



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

NUEVAS MEDIDAS EXTERIORES EN LA LÍNEA REAL

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

por

Erika García Rodríguez

Asesorado por

Dr. Salvador García Ferreira

Dr. Ivan Martínez Ruíz

Puebla Pue.
Junio de 2020

*Para la mujer que amo, admiro, me da fuerzas e
impulsa mis metas, mi madre Claudia.*

Agradecimientos

Ahora que culmino con un propósito más de mis metas, quiero destacar a aquellas personas que con ellas de alguna manera eh podido llevar a cabo esta gran travesia, mi licenciatura.

Gracias a mi madre por ser la razón de cumplir mis metas, gracias por tener confianza en mi, gracias por apoyarme en cada decisión y proyecto, te amo. Gracias a mis hermanos que en todo momento me demostraron su apoyo.

Agradezco a mis asesores de tesis, el Dr. Salvador García Ferreira y el Dr. Ivan Martínez Ruíz, por aceptar trabajar conmigo en esta tesis bajo su dirección. Al Dr. Salvador gracias porque me dejo grandes enseñanzas y una gran motivación durante este trabajo, además de ser una excelente persona. Al Dr. Ivan gracias por ser aparte de un buen profesor, ser un excelente guia en el último proceso de licenciatura, al igual de ser una admirable persona.

Agradezco a mis sinodales, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dr. Agustin Contreras Carreto y Dr. Alejandro Ramírez Páramo, por su tiempo, dedicación en la revisión de este trabajo y permitirme cumplir con excelencia el desarrollo de este trabajo.

Agradezco a todos los profesores de la facultad ciencias físico matemáticas, que me enseñaron a valorar y amar esta profesión, pero sobre todo como mención especial agradezco al profesor Celestino Soriano, por todas sus enseñanzas tanto académicas como personales.

Gracias a todos los compañeros, amigos que estuvieron presentes durante todo el proceso de mi carrera, gracias por formar parte de ello, todos ustedes son excelentes personas.

Gracias a ti amor Marco Antonio por ser mi compañero, mi amigo y novio en toda esta gran meta, no ha sido sencillo el camino hasta ahora, pero gracias a tu amor y apoyo, esta meta se ha logrado, te amo.

Índice general

Introducción	IX
Capítulo 1. Preliminares	2
0.1. Conceptos básicos	2
0.1.1. Preliminares de Teoría de Conjuntos	2
0.1.2. Medida Exterior	3
0.1.3. σ -Algebra y Medidas	4
0.1.4. σ -Ideal	6
0.2. Selecciones de dos puntos	7
0.2.1. Definición de selección de dos puntos	7
0.2.2. Pre-orden inducido por una selección de dos puntos	7
0.2.3. Definición de f -intervalos	8
0.2.4. Ejemplos de selecciones de dos puntos	8
0.3. Axioma de Martin	10
Capítulo 2. Medidas exteriores mediante una selección de dos puntos	17
0.4. Medidas exteriores especiales	17
0.5. Propiedades básicas	18
Capítulo 3. σ-Ideales de conjuntos nulos	26
0.6. σ -Ideales de la forma \mathcal{N}_f	26
0.7. \mathcal{N}_f -Ideales bajo CH	31
0.8. \mathcal{N}_f -Ideales bajo el Axioma de Martin	34
Capítulo 4. Equivalencia y congruencia de las selecciones de dos puntos	37
Conclusión	43
Bibliografía	44

Introducción

Una medida se puede interpretar como el tamaño de un conjunto y, por ello una medida se puede ver como una generalización de los conceptos de longitud, área y volumen. La idea de asignar un número a un subconjunto de los números reales fué la idea básica del concepto de la noción de una medida. Esta idea atrajo a matemáticos como Borel, Baire y Carathéodory. El primero en incluir una teoría general de medidas exteriores fué Constantin Carathéodory (1873-1950), para así dar un sustento a la teoría de conjuntos medibles y funciones contablemente aditivas. En el trabajo de Carathéodory podemos encontrar muchos nuevos conceptos tales como la teoría conjuntista de medidas y, la construcción de una medida exterior sobre todos los subconjuntos de un conjunto dado y, de ahí elegir una clase de subconjuntos que satisfagan la propiedad de aditividad numerable (conjuntos medibles). Este método es conocido como la construcción de Carathéodory y en donde se obtiene el concepto de Medida de Lebesgue que es muy importante en varias áreas de la matemática y, en muchas aportaciones a la teoría de la axiomatización en la Teoría de Probabilidades, dada por Kolmogoroff en 1933.

La Teoría de la Medida tuvo un gran desarrollo a finales del siglo XIX y a principios del siglo XX, por Emile Borel, Maurice Fréchet y Johann Radon, entre otros. En los números reales, la función longitud l de un intervalo acotado I con extremos r y s se define como $l(I) := s - r$. Es natural preguntarse, ¿es posible extender éste concepto de longitud a subconjuntos arbitrarios de \mathbb{R} ? Una respuesta a esta pregunta es lo que conocemos como la **Medida Exterior de Lebesgue** originada en 1901. Al año posterior a esto, se desarrolló la integral de Lebesgue. Ambos conceptos fueron incluidos en 1902 como parte del trabajo doctoral del matemático francés Henri Lebesgue (1875-1941) mediante el título *Intégrable, Longueur, Aire*, siendo uno de los primeros en hacerlo con formalidad y aplicarlo en una gran cantidad de problemas de Análisis Real y Complejo. Henri Lebesgue primeramente, anunció su trabajo de Teoría de la Medida e Integración en cinco artículos publicados a partir de junio de 1899 hasta abril de 1901 en la revista *Comptes Rendu* de la Academia Francesa de Ciencias, en donde desarrolló las ideas de Borel sobre medidas con gran transparencia y generalidad, he introdujo la Medida de Lebesgue axiomáticamente como una función definida en los conjuntos acotados de la línea real en donde: La medida de un conjunto el cual es la unión finita o numerable de conjuntos disjuntos a pares, es la suma de las medidas de ellos; dos conjuntos iguales tienen la misma medida; la medida del intervalo $(0, 1)$ es 1.

Se sabía desde esa época que la clase de todos los conjuntos llamados Lebesgue medibles tiene la misma cardinalidad que el conjunto potencia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Así surge la pregunta natural: ¿Ésta familia es igual al conjunto potencia de \mathbb{R} ? Un resultado debido a S.M. Ulam (1930), el cual asumiendo la hipótesis del continuo, probó que esto es falso. Ahora, ¿Qué logramos decir si no consideramos ésta hipótesis? Por un lado podríamos intentar construir un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que no es Lebesgue medible, o asumir que si tal conjunto existe se obtiene una contradicción. G. Vitali (1905), F. Bernstein (1908), H. Rademacher (1916) y otros, asumiendo el Axioma de Elección construyeron tal conjunto. Para su ejemplo Vitali empleó la propiedad de la invarianza en translación de la medida de Lebesgue, en cambio que el de Bernstein aplica propiedades de regularidad. Por su parte Rademacher probó que cada conjunto de medida positiva incluye un conjunto no medible. Como

en aquella época no se admitía el Axioma de Elección por no ser claro, Lebesgue no se atrevió a aceptarlo. En el año 1970, R. Solovay probó que si se incluye el enunciado “todos los subconjuntos de \mathbb{R} son Lebesgue medible” como un axioma de la Teoría de Conjuntos, éste es consistente con los demás, si no suponemos el Axioma de Elección. Actualmente sabemos que el Axioma de Determinación implica que todos los subconjuntos de los números reales son Lebesgue medibles.

Las medidas han sido muy importantes en las aplicaciones como en la Teoría de la probabilidad y, en algunas otras áreas de la ciencias exactas. Mencionaremos algunas importantes a continuación:

a) La Medida de Dirac (física). En matemáticas, una medida de Dirac asigna un tamaño a un conjunto basándose únicamente si dicho conjunto contiene o no un elemento fijo predeterminado. Esto formaliza, de alguna manera, la llamada función delta de Dirac; la cual es una distribución introducida por primera vez por el físico británico Paul Dirac y, como distribución, define un funcional en forma de integral sobre un cierto espacio de funciones. Esto es una de las herramientas importantes en física y otras áreas.

b) Las medidas de probabilidad. Actualmente el uso de la estadística y probabilidad son muy importantes en las aplicaciones políticas y sociales de un gobierno. Esto les permite actuar en las deficiencias que se tengan en una población y realización de presupuesto. La probabilidad matemática es una parte importante de la Teoría de la Medida y, cada estudiante de la Teoría de la Medida debería tener conocimiento de los conceptos fundamentales y las específicas relaciones de funciones de este tema. Además, la probabilidad ofrece un rango de ejemplos de la Teoría de la Medida y aplicaciones en la matemática pura.

La idea básica de la construcción de una medida exterior radica en el uso de aquellos subconjuntos cuyo longitud ya conocemos (en el caso de la medida de Lebesgue son los intervalos semiabiertos). Posteriormente tomamos un conjunto arbitrario y lo cubrimos de manera numerable con conjuntos cuya medida ya conocemos y sumamos las longitudes de todos los que componen la cubierta. Esto nos aproxima al tamaño que le queremos asignar al conjunto dado. El tamaño de nuestro conjunto será el ínfimo sobre todas las sumas de las longitudes de los elementos de las cubiertas numerables consideradas.

En esta tesis introduciremos medidas exteriores sobre los números reales por medio de selecciones de dos puntos las cuales generalizan de manera natural la medida de Lebesgue en los números reales. Estas medidas se introdujeron de manera sistemática en el artículo [7]. Se ha mostrado su efectividad en el entendimiento de los estudiantes de la noción de medida en cursos que se han impartido del tema. Con estas medidas se ha creado un tema relevante en el área de la Teoría de la Medida y que por sus propiedades pretende dar resultados, ejemplos y contraejemplos relevantes. Una cuestión interesante de estas medidas es que nos han llevado a nuevas investigaciones sobre los temas de σ -ideales de subconjuntos de los números reales (ver [15]). Es por esto que en esta tesis se pretende hablar más de las propiedades de estas medidas y para que se tomen como notas para un curso básico de Teoría de la Medida. A continuación hablaremos de las selecciones de dos puntos para el entendimiento de esta introducción.

Una función f con dominio en la colección de conjuntos de dos puntos de un conjunto dado X y rango igual a X , se llama selección de dos puntos si la función evaluada en $\{x, y\}$, toma el valor ya sea x o y para todo subconjunto $\{x, y\}$ de X . En esta tesis, solo consideraremos las selecciones de dos puntos de la línea real \mathbb{R} . Un ejemplo clásico de selección de dos puntos nos lo da el orden estándar de los números reales.

Las selecciones de dos puntos f nos definen un preorden $x \preceq_f y$ si y sólo si $f(\{x, y\}) = x$ o $x = y$, para todo subconjunto $\{x, y\}$ de X . La topología τ_f generada por la selección de dos puntos f es

la que tiene como subbase a la familia de todos los intervalos $(\leftarrow, x)_f = \{y \in X : y \prec_f x\}$ y $(x, \rightarrow)_f = \{y \in X : x \prec_f y\}$.

Las topologías inducidas por las selecciones de dos puntos han sido estudiadas por diversos autores (ver por ejemplo los trabajos [18], [21], [20], [2], [14], [16], [11] y [12]). Cabe mencionar que en estas investigaciones citadas se han demostrado propiedades y se han descrito contraejemplos que muestra la relevancia de estas topologías. Una investigación a futuro es estudiar estas topologías en relación con las medidas que se obtienen con selecciones de dos puntos tal y como se ha hecho en la Teoría de la Medida de Lebesgue en su relación con la medida de Lebesgue. Con este párrafo solo queremos mostrar la importancia de las selecciones de dos puntos en topología.

El propósito principal de esta tesis es dar a conocer las nuevas medidas para que el alumno del curso de la teoría de la medida le interese y sea diestro en el manejo del concepto de medida. Para iniciar este trabajo daremos los conceptos básicos en el primer capítulo. En el segundo capítulo introducimos formalmente nuestras medidas exteriores donde mostraremos sus propiedades básicas, nuevas propiedades, nuevos ejemplos que en conjunto son resultados interesantes como un tema de la Teoría de la Medida. Compararemos las propiedades de nuestras medidas exteriores con las propiedades conocidas de la medida de Lebesgue mediante varios ejemplos. De esta manera veremos que nuestras medidas aparte que algunas de ellas se comportan como la de la medida de Lebesgue otras se comportan de manera muy caótica. Una cuestión interesante de este tema es que se pueden definir $2^{\mathfrak{c}}$ medidas exteriores distintas de este tipo, y esto nos proporciona un sin fin de propiedades analíticas diversas, tal y como se verá en este segundo capítulo. Actualmente en la Teoría de la medida no se estudian las propiedades combinatorias de la familia de los conjuntos nulos de una medida. Esto es un hueco en el conocimiento de los alumnos en la noción de la medida. Por ejemplo los alumnos no saben que esta familia forma un σ -ideal, los cuales han sido ampliamente estudiados dentro de la teoría de conjuntos. Es por esto que en el tercer capítulo hablaremos de la importancia de los σ -ideales de los conjuntos nulos de las medidas exteriores provenientes de selecciones de dos puntos. Una propiedad que se probará es que la cofinalidad de un σ -ideal proveniente de una de nuestras medidas tiene cofinalidad $\leq \mathfrak{c}$. Probaremos que el Axioma de Martin nos garantiza que cualquier σ -ideal con cofinalidad $\leq \mathfrak{c}$ es el σ -ideal de conjuntos nulos de una medida proveniente de una selección de dos puntos. También mostraremos que la Hipótesis del Continuo es equivalente a la existencia de una medida exterior especial definida mediante una selección de dos puntos. Para terminar este trabajo, en el cuarto capítulo, estableceremos relaciones para que dos selecciones de dos puntos nos introduzcan la misma medida exterior.

Capítulo 1. Preliminares

El objetivo de este capítulo es dar las definiciones y los resultados fundamentales que serán considerables y utilizados en esta tesis, donde algunos de estos serán enunciados brevemente pero no obstante son igual de importantes, al igual mencionaremos notaciones y observaciones de algunos conceptos.

0.1. Conceptos básicos

En esta sección se presentan los conceptos de Teoría de Conjuntos y Teoría de la Medida que nos servirán para desarrollar esta tesis.

0.1.1. Preliminares de Teoría de Conjuntos

Dado un conjunto X , denotaremos a la colección de los subconjuntos de X con $\mathcal{P}(X)$ y a la cardinalidad de X con $|X|$.

Definición 0.1. (i) Un conjunto α es un ordinal si y sólo si es bien ordenado por \in_α , y es transitivo, es decir $x \in y$ implica $x \subseteq y$, y si $x, y \in z$ entonces $x < y$ si y sólo si $x \in z$ y es un orden lineal.

(ii) Dado un ordinal α , definimos su sucesor como $S(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$. Un ordinal α es un ordinal sucesor si para algún ordinal β , se tiene que $\alpha = S(\beta)$. Todo ordinal que no es un ordinal sucesor ni es el 0 se llama ordinal límite.

(iii) Un cardinal es un ordinal que no es biyectable con ninguno de sus elementos. Un cardinal κ se dice que es regular si no es el límite de menos que κ cardinales menores que κ .

Las letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \epsilon$ y ζ representarán números ordinales. La letra griega ω representa el primer número ordinal infinito, asociado al conjunto de los números naturales, y ω_1 representa el primer número ordinal no numerable. \aleph_0 y \aleph_1 son el primero y segundo números cardinales infinitos.

La cardinalidad de la línea real (del continuo) se denotará por \mathfrak{c} , es decir, $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Definición 0.2. Para un conjunto infinito X y un número cardinal κ , definimos $[X]^\kappa = \{F \subseteq X : |F| = \kappa\}$ y de manera similar definimos $[X]^{\leq \kappa}$ y $[X]^{\geq \kappa}$. Particularmente, dado un conjunto distinto del vacío X ,

$$[X]^2 = \{F \subseteq X : |F| = 2\},$$

es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de dos puntos de X .

A continuación enunciamos lo que se conoce como una familia κ -casi disjunta.

Definición 0.3. Sea κ un cardinal infinito.

1. Si $x, y \subseteq \kappa$, entonces diremos que x y y son κ -casi disjuntos si y sólo si $|x \cap y| < \kappa$.

2. Sea $\mathcal{A} \subseteq [\kappa]^\kappa$ decimos que \mathcal{A} es una familia κ -casi disjunta (κ -AD) si para cada $A, B \in \mathcal{A}$ distintos se tiene que $|A \cap B| < \kappa$.
3. Decimos que una familia \mathcal{A} κ -casi disjunta en κ , es maximal κ -casi disjunta, si no esta contenida propiamente en alguna otra familia κ -casi disjunta.

Observación 0.4. I. Si \mathcal{A} es una familia κ -casi disjunta maximal tenemos que, para cada $B \in [\kappa]^\kappa$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \kappa$.

II. Cuando $\kappa = \aleph_0$ se escribirá solamente familia casi disjunta en lugar de familia \aleph_0 -casi disjunta.

Algunos ejemplos de familias κ -casi disjuntas son las siguientes.

Ejemplo 0.5. Sea κ un cardinal infinito.

1. Una familia de conjuntos ajenos por pares es aquella donde cualesquiera dos elementos diferentes tienen intersección vacía. Si $\mathcal{A} \subseteq [\kappa]^\kappa$ es una familia ajena por pares, también es κ -casi ajena.
2. Para κ , existe una familia de $\mathcal{P}(A)$, ajena por pares y de cardinalidad κ . En efecto: Si $\kappa \geq \aleph_0$ y A es un conjunto tal que $|A| = \kappa$, como $|A \times A| = |A|$, entonces existe una función biyectiva $f : A \times A \rightarrow A$. Si definimos $B_a = f(A \times \{a\})$ para cada $a \in A$, entonces cada conjunto B_a tiene cardinal exactamente κ . Además, $\mathcal{A} = \{B_a : a \in A\}$ es una familia de cardinalidad κ formada por conjuntos ajenos por pares.
3. Existe una familia casi disjunta y de cardinalidad igual a \mathfrak{c} . En efecto: Consideramos a \mathbb{R} el conjunto de los números reales con la topología usual. Como \mathbb{Q} es numerable, solo bastará construir una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ que satisfaga las condiciones de la definición 0.3. Puesto que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existe una sucesión $A_r \subseteq \mathbb{Q}$ que converge a r . Sea $\mathcal{A} = \{A_r : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ entonces, \mathcal{A} es una familia casi disjunta, ya que, si $r, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, y suponemos que $|A_r \cap A_s| = \aleph_0$, podemos construir por recursión una subsucesión de A_r que converge a s , y por ser \mathbb{R} un espacio métrico tenemos que $r = s$. Por lo cual, si $r, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son distintos entre sí entonces, A_r y A_s son casi disjuntos. Por último notemos que si $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dado que $A_r \subseteq \mathbb{Q}$, tenemos que $|A_r| = \aleph_0$, lo que implicaría que \mathcal{A} tiene cardinalidad 2^{\aleph_0} .

0.1.2. Medida Exterior

Enseguida se definirán conceptos importantes de la Teoría de la Medida, tal y como lo es la siguiente definición.

Definición 0.6. Sea X un conjunto. Una medida exterior es una función $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ que cumple las siguientes condiciones:

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (2) Monotonía: Si $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (3) Subaditividad: Para toda sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{P}(X)$ se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Un ejemplo de medida exterior es la siguiente, la cual también es considerada como la más simple.

Ejemplo 0.7 (Medida Exterior Nula). *Dado un conjunto infinito X , definimos $\mu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.*

A continuación enlistamos más ejemplos de medidas exteriores.

Ejemplo 0.8. *Para cualquier conjunto infinito X , definamos*

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ +\infty & \text{si } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Ejemplo 0.9 (Medida de Contar). *Para cualquier conjunto infinito X , definamos*

$$\mu(A) := \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ es finito,} \\ +\infty & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

Ejemplo 0.10. *Para cualquier conjunto infinito X , definamos*

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es numerable,} \\ +\infty & \text{si } A \text{ es no numerable.} \end{cases}$$

En el siguiente ejemplo, se extiende el concepto de longitud de un intervalo a subconjuntos de \mathbb{R} más generales. De igual manera estará familiarizada con nuestra definición de medida exterior mediante selecciones de dos puntos (ver el siguiente capítulo).

Ejemplo 0.11 (Medida Exterior de Lebesgue). *La medida exterior de Lebesgue de $A \subseteq \mathbb{R}$ es*

$$\lambda(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n - a_n| : A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n] \right\}.$$

Claramente $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$ y si C es el conjunto de Cantor entonces $\lambda(C) = 0$.

Ejemplo 0.12 (Medida Exterior de Borel-Stieltjes). *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente continua por la derecha. La medida exterior de Borel Stieltjes en \mathbb{R} generada por la función f es*

$$\lambda_f(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(b_n) - f(a_n)| : A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n] \right\},$$

para cada $A \subseteq \mathbb{R}$.

0.1.3. σ -Algebra y Medidas

Los siguientes conceptos nos ayudarán para definir los espacios de medida. Se mencionan algunas propiedades relevantes de los σ -algebras y medidas que tendrán mucha relevancia en la construcción de nuestras nuevas medidas y sus respectivos resultados.

