



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"DINÁMICA CUÁNTICA DE DOS ÁTOMOS DE
TRES NIVELES EN UNA CAVIDAD
ELECTROMAGNÉTICA"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRA EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA

LUZ ANGÉLICA WALTEROS RODRÍGUEZ

DIRECTORES DE TESIS

**DR. JUAN MAURICIO TORRES GONZÁLEZ
DR. JOSÉ ANTONIO MÉNDEZ BERMÚDEZ**

No. de CVU: 1011061

JUNIO DE 2021

©2021 - Luz Angélica Walteros Rodríguez

Derechos Reservados

Agradecimientos

Agradezco a mis padres que me brindaron la posibilidad de tener una formación académica que me permitió llegar hasta aquí.

A mi hermana por su apoyo para continuar con mi formación y su acompañamiento en la distancia.

Al Dr. Juan Mauricio Torres González y al Dr. José Antonio Méndez Bemúdez por su disposición durante el desarrollo del trabajo, su exigencia y consejos.

Al Instituto de Física "Luis Rivera Terrazas" (IFUAP) por darme la oportunidad de continuar con mi formación académica.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por brindarme apoyo económico durante el tiempo que realicé mis estudios.

Al personal administrativo en especial a Mónica y Lucrecia por su apoyo y acompañamiento durante los diferentes trámites.

A mis compañeros de maestría en especial Alejandro, Amadeo, Carlos, Emilio, Pepe y Ponce por los momentos de esparcimiento y de trabajo.

A los doctores de los que tuve oportunidad de aprender en especial al Dr. Omar De la Peña Seaman.

Resumen

En este trabajo se realiza el estudio teórico del sistema cuántico de dos átomos de tres niveles en una cavidad electromagnética. Se inicia con una revisión de algunos conceptos preliminares pertinentes al momento de hacer referencia a átomos en cavidades. Se realiza una revisión de sistemas de un solo átomo en una cavidad con el fin de presentar algunos resultados y análisis que han permitido la descripción de estos. Se presenta el hamiltoniano que describe la dinámica del sistema de dos átomos de tres niveles en una cavidad en el régimen de resonancia de dos fotones, donde la diferencia de energía entre el estado base y el estado excitado es dos veces la energía de un cuanto de energía de la cavidad, para lo cual, se usa el formalismo de momento angular. Se identifican en el sistema constantes de movimiento que permiten la diagonalización del hamiltoniano por bloques, lo cual lleva a encontrar eigenvectores y eigenvalores de matrices cuya dimensión no es mayor a 5×5 . Se describe el fenómeno de colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi del sistema. Al considerar el estado del campo inicial como un estado coherente, se estudia el comportamiento en el espacio fase usando la función de Husimi; además se presenta la aproximación en estados coherentes de los átomos para un estado inicial arbitrario.

Por último se presenta el caso en donde la energía del estado intermedio no se encuentra exactamente a la mitad de la energía del estado base y el estado excitado. Se presenta de manera breve cómo este sistema transita al modelo de dos fotones donde se puede eliminar el estado intermedio y se comparan los resultados con algunos ya reportados en la literatura.

Abstract

In this work the theoretical study of the quantum system of two three-level atoms in an electromagnetic cavity is carried out. It begins with a review of some preliminary concepts pertinent at the moment of making reference to atoms in cavities. A review of systems of a single atom in a cavity is made in order to present some results and analyses that have allowed the description of these systems. The Hamiltonian that describes the dynamics of the system of two three-level atoms in the two-photon resonance regime is presented. In this the energy difference between the ground state and the excited state is twice the energy of an energy quantum of the cavity. The angular momentum formalism is used. Constants of motion are identified in the system that allow the block diagonalization of the Hamiltonian. The eigenvectors and eigenvalues are obtained from matrices whose dimension is not greater than 5×5 . The phenomenon of collapse and revival of the Rabi oscillations of the system is described. Considering the initial field state as a coherent state, the behavior in the phase space is studied using the Husimi function; in addition, the approximation in coherent states for an arbitrary initial state of the atoms is presented.

Finally, the case is presented where the energy of the intermediate state differs from the middle point energy between ground and excited state. It is briefly presented how this system transits to the two-photon model where the intermediate state can be neglected and the results are compared with some already reported in the literature.

Contenido

1	Introducción	1
2	Conceptos preliminares	3
2.1	Cuantización del campo electromagnético	3
2.2	Estados de Fock o de número	6
2.3	Estados coherentes	8
2.4	Función Q de Husimi	11
2.5	Interacción átomo - campo	12
3	Modelos de un átomo dentro de una cavidad	15
3.1	Modelo de Jaynes-Cummings	15
3.1.1	Hamiltoniano de un átomo de dos niveles	16
3.1.2	Solución analítica	19
3.1.3	Aproximación en estados coherentes	19
3.2	Oscilaciones de Rabi	22
3.3	Sistema con un átomo de tres niveles	24
3.3.1	Hamiltoniano	25
3.3.2	Solución analítica	26
3.3.3	Análisis y aproximación en estados coherentes	27
4	Sistema de dos átomos de tres niveles dentro de una cavidad	31
4.1	Descripción del sistema	31
4.2	Solución analítica	33
4.3	Aproximación en estados coherentes	35
4.4	Entrelazamiento	38
4.5	Resultados numéricos y discusión	43
5	Transición a un modelo de dos fotones	53
5.1	Descripción del modelo	53
5.2	Solución analítica	54
5.3	Hamiltoniano efectivo	57
5.4	Resultados y discusión	59
6	Conclusiones	62

A	Momento angular y coeficientes de Clebsch-Gordan	65
B	Aproximación en estados coherentes: dos átomos de tres niveles	69
	Bibliografía	79

Capítulo 1

Introducción

El avance tecnológico que se ha alcanzado en laboratorios actuales de óptica cuántica, en relación a sistemas de átomos en cavidades, ha permitido el estudio de la interacción entre luz y materia a un nivel donde los fenómenos cuánticos cobran primordial relevancia. En estos sistemas el campo electromagnético puede ser descrito de manera cuántica y la interacción entre luz y materia se intensifica.

El ejemplo más emblemático en sistemas de átomos en cavidades es aquel que considera un átomo de dos niveles en interacción con un modo del campo electromagnético. Los dos estados posibles del átomo son el estado fundamental $|g\rangle$ y su estado excitado $|e\rangle$ [11]. El sistema es exactamente soluble y lleva el nombre de modelo de Jaynes-Cummings (MJC), quienes lo introdujeron en 1963 [12]. Aunque el modelo es relativamente simple ha proporcionado varios resultados no triviales e inesperados como lo es el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi [8].

El fenómeno de colapso y resurgimiento de oscilaciones de Rabi ha sido ya estudiado con algunas generalizaciones a más de un átomo [11] y se ha mostrado su utilidad en la preparación de estados atómicos [6, 10]. Adicionalmente, se ha notado un creciente interés en sistemas multiniveles [15], los cuales motivan el estudio de protocolos de información cuántica basada en cútrits en sistemas de átomos en cavidades, siendo un cútrit un sistema de tres niveles. Entre los sistemas de interés que interaccionan con una cavidad sobresale el estudio del átomo en configuración escalera en donde se tiene un estado base, un estado intermedio y un estado excitado. En el caso donde la energía del nivel intermedio es altamente asimétrica en relación al estado base y excitado, el sistema es equivalente a un modelo que presenta transición de dos fotones, es decir, se necesitan dos cuantos de energía

de la cavidad para excitar al átomo del estado base al estado excitado. Además del efecto que muestra transición de dos fotones, no se ha explorado mucho el modelo de un átomo de tres niveles en una cavidad [1, 2], menos el caso de dos átomos [3, 14, 27]. Por lo tanto, el estudio en términos de estados coherentes en el régimen alejado del modelo de dos fotones, donde contribuyen los tres niveles atómicos, no ha sido abordado.

En este trabajo se presenta el estudio teórico del sistema cuántico de dos átomos de tres niveles en una cavidad en configuración escalera. Para desarrollar este propósito, se plantearon los siguientes objetivos específicos: resolver de manera analítica y numérica el modelo de dos átomos de tres niveles en una cavidad en configuración escalera. Aproximar el estado total dependiente del tiempo en términos de estados coherentes de la cavidad. Estudiar la transición a un modelo de dos fotones.

La manera en la que se organiza el trabajo es la siguiente: el capítulo 2 presenta algunos conceptos básicos que son necesarios en la descripción de los sistemas de dos o más niveles atómicos que interactúan con el campo electromagnético. El capítulo 3 presenta uno de los modelos más emblemáticos en el estudio de átomos en cavidades conocido como el modelo de Jaynes-Cummings, el cual se retoma para hacer un breve análisis y mostrar algunos resultados ya reportados, que darán pautas para realizar la descripción de la dinámica de un sistema de un átomo de tres niveles. Posteriormente se emplean algunas consideraciones e ideas para la descripción del sistema de dos átomos de tres niveles en una cavidad electromagnética. En el capítulo 4 se estudia el sistema de dos átomos de tres niveles dentro de una cavidad electromagnética, encontrando así una solución analítica que permite realizar una aproximación en estados coherentes de un estado inicial arbitrario que evoluciona en el tiempo. Se presenta un breve análisis del entrelazamiento de las componentes atómicas que acompañan el estado coherente y se analiza la dinámica del sistema. En el capítulo 5 se estudia la transición a un modelo de dos fotones para el sistema de dos átomos de tres niveles dentro de una cavidad electromagnética. En este caso, la energía del estado intermedio no se encuentra exactamente a la mitad de la energía del estado base y el estado excitado. Además se asume que la desafinación entre la frecuencia del estado intermedio y la frecuencia del modo del campo electromagnético es bastante grande en comparación con la constante de acoplamiento entre la cavidad y el átomo. Esto conlleva a que el estado intermedio se desacople de la dinámica del sistema. En el capítulo 6 se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

Conceptos preliminares

En este capítulo se presentan conceptos básicos necesarios para la descripción del sistema de interés. Primero se aborda la cuantización del campo electromagnético y se relaciona con el oscilador armónico cuántico. Posteriormente, se da una breve introducción a los estados de Fock y estados coherentes. Finalmente, se presenta una descripción de la función de Husimi, conocida también como función Q la cual va a permitir una visualización de la dinámica del sistema.

2.1 Cuantización del campo electromagnético

Sin realizar un tratamiento exhaustivo, en esta sección revisaremos las ideas básicas detrás de la cuantización del campo electromagnético siguiendo principalmente la discusión de las referencias [19, 20]. Para cuantizar el campo electromagnético en el espacio libre se puede partir del hecho de que está compuesto por un campo eléctrico y un campo magnético, los cuales obedecen las ecuaciones de Maxwell. En este caso es necesario considerar las ecuaciones de Maxwell sin términos correspondientes a las fuentes, dadas en el sistema internacional (SI), tienen la forma [20]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (2.1d)$$

Estas ecuaciones relacionan los vectores de campo magnético y eléctrico \mathbf{H} y \mathbf{E} , además de los vectores de inductancia y desplazamiento \mathbf{B} y \mathbf{D} que siguen las relaciones

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (2.2b)$$

donde μ_0 es la permeabilidad en el espacio libre, ϵ_0 es la permitividad en el espacio libre y $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío.

Al tomar el rotacional de la ec. (2.1a) y usando las ecs. (2.1b), (2.2a) y (2.2b), se obtiene que el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.3)$$

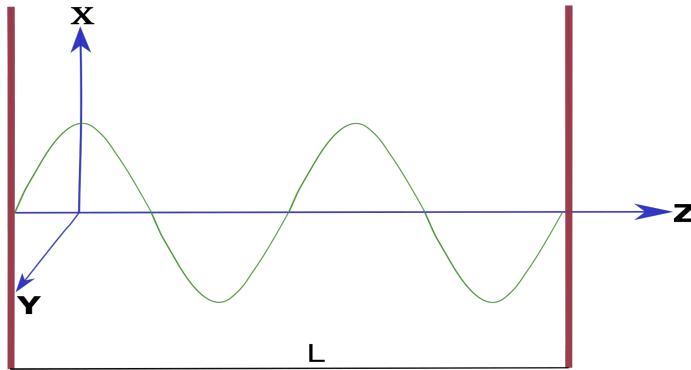


Figura 2.1: Campo electromagnético con frecuencia ω , dentro de una cavidad con paredes perfectamente conductoras situadas en $z = 0$ y $z = L$. Se asume que el campo eléctrico está polarizado en la dirección x y el campo magnético se encuentra en la dirección y .

A partir del esquema de la figura 2.1, se considera que el campo eléctrico se anulará en las fronteras y está polarizado a lo largo de la dirección x , de tal manera que al expandir en los modos normales se obtiene

$$E_x(z, t) = \sum_n \sqrt{\frac{2\omega_n^2}{V\epsilon_0}} q_n(t) \sin(k_n z), \quad (2.4)$$

donde $\omega_n = n\pi c/L$ (con $n = 1, 2, \dots$) es la frecuencia de cada modo, k_n es el número de onda relacionado con la frecuencia de cada modo, $q_n(t)$ es la amplitud del modo normal y V

es el volumen de la cavidad. Al usar la ec. (2.4) en la ec. (2.1b) se obtiene que la componente del campo magnético es

$$H_y(z, t) = \sum_n \sqrt{\frac{2\omega_n^2 \epsilon_0}{V \epsilon_0}} \frac{\dot{q}_n(t)}{k_j} \cos(k_n z). \quad (2.5)$$

La energía del campo electromagnético está dada por

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int_V d\tau (\epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)) \\ &= \frac{1}{2} \int_V d\tau (\epsilon_0 E_x^2(z, t) + \mu_0 H_y^2(z, t)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Reemplazando las ecs. (2.4) y (2.5), y evaluando la integral de volumen se puede escribir la ec. (2.6) como

$$H = \frac{1}{2} \sum_n (\omega_n^2 q_n^2 + p_n^2). \quad (2.7)$$

El hamiltoniano del campo electromagnético se puede ver como una suma de las energías de los osciladores armónicos asociados con cada modo, donde $p_n = \dot{q}_n$ corresponde al momento canónico del modo n . En otras palabras, cada modo del campo es por lo tanto dinámicamente equivalente a un oscilador armónico cuántico.

A partir de la ec. (2.7) se puede cuantizar el campo electromagnético al identificar las variables canónicas q y p , y reemplazarlas por sus correspondientes operadores \hat{q} y \hat{p} , los cuales obedecen las relaciones de conmutación

$$[\hat{q}_n, \hat{p}_{n'}] = i\hbar \delta_{nn'}, \quad (2.8a)$$

$$[\hat{q}_n, \hat{q}_{n'}] = [\hat{p}_n, \hat{p}_{n'}] = 0. \quad (2.8b)$$

Los operadores \hat{q} y \hat{p} son operadores hermitianos y por lo tanto pueden representar una observable física. No obstante, es conveniente introducir los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} , nombrados operador de creación y aniquilación, respectivamente. Los cuales se definen como

$$\hat{a}_n^\dagger e^{i\omega_n t} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_n}} (\omega_n \hat{q}_n - i\hat{p}_n), \quad (2.9a)$$

$$\hat{a}_n e^{-i\omega_n t} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_n}} (\omega_n \hat{q}_n + i\hat{p}_n). \quad (2.9b)$$

Considerando el cambio a operadores \hat{q} y \hat{p} en la ec. (2.7) y haciendo uso de las ecs. (2.9a) y (2.9b), se reescribe el hamiltoniano como

$$\hat{H} = \sum_n \hbar\omega_n \left(\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.10)$$

Los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}^\dagger] = \delta_{nn'}, \quad (2.11a)$$

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}] = [\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_{n'}^\dagger] = 0. \quad (2.11b)$$

2.2 Estados de Fock o de número

En esta sección, por facilidad, nos restringimos al caso de un solo modo del campo electromagnético con frecuencia ω escrito en términos de los operadores de creación \hat{a}^\dagger y aniquilación \hat{a} , como se presenta en la ec. (2.10). Se denota $|n\rangle$ como un eigenestado del campo unimodal con un eigenvalor de energía E_n de modo que

$$\hat{H} |n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (2.12)$$

Multiplicando por la izquierda el operador \hat{a} , considerando la ec. (2.11a) y la relación de conmutación $[\hat{a}, \hat{H}] = \hbar\omega \hat{a}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{a} \hat{H} |n\rangle &= (\hat{a} \hat{H} - \hat{H} \hat{a} + \hat{H} \hat{a}) |n\rangle, \\ &= ([\hat{a}, \hat{H}] + \hat{H} \hat{a}) |n\rangle, \\ &= (\hbar\omega \hat{a} + \hat{H} \hat{a}) |n\rangle, \\ \hat{H} (\hat{a} |n\rangle) &= (E_n - \hbar\omega) \hat{a} |n\rangle, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde se evidencia que el eigenestado $(\hat{a} |n\rangle)$ tiene asociado un eigenvalor de energía $E_n - \hbar\omega$. A partir de esto se aclara que \hat{a} se nombra operador de aniquilación debido a que aniquila un cuanto de energía $\hbar\omega$. Para $\hat{a} |n\rangle$ se tiene que

$$\hat{a} |n\rangle = \zeta_n |n-1\rangle, \quad |n-1\rangle = \frac{\hat{a}}{\zeta_n} |n\rangle, \quad (2.14)$$

donde $|n-1\rangle$ es también un eigenestado del hamiltoniano pero con eigenvalor de energía

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\omega. \quad (2.15)$$

La constante ζ_n en la ec. (2.14) debe ser determinada de tal manera que se cumpla la condición de normalización

$$\langle n-1 | n-1 \rangle = 1. \quad (2.16)$$

Al realizar el procedimiento de tal manera que se vaya disminuyendo la energía en múltiplos enteros de $\hbar\omega$ se obtiene

$$\hat{H}(\hat{a}|0\rangle) = (E_0 - \hbar\omega)\hat{a}|0\rangle, \quad (2.17)$$

donde E_0 es la energía del estado fundamental, por lo tanto $E_0 - \hbar\omega$ hace referencia a un eigenvalor de energía más bajo que E_0 . Debido a que en el oscilador armónico no se permiten energías menores a E_0 , pues $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ es no negativo (no puede tener eigenvalores negativos) se deduce que

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (2.18)$$

El estado $|0\rangle$ se denomina estado vacío o base porque en este hay ausencia de fotones. Considerando esta relación en la ec. (2.12) se puede obtener su eigenvalor de energía

$$\begin{aligned} \hat{H}|0\rangle &= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) |0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega |0\rangle \\ E_0 &= \frac{1}{2}\hbar\omega. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Considerando el valor de la energía del estado base y la ec. (2.15), los eigenvalores de energía para los estados excitados se pueden escribir como

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

De acuerdo a lo anterior y haciendo uso de la ec. (2.12) se obtiene para el operador de número $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (2.21)$$

el eigenestado $|n\rangle$ es también un eigenestado del operador de número.

Se puede ahora determinar la constante ζ_n usando las ecs. (2.14) y (2.21) en la ec. (2.16) de modo que

$$\langle n-1|n-1\rangle = \frac{1}{|\zeta_n|^2} \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \frac{n}{|\zeta_n|^2} \langle n|n\rangle = 1, \quad (2.22)$$

donde $|\zeta_n|^2 = n$, por lo tanto tomando una fase real $\zeta = \sqrt{n}$. La ec. (2.14) se reescribe como

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (2.23)$$

Si se procede de manera similar con el operador de creación \hat{a}^\dagger , se puede deducir que

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.24)$$

Si se usa de manera repetitiva el operador de creación \hat{a}^\dagger , se puede escribir cualquier estado $|n\rangle$ a partir del estado base $|0\rangle$ como

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.25)$$

Los eigenestados $|n\rangle$ son denominados estados de Fock o estados de número de fotones. Estos forman un conjunto completo de estados de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1. \quad (2.26)$$

Se puede interpretar la ec. (2.20) como los eigenvalores de energía debido a la presencia de n cuantos o fotones con energía $\hbar\omega$. En este caso los eigenvalores de energía son discretos, lo cual contrasta con la teoría clásica electromagnética en donde la energía puede tener cualquier valor.

2.3 Estados coherentes

Los estados coherentes tienen importancia en la mecánica cuántica, especialmente, en la óptica cuántica. Estos son estados del oscilador armónico, los cuales imitan de la mejor manera posible el movimiento clásico de una partícula en un potencial cuadrático pues mantienen su forma durante la evolución temporal [19]. Para estos estados se tiene que el producto de momento y posición es el mínimo permitido por el principio de incertidumbre de Heisenberg. De acuerdo a esto, se puede decir que son los estados de la mecánica cuántica más cercanos a la descripción clásica del campo. Los estados coherentes se pueden generar a partir del operador de desplazamiento [25], el cual es un operador unitario dado por

$$\hat{D}(\alpha) = \exp\{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}\} = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}}, \quad (2.27)$$

donde α es un número complejo arbitrario. Para la segunda igualdad hemos usado un caso especial de la formula de Baker–Campbell–Hausdorff

$$e^{X+Y} = e^X e^Y e^{[X,Y]/2}, \quad (2.28)$$

para operadores que cumplen

$$[X, [X, Y]] = [Y, [X, Y]] = 0. \quad (2.29)$$

Algunas de las propiedades del operador de desplazamiento unitario $\hat{D}(\alpha)$ son

$$\begin{aligned}\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) &= \hat{a} + \alpha, \\ \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) &= \hat{a}^\dagger + \alpha^*, \\ \hat{D}^\dagger(\alpha) &= \hat{D}^{-1}(\alpha) = \hat{D}(-\alpha).\end{aligned}\tag{2.30}$$

Se puede generar el estado coherente $|\alpha\rangle$ aplicando $\hat{D}(\alpha)$ al estado de vacío

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle.\tag{2.31}$$

Los estados coherentes son eigenestados del operador de aniquilación \hat{a} . Lo anterior puede demostrarse usando la ec. (2.31) y retomando las propiedades de la ec. (2.30) de tal manera que

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}|\alpha\rangle = \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha)|0\rangle = (\hat{a} + \alpha)|0\rangle = \alpha|0\rangle,\tag{2.32}$$

al multiplicar por la izquierda $\hat{D}(\alpha)$ a ambos lados se obtiene una ecuación de eigenvalores

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.\tag{2.33}$$

Usando la ec. (2.28) se obtiene otra propiedad útil:

$$\hat{D}(\alpha + \beta) = \hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta)\exp\{-i\text{Im}(\alpha\beta^*)\}.\tag{2.34}$$

En términos de los estados de número, los estados coherentes se pueden expresar como

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle.\tag{2.35}$$

Se define $\langle n|\alpha\rangle = C_n$ y se reemplaza la expansión en la ec. de eigenvalores (2.33)

$$\begin{aligned}\hat{a}|\alpha\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} C_n |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha C_n |n\rangle, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} C_{n+1} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha C_n |n\rangle.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Lo anterior implica que $\forall n \geq 0$

$$C_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} C_n.\tag{2.37}$$

Evaluando para diferentes valores de n y reemplazando lo que equivale cada C_{n+1} en términos de C_0 se obtiene

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{1}} C_0 \\ C_2 &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} C_1 = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} C_0 \\ C_3 &= \frac{\alpha}{\sqrt{3}} C_2 = \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}} C_0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

En general, se puede escribir C_n en términos de C_0 como

$$C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0. \quad (2.39)$$

El estado coherente $|\alpha\rangle$ debe estar normalizado, por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 &= C_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = C_0^2 e^{|\alpha|^2} = 1. \\ \rightarrow C_0 &= e^{-|\alpha|^2/2}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Sustituyendo las ecs. (2.39) y (2.40) se reescribe el estado coherente de la ec. (2.35) como

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} |n\rangle. \quad (2.41)$$

Se puede evidenciar que la probabilidad de detectar n fotones de un estado coherente es una distribución de Poisson

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}, \quad (2.42)$$

donde $|\alpha|^2$ es el número promedio de fotones ($\bar{n} = \langle \alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2$). En la figura 2.2 se muestra un ejemplo de la distribución de probabilidad del número de fotones para $\bar{n} = 25$.

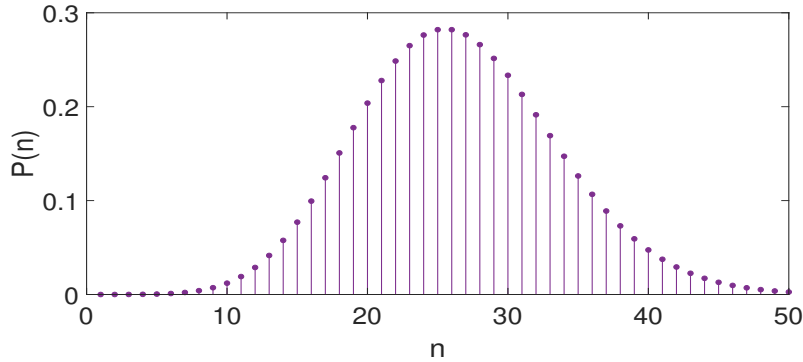


Figura 2.2: Distribución de probabilidad de un estado coherente para $\bar{n} = 25$.

2.4 Función Q de Husimi

La función Q de Husimi es una distribución de cuasi-probabilidad que permite representar un estado cuántico en el espacio fase, donde es siempre positiva [19]. Se define la función de Husimi de un estado cuántico puro $|\psi\rangle$ en términos de su traslape con un estado coherente arbitrario de la siguiente manera

$$Q(\beta_r, \beta_i) = \frac{1}{\pi} |\langle \beta | \psi \rangle|^2, \quad (2.43)$$

donde β_r y β_i son la parte real y la parte imaginaria de beta, respectivamente, y determinan el estado coherente $|\beta\rangle$. Por lo tanto cada valor de Q depende de estas dos variables, además β_r y β_i abarcan el espacio fase de la función Q , jugando el rol de posición y momento respectivamente. Otra forma de escribir la función Q es

$$Q(\beta_r, \beta_i) = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \psi \rangle \langle \psi | \beta \rangle, \quad (2.44)$$

a partir de lo anterior y considerando que el operador de densidad de un estado puro es

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (2.45)$$

la ec. (2.44) se reescribe como

$$Q(\beta_r, \beta_i) = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \hat{\rho} | \beta \rangle. \quad (2.46)$$

La función Q de Husimi es el valor esperado del operador de densidad $\hat{\rho}$ del campo con respecto a estados coherentes $|\beta\rangle$ [20].

