Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Propiedades topológicas relativas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Licenciado en Matemáticas

PRESENTA:

Andrea Donaji Ruiz Jiménez

DIRECTORES DE TESIS:

Alejandro Ramírez Páramo

Iván Martínez Ruíz

Puebla Noviembre, 2018

Propiedades topológicas relativas

por

Andrea Donaji Ruiz Jiménez

Tesis presentada para obtener el grado de

Licenciado en Matemáticas

en la

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Puebla. Noviembre, 2018

A mi familia y amigos

Agradecimientos

Primero y ante todo agradezco a mis papás, José Marcolino y Luz Maribel por brindarme todo su amor, apoyo, confianza, consejos, regaños y enseñanzas; por estar siempre conmigo y no permitir que me dé por vencida, son las personas más importantes de mi vida y agradezco infinitamente que estén junto a mi sin importar las circunstancias.

A mis hermanas, Diana y Evelin, les agradezco por ser mis amigas y confidentes, por todos los momentos que hemos pasado, por todas las alegrías y enojos; sobre todo, les agradezco por no dejarme sola y ser mis cómplices, ante todo.

A mis dos niñas queridas, a mis dos rayitos de luz y de desesperación, a mis dos sobrinitas, Ayumi y Amairany, me han dado tantas alegrías e hicieron que la vida tenga un nuevo sabor, las adoro con todo con mi corazón.

A mis abuelitos, Pita, Picho, Tomy, Germán y mi tía Conchita que me brindan su cariño, amor, una historia, un consejo o un abrazo cuando lo necesito. Además, agradezco porque han sido un apoyo para mis papás cuando más lo hemos necesitado. Y sobre todo, agradezco a la vida que aun permanezcan a nuestro lado.

A mis amigos y compañeros, que les puedo decir, primero estoy agradecida por haberlos conocido y el haber crecido con ustedes durante estos años. Por brindarme su amistad, apoyo y por los buenos y malos momentos. Por todas las vivencias y enseñanzas que recibí de ustedes. Gracias

Al Dr. Alejandro Ramírez Páramo (7) por aceptar trabajar conmigo en la realización de esta tesis, por su paciencia, tiempo, comentarios y sugerencias. Así como al Dr. Iván Martínez Ruíz por su paciencia, sugerencias y conocimientos transmitidos a través de los diferentes cursos en los que he tenido la oportunidad de estar.

Al Dr. Agustín Contreras Carreto, Dr. Marcelino Texis y M.C. Javier Casas de la Rosa por todos sus comentarios, observaciones, sugerencias y atenciones que tuvieron para enriquecer éste trabajo de tesis.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En topología general nos encontramos, a menudo, con la cuestión de cómo un cierto espacio está *ubicado* o *localizado* en un espacio más grande. Para darnos una idea, los hechos siguientes son bien conocidos:

1.- Un espacio X es pseudocompacto si X es G_δ–denso en su compactación de Stone-Cech.

2.- Todo espacio Tychonoff X se puede ver como subespacio del espacio de todos los subconjuntos cerrados de X con la topología de Vietoris.

3.- El espacio $C_p(X)$ de funciones continuas real valuadas definidas en un espacio Tychonoff es un subespacio de $\mathbb{R}^X$ dotado con la topología producto.

4.- Cualquier espacio Hausdorff puede considerarse un subespacio de su extensión de Katetov.

Situaciones que involucran propiedades topológicas relativas se encuentran en topología en incontables ocasiones. Por ejemplo, varios resultados importantes sobre compacidad numerable relativa fueron obtenidos por Grothendieck; además Tkachuk y Chigogidze analizaron la versión relativa de la dimensión topológica (vea[2]).

La idea principal detrás de la localización es la siguiente:

Con cada propiedad topológica $\mathcal{P}$ uno puede asociar una versión relativa formulada en términos de la localización de Y en X de una manera tan natural que cuando Y coincide con X, entonces esta propiedad relativa coincide con $\mathcal{P}$.

Consideremos, por ejemplo, la propiedad $\mathcal{P} =$ compacidad y tomemos la definición siguiente: $Y \subseteq X$, es compacto en X si toda cubierta abierta de X, admite una subcolección finita que cubre a Y. En este caso, es evidente que si $Y = X$, la propiedad definida coincide con la noción compacidad.

La primera exposición de propiedades topológicas relativas fue dada en [5]; posteriormente Gordienko; Dow y Vermeer obtuvieron un resultado importante sobre la versión relativa de la propiedad de Lindelöf, lo cual permitió resolver un problema plateado por Ranchin y el cuál permaneció abierto durante mucho años.

En 1996, Arhangel'skii, presenta un primer estudio sistemático sobre propiedades topológicas relativas; haciendo énfasis en axiomas de separación relativos y sobre propiedades relativas de tipo compacidad (vea [3]). Sin embargo desde antes ya había obtenido algunos resultados de este tipo, en su trabajo, *A generic theorem in the theory of cardinal invariants of topological spaces*, Arhangel'skii, donde presenta versiones relativas de varios teoremas importantes. En dicho trabajo, Arhangel'skii, comenta que para obtener buenas definiciones relativas que permitan verificar el cumplimiento de teoremas clásicos en versión relativizada se debe seguir la idea en la definición de la cardinalidad relativa (vea [2]); a saber: Sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica hereditariamente cerrada. Diremos que Y tiene $\mathcal{P}$ en X *desde adentro*, si todo subconjunto de Y, el cual es cerrado en X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

En cualquier caso, la *aproximación desde adentro* nos dota de invariantes cardinales relativos bastante interesantes y naturales. Por ejemplo, se dice que Y es compacto (Lindelöf, normal) en X si todo subepacio cerrado de X, contenido en Y es compacto (es Lindelöf, es normal, respectivamente). Así, en general, $L(Y, X) \leq \kappa$ (el grado de Lindelöf de Y en X, es menor o igual que κ), si para todo $A \subseteq Y$, el cual es cerrado en X, $L(A) \leq \kappa$. Esto último resalta la conexión entre relativización con una manera muy natural de explorar propiedades topológicas en espacios: *analizando la propiedad en subespacios pequeños de espacios para determinar si el espacio la tiene*, conocida como teoría de reflejo. Hodel presenta en su obra [14] un estudio panorámico sobre teoría de reflejo en funciones cardinales.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Conjuntos

En esta sección hacemos un breve recuento de algunos conocimientos de la teoría de conjuntos que serán útiles en el desarrollo de este trabajo; con la finalidad de hacer, en la medida de lo posible, que nuetra obra sea autocontenida. No obstante, los temas expuestos tanto en esta sección como en el presente capítulo se darán sin mucho detalle, pero con referencias para que el lector interesado pueda adentrarse o profundizar en ellos. Para un estudio detallado sobre teoría de conjuntos recomendamos [13], [17].

Definición 2.1.1 *Un conjunto α es un número ordinal (o simplemente un ordinal) si:*

(i) *α es transitivo (es decir, todo elemento de α es subconjunto de α),*

(ii) *α es bien ordenado por la relación de pertenecia restringida a α, que se define por* $\in_\alpha = \{(a,b): a \in \alpha, b \in \alpha \text{ y } a \in b\}$.

Se puede demostrar que todo elemento de un ordinal, también es un ordinal. Si α es un ordinal, el conjunto $\alpha \cup \{\alpha\}$, se llama sucesor de α y es denotado $\alpha + 1$ (se puede probar que el sucesor de cualquier ordinal es un ordinal). Esto permite una clasificación de ordinales: un número ordinal α, es llamado ordinal sucesor si $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β. En otro caso α es llamado ordinal límite.

Denotemos al mínimo ordinal límite distinto de cero como ω. Los ordinales menores que ω (elementos de ω) son llamados ordinales finitos o número naturales.

Para cada par de ordinales α, βdefinimos: $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$. Es importante mencionar que esta relación posee los atributos de un buen orden.

Definición 2.1.2 *Un ordinal α, se llama ordinal inicial o cardinal, si α no es equipotente a cualquier $\beta \in \alpha$ (es decir, no existe una función inyectiva con dominio α y rango β).*

Si κ es un cardinal, denotamos κ^+, al menor cardinal mayor que κ. Un cardinal de la forma κ^+, se llama cardinal sucesor. Un cardinal lí mite es aquel cardinal que no es sucesor. De aquí que, κ es un cardinal límite si para todo cardinal $\lambda < \kappa$, $\lambda^+ < \kappa$.

