [3, 4], estableciendo cotas experimentales que se intentan contrastar con modelos teóricos formulados en más de cuatro dimensiones para que estos últimos sean consistentes.

Antecedentes históricos y motivacionales en dimensiones extra.

La idea de dimensiones extra surge debido a los intentos de unificar las distintas fuerzas fundamentales de la naturaleza. En 1914 Nordström propuso una teoría vectorial formulada en cinco dimensiones (5D) con el propósito de describir a la teoría electromagnética y una versión escalar de la gravedad [5], [6]. Posteriormente, en 1919 con el progreso de la recién descubierta teoría de la Relatividad General, Theodor Kaluza inició una descripción para la teoría de Einstein en cinco dimensiones [1], que después fue continuada por Klein en 1926 [2] donde la quinta dimensión es compactificada sobre un círculo, siendo capaz de obtener tanto una teoría de la gravedad en cuatro dimensiones (4D) y a su vez el electromagnetismo. Subsecuentemente otras dos interacciones fundamentales, la fuerte y la débil fueron también unificadas [7] extendiendo el mecanismo de Kaluza a más dimensiones extra, fue aquí donde se asumió que dichas dimensiones tenían que ser compactas, lo cual llevó en 1980 a la idea de crear teorías de super gravedad formuladas en once dimensiones que se convirtieron en modelos candidatos a ser una “teoría del todo”, como lo es la teoría de super cuerdas en diez dimensiones [8, 9].

El interés en estudiar dimensiones extra es principalmente motivado por el hecho de poder unificar la gravedad y las interacciones de las partículas fundamentales (para lecturas sobre estos aspectos en física teórica se recomiendan las referencias [10]- [14]). A su vez, una motivación más en estudiar modelos con dimensiones extra fue impulsado por Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali [15], quienes observaron que el problema de jerarquía de la masa del Higgs puede ser abordado con dimensiones extra relativamente grandes. En este modelo el tamaño de las dimensiones extra son supuestas ser grandes, como ejemplo para dos dimensiones extra dichas dimensiones serían del orden de 1 mm, pero conforme se incrementa el número de dimensiones extra, el tamaño de estas empiezan a ser cada vez más pequeñas, del orden de 1 fm para seis dimensiones extra, de tal forma que sus efectos pueden llegar a ser medibles en futuros aceleradores e inclusive cabe la posibilidad de ser visibles en aceleradores actuales. Antoniadis en 1990 [16] propuso que el tamaño de las dimensiones extra son cercanas a TeV^{-1} relacionadas con el rompimiento de supersimetría (SUSY) por su acrónimo en inglés (*Super Symmetry*). Por otro lado, modelos con dimensiones extra universales (UED) por sus siglas en inglés (*Universal Extra Dimensions*) recientemente han

sido tema de interés, pues son capaces de sugerir respuestas a algunas preguntas aún válidas dentro del Modelo Estándar (SM, abreviatura en inglés de *Standard Model*), como lo es brindar una posible explicación de tener tres generaciones de fermiones como resultado de la cancelación global de anomalías en la extensión del SM [17], además, proporcionan una explicación convincente de la estabilidad del protón [18]. Adicionalmente, modelos UED con compactificación orbifold preservan paridad de Kaluza-Klein (KK) y proporcionan un candidato a materia oscura [19].

Por otro lado, teorías con dimensiones extra resultan ser formulaciones interesantes en el campo de investigación correspondiente a teorías más allá del modelo estándar de partículas fundamentales [20]. Existen en la literatura argumentos sólidos y bien motivados [15]- [21] los cuales sugieren que dimensiones extra relativamente grandes posiblemente sean visibles a la escala de TeVs. Actualmente el Gran Colisionador de Hadrones opera a energías en el centro de masa con un valor de 13 TeVs, dando pie a que dimensiones extra sigan siendo atractivas en cuestiones fenomenológicas por estar al alcance en tales formulaciones [3, 4].

Escenarios y formulaciones en dimensiones extra.

Cabe mencionar que no hay un único escenario de dimensiones extra, de hecho se conoce una variedad de formulaciones y por mencionar a las más importantes tenemos a *dimensiones extra relativamente grandes* (large extra dimensions) [15] propuesto por Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali, por otro lado tenemos el modelo propuesto por Randall y Sundrum que lleva por nombre *dimensiones extra deformadas* (warped extra dimensions) [22] y *dimensiones extra universales* (universal extra dimensions) [23], siendo este último fuertemente inspirado por [24] y [25]. Las formulaciones mencionadas con anterioridad comparten el hecho de suponer que nuestro espacio 3-dimensional es visto como una 3-brana incrustada en un espacio tiempo dimensionalmente superior comúnmente conocido como el ‘bulto’. El hecho de usar una formulación u otra está relacionado con la geometría donde se piensa desarrollar el modelo, además de la manera en que los campos son definidos sobre dicha geometría, así como el interés por resolver o atacar un problema en particular, ya que esto último regularmente es motivado por ciertas consideraciones físicas que a priori conducen a elegir el escenario más afín a tales fundamentos, como ejemplo podemos mencionar el problema de la jerarquía de masas [15].

Dimensiones extra universales.

El marco teórico dentro del cual trabajaremos en esta tesis es el enfoque de *dimensiones extra universales* (UED), donde en general, si se tiene una teoría de norma, a los campos de norma y de materia se les tiene permitido propagarse en el bulto. Para preservar la invariancia de norma en altas dimensiones en este tipo de escenarios, es necesario que todos los parámetros de norma sean definidos sobre el bulto [26]. Además para ser consistentes con los datos experimentales actuales, es necesario que la variedad adicional correspondiente a dimensiones extra sea apropiadamente compactificada. La idea básica detrás de un modelo con dimensiones extra universales es un tanto sencilla [27], ya que se propone como escenario a una geometría de espacio tiempo factorizable con dimensiones extra compactas espaciales que comúnmente puede ser un orbifold, sobre el cual una teoría de campo es definida. La reducción dimensional toma lugar una vez que el contenido extra dimensional es armónicamente expandido bajo ciertas condiciones de frontera y las dimensiones extra son integradas al nivel de la acción. El modelo resultante es referido como la teoría efectiva o también como la teoría dimensionalmente reducida.

Teoría del campo escalar real auto-interactuante en dimensiones extra.

En la presente tesis, la teoría de campo bajo estudio es un campo escalar real que se propaga en dimensiones espaciales adicionales, es decir, al modelo bien conocido del campo escalar real auto-interactuante se le han añadido n dimensiones extra y cada dimensión posee un radio de compactificación de tamaño R , dicho radio de compactificación se supone lo suficientemente pequeño justificando el hecho de que dimensiones extra aún no han sido confirmadas experimentalmente. La finalidad de desarrollar este modelo, radica en aprender a lidiar con los aspectos técnicos que resulten, ya que dicho modelo es sensible al número de dimensiones extra y al tamaño de la escala de compactificación, mientras que el propósito principal es comprender los efectos que posiblemente pueden emerger de dichas dimensiones. Si dimensiones extra existen, estas deberían afectar la dinámica de las

partículas conocidas, de aquí se deriva la importancia de estudiar correcciones radiativas en dimensiones extra, pues fluctuaciones cuánticas de dimensiones extra pueden surgir como observables en procesos de partículas en la teoría efectiva cuádrimensional.

El estudio de la teoría dimensionalmente reducida del campo escalar auto-interactuante que aquí se desarrolla hace un análisis específico desde su cuantización canónica por medio de la integral de trayectoria que dará lugar a las funcionales generatrices capaces de definir funciones de Green de la teoría en curso. Como es conocido, las funciones de Green del modelo permiten establecer a las funciones de vértice, en particular, centraremos la atención en las funciones de vértice ligeras, las cuales serán tratadas apropiadamente haciendo uso de técnicas de regularización dimensional y en especial es aquí donde la función zeta inhomogénea de Epstein toma relevancia al momento de aislar las divergencias ultravioletas que surgen en la teoría, lo cual conduce a proponer un esquema de renormalización capaz de lidiar con tales divergencias.

Estructura y contenido capitular de la tesis.

Capítulo 1. Modelo extra dimensional de un campo escalar y el kernel de Feynman.

En el capítulo 1 iniciamos explicando algunas generalidades del modelo antes de realizar la construcción de la integral de trayectoria, agregándose una breve justificación del por qué de la geometría compacta elegida, aspectos importantes detrás de la compactificación orbifold y las descomposiciones de Fourier de los campos en cuestión, haciendo incapie que después de la compactificación obtenemos a la teoría dimensionalmente reducida que es el objeto principal de estudio en esta investigación, dicha teoría efectiva da lugar a un número infinito de campos escalares, los cuales son llamados modos excitados de Kaluza-Klein o torres KK. Es aquí donde podemos distinguir al campo liviano $\phi^{(0)} \equiv \phi$ al ser indentificado con el modo cero, contrario a los campos con modos pesados $\phi^{(k)}$ los cuales son llamados modos excitados KK.

Además, construiremos la integral de trayectoria Hamiltoniana de la teoría cuádrimensional efectiva por medio de una reducción dimensional a nivel del kernel de Feynman asociada a la teoría general en altas dimensiones de un campo escalar real auto-interactuante $\lambda_{(4+n)}\Phi^4$ definida sobre el espacio tiempo $(4+n)$ -dimensional y con geometría $\mathcal{M}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2 \times \dots \times S^1/\mathbb{Z}_2$, donde \mathcal{M}^4 es el espacio tiempo cuádrimensional de Minkowski y \mathcal{N}^n es un espacio compacto que corresponde a las dimensiones adicionales. Se puede apreciar en dicho apartado que como es deseable satisfacer las relaciones de ortonormalidad y completitud de los eigenkets básicos para los campos cuánticos, la medida funcional involucrada en la integral de trayectoria, antes y después de la reducción dimensional están trivialmente relacionadas. Dicha relación está de acuerdo con [28], y como resultado tenemos una compactificación de Kaluza-Klein consistente y carente de anomalías, cabe enfatizar que estas anomalías deben ser entendidas como la no invariancia de la medida funcional (para una mayor lectura sobre este tema ver [29] y [30]).

Capítulo 2. Funciones de Green y la teoría del campo escalar auto-interactuante en dimensiones extra.

En el Capítulo 2 se discutirá lo relacionado con las funciones de Green de la teoría efectiva, se definirá la funcional generatriz libre, es decir, sin potencial alguno de interacción. Tal funcional da lugar a los propagadores libres de Feynman del modelo. A su vez, se definirá la funcional generatriz interactuante para una función de potencial bien comportado del tipo $\lambda_{(4+n)}\Phi^4$ de donde será posible obtener las funciones de Green de k -puntos del modelo dimensionalmente reducido a un lazo. Eventualmente veremos que en la teoría dimensionalmente reducida tendremos $(k+1)$ tipos distintos de funciones de Green de k -puntos y esencialmente de estas funciones de Green resultantes, aquellas que posean solamente partículas de modos cero como patas externas serán llamadas Funciones de Green Estándar denotadas por sus siglas en inglés como (SGFs, *Standard Green Functions*). En cambio, el resto de las funciones de Green serán llamadas Funciones de Green No Estándar (NSGFs, abreviatura en inglés de *Non-standard Green Functions*). Para la teoría libre, las funciones de Green impares se anulan, de hecho, solamente las funciones de Green pares sobreviven y corresponden a la propagación libre de partículas escalares masivas, en resumen podemos decir que tendremos partículas libres de modo cero propagándose y excitaciones KK de partículas libres. Es importante mencionar que no esperamos tener partículas que transmuten del modo cero a otro que sea excitado a nivel árbol, y en general tampoco podemos esperar alguna otra combinación de transmutación para los

modos excitados, es decir, el modo de Fourier que tiene el campo al inicio es el modo que conserva al final después de una propagación libre.

El caso interactuante tendrá un carácter perturbativo, ya que su funcional generatriz se expande respecto a la constante de acoplamiento, la cual se ha supuesto ser muy pequeña. Las funciones de Green de k -puntos contendrán un número infinito de diagramas para un orden finito en la expansión, lo anterior es debido a la infinidad de interacciones que tenemos desde la lagrangiana \mathcal{L} que contiene un número infinito de interacciones entre partículas con modo cero y excitados o únicamente interacciones entre modos KK. A su vez, en este Capítulo 2 describiremos al modelo dimensionalmente reducido obtenido de la teoría auto-interactuante $\lambda_{(4+n)}\Phi^4$ aunada a un término que contempla todo tipo de operadores que son invariantes de Lorentz de la forma $\mathcal{O}^{4+n+r}(\Phi, \partial_M\Phi)$ de dimensión canónica mayor que cuatro suprimidos por una escala de masa como aparece en cualquier teoría de campo efectiva, la cual ha sido definida sobre la variedad $\mathcal{M}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times S^1/\mathbb{Z}_2$ y que después de la compactificación distingue entre los sectores compuestos por: (i) solamente el campo de modo cero, (ii) interacciones entre el campo de modo cero y los campos excitados, (iii) el sector compuesto puramente de campos excitados KK y (iv) el sector que contiene todos los operadores invariantes de Lorentz de dimensión canónica mayor que cuatro $\mathcal{O}^{4+r}(\phi, \phi^{(k)}, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^{(k)})$ suprimidos por una escala de masa tal que todos los sectores descritos son de dimensión canónica cuatro. Primeramente se aborda el caso cinco dimensional y después se presenta el caso general con n dimensiones extra, para después resaltar el hecho de que el número infinito de interacciones de la teoría efectiva es gobernado por una sola constante de acoplamiento universal, la misma constante que controla al término auto-interactuante $\lambda\phi^4$ del modo cero.

Al término del Capítulo 2, en la aproximación a un lazo, las funciones de vértice estándar (SVFs, acrónimo en inglés de *Standard Vertex Functions*) de dos y cuatro puntos son escritas. Dichas funciones de vértice estándar, son aquellas funciones de Green que contribuyen a las funciones de Green ligeras, también llamadas SGFs (*Standard Green Functions*). Estas funciones de vértice tomarán en cuenta todas las contribuciones virtuales, debemos esperar entonces tener aparte de las divergencias ultravioletas usuales, nuevas divergencias directamente conectadas con el número infinito de interacciones que se dejan ver como las excitaciones de los campos o las torres KK.

Capítulo 3. Regularización dimensional y la función de Epstein.

El Capítulo 3 es el apartado con mayor contenido de información sobre las estructuras matemáticas encontradas en nuestra propuesta para remover divergencias ultravioletas (UV) del modelo, pues se reserva para estudiar el procedimiento matemático involucrado al regularizar los diagramas y amplitudes que en sus contribuciones virtuales circulan partículas con modos excitados. Cuando aplicamos regularización dimensional a la contribución compuesta únicamente de modo cero, es suficiente si procedemos como habitualmente aparece en la literatura al momento de aislar las divergencias, en cambio, para la contribución no estándar tenemos una infinidad de partículas circulando dentro del lazo que se codifican en las sumas infinitas de las amplitudes obtenidas, como veremos posteriormente tales divergencias quedan encapsuladas en el producto entre la función Gamma Γ y la función zeta inhomogénea multidimensional de Epstein $E_l^{c^2}$, donde c^2 es proporcional al cuadrado del radio de compactificación R^2 , el cual está asociado con el tamaño de cada dimensión extra y $l = 1, \dots, n$ con n el número de dimensiones extra. La aparición de las funciones $E_l^{c^2}$ proviene de mantener la infinidad de modos excitados KK al interactuar con el campo ligero, lo cual es contrario a lo que comúnmente se hace al introducir técnicas que interrumpen las sumatorias infinitas que surgen en los cálculos, usualmente llamado como corte en la energía (*cut-off*).

El producto en cuestión $E_l^{c^2}\Gamma$ guarda la información de la infinidad de partículas excitadas circulando dentro del lazo y en especial en este capítulo nos adentramos en estudiar dicho aspecto, buscando como representación a una serie de potencias asintótica para $c \ll 1$ [34, 35] con el objetivo de aislar las divergencias ultravioletas que surgen por efecto de las dimensiones extra en el límite de baja energía. En este apartado se presenta por primera vez una justificación formal sobre la validez de dicha serie de potencias en la variable c^2 de la función $E_1^{c^2}(s)$ en el dominio $s \in \text{Re}$ teniendo como puntos singulares al conjunto $s \in \{1/2, -1/2, -3/2, \dots\}$, donde en particular se distinguen los valores de $s = \{-1, 0\}$, que se convierten en los límites cuadrimensionales de las SVFs de dos y cuatro puntos respectivamente después de ser regularizadas dimensionalmente. Tal expansión asintótica para $E_1^{c^2}$ permite originalmente conocer la estructura que toma la serie de potencias asintótica para la función de Epstein multidimensional.

Capítulo 4. Estructura a orden de un lazo de la teoría $\lambda\phi^4$ con una dimensión extra.

El Capítulo 4 tiene como objetivo mostrar un esquema mediante el cual las divergencias ultravioletas que surgen en la teoría son controladas y a su vez removidas. Las cantidades susceptibles a efectos por correcciones radiativas son los parámetros de la teoría los cuales son la masa y la constante de acoplamiento, tal que las nuevas correcciones para dichos parámetros modifican a las funciones de vértice estándar de dos y cuatro puntos. Procedemos de una manera usual, esto es, definiendo a nuestras cantidades desnudas en la lagrangiana en términos de cantidades renormalizadas y contratérminos. Como consecuencia escribimos a las funciones de vértice estándar renormalizadas de dos y cuatros puntos. En este escenario las amplitudes a un lazo obtenidas se encuentran conformadas por series divergentes de la forma $\sum_{k=1}^{\infty} \int d^4k$ las cuales deben ser regularizadas para que estas mismas adquieran un sentido físico. El proceso de regularización consiste en la aplicación de regularización dimensional tanto para la integral continua junto con la suma infinita mediante la aplicación de las técnicas estudiadas en el Capítulo 3, toda la información después de hacer la continuación analítica sobre las series e integrales divergentes quedarán codificadas en el producto entre la función zeta inhomogénea unidimensional de Epstein y la función gamma [34, 35]. El proceso de extraer divergencias se reduce a analizar la estructura de polos para dicho producto de funciones, lo cual se convertirá en un procedimiento técnico al usar una representación en serie de potencias del cociente $m^2/R^{-2} \ll 1$ que funge como un límite asintótico para el régimen de baja energía, siendo R el radio de compactificación del modelo y m la masa de la partícula asociada al campo ligero ϕ . Con la finalidad de remover las divergencias UV que surgen a nivel de un lazo para una dimensión extra, adoptamos el esquema de Sustracción Mínima (MS), el cual consiste en definir a los contratérminos necesarios para cancelar a los polos que aparecen en nuestras amplitudes regularizadas, es interesante ver que para una dimensión extra no es necesaria la introducción de operadores de dimensión canónica mayor que cuatro para remover las divergencias a nivel de un lazo. En este esquema independiente de la masa, el teorema de desacoplo [33] no se satisface explícitamente. Con la intención de hacer cumplir el teorema de desacoplo se elige un esquema de substracción dependiente de masa tomando como punto cinemático o escala de substracción a $-M^2$ [34], donde las cantidades de interés explícitamente se desacoplan, a su vez se presenta el cálculo de la función beta en ambos esquemas, enfatizando que en el esquema-(MS) la función beta no se desacopla a diferencia del esquema dependiente de masa donde la función beta se desacopla y a su vez es posible obtener el valor de la función beta en el esquema-(MS) en cierto límite, lo cual refleja consistencia en los cálculos.

Capítulo 5. Estructura a orden de un lazo de la teoría $\lambda\phi^4$ con n dimensiones extra.

El Capítulo 5 es una extensión de los procedimientos implementados en el Capítulo 4. Empezamos haciendo uso de la regularización dimensional y mantenemos el número infinito de contribuciones, de tal forma que los efectos extra dimensionales sobre las funciones de vértice estándar de dos y cuatro puntos de la teoría auto-interactuante $\lambda\phi^4$ a nivel de un lazo pueden ser encapsulados en una suma finita de productos entre las diferentes funciones zeta inhomogéneas de Epstein y la función gamma, cuanto mayor sea el número de dimensiones extra, mayor será el número de estos términos. De esta manera, las divergencias UV surgen como polos de los productos de las funciones ya mencionadas.

Para la función vértice estándar de dos puntos, encontramos que para $c \ll 1$ los términos UV divergentes proporcionales a $(1/\epsilon)$ pueden ser extraídos (con ϵ el parámetro usual de regularización dimensional, $\epsilon = 4 - D$). Entonces, inspirados por el esquema de Sustracción Mínima (MS) uno puede reunir estas contribuciones divergentes a partir de los diferentes productos de las funciones zeta inhomogéneas de Epstein con la función gamma y definir un contratérmino apropiadamente [34, 35]. Dicho contratérmino a nivel de la Lagrangiana es de dimensión canónica cuatro dado por $-\frac{1}{2}\delta m_n^2 \phi^2$, donde la forma específica de la constante δm_n^2 depende del número n de dimensiones extra. Una desventaja del esquema-(MS) es que el teorema de desacoplo [33] no es explícito [34, 36].

Para la función vértice estándar de cuatro puntos, la estructura de los términos divergentes son también proporcionales a $(1/\epsilon)$, sin embargo el factor de proporcionalidad depende de los momentos externos, tal que en el esquema-(MS), los contratérminos que apropiadamente definen a la constante de acoplamiento son de la forma $-B\phi^4$, con B una constante numérica que depende de n aunados a operadores de dimensión canónica mayor que cuatro con la finalidad de cancelar las divergencias UV [34, 35]. Similarmente como fue mencionado antes, el desacoplo no es explícito en este esquema de substracción; sin embargo un esquema dependiente de masa restaura esta propiedad y en particular la función beta de la teoría se desacopla de las contribuciones KK cuando las masas de los campos excitados KK son extremadamente grandes [34].

Capítulo 6. Conclusiones y comentarios finales.

El Capítulo 6 muestra los comentarios y las conclusiones alcanzadas en esta tesis. Las implicaciones más importantes de este trabajo radican en la manera de abordar el problema de un campo escalar auto-interactuante en un escenario $(4 + n)$ -dimensional dimensionalmente reducido, al enfrentar un número infinito de contribuciones provenientes de efectos extra dimensionales, con técnicas matemáticas formales sin la necesidad de truncar las series infinitas involucradas. El carácter de la tesis radica en la sutileza de los cálculos involucrados, la claridad de como son abordados y los resultados como son presentados. La presente investigación culmina en el desarrollo de un procedimiento sistemático y una herramienta capaz de controlar y remover las divergencias ultravioletas que surgen en una teoría con un número infinito de campos escalares en el límite de baja energía. Dichas técnicas desarrolladas tienen la virtud de ser aplicadas a otras teorías como electrodinámica cuántica con dimensiones extra universales [34], e incluso extensiones para el Modelo Estándar en dimensiones extra, siempre y cuando se use la geometría de espacio tiempo propuesta en este trabajo de tesis [35].

Capítulo 1

Modelo extra dimensional de un campo escalar y el Kernel de Feynman.

1.1. Aspectos introductorios y características generales del modelo.

Este primer capítulo tiene como objetivo presentar la geometría del espacio tiempo sobre el cual estará definido el campo escalar en altas dimensiones. Tal geometría a su vez permite escribirlo como una combinación lineal de funciones armónicas después de imponer condiciones de periodicidad y paridad. Aquí también se llevará a cabo la reducción dimensional de una teoría $\lambda_{(4+n)}\Phi^4$ a nivel de la integral de trayectoria la cual conducirá al kernel de Feynman definido en un espacio-tiempo plano de Minkowski; a partir del kernel se podrá definir a la funcional generatriz del modelo y así obtener a las funciones de vértice de interés. Empezaremos con la acción para una teoría de campo escalar Φ definida sobre la variedad espacio temporal dada por el producto cartesiano de dos variedades $\mathcal{M}^{4+n} = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$, siendo \mathcal{M}^4 la variedad base que representa al espacio tiempo 4-dimensional de Minkowski y \mathcal{N}^n una variedad compacta n -dimensional relacionada con la extensión espacial que corresponde a las dimensiones extra. La elección de la geometría para la variedad compacta \mathcal{N}^n es clave en la construcción del modelo, pues al hacer tal elección, inmediatamente implica una base de funciones con respecto a la que el campo Φ será expandido. Dicha base está asociada con las representaciones irreducibles que admite el espacio compacto naturalmente. Uno podría estar tentado a cuestionar que tipo de variedad se debería elegir de todas las opciones que se presentan en la literatura. Debido a la información experimental recaudada en la actualidad, no hay realmente un argumento que apunte sobre alguna variedad en particular asociada con dimensiones extra, en cambio, de existir dimensiones extra, indiscutiblemente deberíamos fijar nuestra atención al tamaño o extensión de las variedades que resultaran candidatas para dichos modelos. Por simplicidad, elegimos entonces una variedad que admita una descomposición sencilla del campo escalar en términos de funciones armónicas, ya que esto facilitará el tratamiento matemático de la teoría por ser una base ortogonal frecuentemente usada en diversos ámbitos de la ciencia y comúnmente conocida como una serie de Fourier. Podríamos aventurarnos a pensar que uno busca encontrar nueva física vía dos características principales, la primera de ellas relacionada con la dimensión que debe poseer dicha variedad, y la segunda relacionada con el tamaño y la noción de extensión a través de la escala de compactificación R que puede tener el modelo. Para adentrarnos en los detalles, iniciaremos denotando al campo escalar real como $\Phi(x, \bar{x})$ siendo $(x, \bar{x}) \in \mathcal{M}^{4+n}$ un punto del espacio tiempo sobre nuestra variedad empleada con $x \in \mathcal{M}^4$ y $\bar{x} \in \mathcal{N}^n$. Pensemos inicialmente que \mathcal{N}^n es una variedad compacta compuesta del producto cartesiano de n círculos sobre la cual los campos satisfacen la siguiente condición de periodicidad:

$$\Phi(x, \bar{x} + 2\pi\mathbf{R}) = \Phi(x, \bar{x}), \quad (1.1)$$

con $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$ los radios de cada círculo que en principio son distintos. Esta condición de periodicidad impuesta sobre el campo permite la descomposición general

$$\Phi(x, \bar{x}) = \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{\sqrt{(2\pi R_1) \cdots (2\pi R_n)}} \phi^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}(x) \exp\left(i \frac{m_1 \bar{x}_1}{R_1} + \cdots + i \frac{m_n \bar{x}_n}{R_n}\right). \quad (1.2)$$

CAPÍTULO 1. MODELO EXTRA DIMENSIONAL DE UN CAMPO ESCALAR Y EL KERNEL DE FEYNMAN.

1.1. ASPECTOS INTRODUCTORIOS Y CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL MODELO.

La Ec. (1.2) representa a la manera en que podemos descomponer a un campo escalar real $\Phi(x, \vec{x})$ que tiene por geometría una variedad extra compacta la cual es el n -toro $T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ veces}}$. Si la suma $\sum_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n}$

que aparece en la Ec. (1.2) se desarrollara, entonces el siguiente conjunto de coeficientes de Fourier para el campo surgiría $\{\phi^{(0, \dots, 0)}(x), \phi^{(m_1, \dots, 0)}(x), \dots, \phi^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}(x)\}$, donde $m_i \in \mathbb{N}$. Usando una notación simple y adecuada, estas configuraciones pueden escribirse como $\{\phi^{(0, \dots, 0)}(x), \phi^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}(x)\} \equiv \{\phi^{(\underline{0})}(x), \phi^{(\underline{m})}(x)\}$. Al analizar al toro unidimensional T^1 vemos que es simplemente la variedad S^1 que proviene de establecer la identificación de las fronteras de un segmento o intervalo $[0, 2\pi R]$ y su construcción puede verse en la Fig.1.1.

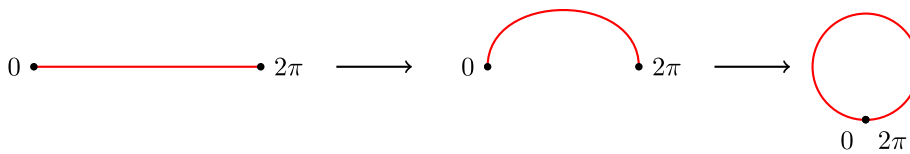


Figura 1.1: La identificación de los puntos frontera de un segmento dan lugar al toro unidimensional $T^1 = S^1$.

De la misma forma, el toro bidimensional podemos construirlo identificando los lados opuestos de un cuadrado. También puede ser visto como el producto directo de dos círculos, esto es, $T^2 = S^1 \times S^1$. El proceso de construcción de T^2 es mostrado en la Fig.1.2.

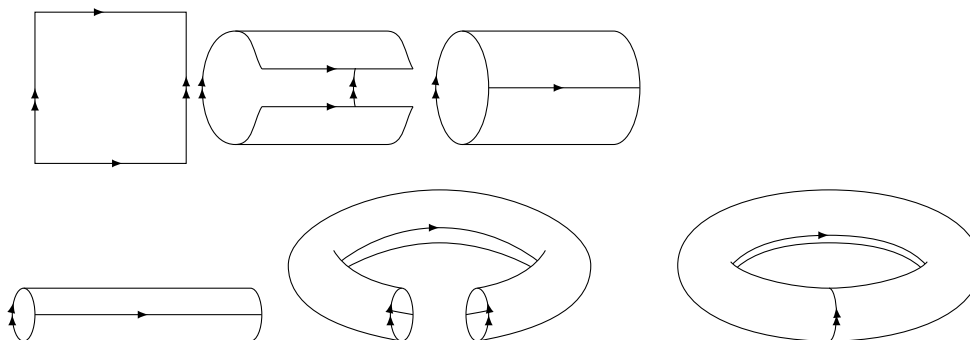


Figura 1.2: Construcción del Toro bidimensional T^2 identificando las fronteras en las direcciones señaladas.

Podemos continuar construyendo a toros de mayor dimensión, pero para visualizarlos, estos deben ser proyectados en un espacio 3-dimensional y como ejemplo podemos visualizar a $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, que al ser proyectado al espacio tridimensional euclideo la figura empieza a autointersecarse lo cual es natural en variedades que viven en mayor dimensión y han sido incrustadas en espacios de menor dimensión, ver Fig.1.3. El toro 3-dimensional puede ser construido indentificando las fronteras de un cubo y en general el toro n -dimensional regularmente representado como el producto directo de n círculos $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ puede construirse identificando las fronteras de un n -cubo, también conocidos como hipercubos.

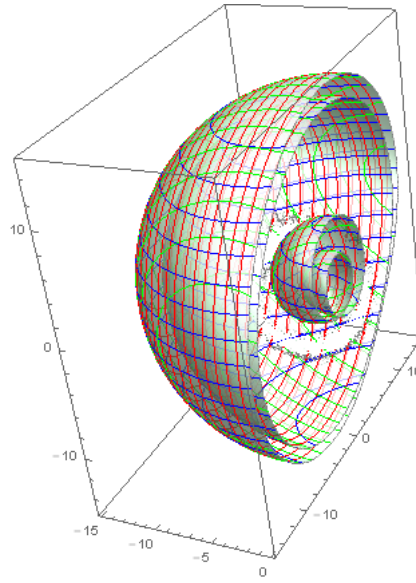


Figura 1.3: Se observa una sección del toro 3-dimensional T^3 .

El modelo del campo escalar real abordado en la presente tesis nos gustaría que su construcción sea en un entorno que permita aplicarse posteriormente a formulaciones como el modelo estándar de partículas fundamentales en el marco de dimensiones extra. Ya que el modelo estándar es una teoría quiral en dimensiones pares, el producto de círculos comúnmente reconocido con el n -toro no provee esta simetría. Es necesario aplicarle la acción del grupo cíclico \mathbb{Z}_2 , la cual distinguirá entre la base completa dada por la Ec.(1.2) a dos nuevas bases, la primera par (coseno) y la segunda impar (seno). La acción anterior se conoce como compactificación orbifold y se denota como S^1/\mathbb{Z}_2 , consiste en demandar que cada punto sobre la dimensión extra es equivalente al punto con coordenada opuesta, esta relación se expresa como

$$\bar{x} \leftrightarrow -\bar{x} \tag{1.3}$$

lo cual está definido por el grupo \mathbb{Z}_2 . El orbifold contiene fronteras impuestas por la acción del grupo \mathbb{Z}_2 . Para el orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 , la coordenada extra cuando toma el valor de $\bar{x}_1 = 0$ es invariante bajo la transformación del grupo \mathbb{Z}_2 . Por lo tanto, es un punto fijo del orbifold. Además \mathbb{Z}_2 envía a $\bar{x}_1 = \pi R$ hacia $\bar{x}_1 = -\pi R$. Tenemos a la condición de frontera de periodicidad impuesta por la geometría de S^1 , entonces el punto $\bar{x}_1 = -\pi R$ es identificado por $\bar{x}_1 = \pi R$, el cual es el segundo punto fijo del orbifold. La clase de equivalencia ejercida por \mathbb{Z}_2 mapea el intervalo $\pi R < \bar{x}_1 < 2\pi R$ al intervalo $-2\pi R < \bar{x}_1 < -\pi R$. La condición de periodicidad impuesta sobre la variedad S^1 identifica este intervalo con $0 < \bar{x}_1 < \pi R$. El efecto de \mathbb{Z}_2 sobre S^1 es reducir a esta variedad a un segmento de línea con puntos fijos en $\bar{x}_1 = 0$ y $\bar{x}_1 = \pi R$, lo cual puede observarse en la Fig.1.4.

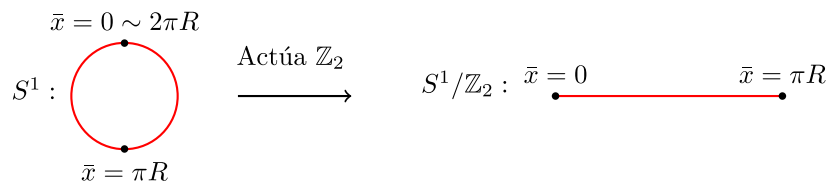


Figura 1.4: El efecto de aplicar el grupo cíclico \mathbb{Z}_2 a S^1 es el segmento o línea que conforma la variedad S^1/\mathbb{Z}_2 .

El campo debe cumplir con ambas condiciones requeridas, por lo tanto $\Phi(x, \bar{x})$ debe ser expandido sobre el periodo $2\pi R$ de la variedad S^1 . Por otro lado, el proceso de compactificación orbifold es equivalente a la imposición de

CAPÍTULO 1. MODELO EXTRA DIMENSIONAL DE UN CAMPO ESCALAR Y EL KERNEL DE FEYNMAN.

1.1. ASPECTOS INTRODUCTORIOS Y CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL MODELO.

las siguientes condiciones de frontera sobre un campo Φ , la cuales son

$$\left. \partial_{\bar{\mu}} \Phi(x, \bar{x}) \right|_{\partial D} = 0 : \quad \text{Condiciones de frontera de Neumann.} \quad (1.4)$$

$$\left. \Phi(x, \bar{x}) \right|_{\partial D} = 0 : \quad \text{Condiciones de frontera de Dirichlet.} \quad (1.5)$$

Al imponer las condiciones de frontera de Neumann sobre los puntos fijos, $\partial_{\bar{x}} \Phi(x, \bar{x} = 0) = \partial_{\bar{x}} \Phi(x, \bar{x} = \pi R) = 0$, tenemos que la descomposición general (1.2) se reduce a:

$$\begin{aligned} \Phi^E(x, \bar{x}) = & \frac{1}{\sqrt{(2\pi R_1) \cdots (2\pi R_n)}} \phi^{(0, \dots, 0)} \\ & + \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ (m_1, \dots, m_n) \neq 0}} \sqrt{\frac{2}{(2\pi R_1) \cdots (2\pi R_n)}} \phi^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}(x) \cos \left(\frac{m_1 \bar{x}_1}{R_1} + \cdots + \frac{m_n \bar{x}_n}{R_n} \right), \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde \mathbb{N}_0 es el conjunto de los naturales incluyendo al cero. En contraste, al aplicar las condiciones de frontera de Dirichlet sobre los puntos fijos, $\Phi(x, \bar{x} = 0) = \Phi(x, \bar{x} = \pi R) = 0$, la descomposición correspondiente adquiere la siguiente forma

$$\Phi^O(x, \bar{x}) = \sum_{\substack{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n \\ (m_1, \dots, m_n) \neq 0}} \sqrt{\frac{2}{(2\pi R_1) \cdots (2\pi R_n)}} \phi^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}(x) \sin \left(\frac{m_1 \bar{x}_1}{R_1} + \cdots + \frac{m_n \bar{x}_n}{R_n} \right). \quad (1.7)$$

El campo que contiene al modo cero $\phi^{(0, \dots, 0)}$ existe para la descomposición del campo par $\Phi^E(x, \bar{x})$ y no se encuentra presente para su descomposición impar $\Phi^O(x, \bar{x})$. Aquí el superíndice E hace alusión a la palabra en inglés even (par), mientras que O se refiere a odd (impar). Diremos que $\phi^{(0, \dots, 0)}$ representa al campo en la teoría usual en 4-dimensiones, por lo tanto, la elección de la base ya sea par o impar, nos dará la facultad de elegir que campos en la teoría podrán reproducir al modelo ordinario dentro de la teoría efectiva cuadrimensional. Las expansiones en (1.6) y (1.7) satisfacen las siguientes condiciones de paridad

$$\Phi^E(x, -\bar{x}) = \Phi^E(x, \bar{x}) \quad (1.8)$$

$$\Phi^O(x, -\bar{x}) = -\Phi^O(x, \bar{x}). \quad (1.9)$$

Para dos dimensiones extra ($n = 2$), la variedad extra que respeta las condiciones de periodicidad y paridad impuestas es $\mathcal{N}^2 = S^1/\mathbb{Z}_2 \times S^1/\mathbb{Z}_2$, esto requiere hacer las respectivas identificaciones con su antípoda sobre cada S^1 que compone a la variedad bidimensional. Como puede verse en la Fig.1.4 la acción del grupo cíclico sobre S^1 tiene como resultado un segmento de recta. Es de esperarse entonces que $S^1/\mathbb{Z}_2 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ es el producto directo entre dos intervalos que dan como resultado un plano como se muestra en la Fig.1.5.

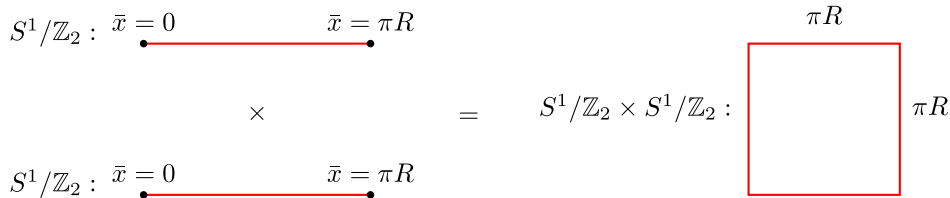


Figura 1.5: El producto cartesiano $S^1/\mathbb{Z}_2 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ es continuamente deformable a un plano.

Es importante no confundir la variedad extra en estudio con la variedad $\frac{S^1 \times S^1}{\mathbb{Z}_2}$ ya que esta última es la banda de Möbius, la cual es una superficie no-orientable con una curva cerrada simple de frontera. La torsión presente en la banda de Möbius es causa de la proyección del orbifold, la torsión permite distinguir entre orientaciones izquierda

CAPÍTULO 1. MODELO EXTRA DIMENSIONAL DE UN CAMPO ESCALAR Y EL KERNEL DE FEYNMAN.

1.1. ASPECTOS INTRODUCTORIOS Y CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL MODELO.

y derecha, esto hace que el concepto de quiralidad adquiera un significado importante en modelos con dimensiones extra, la Fig.1.6 muestra esta característica.

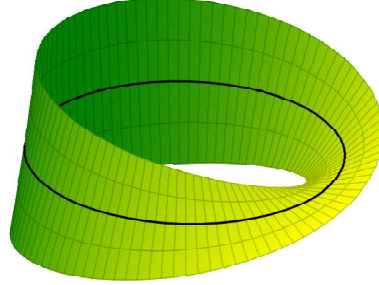


Figura 1.6: La banda de Möbius es el resultado de la acción del grupo \mathbb{Z}_2 sobre el toro T^2 .

El uso de toros n -dimensionales y la acción de grupos cíclicos pueden verse en modelos actuales donde se investigan teorías fundamentales. En este campo de la física teórica se estudian interesantes correspondencias y aproximaciones entre variedades complejas de Kähler y variedades de Calabi-Yau donde intervienen toros n -dimensionales y el grupo cíclico \mathbb{Z}_2 . Como ejemplo citamos al teorema de Yau [37] el cual establece que: *Toda variedad compacta de Kähler con curvatura de Ricci nula puede ser cubierta por el producto entre un toro y una variedad simplemente conexa con una métrica de Ricci-plana de una variedad de Kähler*. Lo mismo permanece si en lugar de expresar el enunciado con una variedad de Kähler lo hacemos con una variedad de Calabi-Yau. De hecho una aproximación interesante es que la superficie $K3 \sim T^4/\mathbb{Z}_2$, la superficie K3 puede ser un Calabi-Yau, el cual puede verse en la Fig.1.7. Esta superficie suele introducirse en modelos de cuerdas y otras dualidades aplicadas a este tipo de teorías. Las variedades de la forma T^n/\mathbb{Z}_2 son interesantes y suelen tener propiedades y características muy particulares, pero no serán utilizadas en la presente tesis, sin embargo cabe resaltar que los objetos involucrados en las aproximaciones para las variedades de Kähler son objetos también usados en esta investigación.