Definición 0.13. *Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se llama una σ -algebra si*

- $X \in \mathcal{A}$,
- si $A \in \mathcal{A}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{A}$, y

- si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

A continuación se enuncian algunos ejemplos de σ -álgebra.

Ejemplo 0.14. Para cualquier conjunto no vacío X , $\{X, \emptyset\}$ es una σ -álgebra.

Ejemplo 0.15. $\mathcal{P}(X)$ es una σ -álgebra.

Ahora se dará la definición de medida la cual es relevante para esta tesis.

Definición 0.16 (Medida). Dada una σ -álgebra \mathcal{A} , una medida es una función $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ que cumple las siguientes condiciones:

- $\mu(\emptyset) = 0$, y
- Aditividad: Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ son disjuntos entre sí, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Algunos ejemplos de medida son mencionados enseguida.

Ejemplo 0.17. La medida exterior nula.

Ejemplo 0.18. La medida de contar (ver ejemplo 0.9).

Ejemplo 0.19. La medida del ejemplo 0.10.

Al par (X, \mathcal{A}) donde X es un conjunto de \mathbb{R} y \mathcal{A} es una σ -álgebra, se le llama espacio medible.

Definición 0.20 (Espacio de Medida). Si \mathcal{A} es una σ -álgebra y una función $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ es una medida, a la terna (X, \mathcal{A}, μ) se le conoce como un espacio de medida.

La siguiente definición es muy útil y nos facilitará el estudio de nuestras nuevas medidas.

Definición 0.21. Sea $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ una medida exterior y $A \subseteq X$.

- Decimos que A es medible si para cada $B \subseteq X$ se cumple que

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A).$$

- Si $\mu(A) = 0$, entonces decimos que A es μ -nulo (o nulo).

Notación 0.22. $\mathcal{M}_\mu := \{A \subseteq X : A \text{ es medible}\}$.

Observación 0.23. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida. Para cualesquiera conjuntos $A, B \subseteq X$, se tiene que $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$. Así podemos decir que siempre sucede que

$$\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Entonces para ver que un conjunto A sea medible basta demostrar que para cualquier conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ se cumpla que

$$\mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(B).$$

Los siguientes conjuntos son los ejemplos más simples de conjuntos medibles.

Ejemplo 0.24. Para cualquier (X, \mathcal{A}, μ) espacio de medida tenemos que: $X, \emptyset \in \mathcal{M}_\mu$.

Teorema 0.25. Si $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ es medida exterior, entonces

- 1) \mathcal{M}_μ es σ -álgebra.
- 2) $(X, \mathcal{M}_\mu, \mu|_{\mathcal{M}_\mu})$ es un espacio de medida.

Notación 0.26 (Conjunto Nulo). $\mathcal{N}_\mu := \{A \subseteq X : A \text{ es nulo}\}$.

Ejemplo 0.27. $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$.

Ejemplo 0.28. Si μ es la medida nula, entonces $\mathcal{N}_\mu = \mathcal{P}(X)$.

Observación 0.29. $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{M}_\mu$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{N}_\mu$ y sea $B \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cualquiera. Por un lado, tenemos que $B \cap A \subseteq A$ de esto se sigue que $0 \leq \mu(B \cap A) \leq \mu(A) = 0$ y que $\mu(B \setminus A) \leq \mu(B)$. Así, también tenemos la desigualdad

$$\mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(B).$$

Y además por otra parte por la observación 0.23 tenemos que

$$\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Por lo tanto, A es medible. ■

0.1.4. σ -Ideal

Las siguientes definiciones y propiedades enlazan a nuestras nuevas medidas exteriores con la teoría de conjuntos.

Definición 0.30. Sea X un conjunto infinito. Una familia $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se llama ideal si

- (a) $\emptyset \in \mathcal{I}$.
- (b) Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{I}$.
- (c) \mathcal{I} es cerrado bajo uniones finitas.

Un ideal \mathcal{I} se llama σ -ideal (P -ideal) si es cerrado bajo uniones numerables.

Algunos ejemplos de ideales son:

Ejemplo 0.31. $\{\emptyset\}$ y $\mathcal{P}(X)$ son ejemplos triviales de σ -ideales.

Ejemplo 0.32. Si X es infinito, entonces $[X]^{<\omega}$ es un ideal y $[X]^{\leq\omega}$ es un σ -ideal.

A continuación veremos que las medidas exteriores nos proporcionan más ejemplos de σ -ideales.

Teorema 0.33. Si $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ es una medida exterior, entonces \mathcal{N}_μ es un σ -ideal.

Demostración. Veamos que se cumple cada inciso de la definición 0.30.

- (a) Claramente $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$.
- (b) Si $B \in \mathcal{N}_\mu$ y $A \subseteq B$, entonces por la monotonía de μ , se tiene que $0 \leq \mu(A) \leq \mu(B) \leq 0$, así que $A \in \mathcal{N}_\mu$.
- (c) Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{N}_\mu$. Entonces por la σ -subaditividad de μ tenemos que $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$, luego se tiene que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}_\mu$.

Así, por lo tanto \mathcal{N}_μ es un σ -ideal. ■

Para establecer algunos resultados del capítulo 3 necesitamos la siguiente operación de ideales.

Definición 0.34. *La suma de dos ideales \mathcal{I} y \mathcal{J} es:*

$$\mathcal{I} \oplus \mathcal{J} = \{I \cup J : I \in \mathcal{I} \text{ y } J \in \mathcal{J}\}.$$

La suma de dos ideales $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ es también un ideal. Más aún, si \mathcal{I} y \mathcal{J} son σ -ideales, entonces $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ es un σ -ideal. En efecto:

- (a) Es evidente que $\emptyset \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$, pues \mathcal{I} y \mathcal{J} son σ -ideales.
- (b) Si $B \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ y $A \subseteq B$, entonces $A \subseteq I \cup J$ para algunos $I \in \mathcal{I}$ y $J \in \mathcal{J}$. Luego, como $A = (A \cap I) \cup (A \cap J)$, tenemos que $A \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$, ya que $(A \cap I) \in \mathcal{I}$ y $(A \cap J) \in \mathcal{J}$, debido a que \mathcal{I} y \mathcal{J} son σ -ideales.
- (c) Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$. Entonces tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = I_n \cup J_n$ para algunos $I_n \in \mathcal{I}$ y $J_n \in \mathcal{J}$. Luego, puesto que \mathcal{I} y \mathcal{J} son σ -ideales tenemos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (I_n \cup J_n) = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n) \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$.

0.2. Selecciones de dos puntos

Las selecciones de dos puntos en los números reales son parte fundamental de esta tesis, ya que nos ayudarán a construir nuevas medidas exteriores sobre los número reales, como se verá en los capítulos siguientes.

0.2.1. Definición de selección de dos puntos

A continuación empezaremos definiendo lo que es una selección de dos puntos.

Definición 0.35. *Una selección de dos puntos en un conjunto infinito X es una función $f : [X]^2 \rightarrow X$ tal que $f(F) \in F$ para cada $F \in [X]^2$.*

Nuestras selecciones de dos puntos serán solamente sobre los números reales, por lo cual se omitirá el conjunto en donde están definidas.

Enseguida damos la definición de selección de dos puntos opuesta a una selección de dos puntos, la cual utilizaremos para varios ejemplos y demostraciones dentro de los siguientes capítulos.

Definición 0.36. *Si f es una selección de dos puntos, entonces f^- se define como*

$$f^-(\{x, y\}) = x \text{ si y sólo si } f(\{x, y\}) = y.$$

A f^- se le llama selección de dos puntos opuesta a f .

0.2.2. Pre-orden inducido por una selección de dos puntos

Ahora daremos ejemplos de selecciones de dos puntos que ayudarán a empatizar más con la definición de la misma y a la vez nos llenará de ambición sobre sus diversas características.

Ejemplo 0.37. *Un ejemplo de una selección de dos puntos es la selección de dos puntos Euclídeana $f_E : [\mathbb{R}]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f_E(\{x, y\}) = x \text{ si y sólo si } x < y,$$

para cada par $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$.

La siguiente definición es sobre el pre-orden que inducen las selecciones de dos puntos.

Definición 0.38. Si $f : [X]^2 \rightarrow X$ es una selección de dos puntos y dados $x, y \in X$, entonces definimos $x <_f y$ y sólo si $f(\{x, y\}) = x$, $y x \leq_f y$ si $x = y$ ó $x <_f y$.

Observación 0.39. En general, esta relación \leq_f es reflexiva, antisimétrica y lineal. Sin embargo, puede fallar la transitividad.

El siguiente ejemplo muestra la no transitividad de esta relación.

Ejemplo 0.40. Definimos la selección de dos puntos $f : [\mathbb{R}]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(\{x, y\}) := \begin{cases} 2 & \text{si } x = 1 \text{ y } y = 2, \\ 3 & \text{si } x \in (1, 2] \text{ y } y = 3, \\ x < y & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Entonces tenemos que $f(\{3, 2\}) = 3$ si y sólo si $3 <_f 2$ y $f(\{1, 3\}) = 1$ si y sólo si $1 <_f 3$. Pero $f(\{1, 2\}) = 2$ y por lo tanto $2 <_f 1$.

0.2.3. Definición de f -intervalos

Con el pre-orden expuesto en la definición 0.38 tenemos la siguiente definición.

Definición 0.41. Si f es una selección de dos puntos en el conjunto X y $r, s \in X$, entonces los f -intervalos son los siguientes:

- $(r, \rightarrow)_f := \{x \in X : r <_f x\}$ y $(\leftarrow, s)_f := \{x \in X : x <_f s\}$,
- $[r, \rightarrow)_f := \{x \in X : r \leq_f x\}$ y $(\leftarrow, s]_f := \{x \in X : x \leq_f s\}$,
- $(r, s]_f := \{x \in X : r <_f x \leq_f s\}$ y $[r, s)_f := \{x \in X : r \leq_f x <_f s\}$,
- $(r, s)_f := \{x \in X : r <_f x <_f s\}$ y $[r, s]_f := \{x \in X : r \leq_f x \leq_f s\}$.

Para la selección de dos puntos Euclídeana f_E , los f_E -intervalos se denotarán simplemente por

- $(r, s) = \{y \in \mathbb{R} : r < y < s\}$,
- $(r, s] = \{y \in \mathbb{R} : r < y \leq s\}$,
- $(r, \rightarrow) = \{y \in \mathbb{R} : r < y\}$ etc.

Observación 0.42. En la notación del caso del intervalo Euclídeano (a, b) , entenderemos que $a < b$. Pero, en general la notación $(a, b)_f$ no requiere que $a <_f b$ ya que como se observó anteriormente la relación $<_f$ no es siempre transitiva.

0.2.4. Ejemplos de selecciones de dos puntos

Ahora enunciaremos más ejemplos de selecciones de dos puntos en los cuales se nota como actúa su relación de pre-orden sobre algunos subconjuntos de la línea real.

Ejemplo 0.43. Podemos definir una selección de dos puntos f para ver que los f -intervalos y los intervalos Euclídeanos pueden ser muy diferentes.

Considere el intervalo Euclidiano (a, b) , $d \notin (a, b)$ y su punto medio c . Defina

$$f(\{x, y\}) := \begin{cases} x & \text{si } x \in (a, c] \text{ y } y = a, \\ a & \text{si } x = a \text{ y } y = d, \\ d & \text{si } x = b \text{ y } y = d, \\ x & x < y \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

para cada $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Entonces tenemos que $(a, b)_f = (c, b) \cup \{d\}$ y por lo tanto $(a, b) \not\subseteq (a, b)_f \not\subseteq (a, b)$.

Ejemplo 0.44. Los f -intervalos pueden consistir de un solo punto.

Definiremos una selección de dos puntos f de manera que el f -intervalo $(0, 1)_f$ tiene un solo punto:

$$f(\{x, y\}) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \text{ y } y = 0, \\ 1 & \text{si } x = 1 \text{ y } y \in (0, 1), \\ x & x < y \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

para cada $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Así $f(\{0, \frac{1}{2}\}) = 0$ y $f(\{\frac{1}{2}, 1\}) = \frac{1}{2}$ es decir, $0 <_f \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} <_f 1$ y por lo tanto $(0, 1)_f = \{\frac{1}{2}\}$.

Ejemplo 0.45. Se puede definir una selección de dos puntos f para ver que los f -intervalos pueden ser igual al conjunto vacío.

Definamos a f como sigue:

$$f(\{x, y\}) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \text{ y } y = 0, \\ 1 & \text{si } x = 1 \text{ y } y \in (0, 1), \\ x & x < y \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

para cada $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$. En este ejemplo obtenemos que $(0, 1)_f = \emptyset$.

Ejemplo 0.46. Veamos que los f -intervalos también pueden ser igual a un subconjunto dado de los números reales.

Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Definamos la selección de dos puntos f de la siguiente manera:

$$f(\{x, y\}) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ y } y \in (-\infty, 0), \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2} \text{ y } y \in (1, +\infty), \\ x & x < y \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

para cada $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$. Entonces tenemos que $[0, 1]_f = A$.

0.3. Axioma de Martin

En esta sección enunciaremos el Axioma de Martin (MA) y varios resultados importantes derivados del mismo. En el capítulo 3 de esta tesis, emplearemos varios de estos resultados. El Axioma de Martin se originó a partir del estudio de pruebas de consistencia y ha sido utilizado de gran manera en distintas áreas de la matemática, para las cuales se parte de la negación de la Hipótesis del Continuo.

A continuación daremos los conceptos principales para formular el Axioma de Martin.

Definición 0.47. *Un orden parcial es un par (P, \leq) donde P es un conjunto no vacío y \leq es una relación binaria en P tal que*

1. \leq es reflexiva. Para cada $p \in P$ se cumple que $p \leq p$.
2. \leq es transitiva. Si $p, q, r \in P$ satisfacen que $p \leq q$ y $q \leq r$ se concluye que $p \leq r$.

Al par (P, \leq) también se le conoce como conjunto pre-ordenado o casi-ordenado.

- A los elementos del conjunto pre-ordenado P se les llama condiciones.
- Se dice que un elemento $p \in P$ extiende a una condición $q \in P$ si $p \leq q$.

En algunos conceptos escribiremos solamente \mathbb{P} haciendo énfasis al conjunto pre-ordenado (P, \leq) .

Diremos que un orden parcial (P, \leq) es antisimétrico si para cualesquiera $p, q \in P$ tales que $p \leq q$ y $q \leq p$ se concluye que $p = q$. Cada que en un orden antisimétrico ocurra $p \leq q$ pero $p \neq q$ lo denotaremos como $p < q$.

Enunciaremos a continuación algunas definiciones relevantes.

Definición 0.48. *Sea $\mathbb{P} = (P, \leq)$ un conjunto pre-ordenado:*

- (a) *Dos elementos $p, q \in P$ son compatibles en \mathbb{P} , si existe $r \in P$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$, lo cual denotaremos con $p \parallel q$.*
- (b) *Dos elementos $p, q \in P$ son incompatibles en \mathbb{P} si no existe un elemento $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$, y se denota por $p \perp q$.*
- (c) *Un subconjunto $A \subseteq P$ es una anticadena de \mathbb{P} si: para todo $p, q \in A : p \perp q$, es decir, si todos sus elementos son incompatibles entre sí. Si sucede que todos sus elementos son compatibles entre sí, diremos que A es un conjunto enlazado.*
- (d) *Un subconjunto $D \subseteq P$ es denso en \mathbb{P} si para todo $p \in P$, existe $d \in D$ tal que $d \leq p$.*

Enseguida definiremos una propiedad importante dentro del estudio de conjuntos pre-ordenados y posteriormente del Axioma de Martin.

Definición 0.49. *Un conjunto pre-ordenado (P, \leq) satisface la condición de la cadena contable (c.c.c) si y sólo si toda anticadena en \mathbb{P} es a lo más numerable.*

Notemos que la condición de la cadena contable es una propiedad que en sí se refiere a anticadenas. Para contextualizarnos más con dichas definiciones enunciadas anteriormente daremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 0.50. 1. *Cualquier orden (parcial) es un pre-orden.*

2. *Si $\mathbb{P} = (P, \leq)$ un conjunto pre-ordenado con $|P| \leq \omega$, entonces \mathbb{P} satisface la c.c.c.*

3. *Si X es un conjunto no vacío, entonces $\mathbb{P} = (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$ es un conjunto pre-ordenado. Tenemos que dos condiciones p y q son incompatibles si y sólo si $p \cap q = \emptyset$. Además, sea $A \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ entonces A es una anticadena si sus elementos son ajenos por pares; por lo que, \mathbb{P} satisface la c.c.c. si y sólo si $|X| \leq \aleph_0$.*

4. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $P = \{p \subseteq X : p \neq \emptyset, p \text{ es abierto en } X\}$ con $p \leq q$ si y sólo si $p \subseteq q$. Entonces $\mathbb{P} = (P, \leq)$ es un conjunto pre-ordenado. Tenemos que $p, q \in P$ son incompatibles si y sólo si $p \cap q = \emptyset$. Generalmente, se dice que un espacio topológico (X, τ) satisface la c.c.c. si el conjunto pre-ordenado \mathbb{P} satisface la c.c.c.*

La siguiente definición es esencial para nombrar el Axioma de Martin.

Definición 0.51. *Si D es un subconjunto denso de un conjunto pre-ordenado $\mathbb{P} = (P, \leq)$, entonces un subconjunto G de P se llama filtro D -genérico en \mathbb{P} si satisface las siguientes condiciones:*

(a) *Para todo $a \in G$, si $q \in P$ y $a \leq q$, entonces $q \in G$.*

(b) *Para todo $a, b \in G$, existe $c \in G$ tal que $c \leq a$ y $c \leq b$.*

(c) *$D \cap G \neq \emptyset$.*

Si \mathcal{D} es una familia de conjuntos densos en \mathbb{P} , entonces G es un filtro \mathcal{D} -genérico si es un filtro D -genérico para cada $D \in \mathcal{D}$. Se dice que $G \subseteq P$ es un filtro en \mathbb{P} si cumple los incisos (a) y (b).

Definición 0.52 (Δ -sistema). *Una familia \mathcal{A} de conjuntos es un Δ -sistema, si existe un conjunto fijo r , llamado raíz del Δ -sistema, si para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$ distintos se tiene que $a \cap b = r$.*

La prueba del siguiente lema se puede consultar en [9].

Lema 0.53 (Lema de Sanin o Δ -lema). *Si \mathcal{A} es una familia no numerable de conjuntos finitos, entonces existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ un Δ -sistema no numerable.*

Dadas las definiciones anteriores, estableceremos el Axioma de Martin.

Definición 0.54. *Sea κ un cardinal infinito, entonces $MA(\kappa)$ es el siguiente enunciado: Si (P, \leq) es un conjunto pre-ordenado no vacío que satisface la condición de la cadena contable (c.c.c) y \mathcal{D} es una familia de a lo más κ subconjuntos densos de \mathbb{P} , entonces existe un filtro \mathcal{D} -genérico en \mathbb{P} .*

El AXIOMA DE MARTIN (MA) es el enunciado siguiente: es verdadero $MA(\kappa)$ para todo cardinal infinito κ con $\aleph_0 < \kappa < \mathfrak{c}$.

Lema 0.55 (Rasiowa-Sikorski). *$MA(\aleph_0)$ es verdadero.*

Demostración. Sean (P, \leq) un conjunto pre-ordenado y $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots\}$ una familia numerable de conjuntos densos en \mathbb{P} . Dado que $P \neq \emptyset$, tomemos a p un elemento cualquiera de P y fijemos $p_0 = p$. Para cada $n > 0$, sea p_n tal que $p_n \leq p_{n-1}$ y $p_n \in D_n$, esto es posible ya que cada D_n es denso. Veamos que el conjunto $G = \{x \in P : x \geq p_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$ es un filtro \mathcal{D} -genérico en \mathbb{P} y que $p \in G$. En efecto, como $p = p_0 \in P$ entonces tenemos que $p \in G$. Ahora si $r \in P$, $a \in G$ y $a \leq r$; entonces puesto que $a \in G$ implica la existencia de un $n \in \omega$ tal que $p_n \leq a$, así $r \in G$. Además, si $a, b \in G$ existen $m, n \in \omega$ tales que $p_m \leq a$ y $p_n \leq b$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $m \leq n$. Entonces $p_n \in G$ es una extensión común a b y a . Finalmente, para todo $n \in \omega$, $p_n \in G \cap D_n$; es decir, $G \cap D_n \neq \emptyset$. Por lo tanto G es \mathcal{D} -genérico. ■

Teorema 0.56. *Si $\kappa \geq \mathfrak{c}$, entonces $MA(\kappa)$ es falso.*

Demostración. Supongamos, que $\kappa \geq \mathfrak{c}$ y que $MA(\kappa)$ es verdadero.