Definición 2.1.3 *Una sucesión transfinita es una función cuyo dominio es un ordinal θ y se denota por $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$. Además es llamada como una θ −sucesión o sucesión de longitud θ.*

Sea $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$ una sucesión transfinita de ordinales de longitud θ. Decimos que la sucesión es creciente si $\gamma_\rho < \gamma_\beta$, siempre que $\rho < \beta < \theta$.

Definición 2.1.4 *Sea θ un ordinal lí mite, y sea $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$ una sucesión creciente de ordinales en γ. Decimos que la sucesión $A = \langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$ es cofinal en γ, si no existe $\alpha < \gamma$ tal que $A \subseteq \alpha$.*

La cofinalidad de γ, denotada $cf(\gamma)$, es el menor ordinal lí mite, θ, tal que existe una θ −sucesión crecientela cual es cofinal en γ. Se puede ver que $cf(\gamma)$, siempre es un número cardinal.

Definición 2.1.5 *Un cardinal infinito κ es regular si $cf(\kappa) = \kappa$; en otro caso, se dice que κ es un cardinal singular. Así κ es singular si $cf(\kappa) < \kappa$..*

Es posible demostrar que todo cardinal sucesor e infinito es regular. Sea E un conjunto. Denotamos, $\mathcal{P}(E)$, al conjunto potencia de E, $[E]^{\leq\kappa}$ es la colección de todos los subconjuntos de E con cardinalidad $\leq \kappa$, en el caso que se tenga $[E]^{<\omega}$ se referirá a la colección de todos los subconjuntos de E con cardinalidad finita. Y finalmente $[E]^\kappa$ denota la colección de todos los subconjuntos de E con cardinalidad κ.

El siguiente teorema es de gran ayuda.

Teorema 2.1.1 *Si κ un cardinal infinito, entonces:*

(i) $|[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$,

(ii) *si λ es un cardinal tal que $\lambda \leq \alpha$, entonces $\left|[\kappa]^{<\lambda}\right| \leq \kappa^{\lambda}$ y también, $\left|[\kappa]^{\lambda}\right| \leq \kappa^{\lambda}$.*

2.2. Topología

Si bien el presente trabajo de tesis requiere elementos básicos tanto de teoría de conjuntos como de topología, a continuación haremos una exposición sencilla de las nociones de topología con las que trabajaremos, el lector interesado en el tema puede consultar [12].

Definición 2.2.1 *Un espacio topológico es un par (X, T), donde X es un conjunto y T una colección de subconjuntos de X que satisface:*

- $X, \emptyset \in T$
- $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \in T$ si $A_{\alpha} \in T$.
- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in T$ si $A_i \in T$

A los elementos de T les llamaremos abiertos y a T topología para el conjunto X.

Cuando no exista confusión escribiremos sólo X para referirnos al espacio topológico (X, T).

Ejemplo 2.2.1 Sea X cualquier conjunto, la colección $T = \{X, \emptyset\}$ es una topología para X; ésta topología es llamada topología trivial o indiscreta.

Ejemplo 2.2.2 Si X es un conjunto, entonces la colección $T = \mathcal{P}(X)$ es una topología en X; la colección T es llamada topología discreta.

Ejemplo 2.2.3 Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y T la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que: $U \in T$ si y sólo si para todo $x \in U$, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $x \in (a, b) \subset U$, además del conjunto vacío. Entonces T es una topología en $\mathbb{R}$ Nos referimos a T como topología usual de $\mathbb{R}$ y al par $(\mathbb{R}, T)$ el espacio real

Ejemplo 2.2.4 Considérese en $\mathbb{R}$l a colección T_s formada por $\emptyset$, $\mathbb{R}$ y todos los subconjuntos U de $\mathbb{R}$ tales que U es unión de intervalos de la forma $[x, y)$. T_s es topología para $\mathbb{R}$, el espacio $(\mathbb{R}, T_s)$ se conoce como Línea de Sorgenfrey. Denotaremos por $\mathbb{K}_s$ a tal espacio.

Ejemplo 2.2.5 Si X es un conjunto no vacío, la colección:

$T_c = \{A \subseteq X: X \setminus A$ es finito ó $X\}$ es una topología para X. La colección T_c es llamada topología co-finita.

Ejemplo 2.2.6 Si X es un conjunto no vacío; la colección

$T_n = \{A \subseteq X: X \setminus A$ es numerable o todo $X\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología en X y se conoce como topología co-numerable.

Revisemos que T_n es topología:

(*i*) Inmediatamente de la definición de T, se tiene que $\emptyset$, $X \in T$.

(*ii*) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset T$ esto es, $X \setminus U_\alpha$ es numerable para todo $\alpha \in J$; puesto que $(X \setminus \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in J}(X \setminus U_\alpha)$ y dado que $\bigcap_{\alpha \in J}(X \setminus U_\alpha)$ es un conjunto numerable, $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in T$.

(*iii*) Sean $A_1, \ldots, A_n \in T$. Sabemos que

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus A_i)$$

el cual resulta numerable por ser la unión finita de conjuntos numerables.

De (i), (ii) y (iii) se concluye que T_n es una topología para X.

Definición 2.2.2 *Sea* (X, T) *un espacio topológico, diremos que* $A \subseteq X$ *es cerrado si* $X \setminus A$ *es abierto..*

La prueba de las afirmaciones siguientes se obtiene de las leyes de De Morgan.

i) X y $\emptyset$ son conjuntos cerrados

ii) $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ es cerrado si A_α es cerrado para cada α

ii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es cerrado si A_i es cerrado para $i \in \{1, \ldots, n\}$

Definición 2.2.3 *Sea* $(X,T\ )$ *un espacio topológico y* $A\ \subseteq\ X$*,*

a) *Un punto* $x \in X$*, se llama punto clausura de* A*, si dado cualquier conjunto* U *abierto con* $x \in U$*, se tiene que* $U \cap A \neq \emptyset$*.*

b) *Un punto* $x \in X$*, es punto interior de* A *si, existe un abierto* U*, tal que* $x \in U \subseteq A$*.*

Sean (X,T) un espacio topológico y $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$. Consideremos $\mathcal{F} = \{E \subseteq X: A \subseteq E\ y\ E\ es\ cerrado\}$; claramente $\mathcal{F}$ es no vacía pues $X \in \mathcal{F}$; luego, por la proposición anterior se tiene que $\bigcap\mathcal{F}$ es un conjunto cerrado.

Análogamente, sí $\mathcal{G} = \{E \subseteq X: E \subseteq A, con\ E\ abierto\}$ tenemos que $\bigcup\mathcal{G}$ es un conjunto abierto, debido a (ii) de la Definición 2.2.1.

Definición 2.2.4 *Sea* X *un espacio topológico y* A *un subconjunto de* X*.*

a) *La clausura de* A*, denotado por* $\overline{A}$ *o* $\bar{cl}_X(A)$*, es el conjunto* $\overline{A} = \bigcap\mathcal{F}$*, donde* $\mathcal{F}$ *es la familia* $\{E \subseteq X: A \subseteq E$ *y* E *es cerrado*$\}$*.*

b) *El interior del conjunto* A *es el conjunto*

$$int(A) = \mathring{A} = \bigcup\mathcal{G} \text{ donde, } \mathcal{G} = \{E \subseteq X: E \subseteq A, \text{ con } E \text{ abierto}\}.$$

Se observa inmediatamente de la definición anterior que: $\mathring{A}$ es el conjunto abierto más grande contenido en A y, que $\overline{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A.

Definición 2.2.5 *Sea* X *un espacio topológico*

i) *Una colección* $\mathcal{B}$ *de subconjuntos abiertos de* X*, es base parala topología* T *de* X*, si para cada* $x \in X$ *y cada abierto* U *de* X *que contiene a* x*, existe* $B \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \in B \subseteq U$

ii) *Una colección* $\mathcal{B}_x$ *formada por abiertos que contienen al punto* x *es una base local de* $x \in X$*, si dado cualquier abierto* U*, tal que* $x \in U$*, existe* $B \in \mathcal{B}_x$ *de tal manera que* $x \in B \subseteq U$*.*

Si $\mathcal{B}$ es base para la topología del espacio X, nos referimos a los elementos de $\mathcal{B}$ como básicos. Además, si $\mathcal{B}_x$ es una base del punto x, se llama vecindad del punto x a cada elemento $B \in \mathcal{B}_x$. Si la base no está dada en forma implícita o en forma explícita, entenderemos por vecindad del punto x, a cualquier conjunto abierto que lo contenga.

Ejemplo 2.2.7 Si (X, T) es un espacio topológico, T es base para T.

Ejemplo 2.2.8 Si (X, T) es el espacio discreto, entonces la colección $\mathcal{B} = \{\{x\}: x \in X\}$ es base para T.

