



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Renormalización de electrodinámica escalar a orden de un
lazo

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Cristhian Daniel Guevara Cano

Asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.
Junio de 2021



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Renormalización de electrodinámica escalar a orden de un
lazo

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Cristhian Daniel Guevara Cano

Asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.
Junio de 2021

Título: Renormalización de electrodinámica escalar a orden de un lazo
Estudiante: CRISTHIAN DANIEL GUEVARA CANO

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Dr. Gilberto Tavares Velazco
Secretario

Dr. Héctor Novales Sánchez
Vocal

Dr. Arturo Fernández Téllez
Vocal

Dr. J. Jesús Toscano Chávez
Asesor

Resumen

Se presenta un estudio completo de la estructura de electrodinámica escalar a orden de un lazo. La teoría es regularizada usando el esquema dimensional. La teoría es renormalizada usando el esquema de renormalización físico o de capa de masa. Se analizan algunos fenómenos físicos y se comparan con resultados bien conocidos en electrodinámica espinorial.

Índice general

Introducción	1
1. Electrodinámica Escalar	3
1.1. Campos escalares cargados	3
1.1.1. Teoría libre de campos escalares cargados	3
1.1.2. Cuantización canónica de la teoría libre	5
1.2. Lagrangiana de la electrodinámica escalar	6
1.2.1. Interpretación geométrica de la derivada covariante	7
1.2.2. Construcción de la lagrangiana de electrodinámica escalar	9
2. La matriz S y la serie perturbativa	11
2.1. La matriz S	11
2.2. La teoría asintótica	12
2.3. La matriz S mediante el proceso de reducción de LSZ	13
2.4. Teoría de perturbaciones y serie de Dyson	14
2.5. Teorema de Wick	17
3. Renormalización de electrodinámica escalar a orden de un lazo	19
3.1. Divergencias de la electrodinámica escalar	19
3.2. Esquema de Regularización	21
3.3. Lagrangiana renormalizada	21
3.3.1. Reglas de Feynman	23
3.4. Autoenergía del campo escalar	25
3.5. Autoenergía del fotón	28
3.5.1. Polarización del vacío	32
3.6. Función Vértice	34
3.6.1. Comparación entre Z_ϕ y Z_e	38
3.7. Función Vértice de 4 escalares	41
3.8. Función Vértice: 2 fotones 2 escalares	52
4. Conclusiones	63
A. Regularización dimensional	65
B. Identidad de Ward-Takahashi	69
Bibliografía	71

Introducción

Durante las décadas de 1930 y parte de 1940 la *Teoría Cuántica de Campos* (QFT por sus siglas en inglés) tuvo que lidiar con resultados divergentes que pusieron en duda su estabilidad como teoría. En consecuencia el *proceso de renormalización* fue propuesto por diferentes autores tales como Kramers (1947-48), Bethe (1947), Lewis (1948), Schwinger (1948), Tomonaga (1946) y Feynman (1948) [1]. En un principio el proceso consistió en diversos algoritmos que permitieron obtener números comparables con resultados experimentales como el corrimiento de Lamb o el momento magnético dipolar del electrón. El proceso que siguieron Lewis, Schwinger y Tomonaga en la teoría de *electrodinámica cuántica espinorial* (QED por sus siglas en inglés) consistió en modificar parámetros de la teoría tales como la masa y la carga en la lagrangiana original, de tal manera que al identificar los parámetros renormalizados con las observables físicas, las divergencias son absorbidas por factores de renormalización de los parámetros redefinidos. Por otra parte Feynman (1948) hizo uso de una energía de corte (cutoff). Las cantidades físicas dependían de este parámetro, por lo que cuando el cutoff tiende a infinito las cantidades divergen. Con la redefinición de los parámetros se pueden obtener cantidades físicas que no sean divergentes en el límite al infinito del cutoff. Dyson (1949) mostró que los resultados de Feynman pueden derivarse de la formulación de QED de Tomonaga y Schwinger. Dyson [2] tomó como base las ideas de Schwinger, Tomonaga y Feynman y demostró que al renormalizar la carga y la masa toda divergencia de la matriz S a todo orden de la teoría perturbativa desaparece.

Basado en los resultados de Dyson, P.T. Matthews (1949) trabajó con la renormalización de la matriz S para interacciones de mesones con nucleones [3]. Al desarrollar la teoría se percató de que la renormalización de la masa y la carga no es suficiente, es necesario introducir un término de interacción de la forma $\delta\lambda\phi^4(x)$, donde el parámetro λ debe ser renormalizado. En 1950 Matthews estudió la renormalización de la matriz S para mesones cargados sin espín en el campo electromagnético [4]. En el estudio de las divergencias de la teoría se encontró además de las divergencias primitivas encontradas en QED, divergencias en los procesos de dispersión de Compton e interacciones de Møller. Mientras que las divergencias en los procesos de dispersión de Compton desaparecían como consecuencia de invariancia de norma, las divergencias de interacciones de Møller requerían una interacción de la forma $\delta\lambda\phi^{\dagger 2}\phi^2$, en analogía con la interacción de mesones con nucleones. Rohrlich (1950) desarrolló la teoría de electrodinámica cuántica para partículas cargadas sin espín [5], donde analizó las divergencias de la matriz de dispersión a todo orden en la constante de estructura fina α . Se estableció el término de interacción $\lambda\phi^{\dagger 2}\phi^2$ para demostrar que la teoría es finita a todo orden de la serie perturbativa mediante la renormalización de la masa, carga eléctrica y del parámetro λ . El procedimiento que Rohrlich siguió consiste en separar las partes divergentes por medio de expansiones de Maclaurin en términos del momento externo, y con la renormalización de los parámetros verificó que las divergencias desaparecen. Posteriormente Salam (1952) demostró que la matriz S es renormalizable para teorías con partículas escalares con carga en presencia de campos electromagnéticos [6]. Salam desarrolló con profundidad las divergencias que no son tratadas en el trabajo de Rohrlich, demostrando la naturaleza finita de la teoría. Posteriormente Salam trabajó con la renormalización de electrodinámica escalar con el formalismo de la función β (1952) [7] y bajo diferentes esquemas de aproximación (1964) [8].

La electrodinámica espinorial es una de las teorías más estudiadas dentro de QFT, siendo la teoría base para introducir el concepto de renormalización en diversos libros [9–14]. La teoría $\lambda\phi^4$ consta de campos escalares reales, siendo esta otra teoría de discusión común [11] en el proceso de renormalización. Sin embargo la teoría no es de norma, por lo que la imposición de invariancia de norma obliga a trabajar con campos escalares complejos y como consecuencia la introducción del campo electromagnético. Esta teoría es llamada *electrodinámica escalar*. A diferencia de QED, en electrodinámica escalar se trabaja con campos escalares de espín nulo y no con espinores. No obstante la introducción de invariancia de norma dificulta el estudio de la teoría, pues debemos trabajar no sólo con diagramas de cuatro puntos similares a los que encontramos en la teoría $\lambda\phi^4$ (interacciones de Møller), sino también con diagramas tipo *seagull* (dispersión de Compton) que introducen divergencias y diagramas más complicados como diagramas de caja. La regularización de las teorías $\lambda\phi^4$ y QED en la literatura suele ser mediante el esquema de *regularización dimensional*, propuesto por G. t’Hooft y M. Veltman en 1972 [15]. Dicho esquema se propuso años después del tratamiendo de las divergencias en la teoría de electrodinámica escalar hecho por Matthews (1950), Rohrlich (1950) y Salam (1952,1964), por lo que el estudio de la renormalización de la teoría bajo el proceso de regularización dimensional fue esencial en el desarrollo de la tesis.

El estudio de los campos escalares es de gran importancia en el Modelo Estándar (SM) y en el desarrollo de teorías más allá del Modelo Estándar. El hallazgo del bosón de Higgs en el 2012 [16] presentó una fuerte evidencia del rompimiento espontáneo de la simetría mediante el mecanismo de Brout-Englert-Higgs (BEH) [17]. Sin embargo, el Modelo Estándar no logró describir fenómenos físicos tales como las masas de los neutrinos o la materia oscura, por lo que aún es una teoría incompleta. Esta incompletitud dió cabida a teorías más allá del Modelo Estándar como la extensión del sector de Higgs. La introducción de modelos como dobletes [18] y tripletes [19] del Higgs en la teoría trae como consecuencia la existencia de 5 escalares, de los cuales dos son cargados [20]. Diferentes experimentos y mediciones en el LHC se han hecho en búsqueda de bosones cargados [21], por lo que el estudio de campos escalares cargados no sólo es importante como teoría renormalizable sino también como teoría más allá del Modelo Estándar.

El objetivo de la tesis es estudiar el comportamiento divergente de la *electrodinámica cuántica escalar* (SQED por sus siglas en inglés) a nivel de un lazo, desarrollando de manera explícita cada tipo de divergencia que presenta la teoría bajo procedimientos perturbativos mediante regularización dimensional. En analogía con QED se presentan diversos resultados fenomenológicos que se encuentran en la teoría. En el primer capítulo se construye a partir de la teoría de Klein-Gordon para campos complejos la teoría de electrodinámica escalar mediante la introducción del concepto de invariancia de norma para finalmente obtener la lagrangiana del sistema. En el segundo capítulo se da una breve introducción a la matriz S y a la teoría de perturbaciones como herramientas para determinar las reglas de Feynman. En el tercer capítulo se introduce el concepto de renormalización y se describe el esquema a seguir para renormalizar la teoría. Posteriormente se analiza cada una de las divergencias de la teoría mediante la introducción de contratérminos en el esquema on-shell o físico y se discuten efectos físicos resultantes de renormalizar la teoría. El cuarto capítulo presenta los resultados y conclusiones de la tesis.

Capítulo 1

Electrodinámica Escalar

En este capítulo se presenta la electrodinámica escalar como teoría que describe los comportamientos de las partículas cargadas de espín 0. En la primera sección se construye la teoría libre del campo escalar complejo a partir de la ecuación de Klein-Gordon y su relación con partículas cargadas. En la segunda sección se presenta el concepto de derivada covariante y se deriva la lagrangiana de la electrodinámica escalar invariante bajo transformaciones locales.

1.1. Campos escalares cargados

El campo escalar $\phi(x)$ corresponde a la representación trivial $(0,0)$ del grupo de Lorentz, el cual se transforma como:

$$\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x), \quad x' = \Lambda x. \quad (1.1)$$

El campo escalar cumple la ecuación de Klein-Gordon, permitiendo construir una teoría que describe partículas de espín 0. Como se verá en esta sección para que un campo escalar tenga carga es necesario que la lagrangiana correspondiente sea invariante bajo el grupo $U_Q(1)$, por lo que es necesario trabajar con campos complejos.

1.1.1. Teoría libre de campos escalares cargados

Consideremos la lagrangiana consistente con la simetría de Lorentz (unidades naturales $\hbar = c = 1$):

$$\mathcal{L}_{KG} = (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi, \quad (1.2)$$

con

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x) + i\phi_2(x)], \\ \phi^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x) - i\phi_2(x)], \end{aligned}$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son campos escalares reales. Tratando a ϕ y ϕ^* como campos independientes, las ecuaciones de Euler-Lagrange nos dan las ecuaciones de Klein-Gordon para cada campo:

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (1.3)$$

$$(\square + m^2)\phi^* = 0. \quad (1.4)$$

CAPÍTULO 1. ELECTRODINÁMICA ESCALAR
1.1. CAMPOS ESCALARES CARGADOS

Los momentos conjugados son:

$$\pi(x) = \dot{\phi}^*, \quad \pi^*(x) = \dot{\phi}.$$

El Hamiltoniano del sistema es:

$$H = \int d^3x \left(\pi^* \pi + \vec{\nabla} \phi^* \cdot \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^* \phi \right). \quad (1.5)$$

La corriente conservada asociada a la invariancia de la teoría bajo el grupo de las traslaciones en el espacio-tiempo $T(1,3)$ es:

$$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu \phi) (\partial^\nu \phi^*) + (\partial^\mu \phi^*) (\partial^\nu \phi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (1.6)$$

la cual recibe el nombre de *tensor de energía-momento*. La carga conservada asociada a la corriente $T^{\mu\nu}$ es:

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu} = \int d^3x \left(\pi^* \partial^\nu \phi^* + \pi \partial^\nu \phi - g^{0\nu} \mathcal{L} \right), \quad (1.7)$$

con

$$P^0 = H = \int d^3x \left(\pi^* \pi + \vec{\nabla} \phi^* \cdot \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^* \phi \right), \quad (1.8)$$

$$\vec{P} = - \int d^3x \left(\pi^* \vec{\nabla} \phi^* + \pi \vec{\nabla} \phi \right). \quad (1.9)$$

Note que la componente P^0 es igual al Hamiltoniano del sistema.

La lagrangiana (1.2) también es invariante bajo transformaciones globales del grupo electromagnético $U_Q(1)$, transformándose los campos como:

$$\phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x), \quad (1.10)$$

$$\phi'^*(x) = e^{-i\alpha} \phi^\dagger(x), \quad (1.11)$$

con α constante. La corriente de Noether asociada a este tipo de transformaciones es:

$$J^\mu = i (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*), \quad (1.12)$$

llamada *corriente electromagnética*. La carga conservada es la *carga electromagnética*:

$$Q = \int d^3x J^0 = i \int d^3x (\phi^* \pi^* - \phi \pi). \quad (1.13)$$

1.1.2. Cuantización canónica de la teoría libre

El postulado de cuantización [22] establece las relaciones a tiempos iguales $x_0 = y_0$:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \pi(y)] &= [\phi^\dagger(x), \pi^\dagger(y)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\phi(x), \phi(y)] &= [\pi(x), \pi(y)] = 0 = [\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)] = [\pi^\dagger(x), \pi^\dagger(y)], \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde ϕ , ϕ^\dagger , π , π^\dagger son operadores. Las integrales de Fourier para los campos complejos son:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ip \cdot x} + b_p^\dagger e^{ip \cdot x}), \quad (1.15)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (b_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}), \quad (1.16)$$

donde los operadores de creación a_p^\dagger (b_p^\dagger) y aniquilación a_p (b_p) cumplen

$$\begin{aligned} [a_p, a_{p'}^\dagger] &= [b_p, b_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \\ [a_p, a_{p'}] &= [a_p^\dagger, a_{p'}^\dagger] = 0 = [b_p, b_{p'}] = [b_p^\dagger, b_{p'}^\dagger]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

El Hamiltoniano en términos de los operadores de creación y aniquilación es:

$$H = \int d^3p E_p (a_p^\dagger a_p + b_p^\dagger b_p), \quad (1.18)$$

siendo E_p la energía de cada modo de Fourier y donde se ha desechado el término de energía de punto cero. Las cantidades conservadas P^μ y Q son ahora nuestras observables del sistema, las cuales toman la forma:

$$P^\mu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^\mu (a_p^\dagger a_p + b_p^\dagger b_p), \quad (1.19)$$

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (a_p^\dagger a_p - b_p^\dagger b_p). \quad (1.20)$$

Notemos que $H^\dagger = H$ y $\vec{P}^\dagger = \vec{P}$. Podemos identificar a la carga conservada P^μ como el generador del grupo de las traslaciones $T(1, 3)$ que cumple el álgebra de Lie:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \quad (1.21)$$

Es posible verificar:

$$[P^\mu, H] = 0, \quad (1.22)$$

$$[Q, H] = 0, \quad (1.23)$$

$$[P^\mu, Q] = 0. \quad (1.24)$$

Las primeras dos igualdades nos muestran que en efecto las cantidades son conservadas. La última igualdad verifica la existencia de dos observables que conmutan entre sí, es decir, comparten la misma base. El estado de vacío o estado base $|0\rangle$ es tal que cumple

CAPÍTULO 1. ELECTRODINÁMICA ESCALAR
1.2. LAGRANGIANA DE LA ELECTRODINÁMICA ESCALAR

$$a_p |0\rangle = b_p |0\rangle = 0, \quad (1.25)$$

y está normalizado como:

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1, \quad (1.26)$$

por lo que se identifica como el estado sin partículas ni energía. De esta forma,

$$\begin{aligned} P^\mu |0\rangle &= 0, \\ Q |0\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Debido a que P^μ es un operador autoadjunto, sus eigenvalores son reales:

$$P^\mu |p\rangle = p^\mu |p\rangle. \quad (1.27)$$

Es posible ver que $a_q^\dagger |p\rangle$ y $a_q |p\rangle$ son eigenestados de P^μ con eigenvalores $(p+q)^\mu$ y $(p-q)^\mu$ respectivamente:

$$P^\mu (a_q^\dagger |p\rangle) = (p+q)^\mu (a_q^\dagger |p\rangle), \quad (1.28)$$

$$P^\mu (a_q |p\rangle) = (p-q)^\mu (a_q |p\rangle), \quad (1.29)$$

por lo que a_p^\dagger (a_p) crea (destruye) partículas de energía p_0 , momento \vec{p} y masa m . Sin embargo $b_q^\dagger |p\rangle$ y $b_q |p\rangle$ también son eigenestados de P^μ con eigenvalores $(p+q)^\mu$ y $(p-q)^\mu$ respectivamente, creando (destruyendo) partículas con la misma energía p_0 , momento \vec{p} y masa m . Por lo tanto lo que distingue unas partículas con otras debe relacionarse con el operador Q . La observable Q nos dice que el número total de partículas creadas por a_p^\dagger menos el número de partículas creadas por b_p^\dagger se conserva. Además se ve que:

$$Q a_p^\dagger |0\rangle = a_p^\dagger |0\rangle, \quad (1.30)$$

$$Q b_p^\dagger |0\rangle = -b_p^\dagger |0\rangle, \quad (1.31)$$

lo que nos dice que el estado $a_p^\dagger |0\rangle$ ($b_p^\dagger |0\rangle$) tiene carga $+1$ (-1) en algún tipo de unidades. Se interpreta que a_p^\dagger (b_p^\dagger) crea partículas de carga $+(-)$, mientras que a_p (b_p) destruye partículas de carga $+(-)$.

La importancia del estudio de las observables P^μ y Q se debe a su relación con los parámetros de la masa m y la carga eléctrica e respectivamente, mismos que son renormalizados en la teoría de electrodinámica escalar.

1.2. Lagrangiana de la electrodinámica escalar

Consideremos la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{KG} + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (1.32)$$

CAPÍTULO 1. ELECTRODINÁMICA ESCALAR
1.2. LAGRANGIANA DE LA ELECTRODINÁMICA ESCALAR

\mathcal{L} no describe una teoría libre, pues hemos introducido el término de interacción de la forma $\lambda(\phi^\dagger\phi)^2$. Esta lagrangiana es invariante bajo el grupo de transformaciones globales $U_Q(1)$. Consideremos las transformaciones (1.10) y (1.11), ahora con $\alpha = \alpha(x)$ una función dependiente del espacio-tiempo:

$$\phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\phi(x), \quad (1.33)$$

$$\phi'^{\dagger}(x) = e^{-i\alpha(x)}\phi^{\dagger}(x). \quad (1.34)$$

La derivada ordinaria no se transforma de forma covariante:

$$\partial_\mu\phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\phi(x) + ie^{i\alpha(x)}(\partial_\mu\alpha(x))\phi(x),$$

esto se debe a que en cada punto del espacio-tiempo existe un espacio interno $U_Q(1)$, por lo que el campo se transforma de manera diferente en cada punto.

1.2.1. Interpretación geométrica de la derivada covariante

La derivada de un campo en dirección del vector n^μ se define como:

$$n^\mu\partial_\mu\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\phi(x + \epsilon n) - \phi(x)]. \quad (1.35)$$

Bajo las transformaciones locales (1.33) y (1.34) podemos ver que mientras que el campo $\phi(x + \epsilon n)$ se transforma con $\alpha(x + \epsilon n)$, $\phi(x)$ se transforma con $\alpha(x)$, por lo que los campos se transforman de diferente forma. La derivada no tiene un sentido geométrico claro. Nos interesa comparar $\phi(x + \epsilon n)$ no con $\phi(x)$, sino con el valor que tendría $\phi(x)$ si lo transportáramos del punto x al punto $x + \epsilon n$ manteniendo fijos los ejes del espacio interno en x . Esto se puede interpretar como si se hiciera un *transporte paralelo* entre los espacios internos [12]. Para compensar la diferencia de fase de las transformaciones en los diferentes puntos del espacio-tiempo, podemos introducir una cantidad que relacione ambos puntos, y se transforme como:

$$U(y, x) \rightarrow e^{i\alpha(y)}U(y, x)e^{-i\alpha(x)}, \quad (1.36)$$

simultáneamente con los campos transformados. $U(y, x)$ recibe el nombre de *comparador*. De esta forma $\phi(y)$ y $U(y, x)\phi(x)$ se transforman de la misma manera, por lo que ahora ya podemos comparar ambos campos. Definamos la derivada covariante como:

$$n^\mu D_\mu\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\phi(x + \epsilon n) - U(x + \epsilon n, x)\phi(x)]. \quad (1.37)$$

Debido a que x y $x + \epsilon n$ difieren infinitesimalmente, escribimos:

$$U(x + \epsilon n, x) = 1 + ie\epsilon n^\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (1.38)$$

donde e es la constante de acoplamiento del grupo $U_Q(1)$ y A_μ es un campo de norma. Así, la derivada covariante toma la forma:

$$D_\mu\phi(x) = \partial_\mu\phi(x) - ieA_\mu\phi(x), \quad (1.39)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (1.40)$$

Comparemos la expresión (1.39) con la forma en la que se calcula la derivada covariante en relatividad general [23], donde la derivada de un vector contravariante t^b es:

CAPÍTULO 1. ELECTRODINÁMICA ESCALAR
1.2. LAGRANGIANA DE LA ELECTRODINÁMICA ESCALAR

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma_{ac}^b t^c, \quad (1.41)$$

siendo Γ_{ac}^b los *símbolos de Christoffel* o *conexiones*. Por la similitud en las expresiones, al campo A_μ suele llamarse *conexión*. De la forma en la que se transforma $U(y, x)$, se puede ver que los campos A_μ se transforman como:

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha.$$

Compare la forma en la que se transforma A_μ con la forma en la que se transforman los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma'_{bc}{}^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} \Gamma_{ef}^d + \frac{\partial^2 x^h}{\partial x'^b \partial x'^c} \frac{\partial x'^a}{\partial x^h}. \quad (1.42)$$

Note que A_μ y Γ_{bc}^a no se transforman de forma covariante.

Al considerar la forma en la que se transforma A_μ , la derivada covariante sí se transforma como:

$$(D_\mu \phi(x))' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi(x).$$

Sustituyendo en (1.32) la derivada ordinaria ∂_μ por la derivada covariante D_μ obtenemos la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi^\dagger) (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (1.43)$$

la cual se transforma de manera covariante bajo las transformaciones locales (1.33) y (1.34).