Función Q de un estado coherente

Primero se consideran dos estados coherentes $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} |n\rangle$$

y

$$|\beta\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} e^{-|\beta|^2/2} |m\rangle.$$

A partir de la condición de ortogonalidad entre los estados $|n\rangle$ y $|m\rangle$ se obtiene

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \beta)^n}{n!} = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \alpha^* \beta},$$

se sigue de lo anterior

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}. \quad (2.47)$$

En caso que se tenga como estado cuántico específico un estado coherente $|\alpha\rangle$, haciendo uso de la relación de no ortogonalidad de la ec. (2.47) entre dos estados coherentes, se encuentra

$$Q(\beta_r, \beta_i) = \frac{1}{\pi} |\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \exp\{-|\beta - \alpha|^2\}, \quad (2.48)$$

la relación $|\beta - \alpha|^2$ se puede reescribir en función de las componentes reales e imaginarias como

$$|\beta - \alpha|^2 = |(\beta_r - \alpha_r) + i(\beta_i - \alpha_i)|^2 = (\beta_r - \alpha_r)^2 + (\beta_i - \alpha_i)^2,$$

por lo tanto la ec. (2.48) toma la forma

$$Q(\beta_r, \beta_i) = \frac{1}{\pi} \exp\{-(\beta_r - \alpha_r)^2 - (\beta_i - \alpha_i)^2\}. \quad (2.49)$$

Así la función Q de Husimi de un estado coherente $|\alpha\rangle$ es una campana gaussiana, como se muestra en la Figura 2.3. Esta campana gaussiana es simétrica, es decir, las líneas de contorno donde la campana gaussiana decae son círculos.

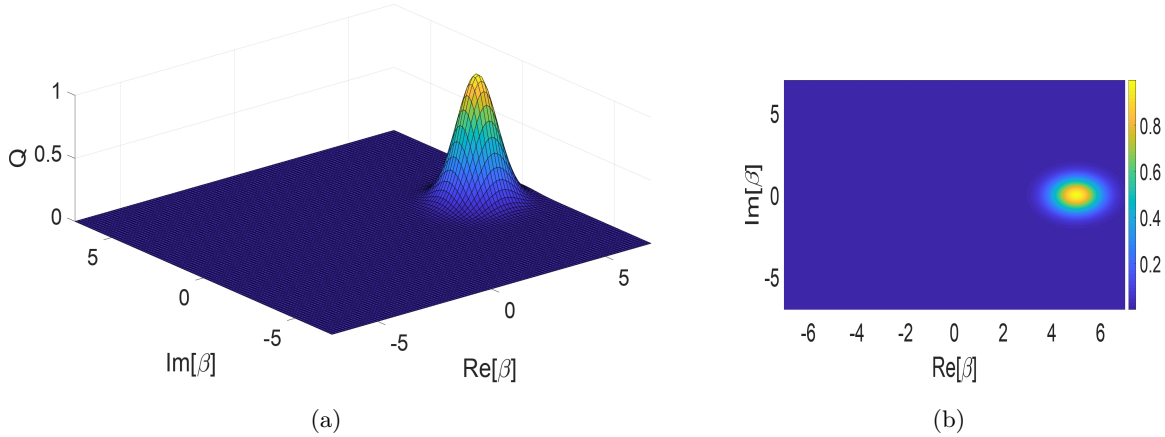


Figura 2.3: (a) Función Q de un estado coherente $|\alpha\rangle$, tomando $\alpha = 5$. (b) Mapa de colores en el plano complejo de la función de Husimi para el estado coherente $|\alpha\rangle$.

2.5 Interacción átomo - campo

La interacción entre el campo de radiación \mathbf{E} con una átomo de un solo electrón de acuerdo a la aproximación dipolar se puede describir con el hamiltoniano [20]

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{átomo}} + \hat{H}_{\text{campo}} + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.50)$$

donde \hat{H}_{campo} es la energía del campo de radiación, $\hat{H}_{\text{átomo}}$ es la energía del átomo y \mathbf{r} es el vector de posición del electrón. En el caso de la aproximación dipolar se asume que el campo es uniforme sobre todo el átomo.

La energía del campo está dada en términos de los operadores de creación y aniquilación como se evidencia en la ec. (2.10), mientras que la energía del átomo $\hat{H}_{\text{átomo}}$ y $e\mathbf{r}$ se puede escribir en términos de los operadores de transición atómica

$$\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|, \quad (2.51)$$

aquí $|i\rangle$ es un conjunto completo de eigenestados del hamiltoniano del átomo, es decir, $\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$. Por lo tanto se deduce que existe una ecuación de eigenvalores para el átomo, $\hat{H}_{\text{átomo}} |i\rangle = E_i |i\rangle$, lo cual conlleva a

$$\hat{H}_{\text{átomo}} = \sum_i E_i |i\rangle\langle i| = \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii}. \quad (2.52)$$

Adicionalmente, se puede escribir el operador $e\mathbf{r}$ en esta base

$$e\mathbf{r} = \sum_{ij} e |i\rangle \langle i|\mathbf{r}|j\rangle \langle j| = \sum_{ij} \gamma_{ij} \hat{\sigma}_{ij}, \quad (2.53)$$

siendo $\gamma_{ij} = e \langle i|\mathbf{r}|j\rangle$ el elemento de la matriz de transición del dipolo eléctrico. En relación al operador de campo eléctrico se considera que este se puede expandir en términos de ondas planas, por lo tanto, su forma cuantizada en el marco de Heisenberg se escribe como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \vec{\epsilon}_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2V\epsilon_0}} \hat{a}_l e^{-i\omega_l t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{h.c.}, \quad (2.54)$$

donde h.c se refiere al hermitiano conjugado.

Para este caso el campo eléctrico se evalúa en la aproximación dipolar tomando la posición del átomo puntual, por lo tanto, para un átomo en el origen al considerar la ec. (2.54) en el marco de Schrödinger donde la dependencia temporal es atribuida a los estados, se obtiene que

$$\mathbf{E} = \sum_l \vec{\epsilon}_l \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2V\epsilon_0}} (\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger). \quad (2.55)$$

Para simplificar se toma una base de polarización lineal y el vector de polarización unitario será real. Al sustituir las ecs. (2.10), (2.52), (2.53) y (2.55) en la ec. (2.50) se obtiene

$$\hat{H} = \sum_l \hbar\omega_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} + \hbar \sum_{ij} \sum_l g_l^{ij} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger), \quad (2.56)$$

se omite el nivel cero de energía para el primer término y se define

$$g_l^{ij} = \frac{\gamma_{ij} \cdot \vec{\epsilon}_l \sqrt{\frac{\hbar \omega_l}{2V\epsilon_0}}}{\hbar}. \quad (2.57)$$

Adicionalmente γ_{ij} se asume como real por simplicidad. Como ejemplo de la interacción átomo-campo, se tiene el caso de un átomo de dos niveles. Si $\gamma_{eg} = \gamma_{ge}$ se tiene

$$g_l = g_l^{eg} = g_l^{ge}. \quad (2.58)$$

En este caso el hamiltoniano que describe el sistema partiendo de la ec. (2.56) toma la forma

$$\hat{H} = \sum_l \hbar \omega_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + (E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_g \hat{\sigma}_{gg}) + \hbar \sum_l g_l (\hat{\sigma}_{eg} + \hat{\sigma}_{ge})(\hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger). \quad (2.59)$$

El término correspondiente a la energía del átomo en la ec. (2.59) se puede reescribir de tal modo que

$$E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_g \hat{\sigma}_{gg} = \frac{1}{2} \hbar \omega_{\text{átomo}} (\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}) + \frac{1}{2} (E_e + E_g), \quad (2.60)$$

se establece que $(E_e - E_g) = \hbar \omega_{\text{átomo}}$ y $(\hat{\sigma}_{ee} + \hat{\sigma}_{gg}) = 1$. Además, el valor constante de energía $(E_e + E_g)/2$ se puede ignorar sin afectar la dinámica al sistema.

Para simplificar la notación se usa

$$\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg} = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (2.61a)$$

$$\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_{eg} = |e\rangle\langle g|, \quad (2.61b)$$

$$\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_{ge} = |g\rangle\langle e|, \quad (2.61c)$$

en notación matricial $\hat{\sigma}_z$, $\hat{\sigma}_+$ y $\hat{\sigma}_-$ están representadas por

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Además $\hat{\sigma}_z$, $\hat{\sigma}_+$ y $\hat{\sigma}_-$ satisfacen el álgebra de las matrices de Pauli para spin 1/2:

$$[\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_+] = -\hat{\sigma}_z, \quad (2.63a)$$

$$[\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_z] = 2\hat{\sigma}_-. \quad (2.63b)$$

El operador $\hat{\sigma}_-$ toma un átomo en el estado superior y lo manda al estado inferior mientras que $\hat{\sigma}_+$ toma un átomo en un estado inferior y lo manda al estado superior. Se reescribe la ec. (2.59) usando las ecs. (2.60) y (2.61) como

$$\hat{H} = \sum_n \hbar \omega_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2} \hbar \omega_{\text{átomo}} \hat{\sigma}_z + \hbar \sum_n g_n (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger). \quad (2.64)$$

Capítulo 3

Modelos de un átomo dentro de una cavidad

En este capítulo se describe el sistema de un átomo de dos niveles interactuando con un modo dentro de una cavidad electromagnética, se presenta una solución analítica del sistema a partir de la cual se realiza un análisis de la dinámica del mismo y se realiza la aproximación en estados coherentes de un estado que evoluciona en el tiempo. Siguiendo el proceso de análisis en el modelo de un átomo de dos niveles se presenta una extensión de estos conceptos al caso donde el átomo que interactúa dentro de la cavidad tiene tres niveles.

3.1 Modelo de Jaynes-Cummings

El ejemplo más emblemático en sistemas de átomos en cavidades es aquel que considera un átomo de dos niveles en interacción con un modo del campo electromagnético (ver figura 3.1), en la denominada aproximación de onda rotante [9]. En este caso se toma que la energía del átomo es resonante con un modo del campo electromagnético, pero antiresonante con el resto. Por ello, no hay intercambio de excitaciones con otros modos. El sistema es exactamente soluble y lleva el nombre de modelo de Jaynes-Cummings (MJC), quienes lo introdujeron en 1963 [12]. Ha sido estudiado ampliamente no solo en el ámbito de cavidades [21], sino que ha sido empleado para describir sistemas en trampas de iones [24], donde además ha sido fundamental para tareas de cómputo cuántico con la celebrada compuerta CNOT de Cirac-Zoller [7]. Recientemente, este modelo y sus extensiones a más

átomos [22] han sido considerados para describir la física de átomos y cavidades artificiales en sistemas de circuitos superconductores [26].

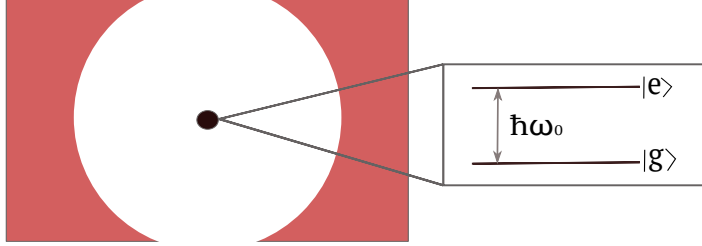


Figura 3.1: Ilustración de un átomo de dos niveles en una cavidad electromagnética: espacio entre dos paredes conductoras.

3.1.1 Hamiltoniano de un átomo de dos niveles

El hamiltoniano que describe la dinámica del sistema de un átomo de dos niveles, cuyos estados pueden escribirse como

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

y que interactúa con un modo del campo electromagnético dentro de la cavidad, siguiendo la ec. (2.64) está dado por

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_{\text{campo}} + \hat{H}_{\text{átomo}} + \hat{H}_{\text{int}} \\ &= \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se puede simplificar el hamiltoniano de interacción aplicando la aproximación de onda rotante [19], la cual consiste en ignorar los términos $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ y $\hat{\sigma}_- \hat{a}$. Para entender un poco lo correspondiente a la matemática de la aproximación, en este caso se puede considerar que $\hat{H}_I = \hat{H}_{\text{campo}} + \hat{H}_{\text{átomo}}$, por lo tanto, se reescribe la ec. (3.2) como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_I + \hat{H}_{\text{int}} \\ \hat{H}_{\text{int}} &= \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para este hamiltoniano se puede definir el estado $|\phi^{(I)}(t)\rangle$ en el marco de interacción tal que

$$|\phi(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_I t\right\} |\phi^{(I)}(t)\rangle. \quad (3.4)$$

Al sustituir la propuesta de la ec. (3.4) para el estado $|\phi^{(I)}(t)\rangle$ en el marco de interacción dentro de la ecuación de Schrödinger se obtiene que

$$i\hbar \frac{d|\phi(t)\rangle}{dt} = (\hat{H}_I + \hat{H}_{\text{int}}) |\phi(t)\rangle, \quad (3.5)$$

de lo que se sigue

$$i\hbar \frac{d|\phi^{(I)}(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_{\text{int}}^{(I)} |\phi^{(I)}(t)\rangle, \quad (3.6)$$

definiendo

$$\hat{H}_{\text{int}}^{(I)} \equiv e^{i\hat{H}_I t/\hbar} \hat{H}_{\text{int}} e^{-i\hat{H}_I t/\hbar} \quad (3.7)$$

donde $\hat{H}_{\text{int}}^{(I)}$ corresponde al hamiltoniano \hat{H}_{int} en el marco de interacción. Al sustituir el hamiltoniano \hat{H}_I dentro de la ec. (3.7), y evidenciando que los operadores del átomo y campo conmutan, se obtiene

$$\hat{H}_{\text{int}}^{(I)} = \hbar g \left(e^{i\omega_0 \hat{\sigma}_z t/2} (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) e^{-i\omega_0 \hat{\sigma}_z t/2} e^{i\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} t} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) e^{-i\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \right). \quad (3.8)$$

Para evaluar la parte atómica se considera la representación matricial de $\hat{\sigma}_z$ a partir de la ec. (2.62) de modo que

$$e^{i\omega_0 \hat{\sigma}_z t/2} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_0 t/2} \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a lo anterior y tomando la representación matricial de $\hat{\sigma}_-$ de la ec. (2.62) resulta que

$$\begin{aligned} e^{i\omega_0 \hat{\sigma}_z t/2} \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_0 \hat{\sigma}_z t/2} &= \begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\omega_0 t} & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

como consecuencia de la ec. (3.9) la parte atómica del hamiltoniano de interacción en el marco de interacción se puede reescribir como

$$e^{i\omega_0 \hat{\sigma}_z t/2} (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) e^{-i\omega_0 \hat{\sigma}_z t/2} = \hat{\sigma}_+ e^{i\omega_0 t} + \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_0 t}. \quad (3.10)$$

Para el campo es preciso considerar que la evolución temporal del operador de aniquilación es

$$\hat{a}(t) = e^{i\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a}(0) e^{-i\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a}(0) e^{-i\omega t}.$$

Considerando lo anterior se obtiene que

$$e^{i\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)e^{-i\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}t} = \hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}. \quad (3.11)$$

Así, sustituyendo los resultados de las ecs (3.10) y (3.11) en la ec. (3.8) el hamiltoniano $\hat{H}_{int}^{(I)}$ se puede escribir como

$$\hat{H}_{int}^{(I)} = \hbar g (\hat{\sigma}_+ e^{i\omega_0 t} + \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_0 t}) (\hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}), \quad (3.12a)$$

$$= \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{-i(\omega-\omega_0)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{i(\omega+\omega_0)t} + \hat{\sigma}_- \hat{a} e^{-i(\omega+\omega_0)t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{i(\omega-\omega_0)t}). \quad (3.12b)$$

Se evidencia que el segundo y el cuarto término, que hacen referencia a la no conservación de excitaciones, se multiplican por términos oscilatorios los cuales incluyen la suma de la frecuencia de la cavidad y la frecuencia de transición atómica. El término $\hat{\sigma}_+ \hat{a}$ describe el proceso en el cual el átomo se va de un estado inferior a un estado superior de excitación y un fotón es destruido, mientras que $\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger$ se refiere al proceso en el cual el átomo se va de un estado superior a un estado inferior de excitación y un fotón es creado. Por otro lado, el primero y cuarto involucra un término que hace referencia a una diferencia de frecuencias, la cual se define como $\Delta = \omega - \omega_0$. Además, el segundo y tercer término oscilan con una frecuencia que es aproximadamente dos veces la frecuencia óptica, al contrario de los otros dos términos que varían lentamente. Debido a que la ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial de primer orden en el tiempo, se integra en el tiempo. Al realizar la integración en el tiempo resulta la suma y diferencia de las frecuencias en el denominador. De tal manera que la contribución que domina es la que corresponde a los términos que varían lentamente. Por consiguiente, en el marco de interacción se puede aproximar $\hat{H}_{int}^{(I)}$ a

$$\hat{H}_{int}^{(I)} \cong \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{-i\Delta t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{i\Delta t}). \quad (3.13)$$

El hamiltoniano de interacción correspondiente en el marco de Schrödinger es

$$\hat{H}_{int} \cong \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger). \quad (3.14)$$

Considerando el resultado de la ec. (3.14) se puede reescribir la ec. (3.2) como

$$\hat{H}_{JC} = \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger), \quad (3.15)$$

el cual se conoce como hamiltoniano de Jaynes-Cummings y describe al sistema de un átomo de dos niveles interactuando con un modo dentro de una cavidad electromagnética.

3.1.2 Solución analítica

En el sistema descrito por el hamiltoniano de la ec. (3.15) se define un parámetro de desintonía $\Delta = \omega - \omega_0$, el cual se toma en este trabajo como $\Delta = 0$. Por lo tanto, la frecuencia del campo será igual a la frecuencia de transición atómica. Además, se identifica una constante de movimiento

$$\hat{I} = \hat{\sigma}_z + \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (3.16)$$

la cual conmuta con el hamiltoniano, $[\hat{H}_{JC}, \hat{I}] = 0$. Por lo tanto, \hat{H}_{JC} se puede representar en la base de eigenestados de \hat{I} , $\{|n-1, e\rangle, |n, g\rangle\}$, así adopta una estructura diagonal por bloques 2×2

$$\hat{H}_{JC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{H}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \hat{H}_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \end{pmatrix}.$$

En el marco de interacción los bloques se representan como

$$\hat{H}_n = \hbar \begin{bmatrix} 0 & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & 0 \end{bmatrix} \quad n = \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (3.17)$$

Los eigenestados y eigenenergías asociados a cualquier bloque \hat{H}_n son

$$|\Phi_{\pm}^{(n)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n-1, e\rangle \pm |n, g\rangle), \quad (3.18a)$$

$$E_{\pm}^{(n)} = \pm \hbar g\sqrt{n}, \quad (3.18b)$$

para $n > 0$. Cuando $n = 0$ solo hay un estado dado por $|0, g\rangle$ con energía $E^{(0)} = 0$.

3.1.3 Aproximación en estados coherentes

Para el modelo de Jaynes-Cummings donde se tiene un átomo de dos niveles que interactúa con un modo del campo electromagnético cuantizado, asumiendo resonancia exacta y realizando aproximación de onda rotante [9] como se expuso anteriormente, el hamiltoniano de interacción es independiente del tiempo y se escribe como

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g [\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger]. \quad (3.19)$$

Si se quiere encontrar la evolución temporal del estado inicial $|\psi_0\rangle = |\alpha\rangle |g\rangle$, donde $|\alpha\rangle$ es un estado coherente descrito por la ec. (2.41), se tiene que

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\alpha\rangle |g\rangle = U(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} |n, g\rangle. \quad (3.20)$$

Considerando la solución exacta del bloque \hat{H}_n , se define la relación de completéz como

$$|0, g\rangle\langle 0, g| + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=\pm} |\Phi_l^{(m)}\rangle \langle \Phi_l^{(m)}| = 1. \quad (3.21)$$

Se incluye (3.21) en (3.20) para obtener

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} |0, g\rangle + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=\pm} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} U(t) |\Phi_l^{(m)}\rangle \langle \Phi_l^{(m)} | n, g\rangle. \quad (3.22)$$

El operador de evolución temporal actuando sobre los eigenestados de $H^{(n)}$ resulta en

$$U(t) |\Phi_{\pm}^{(n)}\rangle = e^{-iE_{\pm}^{(n)}t/\hbar} |\Phi_{\pm}^{(n)}\rangle. \quad (3.23)$$

Al usar el resultado de (3.18b) en la ec. (3.23) y tomando el resultado de $\langle \Phi_l^{(m)} | n, g\rangle$ a partir de los eigenestados en (3.18a), se puede reescribir (3.22) como

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2} |0, g\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left(e^{-ig\sqrt{n}t} |\Phi_+^{(n)}\rangle - e^{ig\sqrt{n}t} |\Phi_-^{(n)}\rangle \right) \right] \quad (3.24)$$

Reemplazando $|\Phi_{\pm}^{(n)}\rangle$ de la ec. (3.18a) en (3.24) se obtiene

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2} |0, g\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left(e^{-ig\sqrt{n}t} \frac{[|n-1, e\rangle + |n, g\rangle]}{\sqrt{2}} - e^{ig\sqrt{n}t} \frac{[|n-1, e\rangle - |n, g\rangle]}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (3.25)$$

Este es un resultado exacto, sin embargo, está dado para un número infinito de componentes.

Para un mejor análisis se recurrirá a aproximaciones para estados coherentes que presentan un número promedio de fotones alto, $|\alpha|^2 \gg 1$. Se realizan 2 procedimientos: la linealización de \sqrt{n} alrededor del número promedio de fotones

$$\begin{aligned} \sqrt{n} &\approx \sqrt{\bar{n}} + \frac{1}{2} \frac{(n - \bar{n})}{\sqrt{\bar{n}}} + \dots \\ &\approx \frac{\sqrt{\bar{n}}}{2} + \frac{n}{2\sqrt{\bar{n}}} + \dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

Y se trata $\alpha = \sqrt{n}e^{i\phi}$, entonces al cambiar $n \rightarrow n+1$ en los estados $|n-1, e\rangle$ se usa la aproximación

$$\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} = \frac{(\sqrt{n}e^{i\phi})^n \sqrt{n}e^{i\phi}}{\sqrt{n!} \sqrt{n+1}} \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i\phi}. \quad (3.27)$$

Se reemplazan los resultados de las ecs. (3.26) y (3.27) en la ec. (3.25), considerando que $e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \approx 0$, por lo tanto, se puede extender la sumatoria a cero para obtener

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left[e^{-ig\sqrt{n}t/2} e^{-ignt/2\sqrt{n}} |n\rangle \left(\frac{e^{i(\phi-gt/2\sqrt{n})} |e\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}} \right) - e^{ig\sqrt{n}t/2} e^{ignt/2\sqrt{n}} |n\rangle \left(\frac{e^{i(\phi+gt/2\sqrt{n})} |e\rangle - |g\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (3.28)$$

Se define

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2}} \left(\alpha e^{\mp ilgt/2\sqrt{n}} \right)^n |n\rangle = \left| \alpha e^{\mp ilgt/2\sqrt{n}} \right\rangle, \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(l e^{i\phi \mp ilgt/2\sqrt{n}} |e\rangle + |g\rangle \right) = |v_l(t)\rangle.$$

Usando $l = \pm 1$ el resultado de la ec. (3.28) se puede reescribir de manera simplificada como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{l=\pm 1} \frac{e^{\mp ilg\sqrt{n}t/2}}{\sqrt{2}} \left| \alpha e^{\mp ilgt/2\sqrt{n}} \right\rangle |v_l(t)\rangle. \quad (3.30)$$

La ecuación anterior muestra una aproximación de la evolución temporal del estado cuando el número promedio de fotones es grande. En esta los estados atómicos $|v_l(t)\rangle$ resultan ser independientes del estado inicial, mientras que las componentes del campo $\left| \alpha e^{\mp ilgt/2\sqrt{n}} \right\rangle$ son estados coherentes que giran sobre un círculo en el espacio fase con una frecuencia $\omega = g/2\sqrt{n}$ que depende del acoplamiento con el átomo y el número promedio de fotones.

Esta forma aproximada de la solución permite un mejor análisis de la dinámica, pues queda escrita en términos únicamente de dos estados coherentes del campo. Por ejemplo, de la ec. (3.30) es posible definir un tiempo t_r como el momento en el cual estos estados vuelven a juntarse, por lo tanto, se tiene que

$$\left| \left\langle \alpha e^{-igt_r/2\sqrt{n}} \left| \alpha e^{igt_r/2\sqrt{n}} \right\rangle \right| = 1, \quad (3.31)$$

de acuerdo a la propiedad de no ortogonalidad de dos estados coherentes diferentes definida como

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha^* \beta)}, \quad (3.32)$$

se tiene que la ec. (3.31) se puede reescribir de modo que

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \alpha e^{-igt_r/2\sqrt{\bar{n}}} \left| \alpha e^{igt_r/2\sqrt{\bar{n}}} \right\rangle \right| &= \left| e^{-1/2 |\alpha|^2 (2 - 2 e^{igt_r/\sqrt{\bar{n}}})} \right| = 1 \\ &= e^{-|\alpha|^2 (1 - \cos gt_r/\sqrt{\bar{n}})} = 1, \end{aligned} \quad (3.33)$$

a partir de lo anterior se obtiene que el tiempo de resurgimiento para el modelo de Jaynes-Cummings es

$$t_r = \frac{2\pi\sqrt{\bar{n}}}{g} = \frac{\pi}{\tilde{\omega}_0}, \quad \tilde{\omega}_0 = \frac{g}{2\sqrt{\bar{n}}} \quad (3.34)$$

donde g es la frecuencia de Rabi y \bar{n} es el número promedio de fotones en la cavidad. La segunda igualdad esta relacionada directamente con la frecuencia $\tilde{\omega}_0$ a la que giran los estados coherentes en el espacio fase que se relaciona con la derivada de las eigenfrecuencias $\pm g\sqrt{\bar{n}}$ encontradas para el bloque \hat{H}_n , linealizadas alrededor del número promedio de fotones.

3.2 Oscilaciones de Rabi

Un caso de interés en el MJC surge al considerar un estado coherente dentro de la cavidad, es decir, el estado base del oscilador armónico, pero con un posible desplazamiento en posición y momento [19, 20]. En esta situación, se presenta un fenómeno muy interesante que fue descubierto de manera numérica al inicio de los años ochenta [8]: la probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado oscila en el tiempo, sin embargo, las oscilaciones eventualmente cesan o colapsan para resurgir a un tiempo posterior. Este fenómeno cuántico contrasta con lo que se conocía hasta los años setenta con el modelo de Rabi semiclásico, que consideraba un átomo de dos niveles (cuántico) en interacción con un campo electromagnético clásico. En esta descripción semi-clásica, la interacción produce un cambio periódico en las poblaciones de los estados atómicos, lo cual se conoce como oscilaciones de Rabi. En el modelo de Jaynes-Cummings, en cambio, el fenómeno es más rico: las oscilaciones de Rabi sufren colapsos y resurgimientos [11].