Ejemplo 2.2.9 Sea $\mathbb{R}$ el espacio real, entonces la colección

$\mathcal{B} = \{(p, q): p < q \ y \ p, q \in \mathbb{Q}\}$ es base para $\mathbb{R}$..

Ejemplo 2.2.10 Si (X, T_d) es un espacio metrizable, las bolas $B_r(x)$ ó $B(x, r)$ forman una base para T_d y las bolas centradas en cada punto forman una base local para cada punto.

Ejemplo 2.2.11 La colección $\mathcal{B} = \{[x, r): x < r, x \in \mathbb{R} \ y \ r \in \mathbb{Q}\}$ es base para el espacio $\mathbf{K}_s$. Además, cada $U \in \mathcal{B}$ es abierto y cerrado en $\mathbf{K}_s$

La importancia de las bases radica en el hecho de que con éstas se caracteriza a los abiertos de un espacio; es decir, si $\mathcal{B}$ es base para la topología T de X entonces, $U \in T$ si, y sólo si para todo $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Así, si $\mathcal{B}$ es base para alguna topología T entonces U es elemento de T si se puede ver como la unión de elementos de $\mathcal{B}$.

También las bases se pueden emplear para caracterizar a los puntos de la clausura de un conjunto. Sea $\mathcal{B}$ una base para el espacio topológico (X, T) y E un subconjunto no vacío de X. Entonces $x \in \overline{E}$ si y sólo si para todo $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$, existe $y \in B \cap E$.

Proposición 2.2.1 *Sea X un conjunto no vacío. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es base para "alguna "[1] topología en X si, y sólo si $\mathcal{B}$ satisface:*

i) *Para cada $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B$.*

ii) *Si $x \in B_1 \cap B_2$ con B_1, $B_2 \in \mathcal{B}$; existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

[1] El término "alguna" se debe al hecho de que si X está dotado de una topología T, no necesariamente T y la topología generada por la colección $\mathcal{B}$ coinciden.

Demostración. ⇒) Se sigue de la definición de base

⇐) Sea $T = \{A \subseteq X: para\ todo\ x \in A,\ existe\ B \in \mathcal{B}\ tal\ que, x \in B \subseteq A\}$. A continuación probaremos que τ es una topología.

Observe que de (i), se tiene que $X \in T$ y, de paso, se tiene que $T \neq \emptyset$. Por otro lado, $\emptyset \in T$ trivialmente.

Nuevamente, (i) implica que la unión arbitraria de elementos de T pertenece a T.

Sean $A_1, A_2 \in T$, $x \in A_1 \cap A_2$ entonces $x \in A_1$ y $x \in A_2$ por lo que existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ de manera que $x \in B_1 \subseteq A_1$ y $x \in B_2 \subseteq A_2$ así se tiene que $x \in B_1 \cap B_2$ entonces hay $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ y por tanto $x \in B_3 \subseteq A_1 \cap A_2$. Esto es, T es una topología para X y por la construcción $\mathcal{B}$ es base para T.

Observe que la proposición anterior proporciona además un método para construir topologías para un conjunto X a partir de una colección de subconjuntos de X.

Definición 2.2.6 *Sea (X,T) un espacio topológico.*

i) *Un subconjunto D de X se dice que es denso en X si, $\overline{D} = X$.*

ii) *Un subconjunto E de X es nada denso si, $\mathring{\overline{E}} = \emptyset$.*

Observe que si D es un subconjunto cerrado y denso en X, entonces $D = X$. Así, el único cerrado y denso en un espacio X es X. Note además que si X es un espacio discreto, entonces X contiene sólo un conjunto denso, a saber, X

Ejemplo 2.2.12 El conjunto de los números irracionales así como el de los racionales son ambos densos en el espacio real $\mathbb{R}$

No es difícil verificar que si X es un espacio topológico y D un subconjunto de X, entonces D es denso en X si y sólo si todo abierto no vacío de X intersecta a D.

Definición 2.2.7 *Un Espacio topológico es separable si contiene un subconjunto denso numerable.*

Dado un subconjunto Y de un espacio topológico X, hay una manera natural de definir una topología en Y, con base en la topología definida en X.

Definición 2.2.8 *Sea X un espacio topológico con la topología T. Si Y es un subconjunto de X, la colección*

$$T_Y = \{Y \cap U | U \ es \ \ un \ abierto \ en \ X\}$$

es una topología en Y, denominada la topología de subespacio. Con esta topología, Y es llamado un subespacio topológico de X.

Diremos que $V \subseteq Y$ es abierto en Y si V es un conjunto abierto en el espacio topológico Y. Por lo tanto, un conjunto es abierto en el subespacio topológico Y si es igual a la intersección de un conjunto abierto en X con Y.

Hay que verificar que la topología de subespacio es realmente una topología.

(i) Notemos que tanto $\emptyset$ y Y son abiertos en Y puesto que $\emptyset = \emptyset \cap Y$ y $Y = X \cap Y$.

(ii) Siguiendo, hay que verificar que la intersección finita de conjuntos abiertos de Y es abierta en Y. Supongamos que $V_1, V_2, \dots, V_n$ son abiertos en Y. Entonces para cada $i = 1,2, \dots, n$ existe U_i abierto en X tal que $V_i = U_i \cap Y$, entonces

$$V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) \cap \dots (U_n \cap Y) = (U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n) \cap Y$$

Como cada $U_1, U_2, \dots, U_n$ es abierto en X, se tiene $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ será un abierto en X que intersecta a Y, con lo que se concluye que $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n$ es un abierto en Y.

(iii) Por último, revisemos que la unión arbitraria de abiertos de Y será un conjunto abierto en Y. Supongamos $\{V_\alpha\}$ es una colección de conjuntos abiertos en Y.

Entonces para cada α existe un conjunto abierto U_α en X tal que $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$. Por lo que:

$$\cup V_\alpha = \cup(U_\alpha \cap Y) = (\cup U_\alpha) \cap Y$$

Ahora, $\cup U_\alpha$ es un abierto en X, que intersecta a Y, por lo que $\cup V_\alpha$ es un abierto en Y.

Los cerrados en un subespacio topológico también son resultado de la intersección de cerrados del espacio X con el subespacio Y.

Proposición 2.2.2 *Sea Y subespacio del espacio topológico X, $F \subseteq Y$ es un conjunto cerrado en Y si y sólo si existe un cerrado G en X tal que $F = G \cap Y$*

.

Demostración.

⇒] Sea F un cerrado en Y, lo que significa que $Y \backslash F$ es un abierto en Y. Por lo que existe un abierto U en X tal que $Y \backslash F = Y \cap U$. Entonces $G = X \backslash U$ es un conjunto cerrado en X y

$$F = Y \backslash (Y \backslash F) = Y \backslash (U \cap Y) = Y \backslash U = Y \cap (X \backslash U) = Y \cap G$$

⇐] Sea $F = G \cap Y$ con G cerrado en X, el complemento de F se puede expresar como:

$$Y \backslash F = Y \backslash (G \cap Y) = Y \backslash G = Y \cap (X \backslash G)$$

como $X \backslash G$ es abierto en X, $Y \backslash F$ es abierto en Y, por lo que F es cerrado en Y.

En general, los abiertos (cerrados) del subespacio no son abiertos (cerrados) en el espacio total.

Ejemplo 2.2.13 Consideremos $Y = [0,1]$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana. En el subespacio topológico Y, los conjuntos abiertos resultan de la intersección de conjuntos abiertos (x, y) de $\mathbb{R}$ con Y, es decir, son conjuntos de la forma:

i) $(a, b) = (x, y) \cap Y$, donde $0 < a < b < 1$,

ii) $[0, a)$ para $0 < a < 1$

iii) $(a, 1]$ para $0 < a < 1$

Para el caso $i)$, los conjuntos abiertos de Y también son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$. Sin embargo, los abiertos en Y de la forma $ii)$ y $iii)$ no serán abiertos en $\mathbb{R}$.

Lema 2.2.1 *Sea Y un subespacio del espacio topológico X. Si Y es abierto en X y $U \subseteq Y$ es abierto en X entonces U es abierto en X.*

Demostración. Dado que U es abierto en Y, $U = Y \cap V$ para algún V abierto en X, como Y y V son ambos abiertos en X, también lo será $Y \cap V = U$.

Lema 2.2.2 Si $\mathcal{B}$ es base para la topología T de X, entonces la colección:

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

es base para la topología de subespacio en Y.