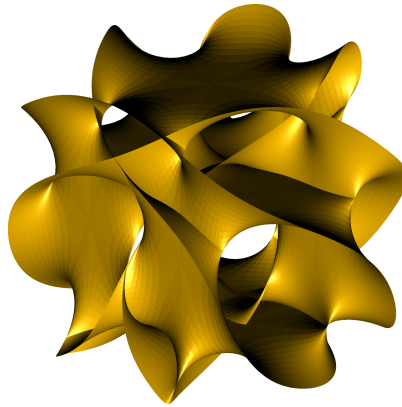


Figura 1.7: La superficie tipo Calabi-Yau es aproximadamente T^4/\mathbb{Z}_2 .

Las Ecs.(1.6) y (1.7) corresponden a la forma en que podemos descomponer al campo $\Phi(x, \bar{x})$ cuando tiene por geometría a una variedad extra compacta $\mathcal{N}^n = \underbrace{S^1/\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times S^1/\mathbb{Z}_2}_{n\text{-veces}}$. La elección anterior sobre la geometría

demanda el producto directo entre intervalos formando un hipercubo, el problema adquiere entonces una gran similitud con el efecto Cassimir Ref. [32]. Como ejemplo, en la Fig.1.8 tenemos al hipercubo en tres dimensiones.

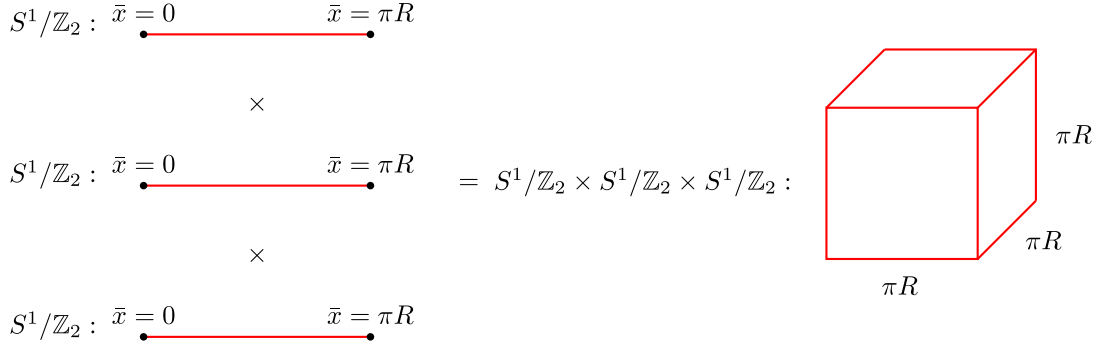


Figura 1.8: El producto $S^1/\mathbb{Z}_2 \times S^1/\mathbb{Z}_2 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ es continuamente deformable a un cubo.

Resaltamos el hecho de que el n -toro puede obtenerse del hipercubo al establecer la identificación apropiada de sus fronteras (pegando sus caras opuestas). En cambio, al construir la variedad compacta mediante el producto de n copias del orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 , deja como resultado a una variedad que es continuamente deformable a un n -cubo, esto último apoya a la analogía con el efecto Cassimir de lo cual se comentó previamente. Por otro lado, retomando las funciones que resultan de descomponer al campo después de la simetría de paridad en las Ecs.(1.6) y (1.7), las reescribimos de manera compacta como se muestra en las siguientes expresiones

$$\Phi^E(x, \bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{\prod_{i=1}^n 2\pi R_i}} \phi^{(0)}(x) + \sqrt{\frac{2}{\prod_{i=1}^n (2\pi R_i)}} \sum_{(m)} \phi^{(m)}(x) \cos\left(\frac{m\bar{x}}{\mathbf{R}}\right), \quad (1.10a)$$

$$\Phi^O(x, \bar{x}) = \sqrt{\frac{2}{\prod_{i=1}^n (2\pi R_i)}} \sum_{(m)} \phi^{(m)}(x) \sin\left(\frac{m\bar{x}}{\mathbf{R}}\right), \quad (1.10b)$$

donde la notación compacta $(0) \equiv (0, \dots, 0)$ y $(m) \equiv (m_1, \dots, m_n)$ ha sido utilizada para el modo cero y los modos excitados, respectivamente. La yuxtaposición $\frac{m\bar{x}}{\mathbf{R}}$ significa $\frac{m_1 x^5}{R_1} + \dots + \frac{m_n x^{n+4}}{R_n}$. El símbolo $\sum_{(m)}$ suma un total de $2^n - 1$ series diferentes y coincide con la notación \sum' utilizada en la Ref. [38]. Lo que se ha dicho previamente puede ejemplificarse como,

$$\begin{aligned} \sum_{(m)} \phi^{(m)}(x) \cos\left(\frac{m\bar{x}}{\mathbf{R}}\right) &:= \sum_{m_1=1}^{\infty} \phi^{(m_1, 0, \dots, 0)}(x) \cos\left(\frac{m_1 x^5}{R_1}\right) \\ &+ \sum_{m_2=1}^{\infty} \phi^{(0, m_2, 0, \dots, 0)}(x) \cos\left(\frac{m_2 x^6}{R_2}\right) \\ &+ \dots + \sum_{m_1, m_2=1}^{\infty} \phi^{(m_1, m_2, 0, \dots, 0)}(x) \cos\left(\frac{m_1 x^5}{R_1} + \frac{m_2 x^6}{R_2}\right) + \dots \\ &+ \sum_{m_1, \dots, m_n=1}^{\infty} \phi^{(m_1, \dots, m_n)}(x) \cos\left(\frac{m_1 x^5}{R_1} + \dots + \frac{m_n x^{n+4}}{R_n}\right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.2. El Kernel de Feynman para un campo escalar real en dimensiones extra.

En la presente sección nos enfocaremos en la reducción dimensional de una teoría genérica para un campo escalar que originalmente ha sido definido sobre un espacio tiempo $(4 + n)$ -dimensional. Empezamos formulando la integral de trayectoria de Feynman, partiendo de la siguiente acción

$$S := \int_{\mathcal{M}^{4+n}} d^4 x d^n \bar{x} \mathcal{L}_{(4+n)}(\Phi, \partial\Phi) \quad (1.12)$$

CAPÍTULO 1. MODELO EXTRA DIMENSIONAL DE UN CAMPO ESCALAR Y EL KERNEL DE FEYNMAN.

1.2. EL KERNEL DE FEYNMAN PARA UN CAMPO ESCALAR REAL EN DIMENSIONES EXTRA.

donde $\mathcal{L}_{(4+n)}$ depende del campo escalar real Φ y sus derivadas espacio-temporales, tal que la teoría clásica es descrita por ecuaciones de movimiento de segundo orden. La geometría de fondo será $\mathcal{M}^{4+n} = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$ siendo \mathcal{M}^4 el espacio-tiempo de Minkowski y la variedad no compacta n -dimensional \mathcal{N}^n representará a las dimensiones espaciales adicionales. Esta variedad no compacta será provisional, ya que posteriormente se optará por la geometría compacta que describimos en la sección anterior, el motivo de elegirla al principio como no compacta, convenientemente nos permite decir algo sobre sus transformaciones de Lorentz [38], [39]. Cada punto sobre la variedad \mathcal{M}^{4+n} serán escritos como (x, \bar{x}) , o equivalentemente $(x^M) = (x^\mu, x^{\bar{\mu}})$, donde $\mu = 0, 1, 2, 3$ y $\bar{\mu} = 5, \dots, 4+n$. El campo $\Phi(x, \bar{x})$ es visto como un escalar tanto para el grupo de Poincaré extendido $ISO(1, 3+n)$ así como para su subgrupo $ISO(1, 3)$.

Como parte del proceso de compactificación [38, 39], elegimos a \mathcal{N}^n ser la variedad compacta $S^1/\mathbb{Z}_2 \times \dots \times S^1/\mathbb{Z}_2$, lo cual ha sido descrito anteriormente. Cada S^1 se supone tener un radio distinto R_i , con $i = 1, \dots, n$. Al campo Φ se le imponen condiciones de periodicidad y de paridad [40], esto es

$$\Phi(x, \bar{x}) = \Phi(x, \bar{x} + 2\pi\mathbf{R}), \quad (1.13a)$$

$$\Phi(x, \bar{x}) = \Phi(x, -\bar{x}), \quad (1.13b)$$

donde $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)$. Imponer las condiciones de periodicidad y paridad previas, es equivalente a imponer condiciones de frontera de Neumann sobre los puntos fijos del orbifold [25]; las anteriores relaciones en (1.13) permiten escribir al campo como una expansión de Fourier de la forma (ver argumentación sobre la Ec.(1.4) que deja como resultado a la Ec. (1.10a))

$$\Phi(x, \bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{\prod_{i=1}^n (2\pi R_i)}} \phi^{(0)}(x) + \sqrt{\frac{2}{\prod_{i=1}^n (2\pi R_i)}} \sum_{\underline{(m)}} \phi^{(m)}(x) \cos\left(\frac{m\bar{x}}{R}\right), \quad (1.14)$$

la anterior elección nos asegurará recuperar a la teoría ordinaria en términos del modo cero en cuatro dimensiones y a su vez tendremos la contribución por efecto de dimensiones extra en los modos excitados KK.

La integral de trayectoria de Feynman, asociado a la amplitud de probabilidad para un campo cuántico, entre un estado en un tiempo inicial t y otro final t' suele escribirse como (ver por ejemplo [41, 42])

$$\langle \Phi', t' | \Phi, t \rangle = \langle \Phi' | \exp[-i(t' - t)\hat{H}/\hbar] \Phi \rangle, \quad (1.15)$$

donde \hat{H} es el operador de Hamilton asociado a (1.12), que dicta la evolución del sistema cuántico, lo cual nos lleva a la integral de trayectoria de la teoría. Regularmente, la manera en que uno procede es discretizando al espacio de configuración de la teoría, en este caso esto se logra discretizando la propia geometría del espacio [42]. Por lo anterior, empezamos discretizando al volumen finito del espacio tridimensional V (incrustado en \mathcal{M}^4) en M celdas, y al sector compacto extra dimensional \mathcal{N}^n lo dividimos en K celdas; de tal forma que las celdas del espacio completo se encuentran localizadas en $(\mathbf{x}_\alpha, \bar{\mathbf{x}}_\beta)$, donde $\alpha = 1, \dots, M$ y $\beta = 1, \dots, K$. Tal que sobre esta malla, el espacio de configuración es descrito por el conjunto discreto de variables denotado como $\Phi_{\alpha\beta}(t) := \Phi(\mathbf{x}_\alpha, t, \bar{\mathbf{x}}_\beta)$. A cada una de estas variables le asignamos el siguiente operador de Heisenberg que se hereda de la Ec.(1.14):

$$\hat{\Phi}_{\alpha\beta}(t) = \sqrt{\frac{1}{\prod_{i=1}^n (2\pi R_i)}} \hat{\phi}^{(0)}(\mathbf{x}_\alpha, t) + \sqrt{\frac{2}{\prod_{i=1}^n (2\pi R_i)}} \sum_{\underline{(m)}} \hat{\phi}^{(m)}(\mathbf{x}_\alpha, t) \cos\left(\frac{m\bar{\mathbf{x}}_\beta}{R}\right), \quad (1.16)$$

el aspecto de operador en la ecuación previa está presente en los coeficientes de Fourier del lado derecho de la misma. Cada coeficiente del operador actúa en su respectivo espacio de Hilbert, tanto $\mathcal{H}_\alpha^{(0)}$ o $\mathcal{H}_\alpha^{(m)}$, los cuales son subespacios del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\alpha := \mathcal{H}_\alpha^{(0)} \otimes_{\underline{(m)}} \mathcal{H}_\alpha^{(m)}$.

Sobre cada celda, existe una base de eigenestados que diagonalizan a los correspondientes operadores para el campo escalar $\hat{\phi}_\alpha^{(0)}(t) \equiv \hat{\phi}^{(0)}(\mathbf{x}_\alpha, t)$ y $\hat{\phi}_\alpha^{(m)}(t) \equiv \hat{\phi}^{(m)}(\mathbf{x}_\alpha, t)$, de tal manera que se cumple lo siguiente

$$\hat{\phi}_\alpha^{(m)}(t) |\phi_\alpha^{(m)}, t\rangle := \phi_\alpha^{(m)} |\phi_\alpha^{(m)}, t\rangle, \quad (1.17)$$

donde se ha introducido el símbolo $\underline{(m)}$ para englobar tanto el modo $\underline{(0)}$ así como $\underline{(m)}$. El producto $|\phi_\alpha^{(0)}, t\rangle |\phi_\alpha^{(1,0,\dots,0)}, t\rangle |\phi_\alpha^{(2,0,\dots,0)}, t\rangle \dots |\phi_\alpha^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}, t\rangle \dots = |\phi_\alpha^{(0)}, t\rangle \prod_{\underline{(m)}} |\phi_\alpha^{(m)}, t\rangle \equiv |\prod_{\underline{(m)}} \phi_\alpha^{(m)}, t\rangle :=$

CAPÍTULO 1. MODELO EXTRA DIMENSIONAL DE UN CAMPO ESCALAR Y EL KERNEL DE FEYNMAN.

1.2. EL KERNEL DE FEYNMAN PARA UN CAMPO ESCALAR REAL EN DIMENSIONES EXTRA.

$|\Phi_\alpha, t\rangle$ es una base de \mathcal{H}_α que de hecho diagonaliza al operador lineal $\widehat{\Phi}_{\alpha\beta}$. Como consecuencia tenemos

$$\widehat{\Phi}_{\alpha\beta}(t)|\Phi_\alpha, t\rangle = \Phi_{\alpha\beta}|\Phi_\alpha, t\rangle. \quad (1.18)$$

Observemos que el contenido del índice- β para el operador al lado izquierdo de la Ec.(1.18) viene del argumento del coseno (ver Ec.(1.16)), de tal forma que del lado derecho de la Ec.(1.18), el contenido del índice β se encuentra únicamente en los correspondientes eigenvalores. Por lo tanto, las relaciones de ortonormalidad y completitud para las bases $|\Phi_\alpha, t\rangle$ son,

$$\langle \Phi_\alpha, t | \Phi_{\alpha'}, t \rangle = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (1.19a)$$

$$\int d\Phi_\alpha |\Phi_\alpha, t\rangle \langle \Phi_\alpha, t| = 1, \quad (1.19b)$$

ya hemos hecho el comentario que el contenido del índice- β de las relaciones precedentes está relacionado con la función coseno, que en virtud de las propiedades de esta función armónica se desprenden las siguientes relaciones

$$\langle \phi_\alpha^{(\mathbf{m})}, t | \phi_{\alpha'}^{(\mathbf{n})}, t \rangle = \delta_{\alpha\alpha'}^{(\mathbf{m}\mathbf{n})}, \quad (1.20a)$$

$$\int d\phi_\alpha^{(\mathbf{m})} |\phi_\alpha^{(\mathbf{m})}, t\rangle \langle \phi_\alpha^{(\mathbf{m})}, t| = 1, \quad (1.20b)$$

que a su vez dejan ver

$$\int d\Phi_\alpha = \int d\phi_\alpha^{(0)} \prod_{(\mathbf{m})} \int d\phi_\alpha^{(\mathbf{m})} \equiv \prod_{(\mathbf{m})} \int d\phi_\alpha^{(\mathbf{m})}. \quad (1.21)$$

La delta de Kronecker de multi-índices $\delta_{\alpha\alpha'}^{(\mathbf{m}\mathbf{n})}$ en la Ec.(1.20a) tomará el valor de uno, cuando se cumpla que $\alpha = \alpha'$ y a su vez que (\mathbf{m}) coincida con (\mathbf{n}) , de lo contrario es cero.

La amplitud de transición completa (1.15) puede escribirse en términos de amplitudes intermedias sobre cada celda, que al hacer uso de las relaciones de ortonormalidad en las Ecs. (1.20a), obtenemos

$$\langle \Phi', t' | \Phi, t \rangle \simeq \prod_{\alpha=1}^M \langle \Phi'_\alpha, t' | \Phi_\alpha, t \rangle = \prod_{\alpha=1}^M \prod_{(\mathbf{m})} \langle \phi_\alpha^{(\mathbf{m})'}, t' | \phi_\alpha^{(\mathbf{m})}, t \rangle \quad (1.22)$$

hemos utilizado el símbolo de aproximación debido a la discretización empleada. Podemos remplazar dicho símbolo por una igualdad después de tomar el límite $M \rightarrow \infty$ contemplando que $M\Delta V = V$, como consecuencia tendremos que $V \rightarrow \infty$ y usaremos este hecho más adelante. Es conveniente ahora dividir al intervalo de tiempo en N segmentos que denotaremos como t_l con $l = 0, 1, \dots, N$, tal que $t_0 = t, t_1 = t + \epsilon, \dots, t_N = t'$ que al usar las relaciones de completitud (1.20b) sobre las divisiones de tiempo, tendremos

$$\langle \Phi', t' | \Phi, t \rangle \simeq \prod_{(\mathbf{m})} \int d\phi_{\alpha_{N-1}}^{(\mathbf{m})} \cdots d\phi_{\alpha_1}^{(\mathbf{m})} \langle \phi_{\alpha'}^{(\mathbf{m})'}, t' | \phi_{\alpha_{N-1}}^{(\mathbf{m})}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle \phi_{\alpha_1}^{(\mathbf{m})}, t_1 | \phi_\alpha^{(\mathbf{m})}, t \rangle. \quad (1.23)$$

La amplitud de transición infinitesimal para cada modo de Fourier puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\alpha_{l+1}}^{(\mathbf{m})}, t_{l+1} | \phi_{\alpha_l}^{(\mathbf{m})}, t_l \rangle &= \langle \phi_{\alpha_{l+1}}^{(\mathbf{m})} | e^{-i\epsilon\widehat{H}} | \phi_{\alpha_l}^{(\mathbf{m})} \rangle \\ &\simeq \langle \phi_{\alpha_{l+1}}^{(\mathbf{m})} | 1 - i\epsilon\widehat{H} | \phi_{\alpha_l}^{(\mathbf{m})} \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde \widehat{H} es el operador Hamiltoniano relacionado con la evolución temporal de la teoría (1.12) sobre la malla de espacio tiempo. La forma que toma el Hamiltoniano a través de los operadores con modos de Fourier la escribimos como:

$$\widehat{H} = \sum_{\alpha=1}^M \Delta V \widehat{\mathcal{H}} \left(\widehat{\pi}_\alpha^{(0)}, \widehat{\pi}_\alpha^{(\mathbf{m})}, \widehat{\phi}_\alpha^{(0)}, \widehat{\phi}_\alpha^{(\mathbf{m})} \right). \quad (1.25)$$

CAPÍTULO 1. MODELO EXTRA DIMENSIONAL DE UN CAMPO ESCALAR Y EL KERNEL DE FEYNMAN.

1.2. EL KERNEL DE FEYNMAN PARA UN CAMPO ESCALAR REAL EN DIMENSIONES EXTRA.

La Ec.(1.24) nos muestra la manera convencional de calcular un elemento matricial de transición (ver por ejemplo [42]). Lo siguiente es introducir convenientemente un conjunto completo de eigenestados de momento para cada modo de Fourier en cada partición temporal de la forma

$$\int \frac{\Delta V d\pi_{\alpha l}^{(m)}}{2\pi} |\pi_{\alpha l}^{(m)}, t_l\rangle \langle \pi_{\alpha l}^{(m)}, t_l| = 1, \quad (1.26)$$

si denotamos como $\mathcal{H}_{\alpha l} := \mathcal{H}(\pi_{\alpha l}^{(0)}, \pi_{\alpha l}^{(m)}, \phi_{\alpha l}^{(0)}, \phi_{\alpha l}^{(m)})$ a la densidad Hamiltoniana sobre la malla, escribimos la amplitud de transición completa como

$$\begin{aligned} \langle \Phi', t' | \Phi, t \rangle \simeq & \prod_{(m)} \prod_{\alpha=1}^M \left(\prod_{l=1}^{N-1} \int d\phi_{\alpha l}^{(m)} \cdot \prod_{k=0}^{N-1} \int \frac{\Delta V d\pi_{\alpha k}^{(m)}}{2\pi} \right) \exp \left[i \sum_{l=0}^{N-1} \epsilon \sum_{\alpha=1}^M \Delta V \left(\pi_{\alpha l}^{(0)} \frac{\phi_{\alpha l+1}^{(0)} - \phi_{\alpha l}^{(0)}}{\epsilon} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{(m)} \pi_{\alpha l}^{(m)} \frac{\phi_{\alpha l+1}^{(m)} - \phi_{\alpha l}^{(m)}}{\epsilon} - \mathcal{H}_{\alpha l} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Tomando los límites $N \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$ y $V \rightarrow \infty$, la versión resultante es la integral de trayectoria en el espacio fase para el kernel de Feynman:

$$\begin{aligned} \langle \Phi', t' | \Phi, t \rangle = & \prod_{(m)} \int \mathcal{D}\phi^{(m)} \mathcal{D}\pi^{(m)} \exp \left[i \int_t^{t'} dt \int d^3x \left(\pi^{(0)} \dot{\phi}^{(0)} + \sum_{(m)} \pi^{(m)} \dot{\phi}^{(m)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \mathcal{H}(\pi^{(0)}, \phi^{(0)}, \pi^{(m)}, \phi^{(m)}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.28)$$

La densidad Lagrangiana particular de la forma $\mathcal{L}_{(4+n)} = \frac{1}{2} (\partial_M \Phi \cdot \partial^M \Phi - m^2 \Phi^2) - V_{(4+n)}(\Phi)$ nos conduce a una densidad Hamiltoniana, $\mathcal{H}(\pi^{(0)}, \phi^{(0)}, \pi^{(m)}, \phi^{(m)})$, la cual es cuadrática en los momentos, de tal forma que después de realizar las integrales Gaussianas, la Ec. (1.28) puede ser escrita como

$$\langle \Phi', t' | \Phi, t \rangle = \prod_{(m)} \mathcal{K}^{(m)} \int \mathcal{D}\phi^{(m)} e^{i \int_t^{t'} dt L}, \quad (1.29)$$

donde $\mathcal{K}^{(m)}$ es un factor de normalización y $L = \int d^3x \mathcal{L}$. La densidad Lagrangiana \mathcal{L} se compone de campos definidos sobre el espacio tiempo \mathcal{M}^4 , ya que corresponde a $\int_{\mathcal{N}^n} d^n \bar{x} \mathcal{L}_{(4+n)}$. Por lo tanto, podemos decir que la Lagrangiana \mathcal{L} es la descripción dimensionalmente reducida de la teoría en altas dimensiones que va de \mathcal{M}^{4+n} hacia \mathcal{M}^4 .

Hemos mostrado que $\langle \Phi', t' | \Phi, t \rangle$ puede ser expresado ya sea como $\int \mathcal{D}\Phi \exp[i \int_{\mathcal{M}^{4+n}} d^4x d^n \bar{x} \mathcal{L}_{(4+n)}(\Phi, \partial\Phi)]$ o como puede verse en la Ec. (1.29), la conclusión más importante de este resultado es que la medida funcional es invariante bajo el proceso de compactificación de Kaluza-Klein. De acuerdo con [28] esto significa que la reducción dimensional es cuánticamente consistente, aún después de considerar todos los modos KK en el procedimiento.

Capítulo 2

Funciones de Green y la teoría del campo escalar auto-interactuante en dimensiones extra.

2.1. Funcional generatriz y la función de Green de k -puntos.

2.1.1. La funcional de vacío para un campo Klein-Gordon no interactuante.

Es bien sabido que todas las funciones de Green de k -puntos, diagramas conectados, entre otras cantidades físicas, pueden ser obtenidas de las transiciones de vacío-vacío en la presencia de fuentes $Z[J] \propto \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J$. Ya que las fuentes se encuentran acopladas a los campos y no a los momentos, para una Lagrangiana típica, esta amplitud es proporcional a (1.29), que después de agregar el término $\int d^3x [J^{(0)} \phi^{(0)} + \sum_{(\underline{m})} J^{(\underline{m})} \phi^{(\underline{m})}] \equiv \sum_{(\underline{m})} J^{(\underline{m})} \phi^{(\underline{m})}$ a la densidad Lagrangiana y tomar los límites $t \rightarrow -\infty$ y $t' \rightarrow \infty$ nos permite escribir,

$$Z[J^{(\underline{m})}] = \prod_{(\underline{m})} \mathcal{K}^{(\underline{m})} \int \mathcal{D}\phi^{(\underline{m})} e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + \sum_{(\underline{m})} J^{(\underline{m})} \phi^{(\underline{m})}]}, \quad (2.1)$$

donde $\underline{m} = \{0, \underline{m}\}$. En la amplitud anterior, los modos cero y excitados se desacoplan entre sí para el caso de una lagrangiana libre, $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}|_{V(\phi^{(0)}, \phi^{(\underline{m})})=0}$, la cual se denotará como Z_0 , siendo su expresión

$$\begin{aligned} Z_0 [J^{(\underline{m})}] &= Z_0^{(0)} [J^{(0)}] \prod_{(\underline{m})} Z_0^{(\underline{m})} [J^{(\underline{m})}] \\ &= \prod_{(\underline{m})} Z_0^{(\underline{m})} [J^{(\underline{m})}], \end{aligned} \quad (2.2)$$

lo anterior indica que Z_0 se conforma del producto de las funcionales generatrices libres con estructura:

$$Z_0^{(\underline{m})} [J^{(\underline{m})}] = \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4y d^4x J^{(\underline{m})}(y) \Delta_F^{(\underline{m})} J^{(\underline{m})}(x) \right], \quad (2.3)$$

siendo los propagadores libres de Feynman involucrados de la forma

$$\Delta_F^{(\underline{m})}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m_{(\underline{m})}^2 + i\varepsilon} \quad (2.4)$$

**CAPÍTULO 2. FUNCIONES DE GREEN Y LA TEORÍA DEL CAMPO ESCALAR
AUTO-INTERACTUANTE EN DIMENSIONES EXTRA.**

2.1. FUNCIONAL GENERATRIZ Y LA FUNCIÓN DE GREEN DE K -PUNTOS.

donde $m_{(\underline{0})}^2 = m^2$ y $m_{(\underline{m})}^2 = m^2 + \left(\frac{m_1}{R_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{m_n}{R_n}\right)^2$. Las masas desnudas $m_{(\underline{m})}^2$ son diferentes del parámetro de masa al cuadrado m^2 en todos los casos, por ejemplo, si el número de dimensiones extra es $n = 3$ y la configuración de modos KK bajo consideración es $(\underline{m}) = (m_1, 0, m_3)$, para enteros fijos m_i (el cual es necesariamente distinto de cero), entonces se tiene $m_{(\underline{m})}^2 = m^2 + \left(\frac{m_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{m_3}{R_3}\right)^2$.

2.1.2. Funcional generatriz para campos interactuantes y la función de Green de k -puntos.

Suponiendo el potencial una función bien comportada, podemos reescribir la Ec. (2.1) como:

$$Z[J^{(\underline{m})}] \propto \prod_{(\underline{m})} \exp \left[-i \int d^4x V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(\underline{m})}(x)} \right) \right] \int \mathcal{D}\phi^{(\underline{m})} \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 + \sum_{(\underline{m})} J^{(\underline{m})} \phi^{(\underline{m})} \right) \right]. \quad (2.5)$$

Usando las Ecs. (2.2) y (2.3) es posible escribir a (2.5) como

$$Z[J^{(\underline{m})}] = \prod_{(\underline{m})} \mathcal{K}^{(\underline{m})} \exp \left[-i \int d^4x V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(\underline{m})}(x)} \right) \right] Z_0[J^{(\underline{m})}]. \quad (2.6)$$

El factor de normalización $\mathcal{K}^{(\underline{m})}$ se elige de tal forma que $Z[0] = 1$, esto es

$$\left(\mathcal{K}^{(\underline{m})} \right)^{-1} = \exp \left[-i \int d^4x V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(\underline{m})}(x)} \right) \right] Z_0[J^{(\underline{m})}] \Big|_{J^{(\underline{m})}=0}, \quad (2.7)$$

tal factor tiene el efecto de remover los diagramas relacionados con las burbujas de vacío, es decir, diagramas que carecen de patas externas. Como es bien sabido, $Z[J^{(\underline{m})}]$ es el generador de las diferentes funciones de Green de la teoría cuando es escrita como una serie de Volterra:

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} \int dx_1 \cdots dx_k \frac{i^k}{k!} \sum_{(\underline{m}_1 \cdots \underline{m}_k)} G^{(\underline{m}_1 \cdots \underline{m}_k)}(x_1, \dots, x_k) J^{(\underline{m}_1)}(x_1) \cdots J^{(\underline{m}_k)}(x_k) \quad (2.8)$$

donde

$$G^{(\underline{m}_1 \cdots \underline{m}_k)}(x_1, \dots, x_k) := \frac{\delta^k Z}{i^k \delta J^{(\underline{m}_1)}(x_1) \cdots \delta J^{(\underline{m}_k)}(x_k)} \Big|_{J=0} \quad (2.9)$$

son las funciones de Green de k -puntos cuya forma específica depende en la estructura de las diferentes interacciones en la Lagrangiana. En las expresiones (2.8) y (2.9) cada índice (\underline{m}_i) es una forma compacta de la etiqueta que toma diferentes valores para $(\underline{0})$ y (\underline{m}_i) , por lo tanto $G^{(\underline{m}_1 \cdots \underline{m}_k)}$ simboliza $(k+1)$ tipos distintos de funciones de Green de k -puntos. Por ejemplo, la función de dos-puntos $G^{(\underline{m}\underline{n})}$ realmente representa a $G^{(\underline{0}\underline{0})}$, $G^{(\underline{0}\underline{n})}$ y $G^{(\underline{m}\underline{n})}$; las cuatro formas esencialmente diferentes que la función de 3-puntos puede tomar son $G^{(\underline{0}\underline{0}\underline{0})}$, $G^{(\underline{0}\underline{0}\underline{n})}$, $G^{(\underline{0}\underline{m}\underline{n})}$, $G^{(\underline{l}\underline{m}\underline{n})}$; así sucesivamente. Las $G^{(\underline{0}, \dots, \underline{0})}$ son llamadas Funciones de Green Estándar (SGFs) por sus siglas en inglés (*Standard Green's Functions*), donde sus patas externas corresponden exclusivamente al modo cero, como puede ser visto en la Fig.2.1,

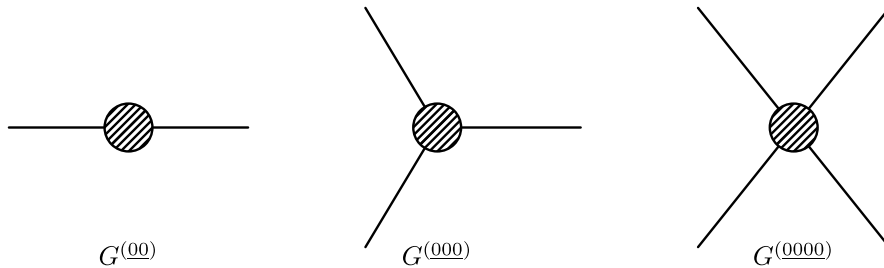


Figura 2.1: Ejemplos de funciones de Green Estándar (SGFs).

**CAPÍTULO 2. FUNCIONES DE GREEN Y LA TEORÍA DEL CAMPO ESCALAR
AUTO-INTERACTUANTE EN DIMENSIONES EXTRA.**
2.1. FUNCIONAL GENERATRIZ Y LA FUNCIÓN DE GREEN DE K -PUNTOS.

mientras que el resto k de dichas funciones, las cuales son esencialmente diferentes son llamadas Funciones de Green No Estándar (NSGFs) por sus siglas en inglés (*Non-Standard Green's Functions*) [43], donde algunos ejemplos se ven en la Fig.2.2. En el caso cuando dimensiones extra no están presentes, únicamente las SGFs existen.

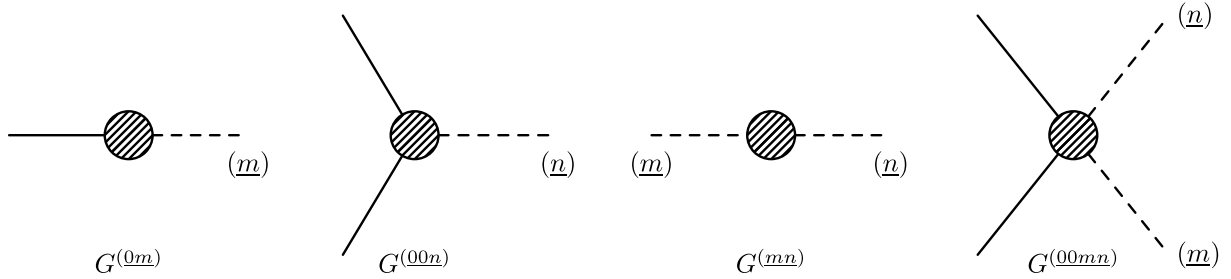


Figura 2.2: Ejemplos de funciones de Green No Estándar (NSGFs).

En la teoría no interactuante, las funciones de Green correspondientes pueden ser calculadas explícitamente. Las funciones de Green de $(2k + 1)$ -puntos se anulan. Las funciones de Green de 2-puntos corresponden a la propagación libre de partículas escalares masivas: $G_0^{(00)}$ y $G_0^{(mm)}$ son interpretadas como la propagación libre de una partícula de ‘modo cero’ y una partícula con ‘modo excitado’, respectivamente,

$$G_0^{(00)}(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 Z_0}{\delta J^{(0)}(x_1) \delta J^{(0)}(x_2)} \Big|_{J^{(0)}=0} = i \Delta_F^{(0)}(x_1 - x_2) \quad (2.10)$$

$$G_0^{(mm)}(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 Z_0}{\delta J^{(m)}(x_1) \delta J^{(m)}(x_2)} \Big|_{J^{(m)}=0} = i \Delta_F^{(m)}(x_1 - x_2). \quad (2.11)$$

$G_0^{(0n)}$ se anula ya que no hay posibilidad de transmutación para la partícula durante una propagación libre;

$$G_0^{(0n)}(x_1, x_2) \equiv \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 Z_0}{\delta J^{(0)}(x_1) \delta J^{(n)}(x_2)} \Big|_{J=0} = 0. \quad (2.12)$$

Similarmente aquellas funciones de Green de 4-puntos libres son de la forma $G_0^{(0000)}$, $G_0^{(00nn)}$, y $G_0^{(mmnn)}$. Estas son interpretadas como la propagación libre de dos partículas libres masivas que pueden leerse como: dos partículas con ‘modo cero’, una con ‘modo cero’ y una partícula con ‘modo excitado’, y dos partículas con ‘modos excitados’, respectivamente; y así sucesivamente, una forma gráfica de ver lo anterior puede visualizarse en la Fig.2.3. De la Ec. (2.4) se puede observar que cualquier campo KK es más pesado que el campo con modo cero, y cuanto más pequeñas se vuelven las dimensiones extra, más pesados son los campos KK; debido a esto, dado un entero n , los campos son clasificados como campos ligeros $\phi^{(0)}$ y campos pesados $\phi^{(m)}$.

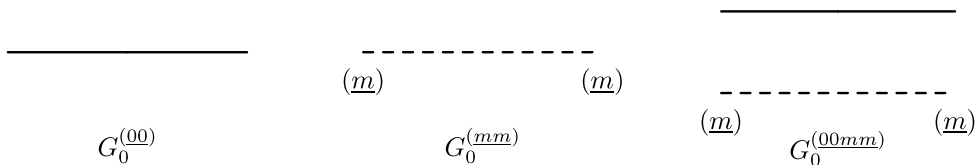


Figura 2.3: Algunos ejemplos para funciones de Green en el caso no interactuante.

El caso interactuante (ver (2.6)) está dotado de carácter perturbativo cuando el operador que precede a $Z_0[J^{(m)}]$ se expande con respecto a la constante de acoplamiento muy débil. Vale la pena señalar que, incluso, si uno

**CAPÍTULO 2. FUNCIONES DE GREEN Y LA TEORÍA DEL CAMPO ESCALAR
AUTO-INTERACTUANTE EN DIMENSIONES EXTRA.**

**2.2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESCALAR DIMENSIONALMENTE REDUCIDO PARA UNA
DIMENSIÓN EXTRA.**

mantiene dicha expansión a un orden finito, cada función de Green de k -puntos aún contiene un número infinito de diagramas debido a la presencia de un número infinito de interacciones en la Lagrangiana \mathcal{L} , ya sea entre el modo cero y modos excitados de Kaluza-Klein (KK) o entre modos excitados KK únicamente pero esto será visto con más detalle en la siguiente sección, ya que este hecho traerá sutilezas en los procedimientos de renormalización. Aun así suponiendo que cada término de interacción sea renormalizable, en el sentido de Dyson, esto no garantiza que después de un tratamiento apropiado de los términos divergentes, la suma infinita de los diagramas libres de divergencias a un orden dado es convergente.

La funcional generatriz de las funciones de Green conectadas es

$$W[J^{(m)}] := -i \ln\{Z[J^{(m)}]\} \quad (2.13)$$

donde

$$G_c^{(m_1 \dots m_k)}(x_1, \dots, x_k) := \frac{\delta^k W}{i^k \delta J^{(m_1)}(x_1) \dots \delta J^{(m_k)}(x_k)} \Big|_{J=0} \quad (2.14)$$

son las funciones de Green conectadas de la teoría. Si queremos hablar más de estos objetos, debemos elegir un potencial en particular, lo cual es tema de la siguiente sección.

2.2. Descripción del modelo escalar dimensionalmente reducido para una dimensión extra.

En esta sección describiremos el modelo escalar dimensionalmente reducido de una teoría para un campo escalar auto-interactuante con una dimensión extra, y las correspondientes funciones de vértice *estándar* de dos y cuatro puntos también son presentadas. Nuestro punto de partida es la teoría de campo

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x d\bar{x} \left(\frac{1}{2} (\partial_M \Phi)(\partial^M \Phi) - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda_{(5)} \Phi^4 + \sum_{r,s} \frac{\beta_{r,s}}{\Lambda^{n+r}} \mathcal{O}_s^{(5+r)}(\Phi, \partial_M \Phi) \right), \quad (2.15)$$

donde $\mathcal{M} = \mathcal{M}^4 \times (S^1/\mathbb{Z}_2)$, con coordenadas $(x; \bar{x}) = (x^\mu; x^5)$, y Φ es una función real que representa al campo escalar sobre \mathcal{M} . Los índices $M = 0, 1, 2, 3, 5$ y la convención de la suma de Einstein para índices repetidos es usada. En la teoría escalar auto-interactuante Ec. (2.15), el campo escalar Φ y la constante de acoplamiento $\lambda_{(5)}$ tienen dimensiones canónicas de $3/2$ y -1 , respectivamente. El último término en la Ec. (2.15) contiene operadores \mathcal{O}_s^{5+r} de dimensión mayor que 5, Λ es la escala de energía por encima de la cual la nueva física empezaría a manifestarse, y $\beta_{r,s}$ son parámetros adimensionales que dependen de los detalles de la física subyacente. Notemos que los operadores de dimensión canónica mayor que cuatro son suprimidos por potencias de Λ . Se supone que Φ satisface las siguientes condiciones de periodicidad y paridad (ver la Secc. 1.1 del Capítulo 1)

$$\Phi(x, \bar{x}) = \Phi(x, \bar{x} + 2\pi R), \quad (2.16a)$$

$$\Phi(x, \bar{x}) = \Phi(x, -\bar{x}), \quad (2.16b)$$

donde R es el radio del círculo S^1 , lo anterior es equivalente a imponer la condición de frontera de Neumann en los puntos fijos del orbifold [25]; las relaciones (2.16) permiten la expansión de Fourier sobre la dimensión extra del campo mismo (ver Ec. (1.14))

$$\Phi(x, \bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi R}} \phi^{(0)}(x) + \sqrt{\frac{1}{\pi R}} \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{(k)}(x) \cos\left(\frac{kx^5}{R}\right). \quad (2.17)$$

Como es sabido, los coeficientes en la expansión de Fourier representan el perfil preciso de la función que se está expandiendo, ya que modulan a las funciones trigonométricas. En este caso, los modos del campo definen el perfil de Φ sobre los puntos de la dimensión extra. Es en este sentido que los modos KK contienen información del comportamiento de Φ sobre la dimensión extra. Directamente de la expansión (2.17), uno puede ver que cada modo KK tiene dimensión canónica igual a 1.

CAPÍTULO 2. FUNCIONES DE GREEN Y LA TEORÍA DEL CAMPO ESCALAR AUTO-INTERACTUANTE EN DIMENSIONES EXTRA.

2.2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESCALAR DIMENSIONALMENTE REDUCIDO PARA UNA DIMENSIÓN EXTRA.