Sea $P = \bigcup_{n \in \omega} 2^n$; es decir, el conjunto de todas las sucesiones finitas de ceros y unos. Para $p, q \in P$ definimos $p \leq q$ si y sólo si $dom(p) \supseteq dom(q)$ y p es una extensión como función de q . Entonces p y q son compatibles si y sólo si para cualquier $n \in (dom(p)) \cap (dom(q))$ se tiene que $p(n) = q(n)$, es decir, son compatibles como funciones. Como $|P| = \aleph_0$, entonces P satisface la c.c.c. Definamos para cada $h \in 2^\omega$, $D_h = \{p \in P : p \neq h \upharpoonright_{dom(p)}\}$, y definamos para cada $n \in \omega$, $E_n = \{p \in P : n \in dom(p)\}$. Cada E_n es un subconjunto denso en \mathbb{P} : si $p \in P$ y $n \notin dom(p)$, basta definir $q : dom(p) \cup \{n\} \rightarrow 2$ como $q(k) = p(k)$ para cada $k \in dom(p)$ y $q(n) = 0$; así, $q \leq p$ y $q \in E_n$. También cada D_h es un subconjunto denso en \mathbb{P} : si $p \in P \setminus D_h$ y $n \notin dom(p)$, claramente podemos tomar $q \in E_n$ tal que $q \leq p$ y $q(n) \neq h(n)$; entonces $q \in D_h$ y $q \leq p$. Sea $\mathcal{D} = \{D_h : h \in 2^\omega\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$. Observemos que esta colección tiene cardinalidad \mathfrak{c} . Supongamos que G es un filtro \mathcal{D} -genérico en \mathbb{P} ; entonces, por (b) de la definición 0.48, G es un sistema compatible de funciones, y por (c) de la misma definición, $f = \bigcup G : \omega \rightarrow 2$ es una función; en efecto, supongamos que $p, q \in G$ y $l \in \omega$ son tales que $(l, m) \in p$ y $(l, n) \in q$, para algunos $m, n \in \omega$. Mostremos que $m = n$; sea $r \in G$ una extensión común de p y q , entonces (l, m) y (l, n) son elementos de r , y como r es una función, necesariamente $m = n$. Además, si $h : \omega \rightarrow 2$ es cualquier función, dado que existen $p \in G \cap D_n$ y $n \in dom(p)$ tales que $p(n) \neq h(n)$, como $f(n) = p(n)$ se sigue que $f \neq h$. Así tenemos que, $f \in 2^\omega$ pero, para cualquier $h \in 2^\omega$, $f \neq h$; lo cual es imposible. ■

Una cuestión muy interesante es que como $MA(\aleph_0)$ es siempre verdadero, se sigue que el Axioma de Martin (MA) es una consecuencia de la Hipótesis del Continuo.

A continuación presentaremos una versión más débil del Axioma de Martin la cual está relacionada con el concepto de pre-orden σ -centrado, por ello enunciaremos las siguientes definiciones. De lo que resta de esta sección estaremos suponiendo $MA + \neg CH$.

Definición 0.57. *Sea $\mathbb{P} = (P, \leq)$ un conjunto pre-ordenado.*

1. Diremos que (P, \leq) es σ -centrado (σ -enlazado) si P se puede ver como una unión a lo más numerable de conjuntos centrados (enlazados), es decir, $P = \bigcup_{n \in \omega} P_n$, donde cada P_n es centrado (enlazado) y, donde $C \subseteq P$ es centrado si todo subconjunto $F \subseteq C$ no vacío y finito, tiene una cota inferior en \mathbb{P} , es decir, existe $p \in P$ tal que para cada $f \in F$ se tiene que $p \leq f$. Así notamos que todos los conjuntos σ -centrados (σ -enlazados) también satisfacen la c.c.c.

2. Si κ es un cardinal infinito con $\kappa < \mathfrak{c}$, entonces $MA(\kappa)_{\sigma\text{-centrado}}$ es el siguiente enunciado: Si (P, \leq) es un conjunto pre-ordenado σ -centrado, \mathcal{D} es una familia de a lo más κ subconjuntos densos en \mathbb{P} , entonces existe un filtro \mathcal{D} -genérico en \mathbb{P} .

El AXIOMA DE MARTIN σ -centrado, $MA_{\sigma\text{-centrado}}$, es el siguiente enunciado: Para todo $\kappa < \mathfrak{c}$: $M(A)(\kappa)_{\sigma\text{-centrado}}$.

Estamos en posición de mencionar algunas aplicaciones del Axioma de Martin.

Definición 0.58. *i) Sea M un subconjunto de \mathbb{R} se dice que es magro o de primera categoría de Baire, si es unión numerable de conjuntos nunca densos, es decir, si existen $\{K_n : n \in \omega\}$ conjuntos nunca densos de \mathbb{R} tales que $M \subseteq \bigcup_{n \in \omega} K_n$, donde para cada $n \in \omega$ K_n es nunca denso si $int(\overline{K_n}) = \emptyset$.*

ii) Un subconjunto de los números reales será de segunda categoría si no es de primera categoría.

Definición 0.59. Se denota por $\text{cov}(\mathcal{M})$ a la mínima cantidad de conjuntos nunca densos que se necesitan para cubrir a la recta real \mathbb{R} ; es decir,

$$\text{cov}(\mathcal{M}) = \inf\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \text{ es una cubierta de subconjuntos magros de } \mathbb{R}.\}$$

Puesto que la mínima cantidad de conjuntos nunca densos que se necesitan para cubrir a la recta real, según el teorema de categoría de Baire, es no numerable y por otro lado, los conjuntos singulares son nunca densos en la recta real. Así, podemos cubrir a \mathbb{R} con a lo más \mathfrak{c} conjuntos magros pero \aleph_0 conjuntos magros no son suficientes para cubrirlo. Por lo tanto tenemos que, $\aleph_1 \leq \text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{c}$. Posteriormente al teorema que a continuación se presenta tendremos que, si aceptamos $MA + \neg CH$, la mínima cantidad de subconjuntos magros que cubren a los reales será $\text{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$.

Observemos que $X \subseteq \mathbb{R}$ es nunca denso si y sólo si \overline{X} es nunca denso, así en la definición 0.58 i) podemos suponer que cada conjunto K_n es un cerrado nunca denso.

Lema 0.60 (Solovay). *Supongamos $MA(\kappa)$. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, donde $|\mathcal{A}| \leq \kappa$, $|\mathcal{C}| \leq \kappa$, y supongamos que para cada $a \in \mathcal{C}$ y para cada subconjunto finito $E \subseteq \mathcal{A}$ tenemos que $|a \setminus \bigcup E| = \omega$; entonces existe $d \subseteq \omega$, tal que para cada $x \in \mathcal{A}$ $|d \cap x| < \omega$ y para cada $y \in \mathcal{C}$ $|d \cap y| = \omega$.*

Demostración. El lector puede ver la prueba en [9]. ■

Teorema 0.61. *Supongamos MA_{σ} -centrado. Sean $\aleph_0 < \kappa < \mathfrak{c}$ y $\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia formada por subconjuntos de primera categoría en \mathbb{R} . Entonces $\bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha$ es también de primera categoría.*

Demostración. Para demostrar que $\bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha$ es también de primera categoría, debemos probar que existe $\{H_n : n \in \omega\}$ familia de cerrados nunca densos tal que $\bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha \subseteq \bigcup_{n \in \omega} H_n$. Pero como cada M_α está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados nunca densos, solo bastará demostrar que cada vez que tengamos una colección de κ subconjuntos cerrados nunca densos K_α de \mathbb{R} entonces existe una colección numerable de cerrados nunca densos $\{H_n : n \in \omega\}$ tal que $\bigcup_{\alpha < \kappa} K_\alpha \subseteq \bigcup_{n \in \omega} H_n$. Puesto que el complemento de un conjunto cerrado nunca denso es un conjunto abierto denso, lo mencionado anteriormente es análogo a demostrar que existe una sucesión de subconjuntos abiertos densos $\{V_n : n \in \omega\}$ tal que

$$\bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq \bigcap_{\alpha < \kappa} U_\alpha,$$

donde U_α es un subconjunto abierto denso en \mathbb{R} y es el complemento de K_α para cada $\alpha < \kappa$. Enumeremos todos los intervalos abiertos con extremos racionales en \mathbb{R} por

$$B = \{B_i : i \in \omega\},$$

y contemplemos que éste forma una base para la topología de \mathbb{R} ; es decir, para cada abierto O , tenemos que $O = \bigcup \{B_i : B_i \subseteq O\}$.

Para cada $j \in \omega$, definamos a $c_j = \{i \in \omega : B_i \subseteq B_j\}$ y,

para cada $\alpha < \kappa$, definimos $a_\alpha = \{i \in \omega : B_i \not\subseteq U_\alpha\}$.

Luego, veamos que $\mathcal{C} = \{c_j : j \in \omega\}$ y $\mathcal{A} = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ cumplen con las hipótesis del lema 0.60 (Solovay). Sean $j \in \omega$ y $F \subseteq \kappa$ un conjunto finito, entonces

$$c_j \setminus \bigcup_{\alpha \in F} a_\alpha = \{i \in \omega : B_i \subseteq (B_j \cap \bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha)\}.$$

Ahora bien, puesto que $\{U_\alpha : \alpha \in F\}$ es una colección finita de abiertos densos, sucede que $\bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha$ es denso, por lo cual $B_j \cap \bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha$ es abierto e infinito, y como que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , sucede que $c_j \setminus \bigcup_{\alpha \in F} a_\alpha$ es infinito. Ahora utilizando el Lema de Solovay, existe $d \subseteq \omega$ tal que para todo $x \in \mathcal{A}$ ocurre que $d \cap x$ es finito y para todo $y \in \mathcal{C}$ ocurre que $y \cap d$ es infinito. Por lo que, para cada $n \in \omega$ definamos al conjunto $V_n = \bigcup \{B_i : i \in d \wedge i > n\}$ el cual es abierto y denso en \mathbb{R} . En efecto, fijemos $n \in \omega$ y sea O un abierto en \mathbb{R} . Como B es base, existe $i \in \omega$ con $B_i \subseteq O$. Como $d \cap c_i$ es infinito, existe $l \in d \cap c_i$ con $l \geq n$, por ello, $B_l \subseteq B_i \cap O \subseteq V_n \cap O$. Además, sea $j \in \omega$. Como $|d \cap c_j| = \aleph_0$, resulta que para cada $n \in \omega$ existe $i > n$ tal que $i \in d$ y $B_i \subseteq B_j$. Así pues $V_n \cap B_j \neq \emptyset$. Por último, veamos que $\bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq \bigcap_{\alpha < \kappa} U_\alpha$. Sea $\alpha \in \kappa$, como $d \cap a_\alpha$ es finito, existe $n \in \omega$ tal que $d \cap a_\alpha \subseteq n$, luego tenemos que para toda $i > n$ con $i \in d$ se tiene que $B_i \subseteq U_\alpha$, y por consiguiente $V_n \subseteq U_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha$ es de primera categoría. ■

Corolario 0.62 ($MA_{\sigma\text{-centrado}} + \neg CH$). $\text{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$.

A continuación daremos un resultado importante del Axioma de Martin sobre la Teoría de la Medida y veremos que bajo este axioma, tenemos que la unión de $< \mathfrak{c}$ conjuntos de medida Lebesgue cero tiene medida cero, pero antes enunciamos la siguiente definición.

Definición 0.63. Sea λ la medida de Lebesgue.

Se denota por $\text{add}(\mathcal{N})$ a la mínima cantidad de subconjuntos de \mathbb{R} de medida de Lebesgue cero tal que su unión ya no es de medida de Lebesgue cero, es decir,

$$\text{add}(\mathcal{N}) = \inf \{ |A| : A \subseteq \mathcal{N} \text{ y } \bigcup A \notin \mathcal{N} \},$$

donde $\mathcal{N} = \{N \subseteq \mathbb{R} : \lambda(N) = 0\}$, como vimos anteriormente en la definición 0.21 los elementos de este conjunto los llamaremos nulos.

Puesto que λ es σ -aditiva, sucede que $\aleph_0 < \text{add}(\mathcal{N})$, pero por otro lado, como los conjuntos singulares de \mathbb{R} son nulos, tenemos que $\text{add}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{c}$.

Lema 0.64. Sean B el conjunto de todos los intervalos abiertos con extremos racionales, y sea C el conjunto de todas las uniones finitas de elementos de B . Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R} tal que $\lambda(U) < \infty$. Sea $\delta > 0$, entonces existe $Y \in C$ tal que $\lambda(U \triangle Y) \leq \delta$.

Demostración. Para ver esta demostración el lector puede consultar [5]. ■

Notemos que el conjunto C es una base numerable de \mathbb{R} , así el lema anterior nos será útil, ya que todos los conjuntos abiertos de la recta real, pueden ser aproximados por elementos de esta familia.

Teorema 0.65. Supongamos MA . Sean $\aleph_0 < \kappa < \mathfrak{c}$, y $\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de subconjuntos de \mathbb{R} de medida de Lebesgue cero. Entonces $\bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha$ tiene medida de Lebesgue cero.

Demostración. Sea λ la medida de Lebesgue. Para demostrar que $\bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha$ tiene medida de Lebesgue cero, recordemos que un subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}$ tiene medida 0 si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $M \subseteq U$ y es tal que $\lambda(U) \leq \epsilon$. Fijemos $\epsilon > 0$, debemos encontrar un abierto U con $\lambda(U) \leq \epsilon$ y $\bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha \subseteq U$. Consideremos al conjunto pre-ordenado $\mathbb{P} = (P, \leq)$, con

$$P = \{p \subseteq \mathbb{R} : p \text{ es abierto y } \lambda(p) < \epsilon\},$$

donde $p \leq q$ si y sólo si $q \subseteq p$, entonces p y q son compatibles si y sólo si $\lambda(p \cup q) < \epsilon$, en este caso $p \cup q$ es una extensión común de p y q . Luego \mathbb{P} satisface la c.c.c.; en efecto, supongamos, por contradicción, que $A = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena en \mathbb{P} . Por como definimos a P , sucede que si $\alpha < \omega_1$, tenemos que $\epsilon - \lambda(p_\alpha) > 0$, así existe n_0 tal que $0 < \frac{3}{n_0} < \epsilon - \lambda(p_\alpha)$, luego $A = \bigcup_{n \in \omega \setminus \{0\}} \{p \in A : \lambda(p) < \epsilon - \frac{3}{n}\}$. Entonces, como A tiene cardinalidad \aleph_1 , es decir, es no

numerable, existe $m \in \omega$ tal que el conjunto $A_m = \{\alpha \in \omega_1 : \lambda(p_\alpha) < \epsilon - \frac{3}{m}\}$ es no numerable. Ahora bien, si $\alpha \in A_m$ entonces p_α es un abierto de \mathbb{R} y $\lambda(p_\alpha) < \epsilon$. Por el lema anterior, para cada $\alpha \in A_m$ y para $\delta = \frac{1}{m}$, podemos fijar $c_\alpha \in C$ tal que $\lambda(p_\alpha \Delta c_\alpha) \leq \delta$. Sean α y β dos elementos distintos de A_m , entonces como $p_\alpha, p_\beta \in A$ son incompatibles, y por lo cual $\lambda(p_\alpha \cup p_\beta) \geq \epsilon$. Por otro lado, $\lambda(p_\alpha \cap p_\beta) \leq \lambda(p_\alpha) \leq \epsilon - 3\delta$. Y así,

$$\lambda(p_\alpha \Delta p_\beta) = \lambda((p_\alpha \cup p_\beta) \setminus (p_\alpha \cap p_\beta)) \geq \lambda(p_\alpha \cup p_\beta) - \lambda(p_\alpha \cap p_\beta) \geq \epsilon - \epsilon + 3\delta = 3\delta.$$

Además, $p_\alpha \Delta p_\beta \subseteq (c_\alpha \Delta c_\beta) \cup (p_\alpha \Delta c_\alpha) \cup (p_\beta \Delta c_\beta)$ de modo que

$$\lambda(p_\alpha \Delta p_\beta) \leq \lambda(c_\alpha \Delta c_\beta) + \lambda(p_\alpha \Delta c_\alpha) + \lambda(p_\beta \Delta c_\beta),$$

pero como $\lambda(p_\alpha \Delta c_\alpha) \leq \delta$ y $\lambda(p_\beta \Delta c_\beta) \leq \delta$ esto implica que

$$\lambda(c_\alpha \Delta c_\beta) \geq \lambda(p_\alpha \Delta p_\beta) - \lambda(p_\alpha \Delta c_\alpha) - \lambda(p_\beta \Delta c_\beta) \geq 3\delta - \delta - \delta = \delta.$$

Por consiguiente, si $\alpha, \beta \in A_m$ son distintos entre si, entonces c_α y c_β también lo son. Así el hecho de que c_α es distinto de c_β , implica que $|A_m| \leq |C|$, con lo cual contradice la numerabilidad de C . De lo dicho anteriormente, dicha anticadena no puede existir y entonces \mathbb{P} tiene la *c.c.c.* Definamos a una familia de densos que asegurarán que el objeto que buscamos contenga a cada elemento de $\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Para cada $\alpha < \kappa$ definimos al conjunto $D_\alpha = \{p \in P : M_\alpha \subseteq p\}$. Cada conjunto D_α es denso en \mathbb{P} ; en efecto, sea $p \in P$, por como se definio a P , tenemos que $\lambda(p) < \epsilon$, por lo cual $\epsilon - \lambda(p) > 0$. Entonces, como M_α tiene medida de Lebesgue cero, existe un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}$, con $M_\alpha \subseteq V$, tal que $\lambda(V) < \epsilon - \lambda(p)$; es decir, $\lambda(V) + \lambda(p) < \epsilon$, por lo cual $\lambda(V \cup p) < \epsilon$. Entonces tenemos que $M_\alpha \subseteq p$ y $V \cup p \in D_\alpha$. Y como $V \cup p \leq p$, por lo tanto D_α es denso en \mathbb{P} .

Consideremos a $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$, por el *MA*, existe un filtro G que es \mathcal{D} -genérico en \mathbb{P} . Sea $U = \bigcup G$; entonces U es abierto. A continuación veamos que U contiene a $\bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha$ y que tiene medida menor a ϵ ; sea $\alpha < \kappa$, como $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$, para cada $\alpha < \kappa$ existe $p_\alpha \in G \cap D_\alpha$ tal que $M_\alpha \subseteq p_\alpha \subseteq U$; por ello, $\bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha \subseteq U$. Ahora notemos que si $n \in \omega$ y $\{p_i : i \leq n\} \subseteq G$, debido a la caracterización de la compatibilidad en \mathbb{P} y puesto a que G es un filtro, obtenemos que $\bigcup_{i=0}^n p_i \in G$ y, así $\lambda(\bigcup_{i=0}^n p_i) < \epsilon$. Por lo tanto, si $A \subseteq G$ es a lo más numerable, dada la subaditividad de λ implica que $\lambda(\bigcup A) \leq \epsilon$. Por último, demostaremos que $\lambda(U) \leq \epsilon$. Por lo dicho anteriormente, si encontramos un conjunto a lo más numerable $A \subseteq P$ tal que $\bigcup A = \bigcup G$ tendremos nuestro objetivo. Puesto que $U \subseteq \mathbb{R}$, y \mathbb{R} es segundo numerable, implica que U también es segundo numerable, y por lo que es Lindelöf, y como G es una cubierta abierta de U , existe $\{H_n : n \in \omega\} \subseteq G$ una subcubierta numerable de G , tal que $U = \bigcup_{n \in \omega} H_n$, podemos concluir que $\lambda(U) = \lambda(\bigcup_{n \in \omega} H_n) \leq \epsilon$. Y por lo tanto, $\bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha$ tiene medida de Lebesgue 0. ■

Corolario 0.66 (*MA* + $\neg CH$). $add(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$.

En Teoría de Conjuntos se estudia los invariantes cardinales del continuo, los cuales están constituidos por ciertos aspectos combinatorios del conjunto de números reales. Los siguientes son ejemplos de algunos invariantes cardinales del Continuo:

1. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, la cofinalidad de \mathcal{A} se define como sigue:

$$cof(\mathcal{A}) = \min\{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} : \text{para cada } A \in \mathcal{A} \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } A \subseteq B\}.$$

2. Sea \mathcal{J} un ideal sobre X con $\bigcup \mathcal{J} = X$. Definimos al número de homogeneidad de \mathcal{J} , $non(\mathcal{J})$ como sigue:

$$non(\mathcal{J}) = \min\{|E| : E \subseteq X \wedge E \notin \mathcal{J}\}.$$

Dadas $f, g \in \omega^\omega$, escribiremos $f \leq^* g$ si existe $n \in \omega$ tal que para cada $k > n$ se tiene que $f(k) \leq g(k)$.

3. \mathfrak{b} es el mínimo tamaño de una familia $\mathcal{B} \subseteq \omega^\omega$, tal que para todo $f \in \mathcal{B}$ no existe $g \in \omega^\omega$ que cumpla que $f \leq^* g$.
4. \mathfrak{d} es el mínimo tamaño de una familia $\mathcal{D} \subseteq \omega^\omega$ tal que para todo $f \in \omega^\omega$ existe $g \in \mathcal{D}$ que cumple que $f \leq^* g$.

El Diagrama de Cichón (ver figura 1.1) representa la relación de algunas desigualdades entre los cardinales de la Teoría de Conjuntos. Las definiciones de cada uno de ellos son las antes enunciadas, la definición 0.59 y la definición 0.63. Se entendera dicho diagrama como sigue: si κ y γ son cardinales del diagrama, entonces el símbolo $\kappa \rightarrow \gamma$ significa que $\kappa \leq \gamma$.