Demostración. Sea V abierto en Y y $x \in V$. Por definición, $V = Y \cap U$ con U abierto en X; puesto que $x \in V$, se tiene que $x \in Y \cap U$, entonces $x \in U$ luego, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. Entonces $x \in B \cap Y \subset B \cap U$, lo que termina la prueba.

En lo sucesivo, denotaremos $int_{()}A$ para el interior de A respecto de..., y $cl_{()}A$ para la clausura del conjunto A relativa a...; así, por ejemplo, si Y es un subespacio de X y $U \subseteq Y$, el interior y la clausura de U relativo a Y, lo denotamos por $int_Y(U)$ y $cl_Y U$ respectivamente.

Proposición 2.2.3 *Sean Y un subespacio de X y A subconjunto de Y. Entonces:*

i) $der_Y(A) = der_X(A) \cap Y$

ii) $cl_Y(A) = cl_X(A) \cap Y.$

iii) $int_Y(A) \supseteq int_X(A) \cap Y$

iv) $fr_Y(A) \subseteq fr_X(A) \cap Y$

Demostración.

i) Como $A \subseteq Y$, se tiene que para cualquier $U \subseteq X$ y $x \in Y$, $A \cap (U \backslash \{x\}) \neq \emptyset$ y además $A \cap ((U \cap Y) \backslash \{x\}) \neq \emptyset$; lo que se concluye $der_Y(A) = der_X(A) \cap Y$

ii) Se sabe que $cl_X(A) = A \cup der_X(A)$ y $cl_Y(A) = A \cup der_Y(A)$. Por inciso anterior $der_Y(A) = der_X(A) \cap Y$ por lo que se llega a que $cl_Y(A) = cl_X(A) \cap Y$.

iii) Como $int_X(A)$ es abierto en X contenido en A, se tiene que $int_X(A) \cap Y$ es un abierto en Y contenido en A por lo que $Y \cap int_X(A) \subseteq int_Y(A)$.

iv) Sea $x \in fr_Y(A)$, entonces $x \in Y$. Para ver que $x \in fr_X(A)$, tomemos un abierto U en X que contiene a x, entonces $U \cap Y$ es un abierto que contiene a x, así que $\emptyset \neq (U \cap Y) \cap A \subseteq U \cap A$ y $\emptyset \neq (U \cap Y) \cap (Y \backslash A) \subseteq U \cap (X \backslash A)$

Las propiedades de los espacios topológicos difieren en general de las que se verifican en los espacios métricos, sin embargo, algunas veces es conveniente suponer que nuestro espacio topológico satisface alguna propiedad adicional, que siempre es verdadera en los espacios métricos; como es el caso de las siguientes.

- T_1: Dados dos puntos distintos $x, y \in X$ existen dos abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \notin U$, $y \in V$ y $x \notin V$.
- T_2 o Hausdorff: Dados dos puntos distintos $x, y \in X$ existen conjuntos abiertos y ajenos U_1 y U_2 tal que $x \in U_1$ y $y \in U_2$.
- T_3: En adición con T_1, dado un cerrado F y un punto $x \in X \setminus F$, existen conjuntos abiertos ajenos U_1 y U_2 tal que $F \subseteq U_1$ y $x \in U_2$.
- T_4: En adición con T_1, dados dos conjuntos disjuntos cerrados F_1 y F_2, existen conjuntos abiertos ajenos U_1 y U_2 tal que $F_1 \subseteq U_1$ y $F_2 \subseteq U_2$.

A estas proposiciones les llamaremos axiomas de separación. La proposición siguiente nos dice que usar la condición T_1 es equivalente a decir que cada conjunto singular es cerrado.

Proposición 2.2.4 *Un espacio topológico es T_1 si y sólo si los conjuntos singulares son cerrados.*

Demostración.

⇒) Sea $x \in X$, arbitrario. Veamos que $X\setminus\{x\}$ es abierto. Si $y \in X\setminus\{x\}$, dado que X es T_1, existen abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \notin U$, $y \in V$ y $x \notin V$. Evidentemente $V \subseteq X\setminus\{x\}$. Luego, $X\setminus\{x\}$ es abierto y por lo tanto $\{x\}$ es cerrado.

⇐) Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Por hipótesis, $\{x\}$ y $\{y\}$ son cerrados; luego, $X \setminus \{x\}$ y $X \setminus \{y\}$ son abiertos que satisfacen lo requerido.

Como consecuencia inmediata de la definición de topología de subespacio, se tiene que para $i \leq 3$, T_i es hereditario; es decir, todo subsespacio de un espacio T_i, con $i = 1,2,3$, es T_i.

Otra consecuencia inmediata es que:

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1.$$

Los ejemplos siguientes muestran que los recíprocos en la proposición anterior no siempre son válidos.

Ejemplo 2.2.14 Sea (X, T_c) el espacio co-finito con $|X| \geq \aleph_0$. Note que si $x \in X$ entonces $X\setminus\{x\}$ es abierto y por consiguiente $\{x\}$ es cerrado; luego, por la Proposición [t1] el espacio (X, T) es T_1. Por otro lado, supongamos que U y V son abiertos ajenos y no vacíos en X. Entonces $U \subseteq X\setminus V$, lo cual implica que U es finito; entonces $|X \setminus U| \geq \aleph_0$. Pero esto contradice el hecho de ser U abierto; por tanto, no existen abiertos ajenos y no vacíos. Así, X es un espacio T_1 y no T_2.

Ejemplo 2.2.15 Sean $\mathbb{R}$ el espacio real y,

$$\mathcal{B} = \{U = V \setminus C : V \text{ abierto en } \mathbb{R} \; y \; C \; numerable\}$$

La colección $\mathcal{B}$ es base de una topología en $\mathbb{R}$. En efecto, $\mathbb{R} \in \mathcal{B}$, pues $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \emptyset$; de aquí se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

Por otro lado, si $V_1 \setminus C_1, V_2 \setminus C_2 \in \mathcal{B}$, entonces

$$\begin{aligned}(V_1\backslash C_1)\cap(V_2\backslash C_2) &= (V_1\cap C_1^c)\cap(V_2\cap C_2^c) = (V_1\cap V_2)\cap(C_1^c\cap C_2^c)\\ &= V_1\cap V_2\cap(C_1\cup C_2)^c = V_1\cap V_2\backslash(C_1\cup C_2)\in\mathcal{B}\end{aligned}$$

y por tanto para todo $B, C \in \mathcal{B}$ y $x \in B \cap C$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq B \cap C$. De donde, por la Proposición 2.2.1 se tiene que $\mathcal{B}$ es base de alguna topología $T_\circ$ en $\mathbb{R}$ y claramente $T_\circ$ es más fina que la topología usual de $\mathbb{R}$.

El espacio $(\mathbb{R}, T_\circ)$ es un espacio T_2 efecto, sean $x, x_0 \in \mathbb{R}$ con $x \neq x_0$. Si $x < x_0$, existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $b < x < a < x_0 < c$ y por tanto $(b,a) \cap (a,c) = \emptyset$ con (b,a), $(a,c) \in \mathcal{B} \subseteq T_\circ$, además $x \in (b,a)$ y $x_0 \in (a,c)$ por tanto $(\mathbb{R}, T_\circ)$ es T_2 . Ahora bien, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es cerrado en el espacio $(\mathbb{R}, T_\circ)$, pues claramente $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in T_\circ$. Supóngase que existen U y W abiertos ajenos en $(\mathbb{R}, T_\circ)$ de tal manera que $x \in U$ y $\mathbb{Q} \subset W$ para algún $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; dado que $U \in T_\circ$ podemos suponer sin pérdida de generalidad $U = V \setminus C$ luego, por ser V abierto en el espacio real, $V \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ lo cual implica $V \cap W \neq \emptyset$; más aún, $((V \setminus C) \cap W \neq \emptyset$ pues si $(V \setminus C) \cap W = \emptyset$ entonces $(V \cap W) \setminus C = V \cap (W \setminus C) = \emptyset$ y dado que $V \cap W \neq \emptyset$ lo cual implica que $W \subseteq C$, pero esto no puede ocurrir. Así que $V \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Por tanto $(\mathbb{R}, T_\circ)$ no es T_3.

Ejemplo 2.2.16 Denotemos por P al semiplano superior, en $\mathbb{R}^2$, es decir:

$$P = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R} \text{ y } 0 < y\}$$

con la topología euclidiana T y $L = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, y = 0\}$. Sea $X = P \cup L$ y T^* la colección formada por T y todos los elementos de la forma $\{x\} \cup D$, donde x es un punto en L y D es un disco tangente a L en x . T^* es topología para el conjunto X .