El uso de la ortogonalidad de las funciones trigonométricas permite la integración inmediata de la dimensión extra compacta en la Ec. (2.15) lo que nos lleva a la siguiente teoría dimensionalmente reducida

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{(0k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{(k)} + \mathcal{L}^{d>4}; \quad (2.18)$$

donde el primer término es el modelo auto-interactuante ϕ^4 del campo ligero $\phi^{(0)} \equiv \phi$,

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2) - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (2.19a)$$

la gran cantidad de términos de interacción entre el campo ligero y campos pesados se reúnen en el segundo término, donde

$$\mathcal{L}^{(0k)} = -\frac{\lambda}{12} \phi \left(3\phi \phi^{(k)2} + 2\phi^{(k)} \sum_{l,q=1}^{\infty} \phi^{(l)} \phi^{(q)} \Delta_{(klq)} \right), \quad (2.19b)$$

y el tercer término representa puramente a términos de modos excitados KK, en este caso,

$$\mathcal{L}^{(k)} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi^{(k)} \partial^\mu \phi^{(k)} - m_{(k)}^2 \phi^{(k)} \phi^{(k)} \right) - \frac{\lambda}{4!} \phi^{(k)} \sum_{l,q,r=1}^{\infty} \Delta_{(klqr)} \phi^{(l)} \phi^{(q)} \phi^{(r)}, \quad (2.19c)$$

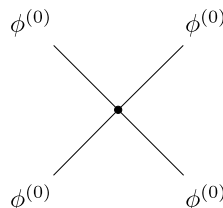
donde $m_{(k)}^2 = m^2 + k^2/R^2$. En el conjunto de Ecs. (2.19), los símbolos multi-índices adimensionales $\Delta_{(\dots)}$ son definidos a continuación:

$$\Delta_{(klq)} := \frac{\sqrt{2}}{\pi R} \int dx^5 \cos\left(\frac{kx^5}{R}\right) \cos\left(\frac{lx^5}{R}\right) \cos\left(\frac{qx^5}{R}\right), \quad (2.20a)$$

$$\Delta_{(klqr)} := \frac{2}{\pi R} \int dx^5 \cos\left(\frac{kx^5}{R}\right) \cos\left(\frac{lx^5}{R}\right) \cos\left(\frac{qx^5}{R}\right) \cos\left(\frac{rx^5}{R}\right). \quad (2.20b)$$

Directamente desde su definición, los objetos multi-índices $\Delta_{(\dots)}$ son totalmente simétricos. La constante de acoplamiento universal adimensional λ se define como $\lambda_{(5)}/(2\pi R)$. El término $\mathcal{L}^{d>4}$ contiene todas las interacciones de dimensión canónica mayor que 4, dichos términos deben incluirse en la teoría 4-dimensional reducida, ya que la teoría 5-dimensional no es renormalizable según el criterio de Dyson. En la presente tesis estamos interesados en las funciones de Green a nivel de un lazo que únicamente contiene partículas de modo zero como patas externas, y en la mayoría de los efectos a nivel árbol procedentes de $\mathcal{L}^{d>4}$ de ser necesarios, pues como veremos más adelante en 5 dimensiones estos últimos no serán requeridos; notablemente, cuando la teoría dimensionalmente reducida proviene de cinco dimensiones, los contratérminos necesarios para cancelar las divergencias UV en este tipo de funciones de Green son de dimensión canónica cuatro. Sin embargo, cuando la teoría dimensionalmente reducida proviene de más de cinco dimensiones, los contratérminos necesarios para tener un comportamiento finito de dichas funciones de Green son de dimensión canónica de órdenes más altos, como veremos en el Capítulo 5.

Las reglas de Feynman para la teoría dimensionalmente reducida en las Ecs. (2.19) pueden verse a continuación. Del sector de modo zero $\mathcal{L}^{(0)}$ tenemos las reglas de Feynman usuales de la teoría escalar auto-interactuante ϕ^4 , en particular el término de interacción es



$= -i\lambda, \quad (2.21)$

**CAPÍTULO 2. FUNCIONES DE GREEN Y LA TEORÍA DEL CAMPO ESCALAR
AUTO-INTERACTUANTE EN DIMENSIONES EXTRA.**

2.3. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESCALAR DIMENSIONALMENTE REDUCIDO PARA N UEDs

de los términos de interacción contenidos en $\mathcal{L}^{(0k)}$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \phi^{(0)} \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \phi^{(0)} \end{array} & \begin{array}{c} \phi^{(k)} \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \phi^{(k)} \end{array} & = -i\lambda, \\
 & & \\
 \begin{array}{c} \phi^{(0)} \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \phi^{(l)} \end{array} & \begin{array}{c} \phi^{(k)} \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \phi^{(n)} \end{array} & = -i\frac{\lambda}{6}\Delta_{(kln)}. \quad (2.22)
 \end{array}$$

Notemos que de hecho, de la segunda regla de Feynman en (2.22) tenemos un fenómeno de mezcla a un lazo entre ϕ y $\phi^{(2k)}$ que se asemeja a la bien conocida mezcla γ - Z presente en el modelo de Weinberg-Salam [44, 45]. Finalmente, del sector KK puramente excitado $\mathcal{L}^{(k)}$ puede leerse el siguiente término de interacción:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \phi^{(k)} \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \phi^{(n)} \end{array} & \begin{array}{c} \phi^{(l)} \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ \phi^{(p)} \end{array} & = -i\frac{\lambda}{4!}\Delta_{(klnp)}. \quad (2.23)
 \end{array}$$

Dichas reglas de Feynman son un buen ejemplo de la clasificación genérica dada con anterioridad de donde se pueden distinguir esencialmente dos tipos distintos de funciones de Green de k -puntos, lo cual depende del tipo de patas externas, es decir: las *funciones de Green estándar* (SGFs), cuyas patas externas solo comprenden partículas de modo cero, y las *funciones de Green no-estándar* (NSGFs), cuyas patas externas contienen al menos una partícula KK excitada. Estas últimas pueden ser las *funciones de Green híbridas*, con algunas partículas de modo zero y otras excitadas como patas externas, o funciones de Green puramente excitadas con solo partículas excitadas KK como patas externas. En particular las SGFs, denotadas por $G^{(0\dots 0)}$, recibirán contribuciones de partículas de modo KK dentro de los lazos. De hecho, la Lagrangina $\mathcal{L}^{(0)}$ junto al número infinito de interacciones del primer término en (2.19b) proporcionan lo necesario para calcular el impacto de la quinta dimensión sobre $G^{(0\dots 0)}$ a nivel de un lazo, en otras palabras, a la teoría cuadrimensional $\lambda\phi^4$. Una observación interesante es que el grado superficial de divergencia de estas contribuciones a un lazo, indicaría la posibilidad de eliminar las divergencias UV, es decir, las divergencias que surgen debido a los efectos de corta distancia. Sin embargo, como veremos más adelante, la presencia de un número infinito de interacciones entre el modo cero y los modos KK implicará un número infinito de divergencias UV a nivel de un lazo. Este problema se abordará en la Capítulo 4.

2.3. Descripción del modelo escalar dimensionalmente reducido para n UEDs

En esta sección generalizaremos los resultados de la Secc. 2.2 a más dimensiones extra. Debido a la geometría de las dimensiones extra, introducimos una notación que sugiere que la extensión de una a muchas dimensiones extra se obtiene mediante la sustitución de $\sum_{k=1}^{\infty}$ por $\sum_{\underline{k}}$, donde \underline{k} significa un multi-índice de Fourier utilizado en una expansión de Fourier de una función multivariable (ver Eqs. (1.14) and (1.11)).

Empezamos con la reducción dimensional de la teoría auto-interactuante Φ^4 , originalmente definida sobre $\mathcal{M}^{4+n} = \mathcal{M}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2 \times \dots \times S^1/\mathbb{Z}_2$ siendo \mathcal{M}^4 es el espacio tiempo de Minkowski y donde se asume que en principio cada S^1 tiene un radio distinto [39, 38].

$$S = \int_{\mathcal{M}^{4+n}} d^4x d^n\bar{x} \left(\frac{1}{2}(\partial_M\Phi)(\partial^M\Phi) - \frac{1}{2}m^2\Phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda_{(4+n)}\Phi^4 + \sum_{r,s} \frac{\beta_{r,s}}{\Lambda^{n+r}} \mathcal{O}_s^{(4+n+r)}(\Phi, \partial_M\Phi) \right). \quad (2.24)$$

Todos los puntos de coordenadas en \mathcal{M}^{4+n} son escritos como $(x^M) = (x, \bar{x}) = (x^\mu, x^{\bar{\mu}})$, donde $M = 0, 1, 2, 3, 5, \dots, 4+n$. El último término en la Ec. (2.24) se constituye de operadores invariantes de Lorentz \mathcal{O}_s^{4+n+r} de dimensión canónica mayor que $4+n$ construídos a partir del campo escalar Φ y sus derivadas espacio temporales, Λ corresponde a la escala de energía donde más allá de dicho régimen la nueva física se haría presente,

**CAPÍTULO 2. FUNCIONES DE GREEN Y LA TEORÍA DEL CAMPO ESCALAR
AUTO-INTERACTUANTE EN DIMENSIONES EXTRA.**

2.3. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESCALAR DIMENSIONALMENTE REDUCIDO PARA N UEDs

y $\beta_{r,s}$ es un parámetro adimensional sujeto a las características del trasfondo de la física que impera. El campo Φ es requerido a cumplir las siguientes condiciones de periodicidad y paridad (comparar con (2.16)), las cuales ya fueron mencionadas anteriormente en (1.13)

$$\begin{aligned}\Phi(x, \bar{x}) &= \Phi(x, \bar{x} + 2\pi \mathbf{R}), \\ \Phi(x, \bar{x}) &= \Phi(x, -\bar{x}).\end{aligned}$$

Las relaciones (1.13) permiten la expansión multivariable de Fourier del campo mismo como (ver Ec. (1.14))

$$\Phi(x, \bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{\prod_{i=1}^n (2\pi R_i)}} \phi^{(0)}(x) + \sqrt{\frac{2}{\prod_{i=1}^n (2\pi R_i)}} \sum_{\underline{(k)}} \phi^{(\underline{k})}(x) \cos\left(\frac{\underline{k}\bar{x}}{\mathbf{R}}\right), \quad (2.26)$$

la notación para (0) y (\underline{k}) puede ser revisada en el Capítulo 1, como ejemplo, para un par de objetos multi-índices el símbolo de suma $\sum_{\underline{(k)}}$ se entiende como¹

$$\begin{aligned}\sum_{\underline{(k)}} S^{(\underline{k})} T^{(\underline{k})} &\equiv \sum_{k_1=1}^{\infty} S^{(k_1, 0, \dots, 0)} T^{(k_1, 0, \dots, 0)} + \dots + \sum_{k_n=1}^{\infty} S^{(0, \dots, k_n)} T^{(0, \dots, k_n)} \\ &+ \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} S^{(k_1, k_2, \dots, 0)} T^{(k_1, k_2, \dots, 0)} + \sum_{k_1, k_3=1}^{\infty} S^{(k_1, 0, k_3, \dots, 0)} T^{(k_1, 0, k_3, \dots, 0)} + \dots \\ &+ \sum_{k_{n-1}, k_n=1}^{\infty} S^{(0, \dots, k_{n-1}, k_n)} T^{(0, \dots, k_{n-1}, k_n)} + \dots + \sum_{k_1 \dots k_n=1}^{\infty} S^{(k_1, \dots, k_n)} T^{(k_1, \dots, k_n)}.\end{aligned} \quad (2.27)$$

La ortogonalidad de las funciones trigonométricas permiten la integración de las dimensiones extra compactas al nivel de la acción (ver (2.24)), por lo tanto la Lagrangiana dimensionalmente reducida \mathcal{L} está dada por la suma de cuatro sectores cualitativamente diferentes (comparar con Ec. (2.18)):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \sum_{\underline{(k)}} \mathcal{L}^{(0\underline{k})} + \sum_{\underline{(k)}} \mathcal{L}^{(\underline{k})} + \mathcal{L}^{d>4}. \quad (2.28)$$

Los correspondientes sectores de la teoría dimensionalmente reducida a partir de varias dimensiones extra consiste de (i) el bien conocido modelo auto-interactuante de ϕ^4 ,

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2) - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (2.29a)$$

donde en este caso $\phi^{(0)} \equiv \phi$ es el campo ligero, (ii) el sector que acopla al campo ligero con los campos pesados KK,

$$\mathcal{L}^{(0\underline{k})} = -\frac{\lambda}{12} \phi \left(3\phi \phi^{(\underline{k})2} + 2\phi^{(\underline{k})} \sum_{\underline{(lq)}} \phi^{(\underline{l})} \phi^{(\underline{q})} \Delta_{(\underline{klq})} \right), \quad (2.29b)$$

(iii) el sector puramente excitado KK,

$$\mathcal{L}^{(\underline{k})} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi^{(\underline{k})} \partial^\mu \phi^{(\underline{k})} - m_{(\underline{k})}^2 \phi^{(\underline{k})} \phi^{(\underline{k})} \right) - \frac{\lambda}{4!} \phi^{(\underline{k})} \sum_{\underline{(lqr)}} \Delta_{(\underline{klqr})} \phi^{(\underline{l})} \phi^{(\underline{q})} \phi^{(\underline{r})}. \quad (2.29c)$$

donde $m_{(\underline{k})}^2 = m^2 + \frac{k_1^2}{R_1^2} + \dots + \frac{k_n^2}{R_n^2}$. En las Ecs. (2.29b) y (2.29c), los símbolos multi-índices adimensionales $\Delta_{(\underline{klq})}$ y $\Delta_{(\underline{klqr})}$ son definidos como:

$$\Delta_{(\underline{klq})} := \frac{2^{3/2}}{\prod_{i=1}^n (2\pi R_i)} \int d^n \bar{x} \cos\left(\frac{\underline{k}\bar{x}}{\mathbf{R}}\right) \cos\left(\frac{\underline{l}\bar{x}}{\mathbf{R}}\right) \cos\left(\frac{\underline{q}\bar{x}}{\mathbf{R}}\right), \quad (2.30a)$$

$$\Delta_{(\underline{klqr})} := \frac{4}{\prod_{i=1}^n (2\pi R_i)} \int d^n \bar{x} \cos\left(\frac{\underline{k}\bar{x}}{\mathbf{R}}\right) \cos\left(\frac{\underline{l}\bar{x}}{\mathbf{R}}\right) \cos\left(\frac{\underline{q}\bar{x}}{\mathbf{R}}\right) \cos\left(\frac{\underline{r}\bar{x}}{\mathbf{R}}\right), \quad (2.30b)$$

¹Más comentarios sobre la estructura (2.27) pueden ser leídos en la Secc. 1.1 del Capítulo 1, en la Ec. (1.11) puede verse explícitamente la implementación de las sumas anidadas en nuestro problema en particular.

**CAPÍTULO 2. FUNCIONES DE GREEN Y LA TEORÍA DEL CAMPO ESCALAR
AUTO-INTERACTUANTE EN DIMENSIONES EXTRA.**

2.3. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESCALAR DIMENSIONALMENTE REDUCIDO PARA N UEDs

y la constante de acoplamiento universal adimensional λ está dada por $\lambda_{(4+n)}/(\prod_i 2\pi R_i)$. Finalmente tenemos (iv) el sector $\mathcal{L}^{d>4}$ que incluye todas las interacciones de dimensión canónica mayor que 4, estos términos deben ser incluidos en la teoría 4-dimensional KK ya que la teoría $(4+n)$ -dimensional es no-renormalizable de acuerdo al criterio del conteo de potencias (criterio de Dyson). La estructura específica de $\mathcal{L}^{d>4}$ no es tema de esta sección y ninguna contribución a un lazo viniendo de este sector se considerará. Nótese que, como en el caso de una sola dimensión extra, la presencia de un número infinito de interacciones entre el modo cero y los modos KK implicará un número infinito de divergencias UV a nivel de un lazo, el objetivo central es abordar estas divergencias de manera consistente mediante el uso de las funciones zeta inhomogéneas multidimensionales de Epstein.

2.3.1. Funciones de vértice estándar del modelo auto-interactuante para n UEDs.

Anteriormente hemos dicho que los efectos extra dimensionales se almacenan en los modos excitados KK. Ya que en esta tesis estamos interesados en como dichos efectos impactan a las funciones de vértice estándar (SVFs) de dos y cuatro puntos, de las reglas de Feynman en (2.22) identificamos que las posibles SVFs donde los modos KK contribuyen a un lazo surgen del primer término, dicha regla de Feynman viene del sector en la Ec. (2.29b), y específicamente del término $-\frac{3\lambda}{12}\phi^2\phi^{(k)2}$. Centrando la atención en aquellos términos que aportan solamente a las SGFs del potencial efectivo auto-interactuante en nuestro modelo, la funcional generatriz interactuante para esta situación específica es escrita como

$$\begin{aligned} Z [J^{(0)}, J^{(m)}] &= \mathcal{K}^{(0)} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right] \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0^{(0)} + J^{(0)}\phi \right) \right] \\ &\times \prod_{(m)} \mathcal{K}^{(m)} \int \mathcal{D}\phi^{(m)} \exp \left[-i \int d^4x \frac{3\lambda}{12} \phi^2 \phi^{(m)2} \right] \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0^{(m)} + J^{(m)}\phi^{(m)} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

en el tratamiento usual es común remplazar a los campos escalares $\phi(x)$ por derivadas funcionales respecto a las fuentes $J(x)$, si aplicamos el mismo procedimiento a nuestros campos escalares en el modelo, proponemos entonces que

$$\phi(x) \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(0)}(x)} \quad (2.32)$$

$$\phi^{(m)}(x) \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(m)}(x)}. \quad (2.33)$$

Si asumimos que la diferenciación respecto a $\{J^{(0)}(x), J^{(m)}(x)\}$ en cada caso puede ser intercambiada con la integración funcional y enviamos respectivamente el término de interacción antes de la integral, la funcional generatriz interactuante es escrita como

$$\begin{aligned} Z [J^{(0)}, J^{(m)}] &= \mathcal{K}^{(0)} \exp \left[-i \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{1}{i} \right)^4 \left(\frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^4 \right] \\ &\times \prod_{(m)} \mathcal{K}^{(m)} \exp \left[-i \int d^4x \frac{3\lambda}{12} \left(\frac{1}{i} \right)^2 \left(\frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^2 \left(\frac{1}{i} \right)^2 \left(\frac{\delta}{\delta J^{(m)}} \right)^2 \right] Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}], \end{aligned} \quad (2.34)$$

expandiendo a la función exponencial en serie de potencias, nos permitirá obtener una serie perturbativa para la función generatriz. De hecho, la expansión que surge está dada en términos de las potencias de la constante de interacción λ . Dicha serie toma la siguiente estructura

**CAPÍTULO 2. FUNCIONES DE GREEN Y LA TEORÍA DEL CAMPO ESCALAR
AUTO-INTERACTUANTE EN DIMENSIONES EXTRA.**

2.3. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESCALAR DIMENSIONALMENTE REDUCIDO PARA N UEDs

$$Z [J^{(0)}, J^{(m)}] = Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}] \left(1 + \lambda z_1 [J^{(0)}, J^{(m)}] + \lambda^2 z_2 [J^{(0)}, J^{(m)}] + \dots \right), \quad (2.35)$$

mientras que una segunda expansión sobre la Ec. (2.34) que toma en cuenta a la condición de normalización $Z[0, 0] = 1$, nos define el siguiente conjunto de funcionales $u_k [J^{(0)}, J^{(m)}]$ a través de

$$\begin{aligned} & \exp \left[-i \int d^4 x \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^4 \right] \prod_{(m)} \exp \left[-i \int d^4 x \frac{3\lambda}{12} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^2 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(m)}} \right)^2 \right] Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}] = \\ & Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}] \left(1 + \lambda u_1 [J^{(0)}, J^{(m)}] + \lambda^2 u_2 [J^{(0)}, J^{(m)}] + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

siendo los dos primeros términos para $u_k [J^{(0)}, J^{(m)}]$:

$$\begin{aligned} u_1 [J^{(0)}, J^{(m)}] = & Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}]^{-1} \left(-i \int d^4 x \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{1}{i} \right)^4 \left(\frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^4 \right. \\ & \left. -i \int d^4 x \frac{3\lambda}{12} \sum_{(m)} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^2 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(m)}} \right)^2 \right) Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}], \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} u_2 [J^{(0)}, J^{(m)}] = & Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}]^{-1} \left[\left(-i \int d^4 x \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{1}{i} \right)^4 \left(\frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^4 \right. \right. \\ & \left. -i \int d^4 x \frac{3\lambda}{12} \sum_{(m)} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^2 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(m)}} \right)^2 \right) \left(-i \int d^4 y \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{1}{i} \right)^4 \left(\frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^4 \right. \\ & \left. \left. -i \int d^4 y \frac{3\lambda}{12} \sum_{(m)} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^2 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(m)}} \right)^2 \right) \right] Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}], \end{aligned} \quad (2.38)$$

tal que, para obtener la representación en serie de potencias de la funcional generatriz $Z [J^{(0)}, J^{(m)}]$ la siguiente división entre series debe ser efectuada

$$Z [J^{(0)}, J^{(m)}] = Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}] \frac{1 + \lambda u_1 [J^{(0)}, J^{(m)}] + \lambda^2 u_2 [J^{(0)}, J^{(m)}] + \lambda^3 [J^{(0)}, J^{(m)}] + \dots}{1 + \lambda u_1 [0, 0] + \lambda^2 u_2 [0, 0] + \lambda^3 u_3 [0, 0] + \dots} \quad (2.39)$$

de lo anterior, se deducen las relaciones entre los coeficientes $z_k [J^{(0)}, J^{(m)}]$ y $u_k [J^{(0)}, J^{(m)}]$ como es presentado a continuación [42]

$$z_1 [J^{(0)}, J^{(m)}] = u_1 [J^{(0)}, J^{(m)}] - u_1 [0, 0], \quad (2.40)$$

$$z_2 [J^{(0)}, J^{(m)}] = \left(u_2 [J^{(0)}, J^{(m)}] - u_2 [0, 0] \right) - \left(u_1 [J^{(0)}, J^{(m)}] - u_1 [0, 0] \right) u_1 [0, 0]. \quad (2.41)$$

Cabe enfatizar que la función de vértice estándar (SVF) de dos puntos $\Gamma_2(p)$ a nivel de un lazo, por inspección en la Ec. (2.37) es compuesta por dos auto-energías, el primer término es la bien conocida auto-energía de modo cero que aparece en la teoría usual, mientras que el segundo término es la auto-energía en la cual dentro del lazo circulan campos KK. La auto-energía de modo cero se calcula como a continuación

$$-i \int d^4 x \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^4 Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}] \quad (2.42)$$

**CAPÍTULO 2. FUNCIONES DE GREEN Y LA TEORÍA DEL CAMPO ESCALAR
AUTO-INTERACTUANTE EN DIMENSIONES EXTRA.**

2.3. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESCALAR DIMENSIONALMENTE REDUCIDO PARA N UEDs

que al realizar el procedimiento seguido en la literatura [42] obtenemos,

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{2}\lambda \int d^4x i\Delta_F^{(0)}(x_1-x)i\Delta_F^{(0)}(x-x)i\Delta_F^{(0)}(x-x_2) = \\ & -\frac{i}{2}\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m_{\phi(0)}^2} \frac{i}{k^2-m_{\phi(0)}^2} \frac{i}{p^2-m_{\phi(0)}^2} = G_0^{(00)} \left(\frac{M^{(0)}(p^2)}{i} \right) G_0^{(00)} \end{aligned} \quad (2.43)$$

siendo $G_0^{(00)}$ la función de Green libre en la teoría ordinaria, la auto-energía asociada al campo ligero, es su forma integral es expresada como:

$$M^{(0)}(p^2) = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2-m^2}. \quad (2.44)$$

Similarmente procedemos a obtener a la auto-energía excitada partiendo del término

$$-i \int d^4x \frac{3\lambda}{12} \sum_{(m)} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^2 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(m)}} \right)^2 Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}], \quad (2.45)$$

la Ec.(2.45) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} & -i \int d^4x \frac{3\lambda}{12} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^2 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(m)}} \right)^2 Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}] = \\ & -i \int d^4x \frac{3\lambda}{12} \sum_{(m)} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^2 Z_0^{(0)} [J^{(0)}] \sum_{(m)} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(m)}} \right)^2 \prod_{(p)} Z_0^{(p)} [J^{(p)}] \end{aligned} \quad (2.46)$$

si hacemos actuar las respectivas derivadas funcionales sobre la funcional generatriz por contribución de los modos KK, obtendremos

$$\begin{aligned} & -i \int d^4x \frac{3\lambda}{12} \sum_{(m)} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(0)}} \right)^2 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{(m)}} \right)^2 Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}] = -i \int d^4x \frac{3\lambda}{12} \sum_{(m)} \left[-\frac{1}{i} \Delta_F^{(0)}(0) + \right. \\ & \left. \left(\int d^4y \Delta_F^{(0)}(x-y) J^{(0)}(y) \right)^2 \right] \left[-\frac{1}{i} \Delta_F^{(m)}(0) + \left(\int d^4y \Delta_F^{(m)}(x-y) J^{(m)}(y) \right)^2 \right] Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}] \end{aligned} \quad (2.47)$$

al desarrollar el producto entre corchetes de la expresión anterior nos enfocamos especialmente en el siguiente término,

$$\begin{aligned} & -i \int d^4x \frac{3\lambda}{12} \sum_{(m)} \left[-\frac{1}{i} \Delta_F^{(m)}(0) \left(\int d^4y \Delta_F^{(0)}(x-y) J^{(0)}(y) \right)^2 \right] Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}] = \\ & \sum_{(m)} \int d^4x \frac{3\lambda}{12} \Delta_F^{(m)}(0) \int d^4y_1 d^4y_2 \Delta_F^{(0)}(x-y_1) \Delta_F^{(0)}(x-y_2) J^{(0)}(y_1) J^{(0)}(y_2) Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}] \end{aligned} \quad (2.48)$$

que es efectivamente el término que conduce a la auto-energía excitada para el campo ligero. Si tomamos las derivadas funcionales respecto a las fuentes evaluadas en los puntos del espacio x_1 y x_2 calculamos la función de Green de dos puntos correspondiente

$$\left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta}{\delta J^{(0)}(x_1) \delta J^{(0)}(x_2)} \left[\sum_{(m)} \int d^4x \frac{3\lambda}{12} \Delta_F^{(m)}(0) \int d^4y_1 d^4y_2 \Delta_F^{(0)}(x-y_1) \Delta_F^{(0)}(x-y_2) \right] \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} & \times J^{(0)}(y_1) J^{(0)}(y_2) Z_0 [J^{(0)}, J^{(m)}] \Big|_{J^{(m)}=0} = -\frac{i}{2} \lambda \sum_{(m)} \Delta_F^{(m)}(0) \int d^4x \Delta_F^{(0)}(x_1-x) \Delta_F^{(0)}(x-x_2) \\ & = -\frac{i}{2} \lambda \sum_{(m)} \int d^4x i\Delta_F^{(0)}(x_1-x) i\Delta_F^{(m)}(x-x) i\Delta_F^{(0)}(x-x_2) \end{aligned} \quad (2.50)$$

**CAPÍTULO 2. FUNCIONES DE GREEN Y LA TEORÍA DEL CAMPO ESCALAR
AUTO-INTERACTUANTE EN DIMENSIONES EXTRA.**

2.3. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESCALAR DIMENSIONALMENTE REDUCIDO PARA N UEDs

en el espacio de momentos sabemos que la teoría contiene dos clases de propagadores (ver Fig.2.4)

$$\frac{\textcircled{0}}{\text{-----} p \text{-----} \textcircled{0}} = \frac{i}{p^2 - m^2}$$

$$\frac{\textcircled{m}}{\text{-----} p \text{-----} \textcircled{m}} = \frac{i}{p^2 - m_{(m)}^2}$$

Figura 2.4: Propagador modo cero (línea sólida) y excitado (línea punteada).

en cambio, para los vértices tenemos una única regla de Feynman (ver Figs. 2.21 y 2.22). Usando las reglas en el espacio de momentos, la expresión integral en (2.50) toma la siguiente forma:

$$-\frac{i}{2}\lambda \sum_{(m)} \int d^4x i\Delta_F^{(0)}(x_1 - x) i\Delta^{(m)}(x - x) i\Delta_F^{(0)}(x - x_2) =$$

$$-\frac{i}{2}\lambda \sum_{(m)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\phi(0)}^2} \frac{i}{k^2 - m_{\phi(m)}^2} \frac{i}{p^2 - m_{\phi(0)}^2} = G_0^{(00)} \left(\frac{\sum_{(m)} M^{(m)}(p^2)}{i} \right) G_0^{(00)} \quad (2.51)$$

de aquí concluimos que la auto-energía por contribución de modos excitados KK es:

$$\sum_{(m)} M^{(m)}(p^2) = \frac{\lambda}{2} \sum_{(m)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_{(m)}^2}. \quad (2.52)$$

En la aproximación a un lazo, la SVF de dos puntos $\Gamma_2(p)$ es escrita como

$$\Gamma_2(p) = p^2 - m^2 - \left(M^{(0)}(p^2) + \sum_{(m)} M^{(m)}(p^2) \right), \quad (2.53)$$

donde $\Gamma_2(p)G_c^{(00)} = i$. Hasta ahora sabemos que tenemos dos contribuciones a la auto-energía, aquella compuesta por el modo cero $M^{(0)}(p^2)$, la cual viene del término de auto-interacción ϕ^4 en $\mathcal{L}^{(0)}$ y la otra relacionada con la suma de los modos excitados KK $M^{(m)}(p^2)$ que a su vez viene de un término de interacción en $\mathcal{L}^{(0m)}$. Tales contribuciones impactan a la masa física del modelo, lo cual será estudiado a fondo posteriormente. Similarmente, un cálculo más extenso desde la funcional generatriz nos permite obtener la función de vértice estándar (SVF) de cuatro puntos definida como $\Gamma_4(p_i) = G^{(00)}(p_1)^{-1}G^{(00)}(p_2)^{-1}G^{(00)}(p_3)^{-1}G^{(00)}(p_4)^{-1}G^{(0000)}$, que en la aproximación a un lazo, escribimos que

$$\Gamma_4(p_i) = -i\lambda + \left(\Gamma_{1\text{-loop}}^{(0)}(p_i) + \sum_{(m)} \Gamma_{1\text{-loop}}^{(m)}(p_i) \right) \quad (2.54)$$

donde $\Gamma_{1\text{-loop}}^{(0)}$ y $\Gamma_{1\text{-loop}}^{(m)}$ se relacionan con las partículas de modo cero y excitadas que circulan dentro del lazo, respectivamente. Ambas contribuciones están presentes y afectan a la constante de acoplamiento. Al sumar sobre las variables de Mandelstam, cada una de estas contribuciones pueden ser resumidas de la siguiente manera:

$$\Gamma_{1\text{-loop}}^{(m)}(p_i) = \sum_{\{p\}} \Delta\Gamma^{(m)}(p) \quad (2.55)$$

donde el símbolo $\sum_{\{p\}}$ indica suma sobre las variables de Mandelstam, y además

$$\Delta\Gamma^{(m)}(p) = -\frac{1}{2}\lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_{(m)}^2} \frac{i}{(p-k)^2 - m_{(m)}^2}. \quad (2.56)$$

La expresión anterior será estudiada a detalle cuando se aborden las cuestiones de regularización y control de divergencias UV en el modelo, lo cual es tema de los próximos capítulos.

Capítulo 3

Regularización dimensional y la función de Epstein.

Sabemos que toda teoría física debe tener parámetros y a su vez dar predicciones para que sea un modelo de interés. En la teoría desarrollada en la presente tesis, mediante la formulación de la integral de trayectoria se ha definido la funcional generatriz libre e interactuante para un campo escalar real que se propaga en dimensiones extra con la finalidad de generar funciones de Green ligeras a un lazo. Al estudiar las distintas clases de funciones de Green que emergen en nuestro modelo, esperamos que igualmente como sucede en teorías convencionales a nivel de un lazo, aparezcan divergencias ultravioletas (UV). Es bien sabido que a nivel de un lazo, en modelos tales como: ϕ^4 , electrodinámica cuántica y en el propio modelo estándar surgen divergencias ultravioletas. El éxito de los modelos mencionados anteriormente, en parte es por que admiten primeramente una regularización que prepara el escenario adecuado para después aplicar un esquema de renormalización, que tiene por objeto cancelar las posibles divergencias UV que puedan surgir. Modelos que son renormalizables son potencialmente predictivos y resultan interesantes en cuestiones de fenomenología.

Parte de este capítulo se centra en revisar las definiciones de los objetos matemáticos que surgirán después de aplicar regularización dimensional sobre las SVFs en el modelo (ver Ecs. (2.52) y (5.12)), ya que además de las divergencias comunes debido a efectos de corta distancia, tendremos nuevas divergencias UV que subyacen en el conteo infinito de las interacciones para las partículas de Kaluza-Klein, que en el fondo representan nuevamente efectos de corta distancia. Como veremos, después de la regularización dimensional tendremos dos fuentes distintas que producirán divergencias, la primera de ellas será la función gamma Γ que como sucede en el caso ordinario es quien guarda la información divergente por efectos de muy cortas distancias que comúnmente son llamadas divergencias ultravioletas (UV) y en nuestro trabajo representará a la contribución divergente estándar que nombraremos como (SC) por sus siglas en inglés (*Standard Contribution*). La otra fuente de divergencias surgirá del producto de la función zeta multidimensional inhomogénea de Epstein $E_l^{c^2}$ por la función gamma y representará la contribución divergente KK que la escribiremos como (KKC) por sus siglas en inglés (*KK Contribution*), dicho producto entre funciones puede interpretarse como el entrelazamiento que existe en el espacio tiempo y las dimensiones compactas en el modelo, pues la función gamma en sus polos sigue teniendo la información de la contribución divergente estándar, mientras que la infinidad de interacciones entre partículas de Kaluza-Klein se codificará en la función zeta de Epstein. Después de la implementación de regularización dimensional nos centraremos en la búsqueda de una expresión para dicho producto $E_l^{c^2} \Gamma$ que sea capaz de aislar todos los polos que puedan surgir para un número n fijo de dimensiones extra.

La importancia de examinar a las funciones zeta proviene del hecho de que constituyen el conjunto de funciones que representan a los objetos matemáticos involucrados en la renormalización de las SVFs del modelo. La estructura divergente de la teoría depende crucialmente de la geometría que imponemos a la variedad extra compacta \mathcal{N}^n , y su vez de las condiciones de frontera sobre los campos en la variedad. En esta tesis hemos elegido una geometría que imita al efecto Cassimir de n placas que conforman un hipercubo. En el Capítulo 1 se comentó sobre la geometría adoptada, que consiste en el producto de n copias del orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 , dicha variedad impone

fronteras a círculos relacionando puntos que son antípodas, los cuales topológicamente son homeomorfos a las paredes con fronteras bien definidas que aparecen en el efecto Cassimir, existiendo un paralelismo entre ambos modelos.

Otros autores han trabajado en este mismo escenario [31], [32], [46], [47] pero no han coincidido en como enfrentar a la KKC, han habido diversos intentos como en [46] donde la manera de enfrentar a las divergencias producidas por la multiplicidad de excitaciones KK, es mediante la introducción de un corte en la energía, esto es, la sumas infinitas son truncadas, lo cual implica la pérdida de unitariedad en el modelo siendo en el mejor de los casos una aproximación. Por otro lado, autores como [47] advierten que en este tipo de procedimientos donde se aplican reguladores a las integrales de momento, para después truncar las sumas en límites grandes pero finitos conduce a resultados ambiguos e inciertos, pues no hay una conexión entre reguladores, ya que son aplicados independientemente como si no existiera una relación o armonía entre integrales continuas de momento y las sumas infinitas sobre los momentos discretos. Desafortunadamente la no conciliación entre reguladores, conduce a la aplicación artificial y forzada de un intento de regularización que viola la invariancia de Lorentz en altas dimensiones, la cual en un principio era preservada, y que después de la compactificación bajo un esquema de regularización forzado se pierde. Recordemos que tanto el momento continuo y los momentos discretos son parte de un mismo momento antes de la compactificación, por lo tanto, al estudiar amplitudes físicas a un lazo, sobre dicho lazo deben circular tanto momentos continuos como discretos, la no conciliación entre dichos momentos continuos y discretos, deja una regularización inadecuada que viola la simetría de invariancia de Lorentz proveniente de altas dimensiones.

El enfoque de regularización propuesto en esta tesis trata de mediar y armonizar la forma en que los momentos continuos son regularizados a la par de los momentos discretos, reflejando siempre la conexión existente de un mismo parámetro regulador presente en ambos contextos y jugando un papel central al momento de atacar el problema con herramientas matemáticas formales, sin la necesidad de truncar, hacer cortes en la energía u otras suposiciones adicionales (ver Refs. [34] y [35]). Concretamente buscaremos la forma de tratar simultaneamente a la contribución estándar (SC) y la contribución KK (KKC) usando regularización dimensional.

3.1. Funciones zeta.

A continuación exploraremos la familia de las funciones zeta, pues como veremos más adelante, la aplicación de regularización dimensional sobre las estructuras (2.52) y (2.55) demanda el conocimiento de estas funciones. Empecemos con la función zeta de Riemann definida, para valores complejos y con parte real mayor que uno, a través de la expresión

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \quad (s \in \mathbb{C} \setminus 1 \mid \text{Re}(s) > 1), \quad (3.1)$$

en dicha región la Ec.(3.1) es convergente, en cambio, siendo rigurosos, para valores de s tales que $\text{Re}(s) < 1$ es de esperarse que sean divergentes, pero al hacer uso de la continuación analítica, es posible extender el dominio de $\zeta(s)$ y asignarle valores cuando $\text{Re}(s) < 1$ con un único polo en $s = 1$. En la Ref. [48] se examina este procedimiento y a su vez podemos encontrar la siguiente relación

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s). \quad (3.2)$$

La expresión anterior es una ecuación de reflexión que nos permite definir valores para la función $\zeta(s)$ sobre nuevos dominios, como ejemplo exponemos el conocido valor

$$\zeta(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} k = -\frac{1}{12}. \quad (3.3)$$

Los ceros triviales de la función zeta de Riemann se encuentran en todos los enteros pares negativos $s = -2, -4, -6, -8, \dots$, los cuales provienen de las singularidades de $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ que se encuentran en el denominador de la Ec.(3.2), notemos que $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ es también singular en $s = 0$, en cambio dicha divergencia es compensada por

la singularidad en $\zeta(1)$ referida comunmente como la serie armónica. Como resultado cuando $s = 0$ tendremos que $\zeta(0) = -1/2$. Los valores de la zeta de Riemann para puntos que caen sobre la banda crítica, localizada en la región $0 \leq \Re(s) \leq 1$, surgen de la continuación analítica para $\Re(s) > 1$ a través de la siguiente ecuación [48]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s), \quad \Re(s) > 1. \quad (3.4)$$

Como resultado tenemos que las series alternantes del lado izquierdo en la Ec.(3.4) converge para todo $\Re(s) > 0$, lo cual proporciona una fórmula que coincide con los valores de la función zeta para $\Re(s) > 1$ y se convierte en una continuación analítica en toda la banda crítica. Por lo tanto, los valores sobre la banda crítica son cubiertos por la siguiente expresión

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}, \quad 0 \leq \Re(s) \leq 1. \quad (3.5)$$

En resumen podemos decir que los valores de $\zeta(s)$ quedan definidos sobre la banda crítica por la Ec.(3.5), a la derecha de este dominio por la Ec.(3.1) y a la izquierda por la Ec.(3.2). La función zeta de Riemann tiene un polo en $s = 1$. Para finalizar enunciamos la hipótesis de Riemann que establece que todos los ceros no triviales de la función zeta caen sobre la línea crítica parametrizada por el número complejo $1/2 + it$, lo cual está fuera de nuestros intereses, ya que en las amplitudes que surgen en el modelo siempre corresponden a s un entero. Una generalización de la función zeta de Riemann es la función zeta de Hurwitz [49], definida clásicamente en la región donde dicha serie converge como

$$\zeta_H(s, a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^s}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus 1, \quad \Re(s) > 1, \quad a \neq 0, -1, -2, \dots \quad (3.6)$$

Es importante notar que cuando $a = 1$, la $\zeta_H(s, a)$ se reduce a la función $\zeta(s)$. Su continuación analítica a todo el plano complejo, excepto para $s = 1$, está dada por

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (a+k)^{1-s}. \quad (3.7)$$

Las definiciones anteriores son de suma importancia, ya que dichos objetos después de aplicar regularización dimensional a las Ecs. (2.52) y (5.12) aparecen naturalmente, en especial la función $\zeta(s)$ de Riemann y la función $\zeta(s)_H$ de Hurwitz. De hecho las funciones que tratamos de confrontar son un gran reto en la teoría de números debido a la complejidad que introducen las sumas infinitas anidadas que representan tuplas multidimensionales. Afortunadamente este problema fue abordado por el célebre matemático Epstein, quien se interesó por el estudio de generalizaciones multidimensionales de la función de Riemann [31, 50], encontrando una expresión general dada por la siguiente estructura [51, 52]

$$Z(s; Q) = \sum_{0 \neq x \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{(x^T Q x)^s}, \quad \Re(s) > \frac{n}{2}, \quad (3.8)$$

donde $s \in \mathbb{C}$, Q es una matriz simétrica positiva de dimensión $n \times n$, x es un vector columna y x^T su respectivo vector transpuesto, tal que es posible conformar a la forma cuadrática $x^T Q x = \sum_{i,j=1}^n Q_{ij} x_i x_j$. Esta función tiene una continuación analítica a todo el plano complejo, excepto por un polo simple en $s = n/2$. La ecuación funcional o relación de reflexión asociada a esta función es similar a la ecuación de reflexión que satisface la función $\zeta(s)$ de Riemann dada a continuación

$$Z(s; Q) = (\det Q)^{-\frac{1}{2}} \frac{\pi^{2s - \frac{n}{2}} \Gamma(n/2 - s)}{\Gamma(s)} Z(n/2 - s; Q^{-1}). \quad (3.9)$$

A diferencia de la función $\zeta(s)$ de Riemann, los ceros triviales se encuentran ahora en $s = -m$, con $m \in \mathbb{N}$, los cuales surgen del término $\Gamma(s)$ en la Ec.(3.9), además los ceros no triviales en general son números complejos de la forma $\rho = \beta + i\gamma$, que como en el caso de la función $\zeta(s)$, no mucho es conocido acerca de su distribución [53, 54].