En la figura 3.2 se presenta el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi para el modelo de Jaynes-Cummings, que se da al tiempo, t_r , presentado en la ec. (3.34) [9, 11]. Este comportamiento fue reportado por primera vez en [8] y ha sido reproducido en otros trabajos [11].

El fenómeno de colapso y resurgimiento de oscilaciones de Rabi ha sido ya estudiado con algunas generalizaciones a más de un átomo [11] y se ha mostrado su utilidad en la preparación de estados atómicos [6, 10]. En este tipo de estudios resulta muy útil

la representación del estado de la cavidad en el espacio fase por medio de una función de cuasiprobabilidad como la función de Husimi presentada anteriormente [19]. En este caso, es posible notar que el colapso de oscilaciones de Rabi está relacionado a la separación de componentes del estado fotónico en el espacio fase a la mitad del tiempo de resurgimiento. A manera de ejemplo, como se ha realizado en trabajos anteriores [9,11], en la figura 3.3 se muestra la función de Husimi que representa el estado del campo dentro de la cavidad. Las oscilaciones de Rabi se presentan cuando el estado coherente inicial se empieza a dividir. El colapso de oscilaciones sucede cuando las dos componentes fotónicas se encuentran bien separadas (ver figura 3.3b). El resurgimiento se da cuando la evolución dinámica lleva estas componentes a reencontrarse en el espacio fase a un tiempo t_r (ver figura 3.3c) [11]. La imperfección en el resurgimiento de la figura 3.2 se explica entonces por la deformación de los estados fotónicos que dejan de ser estados coherentes.

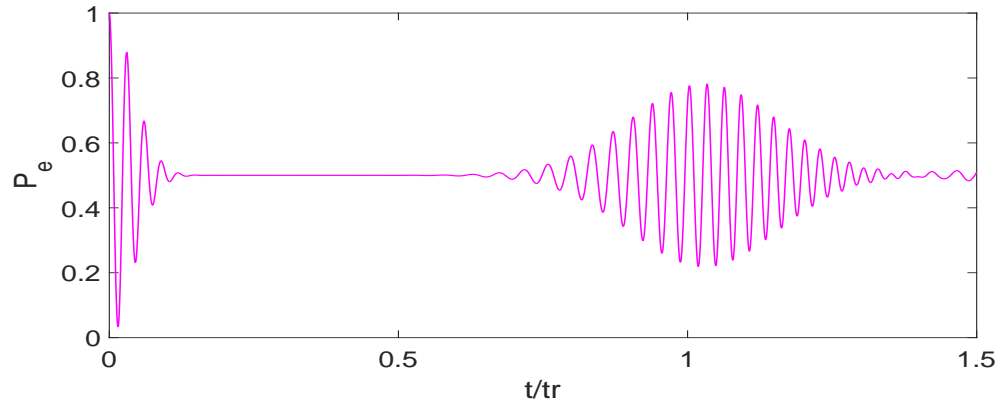


Figura 3.2: Probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado como función del tiempo para un átomo de dos niveles, que interactúa con el campo electromagnético dentro de una cavidad preparada inicialmente en un estado coherente $|\alpha\rangle$, con $\alpha = 4$.

Aún cuando los estados del campo sufran deformaciones del estado original, se ha mostrado [6,10] que la aproximación en estados coherentes resulta ser una excelente forma de aproximar las componentes atómicas, ya que éstos siguen las trayectorias de las componentes del campo [9]. Además, una aproximación del estado total del sistema en términos de estados coherentes es muy útil para capturar propiedades importantes de las componentes atómicas. Este tipo de estados aproximados fueron considerados inicialmente por Gea-Banacloche [9] para el MJC.

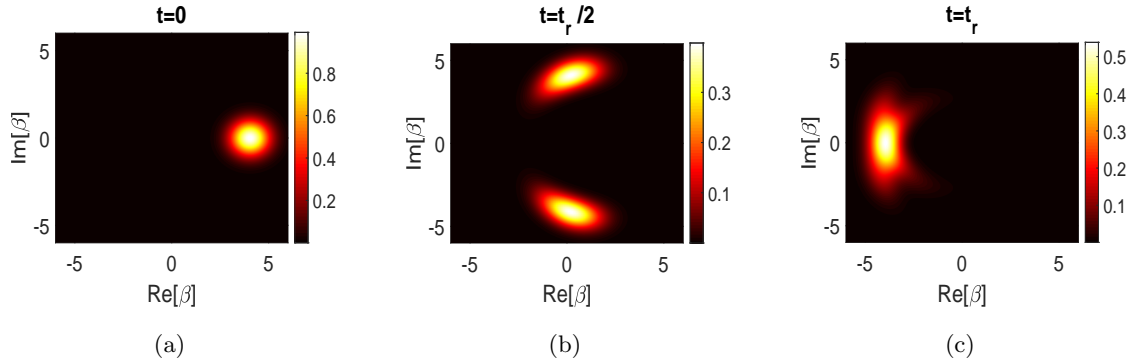


Figura 3.3: Función de Husimi en el plano complejo o espacio fase de un oscilador representando el estado del campo electromagnético dentro de una cavidad, que interactúa con un átomo de dos niveles. Se muestra al tiempo $t = 0$, $t = t_r/2$ y $t = t_r$. Los parámetros son los indicados en la Fig. 3.2

3.3 Sistema con un átomo de tres niveles

Durante los últimos años en el campo de la óptica cuántica se ha prestado bastante atención al estudio de un sistema atómico de tres niveles interactuando con un modo o dos del campo electromagnético para diferentes configuraciones [1,2]. En especial se ha considerado el caso libre e interactuando con pulsos de luz o un tratamiento semi-clásico en situaciones de considerable interés como son: enfriamiento de átomos [17] y la transferencia de estados atómicos [4]. Sin embargo, hasta nuestro conocimiento, el caso completamente cuántico no ha sido tan explorado.

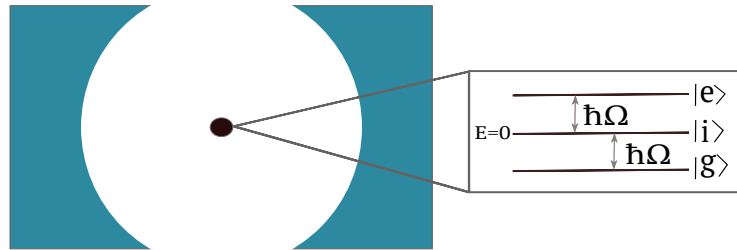


Figura 3.4: Ilustración de un átomo de tres niveles en una cavidad.

Se puede extrapolar el análisis del modelo de un átomo de dos niveles presentado anteriormente y conocido como el modelo de Jaynes-Cummings al caso en donde el átomo que interactúa dentro de la cavidad tiene tres niveles y su configuración es como se muestra en la figura 3.4

3.3.1 Hamiltoniano

En el sistema de un átomo de tres niveles sus estados se pueden representar como

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

De acuerdo a la ec. (2.52) el hamiltoniano del átomo se puede escribir como

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{átomo}} &= E_e |e\rangle\langle e| + E_i |i\rangle\langle i| + E_g |g\rangle\langle g| \\ &= \hbar\Omega |e\rangle\langle e| - \hbar\Omega |g\rangle\langle g| \\ &= \hbar\Omega \hat{\sigma}_z. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Donde hemos tomado como punto de referencia la energía del nivel intermedio, es decir, $E_i = 0$. En esta sección asumiremos que el nivel intermedio se encuentra justo en la mitad.

Para el hamiltoniano de interacción se toma en cuenta lo planteado en las ecs. (2.53), (2.55) y (2.57). Además, en este caso se tiene que $\gamma_{ei} = \gamma_{ig} = \gamma_{gi} = \gamma_{ie}$ por lo que

$$g_l = g_l^{ei} = g_l^{ig} = g_l^{gi} = g_l^{ie}. \quad (3.37)$$

Con relación a lo anterior y aplicando la aproximación de onda rotante se tiene el hamiltoniano de interacción

$$\hat{H}_{\text{int}} \cong \hbar g \left(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger \right), \quad (3.38)$$

donde

$$\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_{ei} + \hat{\sigma}_{ig} = |e\rangle\langle i| + |i\rangle\langle g|, \quad (3.39a)$$

$$\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_{gi} + \hat{\sigma}_{ie} = |g\rangle\langle i| + |i\rangle\langle e|, \quad (3.39b)$$

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (3.39c)$$

y su respectiva representación matricial esta dada por

$$\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

siendo $\hat{\sigma}_+$ y $\hat{\sigma}_-$ los operadores de transición atómica para este modelo.

Finalmente, el hamiltoniano que describe la dinámica del sistema de un átomo de tres niveles en interacción con un modo del campo electromagnético a partir de los resultados de las ecs. (3.36) y (3.38) es

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_{\text{campo}} + \hat{H}_{\text{átomo}} + \hat{H}_{\text{int}} \\ \hat{H} &= \hbar \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \Omega \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger).\end{aligned}\quad (3.41)$$

Esto significa que la diferencia entre el estado excitado y el estado base está dada por 2Ω y coincide con el doble de la frecuencia del modo electromagnético, por lo que a esta situación se le conoce como resonancia de dos fotones.

3.3.2 Solución analítica

En el sistema descrito por el hamiltoniano de la ec. (3.41) se considera el caso $\omega_0 = \Omega$, por lo tanto, la frecuencia del campo será igual a la frecuencia de transición atómica. De manera análoga al caso del MJC se identifica una constante de movimiento

$$\hat{I} = \hat{\sigma}_z + \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (3.42)$$

la cual conmuta con el hamiltoniano, $[\hat{H}, \hat{I}] = 0$, por lo tanto, \hat{H} se puede representar en la base de eigenestados de \hat{I} , $\{|n-1, e\rangle, |n, i\rangle, |n+1, g\rangle\}$, así adopta una estructura diagonal por bloques de 3×3 , los cuales se pueden escribir en el marco de interacción dado por \hat{H}_{int} como

$$\hat{H}_n = \hbar \begin{bmatrix} 0 & g\sqrt{n} & 0 \\ g\sqrt{n} & 0 & g\sqrt{n+1} \\ 0 & g\sqrt{n+1} & 0 \end{bmatrix}, \quad n = \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (3.43)$$

Si se toma que \bar{n} es un valor significativamente grande, los eigenestados y eigenenergías asociados a cada uno de los bloques \hat{H}_n se reportan en la tabla 3.1.

EIGENENERGÍA	EIGENESTADO
0	$ \Phi_1^n\rangle = (- n-1, e\rangle + n+1, g\rangle)/\sqrt{2}$
$\hbar g\sqrt{2(2n+1)}$	$ \Phi_2^n\rangle = (n-1, e\rangle + \sqrt{2} n, i\rangle + n+1, g\rangle)/2$
$-\hbar g\sqrt{2(2n+1)}$	$ \Phi_3^n\rangle = (n-1, e\rangle - \sqrt{2} n, i\rangle + n+1, g\rangle)/2$

Tabla 3.1: Eigenenergías y eigenestados para el sistema de un átomo de tres niveles en una cavidad electromagnética.

3.3.3 Análisis y aproximación en estados coherentes

Un caso de interés para analizar es aquel donde se considera un estado coherente dentro de la cavidad, en esta situación se presenta el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi al momento de calcular la probabilidad de encontrar el sistema en un estado específico, como ejemplo, se calcula P_i (la probabilidad de encontrar el átomo en el estado intermedio) y P_e (la probabilidad de encontrar al átomo en el estado excitado). En las figuras 3.5 y 3.6 se presenta el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi para las situaciones mencionadas.

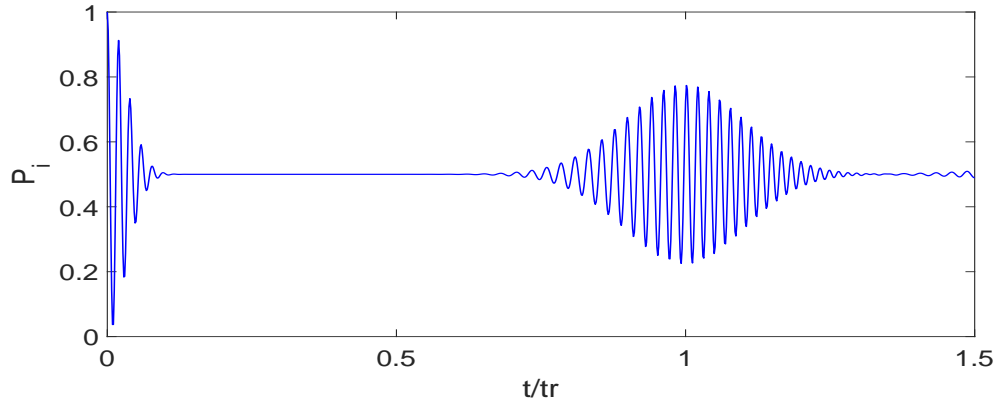


Figura 3.5: Probabilidad de encontrar el átomo en el estado intermedio como función del tiempo para un átomo de tres niveles, que interactúa con el campo electromagnético dentro de una cavidad preparada inicialmente en un estado $|\alpha\rangle |i\rangle$, con $\alpha = 5$. Donde $t_r = \pi\sqrt{2\bar{n} + 1}/g$.

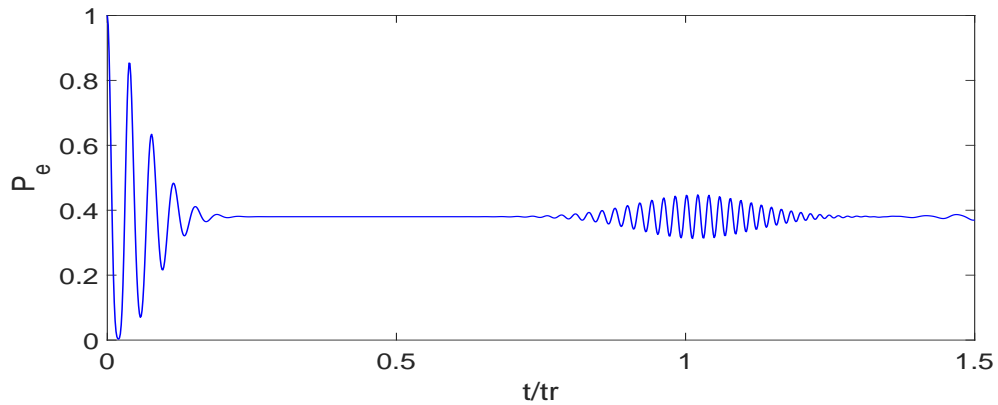


Figura 3.6: Probabilidad de encontrar el átomo en el estado excitado como función del tiempo para un átomo de tres niveles, que interactúa con el campo electromagnético dentro de una cavidad preparada inicialmente en un estado $|\alpha\rangle |e\rangle$, con $\alpha = 5$. Donde $t_r = \pi\sqrt{2\bar{n} + 1}/g$.

Adicionalmente, se puede representar el estado de la cavidad por medio de la función de Husimi (ver figuras 3.7 y 3.8), así como en el MJC, se asocia el colapso de las oscilaciones de Rabi con la separación de las componentes del estado fotónico en el espacio fase (ver figuras 3.7b y 3.8b).

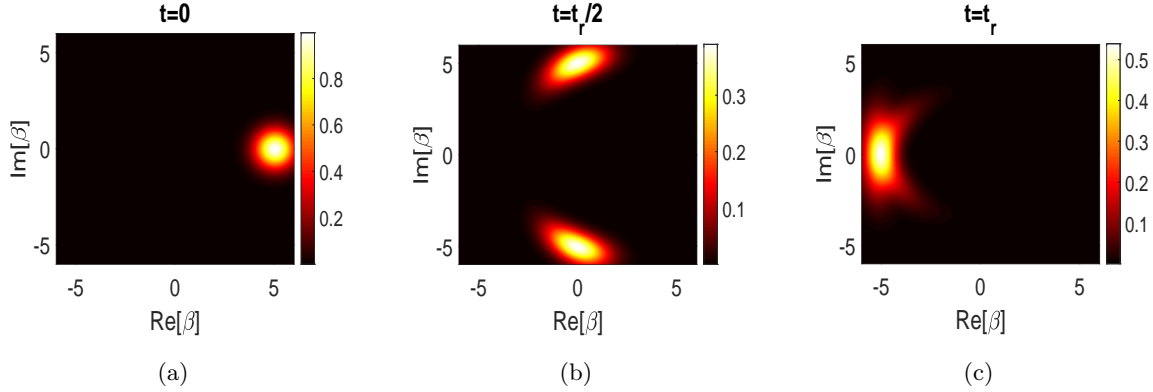


Figura 3.7: Función de Husimi en el plano complejo o espacio fase de un oscilador representando el estado del campo electromagnético dentro de una cavidad, que interactúa con un átomo de dos niveles. Se muestra al tiempo $t = 0$, $t = t_r/2$ y $t = t_r$. Los parámetros son los indicados en la Fig. 3.5.

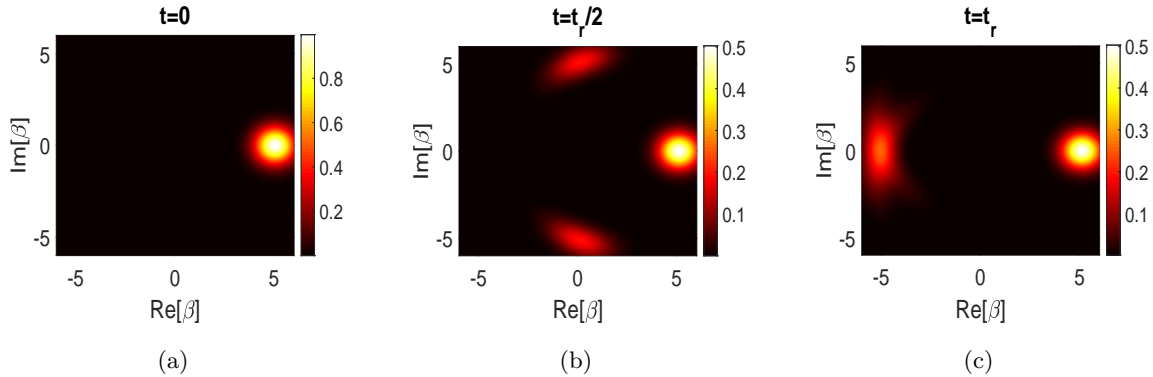


Figura 3.8: Función de Husimi en el plano complejo o espacio fase de un oscilador representando el estado del campo electromagnético dentro de una cavidad, que interactúa con un átomo de dos niveles. Se muestra al tiempo $t = 0$, $t = t_r/2$ y $t = t_r$. Los parámetros son los indicados en la Fig. 3.6.

A partir de las figuras 3.7c y 3.8c se evidencia que el estado fotónico se deforma, lo cual responde a que las amplitudes de las oscilaciones de Rabi en los resurgimientos en las figuras 3.5 y 3.6 son menores, es decir, son resurgimientos imperfectos. Aún así de manera similar al modelo de Jaynes-Cummings se puede realizar una aproximación en estados coherentes. Como ejemplo, al tomar como estado inicial $|\psi_0\rangle = |\alpha\rangle |g\rangle$, siendo $|g\rangle$

el definido en (3.35), se hace uso de los eigenestados y eigenenergías de la tabla 3.1 con lo que se obtiene

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha\rangle |\nu\rangle + \frac{1}{2} \sum_{l=\pm 1} e^{-ilg\beta t} |\alpha e^{ilg\gamma t}\rangle |\nu_l(t)\rangle, \quad (3.44)$$

donde

$$\begin{aligned} |\nu_l(t)\rangle &= \frac{1}{2} \left(e^{2i\phi} e^{-ilg\gamma t} |e\rangle + l \sqrt{2} e^{i\phi} |i\rangle + e^{ilg\gamma t} |g\rangle \right), & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{2\bar{n} + 1}} \\ |\nu\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-e^{2i\phi} |e\rangle + |g\rangle \right), & \beta &= \frac{(\bar{n} + 1)}{\sqrt{2\bar{n} + 1}}. \end{aligned}$$

El proceso para obtener este resultado es análogo al caso del MJC y omitimos presentarlo. Del mismo modo que en el MJC, las oscilaciones de Rabi se presentan cuando el estado coherente inicial se empieza a dividir, pero en el sistema de un átomo de tres niveles se evidencia que en el caso donde se toma como estado inicial $|\psi_0\rangle = |\alpha\rangle |i\rangle$, el estado coherente se divide en dos componentes. Solo se evidencian dos componentes en las que se divide el estado fotónico debido a que el estado intermedio no se relaciona con el eigenestado asociado a eigenfrecuencia cero que se muestra en la tabla 3.1.

Por otro lado, en el caso en donde se tiene como estado inicial $|\psi_0\rangle = |\alpha\rangle |e\rangle$ o $|\psi_0\rangle = |\alpha\rangle |g\rangle$ el resultado será como se presenta en la figura 3.8. El estado inicial se divide en tres componentes: una asociada al estado coherente que permanece estático $|\alpha\rangle$ y dos componentes del campo $|\alpha e^{\pm ig\gamma t}\rangle$ que giran sobre un círculo en el espacio fase con frecuencia $\omega' = g\gamma$.

En este caso el estado fotónico se divide en tres componentes, por lo cual el tiempo de resurgimiento puede definirse de diferentes maneras. Del análisis en el MJC, se rescata que el resurgimiento en las oscilaciones de Rabi está relacionado con el momento en que las componentes del campo se vuelven a encontrar. De acuerdo a lo anterior, en este caso se define el tiempo de resurgimiento como aquel en el cual las componentes que están girando en el espacio fase con frecuencia ω' se vuelven a juntar. Por lo tanto, considerando el resultado de la ec. (3.44), se identifica el tiempo de resurgimiento como

$$|\langle \alpha e^{-ig\gamma t_r} | \alpha e^{ig\gamma t_r} \rangle| = 1, \quad (3.45)$$

de acuerdo a la propiedad de no ortogonalidad de dos estados coherentes diferentes definida en la ec. (3.32), se tiene que la ec. (3.45) se puede reescribir de modo que

$$\begin{aligned} |\langle \alpha e^{-ig\gamma t_r} | \alpha e^{ig\gamma t_r} \rangle| &= \left| e^{-1/2} |\alpha|^2 (2 - 2 e^{2ig\gamma t_r}) \right| = 1 \\ &= e^{-|\alpha|^2 (1 - \cos 2g\gamma t_r)} = 1. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Con relación a la ecuación anterior para este sistema de un átomo de tres niveles que interactúa con un modo del campo electromagnético se define el tiempo de resurgimiento de las oscilaciones de Rabi como

$$t_r = \frac{\pi}{g\gamma} = \frac{\pi}{\omega'}. \quad (3.47)$$

Capítulo 4

Sistema de dos átomos de tres niveles dentro de una cavidad

En este capítulo se describe el sistema de dos átomos de tres niveles dentro de una cavidad electromagnética, se presenta una solución analítica del sistema la cual permite realizar una aproximación en estados coherentes de un estado que evoluciona en el tiempo cuando el número promedio de fotones es considerablemente grande. Adicionalmente se analiza el entrelazamiento de algunas de las componentes atómicas que acompañan al estado coherente y lo que sucede cuando el estado dentro de la cavidad es un estado coherente para diferentes estados iniciales. Se muestra que es posible generar un estado con máximo grado de entrelazamiento discriminando de manera adecuada las componentes del campo.

4.1 Descripción del sistema

El sistema a estudiar consiste en dos átomos cada uno con tres niveles atómicos: $|e\rangle$ corresponde al estado excitado, $|i\rangle$ al estado intermedio y $|g\rangle$ al estado base, los átomos interactúan con un modo de radiación electromagnética con frecuencia ω . La frecuencia de transición entre $|e\rangle$, $|i\rangle$ y $|g\rangle$ es Ω (ver figura [4.1](#)).

Haciendo una analogía de los estados atómicos a momento angular, se puede recurrir a la teoría de la adición de momento angular para realizar la descripción del sistema (ver apéndice [A](#)). En este caso, se trata de niveles electrónicos y no de espín o momento angular, por lo que se usará el término de pseudo-momento angular. Con base en lo anterior,

el hamiltoniano que describe la dinámica del sistema se puede escribir como:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\Omega\hat{S}_z + \hbar g (\hat{a}\hat{S}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{S}_-). \quad (4.1)$$

El primer término del hamiltoniano describe la energía del campo electromagnético en términos de los operadores de creación y aniquilación \hat{a}^\dagger y \hat{a} . El segundo hace referencia a la energía del átomo usando \hat{S}_z y el último describe la interacción entre átomos y campo dada en términos de \hat{S}_- y \hat{S}_+ . Estos operadores son conocidos como operadores de descenso y de ascenso, respectivamente, siendo $\hat{S}_- = \hat{S}_+^\dagger$. En este caso los operadores son adimensionales y se han escrito de modo que satisfacen las relaciones de conmutación de momento angular, por lo tanto

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_+^{(1)} + \hat{S}_+^{(2)} \quad \hat{S}_+^{(j)} = \sqrt{2}(|e\rangle\langle i|_j + |i\rangle\langle g|_j), \quad (4.2a)$$

$$\hat{S}_z = \hat{S}_z^{(1)} + \hat{S}_z^{(2)} \quad \hat{S}_z^{(j)} = (|e\rangle\langle e|_j - |g\rangle\langle g|_j). \quad (4.2b)$$

Definiendo el operador de pseudo-momento angular total

$$\hat{S} = \hat{S}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \hat{S}_2. \quad (4.3)$$

Se puede mostrar que los operadores \hat{S}_z , \hat{S}_+ , \hat{S}_- y \hat{S}^2 actúan sobre la base de pseudo-momento angular total de la siguiente manera

$$\hat{S}_z |s; m\rangle = m |s; m\rangle, \quad (4.4a)$$

$$\hat{S}_\pm |s; m\rangle = \sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)} |s; m \pm 1\rangle, \quad (4.4b)$$

$$\hat{S}^2 |s; m\rangle = s(s + 1) |s; m\rangle. \quad (4.4c)$$

Donde el operador \hat{S}^2 está definido como

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_z^2 + \frac{1}{2} (\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+) \quad (4.5)$$

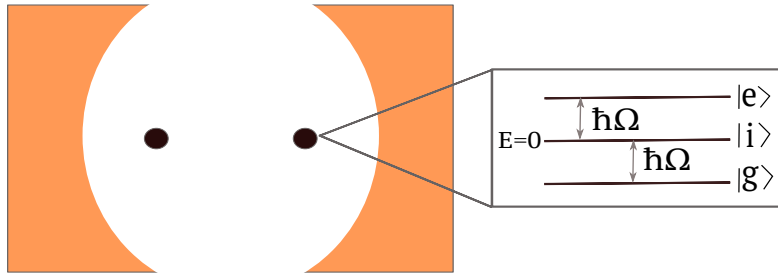


Figura 4.1: Ilustración de dos átomos de tres niveles dentro de una cavidad.