Note que cada vecindad de cada $x \in L$ contiene a lo más un punto de L, de aquí que todo subconjunto de L es cerrado en X; en particular $\mathbb{Q} \subset L$ e $\mathbb{I} \subset L$ son cerrados.

Claramente $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$, no tienen vecindades ajenas; así, X no es T_4. Sin embargo, X es T_3. En efecto, sean A un subconjunto cerrado en X y x un punto que no está en A. Obsérvese que si ambos, x y A están en P nada que probar puesto que la topología euclidiana satisface el axioma

T_3. Luego si $x \in L$ y $A \subseteq P$, existen abiertos ajenos U y V en la topología euclidiana tales que $x \in U$ y $A \subseteq V$; de aquí que existe un disco contenido en $P \cap U$ y tangente a L en x, de manera análoga se prueba el caso en que $A \subset L$ y $x \in L$.

Definición 2.2.9 *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Diremos que:*

(I1) *$\mathcal{U}$ es cubierta abierta para X si $X = \bigcup \mathcal{U}$ y, para todo $U \in \mathcal{U}$, U es abierto en X.*

(I2) *Si $\mathcal{U}$ es una cubierta de X, decimos que $\mathcal{U}$ admite una subcubierta para X, si existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{V}$ cubre a X; es decir, $\bigcup \mathcal{V} = X$.*

(I3) *X es compacto, si toda cubierta abierta de X admite una subcubierta finita.*

Ejemplo 2.2.17 Sea X el espacio co-finito (Ejemplo 2.2.5) y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Observe que si $U \in \mathcal{U}$ entonces $X \setminus U$ es finito, digamos, $X \setminus U = \{x_1, \dots, x_n\}$ ahora bien, para cada x_i con $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $U \in \mathcal{U}$ de tal forma que $x_i \in U_i$, puesto que $\mathcal{U}$ es una cubierta de X. Es inmediato que la colección formada por U, U_1,..., U_n forma una subcubierta finita de X. Por tanto, X es compacto.

Ejemplo 2.2.17 El espacio real $\mathbb{R}$ no es compacto, pues la colección $\mathcal{U} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{R}\}$ es, claramente, una cubierta abierta de $\mathbb{R}$ que no admite subcubiertas finitas.

Teorema 2.2.1 *Un subconjunto Y de un espacio topológico X es compacto si éste es compacto como espacio topológico con la topología de subespacio de X.*

Definición 2.2.10 *Sea X un conjunto no vacío. Decimos que $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(X)$satisface la propiedad de la intersección finita (PIF) cuando se verifica el siguiente hecho:*

si cualquier subcolección finita de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía, entonces $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía.

Proposición 2.2.5 *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

(I1) *X es compacto.*

(I2) *Toda colección, no vacía de conjuntos cerrados con intersección vacía admite una subcolección finita de cerrados con intersección vacía.*

(I3) *Toda familia de cerrados que satisface la PIF, tiene intersección no vacía.*

Demostración.

$[1. \Rightarrow 2.]$ Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de subconjuntos cerrados de X tal que $\bigcap\mathcal{F} = \emptyset$. Claramente la colección $\mathcal{U} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ es una cubierta abierta de X; luego, dado que X es compacto, existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ tal que $X = \bigcup\mathcal{V}$. Evidentemente la familia $\{F \in \mathcal{F} : X \setminus F \in \mathcal{V}\}$ es una subcolección de $\mathcal{F}$ con intersección vacía.

$[2. \Rightarrow 3.]$ Es inmediato.

$[3. \Rightarrow 1.]$ Supongamos que X no es compacto, entonces existe una cubierta abierta, $\mathcal{U}$, de X que no admite subcubiertas finitas. Sea $\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$. Entonces $\mathcal{F}$ es una colección de subconjuntos cerrados en X que satisface la PIF; luego, por 3., $\bigcap\mathcal{F} \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción, pues $\bigcap\mathcal{F} = X \setminus \bigcup\mathcal{U}$.

La compacidad está íntimamente relacionada a la noción de conjunto cerrado como se puede ver en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.6 *Sea X un espacio topológico.*

i) *Si $F \subseteq X$ es cerrado y X compacto, entonces F compacto.*

ii) *Si X es T_2 y K es subespacio compacto de X, entonces K es cerrado.*

Demostración. $i)$ Sean X un espacio compacto, F un subconjunto cerrado de X y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de F. Note que tal $\mathcal{U}$ induce una familia de abiertos en X, digamos $\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F} \cup \{X \setminus F\}$ es una cubierta abierta de X, el cual es compacto, luego $\mathcal{F} \cup \{X \setminus F\}$ admite una subcubierta finita, digamos $\{X \setminus F, U_1, \ldots, U_n\}$; donde $U_i \in \mathcal{F}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces los conjuntos $U_i \cap Y \in \mathcal{U},\ i \in \{1,\dots,n\}$ y cubren a F, así $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita para F. Por tanto F es compacto

$ii)$ Supóngase ahora que X es Hausdorff y que K es un subespacio compacto de X. Probaremos que $X \setminus K$ es abierto. Sea $y \in X \setminus K$. Puesto que X es Hausdorff para cada $x \in K$ existen abiertos ajenos U_x y V_x tales que $x \in U_x$ y $y \in V_x$. Los conjuntos $\{U_x : x \in K\}$ forman una cubierta abierta para K, asíque existe una subcolección finita $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}\}$ la cual cubre a K. Sea $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ y $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$; claramente V es un abierto en X que contiene a y y, por otro lado $K \subseteq U$. Se afirma que $U \cap V = \emptyset$.

Efectivamente, supongamos que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces

$$(\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}) \neq \emptyset$$

lo cual implica que $(\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}) \cap U_{x_j} \neq \emptyset$ para algún $j \in \{1,\dots,n\}$, lo que a su vez implica $V_{x_i} \cap U_{x_j} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$; en particular para $i = j$. Lo cual contradice la elección de V_{x_i} y U_{x_j}. Por tanto $U \cap V = \emptyset$. Con lo que se termina la prueba.

Teorema 2.2.2 *Si X es Hausdorff y compacto, X es normal*.

Demostración. Primero demostraremos el siguiente hecho:

Si A es cerrado en X y $x \in X \setminus A$, entonces existen U y V abiertos ajenos tale que $x \in U$ y $A \subseteq V$.

Note que si A es cerrado en X, por la Proposición [cerrcom], se tiene que A es compacto. Por otro lado, puesto que X es Hausdorff, para cada $a \in A$ existen U_a y V_a

abiertos ajenos tales que $a \in U_a$ y $x \in V_a$. Obsérvese que $\mathcal{U} = \{U_a : a \in A\}$ es una cubierta abierta para A; luego, por ser A compactos, existen $U_{a_1}, \dots, U_{a_n} \in \mathcal{U}$ de tal manera que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$. Claramente $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$ son abiertos que satisfacen que $A \subset U$, $\{x\} \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Ahora sean A y B dos cerrados ajenos, no vacíos, en X. Note que para cada punto $b \in B$, existen vecindades U_b y V_b ajenas, para A y b respectivamente. Las colección $\mathcal{V} = \{V_b : b \in B\}$ es una cubierta abierta de B. El cual es compacto; luego, existen $V_{b_1}, \dots, V_{b_n} \in \mathcal{V}$ de tal forma que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}$. Tomando $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}$ y $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}$, se tienen dos abiertos ajenos para A y B.

Capítulo 3

Relativización

3.1. Axiomas de separación

Iniciamos nuestro estudio con un breve análisis de los axiomas de separación. En lo sucesivo, Y es un subconjunto no vacío del espacio topológico X.