Finalmente podemos construir la curvatura mediante el conmutador de las derivadas covariantes $[D_\mu, D_\nu]$:

$$[D_\mu, D_\nu] = -ieF_{\mu\nu},$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.44)$$

En teorías abelianas el tensor de curvatura es invariante bajo transformaciones de norma:

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \quad (1.45)$$

Nuevamente comparemos esta forma con el tensor de curvatura de Riemann:

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma. \quad (1.46)$$

Notemos que tienen la misma forma con excepción de los dos últimos términos del tensor de Riemann. En teorías no abelianas se logra ver una mayor similitud con los últimos términos [12].

1.2.2. Construcción de la lagrangiana de electrodinámica escalar

Debido a la introducción del campo de norma A_μ , este debe contribuir a la lagrangiana mediante un término cinético que sea invariante bajo las transformaciones de norma. Consideramos el término:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.47)$$

De esta manera, podemos construir una lagrangiana invariante de norma:

$$\mathcal{L}_{SQED} = (D_\mu\phi^\dagger)(D^\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.48)$$

esto es,

$$\mathcal{L}_{SQED} = (\partial_\mu\phi^\dagger)(\partial^\mu\phi) + ie(\phi^\dagger\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^\dagger)A_\mu + e^2A_\mu A^\mu\phi^\dagger\phi - m^2\phi^\dagger\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.49)$$

Las ecuaciones de movimiento y la forma de la corriente conservada pueden derivarse mediante el principio de *acoplamiento mínimo*, sustituyendo ∂_μ por D_μ en (1.3), (1.4) y (1.12) más la contribución del término de interacción $\lambda(\phi^\dagger\phi)^2$.

Como consecuencia de construir una lagrangiana invariante bajo transformaciones locales surge de manera natural el campo electromagnético, donde existe un acoplamiento del campo A_μ con la corriente electromagnética producida por los campos ϕ y ϕ^\dagger . Si quisieramos introducir un término de masa de la forma $M^2A_\mu A^\mu$ a la lagrangiana se puede ver que no es invariante bajo transformaciones de norma, por lo que trabajamos con campos sin masa, relacionando aún más el carácter electromagnético de la teoría. La introducción de un término de la forma $\lambda\phi^\dagger\phi^\dagger\phi\phi$ fue propuesto por Matthews en 1950 al estudiar la renormalización de la teoría de mesones cargados sin espín en el campo electromagnético [4].

Capítulo 2

La matriz S y la serie perturbativa

En este capítulo se da una breve introducción a la matriz S y se presenta la función de Green de n puntos como herramienta para determinar las reglas de Feynman de una teoría.

2.1. La matriz S

La matriz S es el objeto matemático que describe procesos de colisión definida en el espacio de estados. Mediante la matriz S se pueden formular distintas reglas que, según la teoría, nos ayudan a construir amplitudes de probabilidad dadas por diagramas de Feynman que surgen en un contexto perturbativo. En un proceso de dispersión se toman las siguientes consideraciones:

- Los tiempos, así como las regiones del espacio, en las que ocurren las interacciones son extremadamente pequeños en comparación con los tiempos transcurridos entre la preparación del haz de partículas y el impacto en el detector de las partículas producto, así como las distancias recorridas por los haces incidentes y resultantes.
- Mucho antes de la colisión ($t \rightarrow -\infty$) las partículas están muy separadas unas de otras en comparación a la escala en el proceso de interacción, por lo que la teoría puede ser considerada esencialmente libre. Mucho después de la colisión ($t \rightarrow +\infty$), las partículas se separan entre sí lo suficiente como para ser consideradas esencialmente libres.
- El haz incidente es caracterizado por un espacio de Fock generado por los campos libres Φ_{in} ¹, por lo que los estados $|in \alpha\rangle$ representan las características individuales de las partículas (masa, carga, espín, etc.). El haz final constituye estados de partículas libres $|out \alpha\rangle$ generados por los campos Φ_{out} . Ambos espacios son matemáticamente idénticos.
- Los procesos de las partículas incidentes e interactuantes están sujetos a leyes de conservación de 4-momento, momento angular, carga eléctrica, etc.

Sean

$$\begin{aligned} |\alpha in\rangle &= |q_1, \dots, q_n in\rangle \\ |\beta out\rangle &= |p_1, \dots, p_m out\rangle \end{aligned}$$

estados de n y m partículas respectivamente, con q y p representando eigenvalores de 4-momento, carga, momento angular, etc. El producto escalar

¹ Φ representa cualquier tipo de campo interactuante, según la teoría.

$$\langle \beta \text{ out} | \alpha \text{ in} \rangle \quad (2.1)$$

representa la amplitud de probabilidad de que el estado $|\alpha \text{ in}\rangle$ evolucione con el tiempo al estado $|\beta \text{ out}\rangle$. Estas amplitudes de probabilidad definen secciones eficaces de procesos de dispersión y tiempo de vida de partículas inestables. Existe un operador S que transforma estados in en estados out :

$$\langle \beta \text{ in} | S = \langle \beta \text{ out} |, \quad \langle \beta \text{ out} | S^{-1} = \langle \beta \text{ in} |, \quad (2.2)$$

lo cual conduce a que los elementos de la matriz S dados por la ecuación (2.1) se puedan escribir como:

$$\langle \beta \text{ out} | \alpha \text{ in} \rangle = \langle \beta \text{ in} | S | \alpha \text{ in} \rangle = S_{\beta\alpha}. \quad (2.3)$$

El operador S tiene las siguientes propiedades:

1. Estabilidad del vacío. El estado de vacío es, por suposición, único. Esto es:

$$\langle 0 \text{ in} | S = \langle 0 \text{ out} | = \langle 0 \text{ in} |,$$

el cual se supone normalizado a la unidad:

$$S_{00} = \langle 0 \text{ out} | 0 \text{ in} \rangle = \langle 0 \text{ in} | S | 0 \text{ in} \rangle = \langle 0 \text{ in} | 0 \text{ in} \rangle = 1. \quad (2.4)$$

2. S transforma a los campos in y out como:

$$\phi_{\text{in}}(x) = S \phi_{\text{out}}(x) S^{-1}. \quad (2.5)$$

3. El operador S es unitario.
4. S respeta todas las simetrías de la teoría.

2.2. La teoría asintótica

Para establecer la relación entre el campo asintótico $\Phi_{as} = \Phi_{\text{in}}, \Phi_{\text{out}}$ y el campo interactuante Φ debemos establecer la condición asintótica mediante los elementos de matrices [22]:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | \Phi(x) | \beta \rangle = Z^{1/2} \langle \alpha | \Phi_{\text{in}}(x) | \beta \rangle, \quad (2.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \alpha | \Phi(x) | \beta \rangle = Z^{1/2} \langle \alpha | \Phi_{\text{out}}(x) | \beta \rangle, \quad (2.7)$$

donde Z está relacionada con la renormalización del campo. Esta relación fue establecida por H. Lehmann, K. Symanzik y W. Zimmermann en 1955 [24]. Por ejemplo, en el caso de campos de Klein-Gordon consideramos el campo interactuante promediado sobre una región espacialoide $\phi^f(t)$:

$$\phi^f(t) = i \int d^3x f^*(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(\vec{x}, t), \quad (2.8)$$

donde $f(\vec{x}, t)$ es solución de la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)f(x) = 0, \quad (2.9)$$

y

$$A \overleftrightarrow{\partial}_0 B \equiv A \partial_0 B - (\partial_0 A) B. \quad (2.10)$$

La condición asintótica es de la forma:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \alpha | \phi^f(t) | \beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha | \phi_{as}^f | \beta \rangle, \quad (2.11)$$

donde

$$\phi_{as}^f = i \int d^3 x f^*(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{as}(\vec{x}, t) \quad (2.12)$$

son los campos asintóticos promediados en una región espacialoide.

2.3. La matriz S mediante el proceso de reducción de LSZ

Se busca la forma de calcular elementos de la matriz S mediante el proceso de reducción de Lehmann-Symanzik-Zimmermann LSZ [24], el cual consiste en expresar a los elementos de matriz $S_{\beta\alpha} = \langle \beta out | \alpha in \rangle$ en términos de los campos interactuantes y conectarlos con los campos asintóticos. Los estados $|\alpha in\rangle$ y $|\beta out\rangle$ son generados por la teoría asintótica:

$$\begin{aligned} |q_1, \dots, q_n in\rangle &= a_{in}^\dagger(q_1) |q_2, \dots, q_n in\rangle \\ &= a_{in}^\dagger(q_1) a_{in}^\dagger(q_2) \dots a_{in}^\dagger(q_n) |0\rangle, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$|p_1, \dots, p_m in\rangle = a_{out}^\dagger(p_1) a_{out}^\dagger(p_2) \dots a_{out}^\dagger(p_m) |0\rangle, \quad (2.14)$$

donde para los campos escalares:

$$a_{as}^\dagger(q_i) = -i \int d^3 x_i f_{q_i}(x_i) \overleftrightarrow{\partial}_{x_1^0} \phi_{as}(x_i), \quad (2.15)$$

con f_{q_i} solución de tipo Klein-Gordon y $\phi_{as}(x_1)$ el campo asintótico. Se tiene:

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \langle p_1, \dots, p_m out | q_1, \dots, q_n in \rangle \\ &= \langle p_1, \dots, p_m out | a_{in}^\dagger(q_1) | q_2, \dots, q_n in \rangle \\ &= \langle \beta - q_1 out | \alpha - q_1 in \rangle + \langle \beta out | (a_{in}^\dagger(q_1) - a_{out}^\dagger(q_1)) | \alpha - q_1 in \rangle, \end{aligned}$$

con $\langle \beta - q_1 out |$ el estado que viene de remover la partícula q_1 a $\langle \beta out |$ si está presente. Por sencillez, supondremos en lo que sigue que $q_i \neq p_j$ para todo i, j , de tal manera que todos los términos de este tipo estarán ausentes. Sustituyendo las expresiones de los operadores a_{as}^\dagger obtenemos:

$$S_{\beta\alpha} = -i \langle \beta out | \int d^3 x_1 f_{q_1}(x_1) \overleftrightarrow{\partial}_{x_1^0} [\phi_{in}(x_1) - \phi_{out}(x_1)] | \alpha - q_1 in \rangle.$$

La integral se considera a un tiempo arbitrario x_1^0 . Al tomar $x_1^0 \rightarrow -\infty$ por la condición asintótica podemos sustituir ϕ_{in} por $\frac{1}{\sqrt{Z}} \phi(x_1)$, y en el límite $x_1^0 \rightarrow +\infty$ podemos sustituir ϕ_{out} por $\frac{1}{\sqrt{Z}} \phi(x_1)$, donde $\phi(x_1)$ son los campos interactuantes. Así:

$$S_{\beta\alpha} = \frac{i}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{x_1^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x_1^0 \rightarrow -\infty} \right) \int d^3 x_1 f_{q_1}(x_1) \overleftrightarrow{\partial}_{x_1^0} \langle \beta out | \phi(x_1) | \alpha - q_1 in \rangle.$$

CAPÍTULO 2. LA MATRIZ S Y LA SERIE PERTURBATIVA
2.4. TEORÍA DE PERTURBACIONES Y SERIE DE DYSON

Después de algunas manipulaciones algebraicas, obtenemos:

$$S_{\beta\alpha} = \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x_1 f_{q_1}(x_1) \overleftarrow{(\square_1 + m^2)} \langle \beta \text{ out} | \phi(x_1) | \alpha - q_1 \text{ in} \rangle, \quad (2.16)$$

lo cual completa el problema de remover la partícula q_1 del estado $|\alpha \text{ in}\rangle$. Siguiendo el proceso para remover las $n + m$ partículas, el elemento de matriz S para el proceso de dispersión de n partículas iniciales, caracterizadas por el vector de estado $|\alpha \text{ in}\rangle = |q_1, \dots, q_n \text{ in}\rangle$, y de m partículas finales, con vector de estado $|\beta \text{ out}\rangle = |p_1, \dots, p_m \text{ out}\rangle$ es:

$$S_{\beta\alpha} = \prod_{i=1}^n \int d^4x_i \prod_{j=1}^m \int d^4y_j F_{q_i}(x_i) \overrightarrow{\partial}_{x_i} G(y_1 \dots y_m x_1 \dots x_n) \overleftarrow{\partial}_{y_j} F_{p_j}^\dagger(y_j), \quad (2.17)$$

donde las F son funciones y O operadores diferenciales tales que

$$\overrightarrow{\partial} F = 0, \quad (2.18)$$

es decir, F cumple las ecuaciones de campo libre. La *función de Green de $n + m$ puntos* para los campos escalares es:

$$G(y_1 \dots y_m x_1 \dots x_n) = \langle 0 | T(\phi(y_1) \dots \phi(y_m) \phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle, \quad (2.19)$$

donde T es el ordenamiento temporal, el cual ordena los productos de los operadores en orden cronológico del tiempo mayor al menor ² La función de Green de $n + m$ puntos representa la amplitud de probabilidad de que $n + m$ partículas sean creadas o destruidas en los puntos $(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$. Es posible generalizar la forma de los elementos de la matriz S para que contengan campos escalares, de Fermi y de norma.

2.4. Teoría de perturbaciones y serie de Dyson

La función de Green para campos interactuantes no puede ser calculada de manera exacta, ya que los campos interactuantes definen una teoría no lineal, por lo que debe recurrirse a teoría de perturbaciones. La idea esencial de la teoría de perturbaciones es relacionar los campos interactuantes $\phi(x)$ con los campos libres ϕ_{as} mediante un operador que realice una transformación unitaria. Consideremos la relación entre campos interactuantes y campos asintóticos ϕ_{as} dada por

$$\phi(x) = U^{-1}(t) \phi_{as} U(t), \quad (2.21)$$

así como

$$\pi(x) = U^{-1}(t) \pi_{as} U(t). \quad (2.22)$$

Buscamos relacionar los operadores de la teoría de campo libre, caracterizada por el hamiltoniano

²Como ejemplo, consideremos el ordenamiento temporal de dos campos escalares $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(y)$, el cual es definido como

$$T(\phi(x)\phi^\dagger(y)) = \theta(x_0 - y_0)\phi(x)\phi^\dagger(y) + \theta(y_0 - x_0)\phi^\dagger(y)\phi(x), \quad (2.20)$$

donde $\theta(x_0 - y_0)$ es la función escalón de Heaviside dada por

$$\theta(x_0 - y_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 < y_0 \\ 1 & \text{si } x_0 > y_0. \end{cases}$$

De esta forma, los operadores de campo están ordenados cronológicamente del tiempo mayor al menor. Es posible generalizar la expresión (2.20) para más de dos operadores de campo.

CAPÍTULO 2. LA MATRIZ S Y LA SERIE PERTURBATIVA
2.4. TEORÍA DE PERTURBACIONES Y SERIE DE DYSON

$$H_{as} = H_{as}(\phi_{as}, \pi_{as}), \quad (2.23)$$

con los operadores de la teoría interactuante, caracterizada por el hamiltoniano

$$H(\phi, \pi) = H_0 + H, \quad (2.24)$$

donde H_0 tiene la forma del hamiltoniano de la parte libre de la teoría y H_I es el hamiltoniano de interacción. En la imagen de Heisenberg se cumplen las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{as}(x)}{\partial t} &= i [H_{as}(\phi_{as}, \pi_{as}), \phi_{as}], \\ \frac{\partial \pi_{as}(x)}{\partial t} &= i [H_{as}(\phi_{as}, \pi_{as}), \pi_{as}], \end{aligned} \quad (2.25)$$

para la teoría libre, y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} &= i [H(\phi, \pi), \phi], \\ \frac{\partial \pi(x)}{\partial t} &= i [H(\phi, \pi), \pi], \end{aligned} \quad (2.26)$$

para la teoría interactuante. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{as}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (U(t)\phi(x)U^{-1}(t)) \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} \phi(x)U^{-1} + U \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} U^{-1} + U \phi(x) \frac{\partial U^{-1}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} U^{-1} (U \phi(x) U^{-1}) + iU [H(\phi, \pi), \phi] U^{-1} + (U \phi(x) U^{-1}) U \frac{\partial U^{-1}}{\partial t}, \end{aligned}$$

pero

$$U \frac{\partial U^{-1}}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial t} U^{-1},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{as}}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial t} U^{-1} (U \phi(x) U^{-1}) + iU [H(\phi, \pi), \phi] U^{-1} - (U \phi(x) U^{-1}) \frac{\partial U}{\partial t} U^{-1} \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} U^{-1} \phi_{as} - \phi_{as} \frac{\partial U}{\partial t} U^{-1} + iU [H(\phi, \pi), \phi] U^{-1} \\ &= \left[\frac{\partial U}{\partial t} U^{-1}, \phi_{as} \right] + i [H(\phi_{as}, \pi_{as}), \phi_{as}], \end{aligned}$$

donde ahora el hamiltoniano de la teoría interactuante está expresado en términos de los campos asintóticos. Se tiene:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial U}{\partial t} U^{-1}, \phi_{as} \right] &= -i \{ [H(\phi_{as}, \pi_{as}), \phi_{as}] - [H_{as}(\phi_{as}, \pi_{as}), \phi_{as}] \} \\ &= -i [H_I(\phi_{as}, \pi_{as}), \phi_{as}]. \end{aligned}$$

Notemos que la parte libre del hamiltoniano de la teoría interactuante se anula con el hamiltoniano de la teoría asintótica, pues ambos están expresados en términos de campos asintóticos. Así obtenemos:

CAPÍTULO 2. LA MATRIZ S Y LA SERIE PERTURBATIVA
2.4. TEORÍA DE PERTURBACIONES Y SERIE DE DYSON

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} U^{-1}(t) = -iH_I(\phi_{as}, \pi_{as}),$$

ó

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = -iH_I(\phi_{as}, \pi_{as})U(t), \quad (2.27)$$

la cual es la ecuación de evolución temporal para $U(t)$. La solución de $U(t)$ es esencial para el desarrollo de la serie perturbativa. La ecuación (2.27) puede reescribirse como:

$$\frac{\partial U(t, t')}{\partial t} = -iH_I(\phi_{as}, \pi_{as})U(t, t'), \quad (2.28)$$

donde

$$U(t, t') = U(t)U^{-1}(t') \quad (2.29)$$

también es solución, y se cumple :

$$U(t, t) = \mathbb{1} \quad \text{para } t = t'. \quad (2.30)$$

De (2.29) se ve que se satisface:

$$U(t, t') = U(t, t'')U(t'', t'). \quad (2.31)$$

Considerando la condición de frontera:

$$\lim_{t \rightarrow t'} U(t, t') = \mathbb{1}, \quad (2.32)$$

una solución de (2.28) es:

$$U(t, t') = \mathbb{1} - i \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) U(t_1, t'). \quad (2.33)$$

Teniendo en cuenta que

$$U(t_1, t') = \mathbb{1} - i \int_{t'}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) U(t_2, t') \quad \text{para } t_1 > t_2,$$

podemos iterar:

$$\begin{aligned} U(t, t') &= \mathbb{1} - i \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) \left[\mathbb{1} - i \int_{t'}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) U(t_2, t') \right] \\ &= \mathbb{1} - i \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) U(t_2, t') \quad \text{para } t_1 > t_2. \end{aligned}$$

Iterando n veces, se obtiene:

$$\begin{aligned} U(t, t') &= \mathbb{1} + (-i) \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \\ &\quad + \dots + (-i)^n \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) + \dots, \end{aligned}$$

con $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$. Introduciendo el ordenamiento temporal T se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} U(t, t') &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n T(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n T(H_I(t_1) \dots H_I(t_n)), \end{aligned} \quad (2.34)$$

que podemos escribir de manera compacta como:

$$U(t, t') = T \left(e^{-i \int_{t'}^t dt H_I(t)} \right). \quad (2.35)$$

Es posible expresar al hamiltoniano de interacción H_I de la forma

$$H_I = \int d^3x \mathcal{H}_I,$$

donde \mathcal{H}_I es la función de densidad hamiltoniana, por lo que el operador $U(t, t')$ se puede escribir como

$$U(t, t') = T \left(e^{-i \int_{t'}^t d^4x \mathcal{H}_I(\phi_{as}, \pi_{as})} \right). \quad (2.36)$$

Usando las relaciones (2.29), (2.31) podemos determinar la función de Green de n puntos para campos escalares:

$$\begin{aligned} G(x_1 \dots x_n) &= \frac{\langle 0 | T(\phi_{as}(x_1) \dots \phi_{as}(x_n) e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_I}) | 0 \rangle}{\langle 0 | T(e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_I}) | 0 \rangle} \\ &= \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int d^4y_1 \dots d^4y_m \langle 0 | T(\phi_{as}(x_1) \dots \phi_{as}(x_n) \mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_m)) | 0 \rangle}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int d^4y_1 \dots d^4y_m \langle 0 | T(\mathcal{H}_I(y_1) \dots \mathcal{H}_I(y_m)) | 0 \rangle}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

siendo $\mathcal{H}_I(\phi_{as}, \pi_{as})$ la *densidad hamiltoniana de interacción o hamiltoniana de interacción*, la cual se construye a partir de los campos libres o asintóticos. Esta expresión recibe el nombre de *serie de Dyson*. La serie perturbativa permite establecer ciertas reglas de tipo general llamadas *reglas de Feynman*, las cuales describen interacciones de 2 puntos, 3 puntos, etc., llamadas funciones de Green vértice. En el cálculo de las funciones de Green en la teoría se consideran las funciones vértice como funciones de Green amputadas, es decir, no se consideran las patas externas de los diagramas de Feynman.