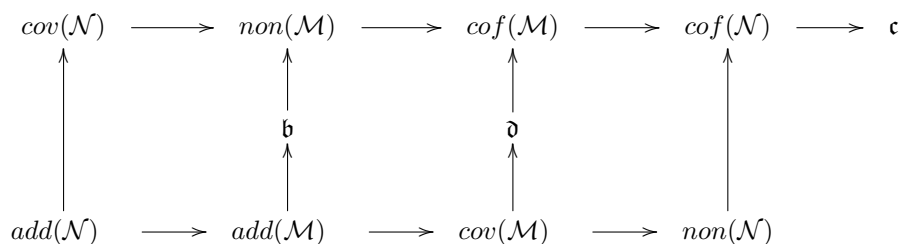


Figura 1.1: Diagrama de Cichón

La veracidad de las anteriores desigualdades se pueden encontrar en: [1], [19] y [10].

Capítulo 2. Medidas exteriores mediante una selección de dos puntos

En este capítulo mencionamos a las nuevas medidas exteriores en la línea real. Una medida exterior al igual que la medida exterior de Lebesgue, tiene la importancia de estar definida para todos los conjuntos en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y además es una función que extiende la noción de longitud de un intervalo, pues utiliza la longitud de los intervalos para determinar el tamaño de un subconjunto de \mathbb{R} . Así este capítulo como veremos a continuación, nos garantiza una relación y comparación, en analogía con la medida exterior de Lebesgue, al igual que nos permite establecer una medida para un subconjunto de \mathbb{R} respecto a una selección de dos puntos f .

0.4. Medidas exteriores especiales

A continuación enunciamos la principal definición de esta tesis, la medida exterior inducida por una selección de dos puntos.

Definición 0.67. Sea $f : [\mathbb{R}]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una selección de dos puntos en \mathbb{R} y $A \subseteq \mathbb{R}$, la medida exterior inducida por f es la función $\lambda_f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ definida para cada $A \subseteq \mathbb{R}$ como

$$\lambda_f(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n - a_n| : A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n]_f \right\},$$

si existe una cubierta numerable de A mediante f -intervalos semiabiertos y si no existe tal cubierta definimos $\lambda_f(A) = +\infty$.

Esta función $\lambda_f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$ es una medida exterior sobre los números reales \mathbb{R} la cual generaliza a la medida exterior de Lebesgue.

A continuación demostraremos que esta función es una medida exterior sobre los números reales.

Teorema 0.68. Para cada selección de dos puntos f , λ_f es una medida exterior en \mathbb{R} .

Demostración. Veamos que se cumple cada inciso de la definición 0.6.

- (1) Para el conjunto vacío es evidente que su medida exterior es cero y para cualquier conjunto $A \neq \emptyset$ se cumple $\lambda_f(A) \geq 0$.
- (2) Para la monotonía tenemos que si $A \subseteq B$ entonces toda cubierta numerable por f -intervalos semiabiertos de B también cubre a A . Si no existe tal cubierta la desigualdad se dá claramente.
- (3) Para la subaditividad, sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en \mathbb{R} . Si alguno de éstos conjuntos no puede ser cubierto por una sucesión de f -intervalos tampoco podrá serlo la unión de ellos. Por lo cual, la desigualdad buscada se obtiene de manera inmediata. En el caso en que exista la cubierta se toman en cuenta los siguientes casos:

- ◇ Primer caso, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_f(A_n) = +\infty$ la desigualdad deseada es clara.
- ◇ Segundo caso, supongamos que ésta suma es finita. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y para cada $n \in \mathbb{N}$ escogemos una cubierta $\{(a_{n,j}, b_{n,j}]_f : j \in \mathbb{N}\}$ de f -intervalos semiabiertos tales que cubran a A_n y

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |b_{n,j} - a_{n,j}| < \lambda_f(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}. \quad (1)$$

Lo anterior es posible porque λ_f es el ínfimo sobre todas las sumas de las longitudes de los f -intervalos de las cubiertas numerables de A_n . Haciendo $B_n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (a_{n,j}, b_{n,j}]_f$, tenemos

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (a_{n,j}, b_{n,j}]_f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Sea $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una biyección. Reordenando por medio de σ tenemos lo siguiente:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (a_{n,j}, b_{n,j}]_f = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)})_f.$$

Como la $\sum_{i \in \mathbb{N}} (a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)})_f$ es convergente y por la desigualdad (2.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda_f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &\leq \lambda_f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lambda_f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (a_{n,j}, b_{n,j}]_f\right) \\ &= \lambda_f\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)})_f\right) \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |b_{\sigma(i)} - a_{\sigma(i)}| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |b_{n,j} - a_{n,j}| \\ &< \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_f(A_n) + \epsilon. \end{aligned}$$

Al ser ϵ arbitrario, se tiene la propiedad deseada. ■

A esta medida exterior λ_f la llamaremos f -medida exterior, \mathcal{M}_f denotará a los subconjuntos λ_f -medibles y \mathcal{N}_f denotará a todos los conjuntos λ_f -nulos.

Hay que observar que si $f = f_E$, entonces $\lambda_{f_E} = \lambda$ es la medida exterior de Lebesgue.

0.5. Propiedades básicas

A continuación daremos una definición la cual es importante para los ejemplos y demás resultados relevantes a lo que se refiere nuestra nueva medida exterior.

Definición 0.69. Sea f una selección de dos puntos y $r \in \mathbb{R}$. Decimos que r es f -minimal si $r <_f x$, para cada x en $\mathbb{R} \setminus \{r\}$. Si $x <_f r$ para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{r\}$, entonces r se llama f -maximal.

Observación 0.70. Observemos que cada selección de dos puntos f admite como máximo un punto f -minimal y también como máximo un punto f -maximal. Así mismo los puntos f -minimales y f -maximales juegan un papel importante en ciertas propiedades dentro de nuestras medidas exteriores inducidas por selecciones de dos puntos.

Observación 0.71. Hagamos algunos comentarios sobre los f -intervalos. Esta claro que si $r \in \mathbb{R}$ es f -maximal para alguna selección de dos puntos f , entonces $(r, s)_f = \emptyset$ para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{r\}$, y si r es f -minimal, entonces $(s, r)_f = \emptyset$ para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{r\}$.

El siguiente teorema nos menciona acerca de que en las f -medidas exteriores tenemos que la medida exterior de un punto es 0.

Teorema 0.72. Sean $X \in [\mathbb{R}]^\omega$, $x \in X$ y f una selección de dos puntos sin f -minimal ni f -maximal, entonces $\lambda_f(\{x\}) = 0$.

Demostración. Sean $x \in X$ y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathbb{R} .

(*) Supongamos que la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es tal que $a_n \rightarrow x$ y $a_n <_f x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces como $x \in (a_n, x]_f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que si $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ entonces $\lambda_f(\{x\}) < |x - a_n| < \epsilon$. Por lo tanto $\lambda_f(\{x\}) = 0$.

Ahora supongamos que no se cumple (*). Puesto que f es una selección de dos puntos sin f -minimal ni f -maximal, entonces existen puntos $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $x \in (s, t)_f$. Y puesto no se cumple (*) tenemos que, existe $N > 0$ tal que para todo $y \in (x - \frac{1}{N}, x + \frac{1}{N})$ se tiene $x <_f y$.

Afirmación. Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que si $a <_f x$ entonces para cada $y \in (a, x)$ (o bien $y \in (x, a)$) se tiene que $x <_f y$.

Prueba de la Afirmación: Sin pérdida de generalidad, sea $b < x$ y definamos $a = \sup\{y \in (b, x) : y <_f x\}$, luego $a <_f x$ y además como $a \leq x - \frac{1}{N} < x$, tenemos que para cada $y \in (a, x)$ se tiene que $x <_f y$.

Ahora bien, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión convergente a a y usando la **Afirmación** notemos que $a < a_n < x$ para cada $n \in \{1, \dots, N - 1\}$ entonces por la misma **Afirmación** obtenemos que $x <_f a_n$, esto implica que $x \in (a, a_n]_f$. Y por lo tanto $\lambda_f(\{x\}) = 0$. ■

Los siguientes corolarios son derivados del teorema 0.72.

Corolario 0.73. Para cada selección de dos puntos f y para cada $r \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\lambda_f(\{r\}) = \begin{cases} 0 \\ +\infty. \end{cases}$$

Corolario 0.74. Sea f una selección de dos puntos y $r \in \mathbb{R}$.

- Si r es f -maximal, entonces $\lambda_f(\{r\}) = 0$.
- r es f -minimal si y sólo si $\lambda_f(\{r\}) = +\infty$.

El siguiente lema nos dice que un conjunto numerable tiene medida exterior inducida por una selección de dos puntos sin f -minimal cero.

Lema 0.75. Sea f una selección de dos puntos. Si $s \in \mathbb{R}$ es un f -minimal entonces $\lambda_f(N) = 0$, para todo $N \in [\mathbb{R} \setminus \{s\}]^{\leq \omega}$.

Demostración. Se sigue del teorema anterior. ■

Teorema 0.76. Sean f y g dos selecciones de dos puntos sin f, g -minimales. Si existe $M \in [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$ tal que $x <_f y \iff x <_g y$ y $|M \cap \{x, y\}| < 1$ para cada $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$, entonces $\lambda_f(A) = \lambda_g(A)$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración. Observación: $A \cap (a_n, b_n]_f = A \cap (a_n, b_n]_g$. En efecto,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (a_n, b_n]_f &\iff x \in A \text{ y } a_n <_f x \leq_f b_n. \\ &\iff x \in A \text{ y } a_n <_g x \leq_f b_n. \\ &\iff x \in A \text{ y } a_n <_g x \leq_g b_n. \\ &\iff x \in A \cap (a_n, b_n]_g. \end{aligned}$$

Ahora para la medida exterior inducida por las selecciones de dos puntos f y g tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $\{(a_n, b_n]_f : n \in \mathbb{N}\}$ una cubierta numerable de f -intervalos semiabiertos para A . Así tenemos por la observación anterior, para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n^k, b_n^k]_f \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n^k, b_n^k]_g.$$

Entonces por una parte, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda_g(A) &\leq \lambda_g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n^k, b_n^k]_g\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_g\left((a_n^k, b_n^k]_g\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f\left((a_n^k, b_n^k]_f\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |b_n^k - a_n^k|, \end{aligned}$$

es decir $\lambda_g(A) \leq \lambda_f(A)$. Por otro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda_f(A) &\leq \lambda_f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n^k, b_n^k]_f\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f\left((a_n^k, b_n^k]_f\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_g\left((a_n^k, b_n^k]_g\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |b_n^k - a_n^k|, \end{aligned}$$

entonces $\lambda_f(A) \leq \lambda_g(A)$. Por lo tanto $\lambda_f(A) = \lambda_g(A)$.

Caso 2. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ no se puede cubrir por una cubierta numerable de f -intervalos entonces por la observación del inicio tampoco se podrá cubrir por una cubierta numerable de g -intervalos y viceversa. Entonces tenemos que $\lambda_f(A) = +\infty$ y $\lambda_g(A) = +\infty$.

Por lo tanto concluimos que, $\lambda_f(A) = \lambda_g(A)$. ■

El siguiente teorema nos dice que bajo las f -medidas exteriores podemos tener que la medida exterior de \mathbb{R} bajo la existencia de una selección de dos puntos f es 0.

Teorema 0.77. *Existe una selección de dos puntos f tal que $\lambda_f(\mathbb{R}) = 0$.*

Demostración. Definamos al siguiente conjunto $S = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, y consideremos la sucesión $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Ahora definamos a la selección de dos puntos f de la siguiente manera:

$$f(\{x, y\}) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ y } y \in S, \\ f_E(\{x, y\}) & \text{si } x = \frac{1}{n+1} \text{ y } y = \frac{1}{n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \\ x & \text{si } x \in S \text{ y } y = \frac{1}{n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \\ f_E(\{x, y\}) & \text{si } x \in S \text{ y } y \in S. \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos que $S \subseteq (0, \frac{1}{n}]_f$. Entonces

$$\lambda_f(\mathbb{R}) = \lambda_f(S) + \lambda_f\left(\left\{0, \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}\right) = 0.$$

■

A continuación demostraremos que existe una selección de dos puntos tal que para un conjunto de tamaño \mathfrak{c} , su f -medida exterior es $+\infty$.

Teorema 0.78. *Si $A \in [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$, entonces existe una selección de dos puntos f sin f -minimal tal que $\lambda_f(A) = +\infty$.*

Demostración. Enumeremos a todas las sucesiones de \mathbb{R} como $\{S_\epsilon : \epsilon < \mathfrak{c}\}$ y cada S_ϵ como $\{x_n^\epsilon : n \in \mathbb{N}\}$. Ahora vamos a definir a la selección de dos puntos f por inducción transfinita. Tomemos $r_0 \in A \setminus S_0$ y definamos $r_0 <_f x_n^0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora sea $\theta < \mathfrak{c}$ y supongamos que para cada $\epsilon < \theta$ hemos elegido un número real $r_\epsilon \in \mathbb{R}$ para cada ϵ y fijemos $r_\theta \in A \setminus [\bigcup_{\epsilon < \theta} S_\epsilon \cup \{r_\epsilon : \epsilon < \theta\}]$ y definamos $r_\theta <_f x_n^\epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$, para cada $\epsilon \leq \theta$ y $r_\theta <_f r_\epsilon$ para cada $\epsilon < \theta$. Y para los demás conjuntos faltantes definamos el orden Euclideo.

Sea $\{(a_n, b_n]_f : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de f -intervalos semiabiertos. Supongamos que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]_f$. Luego existe $\theta < \mathfrak{c}$ tal que $x_n^\theta = a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por construcción tenemos que $r_\theta <_f x_n^\theta = a_n$, entonces $r_\theta \in A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]_f$, lo cual es una contradicción. Así concluimos que, $\lambda_f(A) = +\infty$. ■

A continuación mencionaremos un par de teoremas relevantes con las f -medidas exteriores para familias de diversos tamaños.

Teorema 0.79. *Sea $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \in [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$ ajenos entre sí y, $0 < r_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, entonces existe una selección de dos puntos f tal que $\lambda_f(A_\alpha) = r_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$.*

Demostración. Consideremos para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} A_\alpha \cup \{a_\epsilon, b_\epsilon : \epsilon < \alpha\}$ y $r_\alpha = b_\alpha - a_\alpha > 0$. Primero definamos para cada $t \in A$ y para cada $\alpha < \mathfrak{c}$

$$a_\alpha \leq_f t \leq_f b_\alpha.$$

Ahora sea $R = \{S \in \mathbb{R}^\omega : S = (x_{\alpha,j})_{j \in \mathbb{N}}$ con $\alpha < \mathfrak{c}$ fijo y para todo $n \in \mathbb{N}$ $(x_{\alpha,2j} \neq x_{\alpha,2j+1})$ con $\alpha < \mathfrak{c}$ fijo $\} = \{S_\epsilon : \epsilon < \mathfrak{c}\}$ y cada S_ϵ como $(x_{\alpha,j}^\epsilon)_{j \in \mathbb{N}}$ con $\alpha < \mathfrak{c}$ fijo. Supongamos que la selección de dos puntos f y el número $t_\epsilon^\alpha \in A_\alpha$ para cada $\epsilon < \theta < \mathfrak{c}$ se han definido de manera conveniente. Consideremos la sucesión S_θ fijemos $t_\theta^\alpha \in A_\alpha \setminus [\{t_\epsilon^\alpha : \epsilon < \theta\} \cup \bigcup_{\epsilon < \theta} S_\epsilon]$. Definamos la selección de dos puntos f en el punto t_θ^α con respecto a $x_{\alpha,j}^\epsilon$ para cada $j \in \mathbb{N}$, $\alpha < \mathfrak{c}$ fijo, como sigue:

- Si existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $t_\theta^\alpha = x_{\alpha,2j}^\epsilon$ para algún $\epsilon < \theta$ definamos $x_{\alpha,2j+1}^\epsilon <_f t_\theta^\alpha$.
- Si existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $t_\theta^\alpha = x_{\alpha,2j+1}^\epsilon$ para algún $\epsilon < \theta$ definamos $t_\theta^\alpha <_f x_{\alpha,2j}^\epsilon$.
- Para cada $j \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{j+1} <_f \frac{1}{j}$.

La selección de dos puntos f matendra el orden Euclideo donde no ha sido definida. Por definición tenemos que $A_\alpha \subseteq (a_\alpha, b_\alpha]_f$ y por ello obtenemos que $\lambda_f(A_\alpha) \leq b_\alpha - a_\alpha = r_\alpha$.

Supongamos que $A_\alpha \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} (a_{\alpha,j}, b_{\alpha,j}]_f$. Sea $\theta < \mathfrak{c}$ de tal forma que la sucesión $S_\theta = (x_{\alpha,2j}^\theta)_{j \in \mathbb{N}}$ con $n \in \mathbb{N}$ fijo, cumpla que $a_\alpha = x_{\alpha,2j}^\theta$ y $b_\alpha = x_{\alpha,2j+1}^\theta$ con $j, n \in \mathbb{N}$ y n -fijo. Por definición de la selección de dos puntos f se cumple lo siguiente:

- $r_\theta \notin (x_{\alpha,2j}^\theta, x_{\alpha,2j+1}^\theta]_f$ si $x_{\alpha,2j}^\theta \neq a_\alpha$ y $x_{\alpha,2j+1}^\theta \neq b_\alpha$.

- $r_\theta \notin (x_{\alpha,2j}^\alpha, b_\alpha]_f$ si $x_{\alpha,2j}^\theta \neq a_\alpha$.
- $r_\theta \notin (a_\alpha, x_{\alpha,2j+1}^\theta]_f$ si $x_{\alpha,2j+1}^\theta \neq b_\alpha$,

lo cual implica que $r_\theta \notin \bigcup_{j=1}^{+\infty} (x_{\alpha,2j}^\theta, x_{\alpha,2j+1}^\theta]_f$ si $x_{\alpha,2j}^\theta \neq a_\alpha$ y $x_{\alpha,2j+1}^\theta \neq b_\alpha$ para cada $j, n \in \mathbb{N}$ con n -fijo. Por lo tanto la única posible cubierta por f -intervalos de A_α debe contener a $(a_\alpha, b_\alpha]_f$. Así concluimos que $\lambda_f(A_\alpha) = b_\alpha - a_\alpha = r_\alpha$. ■

Teorema 0.80. Sean $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\} \in [\mathbb{R}]^c$ tales que $|A_\alpha \cap A_\beta| \leq \omega$ para todo $\alpha < \beta < \omega_1$ y, $0 < r_\alpha \in \mathbb{R}$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, entonces existe una selección de dos puntos f tal que $\lambda_f(A_\alpha) = r_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$.

Demostración. Sea $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ la familia tal que cumple la hipótesis y consideremos para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha < \omega_1} A_\alpha \cup \{a_\epsilon, b_\epsilon : \epsilon < \alpha\}$ y $r_\alpha = b_\alpha - a_\alpha > 0$. Definamos a la familia $\{A'_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ como sigue:

$$A'_0 = A_0, A'_1 = A_1 \setminus (A_0), A'_2 = A_2 \setminus (A_0 \cup A_1), \dots, A'_\alpha = A_\alpha \setminus \left(\bigcup_{\xi < \alpha} A_\xi \right).$$

Esta claro que los elementos de $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ son ajenos entre sí. Ahora sea la selección de dos puntos f como en el teorema anterior, entonces tenemos que $\lambda_f(A'_\alpha) = r_\alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$. Y puesto que $A_\alpha = A'_\alpha \cup \left(\bigcup_{\xi < \alpha} A_\alpha \cap A_\xi \right)$ y $|A_\alpha \cap A_\xi| \leq \omega$ concluimos que $\lambda_f(A_\alpha) = \lambda_f(A'_\alpha)$. Es decir $\lambda_f(A_\alpha) = r_\alpha$. ■

Enseguida enunciamos corolarios donde se aprecian más resultados sobre las f -medidas exteriores de ciertos conjuntos.

Corolario 0.81. Sean $A \in [\mathbb{R}]^c$ y, $0 < r \in \mathbb{R}$ entonces existe una selección de dos puntos f tal que $\lambda_f(A) = r$.

Corolario 0.82. Sean $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [\mathbb{R}]^c$ ajenos entre si y, $0 < r_n \in \mathbb{N}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces existe una selección de dos puntos f tal que $\lambda_f(A_n) = r_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Corolario 0.83. Sean $A \in [\mathbb{R}]^c$, $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \in [\mathbb{R} \setminus A]^c$ ajenos entre si y, $r_\alpha > 0$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$. Entonces existe una selección de dos puntos f tal que $\lambda_f(A_\alpha) = r_\alpha$ y $\lambda_f(A) = 0$.

Corolario 0.84. Para cada $r > 0$ existe una selección de dos puntos f y existe $A \in [\mathbb{R}]^c$ tal que $\lambda_f(A) = r$.

En lo que respecta al teorema 0.80 nos gustaría formular la siguiente pregunta que nos gustaría resolver en un futuro.

Pregunta 0.85. Sean $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \in [\mathbb{R}]^c$ tales que $|A_\alpha \cap A_\beta| \leq \omega$ para todo $\alpha < \beta < \mathfrak{c}$ y, $0 < r_\alpha \in \mathbb{R}$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, entonces ¿existirá una selección de dos puntos f tal que $\lambda_f(A_\alpha) = r_\alpha$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$?

Teorema 0.86. Para cada $N \subsetneq \mathbb{R}$ existe una selección de dos puntos f tal que $N \subseteq \mathcal{N}_f$ y $\lambda_f(\mathbb{R} \setminus N) = +\infty$.