4.2 Solución analítica

Para resolver la dinámica del sistema descrito por la ec. (4.1), se toma el caso donde $\omega = \Omega$ y se eligen unidades en donde $\hbar = 1$, por lo tanto, se reescribe el hamiltoniano como

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_I + \hat{H}_{\text{int}} \\ \hat{H} &= \left(\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega \hat{S}_z\right) + \left(g [\hat{a} \hat{S}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{S}_-]\right),\end{aligned}\tag{4.6}$$

siendo \hat{H}_{int} la parte del hamiltoniano que da cuenta de la interacción del sistema. En este caso se identifica una constante de movimiento dada como

$$\hat{I} = \hat{S}_z + \hat{a}^\dagger \hat{a},\tag{4.7}$$

considerando el conmutador $[\hat{H}, \hat{I}]$, se evidencia que $[\hat{H}_I, \hat{I}] = 0$, pues $\hat{H}_I = \omega \hat{I}$. Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}[\hat{H}_{\text{int}}, \hat{I}] &= g \left([\hat{a} \hat{S}_+, \hat{S}_z + \hat{a}^\dagger \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger \hat{S}_-, \hat{S}_z + \hat{a}^\dagger \hat{a}]\right) \\ &= g \left(\hat{a} [\hat{S}_+, \hat{S}_z] + [\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] \hat{S}_+ + \hat{a}^\dagger [\hat{S}_-, \hat{S}_z] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \hat{a}] \hat{S}_-\right) \\ &= g \left(-\hat{a} \hat{S}_+ + \hat{a} \hat{S}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{S}_- - \hat{a}^\dagger \hat{S}_-\right) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{4.8}$$

De acuerdo a lo anterior se tiene que \hat{H} e \hat{I} conmutan. Por otro lado, $[\hat{S}^2, H] = 0$, lo cual es evidente porque $[\hat{S}^2, \hat{S}_\pm] = 0$ en teoría de momento angular. Tomando en cuenta las constantes de movimiento, resulta conveniente trabajar en la base: $\{|n - m, s, m\rangle\}$, con $s \in \{0, 1, 2\}$ y $|m| \leq s$. Estos estados están dados en términos de $n - m$ fotones y estados de pseudo-momento angular total con proyección m es decir, $|n - m, s, m\rangle = |n - m\rangle \otimes |s; m\rangle$. Los estados $|s; m\rangle$ tomando en cuenta las ecs. (A.16) y la tabla A.1 se pueden escribir en términos de los estados del átomo como se presenta a continuación

$$|2; -2\rangle = |g, g\rangle,\tag{4.9a}$$

$$|2; -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, i\rangle + |i, g\rangle),\tag{4.9b}$$

$$|2; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|g, e\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|i, i\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|e, g\rangle,\tag{4.9c}$$

$$|2; 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, i\rangle + |i, e\rangle),\tag{4.9d}$$

$$|2, 2\rangle = |n - 2, e, e\rangle, \quad (4.9e)$$

$$|1; -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, i\rangle - |i, g\rangle), \quad (4.9f)$$

$$|1; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, g\rangle - |g, e\rangle), \quad (4.9g)$$

$$|1; 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, i\rangle - |i, e\rangle), \quad (4.9h)$$

$$|0; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|e, g\rangle - |i, i\rangle + |g, e\rangle). \quad (4.9i)$$

Escrito en esta base el hamiltoniano toma una estructura diagonal de 9×9 para $n \geq 2$. Debido a que el pseudo-momento angular total es otra constante presente en el sistema, el bloque se subdivide en otros de dimensión 1×1 , 3×3 y 5×5 . Los estados relacionados con cada bloque son aquellos que comparten el mismo eigenvalor de pseudo-momento angular total s . En el marco de interacción los bloques están dados como

- Bloque 1×1

$$0 \quad (4.10)$$

- Bloque 3×3

$$\begin{pmatrix} 0 & g\sqrt{2n} & 0 \\ g\sqrt{2n} & 0 & g\sqrt{2(n+1)} \\ 0 & g\sqrt{2(n+1)} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

- Bloque 5×5

$$\begin{pmatrix} 0 & 2g\sqrt{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 2g\sqrt{n-1} & 0 & g\sqrt{6n} & 0 & 0 \\ 0 & g\sqrt{6n} & 0 & g\sqrt{6(n+1)} & 0 \\ 0 & 0 & g\sqrt{6(n+1)} & 0 & 2g\sqrt{n+2} \\ 0 & 0 & 0 & 2g\sqrt{n+2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Para calcular los eigenestados y eigenenergías asociados a cada uno de los bloques presentados en las ecs. (4.10) - (4.12), se considera el caso en donde el número promedio de fotones (\bar{n}) es grande. Además, se aproxima $\sqrt{n+2}$, $\sqrt{n+1}$, \sqrt{n} , $\sqrt{n-1}$ y $\sqrt{n-2}$, como $\sqrt{n + \frac{1}{2}}$. De acuerdo a estas consideraciones se obtienen los eigenestados aproximados y eigenfrecuencias asociados a cada bloque que se presentan en la tabla 4.1. Los eigenestados pueden calcularse de manera exacta, sin embargo las expresiones son extensas y no se presentan aquí.

EIGENFRECUENCIA	EIGENESTADO
BLOQUE 1 × 1	
0	$ \Phi_1^n\rangle = n, 0, 0\rangle$
BLOQUE 3 × 3	
0	$ \Phi_2^n\rangle = (n-1, 1, 1\rangle + n+1, 1, -1\rangle)/\sqrt{2}$
$g\sqrt{2(2n+1)}$	$ \Phi_3^n\rangle = (n-1, 1, 1\rangle + \sqrt{2} n, 1, 0\rangle + n+1, 1, -1\rangle)/2$
$-g\sqrt{2(2n+1)}$	$ \Phi_4^n\rangle = (n-1, 1, 1\rangle - \sqrt{2} n, 1, 0\rangle + n+1, 1, -1\rangle)/2$
BLOQUE 5 × 5	
0	$ \Phi_5^n\rangle = (n-2, 2, 1\rangle - \sqrt{2}/\sqrt{3} n, 2, 0\rangle + n+2, 2, -2\rangle)\sqrt{3}/2\sqrt{2}$
$-g\sqrt{2(2n+1)}$	$ \Phi_6^n\rangle = (n-2, 2, 2\rangle + n-1, 2, 1\rangle - n+1, 2, -1\rangle + n+2, 2, -2\rangle)/2$
$-2g\sqrt{2(2n+1)}$	$ \Phi_7^n\rangle = (n-2, 2, 2\rangle - 2 n-1, 2, 1\rangle + \sqrt{6} n, 2, 0\rangle - 2 n+1, 2, -1\rangle + n+2, 2, -2\rangle)/4$
$g\sqrt{2(2n+1)}$	$ \Phi_8^n\rangle = (n-2, 2, 2\rangle - n-1, 2, 1\rangle + n+1, 2, -1\rangle + n+2, 2, -2\rangle)/2$
$2g\sqrt{2(2n+1)}$	$ \Phi_9^n\rangle = (n-2, 2, 2\rangle + 2 n-1, 2, 1\rangle + \sqrt{6} n, 2, 0\rangle + 2 n+1, 2, -1\rangle + n+2, 2, -2\rangle)/4$

Tabla 4.1: Eigenfrecuencias exactas y eigenestados aproximados para el sistema de dos átomos de tres niveles en una cavidad electromagnética.

4.3 Aproximación en estados coherentes

En el modelo de dos átomos de tres niveles que interactúan con un modo del campo electromagnético el hamiltoniano de interacción está descrito por

$$\hat{H}_{\text{int}} = g \left(\hat{a} \hat{S}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{S}_- \right). \quad (4.13)$$

Para encontrar la evolución temporal de un estado inicial arbitrario

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{s,m} C_{s,m} |\alpha\rangle |s; m\rangle, \quad (4.14)$$

donde $|\alpha\rangle$ es un estado coherente como se expresa en la ec. (2.41) y $C_{s,m} = \langle s, m | \psi_0 \rangle$ es la amplitud de probabilidad, se extrapola la idea del procedimiento realizado para el modelo de Jaynes-Cummings, por lo que se obtiene

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{s,m} U(t) C_{s,m} |\alpha\rangle |s, m\rangle = \sum_{s,m} U(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} C_{s,m} |n, s, m\rangle. \quad (4.15)$$

A partir de las soluciones exactas de los bloques 1×1 , 3×3 y 5×5 presentadas en la tabla 4.1, se define la relación de completitud como

$$\sum_{j=2}^{\infty} \sum_{l=1}^9 |\Phi_l^{(j)}\rangle \langle \Phi_l^{(j)}| = 1, \quad (4.16)$$

se omiten los estados con $j < 2$, pues no contribuyen cuando $|\alpha|^2 \gg 1$. Se incluye (4.16) en (4.15) obteniendo

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sum_{s,m} C_{s,m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{l=1}^9 \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} U(t) |\Phi_l^{(j)}\rangle \langle \Phi_l^{(j)}| n, s, m \right] \\ &\rightarrow |\Psi_{s,m}(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{l=1}^9 \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} U(t) |\Phi_l^{(j)}\rangle \langle \Phi_l^{(j)}| n, s, m. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Posteriormente se realiza la suma en l , se reemplaza el resultado de cómo actúa el operador de evolución temporal en cada uno de los estados $|\Phi_l^{(j)}\rangle$ y se toman los resultados de los productos internos $\langle \Phi_l^{(j)} | n, s, m \rangle$. El anterior procedimiento se presenta a detalle en el apéndice B, llegando así a la ec. (B.6).

Al establecer para el análisis que el número promedio de fotones es un valor considerablemente grande, se realiza la linealización de cada una de las eigenfrecuencias de la tabla 4.1 alrededor de \bar{n} . Adicionalmente se reemplaza la equivalencia de cada uno de los eigenestados $|\Phi_l^{(j)}\rangle$ en términos de los eigenestados de \hat{I} (ver tabla 4.1) y se procede de tal modo que se obtenga como factor común en cada uno de los términos $|n\rangle$ (el procedimiento se describe en el apéndice B). De acuerdo a lo anterior se obtiene la expresión general de la expansión en estados coherentes para el sistema de dos átomos de tres niveles

que interactúan con un modo del capo electromagnético escrita como

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= \sum_{s,m} C_{s,m} |\Psi_{s,m}(t)\rangle \\
 |\Psi_{s,m}(t)\rangle &= |\alpha\rangle |\Phi\rangle + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^2 \sum_{l=0}^1 e^{-(-1)^{r-l} i \sigma_r \sqrt{2} g \beta t} \left| \alpha e^{-(-1)^{r-l} i \omega_r t} \right\rangle \left| \Phi_r^l(t) \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Se puede deducir de la ec. (4.18) que el vector de estado dependiente del tiempo se puede expresar como una suma de cinco términos cada cual con componente atómica y fotónica de la siguiente manera: un estado coherente estático $|\alpha\rangle$ y cuatro componentes del campo $|\alpha e^{\pm i \omega_{(1,2)} t}\rangle$ son estados coherentes que giran sobre un círculo en el espacio fase con frecuencias $\omega_{(1,2)}$ que depende del acoplamiento con el átomo y el número medio de fotones en el estado (ver ec. (B.17)). Hasta el momento se han reportado expresiones análogas [23] en términos de tres o cuatro estados coherentes dependientes del tiempo en sistemas de dos átomos pero solo de dos niveles.

Para evidenciar qué tan cercana es la aproximación de la ec. (4.18) con el vector de estado numérico exacto se recurre al cálculo de la fidelidad, que nace de la necesidad de cuantificar la cercanía entre dos estados. Para este caso la definimos como

$$\langle F \rangle = |\langle \Psi_{exact}(t) | \Psi_{approx}(t) \rangle|^2. \tag{4.19}$$

Como ejemplo, se calcula la fidelidad para tres diferentes valores del número promedio de fotones, donde se considera α real y se toma como estado inicial $|\psi_0\rangle = |\alpha\rangle (|0,0\rangle + |1,0\rangle / \sqrt{2})$. De acuerdo a las consideraciones anteriores, el vector de estado aproximado, reemplazando en la ec. (4.18) el estado inicial, está dado como

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha\rangle |0,0\rangle + \frac{e^{i\sqrt{2}g\beta t}}{4} \left| \alpha e^{i\sqrt{2}g\eta t} \right\rangle \left(-e^{i\sqrt{2}g\eta t} |1,1\rangle + \sqrt{2} |1,0\rangle - e^{-i\sqrt{2}g\eta t} |1,-1\rangle \right) \\
 &+ \frac{e^{-i\sqrt{2}g\beta t}}{4} \left| \alpha e^{-i\sqrt{2}g\eta t} \right\rangle \left(e^{-i\sqrt{2}g\eta t} |1,1\rangle + \sqrt{2} |1,0\rangle + e^{i\sqrt{2}g\eta t} |1,-1\rangle \right).
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

En la figura 4.2 se muestra la fidelidad F de la solución numéricamente exacta respecto a la aproximación en estados coherentes para el estado inicial de nuestro ejemplo cuando el número promedio de fotones es $\bar{n} = 25$, $\bar{n} = 49$ y $\bar{n} = 100$.

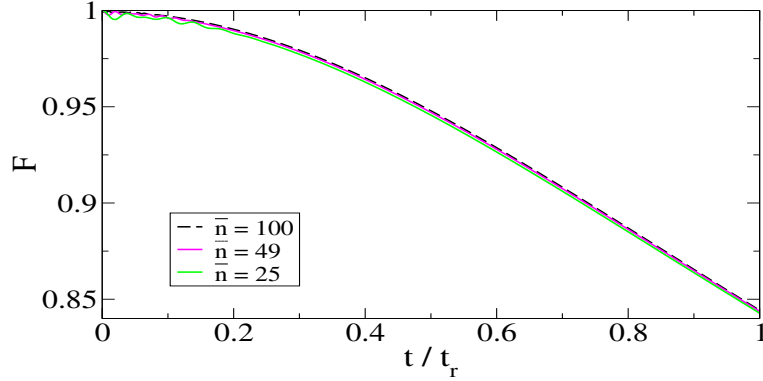


Figura 4.2: Fidelidad de un estado inicial $|\psi_0\rangle = |\alpha\rangle (|0,0\rangle + |1,0\rangle / \sqrt{2})$ para diferentes valores del número de fotones.

Los estados de momento angular total presentan entrelazamiento cuántico en la base separada de los átomos. Debido a que la interacción con el modo del campo electromagnético tiene el efecto de separar estas componentes de momento angular, este sistema resulta útil para generar estados atómicos entrelazados que puedan ayudar en protocolos de información cuántica, tales como teleportación. Este fenómeno se explica a continuación.

4.4 Entrelazamiento

El entrelazamiento es un fenómeno completamente cuántico, en el cual el estado cuántico de dos o más objetos se describe por un único vector de estado que se caracteriza por

$$|\psi_{1,2,\dots}\rangle \neq |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle \dots \quad (4.21)$$

Para cuantificar el entrelazamiento se han establecido algunas definiciones y funciones que nos indican el grado de entrelazamiento que puede tener un estado, ejemplo de estas son la pureza de la matriz reducida, la entropía de Von Neumann, entre otras.

La pureza

La pureza, P , de un estado cuántico específico está definida como

$$P(\rho) = \text{Tr}\{\rho^2\}, \quad (4.22)$$

esta operación da cuenta de qué tan puro es el estado.

De acuerdo a la definición del operador de densidad dado por

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad (4.23)$$

donde $|\psi_i\rangle$ es un estado arbitrario, los valores que puede tomar p_i se encuentran entre 0 y 1 y cumplen con la condición de normalización; es posible evidenciar cómo la pureza permite diferenciar entre estados puros y estados mixtos. Por definición, en el caso de un estado puro se tiene que todos los p_i son iguales a cero a excepción de uno, el cual tiene un valor igual a 1, por lo cual,

$$\rho_p = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (4.24)$$

Sustituyendo la ec. (4.24) en la ec. (4.22) se obtiene que

$$P(\rho_p) = \text{Tr}\{\rho_p^2\} = 1. \quad (4.25)$$

El resultado anterior se cumple para todo estado puro, mientras que en el caso de un estado mixto la condición es

$$\sum_i p_i^2 < \sum_i p_i = 1,$$

lo cual implica que

$$P(\rho_m) = \text{Tr}\{\rho_m^2\} < 1. \quad (4.26)$$

Si se tiene un estado completamente mixto, los valores de p_i son iguales a $\frac{1}{N}$, lo cual conlleva a que la pureza sea

$$\frac{1}{N} \leq P(\rho_m) = \text{Tr}\{\rho_m^2\}, \quad (4.27)$$

de acuerdo a los resultados de las ec. (4.25) y (4.27), se tiene que los valores límites entre los que se encuentra la pureza son

$$\frac{1}{N} \leq P(\rho) \leq 1. \quad (4.28)$$

La pureza permite distinguir entre estados separables y entrelazados, lo cual se realiza al usar el operador de densidad reducido. Definiendo la matriz de densidad reducida ρ_A como

$$\rho_A = \text{Tr}\{\rho\} = \sum_{m=-1}^1 \langle m_B | \rho | m_B \rangle. \quad (4.29)$$

De acuerdo a lo anterior, siendo $|\psi_{A,B}\rangle$

- Si $P(\rho_A) = 1$ el estado es separable.

- Si $P(\rho_A) < 1$ el estado es entrelazado.

En este sistema de dos átomos de tres niveles dentro de una cavidad electromagnética es de interés el análisis del entrelazamiento de las componentes atómicas que acompañan a cada estado coherente. Como ejemplo general se considera el estado

$$|\mu_{A,B}\rangle = \sqrt{c_1} |e, g\rangle - \sqrt{c_2} |i, i\rangle + \sqrt{1 - c_1 - c_2} |g, e\rangle. \quad (4.30)$$

La matriz de densidad reducida ρ_A es

$$\rho_A = c_1 |e\rangle\langle e| + c_2 |i\rangle\langle i| + (1 - c_1 - c_2) |g\rangle\langle g|. \quad (4.31)$$

El resultado de la pureza de la matriz de densidad reducida ρ_A anterior es

$$P(\rho_A) = c_1^2 + c_2^2 + (1 - c_1 - c_2)^2, \quad (4.32)$$

este resultado se representa en la figura 4.3.

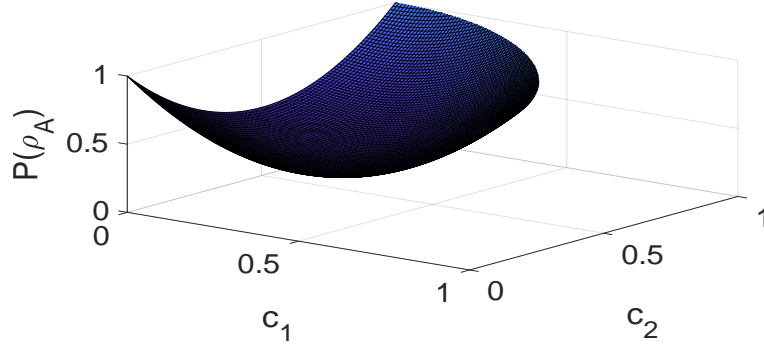


Figura 4.3: Representación de la pureza del operador de densidad reducido del sistema A, obtenido de la ec. (4.32).

Ahora se puede tomar como primer caso particular un estado de la base de pseudo-momento angular, el estado de la ec. (A.16i) dado como

$$|0; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|e, g\rangle - |i, i\rangle + |g, e\rangle). \quad (4.33)$$

La matriz de densidad del estado anterior dada en la base $|m_1, m_2\rangle$ está dada como

$$\rho = \frac{1}{3} (|e, g\rangle\langle e, g| - |e, g\rangle\langle i, i| + |e, g\rangle\langle g, e| - |i, i\rangle\langle e, g| + |i, i\rangle\langle i, i| - |i, i\rangle\langle g, e| + |g, e\rangle\langle e, g| - |g, e\rangle\langle i, i| + |g, e\rangle\langle g, e|). \quad (4.34)$$

Usando ρ de la ec. (4.34) en la ec. (4.29) se obtiene

$$\rho_A = \text{Tr}\{\rho\} = \frac{1}{3}(|e\rangle\langle e| + |i\rangle\langle i| + |g\rangle\langle g|), \quad (4.35)$$

tomando el resultado anterior en la ec. (4.22) se obtiene que

$$P(\rho_A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \quad (4.36)$$

Del resultado obtenido se puede concluir que el estado $|0;0\rangle$ es un estado entrelazado, que representa el mínimo valor que puede tomar $P(\rho_A)$ en la figura 4.3, lo cual conlleva a que es un estado con máximo grado de entrelazamiento o en este caso estado de Bell de dos cútrits (cútrit: sistema de tres niveles). Por otro lado, al tomar el estado

$$|2;0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|g,e\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|i,i\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|e,g\rangle, \quad (4.37)$$

el resultado del cálculo de la pureza del operador de densidad reducido ρ_A es

$$P(\rho_A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}. \quad (4.38)$$

En relación con el resultado obtenido para el estado $|2;0\rangle$ se puede concluir que aunque no es un estado de máximo grado de entrelazamiento ya que su pureza es diferente a $1/N$, es un estado entrelazado ya que su pureza es diferente de cero.

Entropía de von Neumann

La entropía de von Neumann es otra medida de entrelazamiento para estados puros. Para el caso de un sistema bipartita denotado como $|\Psi_{A,B}\rangle$, se usa la entropía de una de las matrices reducidas como medida del entrelazamiento E definida como

$$E(|\Psi\rangle_{A,B}) = S(\rho_A) = S(\rho_B), \quad (4.39)$$

donde

$$S(\rho) = -\text{Tr}\{\rho \log_N \rho\} = -\sum_{i=1}^N \lambda_i \log_N \lambda_i, \quad (4.40)$$

corresponde a la entropía de von Neumann definida en la representación diagonal de la matriz de densidad [5]. Donde cada λ_i es un valor propio de ρ y N es la dimensión del sistema.

Contraria a la pureza, que su valor es máximo para estados separables y valor mínimo estados entrelazados, la entropía de von Neumann esta definida entre

$$0 \leq S(\rho) \leq \log_N N = 1. \quad (4.41)$$

Lo anterior indica que la entropía tiene valor cero solamente si ρ representa a un estado puro y tomará el valor de $\log_N N$ en el caso de un estado máximamente entrelazado, por lo que ahora tenemos una medida que no solo da cuenta del entrelazamiento, además es una función monótonamente creciente de 0 a 1. En otras palabras, a medida que crece el entrelazamiento el valor de la función aumenta.

Para el sistema de nuestro interés, se puede analizar el entrelazamiento de las componentes atómicas que acompañan a cada estado coherente. Estas componentes son estados puros y en general están dados por una superposición de estados de pseudo-momento angular total. Como ejemplo, se calcula la entropía de von Neumann de la matriz de densidad reducida de un estado general escrito como en la ec. (4.30), en este caso se calcula la entropía de la matriz reducida del sistema A , obteniendo que

$$E(|\mu_{A,B}\rangle) = S(\rho_A) = -c_1 \log_3 c_1 - c_2 \log_3 c_2 - (1 - c_1 - c_2) \log_3(1 - c_1 - c_2). \quad (4.42)$$

Donde c_1 y c_2 son reales positivos y representan las probabilidades de los estados $|e, g\rangle$ y $|i, g\rangle$, respectivamente, en la ec. (4.30). El resultado de la medida de entrelazamiento para el estado general $|\mu_{A,B}\rangle$ se representa en la figura 4.4.

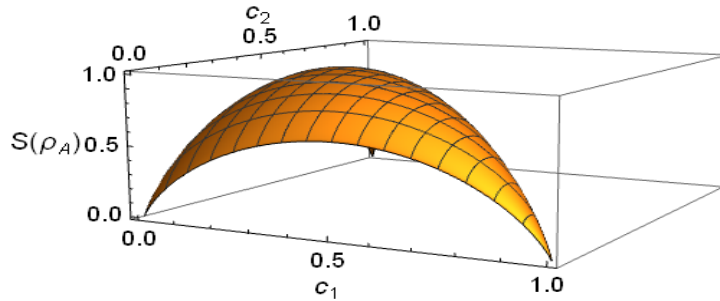


Figura 4.4: Representación de la entropía del operador de densidad reducido del sistema A , obtenido de la ec. (4.42).

Un caso interesante y digno de considerar por separado es el estado $|0;0\rangle$, al momento de calcular la entropía $S(\rho_A)$ como medida de entrelazamiento se obtiene usando

(4.35) en la ec. (4.40) que

$$E(|0;0\rangle) = S(\rho_A) = 1. \quad (4.43)$$

El resultado anterior da cuenta de nuevo de que este estado presenta máximo entrelazamiento. Para el ejemplo del estado $|0;0\rangle$ este representa el máximo en la figura 4.4. En la siguiente sección veremos cómo es posible generar este estado a partir de un estado separable de dos átomos.

4.5 Resultados numéricos y discusión

Al considerar que el estado dentro de la cavidad es un estado coherente, la evolución temporal de un estado inicial arbitrario se puede escribir como una aproximación en términos de estados coherentes, lo cual resulta muy útil para capturar propiedades importantes de las componentes atómicas.