2.5. Teorema de Wick

Podemos expresar a la serie perturbativa en términos de productos de propagadores y constantes de acoplamiento a partir del *Teorema de Wick*. Este teorema establece que un producto ordenado en el tiempo se puede expresar en términos de ordenamientos normales. Un ordenamiento normal se define exclusivamente para campos asintóticos. Se denota por $:$ y se define como:

$$:\phi^{as}(x)\phi^{as}(y): \equiv \text{Colocar todos los operadores } a \text{ a la derecha de los operadores } a^\dagger. \quad (2.38)$$

En el caso de campos fermiónicos, para cada permutación impar se debe introducir un signo menos. El teorema de Wick se puede establecer como:

CAPÍTULO 2. LA MATRIZ S Y LA SERIE PERTURBATIVA
2.5. TEOREMA DE WICK

$$\begin{aligned}
T(\phi_{as}(x_1)\dots\phi_{as}(x_n)) &= : \phi_{as}(x_1)\dots\phi_{as}(x_n) : \\
&+ [\langle 0|T(\phi_{as}(x_1)\phi_{as}(x_2))|0\rangle : \phi_{as}(x_3)\dots\phi_{as}(x_n) : + \text{Permutaciones}] \\
&+ [\langle 0|T(\phi_{as}(x_1)\phi_{as}(x_2))|0\rangle \langle 0|T(\phi_{as}(x_3)\phi_{as}(x_4))|0\rangle : \phi_{as}(x_5)\dots\phi_{as}(x_n) : \\
&+ \text{Permutaciones}] + \dots + \\
&\begin{cases} [\langle 0|T(\phi_{as}(x_1)\phi_{as}(x_2))|0\rangle \dots \langle 0|T(\phi_{as}(x_{n-1})\phi_{as}(x_n))|0\rangle + \text{Permutaciones}], & n \text{ par,} \\
[\langle 0|T(\phi_{as}(x_1)\phi_{as}(x_2))|0\rangle \dots \langle 0|T(\phi_{as}(x_{n-2})\phi_{as}(x_{n-1}))|0\rangle \phi_{as}(x_n) + \text{Permutaciones}], & n \text{ impar.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Considerando al estado del vacío en ambos lados y notando que

$$a(p)|0\rangle = 0, \quad \text{y} \quad \langle 0|a^\dagger(p) = 0,$$

se obtiene:

$$\langle 0|T(\phi_{as}(x_1)\dots\phi_{as}(x_n))|0\rangle = \begin{cases} 0, & n \text{ impar,} \\
\sum_p \delta_p \langle 0|T(\phi_{as}(x_1)\phi_{as}(x_2))|0\rangle \dots \langle 0|T(\phi_{as}(x_{n-1})\phi_{as}(x_n))|0\rangle, & n \text{ par,} \end{cases} \tag{2.40}$$

con δ_p denotando el signo de la permutación en el caso de fermiones.

Capítulo 3

Renormalización de electrodinámica escalar a orden de un lazo

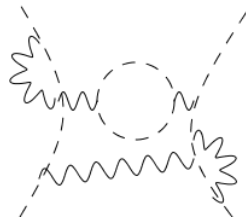
La teoría de renormalización surge como consecuencia de las divergencias que aparecen en Teoría Cuántica de Campos, las cuales deben ser sometidas a diversos procesos a fin de encontrar un sentido físico. El hecho de que aparezcan divergencias a partir de diagramas a orden de un lazo significa que tanto los parámetros como los campos que aparecen en la lagrangiana original, son infinitos. A estas cantidades las llamaremos *cantidades desnudas* y las denotaremos con un subíndice B . Como consecuencia de las interacciones entre partículas, sus propiedades tales como la masa o la carga eléctrica son redefinidas, de tal forma que al renormalizar los campos y los parámetros obtenemos una teoría finita. El proceso de renormalización puede ser visto como el vestir a una partícula mediante las interacciones.

En este capítulo se analizan las divergencias que surgen en electrodinámica escalar, se presenta el esquema de regularización que se usará y se renormaliza la teoría a orden de un lazo en el esquema de renormalización conocido con el nombre de on-shell o físico.

3.1. Divergencias de la electrodinámica escalar

En Teoría Cuántica de Campos existen divergencias al calcular amplitudes de probabilidad en diagramas a orden de un lazo, los cuales son diagramas conectados con un solo ciclo. Los diagramas con lazos corresponden a las correcciones cuánticas de la teoría clásica, cuyas consecuencias se manifiestan en fenómenos físicos tales como el corrimiento de Lamb, la polarización del vacío o el momento anómalo dipolar [9]. Dichas divergencias pueden ser ultravioletas (efectos de altas energías o pequeñas distancias), las cuales pueden ser tratadas mediante *renormalización*, o divergencias infrarrojas (efectos a grandes distancias) que surgen como consecuencia de la ausencia de masa en el fotón y las cuales suelen tratarse mediante la introducción de una masa ficticia m_γ .

En el cálculo de diagramas de la teoría SQED podemos encontrar integrales de la forma:


$$\sim \int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2 \cdots d^4 k_L P_D(k)}{(k_1^2 - m^2) \cdots (k_j^2) \cdots (k_n^2)}, \quad (3.1)$$

CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A ORDEN DE UN LAZO

3.1. DIVERGENCIAS DE LA ELECTRODINÁMICA ESCALAR

donde se tienen polinomios $P_D(k)$ en el numerador que dependen de los momentos internos del lazo según la forma de los vértices. Para localizar los diagramas que son divergentes podemos realizar el conteo de potencias de los momentos internos del lazo k que serán integrados. Siguiendo las reglas de Feynman podemos localizar los diagramas divergentes al considerar el momento del lazo, de los propagadores del foton, de la partícula cargada y los vértices. Introducimos el concepto de *grado superficial de divergencia*¹ d , el cual se define como:

$$d = N_k - D_k, \quad (3.2)$$

siendo N_k las potencias del momento k en el numerador y D_k las potencias de dicho momento en el denominador. Si $d \geq 0$ las integrales divergen. Las divergencias pueden ser de tipo logarítmica ($d = 0$), lineal ($d = 1$), cuadrática ($d = 2$) o de mayor grado.

Consideremos el análisis de la teoría de electrodinámica escalar (1.49) sin el término de interacción $\lambda(\phi^\dagger\phi)^2$. Al determinar las reglas de Feynman (Sección 3.3.1) se tienen dos tipos de vértices: el vértice de tres puntos (dos escalares un fotón) y de cuatro puntos (dos escalares dos fotones). En nuestro análisis de conteo de potencias consideremos únicamente el vértice de 3 puntos, ya que los diagramas con vértices de dos escalares y dos fotones pueden derivarse a partir de la contracción de diagramas con vértices de 3 puntos [5]. Usemos la siguiente notación:

- E_s = número de líneas externas del escalar
- E_p = número de líneas externas del fotón
- I_s = número de líneas internas del escalar
- I_p = número de líneas internas del fotón
- V = número de vértices
- L = número de loops

El vértice de 3 puntos tiene dos líneas escalares y una línea de fotón, por lo que tenemos las relaciones:

$$2V = E_s + 2I_s, \quad (3.3)$$

$$V = E_p + 2I_p, \quad (3.4)$$

donde se han contado dos veces las líneas internas debido a que están unidas entre dos vértices. El número de lazos es:

$$L = I_s + I_p - (V - 1), \quad (3.5)$$

donde el término entre paréntesis surge como consecuencia de las funciones δ en cada uno de los vértices menos una función δ que representa la conservación total del momento. El numerador N_k para esta teoría está dado por:

$$N_k = 4L + V, \quad (3.6)$$

debido a las potencias derivadas del elemento d^4k más la contribución del vértice de 3 puntos. El denominador es:

¹Llamado así por la posible aparición de subdiagramas divergentes en un diagrama que cambie su carácter divergente

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.2. ESQUEMA DE REGULARIZACIÓN

$$D_k = 2(I_s + I_p), \quad (3.7)$$

por la forma de los propagadores del escalar y el fotón. De esta forma el grado de divergencia superficial es:

$$d = 4 - E_s - E_p. \quad (3.8)$$

Se deduce de esta relación que los diagramas divergentes que encontramos a orden de un lazo son: autoenergía del campo escalar, autoenergía del fotón, función vértice de tres puntos (dos escalares un fotón), acoplamiento de tres fotones, función vértice de cuatro puntos (dos escalares dos fotones, cuatro escalares). Los diagramas con líneas externas escalares impares son descartados por conservación de la carga, diagramas con número impar de fotones externos son descartados al poder cancelarse con diagramas con el flujo de la carga en dirección opuesta y la divergencia en el proceso de dispersión de luz por luz se cancela por invariancia de norma. La divergencia correspondiente a la función vértice de cuatro escalares no puede ser cancelada al renormalizar los parámetros de la carga y la masa, por lo que debe agregarse a la lagrangiana un término de interacción de la forma $\lambda(\phi^\dagger\phi)^2$ para que la teoría pueda ser renormalizada [4, 5].

3.2. Esquema de Regularización

El método de regularización consiste en aislar las divergencias de los diagramas. Existen diferentes esquemas entre los cuales están la introducción de un parámetro de corte Λ en la integral a resolver, por ejemplo:

$$\int_0^\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(p - q)^2 - m^2},$$

donde el resultado obtenido depende del parámetro Λ , el cual está sujeto al límite $\Lambda \rightarrow \infty$. El método de *Pauli-Villars* consiste en la introducción de partículas pesadas auxiliares a la lagrangiana. La introducción de estas partículas conllevan a la modificación de, por ejemplo, el propagador del fotón:

$$\frac{1}{(k - p)^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(k - p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(k - p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon},$$

con Λ una masa muy grande. Podemos pensar al segundo término como el propagador de un fotón pesado ficticio, lo que nos permite tener una integral convergente pero dependiente de Λ . Una vez evaluadas las integrales y redefinidos los parámetros físicos, al tomar el límite en el infinito, las cantidades renormalizadas deben ser independientes de los reguladores, esto es, independientes del esquema de regularización elegido. Sin embargo el uso de un parámetro de corte puede no preservar las simetrías de la teoría, mientras que el método de Pauli-Villars puede complicar los cálculos. Se usará el *esquema de regularización dimensional* [15] (Apéndice A), el cual, aunque no es intuitivo, resulta conveniente, ya que preserva todas las simetrías de la teoría.

3.3. Lagrangiana renormalizada

La lagrangiana original o lagrangiana desnuda de la electrodinámica escalar está dada por:

$$\mathcal{L}_B = (D_{B\mu}\phi_B)^\dagger (D_B^\mu\phi_B) - V_B(\phi_B^\dagger, \phi_B) - \frac{1}{4}F_{B\mu\nu}F_B^{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

donde

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.3. LAGRANGIANA RENORMALIZADA

$$V_B(\phi_B^\dagger, \phi_B) = m_B^2 (\phi_B^\dagger \phi_B) + \frac{\lambda_B}{4} (\phi_B^\dagger \phi_B)^2, \quad (3.10)$$

con

$$D_{B\mu} = \partial_\mu - ie_B A_{B\mu}, \quad (3.11)$$

$$F_B^{\mu\nu} = \partial^\mu A_B^\nu - \partial^\nu A_B^\mu, \quad (3.12)$$

la derivada covariante y el tensor de curvatura respectivamente. Esta teoría es invariante bajo los grupos $ISO(1, 3) \times U_Q(1)$, ya que bajo el grupo de norma $U_Q(1)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= e^{i\alpha(x)} \phi(x), \\ \phi'^\dagger(x) &= e^{-i\alpha(x)} \phi^\dagger(x), \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x), \\ F'_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como consecuencia de las divergencias que surgen a partir de cálculos de diagramas a orden de un lazo, tanto los parámetros de la teoría como los campos son infinitos. Podemos establecer una relación entre los campos desnudos y los campos renormalizados (finitos) mediante factores de renormalización como sigue:

$$\phi_B = (Z_\phi)^{1/2} \phi, \quad A_B^\mu = (Z_A)^{1/2} A^\mu, \quad (3.14)$$

así que la lagrangiana reescalada toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= Z_\phi (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + ie_B Z_\phi Z_A^{1/2} A_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^\dagger) + e_B^2 Z_\phi Z_A A_\mu A^\mu (\phi^\dagger \phi) \\ &\quad - m_B^2 Z_\phi (\phi^\dagger \phi) - \frac{\lambda_B Z_\phi^2}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{Z_A}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Relacionamos al parámetro e_B que asociamos a la carga eléctrica desnuda con la carga eléctrica renormalizada e mediante la siguiente relación

$$e_B Z_\phi Z_A^{1/2} = e Z_e, \quad (3.16)$$

de tal forma que la lagrangiana toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= Z_\phi (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + ie Z_e A_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^\dagger) + e \frac{Z_e^2}{Z_\phi} A_\mu A^\mu (\phi^\dagger \phi) \\ &\quad - m_B^2 Z_\phi (\phi^\dagger \phi) - \frac{\lambda_B Z_\phi^2}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{Z_A}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ahora, un paso importante es dividir la lagrangiana desnuda en dos partes:

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_{SQED} + \mathcal{L}_{c.t.}^{SQED},$$

donde

$$\mathcal{L}_{SQED} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger, \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (3.18)$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.3. LAGRANGIANA RENORMALIZADA

está escrita en términos de solo cantidades renormalizadas, debido a lo cual recibe el nombre de lagrangiana renormalizada; mientras que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{c.t.}^{SQED} = & \delta_\phi (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + ie \delta_e A_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^\dagger) + e^2 \left(\frac{Z_e^2}{Z_\phi} - 1 \right) A_\mu A^\mu (\phi^\dagger \phi) \\ & - \delta_m^2 (\phi^\dagger \phi) - \frac{\delta_\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{\delta_A}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

es la lagrangiana de contratérminos, en la cual se han definido las siguientes cantidades

$$\begin{aligned} \delta_A = Z_A - 1, \quad \delta_\phi = Z_\phi - 1, \quad \delta_\lambda = \lambda_B Z_\phi^2 - \lambda, \\ \delta_e = Z_e - 1, \quad \delta_m^2 = m_B^2 Z_\phi - m^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

El último término de (3.18) es el término que *fija la norma* . Surge como consecuencia de que, dado que la teoría es de norma, el propagador del fotón no está bien definido.

La lagrangiana renormalizada \mathcal{L}_{SQED} contiene los parámetros físicos m , e y λ , mientras que la lagrangiana $\mathcal{L}_{c.t.}^{SQED}$ contiene los contratérminos que absorben los corrimientos infinitos que existen entre los parámetros desnudos y los físicos. La determinación de estos contratérminos depende de ciertas *condiciones de renormalización*, las cuales definen un esquema de renormalización. Una vez determinados los contratérminos, las divergencias de la teoría deben desaparecer. La invariancia de norma requiere que $Z_e = Z_\phi$, esto es, $\delta_e = \delta_\phi$, ya que entonces la lagrangiana de contratérminos $\mathcal{L}_{c.t.}^{SQED}$ adquiere una forma similar a la lagrangiana renormalizada, es decir, es invariante de norma. Que se cumpla lo anterior implica que debe existir una relación entre las funciones vértice de los acoplamientos $\phi^\dagger \phi$ y $\phi^\dagger \phi \gamma$. A este tipo de relaciones se les conoce con el nombre de identidades de Ward.

3.3.1. Reglas de Feynman

Las reglas de Feynman que surgen de la lagrangiana renormalizada \mathcal{L}_{SQED} son:

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.3. LAGRANGIANA RENORMALIZADA

$$= -ie(p - p')_\mu,$$

donde se ha tomado la norma de Feynman-'t Hooft $\xi = 1$.

Las reglas de Feynman que surgen de la lagrangiana de contratérminos $\mathcal{L}_{c.t.}^{SQED}$ son:

$$= i(p^2 \delta_\phi - \delta_m^2)$$

$$= -i(g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) \delta_A$$

$$= -i\delta_\lambda$$

$$= 2ie^2 \left(\frac{Z_e^2}{Z_\phi} - 1 \right) g_{\mu\nu}$$

$$= -ie(p - p')_\mu \delta_e.$$

Notemos que los contratérminos aparecen como términos de interacción en la lagrangiana. Al calcular las funciones de Green de la teoría de electrodinámica escalar a orden de un lazo, las contribuciones de los contratérminos deben ser consideradas. Los contratérminos deben ser ajustados de acuerdo con las condiciones de renormalización de tal forma que las divergencias ultravioletas que aparecen en los cálculos a orden de un lazo sean canceladas.

3.4. Autoenergía del campo escalar

Definamos los diagramas irreducibles *1PI* (one particle irreducible por sus siglas en inglés) como aquellos que no pueden ser separados en dos al remover una línea interna. Las Figuras 3.1 (a) y 3.1 (b) ilustran los casos de un diagrama irreducible y reducible, respectivamente.

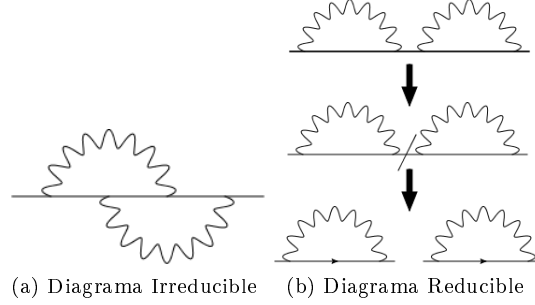


Figura 3.1: Tipos de diagramas

Denotemos por $-i\Gamma_2$ la suma de todos los diagramas *1PI* más las contribuciones del contratérmino:

$$-i\Gamma_2 = \text{diagrama con patas} \rightarrow \text{diagrama con patas} \left(\begin{array}{c} \text{1PI} \\ + \\ \text{c.t.} \end{array} \right) \rightarrow \text{diagrama con patas} = \text{diagrama con patas} + \text{diagrama con patas} + \dots + \text{diagrama con patas} \otimes \text{diagrama con patas} + \dots,$$

la cual corresponde a la función de Green amputada de dos puntos del campo escalar. En la figura, se han incluido las patas externas por claridad. El propagador del campo escalar completo se obtiene incluyendo las patas externas, así como propagaciones virtuales internas que pegan entre sí a dos funciones vértice de dos puntos. Esto es [9],

$$\begin{aligned}
 \text{diagrama con patas} &= \text{diagrama con patas} + \text{diagrama con patas} \left(\begin{array}{c} \text{1PI} \\ + \\ \text{c.t.} \end{array} \right) \text{diagrama con patas} + \text{diagrama con patas} \left(\begin{array}{c} \text{1PI} \\ + \\ \text{c.t.} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{1PI} \\ + \\ \text{c.t.} \end{array} \right) \text{diagrama con patas} + \dots \\
 &= \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{p^2 - m^2} (-i\Gamma_2(p^2)) \frac{i}{p^2 - m^2} + \dots \\
 &= \frac{i}{p^2 - m^2} \left[1 + \frac{\Gamma_2(p^2)}{p^2 - m^2} + \left(\frac{\Gamma_2(p^2)}{p^2 - m^2} \right)^2 + \dots \right] \\
 &= \frac{i}{p^2 - m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_2(p^2)^n}{(p^2 - m^2)^n} \\
 &= \frac{i}{p^2 - m^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Gamma_2(p^2)}{p^2 - m^2} \right)} \\
 &= \frac{i}{p^2 - m^2 - \Gamma_2(p^2)}, \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

con m la masa renormalizada. Así la función vértice de dos puntos renormalizada es denotada por $-i\Gamma_2(p)$, donde $\Gamma_2(p)$ es dada, orden por orden, en la serie perturbativa. Se procederá a calcularla a orden de un lazo.

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.4. AUTOENERGÍA DEL CAMPO ESCALAR

La función vértice renormalizada tiene la forma:

$$-i\Gamma_2(p^2) = -i\Gamma_2^{1-l}(p^2) - i\Gamma_2^{c.t.}(p^2), \quad (3.22)$$

con

$$\Gamma_2^{c.t.}(p^2) = -(p^2\delta_\phi - \delta_m^2) \quad (3.23)$$

la contribución del contratérmino, y

la contribución a orden de un lazo calculada con la lagrangiana renormalizada. En los diagramas se han incluido las patas externas por claridad. Usando regularización dimensional (Apéndice A), se tiene para el primer diagrama:

$$\begin{aligned} -i\Gamma_2^{(1)} &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} (-i\lambda) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{k^2 - m^2} \\ &= \frac{i\lambda}{(4\pi)^2} \left[-m^2 \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde μ es la escala con unidades de masa que acompaña al esquema de regularización dimensional. Se introduce para corregir las unidades de las constantes de acoplamiento. Considerando $\epsilon = 4-D$ obtenemos:

$$-i\Gamma_2^{(1)} = -\frac{i\lambda}{(4\pi)^2} m^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (3.25)$$

Por otra parte, el segundo diagrama tiene la forma:

$$\begin{aligned} -i\Gamma_2^{(2)} &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [-ie(k+2p)_\alpha] \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 - m_\gamma^2} [-ie(k+2p)_\beta] \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \\ &= -e^2 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+2p)^2}{[k^2 - m_\gamma^2][(k+p)^2 - m^2]}, \end{aligned}$$

donde se ha introducido una masa ficticia m_γ para el fotón con el fin de regular las divergencias infrarrojas. Introduciendo una parametrización de Feynman (Apéndice A), tenemos:

$$-i\Gamma_2^{(2)} = -\frac{ie^2}{(4\pi)^2} \Gamma(2) \int_0^1 dx \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \int d^D k \frac{(k+2p)^2}{[(k+l)^2 - \Delta_2^2]}, \quad (3.26)$$

donde $l = (1-x)p$ y $\Delta_2^2 = m^2(1-x) - p^2x(1-x) + m_\gamma^2x$. Haciendo el cambio de variable $k \rightarrow k-l$ y desechando integrales de rango impar, ya que son cero por simetría, obtenemos:

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.4. AUTOENERGÍA DEL CAMPO ESCALAR

$$\begin{aligned}
 -i\Gamma_2^{(2)} &= -\frac{ie^2}{(4\pi)^2}\Gamma(2)\int_0^1 dx \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}}\int d^D k \frac{k^2 + (1+x)^2 p^2}{(k^2 - \Delta_2^2)^2} \\
 &= -\frac{ie^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx \left[-\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right)\Delta_2^2\Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) + (1+x)^2 p^2\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \right] \left(\frac{\Delta_2^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Para el tercer diagrama se tiene:

$$\begin{aligned}
 -i\Gamma_2^{(3)} &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}(2ie^2 g_{\alpha\beta})\frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 - m_\gamma^2} \\
 &= -\frac{2ie^2(4-\epsilon)}{(4\pi)^2}m_\gamma^2\Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{m_\gamma^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Si tomamos el límite cuando $m_\gamma \rightarrow 0$, vemos que

$$-i\Gamma_2^{(3)} = 0. \quad (3.29)$$

Por lo tanto, el último diagrama no contribuye a la función vértice.

La función vértice de dos puntos renormalizada $\Gamma_2(p^2)$ toma la forma:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_2(p^2) &= \frac{\lambda}{(4\pi)^2}m^2\Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} + \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx \left[-\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right)\Delta_2^2\Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + (1+x)^2 p^2\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \right] \left(\frac{\Delta_2^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - (p^2\delta_\phi - \delta_m^2), \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

donde $\alpha = \frac{\epsilon^2}{4\pi}$ es la *constante de estructura fina*.