Demostración. Sea $s \in \mathbb{R} \setminus N$ definamos $s <_f r$ para todo $r \in \mathbb{R} \setminus \{s\}$. Sea $K \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} \neq s$ para cada $K \leq k$. Ahora denotemos a N^* por $N^* = N \setminus \left(\frac{1}{k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$, además definamos $\frac{1}{k+1} <_f r \leq_ f \frac{1}{k}$ para todo $r \in N^*$, para los puntos faltantes se mantiene el orden Euclideo. Por lo tanto $\lambda_f(\mathbb{R} \setminus N) = +\infty$. ■

El siguiente teorema nos proporciona una relación entre la medida exterior de Lebesgue y una f -medida exterior dada mediante alguna selección de dos puntos f .

Lema 0.87. Si $0 < \lambda(E) < +\infty$ y $E \subseteq (a, b)$ entonces, existe $d \in (a, b)$ tal que $0 < \lambda(E_1), \lambda(E_2) < \lambda(E)$ para $E_1 = (a, d) \cap E$, $E_2 = (d, b) \cap E$.

Demostración. Sea $E \subseteq (a, b)$. Como $0 < \lambda(E)$ para $0 < \epsilon$ se tiene que $\epsilon < \lambda(E)$. Consideremos una cubierta numerable de intervalos semiabiertos $\{(x_n, y_n] : n \in \mathbb{N}\}$ para el conjunto E ; es decir, $E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (x_n, y_n]$. Observemos que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (x_n, y_n] \cap E$. Ahora bien, por esta observación y por la definición de $\lambda(E)$ tenemos que se cumple lo siguiente:

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n] \cap E\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((x_n, y_n] \cap E),$$

y además tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se sigue que $|y_n - x_n| < \epsilon$. Entonces existen $m_1 = (x_{n_1}, y_{n_1}] \cap E$ y $m_2 = (x_{n_2}, y_{n_2}] \cap E$ tales que $0 < \lambda(m_1)$ y $0 < \lambda(m_2)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $y_{n_1} < x_{n_2}$ y definamos a $d \in (a, b)$, $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ como sigue:

$$d = \frac{x_{n_2} - y_{n_1}}{2}, \text{ y } E_1 = (a, d) \cap E, E_2 = (d, b) \cap E.$$

Por lo consiguiente, tenemos que $0 < \lambda(m_1) \leq \lambda(E_1) < \lambda(E)$ y $0 < \lambda(m_2) \leq \lambda(E_2) < \lambda(E)$. Por lo cual, concluimos que $0 < \lambda(E_1), \lambda(E_2) < \lambda(E)$. ■

Teorema 0.88. Si $0 < \lambda(E) < +\infty$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe una selección de dos puntos f tal que $0 < \lambda_f(E) < \lambda(E) - \epsilon$.

Demostración. Sea $E = (a, b)$ y $d \in (a, b)$. Definimos a la selección de dos puntos f como sigue:

$$a <_f (a, b) \setminus d <_f b.$$

1) Por definición de la selección de dos puntos f tenemos que $\lambda_f((a, b)) \leq \frac{b-a}{2}$.

2) Puesto que $(a, d) \subseteq (a, b)$ tenemos que $\frac{b-a}{2} = \lambda_f((a, d)) \leq \lambda_f((a, b))$.

De 1) y 2) obtenemos que $\frac{b-a}{2} \leq \lambda_f((a, b)) \leq \frac{b-a}{2}$ lo cual implica que $\lambda_f((a, b)) = \frac{b-a}{2}$ y como se tiene que $\lambda((a, b)) = b - a$ así se sigue la desigualdad $\lambda_f((a, b)) < \lambda((a, b))$. Por lo tanto, $0 < \lambda_f(E) < \lambda(E)$.

Ahora bien, sin pérdida de generalidad, supongamos que $E \subseteq (a, b)$ y $(c, d) \cap (a, b) = \emptyset$ con $d < a$. Definamos para cada $r \in E$ la selección de dos puntos f como sigue:

$$c <_f r <_f d.$$

Entonces tenemos que $E \subseteq (c, d)_f$ esto implica que $\lambda_f(E) \leq d - c < \lambda(E)$ y por el lema anterior se sigue que $0 < \lambda_f(E) < \lambda(E)$. Así concluimos que $0 < \lambda_f(E) < \lambda(E) - \epsilon$. ■

El siguiente teorema hace referencia a la existencia de una selección de dos puntos f para la cual cada subconjunto del conjunto de los números reales, su f -medida exterior es igual a su medida exterior de Lebesgue.

Teorema 0.89. Para todo $E \subseteq \mathbb{R}$ existen una selección de dos puntos f y $r \in \mathbb{R}$ tales que $E + r \in \mathcal{M}_f$ y $\lambda_f(E) = \lambda(E)$.

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Elijamos un número positivo $r \in \mathbb{R}$ de tal manera que $(E+r) \cap E = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\frac{1}{n+1} < r$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $s \in E + r$. Definamos la selección de dos puntos f de la siguiente manera:

$$f(\{x, y\}) := \begin{cases} x & \text{si } x \in E + r \setminus \left\{\frac{1}{n+1}\right\} \text{ y } y = \frac{1}{n+1}, \\ -\frac{1}{n+1} & \text{si } x \in E + r \setminus \left\{\frac{1}{n+1}\right\} \text{ y } y = -\frac{1}{n+1}, \\ x & x < y \text{ en otro caso} \end{cases}$$

para cada $\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2$ y para cada $n \in \mathbb{N}$. Según la definición de la selección de dos puntos f tenemos que para cada $s \in E + r$ se cumple que $s \in \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)_f$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la monotonía de la f -medida exterior obtenemos lo siguiente:

$$\lambda_f(E + r) \leq \lambda_f\left(\left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)_f\right) \leq \frac{2}{n+1},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\lambda_f((E + r)) = 0$. Y además tenemos que los λ_f -nulos son λ_f -medibles, así también $E + r$ es λ_f -medible. Como $(x, y] \cap E = (x, y]_f \cap E$ para $x, y \in \mathbb{R}$ distintos, concluimos que $\lambda_f(E) = \lambda(E)$ para todo $E \subseteq \mathbb{R}$. ■

Ahora veremos un ejemplo relevante contrario con el hecho de que todo intervalo euclideo (a, b) es Lebesgue medible.

Ejemplo 0.90. *Existe una selección de dos puntos f tal que $(0, 1)_f$ es no λ_f -medible.*

Demostración. Nuestra selección de dos puntos f esta definida como sigue:

$$f(\{r, s\}) = \begin{cases} r & \text{si } r \in (3, 4) \text{ y } s = 1, \\ 0 & \text{si } r \in (3, 4) \text{ y } s = 0, \\ r & \text{si } r \in (2, 3) \text{ y } s = 0, \\ -1 & \text{si } r \in (2, 3) \text{ y } s = -1, \\ r & \text{si } r \in (2, 4) \text{ y } s = 6, \\ 5 & \text{si } r \in (2, 4) \text{ y } s = 5, \\ r & \text{si } x < y \text{ de otra forma.} \end{cases}$$

para cada $\{r, s\} \in [\mathbb{R}]^2$. Tenemos las siguientes propiedades:

- $(2, 4) = (2, 4)_f$, $(2, 3) = (2, 3)_f$ y $(3, 4) = (3, 4)_f$.
- $(0, 1)_f = (0, 1) \cup (3, 4)$ y $(-1, 0)_f = (-1, 0) \cup (2, 3)$.
- $(5, 6)_f = (5, 6) \cup (2, 4)$.

Por lo anterior, tenemos que $\lambda_f((2, 4)) = \lambda_f((2, 3)) = \lambda_f((3, 4)) = 1$. Ahora bien, si $E = (0, 1)_f$ y $A = (2, 4)_f$, entonces $E \cap A = [(0, 1) \cup (3, 4)] \cap (2, 4) = (3, 4) = (3, 4)_f$, y $E^c \cap A = [(-\infty, 0) \cup [1, 3] \cup [4, +\infty)] \cap (2, 4) = (2, 3) = (2, 3)_f$. Entonces, $\lambda_f(E \cap A) = \lambda_f(E^c \cap A) = 1$. Por otro lado, tenemos $(2, 4) \subseteq (5, 6)_f$, esto implica que debemos tener $\lambda_f((2, 4)_f) \leq 1$. Por consiguiente,

$$\lambda_f(E \cap A) + \lambda_f(E^c \cap A) = 2 > 1 = \lambda_f(A).$$

Así concluimos que, $(0, 1)_f$ no puede ser λ_f -medible. ■

Enseguida nos cuestionamos acerca de la siguiente pregunta.

Pregunta 0.91. *Para toda selección de dos puntos f se cumple $\lambda_f(E) = \lambda_{f-}(E)$.*

Para responder la pregunta anterior tenemos los siguientes dos ejemplos cada uno con su respectivo caso deductivo.

Ejemplo 0.92. Consideremos $a \in \mathbb{R}$ y supongamos que a es un f -minimal para nuestra selección dada. Entonces por el corolario 0.74 obtenemos que $\lambda_f(\{a\}) = +\infty$ y, ahora si suponemos que a es un f -maximal y dada la definición 0.36 se tiene que $\lambda_{f^-}(\{a\}) = 0$.

Ejemplo 0.93. Definamos a nuestra selección de dos puntos como sigue:

$$f(\{r, s\}) = \begin{cases} r & \text{si } r < 1 \text{ y } s \in (1, +\infty), \\ s & \text{si } 0 < r \text{ y } s \in (+\infty, 0], \\ r & \text{si } x < y \text{ de otra forma.} \end{cases}$$

Entonces por la definición de nuestra selección de dos puntos opuesta f^- obtenemos que $[0, 1]_{f^-} = \{0\}$ y su medida exterior inducida bajo nuestra selección definida es $\lambda_{f^-}([0, 1]_{f^-}) = 0$ pero por otro lado por la definición usual de nuestra selección de dos puntos f obtenemos que $\lambda_f([0, 1]_f) = +\infty$.

A continuación enlistamos preguntas abiertas sobre este capítulo.

Pregunta 0.94. Dada una selección de dos puntos f ¿existe g selección de dos puntos tal que $\lambda_f(A) < \lambda_g(A)$ para todo $A \in [\mathbb{R}]^c$?

Pregunta 0.95. Si $0 < \lambda_g(E)$ para cada $\epsilon > 0$ ¿existe una selección de dos puntos f tal que $0 < \lambda_f(E) < \lambda_g(E) - \epsilon$?

Pregunta 0.96. Para cada $E \subseteq \mathbb{R}$ no numerable ¿existe una selección de dos puntos f tal que E no es λ_f -medible?

Pregunta 0.97. Supongamos que las selecciones de dos puntos f y g satisfacen que existe $N \in [\mathbb{R}]^c$ tal que $f(\{x, y\}) \neq g(\{x, y\})$ para todo $\{x, y\} \in [N]^2$ y $f(\{x, y\}) = g(\{x, y\})$ para cada $|\{x, y\} \cap N| < 1$. ¿Es cierto que para cada $E \subseteq \mathbb{R}$ se cumple que $\lambda_f(E) = \lambda_g(E)$?

Capítulo 3. σ -Ideales de conjuntos nulos

Dada una selección de dos puntos f en \mathbb{R} , \mathcal{N}_f denotará el σ -ideal que consiste en todos los conjuntos λ_f -nulos y la familia de los subconjuntos λ_f -medibles se indicarán con \mathcal{M}_f . En este capítulo, nos concentraremos en el estudio de los σ -ideales de la forma \mathcal{N}_f en donde f es una selección de dos puntos.

Primero veremos que hay $2^{\mathfrak{c}}$ σ -ideales distintos por pares de la forma \mathcal{N}_f , donde f es una selección de dos puntos en \mathbb{R} . Posteriormente introducimos la noción de cofinalidad de un σ -ideal la cual nos dice que los ideales de la forma \mathcal{N}_f tienen cofinalidad $\leq \mathfrak{c}$. Daremos algunas condiciones para que un σ -ideal de \mathbb{R} sea exactamente la familia \mathcal{N}_f de subconjuntos λ_f -nulos para alguna selección de dos puntos f . Detalladamente describiremos un σ -ideal en \mathbb{R} que no es de la forma \mathcal{N}_f para ninguna selección de dos puntos f . Mostraremos que CH es equivalente a varias condiciones que involucran selecciones de dos puntos muy especiales en \mathbb{R} . Posteriormente, usaremos el Axioma de Martin para mostrar que todo σ -ideal con cofinalidad $\leq \mathfrak{c}$ es de la forma \mathcal{N}_f para alguna selección de dos puntos f .

0.6. σ -Ideales de la forma \mathcal{N}_f

Iniciaremos esta sección con la siguiente observación. Para ver que un σ -ideal \mathcal{I} es el σ -ideal de los conjuntos nulos de \mathbb{R} basta ver lo siguiente:

Si \mathcal{I} es un σ -ideal de \mathbb{R} , entonces definamos

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \in \mathcal{I} \\ +\infty & \text{si } A \notin \mathcal{I} \end{cases}$$

Entonces $\mathcal{N}_\mu = \mathcal{I}$.

A continuación enunciamos algunos conceptos básicos para entrar de lleno a la impresionante teoría que se recabo de la familia de conjuntos nulos y su gran importancia en la Teoría de la Medida y la Teoría de Conjuntos.

Notación 0.98. *Dados un ordinal fijo α , (β, η) , $[\beta, \eta)$, $(\beta, \eta]$ y $[\beta, \eta]$ denotarán los distintos tipos de intervalos de α con respecto al orden de α para cada $\beta < \eta < \alpha$. El orden usual en la línea real \mathbb{R} se denotará simplemente con \leq .*

Recordemos que en esta tesis, \mathcal{M} representará la familia de conjuntos Lebesgue medibles de \mathbb{R} y \mathcal{N} para los subconjuntos Lebesgue nulos de \mathbb{R} .

Ejemplo 0.99. *Para cada selección de dos puntos f , \mathcal{N}_f es un σ -ideal y si la selección f no tiene f -mínimal, entonces $[\mathbb{R}]^{\leq \omega} \subseteq \mathcal{N}_f$.*

Ya que los conjuntos nulos forman un σ -ideal es muy natural considerar la siguiente pregunta.

Pregunta 0.100. *¿Cuáles son los σ -ideales \mathcal{I} sobre \mathbb{R} para los cuales existe una selección de dos puntos f de manera que $\mathcal{I} = \mathcal{N}_f$?*

Un caso particular de esta pregunta es la siguiente.

Pregunta 0.101. *¿Existe una selección de dos puntos f de modo que \mathcal{N}_f sea exactamente el σ -ideal de subconjuntos magros de \mathbb{R} ?*

Nuestra próxima tarea es la construcción de 2^c σ -ideales distintos entre sí de la forma \mathcal{N}_f , donde f es una selección de dos puntos en \mathbb{R} . La construcción se basa en el siguiente teorema.

El siguiente lema fácil se ha usado con frecuencia para construir ejemplos y contraejemplos (ver, por ejemplo, [7]).

Lema 0.102. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea f una selección de dos puntos en \mathbb{R} . Supongamos que existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a x , en la topología Euclidiana, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x <_f a <_f x_n$ o $x_n <_f a <_f x$, para cada $a \in A$ (pero a lo sumo un subconjunto numerable). Entonces $\lambda_f(A) = 0$.*

Para continuar con el estudio de los ideales de los nulos de la forma \mathcal{N}_f , tenemos que recordar la definición de la suma directa de dos ideales \mathcal{I} y \mathcal{J} :

$$\mathcal{I} \oplus \mathcal{J} = \{I \cup J : I \in \mathcal{I} \text{ y } J \in \mathcal{J}\}.$$

En el comentario de la definición 0.34 demostramos que si \mathcal{I} y \mathcal{J} son dos σ -ideales, entonces $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ también es un σ -ideal.

Teorema 0.103. *Para cada $X \subseteq \mathbb{R}$ y para cada selección de dos puntos f sin minimal, existe una selección de dos puntos g tal que*

$$\mathcal{N}_f \oplus \mathcal{P}(X) = \mathcal{N}_g.$$

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y sea f una selección de dos puntos sin minimal.

◊ Si $|\mathbb{R} \setminus X| \leq \omega$, por el Corolario 0.73, y puesto que f no tiene minimal, obtenemos que $\lambda_f(\mathbb{R} \setminus X) = 0$ y por lo tanto $\mathcal{N}_f \oplus \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. En efecto: por un lado tenemos por definición de la suma de ideales que $\mathcal{N}_f \oplus \mathcal{P}(X) = \{N \cup M : N \in \mathcal{N}_f \text{ y } M \in \mathcal{P}(X)\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ esto implica que $\mathcal{N}_f \oplus \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, y por otro lado; sea $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $A = (A \cap X) \cup (A \setminus X)$, de aquí tenemos que $A \cap X \subseteq X$ entonces $A \cap X \subseteq \mathcal{P}(X)$ y como $A \cap X^c = A \cap (\mathbb{R} \setminus X) \subseteq \mathbb{R} \setminus X$ y puesto que $\mathbb{R} \setminus X \in \mathcal{N}_f$ ya que $\lambda_f(\mathbb{R} \setminus X) = 0$ y el \mathcal{N}_f es un σ -ideal entonces $A \cap (\mathbb{R} \setminus X) \in \mathcal{N}_f$ por lo tanto $A \in \mathcal{N}_f \oplus \mathcal{P}(X)$. Por lo dicho anteriormente concluimos que $\mathcal{N}_f \oplus \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y por el Teorema 0.77 proporciona una selección de dos puntos g de tal manera que $\mathcal{N}_g = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Así obtenemos que $\mathcal{N}_f \oplus \mathcal{P}(X) = \mathcal{N}_g$.

◊ Por lo tanto, supongamos que $|\mathbb{R} \setminus X| > \omega$. Fijemos una sucesión no trivial $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \setminus X$ que converga a un punto $x \in \mathbb{R} \setminus X$. Ahora, definamos la selección de dos puntos g como sigue:

$$g(\{r, s\}) = \begin{cases} r & \text{si } r = x \text{ y } s \in X, \\ s & \text{si } r = x_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \text{ y } s \in X, \\ f(\{r, s\}) & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que g no tiene un minimal (de lo contrario, modificamos la función marcando cambios simples). Afirmamos que g cumple con los requisitos. Demostraremos

que es suficiente probar la equivalencia, $\lambda_g(Y) = 0$ si y sólo si $Y = A \cup B$ para algunos $A \subseteq X$ y $B \in \mathcal{N}_f$. Esta equivalencia se desprenderá de la siguiente afirmación.

Afirmación 1: Dado $Y \subseteq \mathbb{R} \setminus X$, tenemos que $\lambda_g(Y) = 0$ si y sólo si $\lambda_f(Y) = 0$.

Prueba de la Afirmación 1: Sea $Y \subseteq \mathbb{R} \setminus X$. De la definición de g , es evidente que $g(\{r, s\}) = f(\{r, s\})$ cada vez que $r \in \mathbb{R} \setminus X$ y $s \in \mathbb{R}$. Entonces, $\lambda_f(Y) = 0$ si y sólo si para cada positivo $k \in \mathbb{N}$ existen $\{r_n^k : n \in \mathbb{N}\}, \{s_n^k : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$Y \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n^k, s_n^k]_f \text{ y } \sum_{n \in \mathbb{N}} |s_n^k - r_n^k| < \frac{1}{k},$$

lo que equivale a decir que por cada positivo $k \in \mathbb{N}$ existen $\{r_n^k : n \in \mathbb{N}\}, \{s_n^k : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$Y \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n^k, s_n^k]_g \text{ y } \sum_{n \in \mathbb{N}} |s_n^k - r_n^k| < \frac{1}{k}.$$

Claramente, esta última afirmación es equivalente a $\lambda_g(Y) = 0$. Por lo cual, la afirmación está probada.

De la afirmación deducimos que $\mathcal{N}_g \subseteq \mathcal{N}_f \oplus \mathcal{P}(X)$. Ahora elijamos $A \subseteq X$ y $B \in \mathcal{N}_f$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $B \subseteq \mathbb{R} \setminus X$. Según la definición de g y el Lema 0.102, tenemos que $\lambda_g(A) = 0$. También según la **Afirmación 1**, $\lambda_g(B) = 0$ y entonces $\lambda_g(A \cup B) = 0$. Por otro lado, si $\lambda_g(Y) = 0$, entonces $\lambda_g(Y \setminus X) = 0$. Por lo tanto, por la **Afirmación 1**, $Y \setminus X \in \mathcal{N}_f$. La prueba se concluye debido a que $Y = (Y \cap X) \cup (Y \setminus X)$. ■

A continuación enunciamos dos corolarios que reflejan la importancia del teorema antes mencionado.