Definición 3.1.1

(1) *Diremos que Y es T_1 en X si para todo $y \in Y$, el conjunto $\{y\}$ es cerrado en X.*

(2) *Diremos que Y **es Hausdorff en** X (o T_2 en X), abreviadamente Y es H en X, si para cualesquiera dos puntos diferentes y_1 y y_2 de Y existen dos subconjuntos abiertos y disjuntos, U y V de X tales que $y_1 \in U$ y $y_2 \in V$.*

(3) *Y **es Fuertemente Hausdorff en** X, abreviadamente Y es FH en X, si para cualesquiera dos puntos diferentes $y \in Y$ y $x \in X$; existen abiertos ajenos U y V en X tales que $y \in U$ y $x \in V$.*

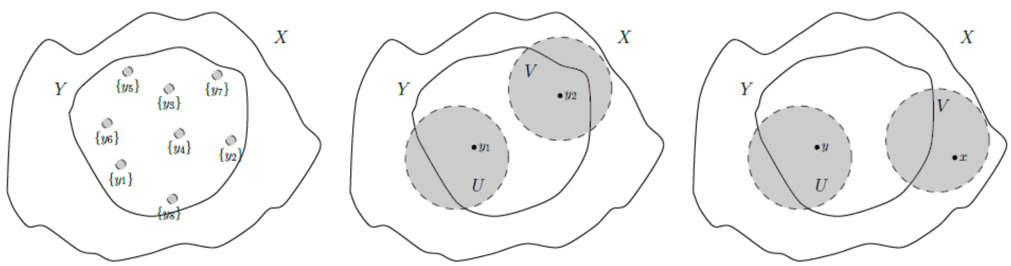
Algunos hechos que se desprenden inmediatamente de la definición anterior son:

1. Si X es un espacio T_i, para $i \in \{1,2\}$, entonces Y es T_i en X.

2. Si X es T_i, para $i \in \{1,2\}$, entonces Y es FH en X.

3. Si Y es FH en X, entonces Y es H en X.

(I4) Si Y es FH o H en X, entonces Y es T_1 en X.



(a) Y es T_1 en X, si $\{y\}$ es cerrado en X (b) Y es H en X. (c) Y es FH en X.

Figura 3-1: Diagrama del subespacio Y del espacio topológico X que cumple con el axioma de separación T_1, H o FH

En los ejemplos siguientes veremos que los recíprocos en estas implicaciones no son ciertas. Antes daremos un par de ejemplos para ilustrar que un espacio que no es T_i, puede tener subespacios T_i en X, para $i \in \{1,2\}$.

Ejemplo 3.1.1 Sean $X = \{a, b, c, d\}$ y $T_X = \{\phi, X, \{a, b\}, \{c, b\}, \{a\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c\}\}$. El espacio (X, T_X) no es T_1, porque $\{c\}$ no es cerrado en X, ya que $d \in X \setminus \{c\}$ y no hay un abierto U en X tal que $d \in U$ y $U \subseteq X \setminus \{c\}$. Vemos que el subconjunto $Y = \{b\}$ es T_1 en X. Para ésto, debemos ver que $\{b\}$ es cerrado en X, es decir, se debe verificar que $X \setminus \{b\}$ es abierto en X. Por lo que se tiene los casos siguientes:

Sea $x \in X \setminus \{b\}$

- Si $x = a$, $a \in \{a\} \subseteq X \setminus \{b\}$
- Si $x = c$, $c \in \{c, d\} \subseteq X \setminus \{b\}$
- Si $x = d$, $d \in \{c, d\} \subseteq X \setminus \{b\}$

Por lo tanto, por $i), ii), iii)$, Y es T_1.

Con todo, X, es un espacio que no es T_1 y $Y \subseteq X$ es un subespacio T_1 en X.

El ejemplo siguiente presenta un espacio, X, que no es Hausdorff con un subsespacio Y, el cual es Fuertemente Hausdorff (y por ende Hausdoff) en X

Ejemplo 3.1.2 Sean $X' = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, $q, p \notin X'$. Definimos una topología T_X sobre $X = X' \cup \{p, q\}$ como sigue:

(I5) ϕ y X son abiertos

(I6) Para cada $x \in X'$, $\{x\}$ es abierto

(I7) Para $x \in \{p, q\}$, las vecindades son $\{x\} \cup (X' \backslash Z)$; donde $Z \in [X']^{<\omega}$.

Primero veremos que X no es T_2. Para esto, vamos a mostrar que p y q no se pueden separar con vecindades ajenas. Consideremos los elementos básicos para p y q, siguientes: $U = \{p\} \cup (X' \backslash Z_1)$ y $V = \{q\} \cup (X' \backslash Z_2)$, donde $Z_1, Z_2 \in [X']^{<\omega}$. Entonces:

$$\begin{aligned} U \cap V &= [\{p\} \cup (X' \backslash Z_1)] \cap [\{q\} \cup (X' \backslash Z_2)] \\ &= [\{p\} \cap \{q\}] \cup [(X' \backslash Z_1) \cap (X' \backslash Z_2)] \\ &= [\phi] \cup [X' \cap (Z_1^c \cap Z_2^c)] \\ &= X' \backslash (Z_1 \cup Z_2) \end{aligned}$$

Tanto Z_1 como Z_2 son finitos entonces su unión será finita, por lo que $X' \backslash (Z_1 \cup Z_2) \neq \phi$, por lo consiguiente X no es T_2.

Ahora, sea $Y = X'$.

Afirmamos que Y es FH en X.

En efecto, sean $y \in Y$ y $x \in X$, como $y \in Y$, $U = \{y\}$ es un abierto del punto y, por lo consiguiente se tendrán dos casos:

- Si $x \in X'$, se reduce al caso que se encuentra el la parte de arriba.
- Si $x \in \{p, q\}$. Supongamos primero que $x = p$ y sea $V = \{x\} \cup (X' \backslash Z)$ una vecindad para el punto x, donde $Z = \{y\}$ entonces

$$U \cap V = \{y\} \cap [\{x\} \cup (X'\backslash Z)] = [\{x\} \cap \{y\}] \cup [\{y\} \cap (X'\backslash\{y\})] = \phi \cup \phi = \phi.$$

- El caso en que $x = q$, se justific de manera similar.

De lo anterior se concluye que Y es FH en X, y por ende Y es H en X.

En el ejemplo siguiente Y es un subconjunto T_1 en X, el cual no es H en X.

Ejemplo 3.1.3 Sean $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{Z}$, donde X es un conjunto que posee la topología cofinita o del complemento finito Revisemos primero que Y es un espacio T_1. Sea $y \in Y$ y afirmemos que $\{y\}$ es cerrado en X, pues dado que si A=$X\backslash\{y\}$, se tiene que $X\backslash A = X\backslash(X\backslash\{y\}) = \{y\}$ que es finito, lo que significa que A es abierto en X y por tanto $\{y\}$ es cerrado en X.

Sólo falta ver que Y no es H en X. Sean $y_1, y_2 \in Y$ dos elementos distintos de Y y U, V dos subconjuntos abiertos de X tales que $y_1 \in U$ y $y_2 \in V$. Supongamos que $U \cap V = \phi$ entonces $X = X\backslash\phi = X\backslash(U \cap V) = (X\backslash U) \cup (X\backslash V)$. Como U y V son abiertos entonces $X\backslash U$ y $X\backslash V$ son conjuntos finitos por lo que $(X\backslash U) \cup (X\backslash V) = X$ será finito, lo cuál no es cierto dado que X es un conjunto infinito. Por lo tanto Y no es T_2.

En el ejemplo siguiente presentamos un espacio X con un subconjunto Y el cual es H en X, pero no FH en X.

Ejemplo 3.1.4 Sea X el conjunto definido en el Ejemplo 3.1.2 y consideremos al conjunto $Y = X' \cup \{p\}$.

Verifiquemos primero que el espacio Y es T_1 en X, por lo que se tiene que demostrar que para todo $y \in Y$, el conjunto $\{y\}$ es cerrado en X.

Sea $y \in Y$. Se tiene los siguientes casos:

Caso 1 Si $y \in \{p\}$ entonces hay que ver que $X\backslash\{p\}$ es abierto en X. Sea $x \in X\backslash\{p\}$, entonces $x \in X'$ o $x \in \{q\}$

- Si $x \in X' \Rightarrow \{x\}$ es un abierto en X y $\{x\} \subseteq X \backslash \{p\}$
- Si $x \in \{q\} \Rightarrow \{q\} \cup (X \backslash Z)$ es un abierto para x, donde $Z \in [X']^{<\omega}$ y $x \in [\{q\} \cup (X \backslash Z)] \subseteq X \backslash \{p\}$.

Caso 2 Si $y \in X'$, entonces hay que revisar que $X \backslash \{y\}$ es abierto en X. Sea $x \in X \backslash \{y\}$, entonces $x \in X'$ o $x \in \{p, q\}$

2. 1 Si $x \in X' \Rightarrow \{x\} \subseteq X \backslash \{y\}$, con $\{x\}$ abierto de x y $y \notin \{x\}$.

2. 2 Si $x \in \{p, q\}$. Supongamos que $x = p$ entonces el conjunto $\{p\} \cup (X \backslash Z)$, es abierto para el punto x, definamos a $Z = \{y\}$ entonces $x \in [\{p\} \cup (X \backslash Z)] \subseteq X \backslash \{y\}$

Por lo tanto, por el Caso 1 y 2, el conjunto Y es T_1 en X.

Seguiremos por verificar que Y es H en X.