Las condiciones de renormalización en el esquema on-shell o físico que definen la masa física están dadas por:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_2(p^2 = m^2) &= 0, \\
 \left. \frac{d\Gamma_2}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} &= 0. \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Notemos que en la expresión (3.21) el polo se ha recorrido. Ya que se define la masa como el polo del propagador, esto es, en $p^2 = m^2$, buscamos que la autoenergía evaluada en $p^2 = m^2$ sea cero y así preservar la masa física. La segunda condición es consecuencia de preservar el residuo i del polo. Con estas condiciones se determinan los contratérminos δ_ϕ y δ_m^2 . De la segunda condición de renormalización se obtiene:

$$\delta_\phi = \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx \left\{ -x(1-x)\left(2 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2}(1+x)^2\frac{m^2}{\Delta_2^2}\right) + (1+x)^2 \right\} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{\overline{\Delta_2^2}}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}, \quad (3.32)$$

donde $\overline{\Delta_2^2} = (1-x)^2 m^2 + x m_\gamma^2$. Por otra parte, de la primera condición de renormalización se tiene:

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.5. AUTOENERGÍA DEL FOTÓN

El tensor $\Pi^{\mu\nu}$, el cual recibe el nombre de tensor de polarización del vacío, debe estar dado por una combinación lineal de los tensores $g^{\mu\nu}$ y $p^\mu p^\nu$. Invariancia de norma requiere que $\Pi^{\mu\nu}$ satisfaga la identidad de Ward:

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0 = q_\nu \Pi^{\mu\nu}. \quad (3.40)$$

Esta identidad surge de la siguiente consideración. A nivel del lagrangiano podemos ver que, por invariancia de norma, la interacción entre dos fotones debe estar dada por un término de la forma

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2A_\mu (-g^{\mu\nu} \square + \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu,$$

hasta un término de superficie. El término entre paréntesis es transformado en el espacio de momentos como:

$$-g^{\mu\nu} \square + \partial^\mu \partial^\nu \longrightarrow q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu,$$

por lo que el tensor de polarización del vacío debe ser, por invariancia de norma, de la forma:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2), \quad (3.41)$$

siendo $\Pi(q^2)$ la función de polarización del vacío. La expresión (3.41) cumple la identidad de Ward.

Como en el caso del propagador del campo escalar, el propagador completo del fotón se puede construir como sigue [9]:

$$\begin{aligned} \text{Diagrama} &= \text{Diagrama} + \text{Diagrama} \text{1PI} + \text{Diagrama} \text{1PI} \text{1PI} + \dots \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} [i\Pi^{\rho\sigma}] \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} + \dots \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} [i(q^2 g^{\rho\sigma} - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2)] \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} + \dots \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \Delta^\rho{}_\nu \Pi(q^2) + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \Delta^\rho{}_\sigma \Delta^\sigma{}_\nu \Pi^2(q^2) + \dots \end{aligned}$$

donde $\Delta^\rho{}_\nu = \delta^\rho{}_\nu - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2}$. Ahora, notando que

$$\begin{aligned} \Delta^\rho{}_\sigma \Delta^\sigma{}_\nu &= \left(\delta^\rho{}_\sigma - \frac{q^\rho q_\sigma}{q^2} \right) \left(\delta^\sigma{}_\nu - \frac{q^\sigma q_\nu}{q^2} \right) \\ &= \delta^\rho{}_\nu - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} + \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} = \Delta^\rho{}_\nu, \end{aligned}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \left(\delta^\rho{}_\nu - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) [\Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots] \\ &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \left(\delta^\rho{}_\nu - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) [1 + \Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \dots] + \frac{ig_{\mu\rho}}{q^2} \left(\delta^\rho{}_\nu - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) \\ &= \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \left(\delta^\rho{}_\nu - \frac{q^\rho q_\nu}{q^2} \right) \frac{1}{1 - \Pi(q^2)} + \frac{-i}{q^2} \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \\ &= \frac{-i}{q^2 [1 - \Pi(q^2)]} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{-i}{q^2} \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.5. AUTOENERGÍA DEL FOTÓN

Los términos $q_\mu q_\nu$ pueden ser desechados debido a que al calcular elementos de matriz S en un proceso dado, el fotón se acopla a una línea de campo escalar, esto es, el propagador siempre se acopla a corrientes conservadas. Así, como consecuencia de la identidad de Ward, podemos ignorar dichos términos. Entonces, para propósitos de calcular elementos de matriz S , podemos trabajar con

$$\text{Diagrama: } \text{---} \bullet \text{---} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2[1 - \Pi(q^2)]}. \quad (3.43)$$

Dado que $\Pi(q^2)$ es regular en $q^2 = 0$, el propagador completo del fotón siempre tiene un polo en $q^2 = 0$. Esto quiere decir que el fotón permanece sin masa a todo orden de la serie perturbativa. Si el propagador está renormalizado, $\Pi(q^2)$ contiene la contribución del contratérmino.

Se procederá a calcular el tensor de polarización renormalizado a orden de un lazo, el cual está dado por:

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = i\Pi_{1-l}^{\mu\nu}(q) + i\Pi_{c.t.}^{\mu\nu}(q), \quad (3.44)$$

con

$$i\Pi_{c.t.}^{\mu\nu}(q) = -i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\delta_A \quad (3.45)$$

la contribución del contratérmino. Los diagramas correspondientes a la contribución a orden de un lazo son:

$$i\Pi_{1-l}^{\mu\nu}(q) = \text{Diagrama 1} + \text{Diagrama 2}.$$

Para el primer diagrama se tiene:

$$\begin{aligned} \Pi_{(1)}^{\mu\nu}(q) &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [-ie(2k+q)^\mu] [-ie(2k+q)^\nu] \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+q)^2 - m^2} \\ &= e^2 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k+q)^\mu (2k+q)^\nu}{[k^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Por otro lado, el segundo diagrama toma la forma:

$$\begin{aligned} \Pi_{(2)}^{\mu\nu}(q) &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (2ie^2 g^{\mu\nu}) \frac{i}{k^2 - m^2} \\ &= -e^2 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{2g^{\mu\nu}[(k+q)^2 - m^2]}{[k^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

La suma de las contribuciones de los diagramas es:

$$i\Pi_{1-l}^{\mu\nu}(q) = e^2 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k+q)^\mu (2k+q)^\nu - 2g^{\mu\nu}[(k+q)^2 - m^2]}{[k^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2]} \quad (3.48)$$

$$= \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \Gamma(2) \int_0^1 dx \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \int d^D k \frac{(2k+q)^\mu (2k+q)^\nu - 2g^{\mu\nu}[(k+q)^2 - m^2]}{[(k+l)^2 - \Delta_P^2]^2}, \quad (3.49)$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.5. AUTOENERGÍA DEL FOTÓN

donde se ha realizado parametrización de Feynman, siendo $l = xq$ y $\Delta_P^2 = m^2 - x(1-x)q^2$. Haciendo el cambio de variable $k \rightarrow k - l$ y desechando integrales tensoriales de rango impar, se tiene:

$$\begin{aligned} i\Pi_{1-l}^{\mu\nu}(q) &= \frac{i\alpha}{4\pi}\Gamma(2)\int_0^1 dx \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}}\int d^D k \frac{4k^\mu k^\nu + (1-2x)^2 q^\mu q^\nu - 2g^{\mu\nu}[k^2 + q^2(1-x)^2 - m^2]}{(k^2 - \Delta_P^2)^2} \\ &= \frac{i\alpha}{4\pi}\Gamma(2)\int_0^1 dx \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}}\int d^D k \frac{[\frac{4}{D}(1-\frac{D}{2})k^2 - 2((1-x)^2 q^2 - m^2)]g^{\mu\nu} + (1-2x)^2 q^\mu q^\nu}{(k^2 - \Delta_P^2)^2}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde se ha usado la relación $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{k^2 g^{\mu\nu}}{D}$ (Apéndice A). Resolviendo las integrales y reordenando términos, se tiene:

$$i\Pi_{1-l}^{\mu\nu}(q) = \frac{i\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx \{-2(1-x)(1-2x)q^2 g^{\mu\nu} + (1-2x)^2 q^\mu q^\nu\} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\Delta_P^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})}. \quad (3.51)$$

Se puede ver que al resolver la integral del parámetro x , es equivalente cambiar las expresiones $-2(1-x)(1-2x) \rightarrow -(1-2x)^2$. Así,

$$\begin{aligned} i\Pi_{1-l}^{\mu\nu}(q) &= -\frac{i\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx (1-2x)^2 \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\Delta_P^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})} (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \\ &= i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi_{1-l}(q^2), \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde

$$\Pi_{1-l}(q^2) = -\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx (1-2x)^2 \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\Delta_P^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (3.53)$$

Este resultado surge como consecuencia de la invariancia de norma (ver expresión (3.41)).

La función de polarización renormalizada es:

$$\Pi(q^2) = -\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx (1-2x)^2 \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\Delta_P^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \delta_A. \quad (3.54)$$

Notemos que en el propagador del fotón el polo de la función está en $q^2 = 0$, lo que nos dice que el fotón no tiene masa. Para preservar la masa nula del fotón en la expresión (3.43), debemos asegurarnos de que no haya ningún otro polo debido a $\Pi(q^2)$, por lo que usaremos la condición de renormalización:

$$\Pi(q^2 = 0) = 0, \quad (3.55)$$

de donde resulta que

$$\delta_A = -\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx (1-2x)^2 \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (3.56)$$

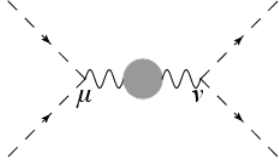
Sustituyendo δ_A y usando los desarrollos dados por las ecuaciones (3.35) y (3.37), la función de polarización renormalizada es:

$$\Pi(q^2) = -\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx (1-2x)^2 \log\left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2}\right), \quad (3.57)$$

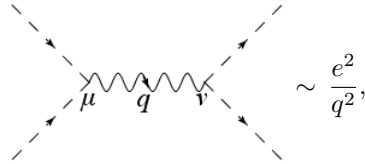
que en efecto no tiene divergencias ultravioletas, además de que se cumple la condición de renormalización establecida.

3.5.1. Polarización del vacío

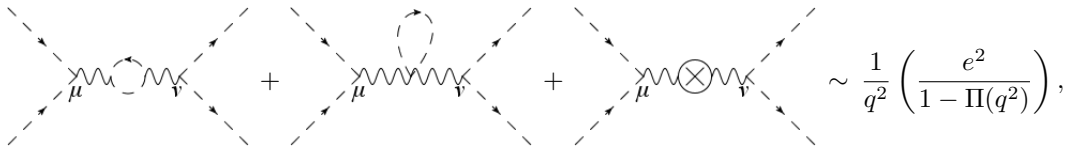
En esta sección se estudia el fenómeno de la polarización del vacío y la corrección al potencial de Coulomb como consecuencia de considerar las contribuciones de los diagramas a orden de un lazo en el propagador del fotón. Consideremos el proceso de dispersión $\phi\phi^\dagger \rightarrow \phi\phi^\dagger$:



La amplitud de probabilidad a nivel de árbol es proporcional a



mientras que la amplitud a orden de un lazo es proporcional a



donde $\Pi(q^2)$ es la función de polarización renormalizada dada por la ecuación (3.57). Es posible definir una carga eléctrica efectiva e_{ef} dependiente del momento transferido q , la cual se puede escribir como:

$$e_{ef}^2 = \frac{e^2}{1 - \Pi(q^2)}. \quad (3.58)$$

Las cargas están rodeadas de una nube virtual de fotones, los cuales desaparecen y resurgen por medio de la creación de pares de partícula-antipartícula (Figura 3.2). De manera análoga a un dieléctrico que es polarizado por la presencia de una carga, podemos interpretar que el vacío es polarizado, lo cual produce el apantallamiento de la carga. De esta forma, el valor de la carga cambia según la distancia en la que las nubes virtuales de la partícula objetivo y la partícula proyectil se acerquen entre sí, esto es, el valor de la carga aumenta conforme el momento transferido sea muy grande (distancias cortas), mientras que disminuye a largas distancias.

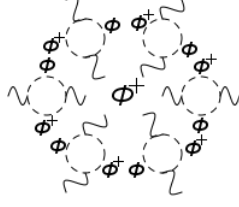


Figura 3.2: Polarización del vacío

De manera análoga es posible construir la constante de estructura fina efectiva, la cual se escribe como:

$$\alpha_{eff} = \frac{\alpha}{1 - \Pi(q^2)}, \quad (3.59)$$

cuyos valores medidos experimentalmente son:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{137,035999084(21)} & \text{a } q^2 = 0, \\ \alpha &\approx \frac{1}{128} & \text{a } q^2 = m_W^2, \end{aligned}$$

donde m_W es la masa del bosón W^\pm [25], lo cual nos muestra que la constante de estructura en efecto depende del momento transferido.

Ahora analicemos lo que sucede con el potencial de Coulomb. El propagador completo del fotón con las contribuciones a orden de un lazo es dado por

$$D_{\mu\nu}(q^2) = \frac{-ie^2 g_{\mu\nu}}{q^2 [1 - \Pi(q^2)]} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(\frac{e^2}{1 - \Pi(q^2)} \right). \quad (3.60)$$

En el límite no relativista se puede tomar $p = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \approx (m, \mathbf{p})$ y $p' = (E_{\mathbf{p}'}, \mathbf{p}') \approx (m, \mathbf{p}')$, de forma que $q^2 \approx -|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2 = -\mathbf{q}^2$. El propagador del fotón en el límite no relativista $q^2 \approx -\mathbf{q}^2$, a primer orden es:

$$D_{\mu\nu}(-\mathbf{q}^2) \approx \frac{ig_{\mu\nu} e^2}{\mathbf{q}^2} [1 + \Pi(-\mathbf{q}^2)],$$

donde la función de polarización renormalizada (3.57) cuando $\mathbf{q}^2 \ll m^2$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \Pi(-\mathbf{q}^2) &\approx \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx x(1-x)(1-2x)^2 \frac{\mathbf{q}^2}{m^2} \\ &= \frac{\alpha}{120\pi} \frac{\mathbf{q}^2}{m^2}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Por lo tanto, en el límite no relativista, el propagador completo del fotón al considerar las contribuciones a orden de un lazo es dado por:

$$D_{\mu\nu}(-\mathbf{q}^2) \approx \frac{ig_{\mu\nu} e^2}{\mathbf{q}^2} \left[1 + \frac{\alpha}{120\pi} \frac{\mathbf{q}^2}{m^2} \right]. \quad (3.62)$$

La aproximación de Born [9] relaciona amplitudes de dispersión con el potencial mediante la siguiente expresión:

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = iD_{00}(-\mathbf{q}^2) = \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}), \quad (3.63)$$

por lo que aplicando la transformada inversa de Fourier en (3.63), sustituyendo la ecuación (3.62) y resolviendo la integral en el espacio de los momentos, el potencial de Coulomb es de la forma

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} iD_{00}(-\mathbf{q}^2) \\ &= -e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\frac{e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{q}^2} + \frac{\alpha}{120\pi m^2} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \right] \\ &= -e^2 \left[\frac{1}{4\pi r} + \frac{\alpha}{120\pi m^2} \delta(\mathbf{x}) \right] \\ &= - \left[\frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{30\pi m^2} \delta(\mathbf{x}) \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Como consecuencia de considerar las contribuciones de los diagramas a orden de un lazo en el propagador del fotón, existe una corrección en el potencial de Coulomb $V(\mathbf{x})$. La primera parte de (3.64) corresponde al potencial de Coulomb debido a una carga puntual, mientras que la segunda parte es una corrección análoga al *término de Uehling* en electrodinámica espinorial [9, 13], lo que nos sugiere que la fuerza electromagnética es más intensa conforme nos acerquemos a la carga. Sin embargo, en electrodinámica espinorial la corrección al potencial de Coulomb es

$$V(\mathbf{x})_{QED} = - \left[\frac{\alpha}{r} + \frac{4\alpha^2}{15\pi m^2} \delta(\mathbf{x}) \right], \quad (3.65)$$

por lo que a pesar de que en ambas teorías exista un término de tipo Uehling que corrige el potencial de Coulomb, estos son diferentes.

3.6. Función Vértice

Ahora se estudia la estructura de la función vértice $\phi^\dagger\phi\gamma$ a orden de un lazo, donde se toma la corriente sobre capa de masa pero al fotón se le considera virtual.

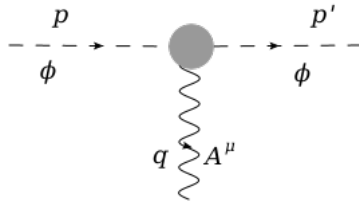


Figura 3.3: Función vértice de dos escalares un fotón

Hasta orden de un lazo, la función vértice está dada por:

$$-ie\Gamma^\mu(p, p') = -ie\Gamma_{t.l.}^\mu(p, p') - ie\Gamma_{1-l}^\mu(p, p') - ie\Gamma_{c.t.}^\mu(p, p'), \quad (3.66)$$

donde la contribución de nivel de árbol es

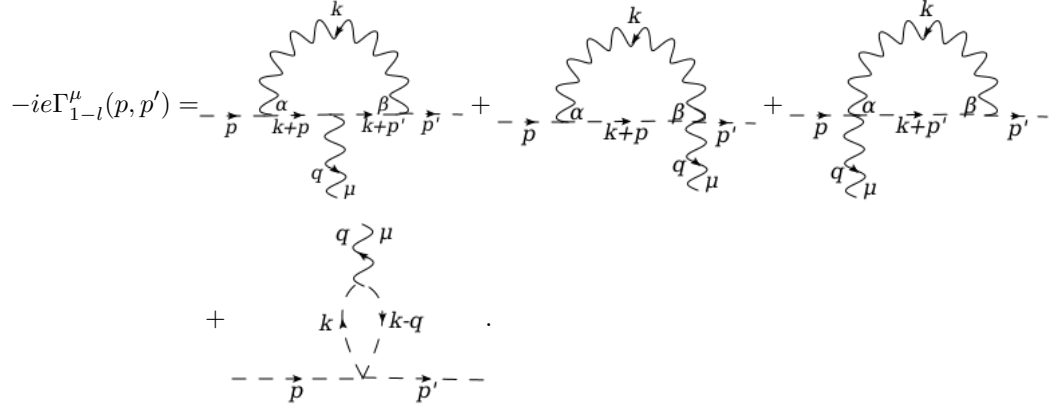
$$\Gamma_{t.l.}^\mu(p, p') = (p + p')^\mu, \quad (3.67)$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.6. FUNCIÓN VÉRTICE

mientras que la contribución del contratérmino es dada por

$$\Gamma_{c.t.}^\mu(p, p') = (p + p')^\mu \delta_e. \quad (3.68)$$

Los diagramas correspondientes a la contribución a orden de un lazo son:



Antes de calcular los diagramas debemos ver la forma que debe tener Γ^μ . Los únicos tensores disponibles son p^μ y p'^μ , por lo que esperamos tener:

$$\Gamma^\mu(p, p') = A(p + p')^\mu + B(p - p')^\mu.$$

Al contraer con $q_\mu = p_\mu - p'_\mu$ por la identidad de Ward podemos ver que el primer término del lado derecho de la igualdad es igual a cero. Sin embargo el segundo término en general no se anula, por lo que debemos tener $B = 0$. De esta forma, esperamos tener un término de la forma:

$$\Gamma^\mu(p, p') = F_1(q^2) (p + p')^\mu, \quad (3.69)$$

siendo $F_1(q^2)$ el *factor de forma*. Note que si $F_1 = 1$ obtenemos la contribución a nivel de árbol.

Se procede a calcular los diagramas que contribuyen a orden de un loop. La amplitud del cuarto diagrama es:

$$\begin{aligned} -ie\Gamma_{1-l}^{(4)\mu}(p, p') &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-i\lambda) \frac{i}{k^2 - m^2} [-ie(2k - q)^\mu] \frac{i}{(k - q)^2 - m^2} \\ &= e\lambda(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \Gamma(2) \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k - q)^\mu}{[(k - l)^2 - \Delta_{3v}^2]^2}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde $l = (1-x)q$ y $\Delta_{3v}^2 = m^2 - q^2 x(1-x)$. Haciendo el cambio de variable $k \rightarrow k+l$ y desechando integrales tensoriales de rango impar se tiene:

$$\begin{aligned} -ie\Gamma_{1-l}^{(4)\mu}(p, p') &= \frac{ie\lambda}{(4\pi)^2} \Gamma(2) \int_0^1 dx \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \int d^D k \frac{(1-2x)q^\mu}{[k^2 - \Delta_{3v}^2]^2} \\ &= \frac{ie\lambda}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx (1-2x) q^\mu \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\Delta_{3v}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Con el propósito de estudiar la estructura algebraica del integrando, considere el siguiente cambio de variable:

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO
3.6. FUNCIÓN VÉRTICE**

$$x' = 2x - 1, \quad x \rightarrow 1, \quad x' \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0, \quad x' \rightarrow -1.$$

Sustituyendo se tiene $\Delta_{3v}'^2 = m^2 - q^2x(1-x) = m^2 - \frac{q^2}{4}(1-x'^2)$, y entonces

$$-ie\Gamma_{1-l}^{(4)\mu}(p, p') = -\frac{ie\lambda}{(4\pi)^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) q^\mu \int_{-1}^1 dx' \frac{x'}{2} \left(\frac{m^2 - \frac{q^2}{4}(1-x'^2)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}}. \quad (3.72)$$

Ahora, note que el integrando es una función con la siguiente propiedad:

$$g(x') = x' \left(\frac{m^2 - \frac{q^2}{4}(1-x'^2)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}}$$

$$g(-x') = -x' \left(\frac{m^2 - \frac{q^2}{4}(1-x'^2)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} = -g(x'),$$

esto es, es una función impar, por lo que

$$-ie\Gamma_{1-l}^{(4)\mu}(p, p') = -\frac{ie\lambda}{(4\pi)^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) q^\mu \int_{-1}^1 dx' \frac{x'}{2} \left(\frac{m^2 - \frac{q^2}{4}(1-x'^2)}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} = 0. \quad (3.73)$$

Por lo tanto, el cuarto diagrama no contribuye en la función vértice a orden de un lazo. La contribución a un lazo del primer diagrama tiene la forma:

$$-ie\Gamma_{1-l}^{(1)\mu}(p, p') = (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [-ie(2p' + k)^\beta] \frac{i}{(k+p')^2 - m^2} [-ie(2k + p' + p)^\mu]$$

$$\frac{i}{(k+p)^2 - m^2} [-ie(2p+k)^\alpha] \left(\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 - m_\gamma^2} \right)$$

$$= -e^3 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k+p+p')^\mu (2k \cdot p + 2k \cdot p' + k^2 + 4m^2 - 2q^2)}{[k^2 - m_\gamma^2][(k+p)^2 - m^2][(k+p')^2 - m^2]}, \quad (3.74)$$

donde se ha agregado una masa m_γ para regular la divergencia infrarroja. Se ha usado la condición on-shell $p^2 = p'^2 = m^2$ y $2p \cdot p' = 2m^2 - q^2$, siendo $q = p - p'$. Por otra parte, la contribución del segundo diagrama es:

$$-ie\Gamma_{1-l}^{(2)\mu}(p, p') = (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [-ie(2p+k)^\alpha] \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} [2ie^2 g^{\mu\beta}] \left(\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 - m_\gamma^2} \right)$$

$$= 2e^3 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2p+k)^\mu (k^2 + 2k \cdot p)}{[k^2 - m_\gamma^2][(k+p)^2 - m^2][(k+p')^2 - m^2]}, \quad (3.75)$$

mientras que la contribución del tercer diagrama está dada por:

$$-ie\Gamma_{1-l}^{(3)\mu}(p, p') = (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [-ie(2p'+k)^\beta] \frac{i}{(k+p')^2 - m^2} [2ie^2 g^{\mu\alpha}] \left(\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 - m_\gamma^2} \right)$$

$$= 2e^3 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2p'+k)^\mu (k^2 + 2k \cdot p)}{[k^2 - m_\gamma^2][(k+p)^2 - m^2][(k+p')^2 - m^2]}. \quad (3.76)$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO
3.6. FUNCIÓN VÉRTICE**