Para este sistema el resultado de la ec. (4.18) muestra la aproximación en términos de estados coherentes de un estado inicial general. A partir de la aproximación se establecen dos tiempos de interés, el primero está asociado al momento en el cual las dos componentes fotónicas que giran alrededor de un círculo en el espacio fase con frecuencia ω_1 se encuentran de nuevo y el segundo tiempo asociado al momento del encuentro de las dos componentes fotónicas que giran con frecuencia ω_2 . Con base en las ecs. (B.11) y (B.17) se definen las frecuencias como

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2}g}{\sqrt{2\bar{n}+1}} \quad \omega_2 = \frac{2\sqrt{2}g}{\sqrt{2\bar{n}+1}}. \quad (4.44)$$

Debido a que las dos frecuencias son conmensurables, los tiempos de encuentro de las diferentes componentes fotónicas están relacionados entre sí, por lo tanto, el tiempo de resurgimiento para el sistema de dos átomos de tres niveles lo definimos como el momento en el cual las componentes que están girando en el espacio fase con frecuencia ω_2 se vuelven a encontrar; esto debido a que son las que giran alrededor de un círculo en el espacio fase con mayor rapidez. De acuerdo al planteamiento anterior se identifica el tiempo de resurgimiento como

$$|\langle \alpha e^{-i\omega_2 t_r} | \alpha e^{i\omega_2 t_r} \rangle| = 1. \quad (4.45)$$

Usando la ec. (3.32) se tiene que la ec. (4.45) se reescribe como

$$\begin{aligned} |\langle \alpha e^{-i\omega_2 t_r} | \alpha e^{i\omega_2 t_r} \rangle| &= \left| e^{-1/2 |\alpha|^2 (2 - 2 e^{2i\omega_2 t_r})} \right| = 1 \\ &= e^{-|\alpha|^2 (1 - \cos 2\omega_2 t_r)} = 1. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Con relación a lo anterior se obtiene para este sistema un tiempo de resurgimiento dado como

$$t_r = \frac{\pi}{\omega_2} = \frac{\pi \sqrt{2\bar{n} + 1}}{2\sqrt{2}g}. \quad (4.47)$$

Para este sistema se analiza lo que sucede cuando se considera un estado coherente dentro de la misma. A manera de ejemplo se toman cinco diferentes casos de estados iniciales, que se presentan a continuación:

- Caso I: $|\Psi_I\rangle = |\alpha\rangle |2; 0\rangle$.
- Caso II: $|\Psi_{II}\rangle = |\alpha\rangle |1; 0\rangle$.
- Caso III: $|\Psi_{III}\rangle = |\alpha\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|1; 0\rangle + |2; 0\rangle)$.
- Caso IV: $|\Psi_{IV}\rangle = |\alpha\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|2; 1\rangle + |2; -1\rangle)$.
- Caso V: $|\Psi_V\rangle = |\alpha\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sqrt{2} |0; 0\rangle + \sqrt{\frac{8}{3}} |1; 0\rangle + |2; 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |2; -2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |2; 2\rangle \right)$.

Caso I

Al considerar el estado inicial $|\Psi_I\rangle$ donde el estado dentro de la cavidad es un estado coherente, se presenta el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi cuando se calcula la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|2; 0\rangle$. En la figura 4.5 se presenta el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi que en este caso sucede al tiempo t_r .

La representación del estado de la cavidad por medio de la función de Husimi para este caso se presenta en la figura 4.6. Así como en el MJC se asocia el colapso de las oscilaciones con la separación de las componentes del estado fotónico en el espacio fase (ver figura 4.6b). El resurgimiento está relacionado con el momento en el cual las componentes del estado fotónico que se están moviendo sobre un círculo en el espacio fase vuelven a encontrarse (ver figura 4.6c).

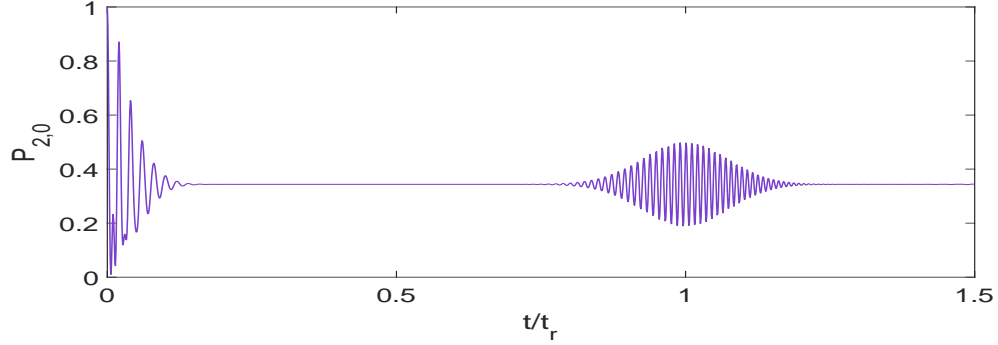


Figura 4.5: Probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|2;0\rangle$ como función del tiempo para el caso de dos átomos de tres niveles, que interactúan con el campo electromagnético dentro de una cavidad preparada inicialmente en el estado inicial $|\Psi_I\rangle$, con $\alpha = 7$.

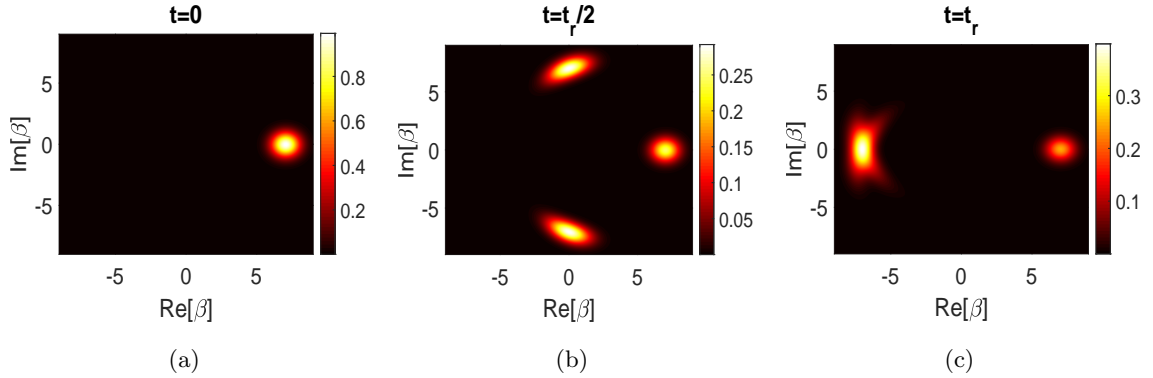


Figura 4.6: Función de Husimi en el plano complejo o espacio fase de un oscilador representando el estado del campo electromagnético dentro de una cavidad, que interactúa con dos átomos de tres niveles. Se muestra al tiempo $t = 0$, $t = t_r/2$ y $t = t_r$. Los parámetros son los indicados en la Fig. 4.5.

En la figura 4.6c se evidencia que el estado fotónico se deforma al tiempo t_r , lo cual responde a que el resurgimiento en la figura 4.5 sea imperfecto. En este caso se muestra que el estado fotónico inicial se divide en tres componentes (ver figura 4.6b): una asociada al estado coherente que permanece estático $|\alpha\rangle$ y dos componentes $|\alpha e^{\pm i\omega_2 t}\rangle$ que giran sobre un círculo en el espacio fase con frecuencia ω_2 .

Caso II

Si el estado inicial es $|\Psi_{II}\rangle$ donde el estado dentro de la cavidad es un estado coherente, se presenta el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi cuando se calcula la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|1;0\rangle$. En la figura 4.7 se

presenta el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi que en este caso sucede al tiempo $2t_r$.

La representación del estado de la cavidad por medio de la función de Husimi para este caso se presenta en la figura 4.8. Análogo al MJC se asocia el colapso de las oscilaciones con la separación de las componentes del estado fotónico en el espacio fase (ver figura 4.8b). El resurgimiento está asociado con el momento en el cual las componentes del estado fotónico que se están moviendo sobre un círculo en el espacio fase vuelven a encontrarse (ver figura 4.8c).

En este caso se muestra que el estado fotónico inicial se divide en dos componentes (ver figura 4.8b): una asociada al estado coherente $|\alpha e^{i\omega_1 t}\rangle$ y la segunda asociada al estado coherente $|\alpha e^{-i\omega_1 t}\rangle$ que giran sobre un círculo en el espacio fase con frecuencia ω_1 . En la figura 4.8c se evidencia que el estado fotónico se deforma al tiempo $2t_r$, lo cual responde a que el resurgimiento en la figura 4.7 sea imperfecto. La diferencia en el tiempo en el cual se presenta el resurgimiento de las oscilaciones de Rabi en el caso II comparado con el caso I, se debe a que la frecuencia con la que se mueven las componentes en las que se divide el estado fotónico es diferente.

Adicionalmente se puede evidenciar en la figura 4.7 que la amplitud de las oscilaciones de Rabi en este resurgimiento es mayor en comparación con el caso I (ver figura 4.5), lo cual se puede conectar con la intensidad de las componentes fotónicas en el tiempo que se da el resurgimiento (ver figuras 4.6c y 4.8c).

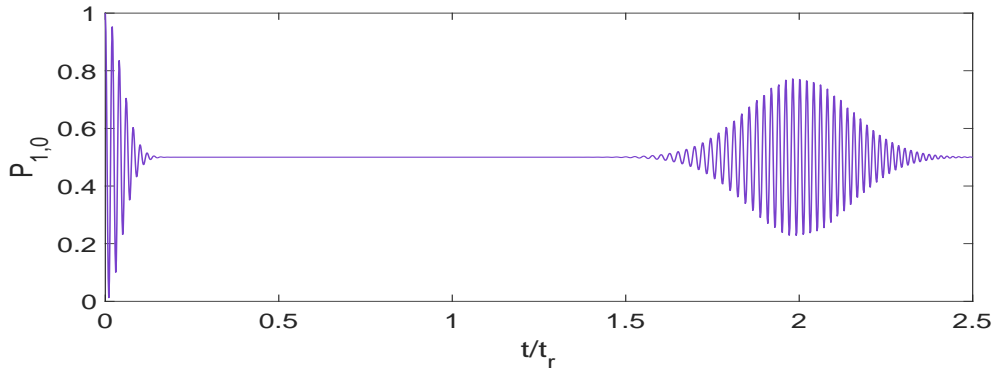


Figura 4.7: Probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|1;0\rangle$ como función del tiempo para el caso de dos átomos de tres niveles, que interactúan con el campo electromagnético dentro de una cavidad preparada inicialmente en un estado inicial $|\Psi_{II}\rangle$ con $\alpha = 7$.

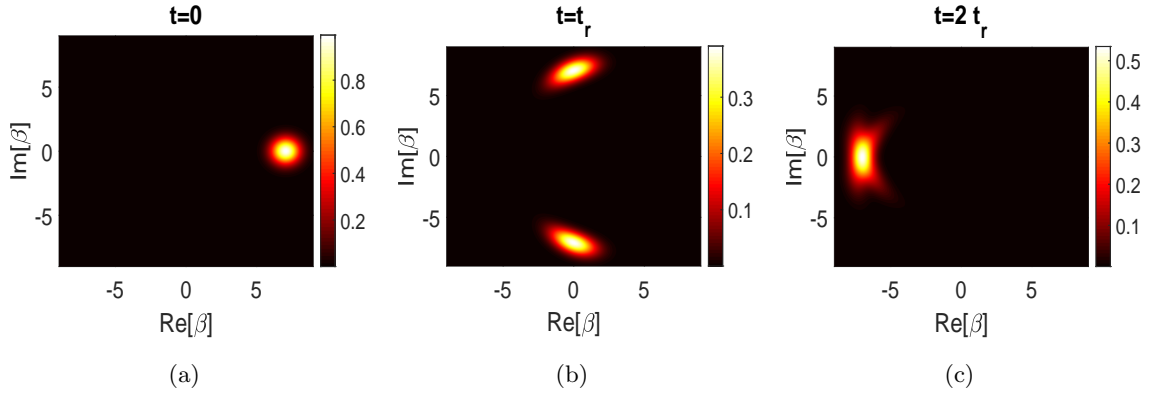


Figura 4.8: Función de Husimi en el plano complejo o espacio fase de un oscilador representando el estado del campo electromagnético dentro de una cavidad, que interactúa con dos átomos de tres niveles. Se muestra al tiempo $t = 0$, $t = t_r/2$ y $t = t_r$. Los parámetros son los indicados en la Fig. 4.7

Caso III

Al considerar el estado inicial $|\Psi_{III}\rangle$ donde el estado dentro de la cavidad es un estado coherente, se presenta el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi cuando se calcula la suma de la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|2;0\rangle$ y el estado $|1;0\rangle$. En la figura 4.9 se presenta el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi que en este caso sucede en dos momentos: el primero al tiempo t_r y el segundo en el tiempo $2t_r$.

La representación del estado de la cavidad por medio de la función de Husimi para este caso se presenta en la figura 4.10. Así como en el MJC se asocia el colapso de las oscilaciones con la separación de las componentes del estado fotónico en el espacio fase. El primer colapso de las oscilaciones de Rabi para este caso se representa en el espacio fase con la figura 4.10b y el segundo se representa en la figura 4.10d. El resurgimiento está relacionado con el momento en el cual las componentes del estado fotónico que se están moviendo sobre un círculo en el espacio fase vuelven a encontrarse. Para este caso el primer resurgimiento sucede cuando las componentes del estado fotónico que se están moviendo en un círculo en el espacio fase con frecuencia ω_2 se vuelven a encontrar (ver figura 4.10c). Un segundo resurgimiento se presenta cuando las componentes del estado fotónico que se mueven con frecuencia ω_1 se vuelven a unir (ver figura 4.10e).

En este caso se muestra que el estado fotónico inicial se divide en cinco componentes (ver figura 4.10b): una asociada al estado coherente que permanece estático $|\alpha\rangle$, dos componentes $|\alpha e^{\pm i\omega_1 t}\rangle$ que giran sobre un círculo en el espacio fase con frecuencia ω_1 y dos

componentes $|\alpha e^{\pm i\omega_2 t}\rangle$ que giran sobre un círculo en el espacio fase con frecuencia ω_2 .

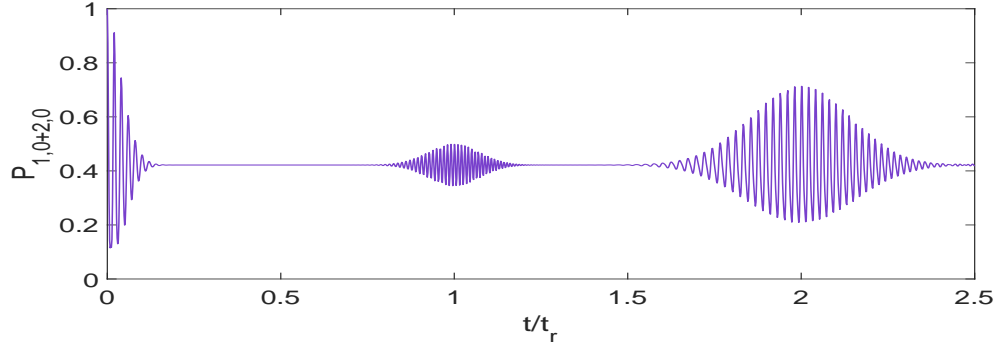


Figura 4.9: Suma de la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|1;0\rangle$ y $|2;0\rangle$ como función del tiempo para el caso de dos átomos de tres niveles, que interactúan con el campo electromagnético dentro de una cavidad preparada inicialmente en el estado inicial $|\Psi_{III}\rangle$ con $\alpha = 7$.

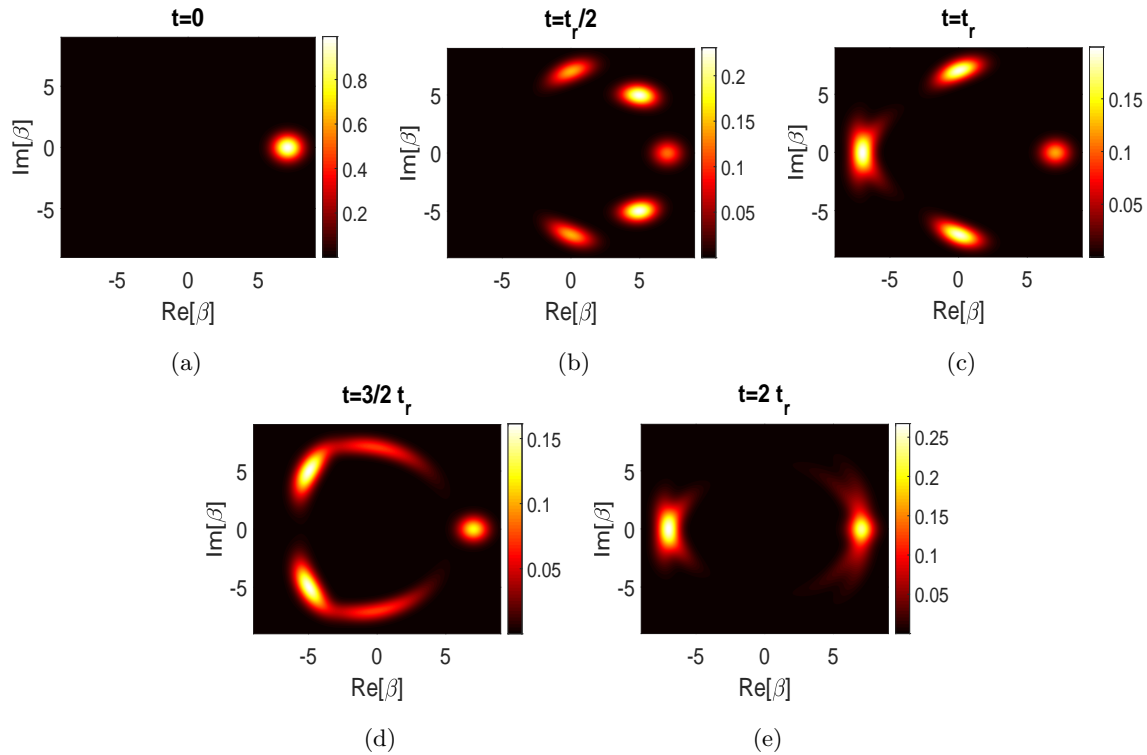


Figura 4.10: Función de Husimi en el plano complejo o espacio fase de un oscilador representando el estado del campo electromagnético dentro de una cavidad, que interactúa con dos átomos de tres niveles. Se muestra al tiempo $t = 0$, $t = t_r/2$, $t = t_r$, $t = 3t_r/2$ y $t = 2t_r$. Los parámetros son los indicados en la Fig. 4.9.

En la figura 4.10c se evidencia que el estado fotónico se deforma al tiempo t_r , lo

cual responde a que el primer resurgimiento en la figura 4.9 sea imperfecto. Por otro lado, en el tiempo $2t_r$ el estado fotónico también se deforma (ver figura 4.10e), pero la intensidad de la componente fotónica es mayor, lo cual conlleva a que aún cuando el segundo resurgimiento en la figura 4.9 no es perfecto, si es mayor comparado al primero.

Caso IV

Si el estado inicial es $|\Psi_{IV}\rangle$ donde el estado dentro de la cavidad es un estado coherente, se presenta el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi cuando se calcula la suma de la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|2; 1\rangle$ y el estado $|2; -1\rangle$. En la figura 4.11 se presenta el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi que en este caso sucede al tiempo t_r .

La representación del estado de la cavidad por medio de la función de Husimi para este caso se presenta en la figura 4.12. Análogo al MJC, se asocia el colapso de las oscilaciones con la separación de las componentes del estado fotónico en el espacio fase (ver figura 4.12b). El resurgimiento está asociado con el momento en el cual las componentes del estado fotónico que se están moviendo sobre un círculo en el espacio fase vuelven a encontrarse (ver figura 4.12c).

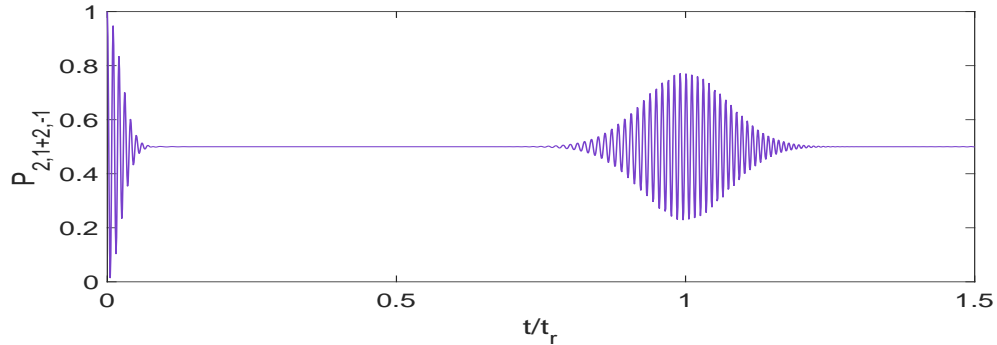


Figura 4.11: Suma de la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|2; 1\rangle$ y $|2; -1\rangle$ como función del tiempo para el caso de dos átomos de tres niveles, que interactúan con el campo electromagnético dentro de una cavidad preparada inicialmente en el estado inicial $|\Psi_{IV}\rangle$ con $\alpha = 7$.

En este caso se muestra que el estado fotónico inicial se divide en dos componentes (ver figura 4.12b): una asociada al estado coherente $|\alpha e^{i\omega_2 t}\rangle$ y la segunda asociada al estado coherente $|\alpha e^{-i\omega_2 t}\rangle$ que giran sobre un círculo en el espacio fase con frecuencia ω_2 . En la figura 4.12c se evidencia que el estado fotónico se deforma al tiempo t_r , lo cual responde a

que el resurgimiento en la figura [4.11](#) sea imperfecto. La diferencia en el tiempo en el cual se presenta el resurgimiento de las oscilaciones de Rabi en el caso IV comparado con el caso II, se debe a que la frecuencia con la que se mueven las componentes en las que se divide el estado fotónico en cada caso es diferente.

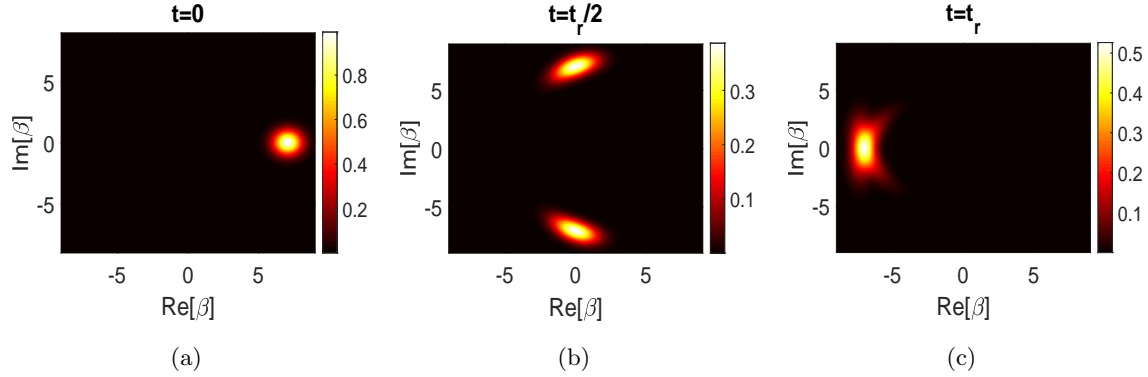


Figura 4.12: Función de Husimi en el plano complejo o espacio fase de un oscilador representando el estado del campo electromagnético dentro de una cavidad, que interactúa con dos átomos de tres niveles. Se muestra al tiempo $t = 0$, $t = t_r/2$ y $t = t_r$. Los parámetros son los indicados en la Fig. [4.11](#)

Caso V

Analizando la expansión en términos de estados coherentes, se encontró un estado inicial para el sistema de dos átomos de tres niveles donde la parte atómica presentada en la base de los estados del átomo es separable y tiene la forma

$$\begin{aligned} |\Psi_V\rangle &= |\alpha\rangle \left[\left(c|e\rangle + \frac{1}{c}|g\rangle \right) \times \left(\frac{1}{c}|e\rangle + c|g\rangle \right) \right] \\ &= |\alpha\rangle \left[|e, e\rangle + c^2|e, g\rangle + \frac{1}{a^2}|g, e\rangle + |g, g\rangle \right], \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde el estado intermedio se encuentra vacío. Este estado es de interés porque con la interacción propuesta en el sistema al tiempo $t > t_c$ genera un estado de Bell de dos cútrits el cual se presenta en la ec. [\(4.33\)](#), cuya medida de entrelazamiento es $E(|0;0\rangle) = S(\rho_A) = 1$.

El estado que se presenta en la ec. [\(4.48\)](#) se puede escribir en eigenestados de pseudo-momento angular total $|s; m\rangle$, ya que se conoce su correspondencia con los eigenestados $|m_1, m_2\rangle$ relacionados con los estados del átomo. De acuerdo a lo anterior usando los eigenestados $|0; 0\rangle$, $|1; 0\rangle$, $|2; 0\rangle$, $|2; -2\rangle$ y $|2; 2\rangle$, se obtiene que

$$|\Psi_V\rangle = |\alpha\rangle \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}|0; 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{8}{3}}|1; 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|2; 0\rangle + \frac{1}{6}|2; -2\rangle + \frac{1}{6}|2; 2\rangle \right]. \quad (4.49)$$

Si el estado inicial es el anterior, al reemplazar en la aproximación en estados coherentes de la ec. (4.18) se obtiene que

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} |\alpha\rangle |0; 0\rangle + \frac{1}{4} \sum_{s,m} C_{s,m} \sum_{r=1}^2 \sum_{l=0}^1 e^{-(-1)^r l i \sigma_r \sqrt{2} g \beta t} \left| \alpha e^{-(-1)^r l i \omega_r t} \right\rangle \left| \Phi_r^l(t) \right\rangle. \quad (4.50)$$

Al tomar el estado inicial $|\Psi_V\rangle$ donde el estado dentro de la cavidad es un estado coherente, se evidencia el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi cuando se calcula para este caso la probabilidad total definida como

$$P_T = P_{0,0} + P_{1,0} + P_{2,0} + P_{2,2} + P_{2,-2}. \quad (4.51)$$

En la figura 4.13 se presenta el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi que en este caso sucede al tiempo t_r .

La representación del estado de la cavidad por medio de la función de Husimi para este caso se presenta en la figura 4.14. Así como en el MJC se asocia el colapso de las oscilaciones con la separación de las componentes del estado fotónico en el espacio fase (ver figura 4.14b). El resurgimiento está relacionado con el momento en el cual las componentes del estado fotónico que se están moviendo sobre un círculo en el espacio fase vuelven a encontrarse (ver figura 4.14c).