Sean $x, y \in Y$ con $x \neq y$, revisemos los casos siguientes:

Caso 1 Si $x \in \{p\} \Rightarrow y \in X'$, sean $U = \{p\} \cup (X \backslash Z)$, donde $Z = \{y\}$, un abierto para el punto x y $V = \{y\}$ un abierto para y entonces

$$U \cap V = [\{p\} \cup (X \backslash Z)] \cap \{y\} = [\{p\} \cup (X \backslash \{y\})] \cap \{y\} = \phi$$

Caso 2 Si $x \in X'$ entonces se dan dos casos posibles:

2. 1 $y \in X'$. Como $x, y \in X' \Rightarrow U = \{x\}, V = \{y\}$ son abiertos para los dos puntos en X, por lo que $U \cap V = \{x\} \cap \{y\} = \phi$

2. 2 $y \in \{p\}$. Es similar al Caso 1, invirtiendo los elementos x, y.

Por lo anterior, el espacio Y es H en X.

Finalmente, debido a que los puntos $p \in Y$ y $q \in X$ no tienen vecindades ajenas en X, concluimos que Y no es FH.

Por lo tanto, el espacio Y no es FH en X pero si T_2 en X.

El diagrama siguiente resume las relaciones que se establecen cuando Y cumple alguno de los axiomas de separación dados anteriormente.

$$Y \text{ es FH en } X \quad \Rightarrow \quad Y \text{ es } H \text{ en } X \quad \Rightarrow \quad Y \text{ es } T_1 \text{ en } X$$

Pasamos ahora al siguiente axioma de separación: Regularidad. Este axioma admite diversas versiones relativas, como veremos a continuación:

Definición 3.1.2 *Sea X un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Diremos que Y es:*

(I8) ***Regular*** *en X, abreviadamente Y es R en X, si para cada $y \in Y$ y cada subconjunto cerrado P de X, tal que $y \notin P$, existen abiertos ajenos U y V de X tales que $y \in U$ y $P \cap Y \subseteq V$*

(I9) ***Fuertemente regular*** *en X, abreviadamente Y es FR en X, si para cada punto $x \in X$ y cada subconjunto cerrado P de X, que no contiene a x, existen conjuntos abiertos disjuntos U, V de X tal que $x \in U$ y $P \cap Y \subset V$.*

(I10) ***Internamente regular*** *en X, abreviadamente Y es IR en X, si para cada $y \in Y$ y cada subconjunto A de Y, el cual es cerrado en X y tal que $y \notin A$ existen conjuntos abiertos disjuntos U, V en X tal que $y \in U$ y $A \subset V$.*

(I11) ***Superregular*** *en X, abreviadamente Y es SR en X, si para todo $y \in Y$ y cada subconjunto cerrado P de X tal que $y \notin P$, existen conjuntos abiertos disjuntos U, V de X tal que $y \in U$ y $P \subset V$.*

Es inmediato de la definición, que si X es un espacio regular, entonces cualquier subconjunto Y de X satisface cualquiera de las nociones dadas en la definición anterior.

Teorema 3.1.1 *El esquema siguiente establece las relaciones que existen entre las nociones de la definición anterior*.

$$
\begin{array}{ccccc}
Y \text{ es FR en } X & \Rightarrow & Y \text{ es R en } X & \Rightarrow & Y \text{ es IR en } X \\
 & & \Uparrow & & \\
 & & Y \text{ es SR en } X & &
\end{array}
$$

Demostración.

1) Primeramente veremos que si Y es FR en X, entonces Y es R en X. Sea $y \in Y$ y P un conjunto cerrado de X tal que $y \notin P$ como $y \in X$ y Y es FR entonces existen abiertos ajenos U, V de X talque $y \in U$ y $P \cap Y \subset V$.

2) Ahora veremos que si Y es R en X, entonces Y es IR en X. Sean $y \in Y$, $A \subseteq Y$ tal que A es cerrado en X y que no contiene a y. Como Y es regular en X se cumple que existen dos conjuntos abiertos disjuntos U, V de X tal que $y \in U$ y $A \cap Y \subset V$, además se tiene que $A \subset Y$, $A \cap Y = A$ y $A \cap Y \subset V$ entonces $A \subset V$. Por lo tanto Y es IR en X.

3) Para concluir, mostraremos que si Y es SR en X, entonces Y es R en X. Sea $y \in Y$ y P un cerrado en X tal que $y \notin P$, como Y es SR en X existen U, V abiertos ajenos en X tales que $y \in U$ y $P \subset V$, en particular $P \cap Y \subset P \subset V$, por lo tanto Y es R en X.

La pruebas están completa.

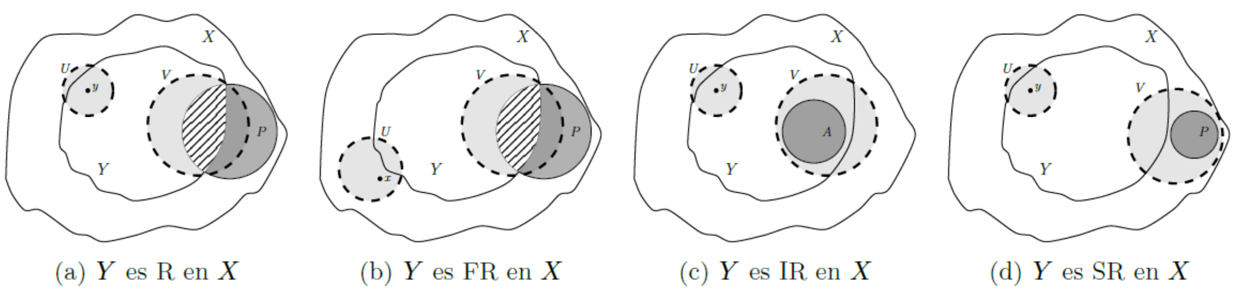


Figura 3-2: Diagrama del subespacio Y de un espacio topológico X que cumple con ser P en X, donde $P \in \{R, FR, IR, SR\}$

Los recíprocos en el teorema anterior no se cumplen como se puede observar en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 3.1.5 Consideremos el espacio X definido en el Ejemplo 3.1.2 y agreguemos un nuevo punto $\{z\}$; donde $z \notin \mathbb{R}$, para construir el espacio $Z = X \cup \{z\}$. Tomamos como base local para z a la colección formada por los conjuntos de la forma $U \cup \{z\}$; donde U es un abierto en $\mathbb{R}$ tal que $(P \backslash \mathcal{K}) \subset U$ y $\mathcal{K} \in [P]^{<\omega}$.

Entonces X es IR en Z y no es regular en Z.

Veamos, primeramente que X no es regular en Z. Tomemos $0 \in X$ y $F = P \cup \{z\}$. Notemos que F es cerrado en Z. Ahora sean U_0 y U_F abiertos ajenos en Z tal que $0 \in U_0$ y $F \cap X \subseteq U_F$. Claramente $U'_F = X \cap U_F$ es un abierto en X ajeno a $U'_0 \cap C$ y $0 \in U'_0$ y $P \subseteq U'_F$ pues Y no es regular en X.

Ahora veamos que X es IR en Z. Sea $x \in X$ y $F \subseteq X$ cerrado en Z. Por demostrar que existen U_F y U_F abiertos ajenos en Z tal que $x \in U_x$ y $F \subseteq U_F$. Note que si $F \subseteq X$ es cerrado en Z implicaría que $z \notin F$, de lo contrario $z \in X$, lo cual no es posible. Además $P \nsubseteq F$, si no se cumpliera, es decir, si $P \subseteq F$ implicaría que $z \in F$ ya que z es punto de acumulación de P, por lo que también sería punto de acumulación de F en Z entonces $z \in Cl_z(F) = F \subseteq X$ por lo tanto nos diría que $z \in X$, lo que no es cierto por como tomamos a Z. Por lo consiguiente no nos interesa saber quien es F. Así, si $x \notin F$ entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $x \in [a, b]$ y $[a, b] \cap F = \phi$, donde $U_x = (a, b)$ y $U_F = Z \backslash [a, b]$ son abiertos ajenos en Z tal que $x \in U_x$ y $F \subseteq U_F$. Por lo tanto X es IR en Z .

Una cuestión natural es ¿qué relación hay entre la regularidad de Y, y el hecho de que Y satisfaga alguna de las nociones dadas en la Definición 3.1.2?

Proposición 3.1.1 *Si $Y \subseteq X$ es P en X, para $P \in \{R, FR, IR, SR\}$, entonces Y es un espacio regular.*

Demostración. Puesto que las demostraciones son muy similares, haremos solamente la prueba para el caso en que Y es R en X.