Corolario 0.104. *Existen 2^c pares de σ -ideales distintos entre sí de la forma \mathcal{N}_f .*

Demostración. Consideremos el σ -ideal de los conjuntos de Lebesgue nulos \mathcal{N} . Por el teorema 0.103, sabemos que para cada $A \notin \mathcal{N}$ existe una selección de dos puntos g tal que $\mathcal{N}_g = \mathcal{N} \oplus \mathcal{P}(A)$. Como podemos encontrar 2^c conjuntos no Lebesgue medibles de \mathbb{R} tenemos entonces que hay 2^c σ -ideales de la forma $\mathcal{N} \oplus \mathcal{P}(A)$, distintos entre sí, donde $A \subseteq \mathbb{R}$. ■

Corolario 0.105. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) *Existe una selección de dos puntos f tal que $\mathcal{N}_f = [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$.*
- (2) *Para cada $X \subseteq \mathbb{R}$ existe una selección de dos puntos f tal que $\mathcal{N}_f = [\mathbb{R}]^{\leq \omega} \oplus \mathcal{P}(X)$.*

Demostración. La implicación (1) \Rightarrow (2) se desprende del Teorema 0.103 y (2) \Rightarrow (1) es trivial al poner $X = \emptyset$. ■

El corolario anterior sugiere la siguiente pregunta.

Pregunta 0.106. *Supongamos que existe $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que $[\mathbb{R} \setminus X] = \mathfrak{c}$ y una selección de dos puntos f tal que $\mathcal{N}_f = [\mathbb{R}]^{\leq \omega} \oplus \mathcal{P}(X)$. Según esta suposición, ¿es cierto que existe una selección de dos puntos g tal que $\mathcal{N}_g = [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$?*

Ahora daremos algunos σ -ideales en \mathbb{R} que no son de la forma \mathcal{N}_f para ninguna selección de dos puntos f . Para hacer esto, debemos recordar que la *cofinalidad* de un ideal \mathcal{I} , denotada por $\text{cof}(\mathcal{I})$, es la cardinalidad mínima de un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$, tal que para cada $I \in \mathcal{I}$ existe $B \in \mathcal{B}$,

tal que $I \subseteq B$. (Ver página 22).

Si \mathcal{A} es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} , entonces $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \{X \subseteq \mathbb{R} : \text{existe } \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A} \text{ tal que } X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\}$ denotará el σ -ideal generado por \mathcal{A} . Observemos que $\text{cof}(\mathcal{I}(\mathcal{A})) \leq |\mathcal{A}|^\omega$ para cada familia no vacía \mathcal{A} de subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} .

Ejemplo 0.107. El σ -ideal de los conjuntos magros de \mathbb{R} tiene cofinalidad $\leq \mathfrak{c}$.

Sea \mathcal{A} la familia de todos los subconjuntos cerrados densos en ninguna parte. Sabemos que \mathcal{A} tiene tamaño \mathfrak{c} . Veremos que el σ -ideal de los subconjuntos magros de \mathbb{R} es generado por \mathcal{A} . Denotemos a nuestro σ -ideal por \mathcal{I} . En efecto: sea $P \in \mathcal{I}$. Tenemos entonces que $P \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$, B_n es nunca denso, y además como B_n es nunca denso entonces $\overline{B_n}$ es también nunca denso para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $P \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n}$, y como el conjunto $\{\{\overline{B_n}\} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$, esto implica que $P \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Por otro lado, sea $Q \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Entonces existe $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $Q \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Por lo tanto $Q \in \mathcal{I}$, es decir $\mathcal{I}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}$. Y por lo descrito anteriormente tenemos que $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Así concluimos que la $\text{cof}(\mathcal{I}) \leq |\mathcal{A}|^\omega \leq \mathfrak{c}$.

El siguiente resultado es conocido, pero nos gustaría incluir una prueba de ello.

Lema 0.108. Para cada selección de dos puntos f , $\text{cof}(\mathcal{N}_f) \leq \mathfrak{c}$.

Demostración. Sea \mathcal{A} la familia de todos los subconjuntos de \mathbb{R} de la forma: $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n^k, s_n^k]_f)$, donde $\{(r_n^k, s_n^k]_f : n, k \in \mathbb{N}\}$ satisface

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |s_n^k - r_n^k| < \frac{1}{k} \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Por la definición de λ_f es evidente que $\mathcal{N}_f = \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Como hay \mathfrak{c} f -intervalos por pares diferentes, debemos tener que $|\mathcal{A}|^\omega \leq \mathfrak{c}$. \blacksquare

Recordemos que, dado un número cardinal infinito κ , una familia infinita $\mathcal{A} \subseteq [X]^\kappa$ en un conjunto infinito X se llama κ -casi disjunta, brevemente κ -AD-familia, si $|A \cap B| < \kappa$ para distintos $A, B \in \mathcal{A}$ (ver definición 0.3). Observe que si $|\mathcal{A}| = \kappa$ y \mathcal{A} es una κ -AD-familia en \mathbb{R} y $\text{cof}(\kappa) > \omega$, entonces $\text{cof}(\mathcal{I}(\mathcal{A})) = |\mathcal{A}|$.

Ejemplo 0.109. Sea κ el menor cardinal tal que $\mathfrak{c}^\kappa > \mathfrak{c}$. Entonces tenemos que $\omega_1 \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$ y $\mathfrak{c}^{<\kappa} = \mathfrak{c}$. Identificamos \mathbb{R} con $\mathfrak{c}^{<\kappa}$. Entonces, para cada $s \in \mathfrak{c}^\kappa$ definimos $A_s = \{s \upharpoonright_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathfrak{c}^{<\kappa}$. Consideremos el σ -ideal $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ sobre $\mathfrak{c}^{<\kappa}$ generado por la familia $\mathcal{A} = \{A_s : s \in \mathfrak{c}^\kappa\}$. Ya que $\text{cof}(\mathcal{I}(\mathcal{A})) \geq |\mathcal{A}| = \mathfrak{c}^\kappa > \mathfrak{c}$, debemos tener que $\mathcal{I}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{N}_f$ para cada selección de dos puntos f .

La siguiente pregunta es muy natural después de ver el ejemplo anterior.

Pregunta 0.110. Dada una familia \mathcal{A} arbitraria de subconjuntos infinitos de \mathbb{R} de tamaño \mathfrak{c} , ¿existe un modelo de ZFC en el que $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \mathcal{N}_f$ para alguna selección de dos puntos f ?

La respuesta a la pregunta 0.110 es afirmativa bajo **CH**, como se mostrará en el Teorema 0.123

A continuación, estudiaremos los ideales de la forma $[\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}} \oplus \mathcal{I}(\mathcal{A})$, donde $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$. El siguiente teorema proporcionará algunas condiciones que garantizan que el σ -ideal $[\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}} \oplus \mathcal{I}(\mathcal{A})$ es de la forma \mathcal{N}_f . Primero, probamos algunos resultados preliminares.

Lema 0.111. Para cada selección de dos puntos f y para cada conjunto infinito $D \subseteq \mathbb{R}$ existe una selección de dos puntos g tal que D no tiene g -minimal y

$$|((r, s]_f \setminus (r, s]_g) \cup ((r, s]_g \setminus (r, s]_f))| \leq \omega$$

para cada $r, s \in \mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que d es el f -minimal dentro de D . Tomemos un subconjunto infinito numerable $N \subseteq D$ que contenga a d . Enumeramos N como $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ de tal manera que $d = r_0$. La selección de dos puntos g se define de la siguiente manera: $g(\{r_n, r_m\}) = r_n$ siempre que $n > m$ y g sea igual a f en los otros pares de puntos. Es evidente que D no tiene un g -minimal y como g es igual a f , excepto por un subconjunto numerable, la segunda propiedad se mantiene. ■

Sea α un número ordinal de cardinalidad \mathfrak{c} y sea $\phi : [0, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ una biyección. Luego, transferimos el orden de α a \mathbb{R} utilizando ϕ y definimos la selección de dos puntos f_ϕ sobre \mathbb{R} por la regla $f_\phi(\{r, s\}) = r$ si y sólo si $\phi^{-1}(r) <_\alpha \phi^{-1}(s)$. Cuando las características de la biyección ϕ no son relevantes, simplemente indicaremos con f_α a la selección de dos puntos correspondiente.

Lema 0.112. *Sea $f_\mathfrak{c}$ una selección de dos puntos inducida por una biyección $\phi : [0, \mathfrak{c}) \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.*

- (1) $\lambda_{f_\mathfrak{c}}(A) = 0$,
- (2) $\lambda_{f_\mathfrak{c}}(A) < \infty$, y
- (3) existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq_{f_\mathfrak{c}} r$ para todo $a \in A$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{\phi(0)\}$ ya que $\lambda_{f_\mathfrak{c}}(\{\phi(0)\}) = 0$. La implicación (1) \Rightarrow (2) es evidente.

(2) \Rightarrow (3). Dado que $\lambda_{f_\mathfrak{c}}(A) < \infty$ entonces podemos encontrar una familia $\{\{a_n, b_n\} : n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq [\mathbb{R}]^2$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n]_{f_\mathfrak{c}}$. Sea $\xi = \sup\{\phi^{-1}(b_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\phi^{-1}[A] \subseteq [0, \xi]$, obtenemos que $a \leq_{f_\mathfrak{c}} \phi(\xi)$ para todos los $a \in A$.

(3) \Rightarrow (1). Ya que $|A| < \mathfrak{c}$, podemos encontrar una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a $\phi(0)$, de manera que $\phi^{-1}(x_n) > \phi^{-1}(r)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $A \subseteq (\phi(0), x_n]_{f_\mathfrak{c}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por Lemma 1.1, $\lambda_{f_\mathfrak{c}}(A) = 0$. ■

Notemos que el Lema 0.112 podría fallar para los ordinales mayores que \mathfrak{c} . Por ejemplo, podemos considerar el ordinal $\mathfrak{c} + 1$ y cualquier biyección $\phi : [0, \mathfrak{c}] \rightarrow \mathbb{R}$. Siguiendo argumentos similares a la prueba de la implicación (3) \Rightarrow (1), podemos elegir una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a $\phi(\mathfrak{c})$. Consideremos el conjunto $A = \{r \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} (x_n <_{f_\phi} r)\}$ y observemos que $|A| = \mathfrak{c}$ y $\lambda_{f_\phi}(A) = 0$. Por lo tanto, deducimos que si hay $A \in \mathcal{N}_{f_\alpha} \cap [\mathbb{R}]^\mathfrak{c}$, entonces $\mathfrak{c} < \alpha$.

Teorema 0.113. (\mathfrak{c} es regular). *Sea $\mathcal{A} = \{A_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ una familia de subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} de tal manera que:*

- (i) $|\mathbb{R} \setminus (\bigcup_{\eta < \xi} A_\eta)| = \mathfrak{c}$ para cada $\xi < \mathfrak{c}$, y
- (ii) $\mathbb{R} = \bigcup_{\xi < \mathfrak{c}} A_\xi$.

Entonces existe una selección de dos puntos f tal que $\mathcal{N}_f = [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}} \oplus \mathcal{I}(\mathcal{A})$.

Demostración. Supongamos que \mathfrak{c} es regular. Enumeremos $[\mathfrak{c}]^\omega$ como $\{N_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ y establecemos $B_\xi = \bigcup_{\eta \in N_\xi} A_\eta$ para cada $\xi < \mathfrak{c}$. Usando el siguiente hecho: Cada subconjunto no numerable de \mathbb{R} contiene una sucesión convergente no trivial y su punto límite, por este hecho tenemos que, para cada $\xi < \mathfrak{c}$ podemos encontrar $x_\xi \in \mathbb{R}$ y una sucesión no trivial S_ξ de \mathbb{R} , de modo que:

- (1) S_ξ converge a x_ξ ,
- (2) $x_\xi \notin S_\xi$, y
- (3) $[B_\xi \cup (\bigcup_{\eta < \xi} (B_\eta \cup S_\eta \cup \{x_n\}))] \cap (S_\xi \cup \{x_\xi\}) = \emptyset$.

Definamos la selección de dos puntos f de la siguiente manera:

$$f(\{r, s\}) := \begin{cases} s & \text{si } r \in B_\xi \text{ y } s \in S_\xi \text{ para algún } \xi < \mathfrak{c}, \\ r & \text{si } r \in B_\xi \text{ y } s = x_\xi \text{ para algún } \xi < \mathfrak{c}, \\ f_\mathfrak{c}(\{r, s\}) & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Primero, probamos que $\mathcal{N}_f \subseteq [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}} \oplus \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Sea $M \in \mathcal{N}_f$. Entonces existe una familia numerable de f -intervalos $\{(r_n^k, s_n^k]_f : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ tal que $M \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n^k, s_n^k]_f$ y $\sum_{n \in \mathbb{N}} |s_n^k - r_n^k| < \frac{1}{k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{R} = \bigcup_{\eta < \xi} A_\eta$, existe $\xi < \mathfrak{c}$ tales que $\{r_n^k : n, k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_n^k : n, k \in \mathbb{N}\} \subseteq B_\xi$. Sea $j = M \setminus (B_\xi \cup \{x_\xi\} \cup S_\xi)$. Por la definición de f , sabemos que $f(\{x, y\}) = f_\mathfrak{c}(\{x, y\})$ por cada $x \in B_\xi \cup \{x_\xi\} \cup S_\xi$ y cada $y \in M$. Por lo tanto, $M \subseteq \bigcup_{n, k \in \mathbb{N}} (r_n^k, s_n^k]_{f_\mathfrak{c}}$ y así $\phi^{-1}(M) \subseteq [0, s]$, donde $s = \sup\{s_n^k : n, k \in \mathbb{N}\}$, lo que implica que $|M| < \mathfrak{c}$. Esto muestra que $\mathcal{N}_f \subseteq [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}} \oplus \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Por otro lado, es evidente que $\mathcal{I}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{N}_f$. Fijemos $L \in [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}$. Al aplicar el Lema 0.112 y la regularidad de \mathfrak{c} , tenemos que $\lambda_{f_\mathfrak{c}}(L) = 0$. Como en el caso anterior, elegimos una familia numerable de números reales $\{r_n^k, s_n^k : n, k \in \mathbb{N}\}$ de tal manera que $L \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n^k, s_n^k]_{f_\mathfrak{c}}$ y $\sum_{n \in \mathbb{N}} |s_n^k - r_n^k| < \frac{1}{k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Sea $\zeta < \mathfrak{c}$ tal que $\{r_n^k, s_n^k : n, k \in \mathbb{N}\} \subseteq B_\zeta$. Consideremos el conjunto $L' = L \setminus (B_\zeta \cup \{x_\zeta\} \cup S_\zeta)$. Observemos que $f(\{x, y\}) = f_\mathfrak{c}(\{x, y\})$ por cada $x \in B_\zeta \cup \{x_\zeta\} \cup S_\zeta$ y cada $y \in L'$. Esto implica que $L' \subseteq \bigcup_{n, k \in \mathbb{N}} (r_n^k, s_n^k]_f$ y entonces $L' \in \mathcal{N}_f$ y por lo tanto $L \in \mathcal{N}_f$. Así, hemos probado la contención $[\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}} \oplus \mathcal{I}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{N}_f$. \blacksquare

La siguiente pregunta está relacionada de alguna manera con el teorema 0.103.

Pregunta 0.114. *Dadas dos selecciones de dos puntos f y g sin minimal, ¿existe una selección de dos puntos h tal que $\mathcal{N}_f \oplus \mathcal{N}_g = \mathcal{N}_h$?*

En la siguiente sección, veremos que la pregunta anterior tiene una respuesta positiva bajo CH .

Observamos que hay σ -ideales en \mathbb{R} que no son de la forma $\mathcal{I}_\mathcal{A}$ para una \mathfrak{c} - AD -familia \mathcal{A} . Por ejemplo, el σ -ideal de subconjuntos magros de la línea real. Este ideal será considerado en las siguientes secciones.

0.7. \mathcal{N}_f -Ideales bajo CH

En esta sección el objetivo principal resultado es demostrar que CH es equivalente a la existencia de una selección de dos puntos f para la cual:

$$\lambda_f(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } |A| \leq \omega \\ +\infty & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Para nuestro propósito consideremos la medida en \mathbb{R} definida por:

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } |A| \leq \omega \\ +\infty & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Es evidente, a partir del Lema 0.112, que CH implica que $\lambda_{f_\mathfrak{c}} = \mu$ y, por lo tanto, $\mathcal{N}_{f_\mathfrak{c}} = [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$. En el próximo teorema, demostraremos que CH es equivalente a la existencia de una selección de dos puntos f para la cual $\lambda_f = \mu$. Este teorema será una consecuencia de los siguientes lemas.

Definición 0.115. Sea $\alpha \leq \mathfrak{c}$ un número ordinal. Decimos que una selección de dos puntos f genera un conjunto α -ordenado si existe un subconjunto indexado $\{r_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $r_\beta <_f r_\gamma$ siempre que $\beta < \gamma < \alpha$, o $r_\gamma <_f r_\beta$ siempre que $\beta < \gamma < \alpha$.

Dado $X \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ y una selección de dos puntos f , establecemos los siguientes conjuntos; $L(r)_f^X = (\leftarrow, r)_f \cap X$ y $R(r)_f^X = (r, \rightarrow)_f \cap X$. En particular, tenemos que $L(r)_f^{\mathbb{R}} = (\leftarrow, r)_f$ y $R(r)_f^{\mathbb{R}} = (r, \rightarrow)_f$ para cada $r \in \mathbb{R}$.

Lema 0.116. Supongamos que f es una selección de dos puntos en \mathbb{R} para la cual existen $X \in [\mathbb{R}]^{\geq \omega_2}$ y $Y \in [X]^{\geq \omega_2}$, tal que, para cada $r \in Y$, tenemos que $|L(r)_f^X| \leq \omega_1$ o $|R(r)_f^X| \leq \omega_1$. Entonces f genera un ω_2 -orden en Y .

Demostración. Supongamos que f , X y Y satisfacen la hipótesis. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $|L(r)_f^X| \leq \omega_1$ para cada $r \in Y$, el caso cuando $|R(r)_f^X| \leq \omega_1$ para cada $r \in Y$, se maneja de manera análoga. Encontraremos recursivamente los puntos del conjunto ω_2 -ordenado. Elijamos $r_0 \in Y$ arbitrariamente. Por supuesto, el conjunto $\{r_0\}$ es un conjunto 1-ordenado en Y . Sea $\alpha < \omega_2$ y supongamos que, para cada $\beta < \alpha$, se ha elegido un número real $r_\beta \in Y$ de tal forma que $r_\gamma < r_\beta$ siempre que $\gamma < \beta < \alpha$. Por hipótesis, sabemos que el conjunto $X_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} L(r_\beta)_f^X$ tiene cardinalidad como máximo ω_1 . Como $|Y| \geq \omega_2$, podemos encontrar $r_\alpha \in Y \setminus X_\alpha$. Entonces queda claro que $r_\beta < r_\alpha$ para cada $\beta < \alpha$ y, por lo tanto, el conjunto $\{r_\beta : \beta \leq \alpha\}$ es un conjunto $(\alpha + 1)$ -ordenado. Al continuar con esta construcción, de manera inductiva obtenemos un conjunto $B = \{r_\alpha : \alpha < \omega_2\}$ el cual es un conjunto ω_2 -ordenado en Y . ■

Lema 0.117. Supongamos que $\mathfrak{c} \geq \omega_2$. Si f es una selección de dos puntos la cual genera un conjunto ω_2 -ordenado A en \mathbb{R} , entonces A contiene un subconjunto X de tamaño ω_1 tal que $\lambda_f(X) = 0$.

Demostración. Sea $A = \{r_\xi : \xi < \omega_2\}$ el conjunto ω_2 -ordenado generado por f . Sin pérdida de generalidad, suponga que A no tiene puntos aislados, en la topología Euclidiana, y que $r_\xi <_f r_\zeta$ siempre que $\xi < \zeta < \omega_2$, el otro caso es análogo. Como A es separable en la topología Euclidiana, podemos elegir un subconjunto $I \in [\omega_2]^{\leq \omega}$ tal que $\{r_\xi : \xi \in I\}$ sea denso en A . Consideremos a $\beta = \min\{I\}$ y $\gamma = \sup\{I\}$. Entonces tenemos que $I \subseteq [\beta, \gamma]$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $|[\beta, \gamma]| = \omega_1$, ya que si el intervalo $[\beta, \gamma]$ es numerable entonces nos vamos hacia a la derecha y tomamos un γ' tal que cumpla que $|[\beta, \gamma']| = \omega_1$, y agregamos $\gamma' \in I$ esto es posible ya que A tiene cardinalidad ω_2 . Nuestro conjunto requerido es $X = \{r_\xi : \xi \in (\beta, \gamma)\}$. De hecho, ya que A es un conjunto ω_2 -ordenado, $X \subseteq (r_\beta, r_\gamma)_f$. Fijemos $\epsilon > 0$. Como el conjunto $\{r_\xi : \xi \in I\}$ es denso en X , podemos elegir ξ_1 como el menor $\xi \in [\beta, \gamma]$ tal que $|r_\xi - r_\gamma| < \frac{\epsilon}{2}$. Al usar este proceso, por estar dentro del cardinal ω en una cantidad finita de pasos, podemos encontrar un conjunto finito tal que $\{\xi_i : i \leq l\} \subseteq I \cup \{\beta, \gamma\}$ tal que $\gamma = \xi_0$, $\beta = \xi_1$, $X \subseteq \bigcup_{i < l} (r_{\xi_i}, r_{\xi_{i+1}}]_f$, y $|r_{\xi_{i+1}} - r_{\xi_i}| < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$ para cada $i < l$. Entonces, obtenemos que $\lambda_f(X) \leq \epsilon$. Por lo tanto, la medida λ_f -exterior de X es igual a 0. ■

Lema 0.118. Para cada selección de dos puntos f y para cada $X \subseteq \mathbb{R}$, se cumple una de las siguientes condiciones:

- i. X contiene un subconjunto de tamaño ω_1 y medida λ_f -exterior cero, o
- ii. $\{a \in X : |L(a)_f^X| \leq \omega_1 \text{ o } |R(a)_f^X| \leq \omega_1\}$ tiene cardinalidad a lo más ω_1 .