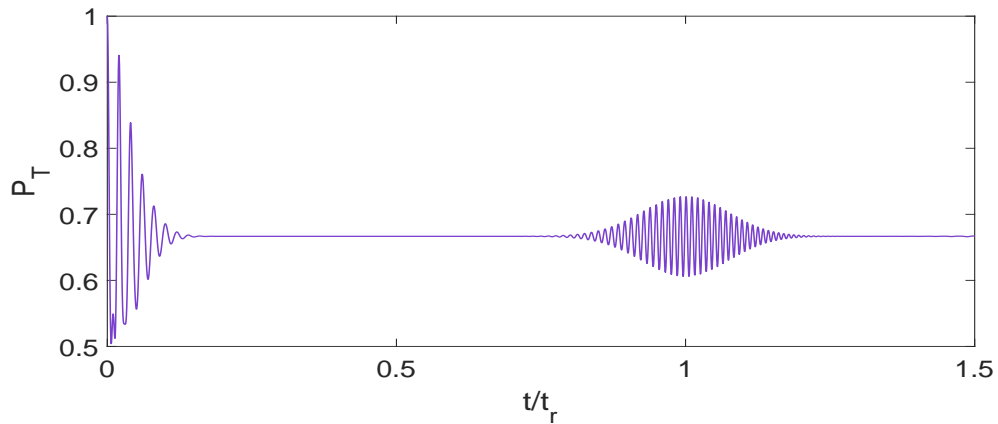


Figura 4.13: Probabilidad P_T como función del tiempo para dos átomos de tres niveles, que interactúan con el campo electromagnético dentro de una cavidad preparada inicialmente en un estado inicial $|\Psi_V\rangle$, con $\alpha = 7$.

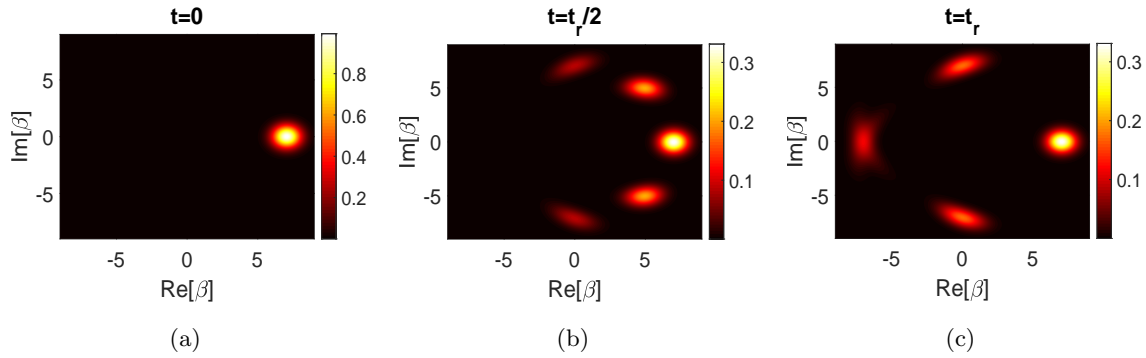


Figura 4.14: Función de Husimi en el plano complejo o espacio fase de un oscilador representando el estado del campo electromagnético dentro de una cavidad, que interactúa con dos átomos de tres niveles. Se muestra al tiempo $t = 0$, $t = t_r/2$ y $t = t_r$. Los parámetros son los indicados en la Fig. 4.13.

De acuerdo a la figura 4.14c se evidencia que el estado fotónico se deforma al tiempo t_r , lo cual responde a que el resurgimiento en la figura 4.13 sea imperfecto. En este caso se muestra que el estado fotónico inicial se divide en cinco componentes (ver figura 4.14b): una asociada al estado coherente que permanece estático $|\alpha\rangle$, dos componentes $|\alpha e^{\pm i\omega_1 t}\rangle$ que giran sobre un círculo en el espacio fase con frecuencia ω_1 y dos componentes $|\alpha e^{\pm i\omega_2 t}\rangle$ que giran sobre un círculo en el espacio fase con frecuencia ω_2 . Se presenta un comportamiento similar al caso III (ver figura 4.10b) con la diferencia que la intensidad de las componentes en las que se divide el estado fotónico es menor.

Se evidencia que iniciando con un estado separable de los dos átomos, es posible dentro de las leyes de la mecánica cuántica idear una medición que colapse los átomos a un estado totalmente entrelazado. Para ello se necesitaría distinguir una de las componentes fotónicas, la cual es perfectamente un estado coherente y es ortogonal a todas las demás componentes para tiempos mayores al colapso de las oscilaciones de Rabi. Lo anterior se puede realizar usando los métodos mencionados en 23.

Con base en los casos presentados se puede concluir que como las componentes en las que se divide el estado fotónico giran con diferente frecuencia, el tiempo en el cual se da el resurgimiento de las oscilaciones de Rabi será diferente de acuerdo al estado inicial. Adicionalmente, tomando un estado inicial arbitrario en la ec. (4.18) es posible identificar la cantidad de componentes en las que el estado fotónico se va a dividir ya que en esta aproximación se evidencia qué componente fotónica acompaña a cada uno de los términos relacionados con la componente atómica. Como un ejemplo, se puede tomar la ec. (4.20) donde se evidencian tres diferentes componentes fotónicas para un tiempo $t > 0$.

Capítulo 5

Transición a un modelo de dos fotones

En este capítulo se presenta el sistema de dos átomos de tres niveles dentro de una cavidad cuando el estado intermedio tiene una energía $\hbar\Delta$. Se muestra una solución analítica del sistema al identificar que el hamiltoniano que describe la dinámica de este tiene una representación diagonal por bloques. Además se realiza una breve explicación de cómo obtener el hamiltoniano efectivo que representa un modelo de dos fotones. Finalmente se discuten los resultados obtenidos por medio de operadores de pseudo momento angular total comparados con la situación en que los operadores que describen el hamiltoniano del sistema utilizan la base de los estados de excitación del átomo.

5.1 Descripción del modelo

El sistema a estudiar consiste en dos átomos cada uno con tres niveles atómicos, $|e\rangle$ corresponde al estado excitado, $|i\rangle$ al estado intermedio y $|g\rangle$ al estado base, que interactúan con un modo de radiación electromagnética con frecuencia ω . La figura [5.1](#) es una representación del modelo, en el cual, se considera que al estado intermedio se le asocia una energía igual a $\hbar\Delta$. Así como en el capítulo [4](#) se considera a cada uno de los átomos análogo a una partícula con un pseudo momento angular s_1 y s_2 respectivamente, de modo que considerando la teoría de adición de momento angular se trabaja con operadores de pseudo momento angular total para la realizar la descripción del sistema. De acuerdo a lo

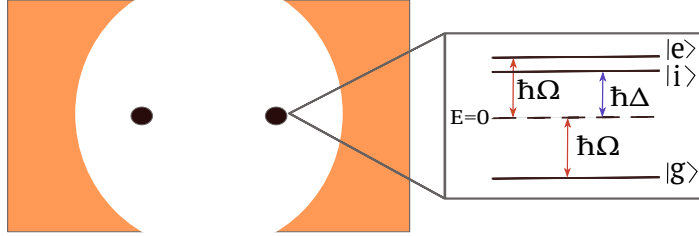


Figura 5.1: Ilustración de dos átomos de tres niveles dentro de una cavidad electromagnética donde al estado intermedio se le asocia una energía igual a $\hbar\Delta$.

anterior para este sistema el hamiltoniano que da cuenta de la dinámica es

$$\hat{H}_{M2} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\Omega\hat{S}_z + \hbar\Delta\hat{S}_{ii} g (\hat{a}\hat{S}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{S}_-). \quad (5.1)$$

El operador \hat{S}_{ii} en la ec. (5.1) está definido como

$$\hat{S}_{ii} = \hat{S}_{i1} \otimes 1 + 1 \otimes \hat{S}_{i2} = |i\rangle\langle i|_1 + |i\rangle\langle i|_2. \quad (5.2)$$

Se sigue que se puede encontrar la representación matricial del operador \hat{S}_{ii} en la base $|s; m\rangle$, debido a que se conoce cómo está dado cada eigenestado en la base $|m_1, m_2\rangle$, lo cual se presenta en las ecs. (4.9a)-(4.9i).

El hamiltoniano de la ec. (4.1) y ec. (5.1) solo difieren por el término $\hbar\Delta\hat{S}_{ii}$, pero se utiliza la misma base de eigenestados de pseudo-momento angular total.

5.2 Solución analítica

Para resolver la dinámica del sistema se considera que $\omega = \Omega$, se eligen unidades en las cuales $\hbar = 1$ y se asume que $\Delta \gg g$. En relación con lo anterior el hamiltoniano de la ec. (5.1) se puede reescribir como

$$\hat{H}_{M2} = \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega\hat{S}_z + \Delta\hat{S}_{ii} + g (\hat{a}\hat{S}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{S}_-). \quad (5.3)$$

Se identifica en el sistema la constante de movimiento \hat{I} de la ec. (4.7), la cual conmuta con el hamiltoniano, $[\hat{H}_{M2}, \hat{I}]$. De modo que \hat{H}_{M2} , se puede representar en la base de eigenestados de \hat{I} . Escrito en esta base, el hamiltoniano toma una estructura diagonal de

bloques 9×9 para $n \geq 2$ que en el marco de interacción se representa como

$$\begin{pmatrix} \frac{2\Delta}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}\Delta}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & g\sqrt{2n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g\sqrt{2n} & 0 & g\sqrt{2(n+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\sqrt{2(n+1)} & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2g\sqrt{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2g\sqrt{n-1} & \Delta & g\sqrt{6n} & 0 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}\Delta}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & g\sqrt{6n} & \frac{4\Delta}{3} & g\sqrt{6(n+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g\sqrt{6(n+1)} & \Delta & 2g\sqrt{n+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2g\sqrt{n+2} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

En este caso el pseudo-momento angular total no es una constante de movimiento, pero se evidencia que el bloque 9×9 se subdivide a su vez en dos bloques. Un bloque de dimensión 3×3 y otro cuya dimensión es 6×6 , el cual corresponde al acoplamiento de los eigenestados del pseudo momento angular total con $s = 0$ y $s = 2$. Los bloques dados en el marco de interacción son

- Bloque 3×3

$$\begin{pmatrix} \Delta & g\sqrt{2n} & 0 \\ g\sqrt{2n} & 0 & g\sqrt{2(n+1)} \\ 0 & g\sqrt{2(n+1)} & \Delta \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

- Bloque 6×6

$$\begin{pmatrix} 0 & 2g\sqrt{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2g\sqrt{n-1} & \Delta & \sqrt{6}g\sqrt{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}g\sqrt{n} & \frac{4\Delta}{3} & \sqrt{6}g\sqrt{n+1} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}\Delta}{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{6}g\sqrt{n+1} & \Delta & 2g\sqrt{n+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2g\sqrt{n+2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}\Delta}{3} & 0 & 0 & \frac{2\Delta}{3} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

En este caso, para el bloque 6×6 los eigenvalores son: uno igual a cero y los restantes corresponden a las raíces de un polinomio de orden cinco. Para calcular los eigenestados y eigenfrecuencias asociados a cada uno de los bloques presentados en (5.5) - (5.6), se establece como condición que el número promedio de fotones, \bar{n} , es grande. Las diferentes raíces de cada uno de los bloques dadas como $\sqrt{n+2}$, $\sqrt{n+1}$, \sqrt{n} , $\sqrt{n-1}$ y $\sqrt{n-2}$ se aproximan

a $\sqrt{n + \frac{1}{2}}$. Con base en lo anterior, las eigenfrecuencias diferentes de cero que se obtienen para cada bloque se presentan en la tabla [5.1](#).

BLOQUE	EIGENFRECUENCIAS
3×3	Δ y $\frac{1}{2}(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 8g^2 + 16g^2n})$
6×6	Δ , $\frac{1}{2}(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 8g^2 + 16g^2n})$ y $\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 8g^2 + 16g^2n}$

Tabla 5.1: Eigenfrecuencias de los bloques 3×3 y 6×6 .

Se establece que $2\sqrt{2}g\sqrt{2n+1} \ll \Delta$. Por lo tanto, tomando las consideraciones anteriores se obtienen los eigenestados y eigenfrecuencias aproximados asociados a cada bloque que se presentan en la tabla [5.2](#).

EIGENFRECUENCIA	EIGENESTADO
BLOQUE 3×3	
Δ	$ \Phi_1^n\rangle = (- n-1, 1, 1\rangle + n+1, 1, -1\rangle)/\sqrt{2}$
$-2g^2(2n+1)/\Delta$	$ \Phi_2^n\rangle = n, 1, 0\rangle$
$\Delta + 2g^2(2n+1)/\Delta$	$ \Phi_3^n\rangle = (n-1, 1, 1\rangle + n+1, 1, -1\rangle)/2$
BLOQUE 6×6	
0	$ \Phi_4^n\rangle = - n-2, 2, 2\rangle/2 + n, 2, 0\rangle/\sqrt{6} - n+2, 2, -2\rangle/2 + n, 0, 0\rangle/\sqrt{3}$
Δ	$ \Phi_5^n\rangle = (n-1, 2, 1\rangle + n+1, 2, -1\rangle)/\sqrt{2}$
$-4g^2(2n+1)/\Delta$	$ \Phi_6^n\rangle = n-2, 2, 2\rangle/2 + n, 2, 0\rangle/\sqrt{6} + n+2, 2, -2\rangle/2 + n, 0, 0\rangle/\sqrt{3}$
$-2g^2\sqrt{(2n+1)}/\Delta$	$ \Phi_7^n\rangle = (- n-2, 2, 2\rangle + n+2, 2, -2\rangle)/\sqrt{2}$
$\Delta + 2g^2(2n+1)/\Delta$	$ \Phi_8^n\rangle = (- n-1, 2, 1\rangle + n+1, 2, -1\rangle)/\sqrt{2}$
$2\Delta + 4g^2(2n+1)/\Delta$	$ \Phi_9^n\rangle = (-\sqrt{2} n, 2, 0\rangle + n, 0, 0\rangle)/\sqrt{3}$

Tabla 5.2: Eigenfrecuencias y eigenestados aproximados para el sistema de dos átomos de tres niveles en una cavidad electromagnética de la figura [5.1](#).

5.3 Hamiltoniano efectivo

Para el sistema de dos átomos de tres niveles del esquema de la figura [5.1](#) al considerar $\Delta \gg g$ y estableciendo que el estado intermedio no está inicialmente poblado, se puede mostrar que el estado intermedio se desacopla de la dinámica del sistema. Es decir, si inicialmente el estado intermedio tiene población nula, permanecerá de esta manera durante toda la evolución temporal. Para mostrarlo basta con evidenciar que existen estados que contienen al estado intermedio y otros que no. Los eigenestados $|\Phi_1^n\rangle, |\Phi_3^n\rangle, |\Phi_5^n\rangle, |\Phi_8^n\rangle$ y $|\Phi_9^n\rangle$, en términos de los estados del átomo usando las ecs. [\(A.16a\)](#)-[\(A.16i\)](#) y la tabla [A.1](#) están dados como

$$\begin{aligned} |\Phi_1^n\rangle &= -\frac{1}{2}|n-1, e, i\rangle + \frac{1}{2}|n-1, i, e\rangle + \frac{1}{2}|n+1, g, i\rangle - \frac{1}{2}|n+1, i, g\rangle, \\ |\Phi_3^n\rangle &= \frac{1}{2}|n-1, e, i\rangle - \frac{1}{2}|n-1, i, e\rangle + \frac{1}{2}|n+1, g, i\rangle - \frac{1}{2}|n+1, i, g\rangle, \\ |\Phi_5^n\rangle &= \frac{1}{2}|n-1, e, i\rangle + \frac{1}{2}|n-1, i, e\rangle + \frac{1}{2}|n+1, g, i\rangle + \frac{1}{2}|n+1, i, g\rangle, \\ |\Phi_8^n\rangle &= -\frac{1}{2}|n-1, e, i\rangle - \frac{1}{2}|n-1, i, e\rangle + \frac{1}{2}|n+1, g, i\rangle - \frac{1}{2}|n+1, i, g\rangle, \\ |\Phi_9^n\rangle &= -|n, i, i\rangle, \end{aligned}$$

no participarán cuando el estado inicial se toma como un estado arbitrario de dos átomos de solo dos niveles. Por otro lado, los eigenestados $|\Phi_4^n\rangle, |\Phi_6^n\rangle$ y $|\Phi_7^n\rangle$ usando las ecs. [\(A.16a\)](#)-[\(A.16i\)](#) y la equivalencia entre estados de pseudo-momento angular $|m_1, m_2\rangle$ y estados atómicos para el sistema de dos átomos que se presenta en la tabla [A.1](#) se reescriben de modo que

$$|\Phi_4^n\rangle = -\frac{1}{2}|n-2, e, e\rangle - \frac{1}{2}|n+2, g, g\rangle + \frac{1}{2}|n, e, g\rangle + \frac{1}{2}|n, g, e\rangle, \quad (5.7a)$$

$$|\Phi_6^n\rangle \rightarrow \frac{1}{2}|n-2, e, e\rangle + \frac{1}{2}|n+2, g, g\rangle + \frac{1}{2}|n, e, g\rangle + \frac{1}{2}|n, g, e\rangle, \quad (5.7b)$$

$$|\Phi_7^n\rangle \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}(|n-2, e, e\rangle - |n+2, g, g\rangle). \quad (5.7c)$$

Definiendo

$$\nu_4 = 0 \quad \nu_6 = -\frac{4g^2(2n+1)}{\Delta} \quad \nu_7 = -\frac{2g^2\sqrt{(2n+1)}}{\Delta}. \quad (5.8)$$

donde ν_4, ν_6 y ν_7 corresponden a la eigenfrecuencia asociada a cada eigenestado como se presenta en la tabla [5.2](#) (recordando que se eligieron unidades en las que $\hbar = 1$).

Haciendo uso de los estados en (5.7) y las eigenfrecuencias en (5.8), se muestra que la dinámica del sistema ahora está descrita por bloques de dimensión 3×3 , que representa un hamiltoniano efectivo dado como

$$\hat{H}_{\text{eff}} \approx \nu_4 |\Phi_4^n\rangle \langle \Phi_4^n| + \nu_6 |\Phi_6^n\rangle \langle \Phi_6^n| + \nu_7 |\Phi_7^n\rangle \langle \Phi_7^n|. \quad (5.9)$$

Analizando los estados en las ecs. (5.7a)-(5.7c), se puede verificar que dependen de los estados $|e, e\rangle$, $|g, g\rangle$ y $|\Psi\rangle$ donde

$$|\Psi\rangle = \frac{|e, g\rangle + |g, e\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (5.10)$$

La representación matricial de los estados $|e, e\rangle$, $|g, g\rangle$ y $|\Psi\rangle$, se establece como

$$|e, e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |g, g\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Con relación a lo anterior, se puede entonces decir que el hamiltoniano efectivo total tiene una estructura diagonal por bloques 3×3 para un $n \geq 2$ en la base $\{|n+2\rangle |g, g\rangle, |n\rangle |\psi\rangle, |n-2\rangle |e, e\rangle\}$. La representación del hamiltoniano efectivo de la ec. (5.9) que representa cada uno de los bloques 3×3 está dado como

$$H_{\text{eff}} \approx \begin{bmatrix} -2g^2(1+2n)/\Delta & -\sqrt{2}g^2(1+2n)/\Delta & 0 \\ -\sqrt{2}g^2(1+2n)/\Delta & -2g^2(1+2n)/\Delta & -\sqrt{2}g^2(1+2n)/\Delta \\ 0 & -\sqrt{2}g^2(1+2n)/\Delta & -2g^2(1+2n)/\Delta \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

El hamiltoniano anterior es el resultado al que se llega cuando se considera que el estado intermedio se desacopla de la dinámica del sistema debido a que no está poblado en un inicio, lo cual conlleva a que se describa la dinámica de dos átomos restringida a los niveles $|e\rangle$ y $|g\rangle$.

Se reconoce de la representación matricial de H_{eff} en (5.12) que este se puede tomar como $H_{\text{eff}} = C + W_n$, siendo C un valor constante multiplicado por la identidad. Bajo las suposiciones que se han realizado se puede tomar que la dinámica del sistema está bien descrita por el término W_n dado en la misma base que H_{eff} y escrito como

$$W_n = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2}g^2(1+2n)/\Delta & 0 \\ -\sqrt{2}g^2(1+2n)/\Delta & 0 & \sqrt{2}g^2(1+2n)/\Delta \\ 0 & \sqrt{2}g^2(1+2n)/\Delta & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Para conocer cómo es la evolución temporal de un estado arbitrario del sistema se realiza la diagonalización de cada bloque 3×3 . Si se tiene como condición que $\bar{n} \gg 1$, se pueden encontrar una aproximación a los resultados exactos, para este caso los eigenvalores que representan las eigenfrecuencias diferentes de cero son (siendo $g \rightarrow \tilde{g}$)

$$\tilde{\nu}_n^\pm \pm \frac{2\tilde{g}^2(2n+1)}{\Delta}. \quad (5.14)$$

El bloque W_n presentado en (5.13) es equivalente al que resulta de un término de interacción de dos fotones dado como

$$\hat{W} = g \left(\hat{a}^2 \hat{S}_+ + \hat{a}^\dagger 2 \hat{S}_- \right), \quad g = -g_e^2 / \Delta. \quad (5.15)$$

5.4 Resultados y discusión

El resultado de la ec. (5.14) se puede comparar con el reportado en [10], donde se revisa de modo breve el modelo de Dicke para dos átomos de tres niveles asumiendo la diferencia de frecuencia entre el estado excitado y el estado base como dos veces la frecuencia del modo de la cavidad. En este caso los autores asumen que el estado inicial es de la forma $|\Psi\rangle = |\alpha\rangle |\psi\rangle$ siendo $|\psi\rangle$ un estado arbitrario de dos átomos de dos niveles, su análisis conlleva encontrar el vector de estado dependiente del tiempo para lo cual es necesario resolver el problema de eigenvalores de \hat{W} . Se reportan que los eigenvalores diferentes de cero del sistema son

$$\tilde{\omega}_n^\pm = \pm g(2n-3) \quad g = -\frac{g_e g_e}{\Delta} \quad (5.16)$$

se puede recuperar el resultado reportado en [10], al realizar el cambio de $n \rightarrow n-2$ y considerando que la relación de la constante de acoplamiento cuando el hamiltoniano que describe el sistema está en la base de pseudo momento angular y los estados de excitación es $\tilde{g} \rightarrow g/\sqrt{2}$.

Con lo anterior se puede evidenciar que la formulación en términos de pseudo momento angular total que se utilizó para escribir el hamiltoniano que describe la dinámica del sistema permite realizar la descripción del modelo de dos fotones en donde la dinámica se restringe a los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$.

Las figuras 5.2 y 5.3 muestran el comportamiento de las oscilaciones de Rabi de dos estados iniciales diferentes para el sistema de dos átomos de tres niveles dentro de una cavidad cuando el estado intermedio tiene asociada la energía $\hbar\Delta$ y tomado que $g/\Delta =$

0.002, lo cual cumple con la condición $\Delta \gg g$. En cada uno de los casos el resurgimiento de las oscilaciones de Rabi es aproximadamente perfecto, lo cual no se evidencia en el sistema presentado en el capítulo 4. Por otro lado, si la energía del estado intermedio $\hbar\Delta$ es altamente asimétrica en relación al estado base y excitado, el sistema es equivalente a un modelo que presenta transición de dos fotones, es decir, se necesitan dos cuantos de energía de la cavidad para excitar al átomo del estado base al estado excitado.

Aquí hemos mostrado que nuestro tratamiento es equivalente al usado en [10] en donde se llegó al mismo resultado utilizando el método de rotaciones pequeñas introducido en [13].

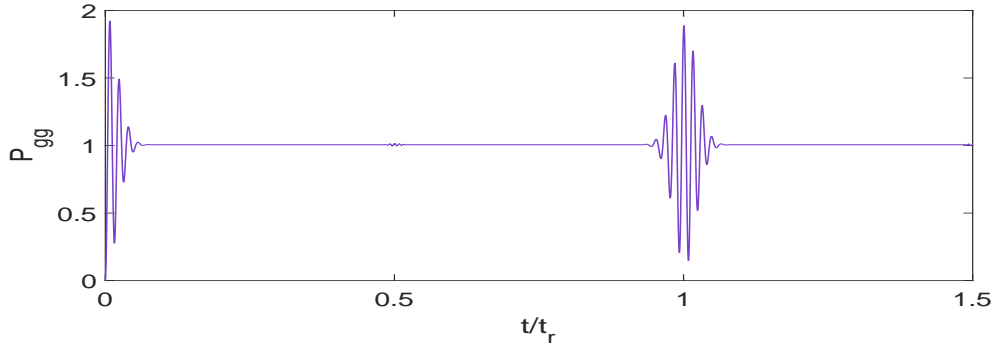


Figura 5.2: Probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|gg\rangle$ como función del tiempo para dos átomos de tres niveles, que interactúa con el campo electromagnético dentro de una cavidad preparada inicialmente en un estado $|\alpha\rangle|gg\rangle$, con $g/\Delta = 0.002$ y $\alpha = 8$.

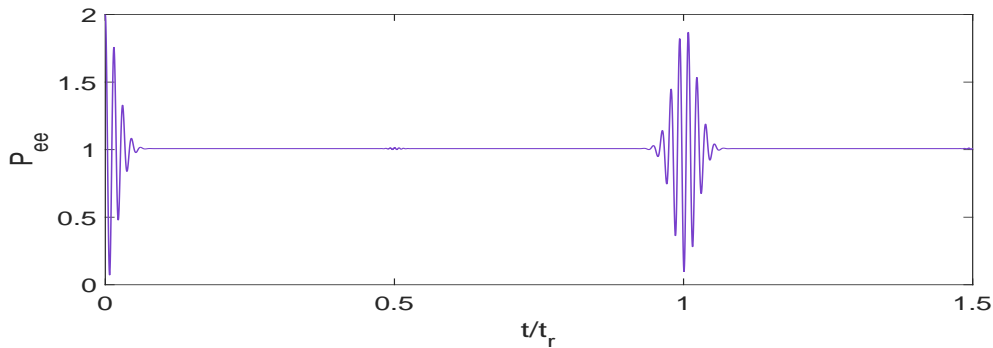


Figura 5.3: Probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|ee\rangle$ como función del tiempo para dos átomos de tres niveles, que interactúa con el campo electromagnético dentro de una cavidad preparada inicialmente en un estado $|\alpha\rangle|ee\rangle$, con $g/\Delta = 0.002$ y $\alpha = 8$.