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.2. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL DE LAS FUNCIONES ESCALARES A UN LAZO.

En el caso particular cuando $Q = I_n$, con I_n la matriz identidad de dimensión $n \times n$, la ecuación funcional se reduce a ser

$$Z(s; I_n) = \frac{\pi^{2s-\frac{n}{2}} \Gamma(n/2 - s)}{\Gamma(s)} Z(n/2 - s; I_n). \quad (3.10)$$

La función involucrada en la ecuación de reflexión anterior recibe el nombre de función zeta multidimensional homogénea de Epstein, la cual se define de la siguiente manera

$$Z_l(s) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_l = -\infty \\ m_1, \dots, m_l \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(m_1^2 + \dots + m_l^2)^s}. \quad (3.11)$$

Por otro lado, la función zeta inhomogénea multidimensional de Epstein es definida por

$$E_l^c(s) = \sum_{m_1, \dots, m_l=1}^{\infty} \frac{1}{(m_1^2 + \dots + m_l^2 + c^2)^s}, \quad (3.12)$$

donde c es una constante. Esta función tiene polos simples en $s = \frac{l}{2}, \frac{l-1}{2}, \dots; 1/2; -\frac{(2p+1)}{2}$ con $p \in \mathbb{N}_0$ excepto para $s = 0$ o enteros negativos [32, 55] donde $E_l^c(s)$ es finita. Un caso especial e importante corresponde cuando $c = 0$,

$$E_l(s) = \sum_{m_1, \dots, m_l=1}^{\infty} \frac{1}{(m_1^2 + \dots + m_l^2)^s}, \quad (3.13)$$

la cual es singular en los valores de $s = \frac{l}{2}, \frac{l-1}{2}, \dots, \frac{1}{2}$ y tiene ceros triviales dados por $s = -1, -2, -3, \dots$. En la siguiente sección haremos regularización dimensional a las estructuras de interés y nos encontraremos de manera natural con la función de Epstein.

3.2. Regularización dimensional de las funciones escalares a un lazo.

En la presente sección, introduciremos un procedimiento basado en regularización dimensional como el que aparece en [34] que culminará en la función zeta inhomogénea de Epstein [31], [50], [56]. Consideremos a una función escalar de N -puntos que es inducida por la lagrangiana $\mathcal{L}^{(0k)}$ en la Ec. (2.29b) a nivel de un lazo, mientras que los propagadores excitados provienen de la lagrangiana $\mathcal{L}^{(k)}$ en la Ec. (2.29c). Dicha función escalar tiene por estructura la siguiente expresión genérica

$$F_N = \sum_{(\underline{m})} \frac{1}{i\pi^2} \int d^4k \frac{1}{\left[k^2 - m_{\varphi_0(\underline{m})}^2 \right] \left[(k+p_1)^2 - m_{\varphi_1(\underline{m})}^2 \right] \dots \left[(k+p_{N-1})^2 - m_{\varphi_{N-1}(\underline{m})}^2 \right]}, \quad (3.14)$$

con la diferencia que en nuestro caso tenemos una misma masa en cada uno de los propagadores. Después de aplicar la parametrización de Feynman, la ecuación anterior se transforma en

$$F_N = \frac{1}{i\pi^2} \Gamma(N) \int_0^1 dx_1 \dots dx_N \delta \left(\sum_{i=1}^N x_i - 1 \right) \sum_{(\underline{m})} \int d^4k \frac{1}{\left(k^2 - \Delta_{(\underline{m})}^2 \right)^N}, \quad (3.15)$$

donde $\Delta_{(\underline{m})}^2$ es una función cuadrática de las variables x_i (introducidas después de aplicar la parametrización de Feynman), los momentos externos p_i , y las masas internas excitadas $m_{\varphi_i(\underline{m})}$. Las masas excitadas están dadas por la expresión $m_{\varphi_i(\underline{m})}^2 = m_{\varphi_i}^2 + \left(\frac{m_1}{R_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{m_n}{R_n} \right)^2$, con m_{φ_i} la masa de la partícula asociada al campo de modo cero φ_i , lo cual permite conformar la siguiente estructura

$$\Delta_{(\underline{m})}^2 = \Delta_{(0)}^2 + \left(\frac{m_1}{R_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{m_n}{R_n} \right)^2, \quad (3.16)$$

¹La notación $m_{\varphi_i(\underline{k})}$ a diferencia de $m_{(\underline{k})}$ que aparece en la Sección 2.3, trata de distinguir entre las diferentes masas internas excitadas involucradas en la función escalar, pues ya no hablamos de una única partícula.

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.2. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL DE LAS FUNCIONES ESCALARES A UN LAZO.

donde $\Delta_{(0)}^2$ puede conocerse directamente al intercambiar en la Ec.(3.14) a todas las masas excitadas KK por sus masas de modo cero $m_{\varphi_i}^2$. Lo anterior puede mostrarse partiendo de

$$\Delta_{(\underline{m})}^2 = m_{\varphi_0(\underline{m})}^2 + \sum_{i,j=1}^{N-1} p_i p_j x_i x_j - \sum_{i=1}^{N-1} \left(p_i^2 + m_{\varphi_0(\underline{m})}^2 - m_{\varphi_i(\underline{m})}^2 \right) x_i \quad (3.17)$$

que al usar las siguientes relaciones

$$m_{\varphi_0(\underline{m})}^2 = m_{\varphi_0}^2 + \left(\frac{m_1}{R_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{m_n}{R_n} \right)^2 \quad (3.18)$$

$$m_{\varphi_0(\underline{m})}^2 - m_{\varphi_i(\underline{m})}^2 = m_{\varphi_0}^2 - m_{\varphi_i}^2 \quad (3.19)$$

sobre la Ec.(3.17), nos permite reescribirla como

$$\Delta_{(\underline{m})}^2 = m_{\varphi_0}^2 + \sum_{i,j=1}^{N-1} p_i p_j x_i x_j - \sum_{i=1}^{N-1} \left(p_i^2 + m_{\varphi_0}^2 - m_{\varphi_i}^2 \right) x_i + \left(\frac{m_1}{R_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{m_n}{R_n} \right)^2, \quad (3.20)$$

de la expresión anterior, identificamos que

$$\Delta_{(0)}^2 = m_{\varphi_0}^2 + \sum_{i,j=1}^{N-1} p_i p_j x_i x_j - \sum_{i=1}^{N-1} \left(p_i^2 + m_{\varphi_0}^2 - m_{\varphi_i}^2 \right) x_i. \quad (3.21)$$

Claramente, la integración en k sobre la Ec.(3.15) diverge para $N \leq 2$, tal que la contribución divergente estándar (SC) es inducida en estos casos. En cambio, la contribución divergente KK (KKC) surge de las diversas sumas anidadas codificadas en el símbolo $\sum_{(\underline{m})}$. La manera en que confrontaremos a la SC no representan un problema, pues usaremos regularización dimensional como comúnmente se hace en la literatura. Por otro lado, el objetivo de este capítulo es mostrar que regularización dimensional es también capaz de lidiar con la KKC. Nuestro procedimiento consiste en regularizar simultáneamente a las SC y las KKC, ya que después de todo, tienen el mismo origen en el sentido de que las variables continuas de momento k y las variables discretas de momento m_i/R_i , están ligadas a las variedades \mathcal{M}^4 y \mathcal{N}^n a través de la transformada de Fourier que provee una nueva representación para los momentos en altas dimensiones definidos sobre la variedad \mathcal{M}^{4+n} . La idea principal detrás de este procedimiento es expresar a las complejas sumas infinitas anidadas en términos de las funciones de Epstein. Empezamos promoviendo al espacio tiempo cuadrimensional ordinario a D dimensiones, lo cual es simplemente la aplicación de regularización dimensional, entonces la Ec.(3.15) se convierte en

$$\begin{aligned} F_N &= \frac{1}{i\pi^2} \Gamma(N) I_N \sum_{(\underline{m})} \int d^D k \frac{1}{\left(k^2 - \Delta_{(\underline{m})}^2 \right)^N} \\ &= (-1)^N \left(\frac{1}{4\pi\mu^2} \right)^{(N-2)} I_N \sum_{(\underline{m})} \Gamma \left(N - \frac{D}{2} \right) \left(\frac{\Delta_{(\underline{m})}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-(N-\frac{D}{2})} \\ &= (-1)^N (4\pi\mu^2)^{(2-\frac{D}{2})} (R^{-2})^{(\frac{D}{2}-N)} I_N \sum_{(\underline{m})} \Gamma \left(N - \frac{D}{2} \right) (\underline{m}^2 + c_N^2)^{-(N-\frac{D}{2})}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde se ha introducido una notación compacta para I_N , siendo

$$I_N = \int_0^1 dx_1 \cdots dx_N \delta \left(\sum_{i=1}^N x_i - 1 \right). \quad (3.23)$$

Asumiremos todos los radios iguales a R sobre cada orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 para simplificar el desarrollo, tal que podremos escribir que $\left(\frac{m_1}{R} \right)^2 + \dots + \left(\frac{m_n}{R} \right)^2 = R^{-2} \underline{m}^2$, con $\underline{m}^2 = m_1^2 + \dots + m_n^2$ cualquier combinación posible entre los modos de Fourier, como ha sido explicado previamente en el Capítulo 1. Adicionalmente, tenemos que $c_N^2 = \Delta_{(0)}^2/R^{-2}$ y μ es la escala asociada con el esquema de regularización dimensional. Notemos que existe una

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

conexión de forma natural después de aplicar regularización dimensional, ya que la función Γ en la Ec.(3.22) necesita que D sea complejo, que es propiamente la motivación de regularización dimensional, pues antes de enviar a $D \rightarrow 4$ aislamos a la SC, aprovechando este hecho observemos que las funciones de Epstein necesitan también que D sea complejo al continuar analíticamente dicha función, de esta manera, ambas expresiones dependen de un mismo argumento, pues al usar la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \sum_{(m)} (m^2 + c_N^2)^{-(N-\frac{D}{2})} &= \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_l=1}^{\infty} (m_1^2 + \cdots + m_l^2 + c_N^2)^{-(N-\frac{D}{2})}, \\ &= \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} E_l^{c_N^2} \left(N - \frac{D}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

la expresión (3.22) se convierte en

$$F_N = (-1)^N (4\pi\mu^2)^{(2-\frac{D}{2})} (R^{-2})^{(\frac{D}{2}-N)} I_N \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} E_l^{c_N^2} \left(N - \frac{D}{2} \right) \Gamma \left(N - \frac{D}{2} \right). \quad (3.25)$$

El resultado anterior es uno de los más importantes de este capítulo, pues muestra como tanto la función gamma y la función de Epstein están definidas en el plano complejo. Las singularidades de la función gamma se encuentran cuando $N - \frac{D}{2} = 0, -1, -2, \dots$, mientras que para la función de Epstein sus polos se localizan en $N - \frac{D}{2} = \frac{l}{2}, \frac{l-1}{2}, \dots; \frac{1}{2}; -\frac{(2p+1)}{2}$ con $p \in \mathbb{N}_0$. Por lo tanto, podemos decir que las SC y KKC surgen como los polos de la función gamma y los polos del producto de la función gamma con la Epstein, respectivamente. La aparición de las funciones de Epstein es un hecho natural desde el punto de vista geométrico, de hecho, en el efecto Cassimir la geometría de fondo demanda la aparición de las funciones de Epstein [31, 32], similarmente, en nuestro estudio la geometría elegida es similar a la del efecto Cassimir, lo que permite aplicar un tratamiento semejante. La expresión en (3.25) es una función escalar de N -puntos a orden de un lazo regularizada dimensionalmente que representa a las amplitudes que surgirán en la teoría, para fines prácticos de cálculo tal representación en términos de las funciones de Epstein presenta inconvenientes al realizar su evaluación numericamente, pues programas computacionales no implementan su definición dentro de sus librerías, lo que nos lleva a buscar una alternativa para la función de Epstein donde su estructura tenga ventajas a la hora de ser implementada en algoritmos computacionales.

3.3. La función unidimensional de Epstein en serie de potencias.

El objeto principal estudiado en esta sección será la función zeta inhomogénea unidimensional de Epstein $E_1^{c^2}(s)$, la cual se define como [32, 31]

$$E_1^{c^2}(s) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + c^2)^s}, \quad (3.26)$$

dicha función aparece en diferentes contextos en física, tales como; el efecto Cassimir en un espacio tiempo plano [32], cristalografía [57] y recientemente en teoría cuántica de campos [34, 35, 58, 59, 60, 61], entre otros. Esta estructura es introducida con el propósito de regularizar las expresiones que involucran sumas discretas infinitas que aparecen en este tipo de modelos [32, 34, 35, 58, 61]. De hecho, la función $E_1^{c^2}(s)$ permite conocer a la función zeta inhomogénea multidimensional de Epstein definida en (3.12) (ver Ref. [32]) mediante la siguiente relación de recurrencia [56]

$$E_N^{c^2}(s) = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{(-1)^{N-1}}{2^{N-1}\Gamma(s)} \binom{N-1}{p} (-1)^p \pi^{p/2} E_1^{c^2}(s-p/2) \Gamma(s-p/2). \quad (3.27)$$

Durante años han existido propuestas en torno a la función $E_1^{c^2}(s)$, ver [31, 32, 52, 55, 56, 62], a través de diversos tratamientos matemáticos que dejan distintas representaciones, como es la siguiente representación en términos de las funciones modificadas de Bessel de segundo tipo [56], dada por la expresión

$$E_1^{c^2}(s) = -\frac{c^{-2s}}{2} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{-2s+1} + 2\pi^s \frac{c^{-s+1/2}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi nc). \quad (3.28)$$

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

Algunas características favorables son; la ecuación es rápidamente convergente y presenta una forma práctica en como exhibe sus divergencias, las cuales surgen del segundo término del lado derecho en la Ec.(3.28) cuando $1/2 - s \in \mathbb{N}_0$, que es el conjunto $s \in \{1/2, -1/2, -3/2, -5/2, \dots\}$. En cambio, tiene limitaciones cuando se requiere conocer su comportamiento para valores muy pequeños de c , ya que la función modificada de Bessel de segundo tipo diverge cuando c se aproxima a cero. En muchos escenarios, se requiere que la constante c sea muy pequeña y esto nos lleva a buscar una serie asintótica para $E_1^{c^2}(s)$, debido a esto, uno de los objetivos principales de esta sección es encontrar a una serie de potencias en la variable c para la función $E_1^{c^2}(s)$, la cual puede ser vista como una serie de Laurent que permite identificar a las divergencias cuando estas últimas existen como en la Ec.(3.28).

3.3.1. Obtención de una serie de potencias para $E_1^{c^2}(s)$: enfoque preliminar.

El objetivo en este apartado es encontrar una representación que permita conservar la estructura en la Ec.(3.28) y sirva de introducción en el tratamiento y búsqueda de una serie de potencias de c para la función de Epstein $E_1^{c^2}(s)$. Empecemos fijándonos en el tercer término de la Ec.(3.28), que es

$$2\pi^s \frac{c^{-s+1/2}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi nc). \quad (3.29)$$

Los polinomios de Bessel definidos por Krall and Frink [63] proporcionan una representación para la función modificada de Bessel de segundo tipo que aparece en la Ec.(3.29) cuando $-s \in \mathbb{N}_0$ dada por la siguiente expresión

$$K_{s-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{k=0}^{-s} \frac{(k-s)!}{(-s-k)!k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{z^k}. \quad (3.30)$$

Usando la ecuación previa y a su vez conociendo el siguiente resultado

$$\binom{k-s}{2k} (2k-1)!! = \frac{(k-s)!}{(-s-k)!k!2^k}, \quad (3.31)$$

la Ec.(3.29) puede ser escrita como

$$2\pi^s \frac{c^{\frac{1}{2}-s}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi cn) = \sum_{k=0}^{-s} \binom{k-s}{2k} \frac{(2k-1)!!}{\Gamma(s)} \text{Li}_{-s+k+1}(e^{-2\pi c}) \frac{\pi^{s-k}}{2^k c^{k+s}}, \quad (3.32)$$

donde hemos usada la siguiente definición para la función polilogaritmo

$$\text{Li}_{-s+k+1}(e^{-2\pi c}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi cn}}{n^{-s+k+1}}. \quad (3.33)$$

La representación obtenida en la Ec.(3.32) se presenta de una manera similar en la Ref. [64], pero en un contexto distinto. La función zeta unidimensional de Epstein puede ser escrita como

$$E_1^{c^2}(s) = -\frac{c^{-2s}}{2} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{-2s+1} + \sum_{k=0}^{-s} \binom{k-s}{2k} \frac{(2k-1)!!}{\Gamma(s)} \text{Li}_{-s+k+1}(e^{-2\pi c}) \frac{\pi^{s-k}}{2^k c^{k+s}}. \quad (3.34)$$

La estructura en la Ec. (3.34) sigue siendo una representación de la expresión en (3.28) que nos será útil en la obtención de la serie de potencias de c para $E_1^{c^2}(s)$. En el caso cuando $1/2 - s \in \mathbb{N}_0$, la Ec.(3.30) cambia por la siguiente relación

$$K_{s-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-s)!}{(-s-k)!k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{z^k}. \quad (3.35)$$

Para más información acerca de la validez de esta identidad ver el Apéndice A. De hecho, la Ec.(3.35) generaliza a la expresión en (3.34) para $s \in \mathbb{R}$. Es importante mencionar que en la Ref. [64] se comenta sobre la Ec.(3.35)

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

y su validez para valores grandes de z . Adicionalmente, en el Apéndice A damos razones que motivan su validez no únicamente para valores grandes de z , sino también para valores pequeños de z . Entonces, la función zeta unidimensional de Epstein es escrita como

$$E_1^{c^2}(s) = -\frac{c^{-2s}}{2} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{-2s+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k-s}{2k} \frac{(2k-1)!!}{\Gamma(s)} \text{Li}_{-s+k+1}(e^{-2\pi c}) \frac{\pi^{s-k}}{2^k c^{k+s}}. \quad (3.36)$$

Ahora, las divergencias en la Ec.(3.28) siguen presentes en la Ec.(3.36), de tal forma que tenemos una equivalencia entre expresiones.

Expansión en serie asintótica para la función Polilogaritmo.

Haciendo uso de una serie asintótica para la función polilogaritmo en la Ec.(3.34) es posible obtener una serie de potencias en la variable c . La Ec.(B.2) es una representación en serie de potencias de la función polilogaritmo válida para $|c| < 1$ (ver Ref. [65]) sólo cuando $-s \in \mathbb{N}_0$. Esto permite reescribir en la Ec.(3.34) a la función polilogarítmica involucrada como

$$\text{Li}_{-s+k+1}(e^{-2\pi c}) = \frac{(-2\pi c)^{k-s}}{(k-s)!} [H_{k-s} - \log(2\pi c)] + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k-s}}^{\infty} \frac{\zeta(k-s-l+1)}{l!} (-2\pi c)^l \quad (3.37)$$

por lo tanto, como consecuencia de usar la expansión asintótica anterior, la Ec.(3.34) se convierte en

$$E_1^{c^2}(s) = -\frac{c^{-2s}}{2} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{1-2s} + \sum_{k=0}^{-s} \binom{-s+k}{2k} \frac{(2k-1)!!}{2^k \pi^{-s+k}} \frac{(-2\pi c)^{-s+k}}{(-s+k)! c^{s+k}} \frac{[H_{-s+k} - \log(2\pi c)]}{\Gamma(s)} \\ + \sum_{k=0}^{-s} \binom{-s+k}{2k} \frac{(2k-1)!!}{2^k \pi^{-s+k}} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq -s+k}}^{\infty} \frac{\zeta(-s+k-l+1)}{l! \Gamma(s)} \frac{(-2\pi c)^l}{c^{s+k}}. \quad (3.38)$$

El apéndice B muestra como proceder para obtener el siguiente resultado

$$E_1^{c^2}(s) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq -s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k! \Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} - \frac{c^{-2s}}{2} + \frac{(-1)^s c^{-2s}}{2\pi} [H_{-s} - \log(4\pi^2 c^2)] \sin(\pi s). \quad (3.39)$$

Los valores de la Ec.(3.39) coinciden exactamente con aquellos dados en la Ec.(3.28) por el hecho de ser su representación en serie asintótica cuando $-s \in \mathbb{N}_0$, brindándonos algo de conocimiento sobre el comportamiento asintótico de $E_1^{c^2}(s)$ a manera de una serie de potencias en la variable c . La representación obtenida en la Ec. (3.39) comparte similitudes con el resultado en la Ref. [31] aunque existen diferencias sutiles entre ambas expresiones, la siguiente subsección examinará estas disimilitudes con más detalle. Para las otras dos situaciones restantes que surgen de la Ec.(3.28) cuando $(-s \text{ y } 1/2 - s \notin \mathbb{N}_0)$ o $(1/2 - s \in \mathbb{N}_0)$ aseveramos que no es tan fácil obtener su serie asintótica partiendo de una expresión similar a la Ec.(3.36) lo cual limita la información acerca del comportamiento asintótico para la función $E_1^{c^2}(s)$ en estos casos. El conocimiento de los valores para $E_1^{c^2}(s)$ cuando $(1/2 - s \in \mathbb{N}_0)$ es de suma importancia cuando uno quiere conocer a $E_N^{c^2}(s)$ pues contempla esta situación, ya que el argumento es desplazado por valores enteros y mitades de enteros como puede ser visto en (3.27). La siguiente sección tiene como objetivo presentar un método que permite conocer en todas las situaciones la serie asintótica para la función de Epstein.

3.3.2. Serie de potencias para $E_1^{c^2}(s)$: enfoque general.

En esta subsección presentamos un procedimiento matemático original que conduce a un resultado asintótico a manera de una serie de potencias en la variable c de la función zeta inhomogénea unidimensional de Epstein similar a las estructuras obtenidas en la Ref. [31], pero con algunas diferencias importantes. Deduiremos tal expansión asintótica partiendo del término en (3.29) que forma parte de la expresión en (3.28), la cual es una representación de la función zeta inhomogénea unidimensional de Epstein definida en la Ec. (3.26). Empezaremos escribiendo

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

la forma integral tipo Mellin-Barnes para la función modificada de Bessel de segundo tipo dada por la siguiente expresión [66, 67]:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} \Gamma(a)\Gamma(a - \nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu - 2a} da, \quad (3.40)$$

válida para $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$. El valor de a_0 se determina después de analizar los polos que surgen de $\Gamma(a)\Gamma(a - \nu)$ en el integrando de la Ec. (3.40). Los polos de $\Gamma(a)$ se encontrarán en $\text{Re}(a) \in \{0, -1, -2, -3, \dots\}$, si pedimos que $\nu \in \mathbb{R}$ entonces los polos de $\Gamma(a - \nu)$ estarán en $\text{Re}(a) - \nu \in \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. Si $\nu \leq 0$ los polos que surgen del término $\Gamma(a)\Gamma(a - \nu)$ caerán dentro de $\text{Re}(a) \leq 0$ como puede verse en la Fig.3.1, lo cual permite establecer que $a_0 = 0$.

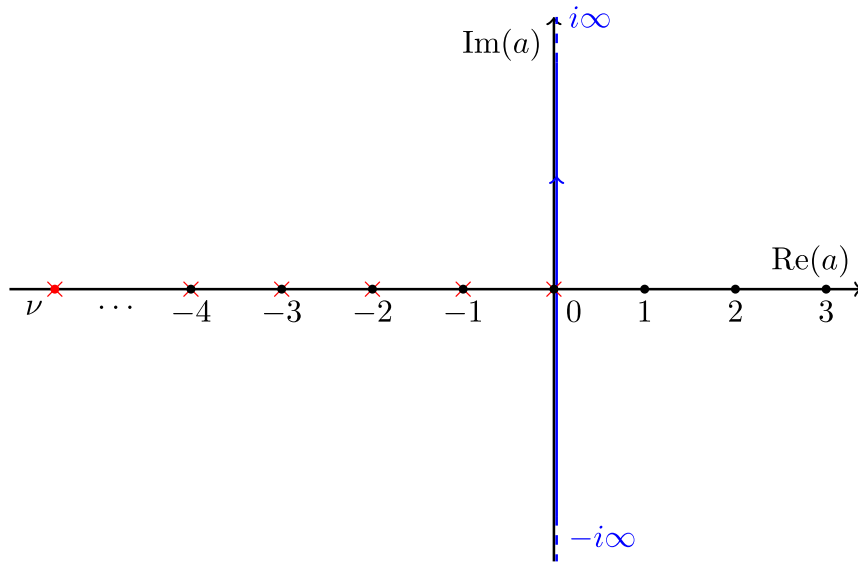


Figura 3.1: Para $\nu \leq 0$ los polos caen en $\text{Re}(a) \leq 0$, lo cual fija que $a_0 = 0$.

En cambio, si $\nu > 0$ los polos que vienen de $\Gamma(a)\Gamma(a - \nu)$ caerán dentro de $\text{Re}(a) \leq \nu$ como puede ser visto en la Fig.3.2, lo cual fija a $a_0 = \nu$.

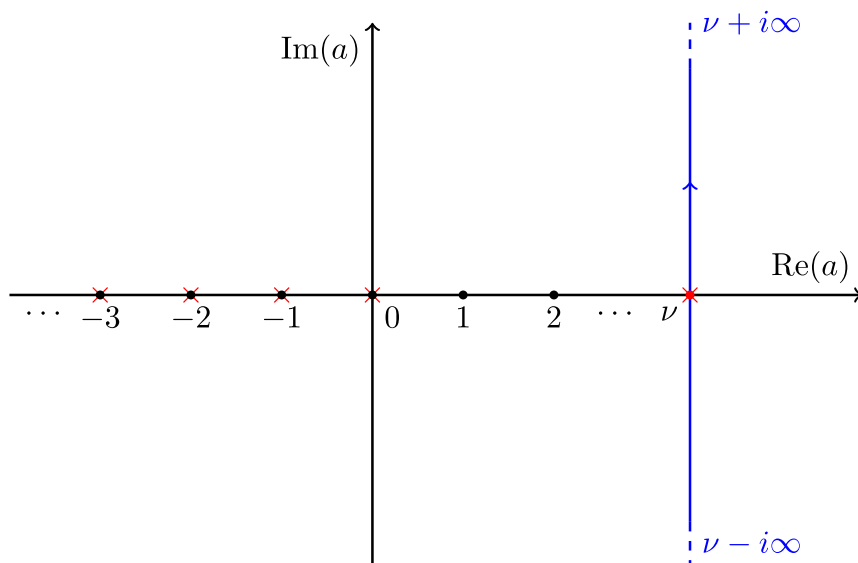


Figura 3.2: Para $\nu > 0$ los polos sucederán en $\text{Re}(a) \leq \nu$, lo cual fija que $a_0 = \nu$.

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

Lo anterior puede expresarse de dos maneras, la primera de ellas diciendo que $a_0 = \max(0, \nu)$ donde $\max(0, \nu)$ es el mayor número entre cero y ν . Alternativamente podemos decir que a_0 es algún valor finito sobre el eje real que se elige a la derecha de los polos del término $\Gamma(a)\Gamma(a - \nu)$ como puede verse en la Fig.3.3

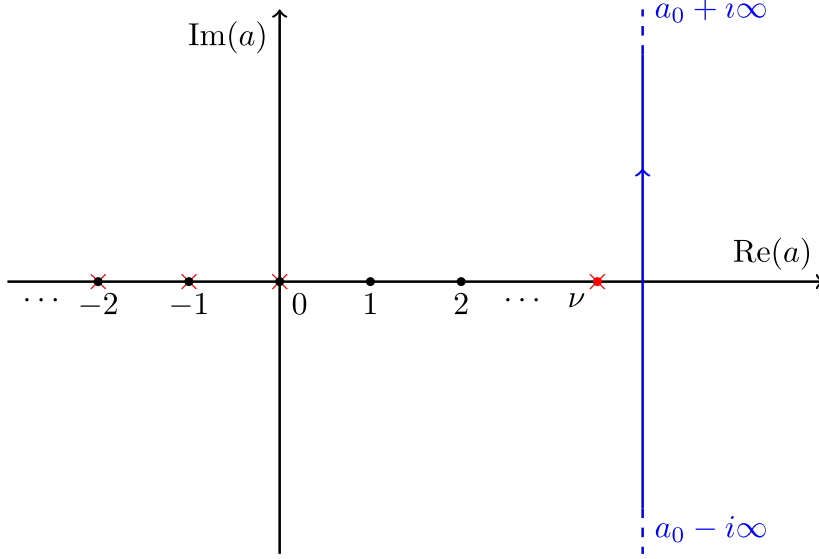


Figura 3.3: En la figura observamos que a_0 puede elegirse como algún valor finito sobre el eje real a la derecha de los polos del término $\Gamma(a)\Gamma(a - \nu)$.

Retomando la expresión en (3.40) hacemos $z = 2\pi nc$ y $\nu = s - 1/2$ lo cual permite reescribir a (3.29) como:

$$2\pi^s \frac{c^{-s+1/2}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi nc) = \pi^s \frac{c^{-s+1/2}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} \Gamma(a)\Gamma(a-s+1/2) \times (\pi nc)^{s-2a-1/2} da \quad (3.41)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} \frac{\Gamma(a)\Gamma(a-s+1/2)}{\Gamma(s)} n^{2s-2a-1/2} 2^{s-2a-1/2} \times \pi^{2s-2a-1/2} c^{-2a} da, \quad (3.42)$$

al intercambiar la suma $\sum_{n=1}^{\infty}$ con la integral $\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}$ en la Ec. (3.42), dicha expresión se convierte en

$$2\pi^s \frac{c^{-s+1/2}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi nc) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} \frac{\Gamma(a)\Gamma(a-s+1/2)}{\Gamma(s)} \zeta(1-2s+2a) 2^{s-2a-1/2} \times \pi^{2s-2a-1/2} c^{-2a} da, \quad (3.43)$$

esto último agregará un polo más debido a la introducción de la función $\zeta(1-2s+2a)$, como consecuencia a_0 se definirá dependiendo de los polos que puedan surgir del término $\Gamma(a)\Gamma(a-s+1/2)\zeta(1-2s+2a)$, lo que nos lleva a estudiar dicha estructura de polos y empezamos diciendo que los polos de $\Gamma(a)$ suceden en $a \in \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}$. Los polos de $\Gamma(a-s+1/2)$ suceden únicamente para $a-s+1/2 \in \{0\}$, pues aún cuando la función $\Gamma(a-s+1/2)$ diverge para $a-s+1/2 \in \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ es también donde los ceros triviales de $\zeta(1-2s+2a)$ acontecen, tal que en el límite tendremos un valor finito. En cambio, cuando $a-s=0$ entonces $\zeta(1-2s+2a)$ diverge. Los polos para el término $\Gamma(a)\Gamma(a-s+1/2)\zeta(1-2s+2a)$ son entonces $a \in \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\} \cup \{s-1/2, s\}$.

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

- Si $s \in \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}$ entonces el polo que surge de $\zeta(1 - 2s + 2a)$ coincidirá con un polo proveniente de $\Gamma(a)$ y a su vez tendremos un polo más en $a = s - 1/2$ proveniente de $\Gamma(a - s + 1/2)$. En este caso $a_0 = 0$ pues todos los polos caen en cero o antes de cero como podemos observar en la Fig.3.4.

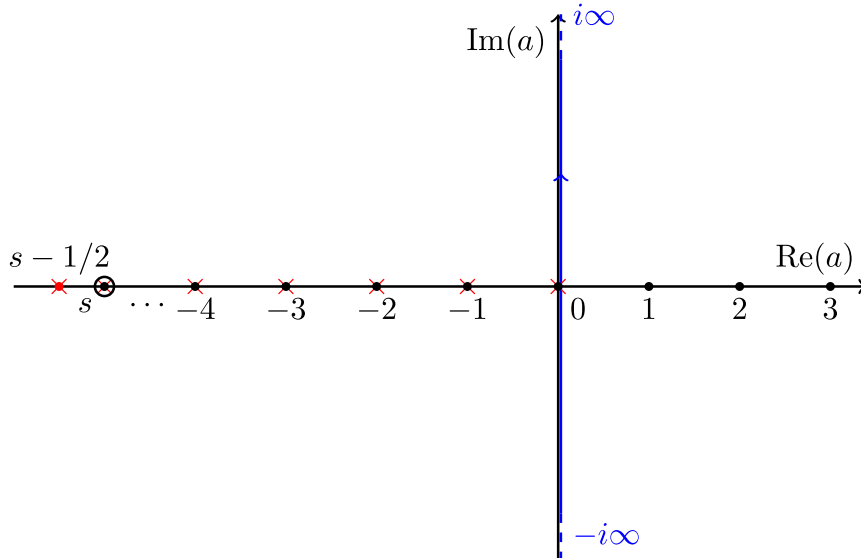


Figura 3.4: Fijamos $a_0 = 0$ ya que tanto los polos de $\Gamma(a)$ como el polo de orden dos situado en s y el polo $s - 1/2$ se encuentran antes de cero.

- Si $s \in \{1/2, -1/2, -3/2, -5/2, \dots\}$ entonces el polo de $\Gamma(a - s + 1/2)$ coincidirá con un polo que viene de $\Gamma(a)$ y tendremos otro polo en $a = s$ proveniente de $\zeta(1 - 2s + 2a)$. En este caso $a_0 = 1/2$ pues todos los polos caen en $1/2$ o antes de $1/2$ o antes de $1/2$ como puede observarse en la Fig.3.5. Notemos que la flexibilidad brindada sobre la elección de a_0 en la representación de Mellin-Barnes para $K_{s-1/2}(2\pi nc)$ al elegirse como un valor finito siempre a la derecha de los polos de $\Gamma(a)\Gamma(a - s + 1/2)$ nos permite seguir aplicando dicha representación a pesar de haber conmutado la suma discreta con la integral, pues uno puede pedir que a_0 esté lo suficiente a la derecha de tal forma que pueda encontrarse después de los polos de $\Gamma(a)\Gamma(a - s + 1/2)$ así como del polo que viene de $\zeta(1 - 2s + 2a)$.

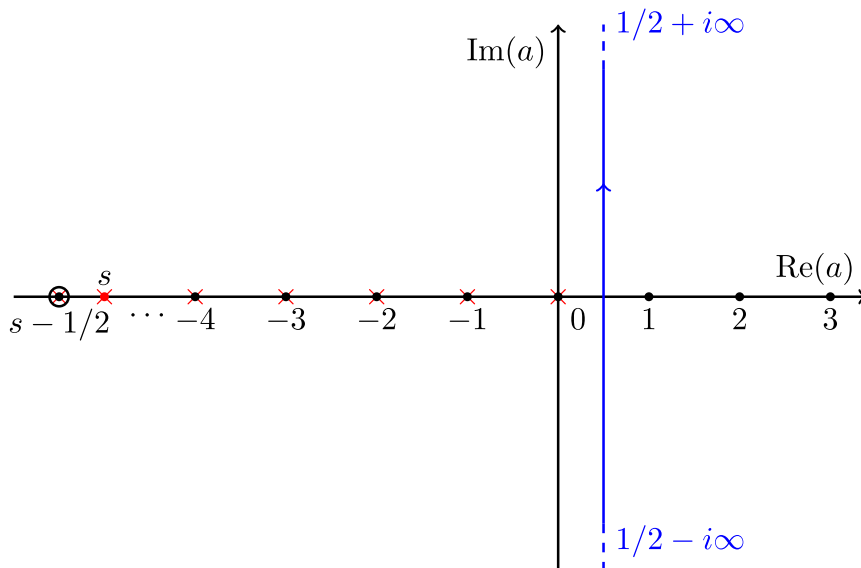


Figura 3.5: En este caso fijamos $a_0 = 1/2$ ya que tanto los polos de $\Gamma(a)$ como el polo de orden dos situado en $s - 1/2$ y el polo en s se encuentran antes de $1/2$.

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

- Si $s \notin \{1/2, -1/2, -3/2, -5/2, \dots\}$ y $s \notin \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}$ entonces todos los polos de $\Gamma(a)$ serán polos de primer orden, y habrán dos polos simples ubicados en $a = s - 1/2$ y $a = s$. La determinación en la elección de a_0 queda a sabiendas del valor de s . Cuando $s > 0$ entonces $a_0 = s$ pues todos los polos en tal situación caerán en s o antes de s como puede verse en la Fig.3.6. Enfatizamos que la validez de la aplicación de la forma tipo Mellin-Barnes para $K_{s-1/2}(2\pi nc)$ sigue aplicando pues uno tiene la libertad de elegir a a_0 a la derecha de los polos de $\Gamma(a)\Gamma(a - s + 1/2)$ lo suficiente para cubrir al polo situado en s proveniente de la función $\zeta(1 - 2s + 2a)$. Para $s < 0$ establecemos que $a_0 = 0$ pues todos los polos se encontrarán en cero o antes de cero como puede verse en la Fig.3.7.

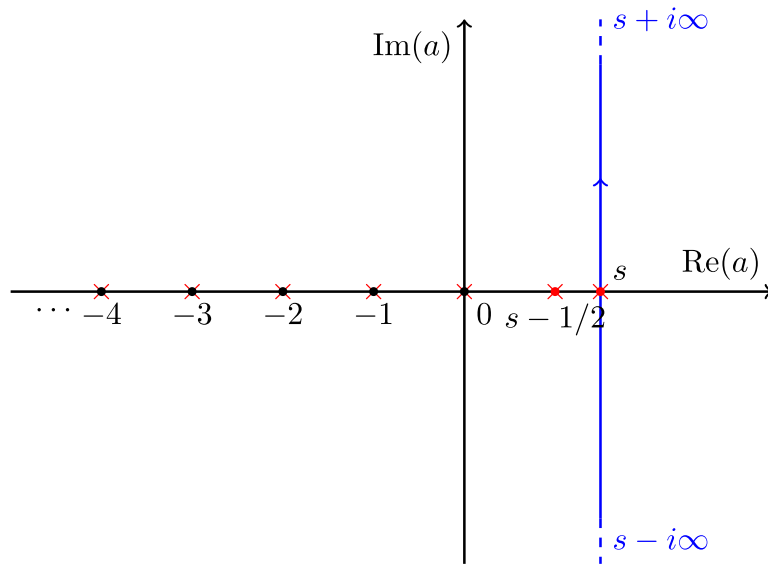


Figura 3.6: En esta situación $a_0 = s$ pues todos los polos quedan sobre s o antes de s .

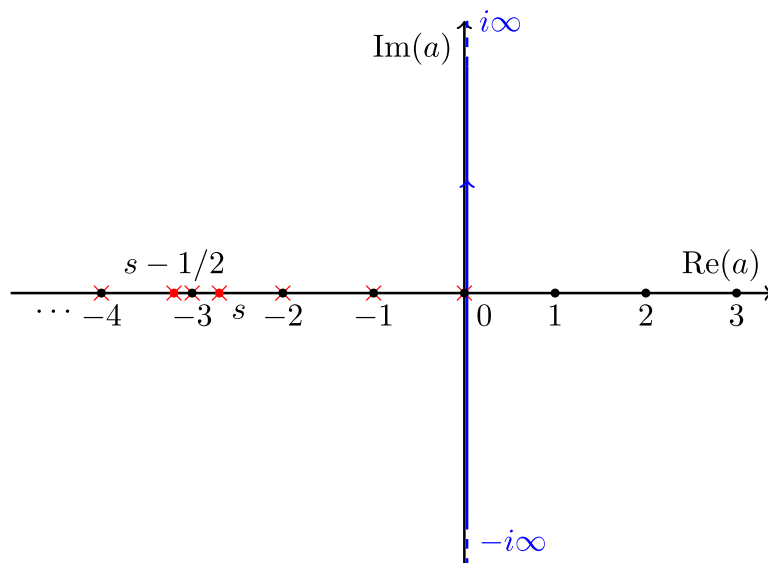


Figura 3.7: En esta situación $a_0 = 0$ pues todos los polos quedan en cero o antes de cero.