Demostración. Es evidente que, si $|X| \leq \omega_1$, entonces (ii) se cumple. Supongamos que $|X| > \omega_1$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $A = \{a \in X : |L(a)_f^X| \leq \omega_1\}$ tiene cardinalidad al menos ω_2 . Por el Lema 0.116, f genera un conjunto de ω_2 -ordenado contenido en A . Por el Lema 0.117 A contiene un subconjunto de tamaño ω_1 y medida λ_f -exterior 0. ■

Estamos listos para enunciar el resultado principal de esta sección.

Teorema 0.119. Las siguientes declaraciones son equivalentes:

- (1) CH.
- (2) Existe una selección de dos puntos f tal que $|(\leftarrow, r)_f| \leq \omega$ para cada $r \in \mathbb{R}$.
- (3) Existe una selección de dos puntos f tal que $|(r, \rightarrow)_f| \leq \omega$ para cada $r \in \mathbb{R}$.
- (4) Existe una selección f de dos puntos, tal que cada f -intervalo $(r, s]_f$ es numerable para cada $r, s \in \mathbb{R}$.
- (5) Existe una selección de dos puntos f y un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}$, tal que $|D| = \mathfrak{c}$ y $|(r, s]_f \cap D| \leq \omega$ para cada $r, s \in \mathbb{R}$.
- (6) Existe una selección de dos puntos f tal que, $\lambda_f = \mu$.

Demostración. Para la implicación (1) \Rightarrow (2) usamos la selección de dos puntos $f_c = f_{\omega_1}$. Para la implicación (2) \Rightarrow (3) consideramos la selección de dos puntos opuesta f^- de f . Las implicaciones (3) \Rightarrow (4) y (4) \Rightarrow (5) son directas.

(5) \Rightarrow (6). Sean f una selección de dos puntos y D un subconjunto de \mathbb{R} que satisfaga las condiciones requeridas por (5). Por el Lema 0.111, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que D no tiene el f -minimal. Fijemos una biyección $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$. Definamos la selección de dos puntos $g : [\mathbb{R}]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por la regla: $\phi(r) <_g \phi(s)$ si y sólo si $r <_f s$. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:

- (i) todas los g -intervalos son numerables y
- (ii) no existe un g -minimal.

Tenemos que (i) implica que $\lambda_g(A) = +\infty$ para cada $A \subseteq \mathbb{R}$ no numerable y, por (ii) y los corolarios 0.73 y 0.74, $\lambda_g(A) = 0$ para cada $A \in [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$.

(6) \Rightarrow (4). Sea f una selección de dos puntos tal que $\lambda_f = \mu$. Supongamos que existen dos números reales r y s tal que $|(r, s]_f| > \omega$. Entonces $(r, s]_f \notin \mathcal{N}_{\lambda_f}$, pero $\mu((r, s]_f) = \lambda_f((r, s]_f) \leq |s - r| < \infty$ lo cual es imposible.

(4) \Rightarrow (1). Sea f una selección de dos puntos tal que cada f -intervalo de la forma $(r, s]_f$ es numerable. Fijemos $A \in \mathcal{N}_{\lambda_f}$. Entonces existe una familia numerable de pares ordenados $\{(r_n, s_n) : r_n, s_n \in \mathbb{R}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n, s_n]_f$. Así $|A| \leq \omega$. Esto demuestra que \mathbb{R} no tiene un subconjunto no numerable de medida f -exterior cero. Ahora, asumamos la negación de CH. Entonces, por el Lema 0.118, debemos tener que

$$|\{r \in \mathbb{R} : |(\leftarrow, r)_f| \leq \omega_1 \text{ o } |(r, \rightarrow)_f| \leq \omega_1\}| \leq \omega_1.$$

Como $|\mathbb{R}| \geq \omega_2$ entonces, existe un número real a tal que $|(a, \rightarrow)_f| \geq \omega_2$. Al aplicar nuevamente el mismo lema al conjunto $(a, \rightarrow)_f$ obtenemos

$$|\{r \in (a, \rightarrow)_f : |L(r)_f^{(a, \rightarrow)_f}| \leq \omega_1 \text{ o } |R(r)_f^{(a, \rightarrow)_f}| \leq \omega_1\}| \leq \omega_1.$$

Por lo tanto, existe $b \in (a, \rightarrow)_f$ tal que $|L(b)_f^{(a, \rightarrow)_f}| \geq \omega_2$. Ahora bien como $L(b)_f^{(a, \rightarrow)_f} \subseteq (a, b]_f$, $|(a, b]_f| \geq \omega_2$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, CH se mantiene. ■

Sobre la base de los resultados ya establecidos enunciamos la siguiente definición.

Definición 0.120. Diremos que una selección de dos puntos f satisface la condición nula contable (c.n.c.) si $\mathcal{N}_f = [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$.

Corolario 0.121. [CH] Existe una selección de dos puntos f que satisface el c.n.c.

Demostración. Por el teorema 0.119, sabemos que CH es equivalente a que exista una selección de dos puntos f tal que $\lambda_f = \mu$. Y por lo tanto, obtenemos que $\mathcal{N}_f = [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$; es decir, f satisface la c.n.c. ■

En relación con el último corolario, consideraremos la siguiente afirmación que denotamos por CNH (*Hipótesis Numerable Nula*): Existe una selección de dos puntos f en \mathbb{R} que satisface de c.n.c.

La siguiente pregunta, aún no ha sido resuelta y es bastante interesante si es afirmativa.

Pregunta 0.122. ¿Es CNH equivalente a CH ?

El siguiente teorema da una respuesta a la pregunta 0.100 bajo la suposición de CH y por consiguiente también responde afirmativamente la pregunta 0.101, bajo CH . Además dicho teorema caracteriza los σ -ideales con cofinalidad $\leq \mathfrak{c}$ bajo la suposición de CH , los cuales resultan ser \mathcal{N}_f para alguna selección de dos puntos f .

Teorema 0.123. $[CH]$ \mathcal{I} es un σ -ideal en \mathbb{R} con $\text{cof}(\mathcal{I}) \leq \mathfrak{c}$, si y sólo si existe una selección de dos puntos f tal que $\mathcal{N}_f = \mathcal{I}$.

Demostración. Supongamos CH . Sea $\mathcal{A} = \{A_\xi : \xi < \omega_1\}$ una familia de subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} que generan el σ -ideal \mathcal{I} . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\eta < \xi} A_\eta| = \omega_1$ para cada $\xi < \omega_1$, de lo contrario, obtendríamos que $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \mathcal{I} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, para este caso la selección de dos puntos definida en el teorema 0.77 hace el trabajo. Entonces, tenemos que la familia \mathcal{A} satisface las condiciones (i) – (ii) del Teorema 0.113, por lo que, existe una selección de dos puntos f tal que $\mathcal{N}_f = [\mathbb{R}]^{\leq \omega} \oplus \mathcal{I}(\mathcal{A}) = \mathcal{I}$. ■

Corolario 0.124. $[CH]$ Existe una selección de dos puntos f tal que \mathcal{N}_f es exactamente el σ -ideal de subconjuntos magros de \mathbb{R} .

Demostración. La afirmación se deduce del hecho de que el σ -ideal de los subconjuntos magros de \mathbb{R} es generado por la familia de todos los subconjuntos cerrados densos de ninguna parte de \mathbb{R} que tiene el tamaño \mathfrak{c} . ■

En el siguiente corolario, respondemos a la pregunta 0.114 bajo la suposición de CH .

Corolario 0.125. $[CH]$ Para cada par de selecciones de dos puntos f y g existe una selección de dos puntos h tal que $\mathcal{N}_h = \mathcal{N}_f \oplus \mathcal{N}_g$.

Demostración. Sea f y g selecciones de dos puntos. Como $\text{cf}(\mathcal{N}_f) \leq \mathfrak{c}$ y $\text{cf}(\mathcal{N}_g) \leq \mathfrak{c}$, tenemos entonces $\text{cf}(\mathcal{N}_f \oplus \mathcal{N}_g) \leq \mathfrak{c}$, por el teorema 0.123 existe una selección de dos puntos h tal que $\mathcal{N}_h = \mathcal{N}_f \oplus \mathcal{N}_g$. ■

0.8. \mathcal{N}_f -Ideales bajo el Axioma de Martin

En esta última sección probaremos que el Axioma de Martin “MA” implica la existencia de una selección de dos puntos f , de modo que \mathcal{N}_f es exactamente el σ -ideal de subconjuntos magros de \mathbb{R} .

Recuerde que un ideal \mathcal{I} es un $< \mathfrak{c}$ -ideal si está cerrado por uniones de subfamilias de tamaño $< \mathfrak{c}$.

Es bien conocido que, bajo el Axioma de Martin, la unión de $< \mathfrak{c}$ conjuntos magros es magro, y la unión de $< \mathfrak{c}$ conjuntos de medida Lebesgue cero tiene medida 0. Sin embargo, este no es el caso de nuestras medidas exteriores que hemos considerado hasta ahora. De hecho, consideremos una \mathcal{A} partición de \mathbb{R} tal que $|A| = \omega_1$ y $|A| = \mathfrak{c}$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Usando el Teorema 0.113, podemos encontrar una selección de dos puntos f tal que $\mathcal{N}_f = [\mathbb{N}]^{\leq \omega} \oplus \mathcal{I}(\mathcal{A})$ y $\mathbb{R} \notin \mathcal{N}_f$. Por lo tanto, en una Modelo de $MA + \neg CH$, este σ -ideal \mathcal{N}_f no es cerrado bajo $< \mathfrak{c}$ uniones.

Teorema 0.126. *Sea \mathcal{I} un $< \mathfrak{c}$ -ideal propio de \mathbb{R} que contenga $[\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}$ con $\text{cof}(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$. Entonces existe una selección de dos puntos f tal que $\mathcal{N}_f = \mathcal{I}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A} = \{A_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ genera el ideal \mathcal{I} . Por inducción transfinita, para cada $\xi < \mathfrak{c}$, definiremos los puntos x_ξ y los conjuntos S'_ξ 's y X'_ξ 's de tal manera que:

- (1) S_ξ es una sucesión no trivial que converge a x_ξ para cada $\xi < \mathfrak{c}$,
- (2) $X_0 = A_0, X_\xi = (\bigcap_{\eta < \xi} X_\eta) \cup A_\xi$ si $0 < \xi < \mathfrak{c}$ es límite y $X_{\xi+1} = X_\xi \cup A_{\xi+1} \cup S_\xi \cup \{x_\xi\}$ para cada $\xi < \mathfrak{c}$,
- (3) $S_\xi \cup x_\xi \subseteq \mathbb{R} \setminus (A_\xi \cup (\bigcup_{\eta < \xi} X_\eta))$ para cada $\xi < \mathfrak{c}$, y
- (4) $|X_\xi \setminus \bigcup_{\eta \leq \xi+1} A_\eta| < \mathfrak{c}$ para cada $\xi < \mathfrak{c}$.

Entonces, la primera etapa está determinada por (1)-(3). Sea $\xi < \mathfrak{c}$ y supongamos que hemos definido los puntos x_η y los conjuntos S'_η 's y X_η 's para cada $\eta < \xi$ que satisfacen (1) – (3). Dado que \mathcal{I} es un $< \mathfrak{c}$ -ideal, que contiene $[\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}} \subseteq \mathcal{I}$, tenemos que $|\mathbb{R} \setminus (A_\xi \cup (\bigcup_{\eta < \xi} X_\eta))| = \mathfrak{c}$. Entonces podemos elegir x_ξ y S_ξ que satisfacen las condiciones (1) y (3). Finalmente, el conjunto X_ξ se define por (2) y (4) se deduce de la construcción. Ahora vamos a definir la selección de dos puntos f de la siguiente manera:

$$f(\{r, s\}) := \begin{cases} r & \text{si } r \in X_\xi \text{ y } s = x_\xi \text{ para algún } \xi < \mathfrak{c}, \\ s & \text{si } r \in X_\xi \text{ y } s \in S_\xi \text{ para algún } \xi < \mathfrak{c}, \\ f_c(\{r, s\}) & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Notemos que f no tiene un minimal. Observemos que la selección de dos puntos f está bien definida debido a (3). Además, $\lambda_f(X_\xi) = 0$ para cada $\xi < \mathfrak{c}$. Entonces $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}_f$. Para finalizar la prueba, demostraremos que $\mathcal{N}_f \subseteq \mathcal{I}$. De hecho, fijemos $B \in \mathcal{N}_f$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\{(r_n^k, s_n^k]_f : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ una familia de f -intervalos numerables tal que

$$B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n^k, s_n^k]_f \text{ y } \sum_{n \in \mathbb{N}} |s_n^k - r_n^k| < \frac{1}{k}.$$

Elijimos $\xi < \mathfrak{c}$ de tal forma que $\{r_n^k : n, k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_n^k : n, k \in \mathbb{N}\} \subseteq X_\xi$. Por (4), obtenemos que $|X_\xi \setminus \bigcup_{n \leq \xi+1} A_n| < \mathfrak{c}$ y por lo cual $X_\xi \in \mathcal{I}$. Por lo tanto, $B \cap X_\xi \in \mathcal{I}$. Ahora bien, sea $B' = B \setminus X_\xi$.

Afirmación 1: $B' \cap (S_\eta \cup \{x_\eta\}) = \emptyset$ para cada ordinal η que satisfaga $\xi \leq \eta < \mathfrak{c}$.

Prueba de Afirmación 1: Sea $b \in B'$. Ya que $r_n^k, s_n^k \in X_\xi$, tenemos que $s <_f r_n^k <_f x_\eta$ y $s <_f s_n^k <_f x_\eta$, para cada $k, n \in \mathbb{N}$ y para cada $s \in S_\eta$. Entonces $b \notin \bigcup_{\xi \leq \eta} (S_\eta \cup \{x_\eta\})$ porque para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ de tal manera que $r_n^k < b \leq s_n^k$. Esto demuestra que $B' \cap (S_\eta \cup \{x_\eta\}) = \emptyset$ para cada $\xi \leq \eta < \mathfrak{c}$.

Por la definición de la selección de dos puntos f y la Afirmación 1, obtenemos que $f(\{b, x\}) = f_c(\{b, x\})$ para cada $b \in B'$ y cada $x \in X_\xi$. Entonces $\lambda_f(B') = \lambda_{f_c}(B') = 0$, lo que implica que $B' \in [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}$. Entonces $B' \in \mathcal{I}$. Además puesto que $(B \cap X_\xi) \cup B' = (B \cap X_\xi) \cup (B \cap X_\xi^c) = B \cap (X_\xi \cup X_\xi^c) = B$ esto implica que $B \in \mathcal{I}$. Por lo cual, $\mathcal{N}_f \subseteq \mathcal{I}$. \blacksquare

Corolario 0.127. *Si \mathcal{I} es un $< \mathfrak{c}$ -ideal de \mathbb{R} con $\text{cof}(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$, y $\bigcup \mathcal{I} = \mathbb{R}$, entonces existe una selección de dos puntos f tal que $\mathcal{N}_f = \mathcal{I}$.*

Demostración. Como \mathcal{I} es un $< \mathfrak{c}$ -ideal, entonces $[\bigcup \mathcal{I}]^{< \mathfrak{c}} \subseteq \mathcal{I}$ y aplicamos el teorema anterior. ■

Corolario 0.128. [MA] *Existe una selección de dos puntos f , tal que \mathcal{N}_f es exactamente el σ -ideal de subconjuntos magros de \mathbb{R} .*

Demostración. Sea \mathcal{I} el σ -ideal de los conjuntos magros de \mathbb{R} . Entonces por un lado tenemos que bajo el *Axioma de Martin* la unión de $< \mathfrak{c}$ conjuntos magros es magro, por lo que \mathcal{I} cumple que es un $< \mathfrak{c}$ -ideal propio de \mathbb{R} , además por el *MA* y el *Diagrama de Cichón* (ver página 22), tenemos que $\text{cof}(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$. Por el corolario 0.127 concluimos que existe una selección de dos puntos tal que $\mathcal{N}_f = \mathcal{I}$. ■

Para finalizar la sección formulamos la siguiente pregunta que no pudimos contestar.

Pregunta 0.129. *En ZFC, ¿Existe una selección de dos puntos f tal que \mathcal{N}_f sea exactamente el σ -ideal de subconjuntos magros de \mathbb{R} ?*

Capítulo 4. Equivalencia y congruencia de las selecciones de dos puntos

En este último capítulo, estudiaremos algunas condiciones para que dos selecciones de dos puntos f y g induzcan la misma familia de conjuntos medibles de \mathbb{R} .

Definición 0.130. Sean f y g dos selecciones de dos puntos y $N \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que f y g son:

- (1) f y g son \mathcal{M} -equivalentes si $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_g$.
- (2) f y g son congruentes mod N , en símbolos $f \cong_N g$, si $r <_g s$ si y sólo si $r <_f s$ siempre que $|\{r, s\} \cap N| \leq 1$.
- (3) f y g son débilmente congruentes mod N , en símbolos $f \cong_N^* g$, si $r <_g s$ si y sólo si $r <_f s$ siempre que $\{r, s\} \cap N = \emptyset$.

Es fácil ver que la relación de congruencia mod N implica la relación de débilmente congruente mod N .

Ejemplo 0.131. Consideremos a $N = \mathbb{N}$, la selección de dos puntos Euclidea f_E y la selección de dos puntos f que se define de la siguiente manera:

$$f(\{r, s\}) := \begin{cases} r & \text{si } r < s \text{ y } \{r, s\} \cap \mathbb{N} = \emptyset, \\ s & \text{si } r < s \text{ y } \{r, s\} \cap \mathbb{N} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Entonces f y f_E son débilmente congruentes mod \mathbb{N} pero no congruentes mod \mathbb{N} .

Para hacer más claro nuestro anterior ejemplo, tomemos a $-1, -2 \in \mathbb{R}$ entonces $-2 <_{f_E} -1$ es decir $-2 < -1$ y como $\{-1, -2\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$, entonces $-2 <_f -1$. Por lo tanto $f \cong_{\mathbb{N}}^* f_E$. Pero f y f_E no son congruentes mod \mathbb{N} , pues si tomamos $1, 2 \in \mathbb{R}$ tenemos que $1 <_{f_E} 2$ es decir $1 < 2$, y como $\{1, 2\} \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ entonces por definición de f concluimos que $2 <_f 1$. Así $f \not\cong_{\mathbb{N}} f_E$.

Ejemplo 0.132. Consideremos a \mathbb{Z} y a las selecciones de dos puntos f_E la selección Euclidea y g la cual se define a continuación

$$g(\{r, s\}) := \begin{cases} r & \text{si } n < r < n+1 \text{ y } s = n, \\ n+1 & \text{si } n < r < n+1 \text{ y } s = n+1, \\ s & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Es claro que tenemos la congruencia débilmente mod \mathbb{Z} pero no la congruencia mod \mathbb{Z} .

Ejemplo 0.133. Para toda selección de dos puntos Euclideana f_E se tiene que $\mathcal{M}_{f_E} = \mathcal{M}_{f_E^-}$. En particular la selección de dos puntos Euclideana f_E y la selección de dos puntos Euclideana opuesta f_E^- son \mathcal{M} -equivalentes pero no son congruentes mod N para cualquier subconjunto N de \mathbb{R} .

Pregunta 0.134. ¿Es el resultado del ejemplo 0.133 cierto para toda selección de dos puntos?

El siguiente teorema nos permite construir fácilmente dos selecciones de dos puntos distintas que sean \mathcal{M} -equivalentes.

Lema 0.135. Si $N \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f \cong_N g$ y $E \cap N = \emptyset$, entonces $\lambda_f(E) = \lambda_g(E)$. Si además f y g no tienen minimales, entonces $\lambda_f(E) = \lambda_g(E)$ para todo $E \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración. Observemos que $E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n, s_n]_f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n, s_n]_g$ y usando la definición de medida exterior mediante selecciones de dos puntos finalizamos la demostración. ■

Teorema 0.136. Si f y g son dos selecciones de dos puntos sin minimales para las cuales existe $N \in [\mathbb{R}]^\omega$ tal que $g(\{r, s\}) = r$ si y sólo si $r <_f s$ cuando $|\{r, s\} \cap N| \leq 1$ entonces f y g son \mathcal{M} -equivalentes.

Demostración. La prueba se sigue inmediatamente del lema anterior. ■

Corolario 0.137. Si $N \in [\mathbb{R}]^\omega$ y $f \cong_N g$, entonces f y g son \mathcal{M} -equivalentes.

En el teorema 0.136 vimos que la congruencia mod N con respecto a un conjunto numerable implica la \mathcal{M} -equivalencia. Esto motiva la pregunta natural de cuando dos selecciones de dos puntos f y g son \mathcal{M} -equivalentes cuando son débilmente congruentes mod N para ciertos $N \subseteq \mathbb{R}$. A continuación describiremos dos selecciones de dos puntos f y g tales que $f \cong_N^* g$ para un conjunto finito N tal que $\mathcal{M}_f \neq \mathcal{M}_g$. Para mostrar esto, demostraremos que, para un punto fijo $x \in \mathbb{R}$ determinado, cada selección de dos puntos f es débilmente congruente mod $\{x\}$ con otra selección de dos puntos g para la cual la línea real tiene cero medida g -exterior. Para establecer esta afirmación estableceremos el siguiente lema.