Para el sistema descrito por el hamiltoniano de la ec. (5.3), en el marco de inte-

racción los resultados de las eigenfrecuencias presentadas en la tabla 5.2 son lineales en n , lo cual conlleva a un comportamiento tipo oscilador armónico en el espacio fase. En otras palabras, las componentes del campo ya no se deforman. Como ejemplo, si se toma como estado inicial $|2; 2\rangle = |e, e\rangle$, la figura 5.4 muestra en tres diferentes tiempos que los estados no sufren deformaciones. En este caso, el hecho de que las componentes del campo mantienen su forma, se asocia en las figuras 5.2 y 5.3 con los resurgimientos perfectos.

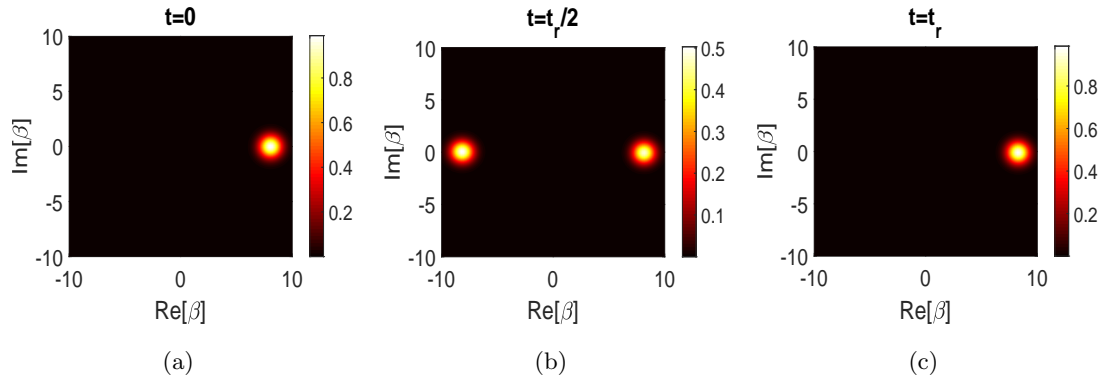


Figura 5.4: Función de Husimi en el plano complejo o espacio fase de un oscilador representando el estado del campo electromagnético dentro de una cavidad, sistema de la Fig. 5.1. Se muestra al tiempo $t = 0$, $t = t_r/2$ y $t = t_r$. Los parámetros son los indicados en la Fig. 5.3.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se han presentado dos sistemas de un átomo en cavidades. El primero fue el modelo de Jaynes-Cummings que es el ejemplo más emblemático en este tipo de sistemas, donde se exponen algunos resultados que ya se conocían en la literatura como la aproximación en estados coherentes reportada en [9] y el fenómeno de colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi que surge al considerar un estado coherente dentro de la cavidad y que se evidenció por primera vez al inicio de los años ochenta [8]. El segundo fue el sistema de un átomo de tres niveles donde se extrapolaron las ideas del modelo de Jaynes-Cummings para realizar su descripción, donde se evidenció que se puede realizar una aproximación en estados coherentes para el estado dependiente del tiempo siguiendo un proceso análogo a modelo de Jaynes-Cummings. En relación con este segundo sistema se presentan algunos casos donde se evidencia el fenómeno de colapso y resurgimiento de las oscilaciones Rabi y se presenta la dinámica del campo en el espacio fase que es un aporte que se ha realizado a la descripción de este sistema.

Para poder realizar el estudio del sistema de dos átomos de tres niveles dentro de una cavidad, se hizo una analogía de los estados atómicos a momento angular, por lo cual se pudo recurrir a la teoría de la adición de momento angular. Al haber tomado esta idea para la descripción del sistema, el hamiltoniano que da cuenta de la dinámica se pudo escribir en términos de los operadores de pseudo momento angular total. Por otro lado, fue posible identificar en el sistema constantes de movimiento, la primera fue la constante \hat{I} presentada en la ec. (4.7), la cual permitió la diagonalización por bloques 9×9 del hamiltoniano del sistema. La segunda fue el pseudo-momento angular total el cual conmuta con el hamiltoniano y permitió que el bloque se subdividiera en bloques de dimensión

1×1 , 3×3 y 5×5 ya que estados con valores diferentes de pseudo momento angular no se acoplan. La estructura por bloques permitió encontrar los correspondientes eigenestados y eigenfrecuencias al diagonalizar las matrices de tamaño finito de dimensión no mayor a 5×5 .

Al haber considerado un estado coherente dentro de la cavidad fue posible desarrollar la aproximación en estados coherentes de un estado inicial arbitrario que evoluciona en el tiempo, llegando a la ec. (4.18), resultado que no ha sido reportado previamente. Este aporte para el estudio del sistema permite capturar propiedades importantes de las componentes atómicas que para este sistema están relacionadas con los eigenestados de pseudo momento angular total. Desde el resultado de la aproximación se puede concluir que el vector de estado dependiente del tiempo se puede expresar de forma general como una suma de cinco términos cada uno con componente atómica y fotónica. Esto conlleva a que al momento de representar la función de Husimi aparezca un máximo de cinco componentes en las que se puede dividir el estado fotónico. De acuerdo a lo evidenciado con cada caso en las figuras 4.6, 4.8, 4.10, 4.12 el número de componentes en las que el estado fotónico inicial se descompone depende del estado inicial que se tome, debido a que cada componente del campo se acompaña de componentes atómicas específicas.

Se caracterizó el fenómeno de colapso y resurgimiento de oscilaciones de Rabi, lo cual es una aportación original de este trabajo para el caso de dos átomos de tres niveles. El colapso de las oscilaciones de Rabi se asocia con la separación del estado fotónico en varias componentes. Los resurgimientos de las oscilaciones de Rabi se relacionan con el momento en que se vuelven a encontrar dos componentes atómicas que se mueven sobre un círculo en el espacio fase, que en este caso son $|\alpha e^{\pm i\omega_2 t}\rangle$ o $|\alpha e^{\pm i\omega_1 t}\rangle$.

A partir de la aproximación en términos de estados coherentes, se pudieron identificar las condiciones para generar un estado con máximo grado de entrelazamiento a partir de un estado separable. Esto representa una proyección de Bell a un estado formado por dos cútrits, lo cual representa una original y valiosa aportación de este trabajo con posibles aplicaciones a protocolos de información cuántica usando cútrits en lugar de cúbits.

El haber encontrado cómo generar un estado de Bell tripartita a partir de estados producto, como se presentó en la ec. (4.49), da pauta para considerar este tipo de sistemas para tareas relacionadas con información y computación cuántica.

Finalmente, el tomar el pseudo momento angular total para describir el sistema de dos átomos de tres niveles dentro de la cavidad permitió evidenciar otra manera de realizar

la transición a un modelo de dos fotones tomando el sistema de la figura [5.1](#) y obteniendo los mismos resultados reportados en [10](#) donde el hamiltoniano que describe al sistema está en términos de operadores de transición atómica.

Apéndice A

Momento angular y coeficientes de Clebsch-Gordan

Al considerar el sistema de un átomo de tres niveles análogo al caso donde se tiene una partícula de pseudo-momento angular $s_1 = 1$, el hamiltoniano que describe la dinámica del sistema se puede formular en términos de operadores de pseudo-momento angular \hat{S}_{z_1} , \hat{S}_{+1} y \hat{S}_{-1} , que cumplen las mismas relaciones de conmutación de momento angular pero en este caso se toman operadores adimensionales. Además, tomando los eigenestados de \hat{S}_{z_1} como la base en la que se van a representar los operadores denotada como $|s_1, m_1\rangle$, la manera en la que actúa cada operador en los elementos de la base es como sigue

$$\hat{S}_{z_1} |s_1, m_1\rangle = m_1 |s_1, m_1\rangle, \quad (\text{A.1a})$$

$$\hat{S}_{+1} |s_1, m_1\rangle = \sqrt{(s_1 - m_1)(s_1 + m_1 + 1)} |s_1, m_1 + 1\rangle, \quad (\text{A.1b})$$

$$\hat{S}_{-1} |s_1, m_1\rangle = \sqrt{(s_1 + m_1)(s_1 - m_1 + 1)} |s_1, m_1 - 1\rangle, \quad (\text{A.1c})$$

donde \hat{S}_{+1} y \hat{S}_{-1} son nombrados operadores escalera. Los valores permitidos para m a partir del valor de s son

$$m = -s, s + 1, \dots, s - 1, s, \quad (\text{A.2})$$

en relación con lo anterior, en el caso del sistema de un átomo de tres niveles se tiene que

$$m_1 = -1, 0, 1. \quad (\text{A.3})$$

De acuerdo a la ec. (A.1) y los valores que toma m según la ec. (A.3), la representación matricial de los operadores \hat{S}_{z1} , \hat{S}_{+1} y \hat{S}_{-1} está dada como

$$\hat{S}_{+1} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_{-1} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_{z1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

a partir de la representación matricial anterior se evidencia la similitud con los operadores definidos en la ec. (3.40).

Se sigue de lo anterior que es posible recurrir a la teoría formal de la adición de momento angular para describir el sistema de dos átomos cada uno con tres niveles atómicos, los cuales interactúan con un modo de radiación electromagnética. Para el tratamiento de manera análoga se considera al segundo átomo con un pseudo-momento angular $s_2 = 1$. Se define para este caso el pseudo-momento angular total como [18]

$$\hat{S} = \hat{S}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \hat{S}_2 \quad (\text{A.5})$$

En cuanto a la elección de la base de eigenestados se tienen dos opciones

1. Tomar simultáneamente eigenestados de \hat{S}_1^2 , \hat{S}_2^2 , \hat{S}_{z1} y \hat{S}_{z2} . Se denotan estos como $|s_1 s_2; m_1 m_2\rangle \rightarrow |m_1, m_2\rangle$. En esta base las ecuaciones son

$$\hat{S}_{z1} |m_1, m_2\rangle = m_1 |m_1, m_2\rangle, \quad (\text{A.6a})$$

$$\hat{S}_{z2} |m_1, m_2\rangle = m_2 |m_1, m_2\rangle, \quad (\text{A.6b})$$

los operadores escalera, partiendo de como actúan según las ecs. (A.1b) y (A.1c), se van a definir en esta base para uno de los átomos como

$$\hat{S}_{+1} |m_1, m_2\rangle = \sqrt{(s_1 - m_1)(s_1 + m_1 + 1)} |m_1 + 1, m_2\rangle, \quad (\text{A.7a})$$

$$\hat{S}_{-1} |m_1, m_2\rangle = \sqrt{(s_1 + m_1)(s_1 - m_1 + 1)} |m_1 - 1, m_2\rangle, \quad (\text{A.7b})$$

estas definiciones son equivalentes para \hat{S}_{+2} y \hat{S}_{-2} .

2. Tomar simultáneamente eigenestados de \hat{S}^2 , \hat{S}_1^2 , \hat{S}_2^2 y \hat{S}_z . Se denotan estos como $|s_1 s_2; s m\rangle \rightarrow |s; m\rangle$. En esta base la ecuación es

$$\hat{S}_z |s; m\rangle = m |s; m\rangle, \quad (\text{A.8})$$

los operadores escalera en esta base conjunta se definen como

$$\hat{S}_+ |s; m\rangle = \sqrt{(s-m)(s+m+1)} |s; m+1\rangle, \quad (\text{A.9a})$$

$$\hat{S}_- |s; m\rangle = \sqrt{(s+m)(s-m+1)} |s; m-1\rangle, \quad (\text{A.9b})$$

para este caso, por propiedad, se tiene que

$$|s_1 - s_2| \leq s \leq s_1 + s_2. \quad (\text{A.10})$$

Existe una transformación unitaria que conecta las dos bases de eigenestados presentadas anteriormente:

$$|s_1, s_2; s m\rangle = \sum_{m_1} \sum_{m_2} |s_1, s_2; m_1 m_2\rangle \langle s_1, s_2; m_1 m_2 | s_1, s_2; s m\rangle, \quad (\text{A.11})$$

donde se usó que

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} |s_1, s_2; m_1 m_2\rangle \langle s_1, s_2; s m| = 1, \quad (\text{A.12})$$

siendo el lado derecho de la igualdad el operador identidad cuando se da s_1 y s_2 . Los elementos de esta matriz de transformación de la ec. (A.11) son los coeficientes de Clebsch-Gordan (C-G) que simplificando notación se pueden reescribir como [16]

$$\langle s_1, s_2; m_1 m_2 | s_1, s_2; s m\rangle = \langle m_1, m_2 | s; m\rangle. \quad (\text{A.13})$$

Si se aplica el operador $\hat{S}_z = \hat{S}_{z_1} + \hat{S}_{z_2}$ a (A.11) se obtienen las condiciones para los eigenvalores

$$\begin{aligned} \hat{S}_z |s_1, s_2; s m\rangle &= m |s_1, s_2; s m\rangle \\ (\hat{S}_{z_1} + \hat{S}_{z_2}) |s_1, s_2; m_1 m_2\rangle &= (m_1 + m_2) |s_1, s_2; m_1 m_2\rangle, \end{aligned}$$

de acuerdo a lo anterior se puede concluir que m está sujeto a la regla de selección

$$\langle s_1, s_2; m_1 m_2 | s_1, s_2; s m\rangle = 0 \quad \text{si} \quad m \neq m_1 + m_2 \quad (\text{A.14})$$

Si se aplica \hat{S}_+ y \hat{S}_- a (A.11), se considera como actúan de acuerdo a las ec. (A.9a) y (A.9b), se puede obtener una relación de recursividad para C-G dada como

$$\begin{aligned} \sqrt{(s \pm m)(s \mp m + 1)} \langle m_1, m_2 | s; m \mp 1\rangle &= \sqrt{(s_1 \mp m_1)(s_1 \pm m_1 + 1)} \langle m_1 \pm 1, m_2 | s; m\rangle \\ &+ \sqrt{(s_2 \mp m_2)(s_2 \pm m_2 + 1)} \langle m_1, m_2 \pm 1 | s; m\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

haciendo uso de la relación de recursividad es posible escribir cada eigenestado de la base $|s; m\rangle$ en términos de los eigenestados $|m_1, m_2\rangle$ como se presenta a continuación

$$|2; 2\rangle = |1, 1\rangle, \quad (\text{A.16a})$$

$$|2; 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |0, 1\rangle), \quad (\text{A.16b})$$

$$|2; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |-1, 1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |0, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |1, -1\rangle, \quad (\text{A.16c})$$

$$|2; -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1, 0\rangle + |0, -1\rangle), \quad (\text{A.16d})$$

$$|2; -2\rangle = |-1, -1\rangle, \quad (\text{A.16e})$$

$$|1; 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |0, 1\rangle), \quad (\text{A.16f})$$

$$|1; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, -1\rangle - |-1, 1\rangle), \quad (\text{A.16g})$$

$$|1; -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1, 0\rangle - |0, -1\rangle), \quad (\text{A.16h})$$

$$|0; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1, -1\rangle - |0, 0\rangle + |-1, 1\rangle), \quad (\text{A.16i})$$

cada uno de los eigenestados del lado derecho de la igualdad se relacionan con los eigenestados que dan cuenta de los niveles atómicos de cada átomo donde $|e\rangle$ corresponde al estado excitado, $|i\rangle$ al estado intermedio y $|g\rangle$ al estado base. La correspondencia entre estos es como se muestra en la tabla [A.1](#)

ESTADOS DE MOMENTO ANGULAR ($ m_1, m_2\rangle$)	ESTADOS DEL ÁTOMO
$ 1, 1\rangle$	$ e, e\rangle$
$ 1, 0\rangle$	$ e, i\rangle$
$ 1, -1\rangle$	$ e, g\rangle$
$ 0, 1\rangle$	$ i, e\rangle$
$ 0, 0\rangle$	$ i, i\rangle$
$ 0, -1\rangle$	$ i, g\rangle$
$ -1, 1\rangle$	$ g, e\rangle$
$ -1, 0\rangle$	$ g, i\rangle$
$ -1, -1\rangle$	$ g, g\rangle$

Tabla A.1: Equivalencia entre estados de momento angular y estados del átomo para el sistema de dos átomos de tres niveles.

Apéndice B

Aproximación en estados coherentes: dos átomos de tres niveles

En el sistema de dos átomos de tres niveles en una cavidad electromagnética la evolución temporal de un estado inicial $|\Psi_0\rangle = \sum_{s,m} C_{s,m} |\alpha\rangle |s; m\rangle$ considerando que el hamiltoniano toma una estructura diagonal de bloques 9×9 que a su vez se subdivide en bloques 1×1 , 3×3 y 5×5 , donde $|\alpha\rangle$ es un estado coherente, se expresa de acuerdo a la ec. (4.15) como:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{s,m} C_{s,m} |\Psi_{s,m}(t)\rangle \quad (\text{B.1})$$
$$|\Psi_{s,m}(t)\rangle = U(t) |\alpha\rangle |s; m\rangle = U(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} |n, s, m\rangle.$$

Si la relación de completez está dada por

$$\sum_{j=2}^{\infty} \sum_{l=1}^9 |\Phi_l^{(j)}\rangle \langle \Phi_l^{(j)}| = 1. \quad (\text{B.2})$$

Incluir la ec. (B.2) en (B.1) resulta en

$$|\Psi_{s,m}(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{l=1}^9 \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} U(t) |\Phi_l^{(j)}\rangle \langle \Phi_l^{(j)} | n, s, m \rangle. \quad (\text{B.3})$$

Primero se procede a realizar la suma en l en la ec. (B.3) de modo que es necesario tener en cuenta que el operador de evolución temporal actuando sobre los eigenestados $|\Phi_l^{(j)}\rangle$ se

expresa como (se eligen unidades en las que $\hbar = 1$)

$$U(t) \left| \Phi_l^{(j)} \right\rangle = e^{-iE_l^{(j)}t} \left| \Phi_l^{(j)} \right\rangle. \quad (\text{B.4})$$

Por otro lado, los diferentes productos internos $\langle \Phi_l^{(j)} | n, s, m \rangle$ al realizar la suma de l son:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1^{(j)} | n, s, m \rangle &= \delta_{j,n} \delta_{0,s} \delta_{0,m} \\ \langle \Phi_2^{(j)} | n, s, m \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{j-1,n} \delta_{1,s} \delta_{1,m} + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{j+1,n} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \\ \langle \Phi_3^{(j)} | n, s, m \rangle &= \frac{1}{2} \left(\delta_{j-1,n} \delta_{1,s} \delta_{1,m} + \sqrt{2} \delta_{j,n} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + \delta_{j+1,n} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) \\ \langle \Phi_4^{(j)} | n, s, m \rangle &= \frac{1}{2} \left(\delta_{j-1,n} \delta_{1,s} \delta_{1,m} - \sqrt{2} \delta_{j,n} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + \delta_{j+1,n} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) \\ \langle \Phi_5^{(j)} | n, s, m \rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(\delta_{j-2,n} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{j,n} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + \delta_{j+2,n} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \\ \langle \Phi_6^{(j)} | n, s, m \rangle &= \frac{1}{2} \left(-\delta_{j-2,n} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + \delta_{j-1,n} \delta_{2,s} \delta_{1,m} - \delta_{j+1,n} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \delta_{j+2,n} \delta_{2,s} \right. \\ &\quad \left. \delta_{-2,m} \right) \\ \langle \Phi_7^{(j)} | n, s, m \rangle &= \frac{1}{4} \left(\delta_{j-2,n} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - 2 \delta_{j-1,n} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} \delta_{j,n} \delta_{2,s} \delta_{0,m} - 2 \delta_{j+1,n} \delta_{2,s} \right. \\ &\quad \left. \delta_{-1,m} + \delta_{j+2,n} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \\ \langle \Phi_8^{(j)} | n, s, m \rangle &= \frac{1}{2} \left(-\delta_{j-2,n} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - \delta_{j-1,n} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \delta_{j+1,n} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \delta_{j+2,n} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \\ \langle \Phi_9^{(j)} | n, s, m \rangle &= \frac{1}{4} \left(\delta_{j-2,n} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + 2 \delta_{j-1,n} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} \delta_{j,n} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + 2 \delta_{j+1,n} \delta_{2,s} \right. \\ &\quad \left. \delta_{-1,m} + \delta_{j+2,n} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Al contemplar los resultados de los diferentes productos internos que se evidencian en (B.5) y como actúa el operador de evolución temporal de acuerdo a la ec. (B.4); la ec. (B.3) luego de aplicar cada una de las deltas que incluyen j y n , cambiando la etiqueta $j \rightarrow n$ se escribe como

$$\begin{aligned} |\Psi_{s,m}(t)\rangle &= \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left[\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \delta_{0,s} \delta_{0,m} \left| \Phi_1^{(n)} \right\rangle + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \delta_{1,s} \delta_{1,m} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \delta_{1,s} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \delta_{-1,m} \right) \left| \Phi_2^{(n)} \right\rangle + \frac{e^{-i\sqrt{2}g\sqrt{2n+1}t}}{2} \left(\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \delta_{1,s} \delta_{1,m} + \sqrt{2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n)!}} \delta_{1,s} \delta_{0,m} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \Big| \Phi_3^{(n)} \Big\rangle + \frac{e^{i\sqrt{2}g\sqrt{2n+1}t}}{2} \left(\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \delta_{1,s} \delta_{1,m} - \sqrt{2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n)!}} \delta_{1,s} \delta_{0,m} \right. \\
 & + \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \Big| \Phi_4^{(n)} \Big\rangle + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{\alpha^{n-2}}{\sqrt{(n-2)!}} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n)!}} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right. \\
 & \left. \frac{\alpha^{n+2}}{\sqrt{(n+2)!}} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \Big| \Phi_5^{(n)} \Big\rangle + \frac{e^{i\sqrt{2}g\sqrt{2n+1}t}}{2} \left(-\frac{\alpha^{n-2}}{\sqrt{(n-2)!}} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \delta_{2,s} \delta_{1,m} \right. \\
 & \left. - \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \frac{\alpha^{n+2}}{\sqrt{(n+2)!}} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \Big| \Phi_6^{(n)} \Big\rangle + \frac{e^{i2\sqrt{2}g\sqrt{2n+1}t}}{4} \left(\frac{\alpha^{n-2}}{\sqrt{(n-2)!}} \delta_{2,s} \right. \\
 & \delta_{2,m} - 2 \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n)!}} \delta_{2,s} \delta_{0,m} - 2 \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \frac{\alpha^{n+2}}{\sqrt{(n+2)!}} \\
 & \left. \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \Big| \Phi_7^{(n)} \Big\rangle + \frac{e^{-i\sqrt{2}g\sqrt{2n+1}t}}{2} \left(-\frac{\alpha^{n-2}}{\sqrt{(n-2)!}} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \right. \\
 & \left. \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \frac{\alpha^{n+2}}{\sqrt{(n+2)!}} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \Big| \Phi_8^{(n)} \Big\rangle + \frac{e^{-i2\sqrt{2}g\sqrt{2n+1}t}}{4} \left(\frac{\alpha^{n-2}}{\sqrt{(n-2)!}} \delta_{2,s} \delta_{2,m} \right. \\
 & + 2 \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n)!}} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + 2 \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \frac{\alpha^{n+2}}{\sqrt{(n+2)!}} \\
 & \left. \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \Big| \Phi_9^{(n)} \Big\rangle \Big].
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Para poder obtener la aproximación en estados coherentes, primero se considera la linealización de $\sqrt{2n+1}$ alrededor del número promedio de fotones y se obtiene

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2n+1} & \approx \sqrt{2\bar{n}+1} + \frac{1}{2} \frac{2(n-\bar{n})}{\sqrt{2\bar{n}+1}} + \dots \\
 \sqrt{2n+1} & \approx \frac{(\bar{n}+1)}{\sqrt{2\bar{n}+1}} + \frac{n}{\sqrt{2\bar{n}+1}} + \dots,
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

donde se define

$$\beta = \frac{(\bar{n}+1)}{\sqrt{2\bar{n}+1}} \qquad \gamma = \frac{n}{\sqrt{2\bar{n}+1}} \tag{B.8}$$

Por otro lado, si $\alpha = \sqrt{\bar{n}}e^{i\phi}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha^{n+2}}{\sqrt{(n+2)!}} & = \frac{(\sqrt{\bar{n}}e^{i\phi})^n}{\sqrt{n!}} \frac{\bar{n}e^{2i\phi}}{\sqrt{(n+2)(n+1)}} \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{2i\phi} \\
 \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} & = \frac{(\sqrt{\bar{n}}e^{i\phi})^n}{\sqrt{n!}} \frac{\sqrt{\bar{n}}e^{i\phi}}{\sqrt{(n+1)}} \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i\phi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} &= \frac{(\sqrt{\bar{n}}e^{i\phi})^n \sqrt{\bar{n}}e^{-i\phi}}{\sqrt{n!} \sqrt{\bar{n}}} \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\phi} \\ \frac{\alpha^{n-2}}{\sqrt{(n-2)!}} &= \frac{(\sqrt{\bar{n}}e^{i\phi})^n n e^{-2i\phi}}{\sqrt{n!} \bar{n}} = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-2i\phi}\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

Reescribiendo la ec. (B.6) a partir de los resultados de las ecs. (B.7) y (B.9) se obtiene

$$\begin{aligned}|\psi_{s,m}(t)\rangle &= \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left[\delta_{0,s} \delta_{0,m} |\Phi_1^{(n)}\rangle + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} \delta_{1,s} \delta_{1,m} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) \right. \\ &\quad \left| \Phi_2^{(n)} \right\rangle + \frac{e^{-i\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i\sqrt{2}g\beta t}}{2} \left(e^{-i\phi} \delta_{1,s} \delta_{1,m} + \sqrt{2} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + e^{i\phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) \left| \Phi_3^{(n)} \right\rangle \\ &\quad + \frac{e^{i\sqrt{2}g\gamma t} e^{i\sqrt{2}\beta t}}{2} \left(e^{-i\phi} \delta_{1,s} \delta_{1,m} - \sqrt{2} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + e^{i\phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) \left| \Phi_4^{(n)} \right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ &\quad \left(e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \left| \Phi_5^{(n)} \right\rangle + \frac{e^{i\sqrt{2}g\gamma t} e^{ig\sqrt{2}\beta t}}{2} \left(-e^{-2i\phi} \right. \\ &\quad \left. \delta_{2,s} \delta_{2,m} + e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} - e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \left| \Phi_6^{(n)} \right\rangle + \frac{e^{i2\sqrt{2}g\gamma t} e^{i2\sqrt{2}\beta t}}{4} \\ &\quad \left(e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - 2 e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} \delta_{2,s} \delta_{0,m} - 2 e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \\ &\quad \left| \Phi_7^{(n)} \right\rangle + \frac{e^{-i\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i\sqrt{2}g\beta t}}{2} \left(-e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{2i\phi} \right. \\ &\quad \left. \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \left| \Phi_8^{(n)} \right\rangle + \frac{e^{-i2\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i2\sqrt{2}\beta t}}{4} \left(e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + 2 e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} \delta_{2,s} \right. \\ &\quad \left. \delta_{0,m} + 2 e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \left| \Phi_9^{(n)} \right\rangle \left. \right].\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

Posteriormente se va a reemplazar cada uno de los estados $|\Phi_l^{(n)}\rangle$ de acuerdo a la tabla 4.1, para ello es necesario considerar un cambio en la sumatoria de acuerdo al estado al que se hace referencia de modo que se pueda obtener en todas las expresiones el estado $|n\rangle$. El respectivo cambio se realiza como sigue

- Para el estado $|n-1, 1, 1\rangle$, se realiza el cambio de $n \rightarrow n+1$. La suma va iniciar en 1, aparece una fase $e^{i\phi}$ y γ es modificada a γ_{n+1} .

$$\gamma_{n+1} = \frac{n}{\sqrt{2\bar{n}+1}} + \frac{1}{\sqrt{2\bar{n}+1}} \quad \text{Donde} \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2\bar{n}+1}} \quad \gamma_{n+1} = \gamma + \eta \quad (\text{B.11})$$

- Para el estado $|n+1, 1, -1\rangle$, se realiza el cambio de $n \rightarrow n-1$. La suma va iniciar en 3, aparece una fase $e^{-i\phi}$ y γ es modificada a γ_{n-1} .

$$\gamma_{n-1} = \frac{n}{\sqrt{2\bar{n}+1}} - \frac{1}{\sqrt{2\bar{n}+1}} \quad \gamma_{n-1} = \gamma - \eta \quad (\text{B.12})$$

- Para el estado $|n-2, 2, 2\rangle$, se realiza el cambio de $n \rightarrow n+2$. La suma va iniciar en 0, aparece una fase $e^{2i\phi}$ y γ es modificada a γ_{n+2} .

$$\gamma_{n+2} = \frac{n}{\sqrt{2n+1}} + 2\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \gamma_{n+2} = \gamma + 2\eta \quad (\text{B.13})$$

- Para el estado $|n+2, 2, -2\rangle$, se realiza el cambio de $n \rightarrow n-2$. La suma va iniciar en 4, aparece una fase $e^{-2i\phi}$ y γ es modificada a γ_{n+2} .

$$\gamma_{n-2} = \frac{n}{\sqrt{2n+1}} - 2\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \gamma_{n-2} = \gamma - 2\eta \quad (\text{B.14})$$

- Para el estado $|n-1, 2, 1\rangle$, se realiza el cambio de $n \rightarrow n+1$. La suma va iniciar en 1, aparece una fase $e^{i\phi}$ y γ es modificada a γ_{n+1} .
- Para el ket $|n+1, 2, -1\rangle$, se realiza el cambio de $n \rightarrow n-1$. La suma va iniciar en 3, aparece una fase $e^{-i\phi}$ y γ es modificada a γ_{n-1} .