Así, la contribución a orden de un lazo es:

$$\begin{aligned} -ie\Gamma_{1-l}^\mu(p, p') &= e^3(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{T^\mu}{[k^2 - m^2][(k+p)^2 - m^2][(k+p')^2 - m^2]} \\ &= \frac{ie^3}{(4\pi)^2} \Gamma(3) I_p \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \int d^D k \frac{T^\mu}{[(k+l)^2 - \hat{\Delta}_{3v}^2]^3}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

con $l = xp + yp'$, $\hat{\Delta}_{3v}^2 = \Delta_{3v}^2 + m^2 z$, $\Delta_{3v}^2 = -xyq^2 + m^2(1-z)^2$ y $I_p = \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1)$. El numerador tiene la forma:

$$\begin{aligned} T^\mu &= -(2k+p+p')^\mu (2k \cdot p + 2k \cdot p' + k^2 + 4m^2 - 2q^2) + 2(2p+k)^\mu (k^2 + 2k \cdot p') \\ &\quad + 2(2p'+k)^\mu (k^2 + 2k \cdot p). \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $k \rightarrow k-l$, reacomodando términos e ignorando las integrales tensoriales de rango impar, se obtiene:

$$-ie\Gamma_{1-l}^\mu(p, p') = \frac{ie^3}{(4\pi)^2} \Gamma(3) I_p \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \int d^D k \frac{N^\mu}{[k^2 - \hat{\Delta}_{3v}^2]^3}, \quad (3.78)$$

donde $N^\mu = T^\mu(k \rightarrow k-l)$:

$$N^\mu = \left[q^2[z+1-xy(2+z)] - m^2(2+3z-z^3) + k^2 \left(\frac{1}{D} \right) [D(2+z) - 2(1-z)] \right] (p+p')^\mu. \quad (3.79)$$

En N^μ se ha usado el hecho de que I_p y $\hat{\Delta}_{3v}^2$ son invariantes bajo el intercambio de x por y , por lo que las integrales paramétricas asociadas con los coeficientes de p^μ y p'^μ son idénticas. También se han usado las relaciones $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{k^2 g^{\mu\nu}}{D}$, $x+y+z=1$ y la condición de capa de masa. Resolviendo las integrales se tiene:

$$\Gamma_{1-l}^\mu(p, p') = -\frac{\alpha}{4\pi} I_p \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\hat{\Delta}_{3v}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{2} [6(1+z) - \epsilon(2+z)] - \frac{f_m + g_q}{\hat{\Delta}_{3v}^2} \right\} (p+p')^\mu, \quad (3.80)$$

con

$$f_m = -m^2(2+3z-z^3), \quad (3.81)$$

$$g_q = q^2[z+1-xy(2+z)]. \quad (3.82)$$

Así, de las ecuaciones (3.67), (3.68) y (3.80), vemos que la función vértice hasta orden de un lazo está dada por:

$$\Gamma^\mu(p, p') = [1 + f(q^2) + \delta_\epsilon](p+p')^\mu, \quad (3.83)$$

donde

$$f(q^2) = -\frac{\alpha}{4\pi} I_p \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\hat{\Delta}_{3v}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{2}[6(1+z) - \epsilon(2+z)] - \frac{f_m + g_q}{\hat{\Delta}_{3v}^2} \right\}. \quad (3.84)$$

Comparando con (3.69), el factor de forma es:

$$F_1(q^2) = 1 + f(q^2) + \delta_e. \quad (3.85)$$

$F_1(q^2 = 0) = 1$ implica que e es la carga eléctrica a muy bajas energías, es decir, es la carga medida por la ley de Coulomb a grandes distancias. Para que esto se cumpla, la condición de renormalización debe ser:

$$\Gamma^\mu(q=0) = 2p^\mu, \quad p^\mu = p'^\mu. \quad (3.86)$$

Aplicando la condición de renormalización y despejando δ_e , tenemos:

$$\delta_e = \frac{\alpha}{4\pi} I_p \left\{ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\bar{\Delta}_{3v}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{2}[6(1+z) - \epsilon(2+z)] + \frac{m^2(2+3z-z^3)}{\bar{\Delta}_{3v}^2} \right\}, \quad (3.87)$$

donde $\bar{\Delta}_{3v}^2 = m^2(1-z)^2 + m_\gamma z$. Sustituyendo δ_e y reacomodando términos, se tiene:

$$\Gamma^\mu(p, p') = \left\{ 1 - \frac{\alpha}{4\pi} I_p \left[\frac{1}{2}[6(1+z) - \epsilon(2+z)] \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[\left(\frac{\hat{\Delta}_{3v}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\bar{\Delta}_{3v}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] - f_m \left(\frac{1}{\hat{\Delta}_{3v}^2} - \frac{1}{\bar{\Delta}_{3v}^2} \right) - \frac{g_q}{\bar{\Delta}_{3v}^2} \right] \right\} (p + p')^\mu. \quad (3.88)$$

Usando los desarrollos dados por las ecuaciones (3.35) y (3.37), finalmente se obtiene:

$$\Gamma^\mu(p, p') = [1 + \bar{f}(q^2)](p + p')^\mu, \quad (3.89)$$

con

$$\bar{f}(q^2) = -\frac{\alpha}{4\pi} I_p \left\{ 3(1+z) \log \left(\frac{\bar{\Delta}_{3v}^2}{\hat{\Delta}_{3v}^2} \right) - \frac{1}{\hat{\Delta}_{3v}^2 \bar{\Delta}_{3v}^2} [f_m xy + (z+1-xy(2+z)) \bar{\Delta}_{3v}^2] q^2 \right\}. \quad (3.90)$$

Esta es la función vértice renormalizada que resulta de usar el esquema on-shell o esquema de renormalización físico.

3.6.1. Comparación entre Z_ϕ y Z_e

Recordemos la estructura de la lagrangiana de contratérminos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{c.t}^{SQED} = & \delta_\phi (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + ie \delta_e A_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^\dagger) + e^2 \left(\frac{Z_e^2}{Z_\phi} - 1 \right) A_\mu A^\mu (\phi^\dagger \phi) \\ & - \delta_m^2 (\phi^\dagger \phi) - \frac{\delta_\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{\delta_A}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.6. FUNCIÓN VÉRTICE

la cual se busca que sea invariante de norma. Esto se cumple si $\delta_\phi = \delta_e$, esto es, $Z_e = Z_\phi$, de tal forma que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{c.t}^{SQED} &= \delta_\phi (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + ie \delta_\phi A_\mu (\phi^\dagger \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^\dagger) + \delta_\phi e^2 A_\mu A^\mu (\phi^\dagger \phi) \\ &\quad - \delta_m^2 (\phi^\dagger \phi) - \frac{\delta_\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{\delta_A}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \delta_\phi (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \delta_m^2 (\phi^\dagger \phi) - \frac{\delta_\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{\delta_A}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\end{aligned}\tag{3.91}$$

es invariante de norma, y en consecuencia se cumple identidad de Ward. Si este es el caso, la relación entre la carga desnuda y la carga renormalizada toma la forma $e_B = Z_A^{-1/2} e$, lo que nos dice que la renormalización de la carga eléctrica depende de la renormalización del campo de norma y no de la partícula que la porte, reflejando así su carácter universal.

Estudiemos la función de tres puntos mediante la identidad de Ward-Takahashi (Apéndice B) [9]. Considere la relación diagramática mostrada en la figura:

$$q_\mu \cdot \left(\begin{array}{c} \text{---} p' \text{---} \\ | \\ \text{---} q \text{---} \\ | \\ \text{---} p \text{---} \end{array} \right) = e \left(\begin{array}{c} \text{---} p \text{---} \\ | \\ \text{---} p \text{---} \\ | \\ \text{---} p' \text{---} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{---} p' \text{---} \\ | \\ \text{---} p' \text{---} \\ | \\ \text{---} p \text{---} \end{array} \right).$$

En términos de amplitudes, esto se puede escribir como:

$$\begin{aligned}& \frac{i}{p^2 - m^2 - \Gamma(p)} [-ieq_\mu \Gamma^\mu(p, p')] \frac{i}{p'^2 - m^2 - \Gamma(p')} \\ &= e \left(\frac{i}{p^2 - m^2 - \Gamma(p)} - \frac{i}{p'^2 - m^2 - \Gamma(p')} \right),\end{aligned}$$

donde se han incluido las patas externas de los diagramas. En términos de funciones vértice, esta expresión se puede escribir como:

$$q_\mu \Gamma^\mu(p, p') = [p'^2 - m^2] - [p^2 - m^2]\tag{3.92}$$

donde los términos entre corchetes son las funciones vértice de dos puntos con momento p' y p respectivamente. A bajas energías $q \rightarrow 0$ se tiene:

$$q_\mu \Gamma^\mu = 0,\tag{3.93}$$

verificándose la identidad de Ward on-shell, es decir, cuando $p^2 = m^2 = p'^2$.

Ahora veamos que se cumple identidad de Ward a orden de un lazo. Recordemos la forma de δ_ϕ :

$$\delta_\phi = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left\{ -x(1-x) \left(2 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} (1+x)^2 \frac{m^2}{\Delta_2} \right) + (1+x)^2 \right\} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\Delta_2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}},$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO
3.6. FUNCIÓN VÉRTICE**

donde $\bar{\Delta}_2^2 = (1-x)^2 m^2 + x m_\gamma^2$. Note que $\bar{\Delta}_2^2 = \bar{\Delta}_{3v}^2|_{z=x} = \Delta$. Desarrollando δ_ϕ en torno a los polos, se tiene:

$$\delta_\phi = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left\{ \left[\frac{2}{\epsilon} - \log \left(\frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) - \gamma_E \right] (1+3x^2) + x(1-x) \left[1 + (1+x)^2 \frac{m^2}{\Delta} \right] \right\}. \quad (3.94)$$

Por otro lado, notando que $I_p = \int_0^1 dz(1-z)$, renombrando $z \rightarrow x$ y sustituyendo los desarrollos correspondientes en torno a los polos, δ_e toma la forma:

$$\delta_e = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx(1-x) \left\{ \left[\frac{6}{\epsilon} - 3 \log \left(\frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) - 3\gamma_E \right] (1+x) - (x+2) + \frac{m^2(2+3x-x^3)}{\Delta} \right\}. \quad (3.95)$$

Para que se cumpla la identidad de Ward a orden de un lazo buscamos que se cumpla:

$$\delta_e = \delta_\phi. \quad (3.96)$$

Si resolvemos la integral de los coeficientes que acompañan a los términos $\frac{2}{\epsilon}$ y γ_E de los contratérminos δ_e y δ_ϕ , se ve que se cumple:

$$\left(\frac{6}{\epsilon} - 3\gamma_E \right) \int_0^1 dx(1-x^2) = \frac{4}{\epsilon} - 2\gamma_E = \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E \right) \int_0^1 dx(1+3x^2),$$

por lo que debemos comparar el resto de las expresiones de δ_e y δ_ϕ , esto es, se deben comparar

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx(1-x) \left\{ -(x+2) - 3 \log \left(\frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) (1+x) + \frac{m^2(2+3x-x^3)}{\Delta} \right\} \\ &= \int_0^1 dx \left\{ x(1-x) - \log \left(\frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) (1+3x^2) + \frac{m^2 x(1-x)(1+x)^2}{\Delta} \right\}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

o equivalentemente, se debe satisfacer

$$2 \int_0^1 dx \log \left(\frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) (3x^2 - 1) = \int_0^1 \frac{4x(1-x)(x^2-1)m^2 + 2x(1-x^2)m_\gamma^2}{\Delta}. \quad (3.98)$$

Consideremos la integral:

$$2 \int_0^1 dx \log \left(\frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) (3x^2 - 1).$$

Integrando por partes se tiene:

$$\begin{aligned} u &= \log \left(\frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right), & du &= \frac{-2m^2(1-x) + m_\gamma^2}{\Delta} dx, \\ dv &= 3x^2 - 1, & v &= x(x^2 - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 dx \log \left(\frac{\Delta}{4\pi\mu^2} \right) (3x^2 - 1) &= 2 \int_0^1 dx x(1-x^2) \frac{-2m^2(1-x) + m_\gamma^2}{\Delta} \\ &= \int_0^1 dx \frac{4x(1-x)(x^2-1)m^2 + 2x(1-x^2)m_\gamma^2}{\Delta}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

que en efecto satisface (3.98). Por lo tanto $\delta_e = \delta_\phi$, esto es, $Z_e = Z_\phi$, cumpliéndose la identidad de Ward. Se puede demostrar que la identidad de Ward se cumple a todo orden de la serie perturbativa.

3.7. Función Vértice de 4 escalares

Calculemos la amplitud de la función vértice de cuatro puntos mostrada en la Figura 3.4. Nuestra notación y convenciones se muestran en esta figura.

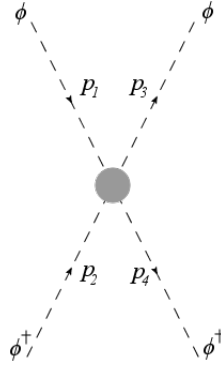


Figura 3.4: Función vértice de 4 escalares

Hasta orden de un lazo, la función vértice recibe las siguientes contribuciones:

$$-i\lambda\Gamma(s, t, u) = -i\lambda\Gamma_{t.l.}(s, t, u) - i\lambda\Gamma_{1-l}(s, t, u) - i\lambda\Gamma_{c.t.}(s, t, u), \quad (3.100)$$

con

$$\Gamma_{t.l.}(s, t, u) = 1 \quad (3.101)$$

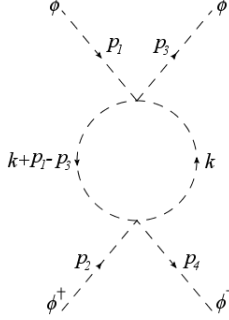
la contribución de nivel de árbol, y

$$\Gamma_{c.t.}(s, t, u) = \frac{\delta\lambda}{\lambda} \quad (3.102)$$

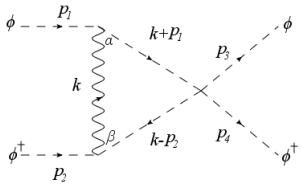
la contribución del contratérmino al vértice. Los diagramas que contribuyen a orden de un lazo son:

$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-i\lambda) \frac{i}{(k+p_1+p_2)^2 - m^2} (-i\lambda) \frac{i}{k^2 - m^2} \\
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \lambda^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k+p_1+p_2)^2 - m^2][k^2 - m^2]}. \quad (3.103)
 \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.7. FUNCIÓN VÉRTICE DE 4 ESCALARES



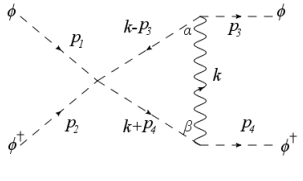
$$= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \lambda^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k+p_1-p_3)^2-m^2][k^2-m^2]}. \quad (3.104)$$



$$= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-i\lambda) \frac{i}{(k+p_1)^2-m^2} [-ie(k+2p_1)_\alpha] \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2}$$

$$\frac{i}{(k-p_2)^2-m^2} [-ie(k-2p_2)_\beta]$$

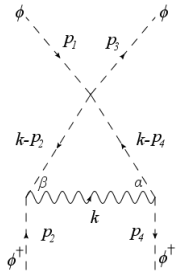
$$= -(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \lambda e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k-2p_2)^\alpha (k+2p_1)_\alpha}{[(k+p_1)^2-m^2][(k-p_2)^2-m^2]k^2}. \quad (3.105)$$



$$= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-i\lambda) \frac{i}{(k-p_3)^2-m^2} [-ie(k-2p_3)_\alpha] \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2}$$

$$\frac{i}{(k+p_4)^2-m^2} [-ie(k+2p_4)_\beta]$$

$$= -(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \lambda e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+2p_4)^\alpha (k-2p_3)_\alpha}{[(k-p_3)^2-m^2][(k+p_4)^2-m^2]k^2}. \quad (3.106)$$

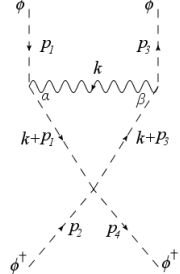


$$= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-i\lambda) \frac{i}{(k-p_4)^2-m^2} [-ie(k-2p_4)_\alpha] \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2}$$

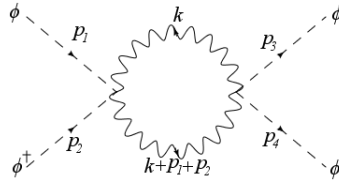
$$\frac{i}{(k-p_2)^2-m^2} [-ie(k-2p_2)_\beta]$$

$$= -(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \lambda e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k-2p_2)^\alpha (k-2p_4)_\alpha}{[(k-p_2)^2-m^2][(k-p_4)^2-m^2]k^2}. \quad (3.107)$$

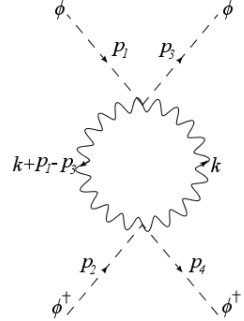
**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.7. FUNCIÓN VÉRTICE DE 4 ESCALARES



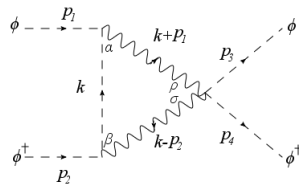
$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (-i\lambda) \frac{i}{(k+p_1)^2 - m^2} [-ie(k+2p_1)_\alpha] \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2} \\
 &\quad \frac{i}{(k+p_3)^2 - m^2} [-ie(k+2p_3)_\beta] \\
 &= -(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \lambda e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+2p_3)^\alpha (k+2p_1)_\alpha}{[(k+p_1)^2 - m^2][(k+p_3)^2 - m^2]k^2}. \quad (3.108)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (2ie^2 g_{\alpha\beta}) \frac{-ig^{\beta\sigma}}{(k+p_1+p_2)^2} (2ie^2 g_{\rho\sigma}) \frac{-ig^{\alpha\rho}}{k^2} \\
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} 2e^4 D \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k+p_1+p_2)^2 k^2}. \quad (3.109)
 \end{aligned}$$

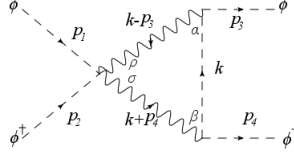


$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} 2e^4 D \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k+p_1-p_3)^2 k^2}. \quad (3.110)
 \end{aligned}$$

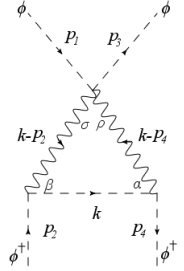


$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (2ie^2 g_{\rho\sigma}) \frac{-ig^{\alpha\rho}}{(k+p_1)^2} [-ie(k-p_1)_\alpha] \frac{i}{k^2 - m^2} \\
 &\quad \frac{-ig^{\beta\sigma}}{(k-p_2)^2} [-ie(k+p_2)_\beta] \\
 &= -(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} 2e^4 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+p_2)^\sigma (k-p_1)_\sigma}{(k+p_1)^2 (k-p_2)^2 [k^2 - m^2]}. \quad (3.111)
 \end{aligned}$$

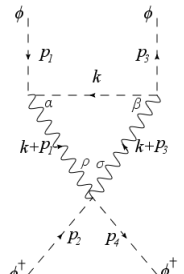
**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.7. FUNCIÓN VÉRTICE DE 4 ESCALARES



$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (2ie^2 g_{\rho\sigma}) \frac{-ig^{\alpha\rho}}{(k-p_3)^2} [-ie(k+p_3)_\alpha] \frac{i}{k^2-m^2} \\
 &\quad \frac{-ig^{\beta\sigma}}{(k+p_4)^2} [-ie(k-p_4)_\beta] \\
 &= -(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} 2e^4 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k-p_4)^\sigma (k+p_3)_\sigma}{(k+p_4)^2 (k-p_3)^2 [k^2-m^2]}. \quad (3.112)
 \end{aligned}$$

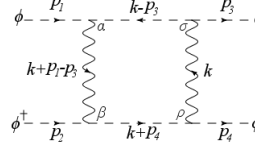


$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (2ie^2 g_{\rho\sigma}) \frac{-ig^{\alpha\rho}}{(k-p_4)^2} [-ie(k+p_4)_\alpha] \frac{i}{k^2-m^2} \\
 &\quad \frac{-ig^{\beta\sigma}}{(k-p_2)^2} [-ie(k+p_2)_\beta] \\
 &= -(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} 2e^4 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+p_2)^\sigma (k+p_4)_\sigma}{(k-p_4)^2 (k-p_2)^2 [k^2-m^2]}. \quad (3.113)
 \end{aligned}$$

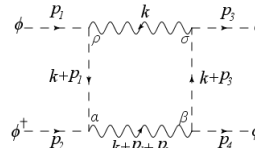


$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (2ie^2 g_{\rho\sigma}) \frac{-ig^{\alpha\rho}}{(k+p_1)^2} [-ie(k-p_1)_\alpha] \frac{i}{k^2-m^2} \\
 &\quad \frac{-ig^{\beta\sigma}}{(k+p_3)^2} [-ie(k-p_3)_\beta] \\
 &= -(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} 2e^4 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k-p_3)^\sigma (k-p_1)_\sigma}{(k+p_1)^2 (k+p_3)^2 [k^2-m^2]}. \quad (3.114)
 \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.7. FUNCIÓN VÉRTICE DE 4 ESCALARES



$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{(k+p_4)^2 - m^2} \frac{i}{(k-p_3)^2 - m^2} \frac{-ig^{\alpha\beta}}{(k+p_1-p_3)^2} \\
 &\quad \frac{-ig^{\rho\sigma}}{k^2} [-ie(p_1+p_3-k)_\alpha] [-ie(p_2+p_4+k)_\beta] [-ie(k+2p_4)_\rho] \\
 &\quad [-ie(2p_3-k)_\sigma] \\
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} e^4 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(p_2+p_4+k)_\alpha (p_1+p_3-k)_\alpha}{[(k+p_4)^2 - m^2][(k-p_3)^2 - m^2]} \\
 &\quad \frac{(2p_3-k)_\rho (k+2p_4)_\rho}{(k+p_1-p_3)^2 k^2}. \tag{3.115}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{(k+p_1)^2 - m^2} \frac{i}{(k+p_3)^2 - m^2} \frac{-ig^{\alpha\beta}}{(k+p_1+p_2)^2} \\
 &\quad \frac{-ig^{\rho\sigma}}{k^2} [-ie(k+2p_1)_\rho] [-ie(k+p_1-p_2)_\alpha] [-ie(k+p_3-p_4)_\beta] \\
 &\quad [-ie(k+2p_3)_\sigma] \\
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} e^4 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k+p_1-p_2)_\beta (k+p_3-p_4)_\beta}{[(k+p_1)^2 - m^2][(k+p_3)^2 - m^2]} \\
 &\quad \frac{(k+2p_3)_\rho (k+2p_1)_\rho}{(k+p_1+p_2)^2 k^2}. \tag{3.116}
 \end{aligned}$$