El lado derecho de Ec. (3.43) puede obtener una forma un poco más simplificada y un aspecto preferido al hacer el

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

cambio de variable de $a \rightarrow -a$, en tal situación el lado derecho de la Ec. (3.43) toma la siguiente estructura

$$2\pi^s \frac{c^{-s+1/2}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n c) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-a_0+i\infty}^{-a_0-i\infty} \frac{\Gamma(-a)\Gamma(1/2-a-s)}{\Gamma(s)} \zeta(1-2s-2a) 2^{s+2a-1/2} \times \pi^{2s+2a-1/2} c^{2a} da. \quad (3.44)$$

Si usamos la fórmula de reflexión de la función Gamma $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\text{sen}(\pi z)$ entonces al nombrar $z = a+1$ tendremos que

$$\Gamma(-a) = -\frac{\pi \csc(\pi a)}{\Gamma(a+1)}. \quad (3.45)$$

A su vez, usando la fórmula de reflexión de la función zeta de Riemann $\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z) = \Gamma(\frac{1-z}{2})\pi^{-(1-z)/2}\zeta(1-z)$, al hacer $z = 1-2s-2a$ tendremos entonces que

$$\Gamma\left(\frac{1-2s-2a}{2}\right) = \frac{\Gamma(s+a)}{\pi^{2s+2a-1/2}} \frac{\zeta(2s+2a)}{\zeta(1-2s-2a)}. \quad (3.46)$$

Al sustituir (3.45) y (3.46) sobre el lado derecho de la Ec. (3.44), adquiere la siguiente forma

$$2\pi^s \frac{c^{-s+1/2}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a_0-i\infty}^{-a_0+i\infty} \frac{\Gamma(s+a)}{\Gamma(a+1)\Gamma(s)} \zeta(2s+2a) \pi \csc(\pi a) c^{2a} da. \quad (3.47)$$

Esta última expresión puede ser escrita en términos de un contorno cerrado como el semicírculo en la Fig.3.8 que debido a las propiedades de decaimiento del integrando al extender el radio de la figura a infinito la contribución del arco puede considerarse despreciable (ver Refs. [31, 68]). El valor de $-a_0$ se determina como $\min(0, -s)$ siendo $\min(0, -s)$ el mínimo entre cero y el valor de $-s$, permitiendo escribir que

$$2\pi^s \frac{c^{-s+1/2}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n c) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(s+a)}{\Gamma(a+1)\Gamma(s)} \zeta(2s+2a) \pi \csc(\pi a) c^{2a} da. \quad (3.48)$$

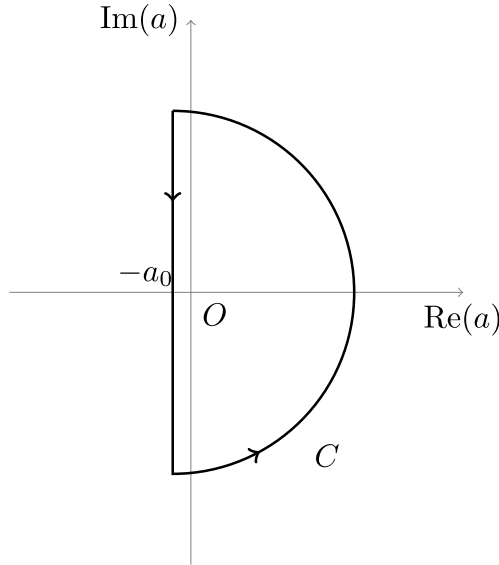


Figura 3.8: Contorno de integración en el plano complejo.

Concluimos entonces que la función zeta inhomogénea unidimensional de Epstein (3.28) puede ser escrita como

$$E_1^{c^2}(s) = \int_C \frac{da}{2\pi i} \frac{\Gamma(s+a)c^{2a}}{\Gamma(a+1)\Gamma(s)} \zeta(2s+2a) \pi \csc(\pi a) - \frac{c^{-2s}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} c^{-2s+1}. \quad (3.49)$$

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

Ahora es posible aplicar el teorema del residuo a la Ec.(3.49). La integral equivale a $2\pi i$ veces la suma de todos los residuos dentro del contorno de integración, este resultado como veremos es susceptible a ser divergente y esta es la principal diferencia entre la representación dada en la Ec. (3.49) y su homóloga que aparece en la Ref. [31] la cual es finita. Para aplicar el teorema del residuo, tres importantes situaciones deberán considerarse dependiendo de la elección de s , en lo que concierne a continuación, nos enfocaremos en estudiar estos casos.

Caso 1: $1/2 - s \notin \mathbb{N}_0$ y $-s \notin \mathbb{N}_0$.

Para hacer explícitos los valores que s toma en este caso, decimos que $s \notin \{1/2, 0, -1/2, -1, -3/2, -2, \dots\}$. Los polos que vienen de la función $\csc(\pi a)$, es el conjunto cuando $a \in \{0, 1, 2, \dots\}$, todos ellos de primer orden. Expandiendo la función cosecante alrededor de $k \in \mathbb{N}_0$ tendremos

$$\pi \csc(\pi a) \longrightarrow \frac{(-1)^k}{a - k}. \quad (3.50)$$

Debido a que queremos calcular los residuos de primer orden, lo hacemos mediante la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \text{Res}_k &= \lim_{a \rightarrow k} (a - k) \left[\frac{\Gamma(s + a)c^{2a}}{\Gamma(a + 1)\Gamma(s)} \zeta(2s + 2a) \frac{(-1)^k}{a - k} \right] \\ &= (-1)^k \frac{\Gamma(k + s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k + 2s) c^{2k}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Además de lo anterior, tenemos un polo de primer orden para $\Gamma(s + a)$ situado en $a = -s$, la expansión alrededor de este punto es

$$\Gamma(s + a) \longrightarrow \frac{1}{a + s} - \gamma \quad (3.52)$$

siendo γ la constante de Euler-Mascheroni, entonces el residuo es calculado como

$$\begin{aligned} \text{Res}_{-s} &= \lim_{a \rightarrow -s} (a + s) \left[\frac{\left(\frac{1}{a+s} - \gamma\right) c^{2a}}{\Gamma(a + 1)\Gamma(s)} \zeta(2s + 2a) \pi \csc(\pi a) \right] \\ &= \frac{c^{-2s}}{2}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

por otra parte, para la función $\zeta(2s + 2a)$ tenemos un polo de primer orden que se localiza en $a = 1/2 - s$, tal que su expansión nos deja los siguientes términos

$$\zeta(2s + 2a) \longrightarrow \frac{1}{2(a - \frac{1}{2} + s)} + \gamma, \quad (3.54)$$

al calcular el residuo obtendremos

$$\begin{aligned} \text{Res}_{1/2-s} &= \lim_{a \rightarrow 1/2-s} (a - 1/2 + s) \left[\frac{\Gamma(s + a)c^{2a}}{\Gamma(a + 1)\Gamma(s)} \left(\frac{1}{2(a - \frac{1}{2} + s)} + \gamma \right) \pi \csc(\pi a) \right] \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(s - 1/2)}{\Gamma(s)} c^{1-2s}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Si ponemos todos los residuos juntos, encontramos que

$$\int_c \frac{da}{2\pi i} \frac{\Gamma(s + a)c^{2a}}{\Gamma(a + 1)\Gamma(s)} \zeta(2s + 2a) \pi \csc(\pi a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k + s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k + 2s) c^{2k} + \frac{c^{-2s}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(s - 1/2)}{\Gamma(s)} c^{1-2s}, \quad (3.56)$$

notemos que el lado derecho de la Ec. (3.56) es finito para el caso analizado. Sustituyendo este resultado sobre la Ec. (3.49) nos permite conocer la expresión asintótica en forma de una serie de potencias en c como se aprecia a continuación

$$E_1^{c^2}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k + s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k + 2s) c^{2k}. \quad (3.57)$$

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

Esta ecuación no presenta polo alguno en su estructura, de hecho cuando $c \ll 1$ tal serie es convergente, en cambio, si $c > 1$ nada asegura la convergencia de dicha serie.

Caso 2: $1/2 - s \notin \mathbb{N}_0$ y $-s \in \mathbb{N}_0$.

Los valores de s es el conjunto $s \in \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. La función $\Gamma(s + a)$ exhibe un polo localizado en $a = -s$, y su expansión asintótica fue calculada en la Ec. (3.52). También tenemos polos que provienen de la función $\csc(\pi a)$, que en particular habrá un valor para el cual $a = -s$ del conjunto $a \in \{0, 1, 2, \dots, -s, \dots\}$. Cuando $a = -s$, al igual que el polo de la función $\Gamma(s + a)$, resultará un polo de segundo orden. La expansión para la función $\pi \csc(\pi a)$ alrededor de $a = -s$ deja el siguiente resultado

$$\pi \csc(\pi a) \longrightarrow \frac{(-1)^s}{a + s}, \quad (3.58)$$

tal que el producto de las dos expansiones asintóticas $\pi \Gamma(s + a) \csc(\pi a)$ muestra un polo de segundo orden y un polo de primer orden

$$\pi \Gamma(s + a) \csc(\pi a) \longrightarrow \frac{(-1)^s}{(a + s)^2} + \frac{(-1)^{s+1} \gamma}{a + s}. \quad (3.59)$$

Calculamos entonces los residuos como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \text{Res}_{2-s} &= \lim_{a \rightarrow -s} \frac{d}{da} \left[(a + s)^2 \frac{\zeta(2s + 2a) c^{2a}}{a! \Gamma(s)} \frac{(-1)^s}{(a + s)^2} \right] + \lim_{a \rightarrow -s} \left[(a + s) \frac{\zeta(2s + 2a) c^{2a}}{a! \Gamma(s)} \frac{(-1)^{s+1} \gamma}{a + s} \right] \\ &= \frac{(-1)^s c^{-2s}}{2\pi} [H_{-s} - \log(4\pi^2 c^2)] \sin(\pi s), \end{aligned} \quad (3.60)$$

notemos que cuando $-s \in \mathbb{N}_0$ la función $\sin(\pi s)$ es cero sobre estos valores y el Res_{2-s} se anula. Los otros polos de primer orden han sido calculados en la Ec.(3.55) para la función zeta y la Ec.(3.51) para la función $\csc(\pi a)$ pero como fue explicado previamente, la etiqueta $k = -s$ se omite de la suma en k ya que es involucrada en el cálculo del polo de segundo orden, quedando como resultado

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{da}{2\pi i} \frac{\Gamma(s + a) c^{2a}}{\Gamma(a + 1) \Gamma(s)} \zeta(2s + 2a) \pi \csc(\pi a) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq -s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k + s)}{k! \Gamma(s)} \zeta(2k + 2s) c^{2k} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s - 1/2)}{2} \frac{c^{1-2s}}{\Gamma(s)} \\ &+ \frac{(-1)^s c^{-2s}}{2\pi} [H_{-s} - \log(4\pi^2 c^2)] \sin(\pi s), \end{aligned} \quad (3.61)$$

donde H_n es el número armónico², nuevamente notamos que el lado derecho de la Ec. (3.61) es finito para el caso bajo análisis. Al sustituir la Ec. (3.61) sobre la Ec. (3.49), la serie asintótica para $E_1^{c^2}(s)$ toma la siguiente estructura

$$E_1^{c^2}(s) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq -s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k + s)}{k! \Gamma(s)} \zeta(2k + 2s) c^{2k} - \frac{c^{-2s}}{2} + \frac{(-1)^s c^{-2s}}{2\pi} [H_{-s} - \log(4\pi^2 c^2)] \sin(\pi s), \quad (3.62)$$

También pudimos suponer todos los polos de primer orden, en tal situación la Ec. (3.61) se escribiría como aparece en (3.56), evocando dicha ecuación tenemos

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{da}{2\pi i} \frac{\Gamma(s + a) c^{2a}}{\Gamma(a + 1) \Gamma(s)} \zeta(2s + 2a) \pi \csc(\pi a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k + s)}{k! \Gamma(s)} \zeta(2k + 2s) c^{2k} + \frac{c^{-2s}}{2} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s - 1/2)}{2} \frac{c^{1-2s}}{\Gamma(s)},$$

aislando del contador al término en $k = -s$, escribimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{da}{2\pi i} \frac{\Gamma(s + a) c^{2a}}{\Gamma(a + 1) \Gamma(s)} \zeta(2s + 2a) \pi \csc(\pi a) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq -s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k + s)}{k! \Gamma(s)} \zeta(2k + 2s) c^{2k} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s - 1/2)}{2} \frac{c^{1-2s}}{\Gamma(s)} \\ &+ \lim_{k \rightarrow -s} (-1)^k \frac{\Gamma(k + s)}{k! \Gamma(s)} \zeta(2k + 2s) c^{2k} + \frac{c^{-2s}}{2}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

²El número armónico H_n se define como $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

observemos que el límite involucrado en la Ec. (3.63) tiene sentido, el término $\frac{c^{-2s}}{2}$ evidentemente es finito, mientras que el término $(-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k}$ a pesar de que $\Gamma(k+s)$ es singular en $k = -s$, si $-s \in \mathbb{N}_0$ entonces la función $\Gamma(s)$ en el denominador hace finito dicho valor, resolviendo el límite nos conduce al resultado siguiente

$$\frac{c^{-2s}}{2} + \lim_{k \rightarrow -s} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} = \frac{(-1)^s c^{-2s}}{2\Gamma(1-s)\Gamma(s)} [H_{-s} - \log(4\pi^2 c^2)], \quad (3.64)$$

entonces, el término que viene del límite después de usar la fórmula de reflexión de la función gamma convierte a la Ec.(3.63) en

$$\int_c \frac{da}{2\pi i} \frac{\Gamma(s+a)c^{2a}}{\Gamma(a+1)\Gamma(s)} \zeta(2s+2a) \pi \csc(\pi a) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq -s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{1-2s} + \frac{(-1)^s c^{-2s}}{2\pi} [H_{-s} - \log(4\pi^2 c^2)] \sin(\pi s),$$

que es exactamente la expresión en la Ec.(3.61) que por consecuencia la expresión para $E_1^{c^2}(s)$ será (3.62). Esta última expresión involucra al término en la Ec.(3.60), como hemos mencionado, dicho término es cero, pero preferimos conservar su estructura, debido a que en cálculos de correcciones radiativas [40] el objeto implicado en las amplitudes físicas es el producto $E_1^{c^2}(s)\Gamma(s)$, donde sucederá un límite entre la función $\sin(\pi s)$ y la función $\Gamma(s)$, ya que el primero de ellos es cero y el segundo término diverge cuando $-s \in \mathbb{N}_0$, el resultado del límite es un valor finito que contribuye. El análisis anterior que trata los polos como de primer orden admite entonces una expresión idéntica a (3.56), lo que nos lleva a una conclusión de suma importancia en torno a la búsqueda de la serie asintótica como potencias de c para $E_1^{c^2}(s)$, estamos diciendo que de nueva cuenta podemos expresar que

$$E_1^{c^2}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k}.$$

A diferencia del **Caso 1** la expresión (3.57) en el análisis actual oculta al término que resulta en (3.64), pero esta forma económica de escribir a $E_1^{c^2}(s)$ tendrá sus ventajas como veremos más adelante. Este último resultado es otra gran diferencia respecto a [31] pues tratar los polos como de primer orden en lugar de hacerlo como polos de segundo orden permite convercernos que la estructura en (3.57) está nuevamente implicada en el caso cuando $-s \in \mathbb{N}_0$. Para los interesados en esta peculiaridad, mostramos rápidamente la veracidad de esta última aseveración. Procedemos agregando y restando el término $\frac{c^{-2s}}{2}$ para después aislar del contador el término cuando $k = -s$ en la Ec.(3.57), dejando la siguiente expresión

$$E_1^{c^2}(s) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq -s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} - \frac{c^{-2s}}{2} + \frac{c^{-2s}}{2} + \lim_{k \rightarrow -s} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k}, \quad (3.65)$$

los últimos dos términos en la Ec.(3.65) causan el límite ya calculado en (3.64)

$$\frac{c^{-2s}}{2} + \lim_{k \rightarrow -s} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} = \frac{(-1)^s c^{-2s}}{2\Gamma(1-s)\Gamma(s)} [H_{-s} - \log(4\pi^2 c^2)],$$

lo cual permite reescribir a la Ec.(3.65) como

$$E_1^{c^2}(s) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq -s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} - \frac{c^{-2s}}{2} + \frac{(-1)^s c^{-2s}}{2\Gamma(1-s)\Gamma(s)} [H_{-s} - \log(4\pi^2 c^2)].$$

que vuelve a ser justamente la Ec.(3.62) después de usar la fórmula de reflexión de la gamma sobre el término en (3.64).

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

Caso 3: $1/2 - s \in \mathbb{N}_0$ y $-s \notin \mathbb{N}_0$.

El conjunto de valores que s admite en este caso es $s \in \{1/2, -1/2, -3/2, -5/2, \dots\}$. La función zeta $\zeta(2s+2a)$ exhibe un polo en $a = 1/2 - s$ y su expansión está dada en la Ec.(3.54), mientras que los otros polos de la función $\csc(\pi a)$ permanecen en todos los naturales incluyendo el cero, habrá un polo de la función $\csc(\pi a)$ en $a = 1/2 - s$, de manera que su expansión asintótica será

$$\pi \csc(\pi a) \rightarrow \frac{(-1)^{s-1/2}}{a - \frac{1}{2} + s}. \quad (3.66)$$

El producto entre las expansiones asintóticas $\pi \zeta(2s+2a) \csc(\pi a)$ manifestará un polo de orden dos y un polo simple como puede ser visto a continuación

$$\pi \zeta(2s+2a) \csc(\pi a) \rightarrow \frac{(-1)^{s-1/2}}{2(a+s-\frac{1}{2})^2} + \frac{(-1)^{s-1/2}\gamma}{a+s-\frac{1}{2}}, \quad (3.67)$$

calculando el correspondiente residuo, obtendremos

$$\begin{aligned} \text{Res}_{2\frac{1}{2}-s} &= \lim_{a \rightarrow \frac{1}{2}-s} \left\{ \left(a + s - \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma(s+a)c^{2a}}{a!\Gamma(s)} \frac{(-1)^{s+1}\gamma}{a+s-\frac{1}{2}} + \frac{d}{da} \left[\left(a + s - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\Gamma(s+a)c^{2a}}{a!\Gamma(s)} \frac{(-1)^{s-1/2}}{2(a+s-\frac{1}{2})^2} \right] \right\} \\ &= \frac{(-1)^{s-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} c^{1-2s}}{2\Gamma(\frac{3}{2}-s)\Gamma(s)} \left[\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{2}-s\right) + \log c^2 + 2\gamma \right], \end{aligned} \quad (3.68)$$

siendo ψ la función digamma que es un caso particular de la función poligamma. Los otros residuos provienen de la función $\Gamma(s+a)$, presentando un polo de primer orden calculado en la Ec.(3.53) y la función $\csc(\pi a)$ la cual tiene únicamente polos de primer orden calculados en la Ec.(3.51), excepto cuando $k = 1/2 - s$ que ha sido omitido de la suma en k , ya que fue implicada en el cálculo del polo de segundo orden, al juntar todos los residuos escribimos

$$\begin{aligned} \int_c \frac{da}{2\pi i} \frac{\Gamma(s+a)c^{2a}}{\Gamma(a+1)\Gamma(s)} \zeta(2s+2a) \pi \csc(\pi a) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{1}{2}-s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} + \frac{c^{-2s}}{2} \\ &+ \frac{(-1)^{s-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} c^{-2s+1}}{2\Gamma(\frac{3}{2}-s)\Gamma(s)} \left[\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{2}-s\right) + \log c^2 + 2\gamma \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Sustituyendo la Ec. (3.69) sobre (3.49), la serie asintótica para $E_1^{c^2}(s)$ que resulta es

$$\begin{aligned} E_1^{c^2}(s) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{1}{2}-s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} c^{1-2s} \\ &+ \frac{(-1)^{s-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} c^{-2s+1}}{2\Gamma(\frac{3}{2}-s)\Gamma(s)} \left[\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{2}-s\right) + \log c^2 + 2\gamma \right]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Otra forma de encontrar los mismos resultados es suponiendo que tenemos únicamente polos de primer orden, entonces evocamos a la Ec. (3.56)

$$\int_c \frac{da}{2\pi i} \frac{\Gamma(s+a)c^{2a}}{\Gamma(a+1)\Gamma(s)} \zeta(2s+2a) \pi \csc(\pi a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} + \frac{c^{-2s}}{2} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} c^{1-2s},$$

aislando del contador a $k = 1/2 - s$ tendremos

$$\begin{aligned} \int_c \frac{da}{2\pi i} \frac{\Gamma(s+a)c^{2a}}{\Gamma(a+1)\Gamma(s)} \zeta(2s+2a) \pi \csc(\pi a) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{1}{2}-s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} + \frac{c^{-2s}}{2} \\ &+ \lim_{k \rightarrow 1/2-s} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2\Gamma(s)} c^{1-2s}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

el límite que surge en la Ec.(3.71) deja el siguiente resultado

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow 1/2-s} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{1-2s} \\ &= \frac{(-1)^{s-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} c^{-2s+1}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)\Gamma(s)} \left[\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{2}-s\right) + \log c^2 + 2\gamma \right], \end{aligned} \quad (3.72)$$

insertando la solución del límite en la Eq.(3.71), claramente obtenemos a la Ec.(3.69) lo cual conduce a la expresión para $E_1^{c^2}(s)$ dada en la Ec. (3.70). Nuevamente la validez del procedimiento en el tratamiento de los polos visto como de primer orden evoca a la Ec. (3.56), lo cual sugiere que la serie asintótica para $E_1^{c^2}(s)$ en el caso bajo análisis puede expresarse como

$$E_1^{c^2}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k}.$$

Que este resultado se mantenga para los tres casos analizados nos brindará opciones para extender nuestras expresiones al caso cuando tengamos n dimensiones extra. Para aquellos que quieren convencerse de la veracidad de este último resultado, a continuación presentamos un breve cálculo que asegura su validez. Usando el mismo razonamiento aplicado en el **Caso 2**, pero teniendo en cuenta esta vez que la divergencia sobre la expresión arriba (3.57) se encuentra localizada en $k = 1/2 - s$, sumamos y restamos el término $\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{-2s+1}$, y escribimos que

$$\begin{aligned} E_1^{c^2}(s) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1/2-s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{-2s+1} + \lim_{k \rightarrow -s} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} \\ &+ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{-2s+1}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

el límite en cuestión es entonces

$$- \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{-2s+1} + \lim_{k \rightarrow -s} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}-s} c^{1-2s} \sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)\Gamma(s)} \left(2\gamma - H_{\frac{1}{2}-s} + \log \frac{c^2}{4} \right), \quad (3.74)$$

de tal manera que la Ec.(3.73) puede ser escrita como

$$E_1^{c^2}(s) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1/2-s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k!\Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k} + \frac{(-1)^{\frac{1}{2}-s} c^{1-2s} \sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)\Gamma(s)} \left(2\gamma - H_{\frac{1}{2}-s} + \log \frac{c^2}{4} \right) + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{-2s+1}, \quad (3.75)$$

lo cual es totalmente equivalente a (3.70).

3.3.3. Expansión asintótica para la función de Epstein multidimensional

La serie asintótica en potencias de c para la función de Epstein con estructura como en la Ec. (3.57) presente en las tres situaciones analizadas anteriormente, permite escribir la versión multidimensional de la función de Epstein. La relación entre la función multidimensional de Epstein en términos de la unidimensional está dada como a continuación [56]

$$E_l^{c^2}(s)\Gamma(s) = \frac{(-1)^{l-1}}{2^{l-1}} \sum_{p=0}^{l-1} \binom{l-1}{p} (-1)^p \pi^{p/2} E_1^{c^2}(s-p/2)\Gamma(s-p/2), \quad (3.76)$$

Con ayuda de esta última expresión es posible reescribir a la estructura que aparecerá en las funciones de vértice estándar de dos puntos (5.13) y cuatro puntos (5.14), como

$$\sum_{l=1}^n \binom{n}{l} E_l^{c^2}(s)\Gamma(s) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=1}^n \mathcal{C}_r \pi^{\frac{n-r}{2}} E_1^{c^2}\left(\frac{r-n}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{r-n}{2}+s\right), \quad (3.77)$$

CAPÍTULO 3. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL Y LA FUNCIÓN DE EPSTEIN.
3.3. LA FUNCIÓN UNIDIMENSIONAL DE EPSTEIN EN SERIE DE POTENCIAS.

con $\mathcal{C}_r = \sum_{l=1}^r \binom{n}{l-1}$. Con la finalidad de extraer términos divergentes de nuestras expresiones, hacemos uso de la expansión en serie de potencias en c^2 (ver Ec.3.57). Aplicando (3.57) dentro de (3.77) obtenemos que

$$\sum_{l=1}^n \binom{n}{l} E_l^{c^2}(s) \Gamma(s) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=1}^n \mathcal{C}_r \pi^{\frac{n-r}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma(k + s + \frac{r-n}{2}) \zeta(2k + 2s + r - n) c^{2k}, \quad (3.78)$$

lo anterior es válido para $|c| \ll 1$. Dicha expresión será nuestra herramienta principal usada para aislar divergencias en el caso n -dimensional, además (3.78) se reduce a (3.57) cuando $n = 1$.

Capítulo 4

Estructura a orden de un lazo de la teoría $\lambda\phi^4$ con una dimensión extra.

Hasta el momento la presente investigación cuenta con los elementos necesarios para calcular las estructuras a orden de un lazo de la teoría $\lambda\phi^4$ con una dimensión extra. Los parámetros de la teoría son la masa y la constante de acoplamiento, los cuales en principio se suponen ser cantidades divergentes y que por medio de la renormalización aquellas cantidades UV presentes en los parámetros desnudos de la teoría son canceladas, tal que dichos parámetros se convierten en cantidades con sentido físico.

Los esquemas de renormalización son prescripciones que nos permiten establecer que forma tendrán las partes finitas de los contratérminos y a su vez nos permiten definir el significado de los parámetros renormalizados en el modelo. En este capítulo abordaremos para la teoría $\lambda\phi^4$ dos esquemas de renormalización, cada uno de ellos presentando ventajas uno respecto del otro, pero de alguna manera cada esquema también deja ver sus limitaciones como veremos más adelante. Estos dos esquemas detrás de la renormalización son:

Esquema de sustracción mínima (MS): Este esquema va de la mano junto a regularización dimensional. Los contratérminos en este esquema son definidos simplemente como los polos necesarios para cancelar las divergencias ultravioletas, dichos polos después de aplicar regularización dimensional a las cantidades de interés pueden leerse de aquellos términos que contienen $1/\epsilon$ cuando $\epsilon = 0$. El esquema MS se dice ser un esquema independiente de la escala, por tal motivo el teorema de desacoplo en este esquema resulta no ser explícito.

Esquema dependiente de masa: En este esquema el momento externo de la partícula se fija a ser $p^2 = -M^2$ siendo M una escala que permite estudiar límites asintóticos donde a diferencia del esquema MS en este nuevo esquema el teorema de desacoplo es explícito.

En lo que a continuación concierne, nos enfocaremos en el estudio a detalle tanto del proceso de regularización como la renormalización de la teoría $\lambda\phi^4$ con una dimensión extra espacial siguiendo un procedimiento análogo al desarrollado en [34] y [35].

4.1. Descripción de las SVFs renormalizadas de dos y cuatro puntos.

Como es común, las cantidades renormalizadas $\{\phi, \phi^{(k)}, \lambda\}$ y las cantidades desnudas $\{\phi_B, \phi_B^{(k)}, \lambda_B\}$ se encuentran conectadas a través de los factores de renormalización como se presenta a continuación:

$$\phi_B = \sqrt{Z}\phi, \quad \phi_B^{(k)} = \sqrt{Z_{\phi^{(k)}}}\phi^{(k)}, \quad \lambda_B = \frac{Z_\lambda}{Z^2}\lambda. \quad (4.1)$$

Entonces, la Lagrangiana desnuda puede ser escrita como

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{(0k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{(k)} + \mathcal{L}_{d>4} + \mathcal{L}_{c.t.}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_{c.t.}^{(k)} + \mathcal{L}_{c.t.}^{d>4}, \quad (4.2)$$

CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON UNA DIMENSIÓN EXTRA.

4.1. DESCRIPCIÓN DE LAS SVFS RENORMALIZADAS DE DOS Y CUATRO PUNTOS.

donde $\mathcal{L}^{(0)}$, $\mathcal{L}^{(0k)}$ y $\mathcal{L}^{(k)}$ representan la versión renormalizada de las Lagrangianas dadas por el conjunto de Ecs. (2.19), mientras que $\mathcal{L}^{d>4}$ contiene interacciones de dimensión mayor que cuatro escritas en términos de las cantidades renormalizadas. El término $\mathcal{L}_{c.t.}^{(0)}$ representa el contratérmino estándar de la teoría escalar auto-interactuante, el cual es

$$\mathcal{L}_{c.t.}^{(0)} = \frac{1}{2}\delta_Z (\partial_\mu\phi) (\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}\delta m_1^2\phi^2 - \frac{\delta\lambda_1}{4!}\phi^4, \quad (4.3)$$

donde

$$\delta_Z = Z - 1, \quad \delta m_1^2 = m_B^2 Z - m^2, \quad \delta\lambda_1 = \lambda_B Z^2 - \lambda. \quad (4.4)$$

Las contribuciones $\mathcal{L}_{c.t.}^{(k)}$ y $\mathcal{L}_{c.t.}^{d>4}$ en la Ec. (4.2) contienen interacciones entre los campos ligeros y pesados, y entre campos puramente pesados, cuya estructura específica no será necesaria en esta sección.

La inversa de la función de Green estándar (SGF) de dos puntos es la función vértice estándar (SVF) de dos puntos, $G_c^{(00)-1} = i\Gamma_2^{(00)}$. A orden de un lazo, en general, los efectos extradimensionales impactarán a las funciones de vértice estándar (SVFs) insertando partículas excitadas de modo KK circulando alrededor del lazo. En el caso particular de la SVF de dos puntos renormalizada, a aproximación de 1-lazo, tenemos

$$\Gamma_{2R}(p) = p^2 - m^2 - \left(M^{(0)}(p^2) + \sum_{k=1}^{\infty} M^{(k)}(p^2) + M_{c.t.}(p^2) \right), \quad (4.5)$$

donde el término dentro del paréntesis no es más que la auto-energía del campo escalar ligero, el cual consiste de tres contribuciones: el primero, $M^{(0)}(p^2)$, proviene del término auto-interactuante de modo cero $\lambda\phi^4$ en $\mathcal{L}^{(0)}$, el segundo término, $\sum_{k=1}^{\infty} M^{(k)}(p^2)$, es el resultado del número infinito de interacciones entre ϕ y los modos excitados KK presente en $\mathcal{L}^{(0k)}$ (ver Ec. (5.7)), tal que tendremos una suma infinita de modos excitados alrededor del lazo (ver Fig.4.1), y finalmente el tercer término, $M_{c.t.}$, el cual es el contratérmino usual para la auto-energía, esto es,

$$M_{c.t.}(p^2) = \delta m_1^2 - p^2\delta_Z. \quad (4.6)$$

Este término es suficiente para cancelar todas las divergencias UV presentes en la auto-energía como se verá pronto. Las primeras dos contribuciones a la auto-energía en la Ec. (4.5) se resumen de la siguiente manera (ver sección 2.3.1 del Capítulo 2):

$$M^{(k)} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_{(k)}^2}, \quad (4.7)$$

donde el símbolo \mathbf{k} representa $\{0, k\}$.

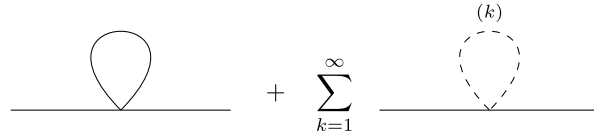


Figura 4.1: Contribuciones a la SVF de dos puntos $\Gamma_2(p)$ para una dimensión extra sin contratérmino.

Si queremos analizar las correcciones a la constante de acoplamiento de la teoría $\lambda\phi^4$ a causa de la dimensión extra a nivel de un lazo, consideramos entonces a la SVF de cuatro puntos $\Gamma_{4R}(p_i)$

$$\Gamma_{4R}(p_i) = -i\lambda + \left(\Gamma_{1\text{-loop}}^{(0)}(p_i) + \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_{1\text{-loop}}^{(k)}(p_i) + \Gamma_{c.t.}(p_i) \right), \quad (4.8)$$

con $\Gamma_{1\text{-loop}}^{(0)}(p_i)$ y $\Gamma_{1\text{-loop}}^{(k)}(p_i)$ como las contribuciones a un lazo que modifican a la constante de acoplamiento en el límite de baja energía y $\Gamma_{c.t.}(p_i)$ el contratérmino que removerá los infinitos UV. El primer término en el paréntesis de la Ec. (4.8) corresponde al campo ligero ϕ alrededor del lazo, cuya presencia se debe al término $\lambda\phi^4$ en $\mathcal{L}^{(0)}$,

CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON UNA DIMENSIÓN EXTRA.
4.2. REGULARIZACIÓN DE LAS SVFS DE DOS Y CUATRO PUNTOS EN PRESENCIA DE UNA DIMENSIÓN EXTRA.

mientras que el segundo corresponde a una suma infinita de campos excitados con modo k circulando alrededor del lazo (ver Fig.4.2), cuya fuente es el número infinito de interacciones entre el campo ligero y los campos pesados (ver el primer término en (2.19b)). Cada uno de estos términos contiene una suma sobre las variables de Mandelstam, es decir,

$$\Gamma_{1\text{-loop}}^{(k)}(p_i) = \sum_{\{p^2\}} \Delta\Gamma^{(k)}(p) \quad (4.9)$$

donde el símbolo $\sum_{\{p^2\}}$ indica una suma sobre las tres variables de Mandelstam, y

$$\Delta\Gamma^{(k)}(p) = -\frac{1}{2}\lambda^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i}{l^2 - m_{(k)}^2} \frac{i}{(p-l)^2 - m_{(k)}^2}. \quad (4.10)$$

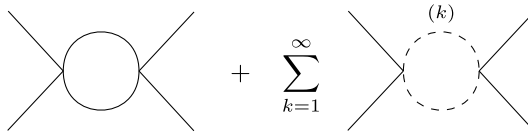


Figura 4.2: Contribuciones a la SVF de cuatro puntos $\Gamma_4(p_i)$ sin el contratérmino.

El tercer término dentro del paréntesis en la Ec. (4.8) es

$$\Gamma_{c.t.}(p_i) = -i\delta\lambda_1, \quad (4.11)$$

el cual viene del contratérmino de la Ec. (4.3). Como veremos, este es el único contratérmino necesario para cancelar las divergencias en (4.8). Este resultado es importante, y puede reformularse diciendo que todos los efectos de una dimensión extra en la teoría escalar auto-interactuante $\lambda\phi^4$ se vuelven finitos con ayuda de los contratérminos de dimensión canónica cuatro dados por la Ec. (4.3); sin embargo cuando más dimensiones extra son involucradas esto deja de ser cierto, ya que se necesitan operadores de dimensión canónica mayor que cuatro.

Notemos que (4.7) y (4.10) tienen estructuras idénticas como aquellas que aparecen en la teoría pura de ϕ^4 a un lazo, con la diferencia de que estas expresiones también representan contribuciones de los modos KK. Lo anterior sugiere que al aplicar regularización dimensional, estos términos exhibirán un número infinito de divergencias UV en las Ecs. (4.5) y (4.8) lo cual definirá a los correspondientes contratérminos. Mostraremos en la siguiente sección que este número infinito de divergencias UV puede controlarse utilizando la función zeta inhomogénea unidimensional de Epstein [31, 32, 34, 35, 50, 56, 70].

4.2. Regularización de las SVFs de dos y cuatro puntos en presencia de una dimensión extra.

Con la finalidad de hacer frente al gran número de divergencias UV que a nivel de un lazo impactan a las SVFs de dos y cuatro puntos, Ecs. (4.5) y (4.8), respectivamente, introduciremos regularización dimensional, que a su vez permitirá detectar la aparición de la función zeta inhomogénea de Epstein unidimensional (ver [31, 34, 35, 40, 50, 56]) auxiliados del Capítulo 3.

En una teoría de campo escalar una función de vértice general contiene integrales escalares de N -puntos, es decir, integrales sobre la variable de momento dentro del lazo (ver Ec. (3.14))

$$F_N \propto \int d^4l \frac{1}{\prod_{j=1}^N [(l-p_j)^2 - m_j^2 + i\varepsilon]}, \quad (4.12)$$

donde m_j son las masas internas de las partículas dentro del lazo que aparece en cualquier función de vértice genérica a nivel de un lazo en algún contexto dado, y p_j se relaciona con los momentos externos con $p_1 \equiv 0$, por ejemplo (4.7) y (4.10). Para integrales divergentes aplicamos regularización dimensional promoviendo al espacio tiempo cuadrimensional a un espacio tiempo D -dimensional y definimos que $s := N - D/2$. Comparando la Ec. (4.12) con (4.7) tenemos $N = 1$ y $s \rightarrow -1$ como el límite cuadrimensional, mientras que de (4.12) y (4.10)

CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON UNA DIMENSIÓN EXTRA.

4.2. REGULARIZACIÓN DE LAS SVFS DE DOS Y CUATRO PUNTOS EN PRESENCIA DE UNA DIMENSIÓN EXTRA.

tenemos $N = 2$ y $s \rightarrow 0$ como el límite cuadrimensional¹. Particularmente es interesante la aparición de la función zeta de Epstein después de la regularización dimensional y a su vez el tratamiento de la serie completa o dicho de otra manera la serie no truncada que involucra a los modos KK. Antes de entrar al análisis en cuestión, consideremos formalmente la contribución de todos los modos excitados KK de la auto-energía (ver Ec. (4.5) y (4.7)),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} M^{(k)} &= \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{(k)}^2} = \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\left(p^2 - \frac{k^2}{R^2} - m^2\right)} \\ &\equiv \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p_\mu p^\mu + p_{\bar{\mu}} p^{\bar{\mu}} - m^2)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde $p^{\bar{\mu}} \equiv p^5 = k/R$ es esencialmente el momento cuantizado de una partícula con condiciones periódicas impuestas sobre la dimensión extra, y $p_{\bar{\mu}} p^{\bar{\mu}} = p_5 p^5 = -(k/R)^2$ cuando la métrica Lorentziana es usada. Desde la perspectiva de la contribución de los modos excitados KK, existen básicamente dos tipos de fuentes de divergencias UV o divergencias debido a cortas distancias: una que viene de distancias cortas en \mathcal{M}^4 o un valor grande del momento continuo, que claramente hace a la integral sobre p diverger, mientras que la otra proviene al permitir que el momento cuantizado a manera de enteros incremente indefinidamente, en tal situación p^5 incrementa y la serie en k podría no estar bien definida. Por lo tanto, uno requiere de una continuación analítica para regularizar este comportamiento. De hecho, cuando regularización dimensional se aplica, dicha continuación analítica está detrás del proceso justificando todas las integrales en D dimensiones como hemos aprendido de 't Hooft y Veltman [71]. Se puede llegar a una conclusión similar para la contribución de los modos excitados KK de la SVF de cuatro puntos.

Aplicando regularización dimensional a las integrales divergentes en la SVF de 2-puntos (4.5), con $s = 1 - D/2$, obtenemos

$$\Gamma_{2R}(p^2; s) = p^2 - m^2 - \frac{\lambda}{32\pi^2} m^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{1+s} \left[\Gamma(s) + c^{2s} E_1^{c^2}(s) \Gamma(s) \right] - \delta m_1^2 + p^2 \delta_Z, \quad (4.14)$$

donde $c^2 := m^2/R^2$, μ es la unidad común de masa introducida en regularización dimensional, a su vez la Ec. (3.26) ha sido utilizada. El parámetro c controla la escala de energía de los modos pesados, y $|c| \ll 1$ es entendido como el límite de baja energía. El primer término dentro del corchete proviene de $M^{(0)}$, que es el conocido término divergente presente en la teoría escalar auto-interactuante $\lambda\phi^4$, y el segundo término viene de $\sum_{k=1}^{\infty} M^{(k)}$ el cual es consecuencia de un número infinito de interacciones de ϕ con los modos excitados KK. Ya que el término dentro del corchete en la Ec. (4.14) es independiente de p^2 podemos remover $p^2 \delta_Z$ haciendo $\delta_Z \equiv 0$. No es necesario decir que las posibles divergencias UV pueden leerse como polos de $\Gamma(s)$ o el producto de la función zeta inhomogénea unidimensional de Epstein $E_1^{c^2}(s)$ con la función gamma $\Gamma(s)$, pero debemos tener cuidado al momento de proceder a realizar el límite $s \rightarrow -1$, o equivalentemente, $D = 4$. En particular, con el producto $E_1^{c^2}(s) \Gamma(s)$ uno debería evitar la aplicación directa de la regla del 'límite de un producto'. De hecho, debemos primero agotar toda manipulación algebraica en este producto antes de tomar el límite. Esta es la principal diferencia técnica respecto al trabajo [61], donde el análisis se desarrolla en torno al caso de una dimensión extra S^1 . Si se espera que las divergencias UV sean canceladas en las SVFs para el límite de baja energía, necesitamos aislar las fuentes de divergencia desde las fórmulas asintóticas y adecuadamente elegir los contratérminos necesarios.

El mismo procedimiento de regularización dimensional puede aplicarse a la SVF de cuatro puntos, con $s = 2 - D/2$, conduciendo a la expresión

$$\begin{aligned} \Gamma_{4R}(p_i; s) &= -i\lambda\mu^{2s} + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \mu^{2s} \sum_{\{p^2\}} \int_0^1 dz \left[\left(\frac{m^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-s} \Gamma(s) + \left(\frac{4\pi\mu^2}{R^2} \right)^s E_1^{c(p,z)^2}(s) \Gamma(s) \right] \\ &\quad - i\delta\lambda_1, \end{aligned} \quad (4.15)$$

¹Hasta este punto hemos decidido usar la variable s la cual regularmente aparece en la literatura de las 'funciones zeta' (Riemann, Hurwitz, Epstein, . . .), en la siguiente sección insertaremos $\epsilon := 4 - D$ usualmente utilizado en regularización dimensional.

CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON UNA DIMENSIÓN EXTRA.

4.3. RENORMALIZACIÓN A UN LAZO DE LA SVF DE DOS PUNTOS EN PRESENCIA DE UNA DIMENSIÓN EXTRA

siendo $c(p, z)^2 := (m^2 + p^2 z(z-1))/R^{-2}$. El primer término dentro del paréntesis representa la corrección a la constante de acoplamiento proveniente del término de interacción para el campo ligero $\lambda\phi^4$, esto es, $\Gamma_{1\text{-loop}}^{(0)}(p_i)$; mientras que el segundo término se origina de la contribución extradimensional $\sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_{1\text{-loop}}^{(k)}(p_i)$ y $\delta\lambda_1$ como se dijo previamente, es el contratérmino.

4.3. Renormalización a un lazo de la SVF de dos puntos en presencia de una dimensión extra

Los contratérminos dados en estas secciones con la finalidad de tratar los efectos a un lazo de la quinta dimensión al nivel de la masa y la constante de acoplamiento son inspirados en el esquema-(MS) [72, 73], es decir, un esquema independiente de masa en el cual las divergencias UV de los diagramas de Feynman serán cancelados por contratérminos definidos como los polos en $D = 4$. Interesantemente, tales contratérminos son de dimensión canónica 4 (ver (4.3)).

En presencia de una sola dimensión extra, analizamos las divergencias UV en Γ_{2R} y Γ_{4R} . La fuente no trivial de estos polos proviene de $E_1^{c^2}\Gamma$ en el límite cuadrimensional correspondiente (ver Eqs. (4.14) y (4.15)). Nuestro problema se reduce a investigar la estructura de los polos en $E_1^{c^2}\Gamma$ lo cual se hará en el límite $|c| \ll 1$, donde la fórmula para este producto se puede saber (ver Secc. 3.3.2), esto es

$$E_1^{c^2}(s)\Gamma(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma(k+s)\zeta(2k+2s)c^{2k}. \quad (4.16)$$

Como puede ser visto de (4.16), la SVF de dos puntos en el límite de baja energía puede ser escrita como a continuación,

$$\Gamma_{2R}(p^2, \epsilon) = p^2 - m^2 - \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{\epsilon/2} \left[\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1 + k\right) \zeta(2k + \epsilon - 2) c^{2k + \epsilon - 2} \right] - \delta m_1^2, \quad (4.17)$$

donde el límite cuadrimensional se obtiene cuando $\epsilon \rightarrow 0$, con $\epsilon/2 \equiv s+1 = 2 - D/2$, esto es, $s \rightarrow -1$. El primer término dentro del paréntesis contribuye con la divergencia UV usual, la cual resulta de la siguiente expansión asintótica,²

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) \sim -\frac{2}{\epsilon} + (\text{finite}), \quad (4.18)$$

aquí, la parte ‘finita’ contiene constantes típicas como lo es la constante de Euler-Mascheroni γ_E y un logaritmo que incluye en su argumento el cociente $4\pi\mu^2/m^2$. El análisis sobre el segundo término en (4.17) es más sutil, las posibles fuentes de divergencias pueden originarse de los argumentos ya sea de la función Γ o de la función zeta de Riemann ζ . Por lo tanto, los polos se encontrarán cuando el argumento de la función gamma sea un entero negativo o cero, y cuando el argumento de la función zeta de Riemann se convierta en uno. Estas condiciones se pueden expresar de la siguiente manera:

$$-2k + 2 = 2j, \quad j \in \mathbb{N}_0 \quad (4.19)$$

$$-2k + 2 = -1. \quad (4.20)$$

La Ec. (4.19) se satisface únicamente para $k = 0$ y $k = 1$, y no hay un entero positivo k que cumpla la identidad (4.20). Por lo tanto, la única fuente de divergencias UV para una dimensión extra está codificada en la función gamma, cuando tengamos más dimensiones extra, lo anterior no será el caso. En $k = 0$ la expresión asintótica relevante cuando $\epsilon \rightarrow 0$ es la siguiente

$$\left(\frac{4\pi\mu^2 c^2}{m^2} \right)^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2 - 1)\zeta(\epsilon - 2) \sim \frac{\zeta(3)}{2\pi^2} + (\text{finite}) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.21)$$

²Recurrimos al símbolo \sim para indicar igualdades asintóticas.

CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON UNA DIMENSIÓN EXTRA.

4.4. RENORMALIZACIÓN A UN LAZO DE LA SVF DE CUATRO PUNTOS EN PRESENCIA DE UNA DIMENSIÓN EXTRA.

En $k = 1$ la expresión asintótica significativa para valores pequeños de ϵ es

$$\left(\frac{4\pi\mu^2 c^2}{m^2}\right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\zeta(\epsilon) \sim \frac{2\zeta(0)}{\epsilon} + (\text{finite}) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.22)$$

De la relación (4.21) notemos que aunque la función gamma diverge conforme ϵ va a cero, el producto $\Gamma(\epsilon/2 - 1)\zeta(\epsilon - 2)$ es finito. En otras palabras, el término correspondiente a $k = 0$ no contribuye al polo en absoluto. Este no es el caso para el término $k = 1$, como podemos ver desde la igualdad asintótica (4.22), la cual muestra la divergencia ultravioleta típica $1/\epsilon$ conforme $\epsilon \rightarrow 0$. Introduciendo las relaciones asintóticas (4.18), (4.21) y (4.22) dentro de la SVF de dos puntos (4.17) para un ϵ pequeño tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{2R}(p^2, \epsilon) = & p^2 - m^2 - \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma(k-1)\zeta(2k-2) c^{2k-2} + \left[\frac{\lambda m^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \frac{\lambda m^2 \zeta(0)}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) \right] \\ & + \frac{\lambda m^2 \zeta(3)}{2\pi^2 c^2} + (\text{finite}) + \mathcal{O}(\epsilon) - \delta m_1^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ya que la serie que queda después de aislar a los términos divergentes (en $k = 0$ y $k = 1$) converge en el límite $|c| \ll 1$, concluimos que la SVF de dos puntos (4.14) será UV finita a nivel de un lazo si definimos al contratérmino adecuado para evitar las divergencias ultravioletas encontradas. En el sentido de la prescripción del esquema-(MS) [72, 73], donde las divergencias UV de los diagramas de Feynman deben ser canceladas por contratérminos que pueden ser leídos de los polos en $D = 4$, definimos

$$\delta m_1^2 := \frac{\lambda m^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \frac{\lambda m^2 \zeta(0)}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right), \quad (4.24)$$

es aquí donde el segundo término en $\mathcal{L}_{c.t.}^{(0)}$ (4.3) es totalmente definido. Del lado derecho de la Ec. (4.24) el primer término es el polo típico de la auto-energía proveniente de $\mathcal{L}^{(0)}$, y el segundo término es la contribución extra dimensional o contribución KK. La presencia del factor $\zeta(0) = -1/2$ es la versión regularizada de la divergencia UV asociada a cortas distancias en la dimensión extra (ver discusión posterior a la Ec. (4.13)).

Cuando los campos pesados se vuelven infinitamente masivos, esto es, en el límite $c \rightarrow 0$ o equivalentemente $R^{-1} \rightarrow \infty$, se espera en la Ec. (4.17) el desacoplo de la contribución KK, sin embargo lo anterior no sucede. Según la expansión asintótica (4.21) el término en $k = 0$ es $\lambda m^2 \zeta(3)/64\pi^4 c^2$ en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, lo cual diverge cuando c tiende a cero; además, la parte ‘finita’ del término $k = 1$ en la Ec. (4.22), contiene un término proporcional a $\log(2\pi c)$ que también diverge cuando los campos pesados se vuelven infinitamente masivos. Así pues, aunque el esquema-(MS) remueve las divergencias UV, no le compete el teorema de desacoplo; sin embargo, un esquema dependiente de masa puede asegurar el desacoplo de los modos pesados como se mostrará en la sección 4.5. Lo anterior continua siendo cierto incluso en la versión dimensionalmente reducida de QED, lo cual puede ser revisado en [34].

4.4. Renormalización a un lazo de la SVF de cuatro puntos en presencia de una dimensión extra.

Aplicando un tratamiento similar a $\Gamma_{4R}(p; s)$ dada en la Ec. (4.15). Esta expresión diverge conforme $s \rightarrow 0$, o equivalentemente cuando $\epsilon \rightarrow 0$ con $\epsilon/2 \equiv s$. Ya que nuestro interés radica en aislar las divergencias UV, la idea es entonces explorar la estructura de polos para $\Gamma_{4R}(p; s)$, de tal forma que aprovecharemos las expansiones asintóticas en el límite de baja energía ($|c| \ll 1$). Apoyándonos de la Ec. (4.16), la SVF de cuatro puntos en dicho régimen puede ser expresada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Gamma_{4R}(p; \epsilon) = & -i\lambda\mu^\epsilon + \frac{i\lambda^2\mu^\epsilon}{32\pi^2} \sum_{\{p^2\}} \left[\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dz \left(\frac{m^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} + k\right) \zeta(\epsilon + 2k) F_k(p^2) c^{\epsilon+2k} \right] - i\delta\lambda_1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

³Recordemos que la función zeta de Euler $\zeta_E(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ toma el valor de $-1/2$ en $s = 0$ una vez que ha sido analíticamente continuada a la función zeta de Riemann $\zeta(s)$.

CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON UNA DIMENSIÓN EXTRA.

4.4. RENORMALIZACIÓN A UN LAZO DE LA SVF DE CUATRO PUNTOS EN PRESENCIA DE UNA DIMENSIÓN EXTRA.

donde $F_k(p^2)$ se define como

$$\begin{aligned} F_k(p^2) &:= \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^k \int_0^1 dz \left(\frac{m^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2}\right)^k \\ &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{(-1)^l (l!)^2}{(2l+1)!} \left(\frac{p^2}{m^2}\right)^l. \end{aligned} \quad (4.26)$$

La contribución a $\Gamma_{4R}(p_i; s)$ del campo ligero alrededor del lazo se codifica en el primer término dentro del paréntesis de (4.25). Esta es la bien conocida contribución que proviene de $\mathcal{L}^{(0)}$, la entrada correspondiente al polo puede calcularse usando

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{m^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2}\right)^{-\epsilon/2} \sim \frac{2}{\epsilon} + (\text{finite}) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (4.27)$$

donde la parte ‘finita’ en (4.27) contiene la constante de Euler-Mascheroni y un logaritmo el cual dentro de su argumento depende del momento a través del término $(m^2 + p^2 z(z-1))/4\pi\mu^2$ integrado en la variable z . Con respecto al segundo término dentro del paréntesis de (4.25), los términos divergentes pueden determinarse desde el análisis de los argumentos de las funciones Γ y ζ , de hecho, estas funciones divergen siempre que

$$-2k = 2j, \quad j \in \mathbb{N}_0 \quad (4.28)$$

$$-2k = -1, \quad (4.29)$$

respectivamente. En este caso, hay una única solución para (4.28) que es cuando $k = 0$, y no existe solución para (4.29) ya que no hay un entero positivo k que lo cumpla. Por lo tanto, la única fuente de divergencia proviene nuevamente de la función gamma. Cuando $k = 0$ el asintótico para dicho término puede ser obtenido de la Ec. (4.22). Introduciendo las relaciones asintóticas (4.27) y (4.22) dentro de (4.25), para valores pequeños de ϵ obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{4R}(p_i; \epsilon) &= -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \sum_{\{p^2\}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!} \Gamma(k) \zeta(2k) F_k(p^2) e^{2k} + \left[\frac{3i\lambda^2}{16\pi^2} \left(\frac{\mu^\epsilon}{\epsilon}\right) + \frac{3i\lambda^2 \zeta(0)}{16\pi^2} \left(\frac{\mu^\epsilon}{\epsilon}\right) \right] \\ &+ (\text{finite}) + \mathcal{O}(\epsilon) - i\delta\lambda_1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

de lo cual el contratérmino $\delta\lambda_1$ puede establecerse, tal que la versión finita de la SVF de cuatro puntos, a nivel de un lazo, se obtiene definiendo

$$i\delta\lambda_1 := \frac{3i\lambda^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \frac{3i\lambda^2 \zeta(0)}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right). \quad (4.31)$$

Con este valor particular de $\delta\lambda_1$ el último contratérmino en $\mathcal{L}_{c.t.}$ queda completamente definido. Del lado derecho de (4.31), el primer término es la divergencia UV típica en la teoría ϕ^4 presente en $\mathcal{L}^{(0)}$, y el segundo término es la divergencia UV que proviene de la dimensión extra a nivel de un lazo en el límite de baja energía, el cual es nuevamente caracterizado por el valor regularizado $\zeta(0)$; el factor 3 viene de la suma $\sum_{\{p^2\}}$. En conexión con la extensión de este resultado hacia un número mayor de UEDs, es importante enfatizar que (4.31) es independiente del momento externo, la razón se debe a que la divergencia UV proviene del término $k = 0$ en la Ec. (4.25) el cual contiene al factor $F_0(p^2) = 1$; cuando más dimensiones extra son compactificadas, la Γ_{4R} resultante de la teoría contendrá divergencias UV con términos que involucrarán funciones genuinas de los momentos externos en $F_k(p^2)$, este hecho implicará una estructura más rica en lo relacionado a contratérminos [34, 35], [74].

Notemos que los contratérminos necesarios para cancelar las divergencias UV presentes en las SVFs Γ_{2R} y Γ_{4R} son de dimensión canónica cuatro, es decir, no apelamos a ninguna interacción incluida en $\mathcal{L}_{c.t.}^{d>4}$; sin embargo, este es un caso muy especial ya que, como veremos más adelante, en presencia de más dimensiones extra se requerirán contratérminos de dimensión canónica mayor que cuatro y las interacciones en $\mathcal{L}_{c.t.}^{d>4}$ serán relevantes.

Directamente desde la SVF de cuatro puntos la función beta $\beta(\lambda)$ puede calcularse a nivel de un lazo, en este

CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON UNA DIMENSIÓN EXTRA.

4.5. DESACOPLO DE LA CONTRIBUCIÓN KK EN PRESENCIA DE UNA DIMENSIÓN EXTRA.

caso,

$$\begin{aligned}\beta(\lambda) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\lambda \mu^\epsilon + \frac{3\lambda^2 \mu^\epsilon}{16\pi^2 \epsilon} - \frac{3\lambda^2 \zeta(0) \mu^\epsilon}{32\pi^2 \epsilon} \right) \\ &= \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + \frac{3\lambda^2 \zeta(0)}{32\pi^2}.\end{aligned}\tag{4.32}$$

La función beta mide la intensidad de la fuerza de la constante de acoplamiento conforme a la energía. Del lado derecho de la Ec. (4.32) el primer término es el valor usual de la función beta para la teoría auto-interactuante $\lambda\phi^4$ en el esquema-(MS), mientras que el segundo término es la contribución debida a la quinta dimensión. El valor de $\beta(\lambda)$ es positiva, lo que significa que la fuerza del acoplamiento aumenta a medida que aumenta la energía. Observe que la contribución debido a dimensiones extra reduce en un factor de $1/2$ a la función beta usual, es decir, al valor de la función beta en ausencia de la quinta dimensión.

Es importante enfatizar el hecho de que cuando $R^{-1} \rightarrow \infty$ ($c \rightarrow 0$) el teorema de desacoplo no se cumple tanto para Γ_{4R} como para la función beta. De hecho, con respecto a Γ_{4R} , el término divergente UV para $k = 0$ (ver Eq. (4.22)) contiene, además del polo, dentro de su parte ‘finita’ un término proporcional a $\log(4\pi^2 c^2)$. Además, la función beta es simplemente una constante independiente de R , por lo tanto, el teorema de desacoplo no es manifiesto. Esto no es una sorpresa ya que es bien sabido que la mayor diferencia del esquema-(MS) y otros esquemas similares a este es que la función β es independiente de la escala [34, 36]. Para restaurar tal dependencia sobre la escala debemos migrar a un esquema de substracción dependiente de masa, esta será la idea principal de la siguiente sección.

4.5. Desacoplo de la contribución KK en presencia de una dimensión extra.

En la presente sección migraremos a un esquema de substracción dependiente de masa al elegir $p^2 = -M^2$, con M la escala cinemática o de substracción [34, 40]. Comenzamos analizando la contribución a un lazo de la auto-energía dada por (ver (4.14) con $s + 1 = \epsilon/2$)

$$M_{5D}(p^2) := \frac{\lambda}{32\pi^2} m^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\epsilon \left[\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) + E_1^{c^2} \left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) c^{\epsilon-2} \right] - \delta m_1^2 + p^2 \delta_Z,\tag{4.33}$$

donde ninguno de los términos entre corchetes dependen de p^2 , por lo tanto $\delta_Z = 0$. Determinamos el contratermino δm_1^2 usando la condición cinemática

$$M_{5D}(p^2) \Big|_{p^2 = -M^2} = 0,\tag{4.34}$$

por lo tanto

$$\delta m_1^2 = - \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) \left[1 + E_1^{c^2} \left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) c^{\epsilon-2} \right].\tag{4.35}$$

En este esquema la auto-energía $M_{5D}(p^2) = 0$ para todo p^2 . A nivel de un lazo, la masa renormalizada no se ve afectada por dimensiones extra una vez que se cancelan las divergencias UV, esto es porque $M_{5D}(p^2)$ no depende del momento externo p^2 a diferencia de QED [34]. Hasta el momento, no se puede decir mucho sobre el desacoplo, podríamos extender nuestros cálculos a dos lazos si queremos ver explícitamente el desacoplo de la contribución KK. Por otro lado, veremos que la SVF de cuatro puntos esclarece mejor este aspecto.

Para la SVF de cuatro puntos tenemos una dependencia explícita de los momentos externos a nivel de un lazo. La SVF de cuatro puntos (4.15) cuando se introduce $\epsilon/2 = s$ se convierte en,

$$\begin{aligned}\Gamma_{4R5D}(p_i, \epsilon) &= -i\lambda\mu^\epsilon + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \mu^\epsilon \sum_{\{p^2\}} \int_0^1 dz \left[\left(\frac{m^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{m_{(k)}^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} \right] \\ &\quad \times \Gamma(\epsilon/2) - i\delta\lambda_1.\end{aligned}\tag{4.36}$$

CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON UNA DIMENSIÓN EXTRA.
4.5. DESACOPLO DE LA CONTRIBUCIÓN KK EN PRESENCIA DE UNA DIMENSIÓN EXTRA.

Determinaremos en esta ocasión a $\delta\lambda_1$ a partir de:

$$\Gamma_{4R5D}(s, t, u = -M^2) = -i\lambda. \quad (4.37)$$

entonces,

$$i\delta\lambda_1 = \frac{3i\lambda^2}{32\pi^2} \mu^\epsilon \int_0^1 dz \left[\left(\frac{m^2 - M^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{m_{(k)}^2 - M^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) \right], \quad (4.38)$$

cuya expansión asintótica para valores pequeños de ϵ es

$$i\delta\lambda_1 \sim \frac{3i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dz \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) - \log\left(\frac{m^2 - z(z-1)M^2}{\mu^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) - \log\left(\frac{m_{(k)}^2 - z(z-1)M^2}{\mu^2}\right) \right] \right\}. \quad (4.39)$$

Tal que la SVF de cuatro puntos libre de divergencias UV se obtiene mediante la sustitución de (4.39) en (4.36) obteniendo

$$\Gamma_{4R5D}(p_i) = -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dz \sum_{\{p^2\}} \left[\log\left(\frac{m^2 + z(z-1)p^2}{m^2 - z(z-1)M^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{m_{(k)}^2 + z(z-1)p^2}{m_{(k)}^2 - z(z-1)M^2}\right) \right]. \quad (4.40)$$

El teorema de desacoplo en la Ec. (4.40) es explícito, cuando la masa de los modos pesados es mucho mayor que nuestra masa cinemática, $m_{(k)} \gg M$, tenemos

$$\Gamma_{4R5D}(p_i) = -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dz \sum_{\{p^2\}} \log\left(\frac{m^2 + z(z-1)p^2}{m^2 - z(z-1)M^2}\right), \quad (4.41)$$

tal que únicamente está presente la contribución del campo ligero. Además, la función β se puede calcular en este esquema dependiente de masa usando [36]

$$\beta_{5D}(\lambda) = -M \frac{\partial \delta\lambda_1}{\partial M} \quad (4.42)$$

$$= \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz \left[\frac{z(1-z)M^2}{m^2 - z(z-1)M^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z(1-z)M^2}{m_{(k)}^2 - z(z-1)M^2} \right], \quad (4.43)$$

en particular, cuando $m \ll M$, la función β se aproxima a

$$\beta_{5D}(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left[1 + \int_0^1 dz \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z(1-z)M^2}{m_{(k)}^2 - z(z-1)M^2} \right]. \quad (4.44)$$

Adicionalmente, en el límite $M \ll m_{(k)}$, recuperamos el conocido valor de la teoría escalar auto-interactuante, ya que toda contribución de KK se desacopla, conduciendo al valor

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}. \quad (4.45)$$

Si por otro lado, permitimos a M ser extremadamente grande, es decir, $M \gg m_{(k)}$ y $M \gg m$, simultaneamente, el valor para la función beta β formalmente se convierte en el valor que se obtiene mediante el esquema-(MS) (4.32), esto es,

$$\begin{aligned} \beta_{5D}(\lambda) &= \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left[1 + \int_0^1 dz \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z(1-z)M^2}{m_{(k)}^2 - z(z-1)M^2} \right] \\ &= \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left[1 + \int_0^1 dz \zeta(0) \right] = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + \frac{3\lambda^2 \zeta(0)}{16\pi^2}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Implicaciones similares pueden encontrarse en la Ref. [34] donde cantidades como auto-energías para el fotón y el fermión, así como la función beta en QED son calculadas.

Capítulo 5

Estructura a orden de un lazo de la teoría $\lambda\phi^4$ con n dimensiones extra.

En este capítulo abordaremos la regularización y renormalización de las SVFs ligeras en la teoría $\lambda\phi^4$ con n dimensiones espaciales adicionales [74], lo cual es una extensión de las expresiones envueltas en el Capítulo 4[40]. Veremos que las principales diferencias son técnicas, pues los procedimientos esencialmente son los mismos basados en [34] y [35]. La aparición de operadores de dimensión mayor que cuatro incluirá un importante ingrediente en el modelo pues las divergencias UV estarán relacionadas con potencias de los momentos externos. Similarmente se usarán dos esquemas de renormalización; el esquema MS y el esquema dependiente de masa, siendo este último donde el teorema desacoplo se muestra de manera explícita.

5.1. Descripción renormalizada para las funciones de vértice estándar de dos y cuatro puntos.

Nuevamente relacionamos las cantidades renormalizadas $\{\phi, \phi^{(k)}, \lambda\}$ con las cantidades desnudas $\{\phi_B, \phi_B^{(k)}, \lambda_B\}$ a través de los factores de renormalización de la siguiente manera (comparar con (4.1)):

$$\phi_B = \sqrt{Z}\phi, \quad \phi_B^{(k)} = \sqrt{Z_{\phi^{(k)}}}\phi^{(k)}, \quad \lambda_B = \frac{Z_\lambda}{Z^2}\lambda. \quad (5.1)$$

La Lagrangiana desnuda es escrita como

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L}^{(0)} + \sum_{(k)} \mathcal{L}^{(0k)} + \sum_{(k)} \mathcal{L}^{(k)} + \mathcal{L}_{d>4} + \mathcal{L}_{c.t.}^{(0)} + \sum_{(k)} \mathcal{L}_{c.t.}^{(k)} + \mathcal{L}_{c.t.}^{d>4}, \quad (5.2)$$

donde $\mathcal{L}^{(0)}$, $\mathcal{L}^{(0k)}$ y $\mathcal{L}^{(k)}$ representan la versión renormalizada de las Lagrangianas dadas por el conjunto de Ecs. (2.29), mientras $\mathcal{L}^{d>4}$ contiene interacciones de dimensión canónica mayor que 4 escrita en términos de cantidades renormalizadas. Notemos que, como fue anticipado, uno podría adivinar (5.2) haciendo la sustitución de $\sum_{k=1}^{\infty}$ por $\sum_{(k)}$ en la expresión (4.2). El término $\mathcal{L}_{c.t.}^{(0)}$ representa el contratérmino estándar de la teoría escalar auto-interactuante, el cual es

$$\mathcal{L}_{c.t.}^{(0)} = \frac{1}{2}\delta_Z (\partial_\mu\phi) (\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}\delta m_n^2\phi^2 - \frac{\delta\lambda_n}{4!}\phi^4, \quad (5.3)$$

donde

$$\delta_Z = Z - 1, \quad \delta m_n^2 = m_B^2 Z - m^2, \quad \delta\lambda_n = \lambda_B Z^2 - \lambda. \quad (5.4)$$

Desde nuestra Lagrangiana efectiva dada en la Ec. (5.2), podemos ver que nuestra Lagrangiana desnuda conformada por interacciones mayor que cuatro es $\mathcal{L}_B^{d>4} = \mathcal{L}^{d>4} + \mathcal{L}_{c.t.}^{d>4}$, que contiene a todos los operadores de

CAPÍTULO 5. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON N DIMENSIONES EXTRA.

5.1. DESCRIPCIÓN RENORMALIZADA PARA LAS FUNCIONES DE VÉRTICE ESTÁNDAR DE DOS Y CUATRO PUNTOS.

dimensión mayor que cuatro. Para conocer su estructura, construiremos operadores que sean invariantes de Lorentz de dimensión mayor que cuatro y por inspección podemos elegir aquellas interacciones especificando que estas consistentemente remuevan a las divergencias que puedan surgir proporcionales a potencias de los momentos externos $\frac{p^2}{R^{-2}}$ [34, 35], pues términos de la forma $F_k(p^2)$ (ver Ec. (4.26)) comienzan a ser distintos de 1. Tal Lagrangiana debe tener una estructura como la siguiente

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_B^{d>4} = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\alpha_k}{(R^{-2})^k} \left[\left(\sum_{\substack{r=0, \\ (k \text{ par})}}^{k-1} \binom{k-1}{r} \partial_\mu^{\chi(r) \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \phi \cdot \partial^{\chi(k-r)\mu \lfloor \frac{k-r}{2} \rfloor} \phi \right)^2 \right. \\
 & + \left. \left(\sum_{\substack{r=0, \\ (k \text{ impar})}}^{k-1} \binom{k-1}{r} \partial_\mu^{\chi(r) \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \phi \cdot \partial_\mu^{\chi(k-r) \lfloor \frac{k-r}{2} \rfloor} \phi \right)^2 \right] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\delta\alpha_k}{(R^{-2})^k} \left[\left(\sum_{\substack{r=0, \\ (k \text{ par})}}^{k-1} \binom{k-1}{r} \partial_\mu^{\chi(r) \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \phi \cdot \partial^{\chi(k-r)\mu \lfloor \frac{k-r}{2} \rfloor} \phi \right)^2 \right. \\
 & + \left. \left(\sum_{\substack{r=0, \\ (k \text{ impar})}}^{k-1} \binom{k-1}{r} \partial_\mu^{\chi(r) \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \phi \cdot \partial_\mu^{\chi(k-r) \lfloor \frac{k-r}{2} \rfloor} \phi \right)^2 \right], \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

donde $\square := \partial_\nu \partial^\nu$. Además $\chi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$ es la función indicatriz de los número impares, esto es,

$$\chi(r) := \begin{cases} 1, & r \text{ par} \\ 0, & r \text{ impar} \end{cases}, \tag{5.6}$$

tal que $\partial_\mu^{\chi(2r+1)} = \partial_\mu$ y $\partial_\mu^{\chi(2r)} = 1$. El símbolo $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la función piso¹. El cuadrado debe ser tomado con respecto a la métrica de Minkowski, es decir, $(A_\mu)^2 \equiv A_\mu \eta^{\mu\nu} A_\nu$. Notemos que el segundo término dentro de cada corchete contiene dos derivadas con índices de espacio tiempo abajo, sin embargo debido a los valores de χ , solamente una de estas dos derivadas sobrevive en cada término; entonces, el cuadrado conduce a un escalar de Lorentz. En la Ec. (5.5) tenemos que $\delta\alpha_k \equiv Z\alpha_{B(k)} - 1$, donde α_k y $\alpha_{B(k)}$ son las constantes de acoplamiento renormalizada y desnuda respectivamente, que acompañan a los operadores de dimensión mayor que cuatro. La constante de acoplamiento α_k ya es una constante redefinida que ha absorbido los cocientes R^{-1}/Λ , donde Λ se entiende como la escala de energía donde la nueva física empieza a manifestarse (para más detalles sobre α_k y Λ ver Seccs. (2.2) y (2.3)). La contribución $\mathcal{L}_{c.t.}^{(k)}$ en la Ec. (5.2) contiene interacciones entre el campo estándar y los modos KK las cuales no serán necesarias para que las SVFs sean finitas, en cambio el sector $\mathcal{L}_{c.t.}^{d>4}$ jugará un papel importante al remover los polos que son proporcionales a (p^2/R^{-2}) que emergen en la SVF de cuatro puntos.

En esta construcción, como mencionamos anteriormente, los efectos extradimensionales son debido a la presencia de los modos excitados KK. A causa de los términos en $\sum_{(k)} \mathcal{L}^{(0k)}$, hay contribuciones extra dimensionales a las SGFs o funciones de Green asociadas a la teoría $\lambda\phi^4$. Por ejemplo, a nivel de un lazo, la SVF de dos puntos $\Gamma^{(00)}(p) \equiv \Gamma_{2R}(p)$ se convierte en

$$\Gamma_{2R}(p) = p^2 - m^2 - \left(M^{(0)}(p^2) + \sum_{(k)} M^{(k)}(p^2) + M_{c.t.}(p^2) \right). \tag{5.7}$$

De nueva cuenta, la auto-energía contiene términos que representan a la partícula ligera, $M^{(0)}(p^2)$, y una suma de partículas excitadas, $\sum_{(k)} M^{(k)}(p^2)$, circulando alrededor del lazo, ver Fig. 5.1. El primero de ellos proviene del

¹El símbolo $\lfloor \cdot \rfloor$ se entiende como la función piso que a cada número real asigna el mayor número entero igual o menor que ese número real.

CAPÍTULO 5. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON N DIMENSIONES EXTRA.

5.1. DESCRIPCIÓN RENORMALIZADA PARA LAS FUNCIONES DE VÉRTICE ESTÁNDAR DE DOS Y CUATRO PUNTOS.

término de auto-interacción $\lambda\phi^4$ en $\mathcal{L}^{(0)}$, Ec. (2.29a), mientras que el segundo es consecuencia del primer término en $\mathcal{L}^{(0k)}$, (2.29b). No es difícil ver que las expresiones para dichas contribuciones tienen la misma estructura que en (4.7)

$$M^{(\underline{k})} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_{(\underline{k})}^2}, \quad (5.8)$$

donde \underline{k} representa $\{0, \underline{k}\}$; además, la Ec. (5.7) se puede obtener directamente de la Ec. (4.5) sustituyendo $\sum_{k=1}^{\infty}$ por $\sum_{(\underline{k})}$. El tercer término, $M_{c.t.}(p^2)$, dentro del paréntesis en la Ec. (5.7) es el contratérmino estándar, es decir

$$M_{c.t.}(p^2) = \delta m_n^2 - p^2 \delta_Z. \quad (5.9)$$

y mostraremos que no se necesitan más términos para cancelar las divergencias UV presentes a nivel de un lazo

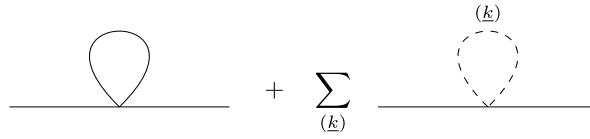


Figura 5.1: Contribuciones a las SVF de dos puntos $\Gamma_2(p)$ para n dimensiones extra sin contratérmino.

en (5.7). En otras palabras, los efectos de dimensiones extra con la geometría ya antes descrita sobre la auto-energía de $\lambda\phi^4$ para un número entero arbitrario n se volverá finita únicamente con contratérminos de dimensión canónica cuatro. De forma similar, la SVF de cuatro puntos $\Gamma_{4R}(p_i)$ a la aproximación de un lazo, se convierte en

$$\Gamma_{4R}(p_i) = -i\lambda + \left(\Gamma_{1\text{-loop}}^{(0)}(p_i) + \sum_{(\underline{k})} \Gamma_{1\text{-loop}}^{(\underline{k})}(p_i) - i\delta\lambda_n \right) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{p^2\}} i\alpha_k \left(\frac{p^2}{R^{-2}} \right)^k + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{p^2\}} i\delta\alpha_k \left(\frac{p^2}{R^{-2}} \right)^k, \quad (5.10)$$

donde $\Gamma_{1\text{-loop}}^{(0)}$ y $\Gamma_{1\text{-loop}}^{(\underline{k})}$ están correlacionadas con las partículas de modo cero y (\underline{k}) circulando dentro del lazo, respectivamente, ver Fig. 5.2, entonces

$$\Gamma_{1\text{-loop}}^{(\underline{k})}(p_i) = \sum_{\{p^2\}} \Delta\Gamma^{(\underline{k})}(p), \quad (5.11)$$

donde

$$\Delta\Gamma^{(\underline{k})}(p) = -\frac{1}{2}\lambda^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i}{l^2 - m_{(\underline{k})}^2} \frac{i}{(p-l)^2 - m_{(\underline{k})}^2}. \quad (5.12)$$

y $\sum_{\{p^2\}}$ representa una suma sobre las variables de Mandelstam. Estas expresiones son las extensiones de (4.9) y (4.10) a n dimensiones extra, respectivamente. Nuevamente, los términos dentro del paréntesis en (5.10) pueden obtenerse de (4.8) vía la sustitución de $\sum_{k=1}^{\infty}$ por $\sum_{(\underline{k})}$. Los últimos dos términos en (5.10) surgen del sector $\mathcal{L}_B^{d>4}$ que contiene a operadores de dimensión mayor que cuatro que producen términos en la forma de potencias de los momentos externos. Ahora es explícito que (5.7) y (5.10) presentarán un número infinito de divergencias debido al

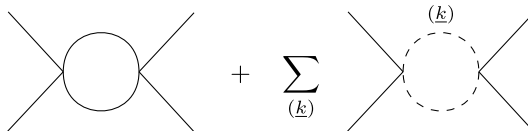


Figura 5.2: Contribuciones a las SVF de cuatro puntos $\Gamma_4(p_i)$ para n dimensiones extra sin el contratérmino.

número infinito de integrales del momento interno. En la siguiente sección usaremos regularización dimensional y extenderemos los resultados presentados en una dimensión extra con la finalidad de controlar estas divergencias, y de esta forma daremos un significado a las contribuciones de n dimensiones extra para la masa y la constante de acoplamiento sin truncar las series que involucran los modos KK. Nuestros resultados debidamente se reducen al caso en ausencia de dimensiones extra.

5.1.1. Regularización de las SVFs de dos y cuatro puntos en presencia de n dimensiones extra.

Extenderemos ahora el procedimiento de regularización introducido para el caso de una dimensión extra a varias dimensiones extra, esta extensión requiere el conocimiento de las funciones zeta inhomogéneas multidimensionales de Epstein y su límite de baja energía (ver subsección (3.3.3)). Las integrales divergentes UV en las Ecs. (5.8) y (5.12) son un caso particular de la Ec. (4.12) para $N = 1$ y $N = 2$, respectivamente. En el procedimiento de regularización dimensional se vuelve natural definir $s := N - D/2$ pues es común encontrar a las funciones de Epstein en la literatura usando la variable s , en lo siguiente los límites $s \rightarrow -1$ y $s \rightarrow 0$ son los límites cuadrimensionales para el espacio tiempo en Γ_{2R} y Γ_{4R} , respectivamente. Más adelante, introduciremos $\epsilon := 4 - D$ lo cual es más común.

Aplicando regularización dimensional a las SVF de dos puntos (5.7), con $s = 1 - D/2$, y demandando el mismo tamaño del radio para cada dimensión extra, $R = R_1 = \dots = R_n$, obtenemos

$$\Gamma_{2R}(p^2; s) = p^2 - m^2 - \frac{\lambda}{32\pi^2} m^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{1+s} \left[\Gamma(s) + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} c^{2s} E_l^{c^2}(s) \Gamma(s) \right] + p^2 \delta_Z - \delta m_n^2, \quad (5.13)$$

donde las Ecs. (3.12) y (3.24) han sido utilizadas. Como pudo haber sido anticipado, el primer término dentro del corchete proviene de $\mathcal{L}^{(0)}$ y su término de auto-interacción ϕ^4 , mientras que el segundo término es la contribución extra dimensional. La suma *finita* de las funciones zeta inhomogéneas multidimensionales de Epstein $E_l^{c^2}(s)$ surgen de las sumas anidadas incluidas en el símbolo $\sum_{\langle \mathbf{k} \rangle}$. De la Ec. (5.13) las divergencias ultravioletas vendrán de $\Gamma(s)$ y el producto de $E_l^{c^2}(s)$ con $\Gamma(s)$ ($l = 1, \dots, n$). Por lo tanto, un punto importante a tratar en la siguiente sección es aislar los polos con la finalidad de designar los contratérminos apropiados para cancelar las divergencias. La independencia en el momento externo p^2 dentro del corchete en la Ec. (5.13) implica que $\delta_Z = 0$ en la Ec. (5.13).

Resultados similares se obtienen después de hacer regularización dimensional para la SVF de cuatro puntos (5.10), con $s = 2 - D/2$, esto es

$$\begin{aligned} \Gamma_{4R}(p_i; s) = & -i\lambda\mu^{2s} + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \mu^{2s} \sum_{\{p^2\}} \int_0^1 dz \left[\Gamma(s) \left(\frac{m^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-s} + \left(\frac{4\pi\mu^2}{R^{-2}} \right)^s \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} E_l^{c(p,z)^2}(s) \Gamma(s) \right] \\ & + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{p^2\}} i\alpha_k \left(\frac{p^2}{R^{-2}} \right)^k - i\delta\lambda_n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{p^2\}} i\delta\alpha_k \left(\frac{p^2}{R^{-2}} \right)^k, \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde $c(p, z)^2 := (m^2 + p^2 z(z-1))/R^{-2}$ ya ha sido expresado anteriormente. El primer término dentro del corchete es, otra vez, la corrección usual a un lazo a la constante de acoplamiento en la teoría $\lambda\phi^4$, y el segundo término proviene de $\sum_{\langle \mathbf{k} \rangle} \Gamma^{(\mathbf{k})}(p_i)$ en (5.10) el cual describe a los modos excitados circulando alrededor del lazo. Las posibles fuentes de divergencias UV en esta expresión vienen de los polos de $\Gamma(s)$ y el producto $E_l^{c^2}(s)\Gamma(s)$.

5.2. Renormalización a un lazo de la SVF de dos puntos en presencia de n dimensiones extra.

En las siguientes secciones extenderemos la propuesta utilizada para una dimensión extra a más de ellas para tratar los efectos a nivel de un lazo para la masa y la constante de acoplamiento [74]. Debido a la presencia de un *número arbitrario* de dimensiones extra, existe cierta complejidad al tratar con los términos divergentes que surgen del modelo en el límite de baja energía. Resulta que las divergencias UV debido a dimensiones extra en Γ_{2R} y Γ_{4R} vienen de los productos $E_l^{c^2}\Gamma$, ($l = 1, \dots, n$) en el correspondiente límite cuadrimensional (ver Ecs. (5.13) y (5.14)). Afortunadamente hay una expresión que relaciona a cada producto $E_l^{c^2}\Gamma$ con una suma finita de productos del tipo $E_1^{c^2}\Gamma$ al precio de trasladar el argumento (ver Ec. (3.76)), posteriormente, la mayor parte del análisis se realiza sobre $E_1^{c^2}\Gamma$ en el caso de $|c| \ll 1$.

CAPÍTULO 5. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON N DIMENSIONES EXTRA.