La fase que se menciona en cada uno de los casos es el resultado de hacer el cambio correspondiente de n al tomar $\alpha = \sqrt{n}e^{i\phi}$ y proceder de manera similar como en la ec. (3.27).

Al tener en cuenta lo mencionado en cada uno de los ítems anteriores e incluir los resultados de las ecs. (B.11) - (B.14) y considerando los eigenestados como se presentan en la tabla 4.1 en la ec. (B.10) se obtiene

$$\begin{aligned} |\Psi_{s,m}(t)\rangle = & \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \delta_{0,s} \delta_{0,m} |n, 0, 0\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left(-\delta_{1,s} \delta_{1,m} + e^{2i\phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) \\ & |n, 1, 1\rangle + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left(-e^{-2i\phi} \delta_{1,s} \delta_{1,m} + \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |n, 1, -1\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \\ & e^{-i\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i\sqrt{2}g\beta t} e^{-i\sqrt{2}g\eta t} \left(\delta_{1,s} \delta_{1,m} + \sqrt{2} e^{i\phi} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + e^{2i\phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |n, 1, 1\rangle + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \\ & \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i\sqrt{2}g\beta t} \sqrt{2} \left(e^{-i\phi} \delta_{1,s} \delta_{1,m} + \sqrt{2} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + e^{i\phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |n, 1, 0\rangle + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \\ & \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i\sqrt{2}g\beta t} e^{i\sqrt{2}g\eta t} \left(e^{-2i\phi} \delta_{1,s} \delta_{1,m} + \sqrt{2} e^{-i\phi} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |n, 1, -1\rangle + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i\sqrt{2}g\gamma t} e^{i\sqrt{2}\beta t} e^{i\sqrt{2}g\eta t} \left(\delta_{1,s} \delta_{1,m} - \sqrt{2} e^{i\phi} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + e^{2i\phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |n, 1, 1\rangle \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i\sqrt{2}g\gamma t} e^{i\sqrt{2}\beta t} \sqrt{2} \left(e^{-i\phi} \delta_{1,s} \delta_{1,m} - \sqrt{2} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + e^{i\phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |n, 1, 0\rangle + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i\sqrt{2}g\gamma t} e^{i\sqrt{2}\beta t} e^{-i\sqrt{2}g\eta t} \left(e^{-2i\phi} \delta_{1,s} \delta_{1,m} - \sqrt{2} e^{-i\phi} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) \\
& |n, 1, -1\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{3}{2} \left(\delta_{2,s} \delta_{2,m} - \sqrt{\frac{2}{3}} e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + e^{4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, 2\rangle - \\
& \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, 0\rangle + \\
& \sum_{n=4}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{3}{2} \left(e^{-4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, -2\rangle - \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i\sqrt{2}g\gamma t} e^{ig\sqrt{2}\beta t} e^{i2\sqrt{2}g\eta t} \left(-\delta_{2,s} \delta_{2,m} + e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} - e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{4i\phi} \right. \\
& \left. \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, 2\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i\sqrt{2}g\gamma t} e^{ig\sqrt{2}\beta t} e^{i\sqrt{2}g\eta t} \left(-e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + \delta_{2,s} \delta_{1,m} \right. \\
& \left. - e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, 1\rangle \sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i\sqrt{2}g\gamma t} e^{ig\sqrt{2}\beta t} e^{-i\sqrt{2}g\eta t} \left(-e^{-3i\phi} \right. \\
& \left. \delta_{2,s} \delta_{2,m} + e^{-2\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} - \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, -1\rangle + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i\sqrt{2}g\gamma t} \\
& e^{ig\sqrt{2}\beta t} e^{-i2\sqrt{2}g\eta t} \left(-e^{-4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} - e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, -2\rangle \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i2\sqrt{2}g\gamma t} e^{i2\sqrt{2}g\beta t} e^{i4\sqrt{2}g\eta t} \left(\delta_{2,s} \delta_{2,m} - 2 e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} \right. \\
& \left. - 2 e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, 2\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i2\sqrt{2}g\gamma t} e^{i2\sqrt{2}g\beta t} e^{i2\sqrt{2}g\eta t} \\
& \left(e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - 2 \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} - 2 e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, 1\rangle \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i2\sqrt{2}g\gamma t} e^{i2\sqrt{2}g\beta t} \frac{\sqrt{6}}{4} \left(e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - 2 e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} \delta_{2,s} \delta_{0,m} \right. \\
& \left. - 2 e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, 0\rangle - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i2\sqrt{2}g\gamma t} e^{i2\sqrt{2}g\beta t} e^{-i2\sqrt{2}g\eta t} \\
& \left(e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - 2 e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} - 2 \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \\
& |n, 2, -1\rangle + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{i2\sqrt{2}g\gamma t} e^{i2\sqrt{2}g\beta t} e^{-i4\sqrt{2}g\eta t} \left(e^{-4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - 2 e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{6} e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} - 2 e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \Big) |n, 2, -2\rangle - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\sqrt{2}g\gamma t} \\
 & e^{-i\sqrt{2}g\beta t} e^{-i2\sqrt{2}g\eta t} \left(-\delta_{2,s} \delta_{2,m} - e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, 2\rangle \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i\sqrt{2}g\beta t} e^{-i\sqrt{2}g\eta t} \left(-e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - \delta_{2,s} \delta_{1,m} + e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \right. \\
 & e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \Big) |n, 2, 1\rangle + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i\sqrt{2}g\beta t} e^{i\sqrt{2}g\eta t} \left(-e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - e^{-2\phi} \right. \\
 & \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \Big) |n, 2, -1\rangle + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i\sqrt{2}g\beta t} e^{i2\sqrt{2}g\eta t} \\
 & \left(-e^{-4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, -2\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \\
 & e^{-i2\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i2\sqrt{2}g\beta t} e^{-i4\sqrt{2}g\eta t} \left(\delta_{2,s} \delta_{2,m} + 2 e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + 2e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} \right. \\
 & \left. + e^{4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, 2\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i2\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i2\sqrt{2}g\beta t} e^{-i2\sqrt{2}g\eta t} \left(e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + 2 \right. \\
 & \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + 2 e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \Big) |n, 2, 1\rangle + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \\
 & e^{-i2\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i2\sqrt{2}g\beta t} \frac{\sqrt{6}}{4} \left(e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + 2 e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + 2 e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} \right. \\
 & \left. + e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, 0\rangle + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i2\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i2\sqrt{2}g\beta t} e^{i2\sqrt{2}g\eta t} \left(e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + 2 \right. \\
 & e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + 2 \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \Big) |n, 2, -1\rangle + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{4} \\
 & \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i2\sqrt{2}g\gamma t} e^{-i2\sqrt{2}g\beta t} e^{i4\sqrt{2}g\eta t} \left(e^{-4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + 2 e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + \right. \\
 & \left. 2 e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |n, 2, -2\rangle .
 \end{aligned}
 \tag{B.15}$$

Se agrupan términos considerando que los primeros valores de n son cercanos a cero, es decir, no contribuyen significativamente por lo que las diferentes sumas pueden comenzar desde $n = 0$ (se restan los términos agregados pero estos son despreciables). De esta manera la ec. (B.15) se reescribe como

$$\begin{aligned}
|\Psi_{s,m}(t)\rangle = & \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \left[\delta_{0,s} \delta_{0,m} |0;0\rangle - \frac{1}{2} \left(-\delta_{1,s} \delta_{1,m} + e^{2i\phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |1;1\rangle + \frac{1}{2} \right. \\
& \left. \left(-e^{-2i\phi} \delta_{1,s} \delta_{1,m} + \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |1;-1\rangle + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} \right) \left(\delta_{2,s} \delta_{2,m} - \sqrt{\frac{2}{3}} e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + e^{4i\phi} \delta_{2,s} \right. \right. \\
& \left. \left. \delta_{-2,m} \right) |2;2\rangle - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |2;0\rangle + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} \right) \right. \\
& \left. \left(e^{-4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |2;-2\rangle \right] + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{n!}} \left(\alpha e^{-i\sqrt{2}g\eta} \right)^n \\
& e^{-i\sqrt{2}g\beta t} |n\rangle \left[e^{-i\sqrt{2}g\eta t} \left(\delta_{1,s} \delta_{1,m} + \sqrt{2} e^{i\phi} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + e^{2i\phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |1;1\rangle + \sqrt{2} \left(e^{-i\phi} \right. \right. \\
& \left. \left. \delta_{1,s} \delta_{1,m} + \sqrt{2} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + e^{i\phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |1;0\rangle + e^{i\sqrt{2}g\eta t} \left(e^{-2i\phi} \delta_{1,s} \delta_{1,m} + \sqrt{2} e^{-i\phi} \delta_{1,s} \delta_{0,m} \right. \right. \\
& \left. \left. + \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |1;-1\rangle - e^{-i2\sqrt{2}g\eta t} \left(-\delta_{2,s} \delta_{2,m} - e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{4i\phi} \delta_{2,s} \right. \right. \\
& \left. \left. \delta_{-2,m} \right) |2;2\rangle - e^{-i\sqrt{2}g\eta t} \left(-e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - \delta_{2,s} \delta_{1,m} + e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |2;1\rangle \right. \\
& \left. + e^{i\sqrt{2}g\eta t} \left(-e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - e^{-2\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |2;-1\rangle + e^{i2\sqrt{2}g\eta t} \right. \\
& \left. \left(-e^{-4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |2;-2\rangle \right] + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{n!}} e^{i\sqrt{2}g\beta t} \\
& \left(\alpha e^{i\sqrt{2}g\eta} \right)^n |n\rangle \left[e^{i\sqrt{2}g\eta t} \left(\delta_{1,s} \delta_{1,m} - \sqrt{2} e^{i\phi} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + e^{2i\phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |1;1\rangle - \sqrt{2} \left(e^{-i\phi} \right. \right. \\
& \left. \left. \delta_{1,s} \delta_{1,m} - \sqrt{2} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + e^{i\phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |1;0\rangle + e^{-i\sqrt{2}g\eta t} \left(e^{-2i\phi} \delta_{1,s} \delta_{1,m} - \sqrt{2} e^{-i\phi} \delta_{1,s} \right. \right. \\
& \left. \left. \delta_{0,m} + \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |1;-1\rangle - e^{i2\sqrt{2}g\eta t} \left(-\delta_{2,s} \delta_{2,m} + e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} - e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{4i\phi} \right. \right. \\
& \left. \left. \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |2;2\rangle + e^{i\sqrt{2}g\eta t} \left(-e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + \delta_{2,s} \delta_{1,m} - e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \right. \\
& \left. |2;1\rangle + e^{-i\sqrt{2}g\eta t} \left(-e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + e^{-2\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} - \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |2;-1\rangle + \right. \\
& \left. e^{-i2\sqrt{2}g\eta t} \left(-e^{-4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} - e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |2;-2\rangle \right] + \frac{1}{4} \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{n!}} \left(\alpha e^{i2\sqrt{2}g\eta} \right)^n e^{i2\sqrt{2}g\beta t} |n\rangle \left[\frac{e^{i4\sqrt{2}g\eta t}}{4} \left(\delta_{2,s} \delta_{2,m} - 2 e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{2i\phi} \delta_{2,s} \right. \right. \\
& \left. \left. \delta_{0,m} - 2 e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |2;2\rangle - \frac{e^{i2\sqrt{2}g\eta t}}{2} \left(e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - 2 \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} \right. \right. \\
& \left. \left. e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} - 2 e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |2;1\rangle + \frac{\sqrt{6}}{4} \left(e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - 2 e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{6} \delta_{2,s} \delta_{0,m} - 2 e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |2;0\rangle - \frac{e^{-i2\sqrt{2}g\eta t}}{2} \left(e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - 2 e^{-2i\phi} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} - 2 \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \Big| 2; -1 \Big\rangle + \frac{e^{-i4\sqrt{2}g\eta}}{4} \left(e^{-4i\phi} \delta_{2,s} \right. \\
 & \quad \left. \delta_{2,m} - 2 e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} - 2 e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \Big| 2; -2 \Big\rangle \Big] + \frac{1}{4} \\
 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{n!}} \left(\alpha e^{-i2\sqrt{2}g\eta t} \right)^n e^{-i2\sqrt{2}g\beta t} |n\rangle \left[\frac{e^{-i4\sqrt{2}g\eta t}}{4} \left(\delta_{2,s} \delta_{2,m} + 2 e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{2i\phi} \right. \right. \\
 & \delta_{2,s} \delta_{0,m} + 2 e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \Big) \Big| 2; 2 \Big\rangle + \frac{e^{-i2\sqrt{2}g\eta t}}{2} \left(e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + 2 \delta_{2,s} \delta_{1,m} \right. \\
 & \left. + \sqrt{6} e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + 2 e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \Big| 2; 1 \Big\rangle + \frac{\sqrt{6}}{4} \left(e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + 2 e^{-i\phi} \right. \\
 & \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + 2 e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \Big) \Big| 2; 0 \Big\rangle + \frac{e^{i2\sqrt{2}g\eta t}}{2} \left(e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + \right. \\
 & \left. 2 e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + 2 \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \Big| 2; -1 \Big\rangle + \frac{e^{i4\sqrt{2}g\eta}}{4} \left(e^{-4i\phi} \right. \\
 & \quad \left. \delta_{2,s} \delta_{2,m} + 2 e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + 2 e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) \Big| 2; -2 \Big\rangle \Big] \\
 & \tag{B.16}
 \end{aligned}$$

Definiendo

$$\omega_1 = \sqrt{2}g\eta \qquad \omega_2 = 2\sqrt{2}g\eta \qquad \sigma_r = 2^{\left(\frac{1+(-1)^r}{2}\right)}, \tag{B.17}$$

el estado estacionario que acompaña el estado coherente $|\alpha\rangle$

$$\begin{aligned}
 |\Phi\rangle = & \delta_{0,s} \delta_{0,m} |0; 0\rangle - \frac{1}{2} \left(-\delta_{1,s} \delta_{1,m} + e^{2i\Phi} \delta_{1,sj} \delta_{-1,m} \right) |1; 1\rangle + \frac{1}{2} \left(-e^{-2i\Phi} \delta_{1,s} \delta_{1,m} + \delta_{1,s} \right. \\
 & \delta_{-1,m} \Big) |1; -1\rangle + \frac{3}{8} \left(\delta_{2,s} \delta_{2,m} - \sqrt{\frac{2}{3}} e^{2i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + e^{4i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |2; 2\rangle - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \\
 & \left(e^{-2i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - \sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + e^{2i\Phi} \delta_{2,j} \delta_{-2,m} \right) |2; 0\rangle + \frac{3}{8} \left(e^{-4i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right. \\
 & \left. e^{-2i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \right) |2; -2\rangle, \\
 & \tag{B.18}
 \end{aligned}$$

y los estados que se mueven de acuerdo a cada uno de las frecuencias definidas en la ec.

(B.17) dados por

$$\begin{aligned}
|\Phi_1^l\rangle = & e^{(-1)^l i \sqrt{2} g \eta t} \left(\delta_{1,s} \delta_{1,m} - (-1)^l \sqrt{2} e^{i\Phi} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + e^{2i\Phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |1; 1\rangle - (-1)^l \sqrt{2} \\
& \left(e^{-i\Phi} \delta_{1,s} \delta_{1,m} - (-1)^l \sqrt{2} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + e^{i\Phi} \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \right) |1; 0\rangle + e^{-(-1)^l i \sqrt{2} g \eta t} \left(e^{-2i\Phi} \delta_{1,s} \right. \\
& \delta_{1,m} - (-1)^l \sqrt{2} e^{-i\Phi} \delta_{1,s} \delta_{0,m} + \delta_{1,s} \delta_{-1,m} \left. \right) |1; -1\rangle - e^{(-1)^l i 2 \sqrt{2} g \eta t} \left(-\delta_{2,s} \delta_{2,m} + (-1)^l \right. \\
& e^{i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} - (-1)^l e^{3i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{4i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \left. \right) |2; 2\rangle + (-1)^l e^{(-1)^l i \sqrt{2} g \eta t} \left(-e^{-i\Phi} \right. \\
& \delta_{2,s} \delta_{2,m} + (-1)^l \delta_{2,s} \delta_{1,m} - (-1)^l e^{2i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{3i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \left. \right) |2; 1\rangle - (-1)^l \\
& e^{-(-1)^l i \sqrt{2} g \eta t} \left(-e^{-3i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + (-1)^l e^{-2i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} - (-1)^l \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{i\Phi} \delta_{2,s} \right. \\
& \delta_{-2,m} \left. \right) |2; -1\rangle + e^{-(-1)^l i 2 \sqrt{2} g \eta t} \left(-e^{-4i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + (-1)^l e^{-3i\Phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} - (-1)^l e^{-i\Phi} \right. \\
& \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \left. \right) |2; 2\rangle
\end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned}
|\Phi_2^l\rangle = & \frac{e^{-(-1)^l i 4 \sqrt{2} g \eta t}}{4} \left(\delta_{2,s} \delta_{2,m} + (-1)^l 2 e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + (-1)^l 2 e^{3i\phi} \delta_{2,s} \right. \\
& \delta_{-1,m} + e^{4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \left. \right) |2; 2\rangle + (-1)^l \frac{e^{-(-1)^l i 2 \sqrt{2} g \eta t}}{2} \left(e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + (-1)^l 2 \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \right. \\
& \sqrt{6} e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + (-1)^l 2 e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \left. \right) |2; 1\rangle + \frac{\sqrt{6}}{4} \left(e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} \right. \\
& + (-1)^l 2 e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + (-1)^l 2 e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \left. \right) |2; 0\rangle \\
& + (-1)^l \frac{e^{(-1)^l i 2 \sqrt{2} g \eta t}}{2} \left(e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + (-1)^l 2 e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + \right. \\
& (-1)^l 2 \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + e^{i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \left. \right) |2; -1\rangle + \frac{e^{(-1)^l i 4 \sqrt{2} g \eta t}}{4} \left(e^{-4i\phi} \delta_{2,s} \delta_{2,m} + (-1)^l 2 \right. \\
& e^{-3i\phi} \delta_{2,s} \delta_{1,m} + \sqrt{6} e^{-2i\phi} \delta_{2,s} \delta_{0,m} + (-1)^l 2 e^{-i\phi} \delta_{2,s} \delta_{-1,m} + \delta_{2,s} \delta_{-2,m} \left. \right) |2; -2\rangle \Big].
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Se consideran las ecs. (B.17)-(B.20) para escribir la expresión general de la expansión en estados coherentes como:

$$\begin{aligned}
|\Psi_{s,m}(t)\rangle = & |\alpha\rangle |\Phi\rangle + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^2 \sum_{l=0}^1 e^{-(-1)^{r-l} i \sigma_r \sqrt{2} g \beta t} \left| \alpha e^{-(-1)^{r-l} i \omega_r t} \right\rangle \left| \Phi_r^l(t) \right\rangle \\
|\Psi(t)\rangle = & \sum_{s,m} C_{s,m} |\Psi_{s,m}(t)\rangle
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Bibliografía

- [1] N. H. Abdel-Wahab. A three-level atom interacting with a single mode cavity field: Different configurations. *Physica Scripta*, 76(3):244–248, 2007.
- [2] N. H. Abdel-Wahab and A. Salah. A novel solution procedure for a three-level atom interacting with one-mode cavity field via modified homotopy analysis method. *European Physical Journal Plus*, 130(5), 2015.
- [3] E. K. Bashkurov. Dynamics of the collective spontaneous emission of two three-level atoms in a cavity. *Optics and Spectroscopy (English translation of Optika i Spektroskopiya)*, 100(4):613–616, 2006.
- [4] K. Bergmann, H. Theuer, and B. W. Shore. Coherent population transfer among quantum states of atoms and molecules. *Reviews of Modern Physics*, 70(3):1003–1025, 1998.
- [5] J. A. Bergou and M. Hillery. *Introduction to the theory of quantum information processing*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] J. Z. Bernád, J. M. Torres, L. Kunz, and G. Alber. Multiphoton-state-assisted entanglement purification of material qubits. *Physical Review A*, 93(3), 2016.
- [7] J. I. Cirac and P. Zoller. Quantum computations with cold trapped ions. *Physical Review Letters*, 74(20):4091–4094, 1995.
- [8] J. H. Eberly, N. B. Narozhny, and J. J. Sanchez-Mondragon. Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model. *Physical Review Letters*, 44(20):1323–1326, 1980.

-
- [9] J. Gea-Banacloche. Atom- and field-state evolution in the Jaynes-Cummings model for large initial fields. *Physical Review A*, 44(9):5913–5931, 1991.
- [10] C. A. González-Gutiérrez and J. M. Torres. Atomic Bell measurement via two-photon interactions. *Physical Review A*, 99(2), 2018.
- [11] C. E.A. Jarvis, D. A. Rodrigues, B. L. Györfy, T. P. Spiller, A. J. Short, and J. F. Annett. Dynamics of entanglement and 'attractor' states in the Tavis-Cummings model. *New Journal of Physics*, 11, 2009.
- [12] E. T. Jaynes and F. W. Cummings. Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theories with Application to the Beam Maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1):89–109, 1963.
- [13] A. B. Klimov, J. Negro, R. Farias, and S. M. Chumakov. Nonlinear dynamics of the two-photon Dicke model. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 1(5):562–570, 1999.
- [14] X. M. Lin, Z. W. Zhou, Y. C. Wu, C. Z. Wang, and G. C. Guo. Preparation of two-qutrit entangled state in cavity QED. *Chinese Physics Letters*, 22(6):1318–1320, 2005.
- [15] Y. Han Luo, H. S. Zhong, M. Erhard, X. L. Wang, L. C. Peng, M. Krenn, X. Jiang, L. Li, N. L. Liu, C. Y. Lu, A. Zeilinger, and J. W. Pan. Quantum Teleportation in High Dimensions. *Physical Review Letters*, 123(7), 2019.
- [16] E. Merzbacher. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, 1998.
- [17] C. S. Roos, D. Leibfried, A. Mundt, F. Schmidt-Kaler, J. Eschner, and R. Blatt. Experimental Demonstration of Ground State Laser Cooling with Electromagnetically Induced Transparency. *Physical Review Letters*, 85(26):5547–5550, 2000.
- [18] J. J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics Second Edition*. Person New International edition, 2011.
- [19] W. P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley, 2001.
- [20] M. O. Scully and M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.

-
- [21] B. W. Shore and P. L. Knight. The Jaynes–Cummings model. *Journal of Modern Optics*, 40(7):1195–1238, 1993.
- [22] M. Tavis and F. W. Cummings. Exact solution for an N-molecule-radiation-field Hamiltonian. *Physical Review*, 170(2):379–384, 1968.
- [23] J. M. Torres, J. Z. Bernád, and G. Alber. Quantum teleportation and entanglement swapping of matter qubits with coherent multiphoton states. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 90(1):012304, 2014.
- [24] W. Vogel and R. L. De Matos Filho. Nonlinear Jaynes-Cummings dynamics of a trapped ion. *Physical Review A*, 52(5):4214–4217, 1995.
- [25] D. F. Walls and G. J. Milburn. *Quantum optics*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [26] J. Q. You and F. Nori. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits. *Nature*, 474(7353):589–597, 2011.
- [27] X. B. Zou, K. Pahlke, and W. Mathis. Generation of an entangled state of two three-level atoms in cavity QED. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 67(4):3, 2003.