Las *variables de Mandelstam* son cantidades definidas en un proceso de colisión binario. Para el proceso de dispersión descrito por la amplitud de la función vértice de 4 escalares, las variables de Mandelstam son definidas de la siguiente forma:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \tag{3.117}$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \tag{3.118}$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2. \tag{3.119}$$

En general, las variables de Mandelstam cumplen la siguiente propiedad:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2, \tag{3.120}$$

donde m_i son las masas de las partículas involucradas en el proceso de dispersión. En el caso de la amplitud de la función vértice de 4 escalares, las variables de Mandelstam cumplen la siguiente propiedad:

$$s + t + u = 4m^2. \tag{3.121}$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.7. FUNCIÓN VÉRTICE DE 4 ESCALARES

Aplicando parametrización de Feynman, haciendo el corrimiento $k \rightarrow k - l$ y resolviendo la integral en el espacio de momentos, se tiene para el primer diagrama:

$$\begin{aligned} -i\lambda\Gamma_{1-l}^{(1)} &= \frac{i\lambda^2}{(4\pi)^2}\Gamma(2)\int_0^1 dx \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}}\int d^D k \frac{1}{[k^2 - \Delta_{4v_1}^2]^2} \\ &= \frac{i\lambda^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{\Delta_{4v_1}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}, \end{aligned} \quad (3.122)$$

donde $\Delta_{4v_1}^2 = m^2 - sx(1-x)$ y con s una de las variables de Mandelstam. Procediendo de manera análoga, para el segundo diagrama se tiene:

$$-i\lambda\Gamma_{1-l}^{(2)} = \frac{i\lambda^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{\Delta_{4v_2}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}, \quad (3.123)$$

donde $\Delta_{4v_2}^2 = m^2 - tx(1-x)$ y con t otra de las variables de Mandelstam. Haciendo uso del programa FeynCalc [26], el tercer diagrama se puede escribir en términos de las funciones escalares de Passarino-Veltman como sigue:

$$\begin{aligned} -i\lambda\Gamma_{1-l}^{(3)} &= -\frac{i\lambda e^2}{(4\pi)^2}\frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}}\pi^2[-B_0(s, m^2, m^2) + 2B_0(m^2, 0, m^2) \\ &\quad + 2(2m^2 - s)C_0(m^2, m^2, s, m^2, 0, m^2)], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} B_0(s, m^2, m^2) &= \frac{1}{i\pi^2}\int d^D k \frac{1}{[k^2 - m^2][(k+p_1+p_2)^2 - m^2]}, \\ &= \frac{1}{i\pi^2}\Gamma(2)\int_0^1 dx \int d^D k \frac{1}{[k^2 - \Delta_{4v_1}^2]^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_0(m^2, 0, m^2) &= \frac{1}{i\pi^2}\int d^D k \frac{1}{k^2[(k+m)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{i\pi^2}\Gamma(2)\int_0^1 dx \int d^D k \frac{1}{[k^2 - \Delta_{4v_{1'}}^2]^2}, \end{aligned}$$

con $\Delta_{4v_{1'}}^2 = m^2(1-x)^2$. Además,

$$\begin{aligned} C_0(m^2, m^2, s, m^2, 0, m^2) &= \frac{1}{i\pi^2}\int d^D k \frac{1}{[k^2 - m^2](k+m)^2[(k+p_1+p_2)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{i\pi^2}\Gamma(3)I_p \int d^D k \frac{1}{[k^2 - \Delta_{4v_3}^2]^3}, \end{aligned}$$

con $I_p = \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1)$ y $\Delta_{4v_3}^2 = m^2(1-x)^2 - yzs$. Observe que las funciones B_0 tienen divergencias ultravioletas, sin embargo las funciones C_0 son finitas en general. Resolviendo las integrales en el espacio de los momentos, se tiene

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.7. FUNCIÓN VÉRTICE DE 4 ESCALARES

$$-i\lambda\Gamma_{1-l}^{(3)} = -\frac{i\lambda e^2}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[2 \left(\frac{\Delta_{4v_1'}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta_{4v_1}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] - 2(2m^2 - s) I_p \frac{1}{\Delta_{4v_3}^2} \right\}. \quad (3.124)$$

El cuarto diagrama es de la misma forma que el tercer diagrama (notar que ambos corresponden al canal s). Así,

$$-i\lambda\Gamma_{1-l}^{(4)} = -\frac{i\lambda e^2}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[2 \left(\frac{\Delta_{4v_1'}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta_{4v_1}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] - 2(2m^2 - s) I_p \frac{1}{\Delta_{4v_3}^2} \right\}. \quad (3.125)$$

En lo que respecta al diagrama 5, se encuentra que

$$-i\lambda\Gamma_{1-l}^{(5)} = -\frac{i\lambda e^2}{(4\pi)^2} \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} i\pi^2 \left[-B_0(t, m^2, m^2) + 2B_0(m^2, 0, m^2) + 2(2m^2 - t)C_0(m^2, m^2, t, m^2, 0, m^2) \right].$$

De manera análoga al diagrama 3 obtenemos:

$$-i\lambda\Gamma_{1-l}^{(5)} = -\frac{i\lambda e^2}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[2 \left(\frac{\Delta_{4v_1'}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta_{4v_2}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] - 2(2m^2 - t) I_p \frac{1}{\Delta_{4v_5}^2} \right\}, \quad (3.126)$$

donde $\Delta_{4v_5}^2 = m^2(1-x)^2 - yzt$. El diagrama 6 tiene la misma forma que el diagrama 5, pues ambos corresponden al canal t , por lo que

$$-i\lambda\Gamma_{1-l}^{(6)} = -\frac{2i\lambda e^2}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[2 \left(\frac{\Delta_{4v_1'}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta_{4v_2}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] - 2(2m^2 - t) I_p \frac{1}{\Delta_{4v_5}^2} \right\}. \quad (3.127)$$

Por otra parte, la contribución del diagrama 7 está dada por

$$\begin{aligned} -i\lambda\Gamma_{1-l}^{(7)} &= \frac{2ie^4(4-\epsilon)}{(4\pi)^2} \Gamma(2) \int_0^1 dx \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \int d^D k \frac{1}{[k^2 - \Delta_{v_{ss}}^2]^2} \\ &= \frac{2ie^4(4-\epsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\Delta_{v_{ss}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}}, \end{aligned} \quad (3.128)$$

donde $\Delta_{v_{ss}}^2 = -sx(1-x)$. De manera análoga tenemos para el diagrama 8:

$$-i\lambda\Gamma_{1-l}^{(8)} = \frac{2ie^4(4-\epsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\Delta_{v_{ts}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}}, \quad (3.129)$$

con $\Delta_{v_{ts}}^2 = -tx(1-x)$. El diagrama 9 arroja una contribución de la forma

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.7. FUNCIÓN VÉRTICE DE 4 ESCALARES

$$-i\lambda\Gamma_{1-l}^{(9)} = -\frac{2ie^4}{(4\pi)^2} \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{i\pi^2}{2} [4B_0(s, 0, 0) - 2B_0(m^2, 0, m^2) + (8m^2 - s)C_0(m^2, m^2, s, 0, m^2, 0)],$$

donde

$$B_0(s, 0, 0) = \frac{1}{i\pi^2} \int d^D k \frac{1}{k^2(k+p_1+p_2)^2},$$

$$= \frac{1}{i\pi^2} \Gamma(2) \int_0^1 dx \int d^D k \frac{1}{[k^2 - \Delta_{v_{ss}}^2]^2},$$

$$C_0(m^2, m^2, s, 0, m^2, 0) = \frac{1}{i\pi^2} \int d^D k \frac{1}{k^2[(k+m)^2 - m^2](k+p_1+p_2)^2}$$

$$= \frac{1}{i\pi^2} \Gamma(3) I_p \int d^D k \frac{1}{[k^2 - \Delta_{4v_{cs}}^2]^3},$$

con $I_p = \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1)$ y $\Delta_{4v_{cs}}^2 = m^2 x^2 - syz$. Resolviendo estas integrales en el espacio de los momentos se tiene:

$$-i\lambda\Gamma_{1-l}^{(9)} = -\frac{ie^4}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[4 \left(\frac{\Delta_{v_{ss}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - 2 \left(\frac{\Delta_{4v_{1'}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] - (8m^2 - s) I_p \frac{1}{\Delta_{4v_{cs}}^2} \right\}. \quad (3.130)$$

El diagrama 10 corresponde al canal s , por lo que

$$-i\lambda\Gamma_{1-l}^{(10)} = -\frac{ie^4}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[4 \left(\frac{\Delta_{v_{ss}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - 2 \left(\frac{\Delta_{4v_{1'}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] - (8m^2 - s) I_p \frac{1}{\Delta_{4v_{cs}}^2} \right\}. \quad (3.131)$$

Por otra parte, la contribución del diagrama 11 se puede escribir como:

$$-i\lambda\Gamma_{1-l}^{(11)} = -\frac{2ie^4}{(4\pi)^2} \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{i\pi^2}{2} [4B_0(t, 0, 0) - 2B_0(m^2, 0, m^2) + (8m^2 - t)C_0(m^2, m^2, t, 0, m^2, 0)].$$

Note que esta expresión adquiere la misma forma del diagrama 9 cuando se intercambia s por t . Por lo tanto, podemos escribir:

$$-i\lambda\Gamma_{1-l}^{(11)} = -\frac{ie^4}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[4 \left(\frac{\Delta_{v_{ts}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - 2 \left(\frac{\Delta_{4v_{1'}}^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] - (8m^2 - t) I_p \frac{1}{\Delta_{4v_{ct}}^2} \right\}, \quad (3.132)$$

con $\Delta_{4v_{ct}}^2 = m^2 x^2 - t y z$. Por otra parte, el diagrama 12 corresponde al canal t y la amplitud se puede escribir como

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.7. FUNCIÓN VÉRTICE DE 4 ESCALARES

$$-i\lambda\Gamma_{1-l}^{(12)} = -\frac{ie^4}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[4 \left(\frac{\Delta_{v_{ts}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - 2 \left(\frac{\Delta_{4v_{1'}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] - (8m^2 - t) I_p \frac{1}{\Delta_{4v_{ct}}^2} \right\}. \quad (3.133)$$

En lo que respecta a los diagramas de caja, la amplitud del primero de estos diagramas se puede escribir en términos de funciones de Passarino-Veltman como sigue:

$$\begin{aligned} -i\lambda\Gamma_{1-l}^{(13)} &= \frac{ie^4}{(4\pi)^2} \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} (-i\pi^2) \left[\frac{4(4m^2 - s - t)}{4m^2 - t} (B_0(m^2, 0, m^2) - B_0(t, 0, 0)) - B_0(s, m^2, m^2) \right. \\ &+ 4(2m^2 - s)C_0(m^2, m^2, s, m^2, 0, m^2) - \frac{2(32m^4 - 8m^2(2s + t) + 3st)}{4m^2 - t} C_0(m^2, m^2, t, 0, m^2, 0) \\ &\left. - 4(s - 2m^2)^2 D_0(m^2, m^2, m^2, m^2, s, t, m^2, 0, m^2, 0) \right], \end{aligned}$$

donde la función escalar de cuatro puntos se define por:

$$\begin{aligned} D_0(m^2, m^2, m^2, m^2, s, t, m^2, 0, m^2, 0) &= \frac{1}{i\pi^2} \int d^D k \frac{1}{[k^2 - m^2](k + m)^2[(k + p_1 + p_2)^2 - m^2](k + m)^2} \\ &= \frac{1}{i\pi^2} \Gamma(4) I_{p_d} \int d^D k \frac{1}{[k^2 - \Delta_{4v_{d1}}^2]^4}, \end{aligned}$$

con $I_{p_d} = \int_0^1 dw dx dy dz \delta(w + x + y + z - 1)$ y $\Delta_{4v_{d1}}^2 = m^2(1 - w - y)^2 - sxz - twy$. Resolviendo las integrales en el espacio de los momentos, se tiene:

$$\begin{aligned} -i\lambda\Gamma_{1-l}^{(13)} &= -\frac{ie^4}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[\frac{4(4m^2 - s - t)}{4m^2 - t} \left[\left(\frac{\Delta_{4v_{1'}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta_{v_{ts}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] - \left(\frac{\Delta_{4v_1}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] \right. \\ &\left. - 4(2m^2 - s) I_p \frac{1}{\Delta_{4v_3}^2} + \frac{2(32m^4 - 8m^2(2s + t) + 3st)}{4m^2 - t} I_p \frac{1}{\Delta_{4v_{ct}}^2} - 4(s - 2m^2)^2 I_{p_d} \frac{1}{(\Delta_{4v_{d1}}^2)^2} \right\}. \quad (3.134) \end{aligned}$$

La amplitud para el segundo diagrama de caja es:

$$\begin{aligned} -i\lambda\Gamma_{1-l}^{(14)} &= \frac{ie^4}{(4\pi)^2} \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} (-i\pi^2) \left[\frac{4(4m^2 - s - t)}{4m^2 - s} (B_0(m^2, 0, m^2) - B_0(s, 0, 0)) - B_0(t, m^2, m^2) \right. \\ &+ 4(2m^2 - t)C_0(m^2, m^2, t, m^2, 0, m^2) - \frac{2(32m^4 - 8m^2(2t + s) + 3st)}{4m^2 - s} C_0(m^2, m^2, s, 0, m^2, 0) \\ &\left. - 4(t - 2m^2)^2 D_0(m^2, m^2, m^2, m^2, s, t, 0, m^2, 0, m^2) \right], \end{aligned}$$

el cual puede verse que tiene la misma forma que los términos de la caja 1 intercambiando t por s , donde ahora

$$\begin{aligned} D_0(m^2, m^2, m^2, m^2, s, t, 0, m^2, 0, m^2) &= \frac{1}{i\pi^2} \int d^D k \frac{1}{k^2[(k + m)^2 - m^2](k + p_1 + p_2)^2[(k + m)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{i\pi^2} \Gamma(4) I_{p_d} \int d^D k \frac{1}{[k^2 - \Delta_{4v_{d2}}^2]^4} = \frac{1}{i\pi^2} I_{p_d} \frac{1}{(\Delta_{4v_{d2}}^2)^2}, \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.7. FUNCIÓN VÉRTICE DE 4 ESCALARES

con $\Delta_{4v_{d2}}^2 = m^2(1-x-z)^2 - sxz - twy$. Resolviendo las integrales en el espacio de los momentos, se tiene:

$$\begin{aligned}
 -i\lambda\Gamma_{1-l}^{(14)} = & -\frac{ie^4}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[\frac{4(4m^2-s-t)}{4m^2-s} \left[\left(\frac{\Delta_{4v_{1'}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta_{v_{ss}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] - \left(\frac{\Delta_{4v_2}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] \right. \\
 & \left. -4(2m^2-t)I_p \frac{1}{\Delta_{4v_5}^2} + \frac{2(32m^4-8m^2(2s+t)+3st)}{4m^2-s} I_p \frac{1}{\Delta_{4v_{cs}}^2} -4(t-2m^2)^2 I_{pd} \frac{1}{(\Delta_{4v_{d2}}^2)^2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

Considerando las contribuciones dadas por las ecuaciones (3.101), (3.102) y (3.122-3.135), la función vértice de 4 puntos toma la forma:

$$\lambda\Gamma(s, t, u) = \lambda + \lambda\Gamma_{\lambda^2} + \lambda\Gamma_{\lambda} + \lambda\Gamma_{e^4} + \lambda\Gamma_b + \delta_{\lambda}, \tag{3.136}$$

donde

$$\lambda\Gamma_{\lambda^2} = -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[\left(\frac{\Delta_{4v_1}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} + \left(\frac{\Delta_{4v_2}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right], \tag{3.137}$$

$$\lambda\Gamma_{\lambda} = 4\frac{\lambda e^2}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[4\left(\frac{\Delta_{4v_{1'}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta_{4v_1}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta_{4v_2}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] + h_{\lambda}(s, t, u) \right\}, \tag{3.138}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda\Gamma_{e^4} = & -\frac{2e^4(4-\epsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[\left(\frac{\Delta_{v_{ss}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} + \left(\frac{\Delta_{v_{ts}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] \\
 & + \frac{4e^4}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx 4\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[\left(\frac{\Delta_{v_{ss}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} + \left(\frac{\Delta_{v_{ts}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta_{4v_{1'}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] + h_{e^4}(s, t, u) \right\},
 \end{aligned} \tag{3.139}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda\Gamma_b = & \frac{e^4}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[\frac{4u}{s+u} \left[\left(\frac{\Delta_{4v_{1'}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta_{v_{ts}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{4u}{t+u} \left[\left(\frac{\Delta_{4v_{1'}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta_{v_{ss}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] - \left(\frac{\Delta_{4v_1}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta_{4v_2}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] + h_b(s, t, u) \right\},
 \end{aligned} \tag{3.140}$$

con u otra de las variables de Mandelstam y $h_{\lambda}(s, t, u)$, $h_{e^4}(s, t, u)$, $h_b(s, t, u)$ funciones compuestas por las partes finitas de los diagramas de orden λ , e^4 sin cajas y los diagramas de caja respectivamente.

Debido a que Γ es una función de las variables de Mandelstam s , t , y u , debemos elegir un punto dentro de la cinemática del sistema para definir el parámetro físico λ . Considerando que se cumpla la ecuación (3.121), elegiremos como punto cinemático el punto simétrico dado por

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.7. FUNCIÓN VÉRTICE DE 4 ESCALARES

$$s_0 = t_0 = u_0 = \frac{4}{3}m^2. \quad (3.141)$$

Usando el esquema de renormalización on-shell o esquema físico, demandamos que se cumpla

$$\Gamma_4(s_0, t_0, u_0) = 1, \quad (3.142)$$

lo cual conduce a un contratérmino δ_λ dado por

$$\delta_\lambda = -\lambda\bar{\Gamma}_{\lambda^2} - \lambda\bar{\Gamma}_\lambda - \lambda\bar{\Gamma}_{e^4} - \lambda\bar{\Gamma}_b, \quad (3.143)$$

donde

$$\lambda\bar{\Gamma}_{\lambda^2} = -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[\left(\frac{\bar{\Delta}_{4v_1}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} + \left(\frac{\bar{\Delta}_{4v_2}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right], \quad (3.144)$$

$$\lambda\bar{\Gamma}_\lambda = 4\frac{\lambda e^2}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[4\left(\frac{\bar{\Delta}_{4v_{1'}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\bar{\Delta}_{4v_1}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\bar{\Delta}_{4v_2}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] + h_\lambda(s_0, t_0, u_0) \right\}, \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned} \lambda\bar{\Gamma}_{e^4} = & -\frac{2e^4(4-\epsilon)}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[\left(\frac{\bar{\Delta}_{v_{ss}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} + \left(\frac{\bar{\Delta}_{v_{ts}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] \\ & + \frac{4e^4}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx 4\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[\left(\frac{\bar{\Delta}_{v_{ss}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} + \left(\frac{\bar{\Delta}_{v_{ts}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\bar{\Delta}_{4v_{1'}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] + h_{e^4}(s_0, t_0, u_0) \right\}, \end{aligned} \quad (3.146)$$

$$\begin{aligned} \lambda\bar{\Gamma}_b = & \frac{e^4}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[2\left[2\left(\frac{\bar{\Delta}_{4v_{1'}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\bar{\Delta}_{v_{ts}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\bar{\Delta}_{v_{ss}}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\bar{\Delta}_{4v_1}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\bar{\Delta}_{4v_2}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] + h_b(s_0, t_0, u_0) \right\}, \end{aligned} \quad (3.147)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{4v_1}^2 = \bar{\Delta}_{4v_2}^2 &= m^2 \left[1 - \frac{4}{3}x(1-x) \right], & \bar{\Delta}_{4v_{ct}}^2 = \bar{\Delta}_{4v_{cs}}^2 &= m^2 \left(x^2 - \frac{4}{3}yz \right), \\ \bar{\Delta}_{4v_{1'}}^2 = \bar{\Delta}_{4v_{1'}}^2 &= m^2(1-x)^2, & \bar{\Delta}_{4v_{d1}}^2 &= m^2 \left[(1-w-y)^2 - \frac{4}{3}(xz+wy) \right], \\ \bar{\Delta}_{4v_3}^2 = \bar{\Delta}_{4v_5}^2 &= m^2 \left[(1-x)^2 - \frac{4}{3}yz \right], & \bar{\Delta}_{4v_{d2}}^2 &= m^2 \left[(1-x-z)^2 - \frac{4}{3}(xz+wy) \right], \\ \bar{\Delta}_{v_{ts}}^2 = \bar{\Delta}_{v_{ss}}^2 &= -\frac{4}{3}m^2x(1-x). \end{aligned} \quad (3.148)$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.8. FUNCIÓN VÉRTICE: 2 FOTONES 2 ESCALARES

Note que el intercambio de $w \leftrightarrow x$ y $y \leftrightarrow z$ no afecta a la integral I_{p_d} , por lo que

$$\overline{\Delta}_{4v_{d1}}^2 = \overline{\Delta}_{4v_{d2}}^2 = m^2 \left[(1-w-y)^2 - \frac{4}{3}(xz+wy) \right].$$

Sumando la contribución del contratérmino, haciendo los desarrollos en el entorno de los polos y simplificando, se encuentra que la función vértice está dada por:

$$\Gamma(s, t, u) = \lambda + \lambda\Gamma_{\lambda_R^2} + \lambda\Gamma_{\lambda_R} + \lambda\Gamma_{e_R^4} + \lambda\Gamma_{b_R}, \quad (3.149)$$

con

$$\lambda\Gamma_{\lambda_R^2} = -\frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \log \left(\frac{\overline{\Delta}_{4v_1}^2 \overline{\Delta}_{4v_2}^2}{\Delta_{4v_1}^2 \Delta_{4v_2}^2} \right), \quad (3.150)$$

$$\lambda\Gamma_{\lambda_R} = 4\frac{\lambda e^2}{(4\pi)^2} \left\{ -\int_0^1 dx \log \left(\frac{\overline{\Delta}_{4v_1}^2 \overline{\Delta}_{4v_2}^2}{\Delta_{4v_1}^2 \Delta_{4v_2}^2} \right) + h_\lambda(s, t, u) - h_\lambda(s_0, t_0, u_0) \right\}, \quad (3.151)$$

$$\lambda\Gamma_{e_R^4} = \frac{4e^4}{(4\pi)^2} \left\{ 2 \int_0^1 dx \log \left(\frac{\overline{\Delta}_{v_{ss}}^2 \overline{\Delta}_{v_{ts}}^2}{\Delta_{v_{ss}}^2 \Delta_{v_{ts}}^2} \right) + h_{e^4}(s, t, u) - h_{e^4}(s_0, t_0, u_0) \right\}, \quad (3.152)$$

$$\begin{aligned} \lambda\Gamma_b = \frac{e^4}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \left[\frac{4u}{s+u} \left[\log \left(\frac{\Delta_{v_{ts}}^2}{\Delta_{4v_1'}^2} \right) \right] + \frac{4u}{t+u} \left[\log \left(\frac{\Delta_{v_{ss}}^2}{\Delta_{4v_1'}^2} \right) \right] - 2 \log \left(\frac{\overline{\Delta}_{v_{ts}}^2 \overline{\Delta}_{v_{ss}}^2}{\overline{\Delta}_{4v_1'}^2 \overline{\Delta}_{4v_1'}^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \log \left(\frac{\overline{\Delta}_{4v_1}^2 \overline{\Delta}_{4v_2}^2}{\Delta_{4v_1}^2 \Delta_{4v_2}^2} \right) \right] + h_b(s, t, u) - h_b(s_0, t_0, u_0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.153)$$

El término de interacción de la forma $\lambda(\phi^\dagger\phi)^2$ nos permite introducir un nuevo parámetro λ que es renormalizado de forma que el contratérmino correspondiente absorbe las divergencias ultravioletas de la función vértice de cuatro escalares. Para lidiar con las divergencias infrarrojas se debe agregar una masa ficticia m_γ al propagador del fotón. Dichas divergencias no fueron consideradas en este análisis.