5.2. RENORMALIZACIÓN A UN LAZO DE LA SVF DE DOS PUNTOS EN PRESENCIA DE N DIMENSIONES EXTRA.

En esta sección diseñaremos un procedimiento análogo a [34] y [35] con objeto de hacer la SVF de dos puntos (5.13) finita para un $n \in \mathbb{N}_0$ arbitrario proponiendo el contratérmino correspondiente δm_n^2 para cancelar los infinitos UV a nivel de un lazo. Para extraer los polos de Γ_{2R} en $s \rightarrow -1$, o equivalentemente cuando $s + 1 \equiv \epsilon/2 = 2 - D/2$ tiende a cero, es conveniente usar la Ec. (3.78), válida para $|c| \ll 1$, tal que podemos intercambiar el problema de encontrar los polos de $E_i^{\epsilon^2} \Gamma$ por la tarea de investigar los polos del producto de la función gamma con la función zeta de Riemann. Por lo tanto, insertando (3.78) dentro de (5.13) obtenemos

$$\Gamma_{2R}(p^2, \epsilon) = p^2 - m^2 - \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{\epsilon/2} \left[\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=1}^n \mathcal{C}_r \pi^{\frac{n-r}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1 + k + \frac{r-n}{2}\right) \right. \\ \left. \times \zeta(2k + \epsilon - 2 + r - n) c^{2k + \epsilon - 2} \right] - \delta m_n^2. \quad (5.15)$$

El primer término dentro del corchete es el típico término divergente presente en ausencia de modos KK y puede tratarse como es usual. Enfocándonos en el segundo término, vemos que contiene polos en diferentes valores de r para algunos términos de k dado un número n de dimensiones extra; estos polos provienen ya sea de la función gamma o la función zeta, de hecho, los polos están determinados por las siguientes ecuaciones (ver los argumentos de Γ y ζ en la Ec. (5.15)):

$$n - r_\Gamma(n, k) - 2k + 2 = 2j, \quad j \in \mathbb{N}_0 \quad (5.16)$$

$$n - r_\zeta(n, k) - 2k + 2 = -1, \quad (5.17)$$

donde, para un k y n fijos, los valores r_Γ y r_ζ son tomados por $r \in \{1, \dots, n\}$ en los cuales las funciones Γ y ζ en (5.15) divergen, respectivamente, cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Las Ecs. (5.16) y (5.17) son las extensiones a las Ecs. (4.19) y (4.20), respectivamente. Notemos que no hay un r para el cual $r_\Gamma = r_\zeta$, en palabras diríamos que, si las funciones Γ y ζ divergen, lo hacen independientemente en (5.15). Directamente de (5.16) y (5.17) encontramos que dado un n hay un k máximo, tal que más allá de ese valor ni la función Γ o la función ζ divergen. Por inspección dicho k máximo sucede cuando $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, por ejemplo, cuando $n = 1$ y $n = 2$ tenemos $k = 1$ y $k = 2$, como k máximos respectivamente.

Si deseamos extraer las divergencias UV ($\epsilon \rightarrow 0$) para cada valor de k , desde 0 a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ vale la pena reescribir a la Ec. (5.15) de la siguiente manera [34, 35, 74]

$$\Gamma_{2R}(p^2, \epsilon) = p^2 - m^2 - \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{\epsilon/2} \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) + g_0 \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) \zeta(\epsilon - 2) c^{\epsilon - 2} + H_0(n) \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} h_k(n) \Gamma\left(\frac{1 + \epsilon}{2}\right) \zeta(1 + \epsilon) + g_k(n) \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \zeta(\epsilon) + H_k(n) \right] c^{2k + \epsilon - 2} + H(n, c^2) \right\} - \delta m_n^2. \quad (5.18)$$

donde

$$g_0 = \frac{1}{2^{n-1}} \mathcal{C}_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right), \quad (5.19)$$

$$H_0(n) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} \mathcal{C}_r \pi^{\frac{n-r}{2}} \Gamma\left(\frac{n-r}{2} - 1\right) \zeta(r - n - 2) c^{-2}, \quad (5.20)$$

$$H_k(n) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq n-2k+3 \\ r \neq n-2k+2}}^{n-1} \mathcal{C}_r \pi^{\frac{n-r}{2}} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(k + \frac{n-r}{2} - 1\right) \zeta(2k + r - n - 2), \quad (5.21)$$

$$H(n, c^2) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=1}^n \mathcal{C}_r \pi^{\frac{n-r}{2}} \sum_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma\left(k + \frac{n-r}{2} - 1\right) \zeta(2k + r - n - 2) c^{2k-2}. \quad (5.22)$$

CAPÍTULO 5. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON N DIMENSIONES EXTRA.

5.3. RENORMALIZACIÓN A UN LAZO DE LA SVF DE CUATRO PUNTOS EN PRESENCIA DE N DIMENSIONES EXTRA.

Los coeficientes $f_k(n)$ y $g_k(n)$ quedan determinados por las siguientes expresiones:

$$h_k(n) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=1}^{n-2k+3} \binom{n}{l-1} \frac{(-1)^k}{k!} \pi^{k-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(-1)^k}{k!} \pi^{k-1} \mathcal{C}_{n-2k+3}, \quad (5.23)$$

$$g_k(n) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=1}^{n-2k+2} \binom{n}{l-1} \frac{(-1)^k}{k!} \pi^{k-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(-1)^k}{k!} \pi^{k-1} \mathcal{C}_{n-2k+2}. \quad (5.24)$$

El segundo término dentro de la llave en la Ec. (5.18) parece diverger debido al comportamiento de la función gamma cuando $\epsilon \rightarrow 0$, sin embargo, la función ζ impide tal divergencia. Note que al tomar el límite apropiadamente para este producto nos deja el siguiente resultado

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_0 \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) \zeta(\epsilon - 1) c^{\epsilon-2} = g_0 \frac{\zeta(3)}{2\pi^2 c^2}. \quad (5.25)$$

Por otro lado, el cuarto término dentro de la llave en la Ec. (5.18) contiene las posibles fuentes de divergencias para algún k , dado un número n de dimensiones extra fijo. Haciendo uso de las siguientes expresiones asintóticas cuando $\epsilon \sim 0$

$$\left(\frac{4\pi\mu^2 c^2}{m^2}\right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \zeta(\epsilon) \sim \left(\frac{2\zeta(0)}{\epsilon} + (\text{finite}) + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \quad (5.26)$$

$$\left(\frac{4\pi\mu^2 c^2}{m^2}\right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon+1}{2}\right) \zeta(\epsilon+1) \sim \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\epsilon} + (\text{finite}) + \mathcal{O}(\epsilon)\right), \quad (5.27)$$

sobre la Ec. (5.18) y sabiendo que $\zeta(0) = -1/2$, el contratérmino δm_n^2 al reunir todos los polos de la forma $1/\epsilon$ junto a la divergencia UV típica (la que viene del primer término dentro de la llave en la Ec. (5.18)) toma la siguiente estructura:

$$\delta m_n^2 := \frac{\lambda m^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \frac{\zeta(0)}{2^{n-1}} \left(\frac{\lambda m^2}{16\pi^2}\right) \left[2^n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{2k-2} c^{2k-2} \pi^{k-1}\right] \left(\frac{1}{\epsilon}\right), \quad (5.28)$$

$$= \frac{\lambda m^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) + \frac{\zeta(0)}{2^{n-1}} \left(\frac{\lambda m^2}{16\pi^2}\right) \left[2^n - 1 + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{n!}{(n-2k+2)!(2k-2)!} c^{2k-2} \pi^{k-1}\right] \left(\frac{1}{\epsilon}\right). \quad (5.29)$$

Notemos que esta expresión es válida para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}_0$, la cual se reduce al contratérmino bien conocido cuando no hay dimensiones extra ($n = 0$) y a la Ec. (4.24) en el caso de $n = 1$. Es importante enfatizar que para obtener una SVF de dos puntos a nivel de un lazo libre de divergencias UV, en el caso de n dimensiones extra, no es necesario introducir operadores de mayor dimensión como contratérminos al nivel de la Lagrangiana. El subíndice n del lado derecho de (5.28) hace referencia al caso n -dimensional. Notemos que después de insertar (5.28) dentro de la expresión (5.15), la SVF de dos puntos Γ_{2R} todavía contiene la serie con infinitos términos más allá del k máximo; sin embargo conforme $\epsilon \rightarrow 0$, para $|c| \ll 1$, dicha serie converge.

Como en el caso de una dimensión extra, el teorema del desacoplo no es manifiesto en este esquema independiente de masa. Observemos que en $k = 0$ y $k = 1$ tenemos aún, dentro de las partes ‘finitas’ de (5.25), (5.26) y (5.27), términos que estropean el teorema del desacoplo, los cuales son de la forma $1/c^2$ o $\log(2\pi c)$. La imposición del teorema del desacoplo en este esquema demandaría la inserción a mano de tales términos en δm_n^2 .

5.3. Renormalización a un lazo de la SVF de cuatro puntos en presencia de n dimensiones extra.

Nos enfocaremos en estudiar a la SVF de 4-puntos (5.14) la cual diverge conforme $s \rightarrow 0$. Con la intención de trabajar en la forma usual $\epsilon = 4 - D$, definimos $s \equiv \epsilon/2$. El primer término entre corchetes es el responsable

de la divergencia UV habitual y el segundo contiene las contribuciones de campos excitados alrededor del lazo, por lo tanto, está relacionado con la presencia de dimensiones espaciales extra. Usando (3.78) uno puede escribir el segundo término convenientemente como una expansión en serie de potencias en $c^2(p, z)$; después de hacer un poco de álgebra, la expresión (5.14) puede reformularse como:

$$\begin{aligned} \Gamma_{4R}(p_i; \epsilon) = & -i\lambda\mu^\epsilon + \frac{i\lambda^2\mu^\epsilon}{32\pi^2} \sum_{\{p^2\}} \left[\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dz \left(\frac{m^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2}\right)^{-\epsilon/2} \right. \\ & + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=1}^n \mathcal{C}_r \pi^{\frac{n-r}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} + k + \frac{r-n}{2}\right) \zeta(\epsilon + 2k + r - n) F_k(p^2) c^{\epsilon+2k} \left. \right] \\ & + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{p^2\}} i\alpha_k \left(\frac{p^2}{R^{-2}}\right)^k - i\delta\lambda_n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{p^2\}} i\delta\alpha_k \left(\frac{p^2}{R^{-2}}\right)^k, \end{aligned} \quad (5.30)$$

donde las funciones $F_k(p^2)$ son definidas de la siguiente manera

$$F_k(p^2) := \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{(-1)^l (l!)^2}{(2l+1)!} \left(\frac{p^2}{m^2}\right)^l. \quad (5.31)$$

Además de la divergencia UV habitual encontrada en el primer término dentro de los corchetes en la Ec. (5.30), existen divergencias en algunos términos de la serie del segundo término. Nos centraremos ahora en el segundo término, ya que el primero es tratado en la literatura estándar. Tal término exhibe polos en diferentes valores de r , para algunos k y dado un número fijo n de dimensiones extra; como en el tratamiento de las correcciones a la masa, estos polos están en las funciones gamma o zeta, y en el presente caso están determinados por las relaciones

$$n - r_\Gamma(n, k) - 2k = 2j, \quad j \in \mathbb{N}_0 \quad (5.32)$$

$$n - r_\zeta(n, k) - 2k = -1 \quad (5.33)$$

que como antes r_Γ y r_ζ son valores de $r \in \{1, \dots, n\}$ en las cuales las funciones Γ y ζ divergen, respectivamente, conforme $\epsilon \rightarrow 0$. Estas condiciones son la extensión de las Ecs. (4.28) y (4.29) a más dimensiones extra. Es fácil ver que no hay r para el cual r_Γ y r_ζ coincidan, es decir, nuevamente, las funciones gamma y zeta divergen de forma independiente en (5.30). Como en el análisis de la función de 2-puntos, dado un número fijo n de dimensiones extra, existe el valor k máximo, que más allá del cual ni Γ incluso ζ divergen, esto es $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; por ejemplo, para $n = 1$ y $n = 2$, $k = 0$ y $k = 1$, serían los k máximos respectivamente.

Analicemos las divergencias UV ($\epsilon \rightarrow 0$) en cada valor de k desde 0 a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Similarmente como fue hecho para la SVF de dos puntos, expresemos a la Ec. (5.30) de la siguiente manera [34, 35, 74]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{4R}(p_i; \epsilon) = & -i\lambda\mu^\epsilon + \frac{i\lambda^2\mu^\epsilon}{32\pi^2} \sum_{\{p^2\}} \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dz \left(\frac{m^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2}\right)^{-\epsilon/2} + \tilde{g}_0 \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \zeta(\epsilon) + \tilde{H}_0(n) \right. \\ & + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \tilde{h}_k(n) \Gamma\left(\frac{1+\epsilon}{2}\right) \zeta(1+\epsilon) + \tilde{g}_k(n) \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \zeta(\epsilon) + \tilde{H}_k(n) \right] F_k(p^2) c^{2k+\epsilon} \left. \right\} \\ & + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{p^2\}} i\alpha_k \left(\frac{p^2}{R^{-2}}\right)^k - i\delta\lambda_n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{p^2\}} i\delta\alpha_k \left(\frac{p^2}{R^{-2}}\right)^k, \end{aligned} \quad (5.34)$$

CAPÍTULO 5. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON N DIMENSIONES EXTRA.

5.3. RENORMALIZACIÓN A UN LAZO DE LA SVF DE CUATRO PUNTOS EN PRESENCIA DE N DIMENSIONES EXTRA.

donde

$$\tilde{g}_0(n) = \frac{1}{2^{n-1}} \mathcal{C}_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right), \quad (5.35)$$

$$\tilde{H}_0(n) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} \mathcal{C}_r \pi^{\frac{n-r}{2}} \Gamma \left(\frac{r-n}{2} \right) \zeta(r-n), \quad (5.36)$$

$$\tilde{H}_k(n) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq n-2k+1 \\ r \neq n-2k}}^n \mathcal{C}_r \pi^{\frac{n-r}{2}} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma \left(k + \frac{r-n}{2} \right) \zeta(2k+r-n), \quad (5.37)$$

$$\tilde{H}(n, c^2) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=1}^n \mathcal{C}_r \pi^{\frac{n-r}{2}} \sum_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma \left(\frac{2k+r-n}{2} \right) \zeta(2k+r-n) F_k(p^2) c^{2k}, \quad (5.38)$$

mientras que los coeficientes $\tilde{h}_k(n)$ y $\tilde{g}_k(n)$ pueden determinarse mediante las siguientes relaciones:

$$\tilde{h}_k(n) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=1}^{n-2k+1} \binom{n}{l-1} \frac{(-1)^k}{k!} \pi^k = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(-1)^k}{k!} \pi^k \mathcal{C}_{n-2k+1}, \quad (5.39)$$

$$\tilde{g}_k(n) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=1}^{n-2k} \binom{n}{l-1} \frac{(-1)^k}{k!} \pi^k = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{(-1)^k}{k!} \pi^k \mathcal{C}_{n-2k}. \quad (5.40)$$

Entonces, la función SVF de cuatro puntos renormalizada puede ser escrita de la siguiente manera [34, 35, 74]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{4R}(p_i; \epsilon) = & -i\lambda\mu^\epsilon + \frac{i\lambda^2\mu^\epsilon}{32\pi^2} \sum_{\{p^2\}} \left\{ \Gamma \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \int_0^1 dz \left(\frac{m^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} + \tilde{g}_0 \Gamma \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \zeta(\epsilon) + \tilde{H}_0(n) \right. \\ & + \left. \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \tilde{h}_k(n) \Gamma \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) \zeta(1+\epsilon) + \tilde{g}_k(n) \Gamma \left(\frac{\epsilon}{2} \right) \zeta(\epsilon) + \tilde{H}_k(n) \right] F_k(p^2) c^{2k+\epsilon} \right\} \\ & + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i\alpha_k \left(\frac{\hat{s}^k + \hat{t}^k + \hat{u}^k}{(R^{-2})^k} \right) - i\delta\lambda_n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i\delta\alpha_k \left(\frac{\hat{s}^k + \hat{t}^k + \hat{u}^k}{(R^{-2})^k} \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Es interesante que uno solamente necesita las fórmulas asintóticas (5.26) y (5.27) para escribir las expresiones asintóticas de los términos divergentes y así extraer las divergencias UV. Siguiendo el espíritu del esquema-(MS) establecemos los contratérminos adecuados que cancelarán a los polos que se originen en la Ec. (5.41). Entonces, sumando todas las divergencias UV para un n fijo, las estructuras que representan a los contratérminos son:

$$i\delta\lambda_n := \frac{3i\lambda^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) - i\delta\alpha_0, \quad (5.42)$$

el primer término en la Ec. (5.42) es precisamente la divergencia UV en ausencia de dimensiones extra, el segundo término es una contribución independiente del momento de las dimensiones extra. Observemos que en este caso uno necesita apelar a los términos contenidos en $\mathcal{L}_{c.t.}^{d>4}$ para establecer a $i\delta\alpha_k$ que son los coeficientes de un polinomio en las $\{\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}\}$. Finalmente, las constantes numéricas $\delta\alpha_0$ y $\delta\alpha_k$, están dadas por

$$\delta\alpha_0 := -\frac{\zeta(0)}{2^{n-1}} \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left[2^n - 1 - \sum_{j=1}^{k_{\max}} \frac{(-)^j}{j!} \binom{n}{n-2j} c^{2j} \pi^j \right] \left(\frac{1}{\epsilon} \right), \quad (5.43)$$

$$\delta\alpha_k := -\frac{c^{-2k}}{2^n} \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \frac{(-)^k (k!)^2}{(2k+1)!} \sum_{j=k}^{k_{\max}} \frac{(-)^j}{j!} \binom{n}{n-2j} c^{2j} \pi^j \left(\frac{1}{\epsilon} \right). \quad (5.44)$$

CAPÍTULO 5. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON N DIMENSIONES EXTRA.

5.3. RENORMALIZACIÓN A UN LAZO DE LA SVF DE CUATRO PUNTOS EN PRESENCIA DE N DIMENSIONES EXTRA.

El contratérmino (5.42) debidamente se reduce al típico contratérmino en la teoría auto-interactuante $\lambda\phi^4$ cuando $n = 0$, ya que el k máximo es cero y únicamente el primer término en la Ec. (5.42) sobrevive. Similarmente, de esta misma Ec. (5.42) para $n = 1$ recuperamos la Ec. (4.31). Como se hizo anteriormente, después de establecer los contratérminos dentro de la Ec. (5.30) y tomar el límite cuando ϵ es muy pequeño, nos queda dentro de $\Gamma_{4R}(p_i)$ una serie con términos más allá del k máximo, no obstante, en $\epsilon \rightarrow 0$ se convierte en una serie convergente en el régimen $|c| \ll 1$.

Como consecuencia del análisis anterior, haremos un resumen de los contratérminos que aparecen a nivel de la Lagrangiana (5.2), primeramente tenemos a

$$-\frac{\delta\lambda_n}{4!}\phi^4 \in \mathcal{L}_{c,t}^{(0)} \quad (5.45)$$

para cancelar la divergencia UV típica y la contribución independiente del momento de las dimensiones extra. De hecho, en presencia de una sola dimensión extra, no más contratérminos son requeridos. Sin embargo, con la finalidad de cancelar a los términos divergentes proporcionales a la función polinómica en p^2/R^{-2} presente en los casos $n > 1$, uno requiere contratérminos con derivadas de orden mayor; no es difícil ver que pueden ser obtenidos del siguiente término el cual ya existe en $\mathcal{L}_{c,t}^{d>4}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_{\max}} R^{2k} \delta\alpha_k \left[\left(\sum_{\substack{r=0, \\ (k \text{ par})}}^{k-1} \binom{k-1}{r} \partial_\mu^{\chi(r) \square \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \phi \cdot \partial_\mu^{\chi(k-r) \square \lfloor \frac{k-r}{2} \rfloor} \phi \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\sum_{\substack{r=0, \\ (k \text{ impar})}}^{k-1} \binom{k-1}{r} \partial_\mu^{\chi(r) \square \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \phi \cdot \partial_\mu^{\chi(k-r) \square \lfloor \frac{k-r}{2} \rfloor} \phi \right)^2 \right]. \quad (5.46) \end{aligned}$$

Además, uno puede verificar que todos los nuevos operadores en (5.46) desaparecen cuando las masas de los campos pesados, $m_{(k)}^2$, se hacen infinitamente grandes, esto es cuando $R \rightarrow 0$ o equivalentemente cuando $c^2 \rightarrow 0$. Por lo tanto, el teorema de desacoplo se satisface [33] para dicha expresión (5.46). Sin embargo a nivel de la SVF de cuatro puntos no es manifiesto en lo absoluto, de hecho en $k = 0$ en (5.30), dentro de la parte ‘finita’ de las fórmulas asintóticas, hay un término proporcional a $\log(2\pi c)$ lo cual estropea el teorema de desacoplo. Esto será recuperado en un esquema dependiente de masa como veremos en la siguiente sección.

Para el caso n -dimensional, tenemos distintas funciones β : Una relacionada con la constante de acoplamiento λ , y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ de ellas relacionadas a los acoplamientos α_k contenidos en $\mathcal{L}_{d>4}$ [34]. Por simplicidad, analizaremos solamente a la función β la cual corresponde a la constante acoplamiento λ , usando la definición en la Ec. (4.32)

$$\begin{aligned} \beta(\lambda) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \\ &= \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} - \frac{1}{2^n} \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left[2^n - 1 - \sum_{j=1}^{k_{\max}} \frac{(-)^j}{j!} \binom{n}{n-2j} c^{2j} \pi^j \right]. \quad (5.47) \end{aligned}$$

Cuando $n = 0$, el valor para la función beta β se reduce al valor en ausencia de dimensiones extra. Sin embargo en el límite $R^{-1} \rightarrow \infty$ o $c \rightarrow 0$, la función beta se convierte en:

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left[1 - \frac{1}{2^n} \right]. \quad (5.48)$$

Hemos dicho que cuando $n = 0$, recuperamos la función beta usual en la teoría $\lambda\phi^4$, pero el teorema de desacoplo en el sentido del límite de masa KK muy grande no es manifiesto. Lo anterior, como se mencionó previamente, no es ninguna sorpresa ya que la reducción del esquema-(MS) es independiente de la escala. La dependencia en la escala puede ser restaurada en un esquema de substracción dependiente de la masa.

5.4. Desacoplo de la contribución KK en presencia de n dimensiones extra.

Una vez más, ya que el teorema de desacoplo no es explícito en el esquema-(MS), elijeremos un esquema de substracción dependiente de masa bajo la condición cinemática $p^2 = -M^2$ [34, 40, 74]. El análisis de la auto-energía en presencia de n dimensiones extra no presenta una diferencia considerable comparado con el caso para una sola dimensión extra, como sabemos la auto-energía en cualquier caso es independiente del momento y la restricción de auto-energía nula en la condición cinemática (comparar con (4.34)) conduce al resultado de que la masa renormalizada no es impactada por dimensiones extra a nivel de un lazo. En contraste con el análisis de la SVF de cuatro puntos en el esquema de substracción dependiente de masa, el cual es más rico que su contraparte en cinco dimensiones. Empezamos reemplazando $s = \epsilon/2$ dentro (5.14) y usando la forma explícita de cada función zeta inhomogénea de Epstein,

$$\begin{aligned} \Gamma_{4R(4+n)D}(p_i, \epsilon) = & -i\lambda\mu^\epsilon + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\mu^\epsilon \sum_{\{p^2\}} \int_0^1 dz \left[\left(\frac{m^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) \right. \\ & \left. + \sum_{(\underline{k})} \left(\frac{m_{(\underline{k})}^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2) \right] + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{p^2\}} i\alpha_k \left(\frac{p^2}{R^{-2}} \right)^k \\ & - i\delta\lambda_n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{p^2\}} i\delta\alpha_k \left(\frac{p^2}{R^{-2}} \right)^k, \end{aligned} \quad (5.49)$$

para determinar los contratérminos, imponemos las siguientes condiciones de renormalización [34]:

$$\Gamma_{4R(4+n)D}(p^2 = -M^2, \epsilon) = -i\lambda\mu^\epsilon, \quad (5.50)$$

$$\frac{d}{dp^2} \Gamma_{4R(4+n)D}(p^2 = -M^2, \epsilon) = 0, \quad (5.51)$$

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2} \Gamma_{4R(4+n)D}(p^2 = -M^2, \epsilon) = 0, \quad (5.52)$$

⋮

$$\frac{d^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{d(p^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \Gamma_{4R(4+n)D}(p^2 = -M^2, \epsilon) = 0. \quad (5.53)$$

usando la primera condición (5.50), escribimos entonces que

$$\begin{aligned} -i\delta\lambda_n = & -\frac{3i\lambda^2}{32\pi^2}\mu^\epsilon \int_0^1 dz \left[\left(\frac{m^2 - M^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} + \sum_{(\underline{k})} \left(\frac{m_{(\underline{k})}^2 - M^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} \right] \Gamma(\epsilon/2) \\ & - 3 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i\alpha_k \left(\frac{-M^2}{R^{-2}} \right)^k - 3 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i\delta\alpha_k \left(\frac{-M^2}{R^{-2}} \right)^k, \end{aligned} \quad (5.54)$$

la expresión asintótica para la Ec. (5.54) cuando $\epsilon \rightarrow 0$ es escrita como

$$\begin{aligned} -i\delta\lambda_n \sim & -\frac{3i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dz \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) - \log \left(\frac{m^2 - z(z-1)M^2}{\mu^2} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{(\underline{k})} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) - \log \left(\frac{m_{(\underline{k})}^2 - z(z-1)M^2}{\mu^2} \right) \right] \right\} \\ & - 3 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i\alpha_k \left(\frac{-M^2}{R^{-2}} \right)^k - 3 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i\delta\alpha_k \left(\frac{-M^2}{R^{-2}} \right)^k, \end{aligned} \quad (5.55)$$

CAPÍTULO 5. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON N DIMENSIONES EXTRA.
5.4. DESACOPLO DE LA CONTRIBUCIÓN KK EN PRESENCIA DE N DIMENSIONES EXTRA.

de este modo, insertando (5.55) de nuevo en (5.49), obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{4R(4+n)D}(p_i) = & -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dz \sum_{\{p^2\}} \left[\log \left(\frac{m^2 + z(z-1)p^2}{m^2 - z(z-1)M^2} \right) + \sum_{\langle k \rangle} \log \left(\frac{m_{\langle k \rangle}^2 + z(z-1)p^2}{m_{\langle k \rangle}^2 - z(z-1)M^2} \right) \right] \\ & + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{p^2\}} i\alpha_k \left(\frac{p^2}{R-2} \right)^k - 3 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i\alpha_k \left(\frac{-M^2}{R-2} \right)^k + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{p^2\}} i\delta\alpha_k \left(\frac{p^2}{R-2} \right)^k - 3 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i\delta\alpha_k \left(\frac{-M^2}{R-2} \right)^k. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Las $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ condiciones más que tenemos, nos permitirán determinar a los contratérminos $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \dots, \delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Empezaremos de la última condición en (5.53) y de esta manera determinaremos a $\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, ya que la $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -ésima derivada agotará al polinomio $\delta\alpha_1 \left(\frac{p^2}{R-2} \right) + \delta\alpha_2 \left(\frac{p^2}{R-2} \right)^2 + \dots + \delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{p^2}{R-2} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ dejando solamente a una constante que multiplica $\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Aplicando la condición (5.53) en la Ec. (5.49) determinamos que el contratérmino $\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ es:

$$\begin{aligned} i\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!}{(R-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = & - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dz \left[\left(\frac{z(z-1)}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{z(z-1)}{m_{\langle k \rangle}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right] \\ & \times (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \right)! - i\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!}{(R-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Donde hemos usado la fórmula siguiente al hacer $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{d(p^2)^r} \left(\frac{m^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = & (-1)^r \left(\frac{m^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2-r} \left(\frac{z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^r \prod_{i=1}^{r-1} \left(\frac{\epsilon}{2} + i \right) \\ & \times \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

que al tomar el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se convierte en

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d^r}{d(p^2)^r} \left(\frac{m^2 + p^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = (-1)^r \left(\frac{z(z-1)}{m^2 + p^2 z(z-1)} \right)^r (r-1)! \quad (5.59)$$

mientras que la otra fórmula útil en nuestro desarrollo será

$$\frac{d^r}{d(p^2)^r} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i\delta\alpha_k \left(\frac{p^2}{R-2} \right)^k = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i\delta\alpha_k \frac{k!}{(k-r)!} \left(\frac{p^2}{R-2} \right)^{k-r}. \quad (5.60)$$

Notemos que si $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ entonces necesariamente los términos que sobrevivirán deben cumplir con que $k - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq 0$, por lo tanto concluimos que $k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, es por ello que en la Ec. (5.57) tenemos un solo término cuando $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. La situación se vuelve algo más sutil cuando se quiere determinar al contratérmino $\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$, en este caso debemos usar las fórmulas (5.58) y (5.60) para $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, esta vez tendremos que $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ lo cual conduce al resultado:

$$\begin{aligned} i \frac{\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}}{(0)!} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}{(R-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}} + i \frac{\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(1)!} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!}{(R-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} (-M^2) = & - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dz \left[\left(\frac{z(z-1)}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} + \right. \\ & \left. \sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{z(z-1)}{m_{\langle k \rangle}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \right] (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \right)! - i \frac{\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}}{(0)!} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}{(R-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}} - i \frac{\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(1)!} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!}{(R-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} (-M^2) \end{aligned} \quad (5.61)$$

CAPÍTULO 5. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON N DIMENSIONES EXTRA.

5.4. DESACOPLO DE LA CONTRIBUCIÓN KK EN PRESENCIA DE N DIMENSIONES EXTRA.

el segundo término del lado derecho en la Ec. (5.61) es el contratérmino definido en la Ec. (5.57), después de sustituir este resultado y hacer las cancelaciones pertinentes encontramos que $\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$ es

$$\begin{aligned} i\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}{(R-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}} &= -\frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dz \left[\left(\frac{z(z-1)}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} + \sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{z(z-1)}{m_{\langle k \rangle}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \right] \\ &\times (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2)!}{(0)!} + \frac{i\lambda}{32\pi^2} \int_0^1 dz \left[\left(\frac{z(z-1)}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{z(z-1)}{m_{\langle k \rangle}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right] \\ &\times (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}{(1)!} (-M^2) - i\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}{(R-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Uno podría continuar realizando de manera iterada este procedimiento y encontrar que:

$$\begin{aligned} i\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2)!}{(R-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}} &= -\frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dz \left[\left(\frac{z(z-1)}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} + \sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{z(z-1)}{m_{\langle k \rangle}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} \right] \\ &\times (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3)!}{(0)!} + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dz \left[\left(\frac{z(z-1)}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} + \sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{z(z-1)}{m_{\langle k \rangle}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \right] \\ &\times (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2)!}{(1)!} (-M^2) - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dz \left[\left(\frac{z(z-1)}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{z(z-1)}{m_{\langle k \rangle}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right] \\ &\times (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}{(2)!} (-M^2)^2 - i\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2)!}{(R-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

de tal forma que el contratérmino $\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l}$ con $l \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} i\delta\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l)!}{(R-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l}} &= -\frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \sum_{j=0}^l \int_0^1 dz \left[\left(\frac{z(z-1)}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l + j} + \right. \\ &\left. \sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{z(z-1)}{m_{\langle k \rangle}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l + j} \right] (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l + j - 1)!}{(j)!} (-M^2)^j - i\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l} \frac{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l)!}{(R-2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l}}, \end{aligned} \quad (5.64)$$

si hacemos el cambio del índice $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l \rightarrow k$, la Ec. (5.64) se convierte en

$$\begin{aligned} i\delta\alpha_k \frac{(k)!}{(R-2)^k} &= -\frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k} (-1)^k \int_0^1 dz \left[\left(\frac{z(z-1)}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{k+j} + \sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{z(z-1)}{m_{\langle k \rangle}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{k+j} \right] \\ &\times \frac{(k+j-1)!}{(j)!} (-M^2)^j - i\alpha_k \frac{(k)!}{(R-2)^k}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Al sustituir la Ec. (5.65) en (5.54), obtenemos una expresión para el contratérmino $\delta\lambda_n$ que tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \delta\lambda_n &= \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \mu^\epsilon \int_0^1 dz \left[\left(\frac{m^2 - M^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} + \sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{m_{\langle k \rangle}^2 - M^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} \right] \Gamma(\epsilon/2) \\ &- \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k} (-1)^k \int_0^1 dz \left[\left(\frac{z(1-z)M^2}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{k+j} + \sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{z(1-z)M^2}{m_{\langle k \rangle}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{k+j} \right] \frac{(k+j-1)!}{(k)!(j)!}, \end{aligned} \quad (5.66)$$

que al hacer uso del contratérmino obtenido en (5.66), permite conocer explícitamente la forma de la SVF de cuatro puntos, la cual escribimos como

$$\begin{aligned} \Gamma_{4R(4+n)D}(p_i) = & -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dz \sum_{\{p^2\}} \left[\log \left(\frac{m^2 + z(z-1)p^2}{m^2 - z(z-1)M^2} \right) + \sum_{\langle k \rangle} \log \left(\frac{m_{\langle k \rangle}^2 + z(z-1)p^2}{m_{\langle k \rangle}^2 - z(z-1)M^2} \right) \right] \\ & + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k} (-1)^k \int_0^1 dz \left[\left(\frac{z(1-z)M^2}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{k+j} + \sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{z(1-z)M^2}{m_{\langle k \rangle}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{k+j} \right] \\ & \times \frac{(k+j-1)!}{(k)!(j)!} \left(3 - \sum_{\{p^2\}} \left(\frac{p^2}{-M^2} \right)^k \right). \end{aligned} \quad (5.67)$$

En este nuevo esquema el teorema de desacoplo es explícito, pues de la Ec. (5.56) podemos observar que si hacemos $m_{\langle k \rangle}^2 \gg M$ implica a su vez que $R^{-1} \gg M$, dejando únicamente a los términos asociados al campo ligero de la teoría auto-interactuante $\lambda\phi^4$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{4D}(p_i) = & -i\lambda - \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dz \sum_{\{p^2\}} \log \left(\frac{m^2 + z(z-1)p^2}{m^2 - z(z-1)M^2} \right) \\ & + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k} (-1)^k \int_0^1 dz \left(\frac{z(1-z)M^2}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{k+j} \frac{(k+j-1)!}{(k)!(j)!} \left(3 - \sum_{\{p^2\}} \left(\frac{p^2}{-M^2} \right)^k \right). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Notemos que la contribución KK se ha desacoplado de la SVF de cuatro puntos, dejando como primer término a la parte estándar de la teoría $\lambda\phi^4$, en cambio, existe un segundo término que aparece al satisfacer las condiciones (5.50) - (5.53). Este último término desaparece al hacer $n = 1$ donde dichas condiciones no son requeridas.

Adicionalmente, la función beta β asociada al contratérmino $\delta\lambda_n$ puede ser calculada en este esquema dependiente de masa usando la definición en la Ec. (4.42) dejando el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \beta_{(4+n)D}(\lambda) = & -M \frac{\partial \delta\lambda_n}{\partial M} \\ = & \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz \left[\frac{z(1-z)M^2}{m^2 - z(z-1)M^2} + \sum_{\langle k \rangle} \frac{z(1-z)M^2}{m_{\langle k \rangle}^2 - z(z-1)M^2} \right] \\ & - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k} (-1)^k \int_0^1 \left[\left(\frac{z(z-1)M^2}{m^2 - z(z-1)M^2} \right)^{k+j} \frac{m^2}{m^2 - z(z-1)M^2} \right. \\ & \left. + \sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{z(z-1)M^2}{m_{\langle k \rangle}^2 - z(z-1)M^2} \right)^{k+j} \frac{m_{\langle k \rangle}^2}{m_{\langle k \rangle}^2 - z(z-1)M^2} \right] \frac{(k+j)!}{(k)!(j)!}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

cuando $m \ll M$, la función β toma la forma,

$$\begin{aligned} \beta_{(4+n)D}(\lambda) = & \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left[1 + \int_0^1 dz \sum_{\langle k \rangle} \frac{z(1-z)M^2}{m_{\langle k \rangle}^2 - z(z-1)M^2} \right] \\ & - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k} (-1)^k \int_0^1 dz \left[\sum_{\langle k \rangle} \left(\frac{z(z-1)M^2}{m_{\langle k \rangle}^2 - z(z-1)M^2} \right)^{k+j} \frac{m_{\langle k \rangle}^2}{m_{\langle k \rangle}^2 - z(z-1)M^2} \right] \frac{(k+j)!}{(k)!(j)!}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

en cambio si hacemos $m \ll M \ll m_{\langle k \rangle}$ en la Ec. (5.71), recuperamos el conocido valor para la teoría escalar

CAPÍTULO 5. ESTRUCTURA A ORDEN DE UN LAZO DE LA TEORÍA $\lambda\phi^4$ CON N DIMENSIONES EXTRA.

5.4. DESACOPLO DE LA CONTRIBUCIÓN KK EN PRESENCIA DE N DIMENSIONES EXTRA.

auto-interactuante $\lambda\phi^4$, ya que toda contribución KK se desacopla, quedando únicamente el valor de

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}. \quad (5.72)$$

Si hacemos $M \gg m$ y $M \gg m_{(k)}$ en la Ec. (5.69) nos conduce al siguiente resultado,

$$\beta_{(4+n)D}(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left[1 + \int_0^1 dz \sum_{(k)} 1 \right] \quad (5.73)$$

$$= \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left[1 + \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_l=1}^{\infty} 1 \right] = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \left[1 - \frac{1}{2^n} \right]. \quad (5.74)$$

que es efectivamente el valor que obtuvimos para la función beta en el esquema-(MS) dado por la Ec. (5.48). Nuevamente implicaciones similares a estos resultados pueden verse en [34] pero en el contexto de QED.

Al analizar el contratérmino en la Ec. (5.66), después de hacer correr las sumas involucradas, se obtiene una serie que tiene por estructura:

$$\begin{aligned} \delta\lambda_n = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \mu^\epsilon \int_0^1 dz \left\{ \left[\left(\frac{m^2 - M^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} + \sum_{(k)} \left(\frac{m_{(k)}^2 - M^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} \right] \Gamma(\epsilon/2) \right. \\ - \left[\left(\frac{z(1-z)M^2}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right) + \sum_{(k)} \left(\frac{z(1-z)M^2}{m_{(k)}^2 - M^2 z(z-1)} \right) \right] \\ + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{z(1-z)M^2}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^2 + \sum_{(k)} \left(\frac{z(1-z)M^2}{m_{(k)}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^2 \right] \\ - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{z(1-z)M^2}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^3 + \sum_{(k)} \left(\frac{z(1-z)M^2}{m_{(k)}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^3 \right] + \cdots \\ \left. + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[\left(\frac{z(1-z)M^2}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \sum_{(k)} \left(\frac{z(1-z)M^2}{m_{(k)}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right] \right\}. \quad (5.75) \end{aligned}$$

Si directamente calculamos la función beta mediante la definición $\beta_{(4+n)D}(\lambda) = -M \frac{\partial \delta\lambda_n}{\partial M}$, al aplicar la derivada sobre cada término en la suma y reducir términos obtenemos que

$$\begin{aligned} \beta_{(4+n)D}(\lambda) &= -M \frac{\partial \delta\lambda_n}{\partial M} \\ &= \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz \left[\left(\frac{z(z-1)M^2}{m^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} + \sum_{(k)} \left(\frac{z(z-1)M^2}{m_{(k)}^2 - M^2 z(z-1)} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \right]. \quad (5.76) \end{aligned}$$

El resultado en (5.76) revela una característica interesante del modelo en estudio, pues nos dice que la intensidad de la fuerza de $\beta_{(4+n)D}(\lambda)$ conforme varía la energía, incrementa como la potencia de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. De la serie en (5.75) es posible deducir una fórmula para el contratérmino $\delta\lambda_n$ en términos del contratérmino $\delta\lambda_1$ mediante su derivación recurrente como a continuación se presenta

$$\delta\lambda_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^r}{r!} (M^2)^r \frac{\partial^r \delta\lambda_1}{\partial (M^2)^r}, \quad (5.77)$$

recordando que $\delta\lambda_1$ es

$$\delta\lambda_1 = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \mu^\epsilon \int_0^1 dz \left[\left(\frac{m^2 - M^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} + \sum_{(k)} \left(\frac{m_{(k)}^2 - M^2 z(z-1)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon/2} \right] \Gamma(\epsilon/2).$$

Capítulo 6

Conclusiones y comentarios finales

En esta tesis hemos presentado las contribuciones a nivel de un lazo debido a dimensiones extra sobre la auto-energía y la función de vértice estándar de cuatro puntos asociada a la teoría escalar auto-interactuante $\lambda\phi^4$ en el contexto de un modelo UED. Los casos para una y más dimensiones extra han sido presentados separadamente con el propósito de contrastar las diferencias, especialmente cuando se remueven las divergencias UV.

Usando métodos estándar para la construcción de la integral de trayectoria para los campos, derivamos de primeros principios la funcional generatriz para una teoría de campo escalar de primer orden general definida sobre $\mathcal{M}^4 \times \mathcal{N}^n$. Formalmente mostramos, mediante expansiones de Fourier en los campos y el momento, que la funcional generatriz puede ser expresada ya sea como $\int \mathcal{D}\Phi \exp \left[i \int_{\mathcal{M}^{4+n}} dx \mathcal{L}_{(4+n)}(\Phi, \partial\Phi) \right]$ o $\int \prod_{(k)} \mathcal{D}\phi^{(k)} \exp \left[i \int_{\mathcal{M}^4} dx \mathcal{L}(\phi^{(k)}, \partial\phi^{(k)}) \right]$, donde los campos $\phi^{(k)}(x)$ son los modos de Fourier de $\Phi(x, \bar{x})$ cuando ciertas condiciones de periodicidad y paridad han sido impuestas sobre Φ .