Lema 0.138. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y f una selección de dos puntos. Supongamos que existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a x en la topología Euclidiana tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x - x_n| < \infty$$

$$\text{y } A \subseteq \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} (x, x_n]_f \right) \cup \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} (x_n, x]_f \right),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces, $\lambda_f(A) = 0$.

Demostración. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x que satisfaga las condiciones requeridas. Fijemos $\epsilon > 0$ arbitrario y elijamos $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=k}^{\infty} |x - x_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por hipótesis,

$$A \subseteq \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} (x, x_n]_f \right) \cup \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} (x_n, x]_f \right).$$

De donde se sigue la siguiente desigualdad

$$\lambda_f(A) \leq 2 \sum_{n=k}^{\infty} |x - x_n| < \epsilon.$$

Como ϵ fue elegido arbitrariamente obtenemos que $\lambda_f(A) = 0$. ■

Teorema 0.139. *Para cada selección de dos puntos f y para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una selección de dos puntos g tal que $\lambda_g(\mathbb{R}) = 0$ y $g \cong_{\{x\}}^* f$.*

Demostración. Sean f una selección de dos puntos y $x \in \mathbb{R}$. Elijamos f y elijamos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converja a x que satisfagan lo siguiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x - x_n| < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } 0 < |x - x_n| \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Enumeremos la familia de todas las subsucesiones no triviales de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por $\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$. Para cada $\xi < \mathfrak{c}$, definamos

$$L_\xi = \{r \in \mathbb{R} : r <_f s \text{ para cada } s \in S_\xi\},$$

$$R_\xi = \{r \in \mathbb{R} : s <_f r \text{ para cada } s \in S_\xi\} \text{ y } X_\xi = L_\xi \cup R_\xi.$$

La selección de dos puntos requerida g debe satisfacer que

$$g \upharpoonright_{[\mathbb{R} \setminus \{x\}]^2} = f \upharpoonright_{[\mathbb{R} \setminus \{x\}]^2}.$$

Veamos que $\mathbb{R} = \bigcup_{\xi < \mathfrak{c}} X_\xi$. De hecho, elijamos $r \in \mathbb{R}$ arbitrariamente y consideremos los conjuntos $L = \{n \in \mathbb{N} : r <_f x_n\}$ y $R = \{n \in \mathbb{N} : x_n <_f r\}$. Luego tenemos que al menos uno de estos dos conjuntos es infinito. Si $|L| = \omega$ y $\xi < \mathfrak{c}$ son tales que $S_\xi = (x_n)_{n \in L}$, entonces es evidente para $r \in L_\xi$. Se obtiene una conclusión similar para el caso en que R es infinito. Definiremos g sobre $\{\{x, r\} : r \in \mathbb{R} \setminus \{x\}\}$ ya que en los otros puntos g estaremos de acuerdo con la selección de dos puntos f . Fijemos $r \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$ y tomamos $\xi < \mathfrak{c}$ como el menor ordinal para el cual $x \in X_\xi$. Si $r \in L_\xi$, entonces definimos $x <_g r$, y si $r \in R_\xi$, entonces definimos $r <_g x$. Es claro que g es una selección de dos puntos bien definida, tal que $g \cong_{\{x\}}^* f$. Según el Lema 0.138 obtenemos que $\lambda_f(\mathbb{R}) = 0$. \blacksquare

Corolario 0.140. *Para cada selección de dos puntos f con $\mathcal{P}(X) \not\subseteq \mathcal{M}_f$ y para cada $x \in \mathbb{R}$, existe una selección de dos puntos g tal que $g \cong_{\{x\}}^* f$ y $\mathcal{M}_g = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{M}_f$.*

Vamos a modificar el lema anterior pero ahora en lugar de usar un punto usaremos dos puntos, para este propósito necesitaremos el siguiente lema.

Lema 0.141. *Sea f una selección de dos puntos. Supongamos que $X \in [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$ satisface que*

$$\left| X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n, s_n]_f \right| = \mathfrak{c},$$

para cada familia de f -intervalos numerables $\{(r_n, s_n]_f : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, X puede dividirse en dos conjuntos disjuntos de tal forma que cada uno de ellos no puede ser cubierto por ninguna familia de f -intervalos numerables.

Demostración. Usaremos la inducción transfinita para definir los conjuntos requeridos. Enumeramos al conjunto $([\mathbb{R}]^2)^\omega$ como $\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ y a cada S_ξ como $\{(r_n^\xi, s_n^\xi) : n \in \mathbb{N}\}$. Elegimos x_o^1 y x_o^2 dos puntos diferentes en $X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n^0, s_n^0]_f$ y supongamos que para cada $\zeta < \xi$ hemos seleccionado cuidadosamente dos números reales

$$x_\zeta^1, x_\zeta^2 \in X \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n^\zeta, s_n^\zeta]_f \cup \{x_\eta^i : \eta < \zeta \text{ y } i = 1, 2\} \right).$$

Por hipótesis, tenemos que

$$\left| X \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n^\xi, s_n^\xi]_f \cup \{x_\zeta^i : \zeta < \xi \text{ y } i = 1, 2\} \right) \right| = \mathfrak{c}.$$

Así que podemos elegir dos números reales distintos x_ξ^1 y x_ξ^2 en este conjunto. Esto termina con la inducción. Ahora definimos $X_1 = \{x_\xi^1 : \xi < \mathfrak{c}\}$ y $X_2 = X \setminus X_1$. Es evidente que $\{X_1, X_2\}$ es una partición de X y $\{x_\xi^2 : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq X_2$. Sea $\{(r_n, s_n]_f : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de f -intervalos tomamos $\xi < \mathfrak{c}$ tal que $r_n = r_n^\xi$ y $s_n = s_n^\xi$ por cada $n \in \mathbb{N}$. Está claro que la familia $\{(r_n, s_n]_f : n \in \mathbb{N}\}$ no puede cubrir ninguno de los conjuntos X_1 y X_2 ya que $\{x_\xi^1, x_\xi^2\} \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n, s_n]_f) = \emptyset$. ■

Teorema 0.142. *Sea f una selección de dos puntos. Supongamos que X satisface la hipótesis del Lema 0.141. Entonces, para cada par de puntos distintos $a, b \in \mathbb{R}$ existe una selección de dos puntos g tal que $f \cong_{\{a,b\}}^* g$, $\lambda(X) = |b - a|$ y $\{X_1, X_2\}$ es una partición de X tal que $X_i \notin \mathcal{M}_g$ para todo $i = 1, 2$.*

Demostración. Supongamos que $X \subseteq \mathbb{R}$ satisface que

$$\left| X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n, s_n]_f \right| = \mathfrak{c}$$

para cada familia numerable de f -intervalos $\{(r_n, s_n]_f : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Definimos la selección de dos puntos g como $a <_g x <_g b$ para cada $x \in X$ y $g(\{y, z\}) := f(\{y, z\})$ en caso contrario. Es evidente que $g \cong_{\{a,b\}}^* f$. Por el Lema 0.141, existe una partición $\{X_1, X_2\}$ de X de modo que ninguno de sus elementos se puede cubrir por ninguna familia de f -intervalos numerables. Dado que el g -intervalo $(a, b]_g$ contiene el conjunto X , debemos tener que $\lambda_g(X) \leq b - a$ y por lo tanto $\lambda_g(X_1) \leq b - a$ y $\lambda_g(X_2) \leq b - a$. Ahora bien, sea $\{(r_n, s_n]_g : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de g -intervalos numerables. Si $(a, b]_g \in \{(r_n, s_n]_g : n \in \mathbb{N}\}$, entonces tenemos que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |s_n - r_n| \geq b - a.$$

Por lo tanto, supongamos que $(a, b]_g \notin \{(r_n, s_n]_g : n \in \mathbb{N}\}$. Siguiendo la notación del 0.141, existe $\xi < \mathfrak{c}$ tal que $r_n = r_n^\xi$ y $s_n = s_n^\xi$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, tenemos que $r_n^\xi \notin a$ o $s_n^\xi \notin b$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, ya que $x_\xi^i \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n^\xi, s_n^\xi]_f$, tenemos que $x_\xi^i <_f r_n^\xi$ o $s_n^\xi <_f x_\xi^i$, para cada $i = 1, 2$ y $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, obtenemos que $x_\xi^i <_f r_n^\xi$ o $s_n^\xi <_g x_\xi^i$ para cada $i = 1, 2$ y $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $x_\xi^i \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n^\xi, s_n^\xi]_f$ por cada $i = 1, 2$ y $n \in \mathbb{N}$. Todos estos resultados implican que $\lambda_g(X) = \lambda_g(X_1) = \lambda_g(X_2) = b - a$. Como $X = X_1 \cup X_2$, obtenemos que ninguno de los tres conjuntos pueden ser g -medibles. ■

Ahora centramos nuestra atención en la selección de dos puntos $f_\mathfrak{c}$, donde $\leq f_\mathfrak{c}$ es un orden isomorfo del orden de \mathfrak{c} . Observemos que, de la condición $\mathcal{M}_{f_\mathfrak{c}} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, no podemos aplicar el Corolario 0.140 para encontrar una selección de dos puntos g tal que $g \cong_N^* f_\mathfrak{c}$, para unos $N \in [\mathbb{R}]^\omega$, y $\mathcal{M}_g \notin \mathcal{M}_{f_\mathfrak{c}}$.

Lema 0.143. *Sea f una selección de dos puntos tal que $\lambda_f((r, s]_f) = 0$ para cada $r, s \in \mathbb{R}$. Entonces $\lambda_f(X) \in \{0, +\infty\}$ para cada $X \subseteq \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Por supuesto, si X no puede ser cubierto por una cubierta numerable de f -intervalos, entonces $\lambda_f(X) = +\infty$. Supongamos que existe una familia numerable $\{(r_n, s_n]_f : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n, s_n]_f$. Entonces

$$\lambda_f(X) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_f((r_n, s_n]_f) = 0.$$

Por supuesto, en este caso, también obtenemos que $X \in \mathcal{M}_f$. ■

Teorema 0.144. *Para cada número ordinal α de cardinalidad \mathfrak{c} , y para cada biyección $\phi : [0, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$, se cumple que $\lambda_{f_\phi}(X) \in \{0, +\infty\}$ para cada $X \subseteq \mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{c} \leq \alpha < \mathfrak{c}^+$ luego fijamos una biyección $\phi : [0, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$. Probaremos por inducción transfinita que $(\phi(0), \phi(\xi)]_{f_\phi} \in \mathcal{N}_{f_\phi}$ para cada ordinal ξ con $0 < \xi < \alpha$.

Primero observemos que $|(\phi(0), \phi(\xi)]_{f_\phi}| < \mathfrak{c}$ para todo $\xi < \alpha$.

Por lo tanto, podemos encontrar una sucesión S que converga a $\phi(0)$, de modo que $S \cap (\phi(0), \phi(\xi)]_{f_\phi} = \emptyset$ y $\phi(\xi) <_{f_\phi} s$ para todo $s \in S$. Entonces, por Lemma 0.102, $\lambda_{f_\phi}((\phi(0), \phi(\xi)]_{f_\phi}) = 0$. Por lo tanto, podemos suponer que $\mathfrak{c} \leq \xi < \alpha$ y $(\phi(0), \phi(\eta)]_{f_\phi} \in \mathcal{N}_{f_\phi}$ para cada $\eta < \xi$. Si $\xi = \eta + 1$, entonces la afirmación se sigue directamente de la hipótesis inductiva de $(\phi(0), \phi(\xi)]_{f_\phi} = (\phi(0), \phi(\eta)]_{f_\phi} \cup \{\phi(\xi)\}$.

Ahora, supongamos que ξ es un ordinal límite. Necesitamos considerar dos casos:

Caso 1: $\text{cof}(\xi) = \omega$. Sea $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de ordinales tal que $\eta_n \nearrow \xi$. Luego,

$$(\phi(0), \phi(\xi)]_{f_\phi} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\phi(0), \phi(\eta_n)]_{f_\phi} \right) \cup \{\phi(\xi)\}.$$

Entonces, la hipótesis inductiva implica que $\lambda_{f_\phi}((\phi(0), \phi(\xi)]_{f_\phi}) = 0$.

Caso 2: $\text{cof}(\xi) > \omega$. Supongamos que $[\phi(\xi), \phi(\alpha)]_{f_\phi}$ no es un conjunto cerrado en la topología Euclidiana de \mathbb{R} . Entonces existe un número ordinal $\eta < \xi$ y una sucesión de ordinales $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $\xi \leq \eta_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que la sucesión $(\phi(\eta_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\phi(\eta)$ en la topología Euclidiana. Por el Lema 0.102, tenemos que $\lambda_{f_\phi}((\phi(\eta), \phi(\xi)]_{f_\phi}) = 0$. Como la hipótesis inductiva garantiza que $\lambda_{f_\phi}((\phi(0), \phi(\eta)]_{f_\phi}) = 0$, obtenemos que $\lambda_{f_\phi}((\phi(0), \phi(\xi)]_{f_\phi}) = 0$.

Por lo tanto, podemos suponer que $[\phi(\xi), \phi(\alpha)]_{f_\phi}$ es un conjunto cerrado en la topología euclidiana de \mathbb{R} . Entonces, $(\phi(0), \phi(\xi)]_{f_\phi}$ es un conjunto abierto en la topología Euclidiana. Sea $\eta \geq \xi$ de modo que $\phi(\eta)$ sea un punto de acumulación, en la topología Euclidiana, de $(\phi(0), \phi(\xi)]_{f_\phi}$. Luego, elegimos una sucesión de ordinales $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en el intervalo $(0, \xi)$ para que $(\phi(\eta_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converga a $\phi(\eta)$ en \mathbb{R} . Consideremos el número ordinal $\eta = \sup\{\eta_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ya que $\text{cof}(\xi) > \omega$, tenemos que $\eta < \xi$. Entonces, por el Lema 0.102, tenemos que $\lambda_{f_\phi}([\phi(\eta), \phi(\xi)]_{f_\phi}) = 0$. Así, finalmente obtenemos que $\lambda_{f_\phi}((\phi(0), \phi(\xi)]_{f_\phi}) = 0$. ■

Estamos convencidos de que el problema particular de encontrar selecciones de dos puntos que son \mathcal{M} -equivalentes a f_E parece ser muy interesante. De alguna manera relacionado con esto, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 0.145. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y sean f y g dos selecciones de dos puntos tales que $f \cong_A g$. Entonces

$$(*) \quad (r, s]_f \setminus A = (r, s]_g \setminus A \text{ para cada } r, s \in \mathbb{R}, \text{ y } (r, s]_f = (r, s]_g \text{ para cada } r, s \in \mathbb{R} \setminus A \text{ y}$$

$$(**) \quad \lambda_f(X \setminus A) = \lambda_g(X \setminus A) \text{ para cada } X \subseteq \mathbb{R} \text{ tal que } \lambda_f(X \setminus A) < \infty.$$

Demostración. Por definición, la afirmación (*) se sigue directamente del hecho de que $r <_f x <_f s$ si y sólo si $r <_g x <_g s$, para cada $r, s \in \mathbb{R}$ y para cada $x \notin A$. Para probar (**), fijamos $X \subseteq \mathbb{R}$ y supongamos que $\lambda_f(X \setminus A) < \infty$. Consideremos una sucesión arbitraria de la forma $\mathcal{C} = \{(a_n, b_n) : n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq [\mathbb{R}]^2$. Observemos que de la condición (*) obtenemos que

$$X \setminus A \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (a_m, b_m]_f \text{ si y sólo si } X \setminus A \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} ((a_m, b_m]_f \setminus A).$$

$$\text{si y sólo si } X \setminus A \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} ((a_m, b_m]_g \setminus A) \text{ si y sólo si } X \setminus A \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (a_m, b_m]_g$$

Por hipótesis existe una familia numerable de f -intervalos de X que atestigua que $\lambda_f(X \setminus A) < \infty$. Siguiendo la observación tenemos que $\lambda_g(X \setminus A) \leq \lambda_f(X \setminus A) < \infty$. De nuevo, por la misma observación, $\lambda_f(X \setminus A) \leq \lambda_g(X \setminus A)$. Por lo tanto, $\lambda_f(X \setminus A) = \lambda_g(X \setminus A)$. ■

Pregunta 0.146. *¿Es cierto que si dos selecciones de dos puntos f y g son \mathcal{M} -equivalentes implica que $f \cong_N g$ para algún $N \in \mathcal{N}_f \cap \mathcal{N}_g$?*

Conclusión

Con esta tesis sobre nuevas medidas exteriores de la línea real, el alumno puede entender mejor la noción de medida en un curso de Teoría de la Medida, puesto con la teoría expuesta sobre estas nuevas medidas exteriores se pueden crear muchos ejemplos interesantes.

La construcción de estas nuevas medidas exteriores incidió positivamente en la posibilidad de medir el tamaño de subconjuntos arbitrarios de \mathbb{R} mediante selecciones de dos puntos. Teniendo como resultado que la medida exterior inducida por una selección de dos puntos generaliza a la medida exterior de Lebesgue.

Se dio un ejemplo de una selección de dos puntos de tal forma que todo subconjunto de \mathbb{R} es λ_f -nulo y por lo que teníamos que $\mathcal{M}_f = \mathcal{N}_f = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Otros ejemplos más exóticos que este último se construyen en esta tesis. Lo cual demuestra la versatilidad del tema para la comprensión de lo que es una medida exterior. Además probamos que se pueden definir 2^c medidas exteriores distintas de entre sí, y de esta forma se proporciona una gran cantidad de propiedades y ejemplos.

En esta tesis se da una caracterización de la Hipótesis del Continuo en términos de la existencia de una medida exterior inducida bajo una selección de dos puntos. Con esta caracterización se contribuyó ampliar la lista de propiedades equivalentes a la Hipótesis del Continuo. Con el Axioma de Martin se obtiene que el σ -ideal de los subconjuntos magros de los números reales es igual al conjunto de los nulos de una de estas medidas exteriores. Con estos resultados mencionados se puede ligar la Teoría de la Medida con la Teoría de Conjuntos. Además en este trabajo se establecieron dos relaciones para que dos selecciones de dos puntos induzcan los mismos conjuntos medibles.

Esperamos que esta tesis se pueda usar como un texto de apoyo en un curso de Teoría de la Medida. De igual manera, esperamos también que el alumno pueda aplicar estos resultados en temas de la probabilidad y la física.

Bibliografía

- [1] A. Blass, *Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum*, in Foreman, Matthew and Kanamori, Akihiro (eds.) *Handbook of Set Theory*, 3 vols. Springer, 2010; p.395-489.
- [2] C. Costantini, *Weak orderability of some spaces which admit a weak selection*, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **47** (2006), 609-615.
- [3] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Boston, Birkhauser, 1980.
- [4] F. Hernández, *Teoría de Conjuntos*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2017.
- [5] Inder K. Rana, *An introduction to measure and integration*, Second edition, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 45, American Mathematical Society Providence, Rhode Island. 2002.
- [6] J. A. Astorga-Moreno *Tesis de Maestría Medidas tipo Lebesgue*, (2013),
- [7] J. A. Astorga-Moreno y S. Garcia-Ferreira *Outer measures on the real line by weak selections*, *Real Anal. Exchange* 39 (2014), 101-116.
- [8] J. L. Doob, *Measure Theory*, New York, Springer Verlag, 1994.
- [9] Kenneth, Kunen. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. USA. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Vol.102.1980.
- [10] K. Kunen, *Set Theory*, Studies in Logic 34, 2011.
- [11] M. Hrusak and I. Martinez-Ruiz, *Selections and weak orderability*, *Fund. Math.* 203 (2009), 1–20.
- [12] M. Hrusak and I. Martinez-Ruiz, *Spaces determined by selections*, *Top. Appl.* 157 (2010), 1448 – 1453.
- [13] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Graduate Texts in Mathematics vol. 9, Springer Verlag, 1974.
- [14] S. Garcia-Ferreira y A. H. Tomita, *A non-normal topology generated by a two-point selection*, *Top. Appl.* **155** (2008), 1105-1110.
- [15] S. García-Ferreira, A. H. Tomita, y Y. F. Ortiz-Castillo *σ -Ideales y medidas exteriores en la línea real*, (2018), 1-14.
- [16] S. Garcia-Ferreira, K. Miyazaki and T. Nogura, *Continuous weak selections for products*, *Top. Appl., Topology Appl.* 160 (2013), 2465–2472.
- [17] S. Garcia-Ferreira, K. Miyazaki, T. Nogura y A. H. Tomita, *generated by weak selection topologies*, *Houston J. Math.* 39 (2013), 1385– 1399.

- [18] S. Garcia-Ferreira, K. Miyazaki, T. Nogura y A. H. Tomita, *Topologies generated by weak selection topologies*, Houston J. Math., to appear.
- [19] T. Jech, *Set Theory*, 3rd. Millennium edition revised and expanded. Berlin. Springer. 2002.
- [20] V. Gutev and T. Nogura, *A topology generated by selections*, Top. Appl. 153 (2004), 900-911.
- [21] V. Gutev and T. Nogura, *Selections and order-like selections*, Appl. Gen. Top. 2 (2001), 205-218.