3.8. Función Vértice: 2 fotones 2 escalares

Calculemos la amplitud de la función vértice de 2 fotones y 2 escalares, como se muestra en la Figura 3.5. La notación y convenciones que usaremos se muestran en esta figura.

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.8. FUNCIÓN VÉRTICE: 2 FOTONES 2 ESCALARES

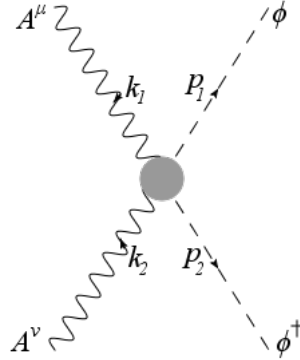


Figura 3.5: Función vértice de 2 fotones 2 escalares

Hasta orden de un lazo, esta función vértice recibe las siguientes contribuciones:

$$2ie^2\Gamma^{\nu\nu}(s, t, u) = 2ie^2\Gamma_{t.l.}^{\mu\nu} + 2ie^2\Gamma_{1-l}^{\mu\nu}(s, t, u) + 2ie^2\Gamma_{c.t.}^{\mu\nu}(s, t, u), \quad (3.154)$$

donde

$$\Gamma_{t.l.}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad (3.155)$$

es la contribución de nivel de árbol, y

$$\Gamma_{c.t.}^{\mu\nu} = \left(\frac{Z_e^2}{Z_\phi} - 1 \right) g^{\mu\nu} \quad (3.156)$$

es la contribución del contratérmino. Como consecuencia de invariancia de norma, y por tanto de la identidad de Ward, se cumple la relación $Z_e = Z_\phi$. De esta forma, la contribución del contratérmino en esta función vértice es dada por:

$$\Gamma_{c.t.}^{\mu\nu} = \delta_e g^{\mu\nu}, \quad (3.157)$$

con δ_e el contratérmino previamente determinado al momento de estudiar la función vértice de 3 puntos (dos escalares un fotón). Como consecuencia de invariancia de norma, el contratérmino δ_e debe cancelar todas las divergencias que surgan en la función vértice de dos fotones y dos escalares. Por otra parte, los diagramas que contribuyen a orden de un lazo son:

$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [2ie^2 g^{\mu\nu}] [-i\lambda] \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k - p_1 - p_2)^2 - m^2} \\
 &= -2e^2 \lambda (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{g^{\mu\nu}}{[k^2 - m^2][(k - p_1 - p_2)^2 - m^2]}. \quad (3.158)
 \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.8. FUNCIÓN VÉRTICE: 2 FOTONES 2 ESCALARES

$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [-ie(k+k+k_1)^\mu] [-ie(k-k_2+k)^\nu] \\
 & \quad [-i\lambda] \frac{i}{(k+k_1)^2-m^2} \frac{i}{(k-k_2)^2-m^2} \frac{i}{k^2-m^2} \\
 &= e^2 \lambda (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k+k_1)^\mu (2k-k_2)^\nu}{[(k+k_1)^2-m^2][(k-k_2)^2-m^2][k^2-m^2]}. \tag{3.159}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [-ie(k+k+k_2)^\nu] [-ie(k-k_1+k)^\mu] [-i\lambda] \\
 & \quad \frac{i}{(k+k_2)^2-m^2} \frac{i}{(k-k_1)^2-m^2} \frac{i}{k^2-m^2} \\
 &= e^2 \lambda (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k+k_2)^\nu (2k-k_1)^\mu}{[(k+k_2)^2-m^2][(k-k_1)^2-m^2][k^2-m^2]}. \tag{3.160}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [-ie(-p_2+k-p_2)^\beta] [-ie(k+p_1+p_1)^\alpha] \\
 & \quad [2ie^2 g^{\mu\nu}] \frac{i}{(k+p_1)^2-m^2} \frac{i}{(k-p_2)^2-m^2} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \\
 &= 2e^4 g^{\mu\nu} (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k-2p_2)^\beta (k+2p_1)_\beta}{[(k+p_1)^2-m^2][(k-p_2)^2-m^2]k^2}. \tag{3.161}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [2ie^2 g^{\mu\alpha}] [2ie^2 g^{\nu\beta}] \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \frac{i}{(k+k_2-p_2)^2-m^2} \\
 &= -4e^4 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{g^{\mu\nu}}{[(k+k_2-p_2)^2-m^2]k^2}. \tag{3.162}
 \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.8. FUNCIÓN VÉRTICE: 2 FOTONES 2 ESCALARES

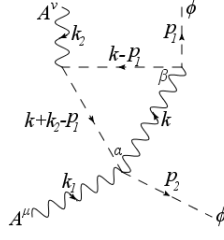
$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [2ie^2 g^{\nu\alpha}] [2ie^2 g^{\mu\beta}] \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \frac{i}{(k+k_1-p_2)^2-m^2} \\
 &= -4e^4 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{g^{\mu\nu}}{[(k+k_1-p_2)^2-m^2]k^2}. \tag{3.163}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [2ie^2 g^{\mu\alpha}] [-ie(-p_2+k-p_2)^\beta] [-ie(k-p_2+k-p_2+k_2)^\nu] \\
 &\quad \frac{i}{(k-p_2)^2-m^2} \frac{i}{(k+k_2-p_2)^2-m^2} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \\
 &= 2e^4 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k-2p_2)^\mu (2k-2p_2+k_2)^\nu}{[(k-p_2)^2-m^2][(k+k_2-p_2)^2-m^2]k^2}. \tag{3.164}
 \end{aligned}$$

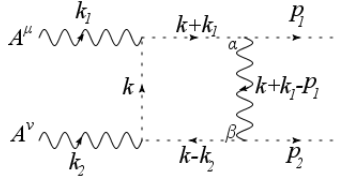
$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [2ie^2 g^{\nu\alpha}] [-ie(-p_2+k-p_2)^\beta] [-ie(k-p_2+k-p_2+k_1)^\mu] \\
 &\quad \frac{i}{(k-p_2)^2-m^2} \frac{i}{(k+k_1-p_2)^2-m^2} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \\
 &= 2e^4 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k-2p_2)^\nu (2k-2p_2+k_1)^\mu}{[(k-p_2)^2-m^2][(k+k_1-p_2)^2-m^2]k^2}. \tag{3.165}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [2ie^2 g^{\nu\alpha}] [-ie(-p_1+k-p_1)^\beta] [-ie(k-p_1+k-p_1+k_1)^\mu] \\
 &\quad \frac{i}{(k-p_1)^2-m^2} \frac{i}{(k+k_1-p_1)^2-m^2} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \\
 &= 2e^4 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k-2p_1)^\nu (2k-2p_1+k_1)^\mu}{[(k-p_1)^2-m^2][(k+k_1-p_1)^2-m^2]k^2}. \tag{3.166}
 \end{aligned}$$

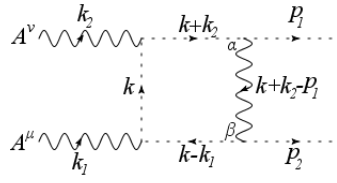
**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.8. FUNCIÓN VÉRTICE: 2 FOTONES 2 ESCALARES



$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [2ie^2 g^{\mu\alpha}] [-ie(-p_1 + k - p_1)^\beta] [-ie(k - p_1 + k - p_1 + k_2)^\nu] \\
 &\frac{i}{(k - p_1)^2 - m^2} \frac{i}{(k + k_2 - p_1)^2 - m^2} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \\
 &= 2e^4 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k - 2p_1)^\mu (2k - 2p_1 + k_2)^\nu}{[(k - p_1)^2 - m^2][(k + k_2 - p_1)^2 - m^2]k^2}. \quad (3.167)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [-ie(k + k + k_1)^\mu] [-ie(k + k_1 + p_1)^\alpha] \\
 &[-ie(-p_2 + k - k_2)^\beta] [-ie(k - k_2 + k)^\nu] \frac{i}{k^2 - m^2} \\
 &\frac{i}{(k + k_1)^2 - m^2} \frac{i}{(k - k_2)^2 - m^2} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{(k + k_1 - p_1)^2} \\
 &= -e^4 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k + k_1)^\mu (2k - k_2)^\nu}{[k^2 - m^2][(k + k_1)^2 - m^2]} \\
 &\frac{(k + k_1 + p_1)^\alpha (k - k_2 - p_2)_\alpha}{[(k - k_2)^2 - m^2](k + k_1 - p_1)^2}. \quad (3.168)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [-ie(k + k + k_2)^\nu] [-ie(k + k_2 + p_1)^\alpha] \\
 &[-ie(-p_2 + k - k_1)^\beta] [-ie(k - k_1 + k)^\mu] \frac{i}{k^2 - m^2} \\
 &\frac{i}{(k + k_2)^2 - m^2} \frac{i}{(k - k_1)^2 - m^2} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{(k + k_2 - p_1)^2} \\
 &= -e^4 (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k + k_2)^\nu (2k - k_1)^\mu}{[k^2 - m^2][(k + k_2)^2 - m^2]} \\
 &\frac{(k + k_2 + p_1)^\alpha (k - k_1 - p_2)_\alpha}{[(k - k_1)^2 - m^2](k + k_2 - p_1)^2}. \quad (3.169)
 \end{aligned}$$

Definamos las variables de Mandelstam para el proceso de dispersión correspondiente a la amplitud de la función vértice de 2 fotones y 2 escalares de la siguiente forma:

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.8. FUNCIÓN VÉRTICE: 2 FOTONES 2 ESCALARES

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2, \quad (3.170)$$

$$t = (k_2 - p_2)^2 = (k_1 - p_1)^2, \quad (3.171)$$

$$u = (k_1 - p_2)^2 = (k_2 - p_1)^2. \quad (3.172)$$

Para este proceso de dispersión, las variables de Mandelstam cumplen la siguiente propiedad:

$$s + t + u = 2m^2, \quad (3.173)$$

ya que dos de las partículas involucradas en el proceso son fotones de masa nula.

Aplicando parametrización de Feynman, haciendo el corrimiento $k \rightarrow k + l$ y resolviendo la integral en el espacio de los momentos, se tiene para el primer diagrama:

$$\begin{aligned} 2ie^2\Gamma_{(1)}^{\mu\nu} &= -\frac{2ie^2\lambda}{(4\pi)^2}g^{\mu\nu}\Gamma(2)\int_0^1 dx \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}}\int d^Dk \frac{1}{[k^2 - \Delta_{4fe1}^2]^2} \\ &= -\frac{2ie^2\lambda}{(4\pi)^2}g^{\mu\nu}\int_0^1 dx\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{\Delta_{4fe1}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}, \end{aligned} \quad (3.174)$$

donde $\Delta_{4fe1}^2 = m^2 - sx(1-x)$ y con s una de las variables de Mandelstam. Haciendo uso del programa FeynCalc, el segundo diagrama se puede escribir en términos de las funciones escalares de Passarino-Veltman como sigue:

$$\begin{aligned} 2ie^2\Gamma_{(2)}^{\mu\nu} &= \frac{ie^2\lambda}{(4\pi)^2}\frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}}i\pi^2\left[B_0(s, m^2, m^2)(g^{\mu\nu} - \frac{4}{s}k_1^\mu k_2^\nu) + \frac{4}{s}k_1^\mu k_2^\nu B_0(0, m^2, m^2)\right. \\ &\quad \left.+ C_0(0, 0, s, m^2, m^2, m^2)\left(2m^2g^{\mu\nu} - \frac{4m^2}{s}k_1^\nu k_2^\mu - \frac{1}{s}k_1^\mu k_2^\nu(4m^2 + s)\right)\right], \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} B_0(0, m^2, m^2) &= \frac{1}{i\pi^2}\int d^Dk \frac{1}{[k^2 - m^2][k^2 - m^2]}, \\ &= \frac{1}{i\pi^2}\Gamma(2)\int_0^1 dx \int d^Dk \frac{1}{[k^2 - m^2]^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_0(0, 0, s, m^2, m^2, m^2) &= \frac{1}{i\pi^2}\int d^Dk \frac{1}{[k^2 - m^2][k^2 - m^2][(k + k_1 + k_2)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{i\pi^2}\Gamma(3)I_p \int d^Dk \frac{1}{[k^2 - \Delta_{4fe2}^2]^3}, \end{aligned}$$

donde $\Delta_{4fe2}^2 = m^2 + s(1-z)$. Resolviendo las integrales en el espacio de los momentos, se tiene

$$\begin{aligned} 2ie^2\Gamma_{(2)}^{\mu\nu} &= \frac{ie^2\lambda}{(4\pi)^2}\left\{\int_0^1 dx\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left[\left(g^{\mu\nu} - \frac{4}{s}k_1^\mu k_2^\nu\right)\left(\frac{\Delta_{4fe1}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} + \frac{4}{s}k_1^\mu k_2^\nu\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}\right]\right. \\ &\quad \left.- \left(2m^2g^{\mu\nu} - \frac{4m^2}{s}k_1^\nu k_2^\mu - \frac{1}{s}k_1^\mu k_2^\nu(4m^2 + s)\right)I_p \frac{1}{\Delta_{4fe2}^2}\right\}. \end{aligned} \quad (3.175)$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.8. FUNCIÓN VÉRTICE: 2 FOTONES 2 ESCALARES

Por otro lado, el tercer diagrama está dado por:

$$2ie^2\Gamma_{(3)}^{\mu\nu} = \frac{ie^2\lambda}{(4\pi)^2} \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} i\pi^2 \left[B_0(s, m^2, m^2)(g^{\mu\nu} - \frac{4}{s}k_1^\mu k_2^\nu) + \frac{4}{s}k_1^\mu k_2^\nu B_0(0, m^2, m^2) \right. \\ \left. + C_0(0, 0, s, m^2, m^2, m^2) \left(2m^2 g^{\mu\nu} - \frac{4m^2}{s}k_1^\nu k_2^\mu - \frac{1}{s}k_1^\mu k_2^\nu(4m^2 + s) \right) \right].$$

Notemos que es la misma expresión que la obtenida del segundo diagrama, por lo que el tercer diagrama se puede escribir como:

$$2ie^2\Gamma_{(3)}^{\mu\nu} = \frac{ie^2\lambda}{(4\pi)^2} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[(g^{\mu\nu} - \frac{4}{s}k_1^\mu k_2^\nu) \left(\frac{\Delta_{4fe1}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} + \frac{4}{s}k_1^\mu k_2^\nu \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] \right. \\ \left. - \left(2m^2 g^{\mu\nu} - \frac{4m^2}{s}k_1^\nu k_2^\mu - \frac{1}{s}k_1^\mu k_2^\nu(4m^2 + s) \right) I_p \frac{1}{\Delta_{4fe2}^2} \right\}. \quad (3.176)$$

Al sumar las contribuciones de los tres primeros diagramas dadas por las ecuaciones (3.174), (3.175) y (3.176), resolviendo las integrales en el espacio de los momentos y realizando los desarrollos en el entorno de los polos, obtenemos la siguiente expresión:

$$2ie^2\Gamma_\lambda^{\mu\nu} = \frac{2ie^2\lambda}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{4}{s}k_1^\mu k_2^\nu \int_0^1 dx \log\left(\frac{m^2}{\Delta_{4fe1}^2}\right) - \left(2m^2 g^{\mu\nu} - \frac{4m^2}{s}k_1^\nu k_2^\mu \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{s}k_1^\mu k_2^\nu(4m^2 + s) \right) I_p \frac{1}{\Delta_{4fe2}^2} \right\}. \quad (3.177)$$

Se puede observar que la suma de las contribuciones de los tres primeros diagramas es finita. En efecto se espera este resultado, pues la contribución del contratérmino no contiene un término λ ni es del mismo orden en el parámetro e , lo que nos dice que el contratérmino debe anular las divergencias que surgan en los siguientes diagramas.

Procediendo con el cálculo de los siguientes diagramas, la contribución del cuarto diagrama está dada por:

$$2ie^2\Gamma_{(4)}^{\mu\nu} = \frac{2ie^4}{(4\pi)^2} g^{\mu\nu} \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} i\pi^2 \left[-B_0(s, m^2, m^2) + 2B_0(m^2, 0, m^2) \right. \\ \left. + 2(2m^2 - s)C_0(m^2, m^2, s, m^2, 0, m^2) \right].$$

Resolviendo las integrales en el espacio de los momentos se obtiene la expresión:

$$2ie^2\Gamma_{(4)}^{\mu\nu} = \frac{2ie^4}{(4\pi)^2} g^{\mu\nu} \left\{ \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left[2 \left(\frac{\Delta_{4v1'}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta_{4fe1}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \right] - 2(2m^2 - s) I_p \frac{1}{\Delta_{4v3}^2} \right\}. \quad (3.178)$$

En lo que respecta al quinto diagrama, se encuentra que:

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.8. FUNCIÓN VÉRTICE: 2 FOTONES 2 ESCALARES

$$\begin{aligned}
2ie^2\Gamma_{(5)}^{\mu\nu} &= -\frac{4ie^4}{(4\pi)^2}g^{\mu\nu}\Gamma(2)\int_0^1\frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}}\int d^Dk\frac{1}{[k^2-\Delta_{4fe3}^2]^2} \\
&= -\frac{4ie^4}{(4\pi)^2}g^{\mu\nu}\int_0^1dx\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{\Delta_{4fe3}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}, \tag{3.179}
\end{aligned}$$

con $\Delta_{4fe3}^2 = m^2(1-x) - tx(1-x)$ y t otra de las variables de Mandelstam. De manera análoga tenemos para el diagrama 6:

$$2ie^2\Gamma_{(6)}^{\mu\nu} = -\frac{4ie^4}{(4\pi)^2}g^{\mu\nu}\int_0^1dx\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{\Delta_{4fe4}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}, \tag{3.180}$$

con $\Delta_{4fe4}^2 = m^2(1-x) - ux(1-x)$ y con u otra de las variables de Mandelstam. Antes de trabajar con los diagramas restantes, notemos que la contribución del contratérmino es de orden e^2 , por lo que dicha contribución debe de anular las divergencias que surgan tanto de las contribuciones dadas por las ecuaciones (3.178), (3.179) y (3.180), como las contribuciones del resto de los diagramas de orden e^2 . El contratérmino δ_e desarrollado en el entorno de los polos es:

$$\begin{aligned}
\delta_e &= \frac{e^2}{(4\pi)^2}\left\{\frac{4}{\epsilon} - 2\gamma_E - \int_0^1dx\left[3\log\left(\frac{\Delta_{3v}^2}{4\pi\mu^2}\right)(1-x^2) + (x+2)(1-x)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.-\frac{m^2(2+3x-x^3)(1-x)}{\Delta_{3v}^2}\right]\right\}. \tag{3.181}
\end{aligned}$$

Si sumamos las contribuciones de los diagramas dadas por las ecuaciones (3.178) a (3.180) y desarrollamos en el entorno de los polos, se tiene:

$$\Gamma_{(4-6)}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{(4\pi)^2}g^{\mu\nu}\left\{\int_0^1dx\left[-\frac{6}{\epsilon} + g_{(4-6)}(s,t,u)\right] - 2(2m^2-s)I_p\frac{1}{\Delta_{4v3}^2}\right\}, \tag{3.182}$$

donde $g_{(4-6)}(s,t,u)$ es una función finita que contiene logaritmos.

Al introducir las contribuciones de los diagramas 7 al diagrama 10 en FeynCalc, obtenemos una expresión que depende de los momentos externos, del tensor métrico $g^{\mu\nu}$, de las funciones escalares de Passarino-Veltman A_0, B_0 y C_0 , además de las variables de Mandelstam s, t (diagramas 7 y 9) y u (diagramas 8 y 10). Tanto los diagramas 7 y 8 como los diagramas 9 y 10 adquieren la misma forma al intercambiarse t por u . Nos interesa saber si no hay divergencias al sumar la contribución del contratérmino con los diagramas de orden e^2 , para ello recordemos que las divergencias están en las funciones escalares de Passarino-Veltman A_0 y B_0 , por lo que estudiar los coeficientes de dichas funciones nos ayudará a saber si las divergencias se anulan con el contratérmino. En general la solución de las funciones escalares A_0 tienen la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}}A_0(m_0^2) &= \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}}\frac{1}{i\pi^2}\int d^Dk\frac{1}{k^2-m_0^2} \\
&= -\frac{1}{i\pi^2}m_0^2\Gamma\left(-1+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{m_0^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}, \tag{3.183}
\end{aligned}$$

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**
3.8. FUNCIÓN VÉRTICE: 2 FOTONES 2 ESCALARES

mientras que la solución de las funciones escalares B_0 son dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} B_0(p^2, m_0^2, m_1^2) &= \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{i\pi^2} \int d^D k \frac{1}{[k^2 - \Delta_{B_0}^2]^2} \\ &= \frac{1}{i\pi^2} \int_0^1 dx \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\Delta_{B_0}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}, \end{aligned} \quad (3.184)$$

donde $\Delta_{B_0}^2$ depende de la parametrización de Feynman realizada. Usando las ecuaciones (3.35) a (3.37), se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} -\Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{m_0^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + 1 - \log\left(\frac{m_0^2}{4\pi\mu^2}\right) + O\left(\frac{\epsilon}{2}\right), \\ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{\Delta_{B_0}^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E - \log\left(\frac{\Delta_{B_0}^2}{4\pi\mu^2}\right) + O\left(\frac{\epsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Centremos nuestra atención en el término que contiene las divergencias: $\frac{2}{\epsilon}$. A la suma de los coeficientes de las funciones B_0 se deben sumar los coeficientes de las funciones $A_0(m^2)$ multiplicados por m^2 , ya que las soluciones de las funciones $A_0(m^2)$ involucran un factor m^2 (ver ecuación (3.183)). La suma de dichos coeficientes nos permite obtener el coeficiente de $\frac{2}{\epsilon}$. Si bien las soluciones de las funciones B_0 están integradas en x mientras que las de las funciones A_0 no dependen de x , note que al integrar los valores constantes y evaluarlas en los límites el resultado es la misma constante, es decir,

$$\frac{2}{\epsilon} \int_0^1 dx = \frac{2}{\epsilon},$$

por lo que sin problemas podemos sumar los coeficientes de A_0 y B_0 para obtener el coeficiente de $\frac{2}{\epsilon}$.