El modelo, en el caso de una dimensión universal extra, está dado por una Lagrangiana dimensionalmente reducida obtenida desde la Lagrangiana efectiva formada por la teoría de campo auto-interactuante $\lambda_{(5)}\Phi^4$ y todos los operadores canónicos invariantes de Lorentz de dimensión canónica mayor que cinco (ver (2.15)) definido sobre el espacio tiempo cinco dimensional $\mathcal{M}^4 \times S^1/\mathbb{Z}_2$. La estructura de la teoría de campo dimensionalmente reducida, definida en el espacio tiempo de Minkowski \mathcal{M}^4 está dada por los siguientes sectores: (i) la teoría pura de $\lambda\phi^4$, con ϕ el campo más ligero de todos los modos de Kaluza-Klein que surgen naturalmente después de la compactificación, (ii) un sector que tiene un número infinito de interacciones entre el campo ϕ y los campos excitados KK, (iii) un sector con un término cinemático e interacciones entre puros campos excitados KK $\phi^{(k)}$, y (iv) un sector que proviene de la reducción dimensional de los operadores canónicos invariantes de Lorentz de dimensión mayor que cinco. Este modelo ha considerado los contratérminos pertinentes para cancelar cualquier divergencia UV a nivel de un lazo.

Sugerimos que tratar con los sectores (i) y (ii), junto a los contratérminos necesarios, nos permite investigar el impacto de la quinta dimensión sobre la auto-energía y la función de vértice de cuatro puntos del modelo $\lambda\phi^4$. Respecto a la auto-energía, usando regularización dimensional mostramos que a nivel de un lazo, aparte de la partícula escalar usual alrededor del lazo, aparece una contribución dada por una superposición infinita de modos excitados KK que circulan dentro del lazo. Esta contribución, la cual contiene un número infinito de divergencias UV, puede ser analíticamente reconocida con la función zeta inhomogénea unidimensional de Epstein producto con la función gamma. Las divergencias UV han sido removidas en dos esquemas distintos: en el esquema-(MS) y en el esquema de substracción dependiente de masa. En el esquema-(MS), las divergencias UV fueron removidas por un contratérmino que reúne a los polos que causan las divergencias UV, el cual a nivel de la Lagrangiana es notablemente de dimensión cuatro, es decir, no existe la necesidad de incorporar operadores de mayor dimensión con la finalidad de cancelar las divergencias en la auto-energía. Se mostró que el problema de extraer los polos divergentes puede analizarse simplemente reconociendo los polos presentes en las funciones gamma y zeta de Riemann en un cierto límite de baja energía. Aunque el contratérmino diseñado en este caso se reduce al objeto esperado conforme establecemos que el número de dimensiones extra es cero, este esquema de substracción es conocido por fallar en el cumplimiento del teorema de desacoplo, pues en el límite cuando las masas más pesadas

se hacen infinitamente grandes tales contribuciones no se desacoplan del modelo. Para restaurar el teorema de desacoplo, uno puede sustraer dichos términos que estropean el desacoplo ad hoc, o usar un esquema de substracción dependiente de masa. Al aplicar esto último, se mostró que la auto-energía no es impactada por la dimensión extra, por lo menos a un lazo, pero tal comportamiento bien podría cambiar si nos vamos a órdenes más altos de lazo.

También se investigó el impacto de la quinta dimensión a las funciones de vértice de cuatro puntos del modelo $\lambda\phi^4$. Nuevamente, se probó que a nivel de un lazo, además de la partícula ligera usual alrededor del lazo existe una contribución formada por un número infinito de partículas excitadas KK circulando alrededor del lazo. Por lo tanto, uno tiene que enfrentar a un número infinito de divergencias UV a un orden finito en la expansión perturbativa. Usando regularización dimensional se mostró que el número infinito de estas divergencias puede ser encapsulado de nuevo en el producto de la función zeta inhomogénea de Epstein con la función gamma. Como previamente se mencionó, este producto encuentra una forma más tratable en el límite de baja energía, donde puede ser expresado como una serie que contiene a los productos entre la función gamma y la función zeta de Riemann, tal que extraer las divergencias UV se convierte en encontrar los polos de estas funciones. Se mostró que, a nivel de un lazo, uno puede reunir los polos y definir el contratérmino correspondiente al usar el esquema-(MS). El resultado valioso es que, como en el caso de la auto-energía ningún operador de dimensión canónica mayor que cuatro ha sido necesario al momento de cancelar estas divergencias. La función beta correspondiente ha sido también calculada. Tanto para el caso de la función de vértice de cuatro puntos libre de divergencias como para la función beta no se satisface manifiestamente el teorema de desacoplo en el esquema-(MS). La razón radica en la falta de una escala de energía natural, esto cambia si un esquema de substracción dependiente de la masa es implementado. Bajo la restricción cinemática $p^2 = -M^2$ y ciertas condiciones de renormalización, se mostró que el teorema de desacoplo puede ser restaurado, en particular la función beta se convierte en el valor de la teoría usual $\lambda\phi^4$ en el límite cuando los modos KK se hacen muy grandes respecto a la masa de substracción M .

Todos los resultados mencionados anteriormente fueron extendidos al caso donde más dimensiones extra se encuentran presentes. La correspondiente teoría dimensionalmente reducida comprende básicamente los cuatro sectores (i) – (iv) descritos en el caso para una dimensión extra, junto con los contratérminos, sin embargo en este caso hay más de una torre de Kaluza-Klein y el análisis se vuelve más complejo especialmente para la función de vértice de 4 puntos y la función beta. Cuando la auto-energía se calcula en presencia de varias dimensiones extra, aparte de la partícula más ligera alrededor del lazo, tenemos a partículas excitadas KK presentes alrededor del lazo y mostramos que pueden ser expresadas en términos de productos de las funciones zeta inhomogéneas multidimensionales de Epstein con la función gamma. La contribución total a la auto-energía es independiente del momento a nivel de un lazo. Usando el hecho de que las funciones zeta inhomogéneas multidimensionales de Epstein por la gamma pueden ser expresadas como una suma finita de productos de funciones zeta inhomogéneas unidimensionales de Epstein por la función gamma en distintos puntos de su dominio, entonces la contribución de los modos infinitos KK puede ser vista en términos de una suma de productos de la función gamma con la función zeta de Riemann. Esto indica que las divergencias UV se encuentran codificadas en los polos de las funciones gamma y zeta de Riemann. Mostramos que dichos polos pueden ser extraídos y sumados en el correspondiente esquema-(MS). Es notable que tal contratérmino a nivel del Lagrangiano puede ser traducido en un término de dimensión canónica igual a cuatro.

El impacto de muchas dimensiones extra a la función de vértice de cuatro puntos $\lambda\phi^4$ ha sido también calculado y renormalizado a nivel de un lazo. Similarmente a lo anterior, además de la partícula ligera usual hay una superposición infinita de partículas excitadas alrededor del lazo, cada una de ellas tiene asociada una divergencia UV.

Ingenuamente uno pensaría que este caso es imposible de tratar, sin embargo, la superposición infinita de partículas KK excitadas alrededor del lazo puede reescribirse analíticamente como el producto de la función zeta inhomogénea multidimensional de Epstein multiplicada por la función gamma. Este producto al mismo tiempo se puede escribir en términos de una serie que contiene a los productos de la gamma multiplicada por la función zeta de Riemann, y la extracción de las divergencias UV se reduce en identificar los polos de estas dos funciones. Al sumarlos, se puede definir un contratérmino en el esquema-(MS). En este punto es donde encontramos la mayor diferencia con el caso de una dimensión espacial extra, ya que el contratérmino contiene un polinomio en las variables de Mandelstam, es decir, en el momento externo, y a nivel del lagrangiano debemos recurrir a operadores de dimensión mayor. Tal contratérmino se reduce a los contratérminos de los casos cuando no tenemos dimensiones extra y para una dimensión extra en el esquema-(MS). La función beta también es calculada y comparte también

esta propiedad; sin embargo, el teorema de desacoplo no es explícito. Como antes, se puede recuperar si se usa el esquema de substracción dependiente de la masa, y la función beta sin dimensiones adicionales se recupera en el límite donde la masa de las partículas excitadas KK se vuelve mucho más grande que la masa de substracción M , es decir, $m_{(\underline{k})} \gg M$.

Es estimulante ver que todo el modelo dimensionalmente reducido aún contiene ingredientes los cuales pueden ser la fuente de investigaciones teóricas interesantes. Además del problema de sistematizar el estudio completo de las NSGF a nivel de un lazo, el término proporcional a $-\lambda\phi \sum_{(\underline{kln})} \phi^{(\underline{k})} \phi^{(\underline{l})} \phi^{(\underline{n})} \Delta_{(\underline{kln})}$ en el potencial (2.29b) contiene, una vez que el multi-índice $\Delta_{(\underline{kln})}$ es escrito explícitamente, un término proporcional a $-\lambda\phi \sum_{(\underline{k})} \phi^{(2\underline{k})} \phi^{(\underline{k})} \phi^{(\underline{k})}$, donde si (\underline{k}) representa la cadena de número (k_1, \dots, k_n) entonces $(2\underline{k})$ representa $(2k_1, \dots, 2k_n)$. Tal término daría lugar a la presencia de un número infinito de transiciones $\phi - \phi^{(2\underline{k})}$ a nivel de un lazo con una partícula $\phi^{(\underline{k})}$ dentro del lazo, además, también habrá un número infinito de mezclas entre los modos KK excitados; estos efectos se asemejan a las interesantes mezclas γ - Z que aparecen en el modelo de Weinberg-Salam el cual ha sido estudiado en la norma lineal y no lineal R_ξ [44, 45] y cuya resolución se basa en la elección de una norma en particular.

Aunque todavía hay un debate en curso en la literatura sobre cómo tratar el número infinito de divergencias UV, proveniente del número infinito de interacciones entre el modo cero y los modos KK, la propuesta basada en un esquema de substracción dependiente de la masa es consistente con el teorema de desacoplo [33] y se reduce a la regularización dimensional bien conocida en ausencia de dimensiones extra. Nuestros resultados también se reducen a los presentados en [61] para el caso $n = 1$, aunque los casos que requieren más maquinaria matemática son aquellos con un mayor número de dimensiones extra. Mejor aún, el método presentado puede extenderse fácilmente a otras teorías de campo tensorial más intrincadas. Las herramientas matemáticas y los métodos implementados en esta tesis han sido desarrollados mediante la colaboración en los artículos [34, 35] que originaron las bases conceptuales para la escritura de esta tesis.

Apéndice A

Series de potencias para la función modificada de Bessel de segundo tipo

A.1. Enfoque mediante los polinomios de Bessel

Los polinomios de Bessel $y_n(x)$ pueden ser definidos mediante la función de Bessel como a continuación [63]

$$J_{n+1/2}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[i^{-n-1} e^{ir} y_n \left(-\frac{1}{ir} \right) + i^{n+1} e^{-ir} y_n \left(\frac{1}{ir} \right) \right]. \quad (\text{A.1})$$

Para mostrar esto, empezamos usando la expresión de Lommel para la función de Bessel $J_\nu(z)$ por medio de una integral de tipo Poisson [75]

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{izt} dt. \quad (\text{A.2})$$

Polinomios de Bessel para $\nu = n + 1/2$ con $n \in \mathbb{N}_0$

Si hacemos $\nu = n + 1/2$ con $n \in \mathbb{N}_0$ en la Ec.(A.2), entonces

$$J_{n+1/2}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+1/2}}{\Gamma(n+1) \sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n e^{izt} dt. \quad (\text{A.3})$$

Integrando por partes la anterior ecuación hasta agotar [75], obtenemos la siguiente expresión

$$J_{n+1/2}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+1/2}}{n! \sqrt{\pi}} \left[-e^{izt} \sum_{r=0}^{2n} \frac{i^{r+1}}{z^{r+1}} \frac{d^r}{dt^r} (1-t^2)^n \right]_{-1}^1, \quad (\text{A.4})$$

ahora, derivando la expresión $d^r (1-t^2)^n / dt^r$ y evaluando en los límites de integración obtenemos

$$J_{n+1/2}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[e^{ir} i^{-n-1} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} \left(-\frac{1}{2ir}\right)^k + e^{-ir} i^{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{2ir}\right)^k \right], \quad (\text{A.5})$$

de la Ec.(A.5) identificamos a los polinomios de Bessel como

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^k, \quad (\text{A.6})$$

**APÉNDICE A. SERIES DE POTENCIAS PARA LA FUNCIÓN MODIFICADA DE BESSEL DE
SEGUNDO TIPO**

A.2. ENFOQUE USANDO UNA REPRESENTACIÓN INTEGRAL

como sabemos la relación entre los polinomios de Bessel y las funciones modificadas de Bessel de segundo tipo es [75]

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{1/x} K_{-n-1/2} \left(\frac{1}{x} \right). \quad (\text{A.7})$$

A.1.1. Polinomios de Bessel para $\nu = \alpha + 1/2$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

De la Ec.(A.2) hacemos $\nu = \alpha + 1/2$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, obteniendo

$$J_{\alpha+1/2}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha+1)\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha e^{izt} dt. \quad (\text{A.8})$$

En este caso, debemos integrar por partes nuevamente. Ya que $\alpha \in \mathbb{R}$ no deberíamos esperar agotar dicha integral, de hecho deberíamos extender el proceso para un número muy grande de integraciones, tal que podemos escribir esto como

$$J_{\alpha+1/2}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+1/2}}{\alpha!\sqrt{\pi}} \left[-e^{izt} \sum_{r \in \mathbb{N}_0} \frac{i^{r+1}}{z^{r+1}} \frac{d^r}{dt^r} (1-t^2)^\alpha \right]_{-1}^1, \quad (\text{A.9})$$

tomando las derivadas sobre el objeto $\frac{d^r}{dt^r} (1-t^2)^\alpha$ y evaluando en los límites de integración llegamos a la expresión siguiente

$$J_{\alpha+1/2}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[e^{ir} i^{-\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+k)!}{k!(\alpha-k)!} \left(-\frac{1}{2ir}\right)^k + e^{-ir} (-i)^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+k)!}{k!(\alpha-k)!} \left(\frac{1}{2ir}\right)^k \right], \quad (\text{A.10})$$

e identificamos a los polinomios de Bessel para $\alpha \in \mathbb{R}$ como

$$y_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+k)!}{k!(\alpha-k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^k, \quad (\text{A.11})$$

entonces, por inspección de la Ec.(A.7), podemos decir que

$$y_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{1/x} K_{-\alpha-1/2} \left(\frac{1}{x} \right). \quad (\text{A.12})$$

A.2. Enfoque usando una representación integral

Partimos de la representación

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{e^{-z}}{(n-1/2)!} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{n-1/2} \left(1 + \frac{t}{2z}\right)^{n-1/2} \quad (\text{A.13})$$

haciendo un expansión binomial al término obtenemos que

$$\left(1 + \frac{t}{2z}\right)^{n-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-1/2)!}{k!(n-k-1/2)!} (2z)^{-k} t^k. \quad (\text{A.14})$$

Sustituyendo la Ec.(A.14) en la Ec.(A.13) encontramos que

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{e^{-z}}{(n-1/2)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-1/2)!}{k!(n-k-1/2)!} \left(\frac{1}{2z}\right)^k \int_0^\infty dt e^{-t} t^{n+k-1/2}. \quad (\text{A.15})$$

Eligiendo $n = 1/2 - s$, entonces

$$K_{1/2-s}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{e^{-z}}{(-s)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)!}{k!(-s-k)!} \left(\frac{1}{2z}\right)^k \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{k-s} \quad (\text{A.16})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-s)!}{k!(-s-k)!} \left(\frac{1}{2z}\right)^k. \quad (\text{A.17})$$

A.3. Enfoque mediante la transformada de Fourier

Empezamos aplicando la transformada de Fourier a la función $K_{1/2-s}(x)$ conduciendo al siguiente resultado

$$\mathcal{F}\{K_{1/2-s}(x)\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos[(1/2-s) \arccos(iy)]}{\sqrt{1+y^2}} \quad (\text{A.18})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{T_{1/2-s}(iy)}{\sqrt{1+y^2}}. \quad (\text{A.19})$$

Donde $T_\nu(x)$ son los polinomios de Chebyshev, esto último puede reescribirse en términos de la función hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a, b; c; z)$ como:

$$\mathcal{F}\{K_{1/2-s}(x)\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{{}_2F_1(s-1/2, 1/2-s; 1/2; 1/2(1-iy))}{\sqrt{1+y^2}}, \quad (\text{A.20})$$

entonces escribimos a la función hipergeométrica de Gauss usando su representación en serie

$$\mathcal{F}\{K_{1/2-s}(x)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-s)!}{k!(-s-k)!} \frac{\Gamma(1/2-k)}{2^{k+1}} (1-iy)^{k-1/2}. \quad (\text{A.21})$$

Usamos la transformada inversa de Fourier y la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier sobre este resultado, lo cual conduce a

$$\begin{aligned} K_{1/2-s}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{(k-s)!}{k!(-s-k)!} \frac{\Gamma(1/2-k)}{2^{k+1}} (1-iy)^{k-1/2} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-s)!}{k!(-s-k)!} \left(\frac{1}{2x}\right)^k. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Apéndice B

Función zeta inhomogénea de Epstein y su representación polilogarítmica

Partimos usando la relación (3.34)

$$E_1^{c^2}(s) = -\frac{c^{-2s}}{2} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{-2s+1} + \sum_{k=0}^{-s} \binom{k-s}{2k} \frac{(2k-1)!!}{\Gamma(s)} \text{Li}_{-s+k+1}(e^{-2\pi c}) \frac{\pi^{s-k}}{2^k c^{k+s}}, \quad (\text{B.1})$$

como paso siguiente, la función polilogarítmica admite la siguiente expansión asintótica para $|\mu| < 2\pi$

$$\text{Li}_n(e^\mu) = \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} [H_{n-1} - \log(-\mu)] + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n-1}} \frac{\zeta(n-k)}{k!} \mu^k \quad (\text{B.2})$$

aplicada a nuestro caso, vemos que $|-2\pi c| < 2\pi$, entonces $|c| < 1$, escribimos esta última expresión como

$$\text{Li}_{-s+k+1}(e^{-2\pi c}) = \frac{(-2\pi c)^{k-s}}{(k-s)!} [H_{k-s} - \log(2\pi c)] + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k-s}} \frac{\zeta(k-s-l+1)}{l!} (-2\pi c)^l \quad (\text{B.3})$$

sustituyendo la anterior ecuación en la Ec.(B.1), obtenemos

$$E_1^{c^2}(s) = -\frac{c^{-2s}}{2} + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{1-2s} + \sum_{k=0}^{-s} \binom{-s+k}{2k} \frac{(2k-1)!!}{2^k \pi^{-s+k}} \frac{(-2\pi c)^{-s+k}}{(-s+k)! c^{s+k}} \frac{[H_{-s+k} - \log(2\pi c)]}{\Gamma(s)} \\ + \sum_{k=0}^{-s} \binom{-s+k}{2k} \frac{(2k-1)!!}{2^k \pi^{-s+k}} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq -s+k}}^{\infty} \frac{\zeta(-s+k-l+1)}{l! \Gamma(s)} \frac{(-2\pi c)^l}{c^{s+k}}. \quad (\text{B.4})$$

identificamos el tercer término en la Ec.(B.4) y lo escribimos como

$$\sum_{k=0}^{-s} \binom{-s+k}{2k} \frac{(2k-1)!!}{2^k \pi^{-s+k}} \frac{(-2\pi c)^{-s+k}}{(-s+k)! c^{s+k}} \frac{[H_{-s+k} - \log(2\pi c)]}{\Gamma(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\pi c)^{-s+k}}{(2k)!!(-s-k)!} \frac{[H_{-s+k} - \log(2\pi c)]}{\Gamma(s)} \frac{c^{-s-k}}{2^k \pi^{-s+k}}, \quad (\text{B.5a})$$

realizando la suma sobre el segundo término de la Ec.(B.5a), obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\pi c)^{-s+k}}{(2k)!!(-s-k)!} \frac{[H_{-s+k} - \log(2\pi c)]}{\Gamma(s)} \frac{c^{-s-k}}{2^k \pi^{-s+k}} = \frac{(-2c^2)^{-s}}{\Gamma(s)} \sum_{k=0}^{-s} \frac{(-1)^k H_{-s+k}}{(2k)!!(-s-k)!} - \frac{(-1)^{(-s)\Gamma(s)} c^{-2s}}{(-s)!} \log(2\pi c). \quad (\text{B.5b})$$

APÉNDICE B. FUNCIÓN ZETA INHOMOGÉNEA DE EPSTEIN Y SU REPRESENTACIÓN POLILOGARÍTMICA

usando la fórmula de reflexión de Euler, $\sin(\pi s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\Gamma(1-s)}$ entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\pi c)^{-s+k}}{(2k)!!(-s-k)!} \frac{[H_{-s+k} - \log(2\pi c)]}{\Gamma(s)} \frac{c^{-s-k}}{2^k \pi^{-s+k}} = \sum_{k=0}^{-s} \frac{(-2c^2)^{-s} (-1)^k H_{-s+k}}{(2k)!!(-s-k)! \Gamma(s)} - (-1)^{(-s)} c^{-2s} \log(2\pi c) \sin(\pi s). \quad (\text{B.5c})$$

centrando la atención en el primer término de la Ec.(B.5c) el cual contiene a la función armónica, procedemos como

$$\begin{aligned} \frac{(-2c^2)^{-s}}{\Gamma(s)} \sum_{k=0}^{-s} \frac{(-1)^k H_{-s+k}}{(2k)!!(-s-k)!} &= \frac{(-2c^2)^{-s}}{\Gamma(s)} \sum_{k=0}^{-s} \frac{(-1)^k}{(2k)!!(-s-k)!} \int_0^1 \frac{1-x^{-s+k}}{1-x} dx \\ &= \frac{(-1)^{-s} c^{-2s}}{\Gamma(1-s)\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{1-[2x-x^2]^2}{1-x} dx \end{aligned} \quad (\text{B.5d})$$

la integral en la Ec.(B.5e) puede ser resuelta usando el cambio de variable $u = 1 - (x-1)^2$ lo cual conduce a

$$\int_0^1 \frac{1-[2x-x^2]^2}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-u^{-s}}{1-u} du = \frac{1}{2} H_{-s} \quad (\text{B.5e})$$

insertando los resultados de la Ec.(B.5e) en (B.5c) permite escribir a (B.5b) como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\pi c)^{-s+k}}{(2k)!!(-s-k)!} \frac{[H_{-s+k} - \log(2\pi c)]}{\Gamma(s)} \frac{c^{-s-k}}{2^k \pi^{-s+k}} = \frac{(-1)^s c^{-2s}}{2\pi} [H_{-s} - \log(4\pi^2 c^2)] \sin(\pi s). \quad (\text{B.5f})$$

Ahora, analizando el último término en la Ec.(B.4), lo expresamos como

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{-s} \binom{-s+k}{2k} \frac{(2k-1)!!}{2^k \pi^{-s+k}} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq -s+k}}^{\infty} \frac{\zeta(-s+k-l+1)}{l! \Gamma(s)} \frac{(-2\pi c)^l}{c^{s+k}} = \\ &\lim_{r \rightarrow -s} \lim_{k \rightarrow 0} (-1)^r \binom{r-s}{2r} \frac{(2r-1)!!}{2^{s-1}} \frac{\Gamma(2k+2s)(-1)^k}{\Gamma(2k+r+s+1)} \zeta(2k+2s) c^{2k} \\ &+ \sum_{r=0}^{-s} (-1)^r \binom{r-s}{2r} \frac{(2r-1)!!}{2^{s-1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq -s}}^{\infty} \frac{\Gamma(2k+2s)(-1)^k}{\Gamma(2k+r+s+1)} \zeta(2k+2s) c^{2k} \\ &+ \sum_{r=0}^{-s} \binom{r-s}{2r} \frac{(2r-1)!!}{2^r c^{r+s} \pi^{r-s}} \sum_{k=0}^{-s} \frac{\zeta(-2k-2s)}{(2k+r+s+1)!} (-2\pi c)^{2k+r+s+1}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Los primeros dos términos de la Ec.(B.6) nos dejan el siguiente resultado

$$\begin{aligned} &\lim_{r \rightarrow -s} \lim_{k \rightarrow 0} (-1)^r \binom{r-s}{2r} \frac{(2r-1)!!}{2^{s-1}} \frac{\Gamma(2k+2s)(-1)^k}{\Gamma(2k+r+s+1)} \zeta(2k+2s) c^{2k} \\ &+ \sum_{r=0}^{-s} (-1)^r \binom{r-s}{2r} \frac{(2r-1)!!}{2^{s-1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq -s}}^{\infty} \frac{\Gamma(2k+2s)(-1)^k}{\Gamma(2k+r+s+1)} \zeta(2k+2s) c^{2k} = \\ &\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq -s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k! \Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

El tercer término en la Ec.(B.6) se convierte en

$$\sum_{r=0}^{-s} \binom{r-s}{2r} \frac{(2r-1)!!}{2^r c^{r+s} \pi^{r-s}} \sum_{k=0}^{-s} \frac{\zeta(-2k-2s)}{(2k+r+s+1)!} (-2\pi c)^{2k+r+s+1} = -\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s-1/2)}{2 \Gamma(s)} c^{1-2s}. \quad (\text{B.8})$$

**APÉNDICE B. FUNCIÓN ZETA INHOMOGÉNEA DE EPSTEIN Y SU REPRESENTACIÓN
POLILOGARÍTMICA**

introduciendo los resultados de las Ecs.(B.5f,B.6 y B.7) sobre la Ec.(B.4), podemos escribir esto último como

$$E_1^{c^2}(s) = \frac{(-1)^s c^{-2s}}{2\pi} [H_{-s} - \log(4\pi^2 c^2)] \sin(\pi s) - \frac{c^{-2s}}{2} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq -s}}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+s)}{k! \Gamma(s)} \zeta(2k+2s) c^{2k}. \quad (\text{B.9})$$

Apéndice C

Interacciones de orden mayor que cuatro.

C.1. Polinomios en términos de las variables de Mandelstam.

En las SVF de cuatro puntos aparecen polinomios en potencias de las variables de Mandelstam, dichos términos provienen de operadores de dimensión canónica mayor que cuatro. El presente apéndice tiene como objetivo brindar las ideas y herramientas detrás de la construcción para dichas interacciones de orden mayor. Iniciamos dando una fórmula que nos permite reproducir términos de la forma $s + t + u$, $s^2 + t^2 + u^2$, $s^3 + t^3 + u^3$, ..., $s^n + t^n + u^n$, con n un entero positivo, mediante la siguiente relación

$$s^n + t^n + u^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k A^{n-k} \sum_{i=1}^3 A_i^k, \quad (\text{C.1})$$

donde

$$A = s + t + u, \quad A_1 = -s + t + u, \quad A_2 = s - t + u, \quad A_3 = s + t - u. \quad (\text{C.2})$$

A su vez, si decimos que los cuádrimomentos entrantes son p_1 y p_2 , mientras los cuádrimomentos salientes son p_3 y p_4 , establecemos las siguientes relaciones

$$-s + t + u = 2p_1 \cdot p_2 + 2p_3 \cdot p_4 \quad s - t + u = 2p_1 \cdot p_3 + 2p_2 \cdot p_4 \quad s + t - u = 2p_2 \cdot p_3 + 2p_1 \cdot p_4. \quad (\text{C.3})$$

Haciendo uso de las Ecs. (C.3) y (C.2) sobre la Ec. (C.1), surgen expresiones en términos de los cuádrimomentos p_1, p_2, p_3 y p_4 y potencias de estos, de las cuales sabiendo que $\partial_\mu \phi \rightarrow ip$ no es difícil determinar cada interacción para un número n de dimensiones extra. Cuando $n = 1$, la interacción que genera a $i(s + t + u)$ es de la forma:

$$\frac{1}{2} \phi^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = (\phi \partial_\mu \phi) (\phi \partial^\mu \phi). \quad (\text{C.4})$$

Para $n = 2$, la interacción que genera a $i(s^2 + t^2 + u^2)$ es:

$$\frac{1}{2} (\phi^2 (\square \phi)^2 + 2\phi \square \phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi) = \frac{1}{2} (\phi \square \phi + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) (\phi \square \phi + \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi). \quad (\text{C.5})$$

En cambio, para $n = 3$, la interacción que genera al término $i(s^3 + t^3 + u^3)$ es de la forma:

$$\frac{1}{2} (\phi^2 \partial_\mu (\square \phi) \partial^\mu (\square \phi) + 6\phi \square \phi \partial_\mu (\square \phi) \partial^\mu \phi + 9(\square \phi)^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) = \frac{1}{2} (\phi \partial_\mu (\square \phi) + 3\square \phi \partial_\mu \phi) (\phi \partial^\mu (\square \phi) + 3\square \phi \partial^\mu \phi). \quad (\text{C.6})$$

APÉNDICE C. INTERACCIONES DE ORDEN MAYOR QUE CUATRO.
C.1. POLINOMIOS EN TÉRMINOS DE LAS VARIABLES DE MANDELSTAM.

Para $n = 4$ la interacción que genera al término $i(s^4 + t^4 + u^4)$ se escribe como:

$$\frac{1}{2} \left(\phi \square^2 \phi + 4 \partial_\mu (\square \phi) \partial^\mu \phi + 3 (\square \phi)^2 \right) \left(\phi \square^2 \phi + 4 \partial_\nu (\square \phi) \partial^\nu \phi + 3 (\square \phi)^2 \right). \quad (\text{C.7})$$

Cuando tenemos $n = 5$, la interacción que genera al término $i(s^5 + t^5 + u^5)$ es:

$$\frac{1}{2} \left(\phi \partial_\mu (\square^2 \phi) + 5 \square^2 \phi \partial_\mu \phi + 10 \square \partial_\mu (\square \phi) \right) \left(\phi \partial^\mu (\square^2 \phi) + 5 \square^2 \phi \partial^\mu \phi + 10 \square \partial^\mu (\square \phi) \right). \quad (\text{C.8})$$

En general para un término de la forma $i(s^k + t^k + u^k)$ con k un número natural par, la interacción toma la estructura:

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{r=0, \\ (k \text{ par})}}^{k-1} \binom{k-1}{r} \partial_\mu^{\chi(r) \square^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}} \phi \cdot \partial^{\chi(k-r) \mu \square^{\lfloor \frac{k-r}{2} \rfloor}} \phi \right)^2. \quad (\text{C.9})$$

En cambio, si k es un natural impar, la interacción toma la forma

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{r=0, \\ (k \text{ impar})}}^{k-1} \binom{k-1}{r} \partial_\mu^{\chi(r) \square^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}} \phi \cdot \partial_\mu^{\chi(k-r) \square^{\lfloor \frac{k-r}{2} \rfloor}} \phi \right)^2, \quad (\text{C.10})$$

donde $\square := \partial_\nu \partial^\nu$. Además $\chi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$ es la función característica de los número impares, esto es,

$$\chi(r) := \begin{cases} 1, & r \text{ par} \\ 0, & r \text{ impar} \end{cases}, \quad (\text{C.11})$$

tal que $\partial_\mu^{\chi(2r+1)} = \partial_\mu$ y $\partial_\mu^{\chi(2r)} = 1$. El símbolo $[\cdot]$ denota la función piso. El cuadrado debe ser tomado con respecto a la métrica de Minkowski, es decir, $(A_\mu)^2 \equiv A_\mu \eta^{\mu\nu} A_\nu$. Notemos que el término dentro del corchete en la Ec. (C.10) contiene dos derivadas con índices de espacio tiempo abajo, de hecho debido a los valores de χ , solamente una de estas dos derivadas sobrevive en cada término; sin embargo, el cuadrado conduce a un escalar de Lorentz.

Bibliografía

- [1] T. Kaluza, Sitzungsber. d Berl. Akad. 966 (1921).
- [2] O. Klein, Zeitschrift f Phys., 895-906 (1926). An English version available in Taylor J. C. (Ed.) *Gauge Theories in the twentieth Century*, Imperial College Press (2001).
- [3] S. Chatrchyan et al. [CMS Collaboration], Phys. Rev. Lett. **108**, 111801 (2012); S. Chatrchyan et al. [CMS Collaboration], JHEP **05**, 093 (2011); S. Chatrchyan et al. [CMS Collaboration], Phys. Rev. D **87**, 114015 (2013); V. Khachatryan et al.[CMS Collaboration], Eur. Phys. J. C **75**, 235 (2015).
- [4] G. Aad et. [ATLAS Collaboration], JHEP **03**, 026 (2016); G. Aad et al. [ATLAS Collaboration], Phys. Rev. D **92**, 032004 (2015); G. Aad et al. [ATLAS Collaboration], JHEP **8**, 148 (2015); G. Aad et al. [ATLAS Collaboration], JHEP **04**, 116 (2015).
- [5] Hsin-Chia Cheng. 2009 TASI Lecture-Introduction to Extra Dimension.
- [6] Nordström, G., Physikalische Zeitschrift 15: 504506, OCLC 1762351 (1914).
- [7] B. DeWitt in "Dynamical Theory of Groups and Fields"(Gordon and Breach, New York, 1965); R. Kerner, Ann. Inst. Henri Poincare **9**, 143 (1968); A. Trautman, Rep. Math. Phys. **1**, 29 (1970).
- [8] Gliozzi, F.; Scherk, J.; Olive, D. I. "Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model". Nucl. Phys. B. **122** (2): 253 (1977).
- [9] Green, M. B.; Schwarz, J. H. (1984). "Anomaly cancellations in supersymmetric D = 10 gauge theory and superstring theory". Physics Letters B. **149** (1–3): 117–122.
- [10] A. Einstein and P. Bergmann, Ann. Math. **39**, 683 (1938).
- [11] R. Kerner, Ann. Inst. H. Poincaré **9**, 143 (1964).
- [12] A. Trautman, Rep. Math. Phys. **1**, 29 (1970).
- [13] Y. M. Cho, J. Math. Phys. **16**, 2029 (1975)
- [14] E. Witten, Nucl. Phys. B **186**, 412 (1981); Ibid. **195**, 481 (1982).
- [15] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and Dvali. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. Phys. Lett. B **429**, 263 (1998).
- [16] I. Antoniadis, Phys. Lett. B **246**, 377 (1990).
- [17] B. A. Dobrescu and E. Poppitz, Phys. Rev. Lett. **87**, 031801 (2001).
- [18] T. Appelquist, B. A. Dobrescu, E. Ponton, and H.-U. Yee, Phys. Rev. Lett. **87**, 181802 (2001).
- [19] H.-C. Cheng, J. L. Feng, and K. T. Matchev, Phys. Rev. Lett. **89**, 211301 (2002).
- [20] J. D. Lykken, CERN Yellow Report CERN-2010-002, 101-109 (2010).
- [21] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **436**, 257 (1998).
- [22] L. Randall and R. Sundrum. *An alternative to compactification*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999).

- [23] Appelquist, Thomas; Cheng, Hsin-Chia; Dobrescu, Bogdan A. *Bounds on universal extra dimensions*. Physical Review D. 64 (3): 035002 (2001).
- [24] G. D. Kribs, *Lectures on the Phenomenology of Extra Dimensions*, in Proc. TASI 2004, Boulder, USA, June 6-July 2, (2004).
- [25] H. C. Cheng, *Introduction to Extra Dimensions*, in Proc. TASI 2009, Boulder, USA, June 1-26, (2009).
- [26] H. Novales-Sánchez and J. J. Toscano, Phys. Rev. D **82**, 116012 (2010).
- [27] D. Hooper and S. Profumo, Phys. Rev. **453**, 29 (2007).
- [28] R. K. Unz, Phys. Rev. D **32**, 2539 (1985); Ibid. Nuovo Cim. A **92**, 397 (1986).
- [29] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42**, 1195 (1979); Ibid. Phys. Rev. Lett. **44**, 1733 (1980); Phys. Rev. D **23**, 2262 (1981).
- [30] D. J. Toms, Phys. Rev. D **35**, 3796 (1987).
- [31] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Bytsenko, S. Zerbini, *Zeta Regularizations Techniques with Applications*, World Scientific (1994).
- [32] E. Elizalde and A. Romeo, Int. J. Mod. Phys. A **7**, 7365 (1992).
- [33] T. Appelquist and J. Carazzone, Phys. Rev. D **11**, 2856 (1975).
- [34] E. Martínez-Pascual, G. Nápoles-Cañedo, H. Novales-Sánchez, A. Sierra-Martínez, and J. J. Toscano, *Implications of extra dimensions on the effective charge and the beta function in quantum electrodynamics*, Phys. Rev. D **101**, 035034 (2020).
- [35] I. García-Jiménez, J. Montaña, G. I. Nápoles-Cañedo, H. Novales-Sánchez, J. J. Toscano, and E. S. Tututi, *Diphoton Higgs signal strength in a Standar Model extension to extra dimensions*, aceptado en J. Phys. G: Nucl. Part. Phys, JPhysG-103228.R1 (2020).
- [36] A. Petrov, A. E. Blechman, *Effective Field Theories*, World Scientific (2016).
- [37] S.-T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation*, I. Communications on pure and applied mathematics, 31(3), 1978.
- [38] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, J. J. Toscano, Phys. Rev. D **89**, 116015 (2014).
- [39] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, H. Novales-Sánchez, J. J. Toscano, Phys. Rev. D **88**, 036015 (2013).
- [40] M. A. López-Osorio, E. Martínez-Pascual, G. I. Nápoles-Cañedo, J. J. Toscano, *One-loop order effects from one universal extra dimension on $\lambda\phi^4$ theory*, presentado en J. Phys. G: Nucl. Part. Phys, arXiv:2002.10015, (2020).
- [41] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1995).
- [42] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field quantization*, Springer (1996).
- [43] A. Cordero-Cid, M. Gómez-Bock, H. Novales-Sánchez, and J. J. Toscano, Pramana **80**, 369 (2013).
- [44] L. Baulieu and R. Coquereaux, Ann. Phys. **140**, 163 (1982).
- [45] J. C. Romão and A. Barroso, Phys. Rev. D **35**, 2836 (1987).
- [46] Thomas Appelquist, Hsin-Chia Cheng, and Bogdan A. Dobrescu Phys. Rev. D **64**, 035002 (2001).
- [47] S. Bauman, *Radiative corrections in Kaluza-Klein theories*, Proquest, 2011.
- [48] G. B. Arfken, H. J. Weber, y F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, 7th Edition (2013).
- [49] A. Hurwitz, Z. fur Math und Physik **27**, 86 (1882).

- [50] P. Epstein, *Math. Ann.* **56**, 615, (1903); *Ibid* **65**, 205 (1907).
- [51] A. Actor, *Class. Quantum Grav.* **5**, 1415 (1988);
- [52] E. Elizalde, *Multiple zeta functions with arbitrary exponents*, *J. Phys. A:Math. Gen.* **22** (1989).
- [53] A. Potter y C. Titchmarsh, *The Zeros of Epstein's Zeta-Functions*, *Proc. London Math. Soc.* **39** (1935).
- [54] T. Nakamura y L. Pankowski, *On Zeros and c-values of Epstein zeta-function*, *Siauliai Math. Semin.*, 8(16) (2013).
- [55] K. Kirsten, *Inhomogeneous multidimensional Epstein zeta functions*, *J. Math. Phys.* **32**, 3008 (1991).
- [56] E. Elizalde, *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*, LNP 855, Springer, 2nd Ed. (2012).
- [57] J.M. Borwein, M.L. Glasser, R.C. McPhedran, J.G. Wan, I.J. Zucker, *Lattice Sums Then And Now*, Cambridge University-Press (2013).
- [58] E. Elizalde, K. Kirsten, Yu. Kubyshev, *On the instability of the vacuum in multidimensional scalar theories*, *Z. Phys. C* **70**, 159-172 (1996).
- [59] V. Di Clemente, Y.A. Kubyshev, *Effective potential and KK-renormalization scheme in a 5D supersymmetric theory*, *Nuclear Physics B* **636** (2002).
- [60] Yu.A. Kubyshev, D. O'Connor, C.R. Stephens, *Decoupling of heavy masses in the Kaluza-Klein approach*, in: D.Yu. Grigoriev et al. (Eds.), *Quarks '92, Proc. of the Intern. Seminar*, World Scientific, (1993).
- [61] R. Akhoury and C. S. Gauthier, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **36**, 015005 (2009).
- [62] E. Elizalde, A. Romeo, *Rigorous extension on the proof of zeta-function regularization*, *Phys Rev D* **40**, 2 (1989).
- [63] H.L. Krall, O. Frink, *A New Class Of Orthogonal Polynomials: The Bessel Polynomials*, AMS, Vol. **65**, 1 (1949).
- [64] E. Elizalde, A. Romeo, *Expressions for the zeta function regularized Casimir energy*, *Journal of Mathematical Physics*, **30**, 1133 (1989).
- [65] L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions*, Elsevier North Holland. Inc. (1981).
- [66] R. B. Paris and D. Kaminski, *Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals*, Cambridge University Press (2001).
- [67] R. B. Paris, *An expansion for the sum of a product of an exponential and a Bessel function*, arXiv:1901.00142 (2020).
- [68] H.A. Weldon, *Nucl. Phys.* **B270**, 79 (1986).
- [69] M.R. Spiegel, *Variable Compleja*, Schaum, McGraw Hill.
- [70] E. Elizalde, *Grav. Cosmol.* **8**, 43 (2000).
- [71] G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys. B* **44**, 189 (1972).
- [72] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press (1984).
- [73] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **61**, 455 (1973).
- [74] E. Martínez-Pascual, G. I. Nápoles-Cañedo, J. J. Toscano, *One-loop order effects from n universal extra dimensions on $\lambda\phi^4$ theory* por enviarse a *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*
- [75] G. N. Watson, *A Treatise On The Theory Of Bessel Functions*, Cambridge University Press (1994).