Nombrando $C_{i_{A_0}}$, $C_{i_{B_0}}$, $i = 7, 8, 9, 10$ a los coeficientes del diagrama 7 al diagrama 10 de las funciones A_0 y B_0 respectivamente, la suma de los coeficientes de las funciones A_0 y B_0 para cada diagrama es:

$$C_{i_{A_0}} + C_{i_{B_0}} = \frac{1}{2} i\pi^2 g^{\mu\nu}. \quad (3.185)$$

Así, al sumar las contribuciones de los diagramas del 7 al 10 y considerando el coeficiente del término $\frac{2}{\epsilon}$ dado por (3.185), se obtiene la expresión:

$$\Gamma_{(7-10)}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{4}{\epsilon} g^{\mu\nu} + g_{(7-10)}(s, t, u) \right], \quad (3.186)$$

donde $g_{(7-10)}(s, t, u)$ es una función finita de la suma de las contribuciones de los diagramas del 7 al 10. El coeficiente del término $\frac{2}{\epsilon}$ es el tensor métrico $g^{\mu\nu}$, lo cual es lo esperado, pues la contribución del contratérmino δ_e es acompañada del tensor métrico, por lo que esperamos que se anulen los términos que contienen las divergencias.

En lo que respecta a los diagramas de caja, al introducir en FeynCalc las amplitudes correspondientes se puede ver que ambos diagramas adquieren la misma forma al intercambiar la variable

**CAPÍTULO 3. RENORMALIZACIÓN DE ELECTRODINÁMICA ESCALAR A
ORDEN DE UN LAZO**

3.8. FUNCIÓN VÉRTICE: 2 FOTONES 2 ESCALARES

t por u . Haciendo el mismo análisis de coeficientes de las funciones escalares A_0 y B_0 para determinar los coeficientes del término que contiene la divergencia $\frac{2}{\epsilon}$, obtenemos que la suma de dichos coeficientes son dados por:

$$C_{jA_0}^c + C_{jB_0}^c = i\pi^2 g_{\mu\nu}, \quad (3.187)$$

con $C_{jA_0}^c, C_{jB_0}^c, j = 1, 2$ los coeficientes de los diagramas de caja de las funciones A_0 y B_0 respectivamente. Al sumar las contribuciones de los diagramas de caja y considerando el coeficiente del término $\frac{2}{\epsilon}$ dado por (3.187), se obtiene la expresión:

$$\Gamma_{(11,12)}^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{2(4\pi)^2} \left[\frac{4}{\epsilon} g^{\mu\nu} + g_{(11,12)}(s, t, u) \right], \quad (3.188)$$

donde $g_{(11,12)}(s, t, u)$ es una función finita de la suma de las contribuciones de los diagramas de caja.

Centremos nuestra atención en los términos que contienen las divergencias en los diagramas, es decir, en los términos que contengan a $\frac{2}{\epsilon}$. Denotando por $\hat{\Gamma}_{c.t.}^{\mu\nu}$ como la parte divergente que contiene la contribución del contratérmino dado por las ecuaciones (3.157) y (3.181), se tiene:

$$\hat{\Gamma}_{c.t.}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} g^{\mu\nu} \frac{4}{\epsilon}. \quad (3.189)$$

Por otro lado, la parte divergente de la suma de las contribuciones de los diagramas 4 al 6 dadas por la ecuación (3.182), denotada por $\hat{\Gamma}_{(4-6)}^{\mu\nu}$, se escribe como:

$$\hat{\Gamma}_{(4-6)}^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} g^{\mu\nu} \frac{6}{\epsilon}. \quad (3.190)$$

De manera análoga, podemos escribir la parte divergente de la suma de las contribuciones de los diagramas 7 al 10 dada por la ecuación (3.186), la cual es denotada por $\hat{\Gamma}_{(7-10)}^{\mu\nu}$, como sigue:

$$\hat{\Gamma}_{(7-10)}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} g^{\mu\nu} \frac{4}{\epsilon}. \quad (3.191)$$

Finalmente, denotemos por $\hat{\Gamma}_{(11,12)}^{\mu\nu}$ a la parte divergente de la suma de las contribuciones de los diagramas de caja dada por la ecuación (3.188), la cual se escribe como:

$$\hat{\Gamma}_{(11,12)}^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} g^{\mu\nu} \frac{2}{\epsilon}. \quad (3.192)$$

Al sumar todas las contribuciones de las ecuaciones (3.189) a (3.192) se obtiene:

$$\hat{\Gamma}_{c.t.}^{\mu\nu} + \hat{\Gamma}_{(4-7)}^{\mu\nu} + \hat{\Gamma}_{(8-11)}^{\mu\nu} + \hat{\Gamma}_{(12,13)}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{(4\pi)^2} g^{\mu\nu} \left[\frac{4}{\epsilon} - \frac{6}{\epsilon} + \frac{4}{\epsilon} - \frac{2}{\epsilon} \right] = 0.$$

Podemos ver que en efecto las divergencias ultravioletas de los diagramas son canceladas por la contribución del contratérmino δ_e , mismo que surge como consecuencia de invariancia de norma. Por lo tanto, la función vértice de 2 escalares y 2 fotones renormalizada es finita a orden de un lazo. Las divergencias infrarrojas no son consideradas en este análisis.

Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesis se ha presentado un estudio completo de la renormalización a orden de un lazo de la electrodinámica escalar. A nivel de árbol, la teoría contiene interacciones de dos puntos $\phi^\dagger\phi$ y $A_\mu A_\nu$, de tres puntos $\phi^\dagger\phi A_\mu$, y de cuatro puntos $(\phi\phi^\dagger)^2$ y $\phi^\dagger\phi A_\mu A_\nu$, las cuales están caracterizadas por las funciones vértice $\Gamma_2(p^2)$ y $\Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi(q^2)(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$, $\Gamma^\mu(p, p')$ y $\Gamma(s, t, u)$ y $\Gamma^{\mu\nu}(s, t, u)$, respectivamente. A orden de un lazo, dichas funciones vértice reciben contribuciones divergentes de la lagrangiana renormalizada, \mathcal{L}_{SQED} , las cuales deben ser canceladas por las contribuciones de la lagrangiana de contratérminos $\mathcal{L}_{c.t.}^{SQED}$. Estas lagrangianas surgen de desdoblar la lagrangiana desnuda original, \mathcal{L}_B , expresándola en términos de las cantidades renormalizadas ϕ , A_μ , m , λ y e y los contratérminos respectivos δ_ϕ , δ_A , δ_m^2 , δ_λ y δ_e :

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_{SQED} + \mathcal{L}_{c.t.}^{SQED},$$

$$\mathcal{L}_{SQED} = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{c.t.}^{SQED} = & \delta_\phi(\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi) + ie\delta_e A_\mu(\phi^\dagger\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^\dagger) + e^2\left(\frac{Z_e^2}{Z_\phi} - 1\right)A_\mu A^\mu(\phi^\dagger\phi) \\ & - \delta_m^2(\phi^\dagger\phi) - \frac{\delta_\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi)^2 - \frac{\delta_A}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Las divergencias ultravioletas que surgen a orden de un lazo son regularizadas mediante el esquema dimensional.

Los contratérminos son determinados a través de las condiciones de renormalización, procedimiento que se conoce como esquema de renormalización. Aunque existen muchos de ellos, en esta tesis se ha adoptado el esquema de renormalización on-shell o físico, determinado por las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \Gamma_2(p^2 = m^2) &= 0, \\ \left.\frac{d\Gamma_2}{dp^2}\right|_{p^2=m^2} &= 0, \end{aligned}$$

las cuales determinan los contratérminos δ_ϕ y δ_m^2 ;

$$\Pi(q^2 = 0) = 0,$$

que determina δ_A ;

$$\Gamma^\mu(q = 0) = 2p^\mu,$$

la cual determina δ_e ; y

$$\Gamma_4\left(s_0 = t_0 = u_0 = \frac{4}{3}m^2\right) = 1,$$

que determina δ_λ . Estas condiciones son suficientes para determinar todos los contratérminos asociados con los parámetros físicos, lo cual significa que la cancelación de la divergencia asociada con la función de cuatro puntos $\Gamma^{\mu\nu}(s, t, u)$ debe estar garantizada por invariancia de norma. En efecto, se demostró de manera explícita que se verifica la identidad de Ward

$$\delta_e = \delta_\phi,$$

lo cual implica que el contratérmino que cancela la divergencia de $\Gamma^{\mu\nu}(s, t, u)$ es justamente δ_e , esto es,

$$\frac{Z_e^2}{Z_\phi} - 1 = \delta_e,$$

lo cual conduce a una lagrangiana de contratérminos que es invariante de norma en forma manifiesta:

$$\mathcal{L}_{c.t.}^{SQED} = \delta_\phi (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \delta_m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{\delta_\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{\delta_A}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

La invariancia de norma, dada a través de la identidad $\delta_e = \delta_\phi$, conduce, además, a la siguiente relación entre la carga desnuda e_B y la carga renormalizada e :

$$e_B = Z_A^{-\frac{1}{2}} e,$$

lo cual nos muestra que la renormalización de la carga depende de la renormalización del campo electromagnético $A_B^\mu = Z_A^{\frac{1}{2}} A^\mu$, pero no de la renormalización del campo de la partícula que lo porta, lo que le da un carácter universal.

Otro punto a destacar es la importancia de la presencia del término $\frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2$ en la teoría, ya que si bien es cierto que este vértice no es generado vía derivada covariante, éste recibe contribuciones divergentes a orden de un lazo inducidas por los vértices de norma $\phi^\dagger \phi A_\mu$ y $\phi^\dagger \phi A_\mu A_\nu$, así que su presencia es necesaria para generar el contratérmino correspondiente.

Finalmente, el fenómeno de polarización del vacío y sus efectos sobre el potencial de Coulomb fueron discutidos.

Apéndice A

Regularización dimensional

En los cálculos a orden de un lazo nos interesa resolver integrales de la forma:

$$I_N = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\prod_{i=1}^N D_i}, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\begin{aligned} D_1 &= k^2 - m_1^2 \\ D_2 &= (k + p_1)^2 - m_2^2 \\ D_3 &= (k + p_2)^2 - m_3^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aplicando parametrización de Feynman podemos reescribir la integral como:

$$I_N = \Gamma(N) \int_0^1 dx_1 \dots dx_N \delta\left(\sum_{i=1}^N x_i - 1\right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [x_1 D_1 + x_2 D_2 + \dots + x_N D_N]^{-N}. \quad (\text{A.2})$$

La ventaja de usar la parametrización de Feynman es que siempre es posible reescribir el denominador en la forma $[(k + l)^2 - \Delta^2]^{-N}$, y aplicando un corrimiento en la variable de integración la integral toma la forma:

$$I_N = \Gamma(N) \int_0^1 dx_1 \dots dx_N \delta\left(\sum_{i=1}^N x_i - 1\right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta^2)^N}, \quad (\text{A.3})$$

lo que nos permitirá resolver la integral en el espacio de los momentos.

Para aislar las divergencias de las integrales de los lazos podemos usar el esquema de *regularización dimensional* [15]. Este esquema de regularización consiste en suponer que la integral está definida en un espacio complejo de dimensión D , haciéndose manifiesta la divergencia en el límite $D \rightarrow 4$ en forma de polos. Mediante la regularización de la integral podemos extraer las partes finitas y las divergentes y así trabajar con estas. Para ello es necesario introducir una escala μ con unidades de masa que nos permite corregir las unidades de las constantes de acoplamiento al cambiar la dimensión. Después de realizar parametrización de Feynman se tendrán integrales de la forma:

APÉNDICE A. REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL

$$I_N = \Gamma(N)(\mu^2)^{\frac{4-D}{2}} I_P \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - \Delta^2)^N} = \frac{i}{(4\pi)^2} I_P \Gamma(N) \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \int \frac{d^D k}{(k^2 - \Delta^2)^N}, \quad (\text{A.4})$$

con $I_P \equiv \int_0^1 dx_1 \dots dx_N \delta\left(\sum_{i=1}^N x_i - 1\right)$ la integral paramétrica. También se pueden presentar integrales tensoriales. Las soluciones de las integrales que aparecen en los diagramas de lazo son:

$$\Gamma(N) \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \int \frac{d^D k}{(k^2 - \Delta^2)^N} = (-1)^N (\Delta^2)^{2-N} \Gamma\left(N - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\Delta^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})}, \quad (\text{A.5})$$

$$\Gamma(N) \frac{(4\pi\mu^2)^{2-\frac{D}{2}}}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \int d^D k \frac{k^2}{(k^2 - \Delta^2)^N} = \frac{D}{2} (-1)^{N-1} (\Delta^2)^{3-N} \Gamma\left(N - 1 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{\Delta^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-(2-\frac{D}{2})}. \quad (\text{A.6})$$

Notemos que en (A.5) para $N \geq 3$ los resultados son finitos, por lo que es posible usar $D = 4$ ($\epsilon = 0$).

En el cálculo de integrales tendremos expresiones de la forma:

$$\int \frac{d^D k k^\alpha k^\beta}{(k^2 - \Delta^2)^N} = A g^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.7})$$

con A un escalar de Lorentz a determinar. Para obtenerlo se debe contraer la expresión anterior con $g_{\alpha\beta}$:

$$\int \frac{d^D k k^2}{(k^2 - \Delta^2)^N} = A g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = AD,$$

de forma que

$$A = \frac{1}{D} \int \frac{d^D k k^2}{(k^2 - \Delta^2)^N}. \quad (\text{A.8})$$

Así,

$$\int \frac{d^D k k^\alpha k^\beta}{(k^2 - \Delta^2)^N} = \frac{1}{D} \int \frac{d^D k k^2 g^{\alpha\beta}}{(k^2 - \Delta^2)^N}, \quad (\text{A.9})$$

por lo que en integrales de esta forma es válido realizar el cambio:

$$k^\alpha k^\beta \rightarrow \frac{k^2 g^{\alpha\beta}}{D}. \quad (\text{A.10})$$

La expansión de la función $\Gamma(z)$ cerca del polo $-n$ es:

$$\Gamma(z - n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{z} + \Psi(n+1) + O(z) \right],$$

donde

$$\Psi(n+1) = \Psi(1) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad \text{siendo } \Psi(1) = -\gamma_E.$$

Así tenemos las expansiones:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + O\left(\frac{\epsilon}{2}\right), \\ \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) &= -\frac{2}{\epsilon} + \gamma_E - 1 - O\left(\frac{\epsilon}{2}\right), \\ \left(\frac{\Delta_2^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} &= 1 - \frac{\epsilon}{2} \log\left(\frac{\Delta_2^2}{4\pi\mu^2}\right) + O\left(\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right), \\ \left(\frac{\Delta_2^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} - \left(\frac{\overline{\Delta_2^2}}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} &= \frac{\epsilon}{2} \log\left(\frac{\overline{\Delta_2^2}}{\Delta_2^2}\right) + O\left(\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right),\end{aligned}$$

que son usadas en los resultados obtenidos tras usar regularización dimensional.

Apéndice B

Identidad de Ward-Takahashi

Consideremos una amplitud de probabilidad \mathcal{M} con n líneas escalares entrando y n saliendo. Sean p_i y q_i los momentos entrantes y salientes respectivamente, la amplitud de probabilidad es de la forma:

$$\mathcal{M}(k, p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) = \text{Diagrama}$$

La amplitud de probabilidad \mathcal{M}_0 representa la amplitud \mathcal{M} sin el fotón de momento k . Para obtener $k_\mu \mathcal{M}^\mu$ de \mathcal{M}_0 deben sumarse sobre todos los diagramas que contribuyen a \mathcal{M}_0 , y en cada diagrama sumar todas las posibles formas en las que el fotón de momento k puede ser insertado. De esta forma se tiene la identidad de Ward-Takahashi:

$$\sum_{\text{inserciones}} k_\mu \cdot \left(\text{Diagrama con } k \text{ insertado} \right) = e \sum_i \left(\text{Diagrama } i - \text{Diagrama } i \right), \quad (\text{B.1})$$

donde el círculo sombreado representa cualquier diagrama que contribuya a la amplitud \mathcal{M}_0 . Sumando sobre todos los posibles diagramas obtenemos:

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu(k, p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n) = e \sum_i [\mathcal{M}_0(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_i - k, \dots) - \mathcal{M}_0(p_1, \dots, p_i + k, \dots; q_1, \dots, q_n)]. \quad (\text{B.2})$$

Si la parte derecha de la identidad es igual a 0, se tiene como caso especial a la identidad de Ward.

Bibliografía

- [1] T. Y. CAO & S. S. SCHWEBER, *The Conceptual Foundations and the Philosophical Aspects of Renormalization Theory*. Synthese **97** no.1, 33 (1993).
- [2] F.J. DYSON, *The S Matrix in Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949).
- [3] P.T. MATTHEWS, *XVI. The S-matrix for meson-nucleon interactions*, Philosophical Magazine Series 7 **41**, 185 (1950).
- [4] P.T. MATTHEWS, *Spinless Mesons in the Electromagnetic Field*, Phys. Rev. **80**, 292 (1950).
- [5] F. ROHRLICH, *Quantum Electrodynamics of Charged Particles without Spin*, Phys. Rev. **80**, 666 (1950).
- [6] A. SALAM, *Renormalized S-Matrix for Scalar Electrodynamics*, Phys. Rev. **86**, 731 (1952).
- [7] A. SALAM, *Renormalization of scalar electrodynamics using β -formalism*, Proc. R. Soc. Lond. A **211**, 276 (1952).
- [8] A. SALAM & R. DELBOURGO, *Renormalizable Electrodynamics of Scalar and Vector Mesons. II*, Phys. Rev. **135**, B1398 (1964).
- [9] M. E. PESKIN & D. V. SCHROEDER, *An Introduction to Quantum Field Theory*, CRC Press (2018).
- [10] M. KAKU, *Quantum Field Theory. A Modern Introduction*, Oxford University Press (1993).
- [11] T. P. CHENG & L. F. LI, *Gauge theory of elementary particle physics*. Oxford University Press (2000).
- [12] L. RYDER, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 2nd Edition, United States (2012).
- [13] M. D. SCHWARTZ, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press, United States (2014).
- [14] C. ITZYKSON & J. B. ZUBER, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, United States (1980).
- [15] G. T'HOOFT & M. VELTMAN, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. **B 44**, 189 (1972).
- [16] ATLAS COLLABORATION, *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, Phys. Lett. **B 716**, 1 (2012); CMS COLLABORATION, *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*, Phys. Lett. **B 716**, 30 (2012); CMS COLLABORATION, *Observation of a new boson with mass near 125 GeV in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV*, JHEP **06**, 081 (2013).

- [17] P.W. HIGGS, *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*, Phys. Lett. **12**, 132 (1964); P.W. HIGGS, *Broken symmetries and the masses of gauge bosons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964); G.S. GURALNIK, C.R. HAGEN & T.W.B. KIBBLE, *Global conservation laws and massless particles*, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964); P.W. HIGGS, *Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons*, Phys. Rev. **145**, 1156 (1966); T.W.B. KIBBLE, *Symmetry breaking in non-Abelian gauge theories*, Phys. Rev. **155**, 1554 (1967); F. ENGLERT & R. BROUT, *Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
- [18] H. GEORGI & M. MACHACEK, *Doubly Charged Higgs Bosons*, Nucl. Phys. **B 262**, 463 (1985); J.F. GUNION & H.E. HABER, *Higgs Bosons in Supersymmetric Models (I)*, Nucl. Phys. **B 272**, 1 (1986); J.F. GUNION & H.E. HABER, *Higgs Bosons in Supersymmetric Models (II). Implications for phenomenology*, Nucl. Phys. **B 278**, 449 (1986).
- [19] J.F. GUNION, R. VEGA & J. WUDKA, *Higgs triplets in the standard model*, Phys. Rev. **D 42**, 1673 (1990).
- [20] G. C. BRANCO, P. M. FERREIRA, L. LAVOURA, M. N. REBELO, M. SHER & J. P. SILVA, *Theory and phenomenology of two-Higgs-doublet models*, Phys. Rep. **516**, 1 (2012).
- [21] L.BARAK, *Search for Charged Higgs Bosons with the ATLAS Detector, Nuclear and Particle Physics Proceedings*, Volumes 273–275, 896 (2016); THE CMS COLLABORATION., A.M. SIRUNYAN, A. TUMASYAN, ET AL. *Search for charged Higgs bosons in the $H^\pm\beta\tau^\pm\nu_\tau$ decay channel in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13\text{TeV}$* , J. High Energ. Phys. **2019**, 142 (2019).
- [22] W. GREINER & J. REINHARDT, *Field Quantization*, Springer, Germany (1996).
- [23] R. M. WALD, *General Relativity*, The University of Chicago Press, United States (1984).
- [24] H. LEHMANN, K. SYMANZIK & W. ZIMMERMANN, *Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien*, Nuovo Cim **1**, 205 (1955).
- [25] P.A. ZYLA ET AL. (PARTICLE DATA GROUP), Prog. Theor. Exp. Phys. 2020, 083C01, 137 (2020).
- [26] V. SHTABOVENKO, R. MERTIG & F. ORELLANA, Comput. Phys. Commun. 256(2020) 107478, arXiv:2001.04407; V. SHTABOVENKO, R. MERTIG & F. ORELLANA, Comput. Phys. Commun. 207 (2016) 432-444, arXiv:1601.01167; R. MERTIG, M. BÖHM, & A. DENNER, Comput. Phys. Commun. 64 (1991) 345-359.
- [27] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 12.0, Champaign, IL (2019).