Sean $y \in Y$ y F cerrado en Y tal que $y \notin F$. Como F es cerrado en Y, existe F' cerrado en X tal que $F = F' \cap Y$, además $y \notin F'$, puesto que si $y \in F'$ se tendría que $y \in F$, lo cual no se cumple.

Ahora bien, dado que $y \in Y$, F' es cerrado en X y Y regular en X, existen U' y V' abiertos ajenos en X tales que $y \in U'$ y $F' \cap Y \subset V'$. Definamos $U = U' \cap Y$ y $V = V' \cap Y$ abiertos en Y. Entonces, $U \cap V = (U' \cap Y) \cap (V' \cap Y) = (U' \cap V') \cap Y = \phi$. Además, $F \subset F' \cap Y \subset V'$ y $F \subseteq Y$ entonces $F \subseteq V' \cap Y = V$, de donde $F \subseteq V$. Sabemos que y es un elemento tanto de Y y U' lo que implica que $y \in (U' \cap Y) = U$ y así $y \in U$. Por lo tanto Y es regular.

De la proposición anterior nace la pregunta siguiente: ¿Es cierto que si Y es un espacio regular, con la topología de subespacio, entonces Y es P en X, para $P \in \{R, FR, IR, SR\}$?

La respuesta es trivialmente cierta para el caso $P = IR$; es decir, Si $Y \subseteq X$ regular, con la topología de subespacio, entonces Y es IR en X.

El ejemplo siguiente muestra que la respuesta es negativa para $P \in \{FR, R\}$.

Ejemplo 3.1.6 Definimos los siguientes conjuntos $P = \{\frac{1}{n+1} : n \in \omega\}$, $X = \mathbb{R}$ y $Y = P \cup \{0\}$. Una subbase para la topología de $\mathbb{R}$ son los intervalos abiertos de la forma (a, b) con $a < b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ y el conjunto $\mathbb{R} \backslash P$.

Se revisará que el subespacio Y es regular, pero Y no es regular en X.

Veamos primero que Y es regular (como subespacio de X). Sea $y \in Y$ entonces $y \in P$ o $y \in \{0\}$.

i) Si $y \in P$ implica que $y = \frac{1}{n+1}$. Se tiene que $n < n+1 < n+2$ para $n \in \omega \backslash \{0\}$ entonces $b = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} = a$. Tomemos el intervalo formado por los puntos a y b, entonces $(a, b) \cap Y = \{\frac{1}{n+1}\}$

ii) Si $y \in \{0\}$. Un abierto para este punto es $\mathbb{R} \backslash P$, entonces $(\mathbb{R} \backslash P) \cap Y = \{0\}$

Por los incisos i), ii) se tiene que Y es discreto y por lo tanto Y es regular.

Ahora veamos que Y no es regular en X. Se quiere ver que si $y \in Y$, F un cerrado en Y tal que $y \notin F$, no existen abiertos ajenos U, V de X tales que $y \in U$ y $F \cap Y \subset V$.

El conjunto P es cerrado en X ya que $\mathbb{R} \backslash P$ es abierto en X, el punto $0 \in Y$ y $0 \notin P$. Además si U y V son abiertos en X tal que $0 \in U$ y $P \subseteq V$ entonces $U \cap V \neq \phi$

Tomemos $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ con $a_0 < 0 < b_0$ tal que $(a_0, b_0) \backslash P \subseteq U$. Por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{b_0} < n_0 + 1$ entonces $\frac{1}{n_0+1} \in (a_0, b_0) \cap V$, pues $a_0 < 0 < \frac{1}{n_0+1} < b_0$ por lo tanto $\frac{1}{n_0+1} \in (a_0, b_0)$ y $\frac{1}{n_0+1} \in P \subseteq V$). Luego, existen $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{n_0+1} \in (a_2, b_2) \subseteq (a_0, b_0) \cap V$. Fijemos $q \in (a_2, b_2) \cap (\mathbb{Q} \backslash P)$. Como $(a_2, b_2) \subseteq (a_0, b_0) \cap V$, $q \in V$ además $q \in (a_0, b_0) \backslash P \subseteq U$.Entonces $q \in U \cap V$.

Se concluye que 0 y P no se pueden ser separados con abiertos ajenos en X. Por lo tanto Y no es regular en X.

Para terminar con la parte de regularidad relativa, analizaremos las implicaciones naturales, referentes a la bien conocida implicación: Regular implica Hausdorff.

Teorema 3.1.2 *Sea Y subespacio del espacio X, tal que Y es regular en X entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

1) Y es T_2 en X

2) Y es FH en X

Demostración. Sea $Y \subseteq X$ y Y regular en X

1) Sean $x, y \in Y$ tal que $x \neq y$ y $F = \{x\}$ cerrado en X (esto porque X es T_1), con $y \notin \{x\}$. Como Y es R en X, existen U, V abiertos ajenos de X tal que $y \in U$ y $\{x\} \cap Y \subset V$, en particular $x \in \{x\} \subset V$ Por lo tanto Y es T_2 en X.

2) Sean $x \in X, y \in Y$ tal que $x \neq y$. Entonces $\{x\}$ es un cerrado en X tal que $y \notin \{x\}$, como Y es regular en X existen abiertos ajenos U y V tal que $y \in U$ y $Y \cap \{x\} \subseteq V$. Luego $y \in U$ y $x \in V$ con U y V ajenos. Por lo tanto Y es FH en X.

La prueba está completa.

El ejemplo siguiente prueba que ser FH no implica la regularidad de Y en X.

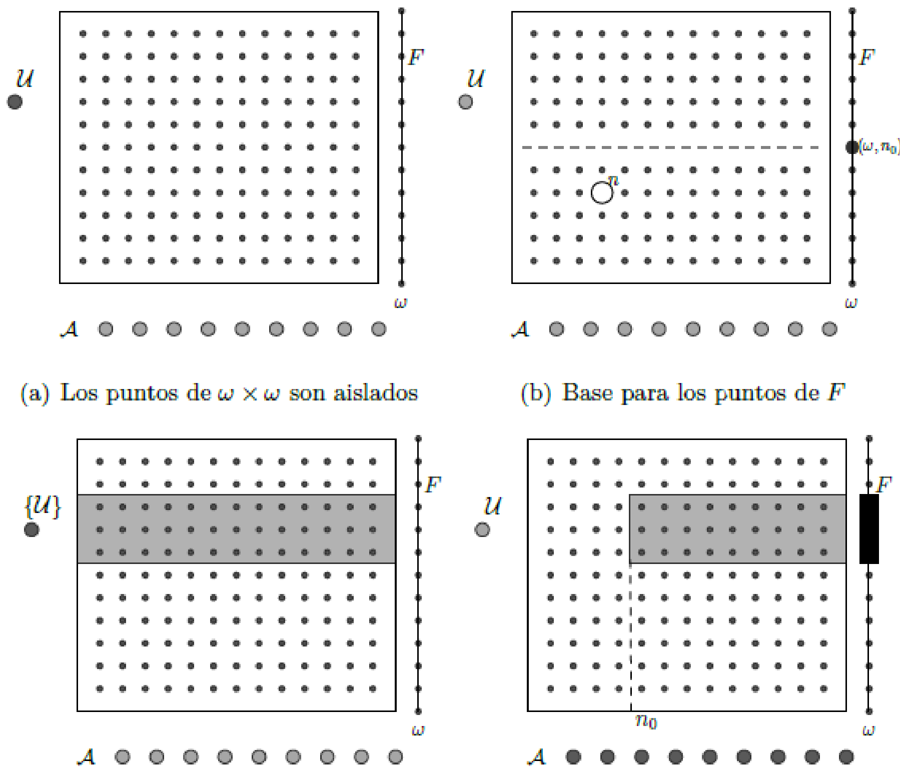
Ejemplo 3.1.7 Fijemos un ultrafiltro libre $\mathcal{U}$ y una familia maximal casi ajena (MAD), $\mathcal{A}$, sobre ω con $\mathcal{A} \cap \mathcal{U} = \phi$, como en el Lema 8 en . Sea $Y = \{\mathcal{U}\} \cup ((\omega + 1) \times \omega)$ y $F = \{\omega\} \times \omega$. Considere el conjunto $X = Y \cup \mathcal{A}$ con la siguiente topología:

1) Los puntos de $\omega \times \omega$ son aislados.

2) $\{[(\omega + 1)\backslash n] \times \{n_0\} | n \in \omega\}$.

3) $\{\{\mathcal{U}\} \cup (\omega \times U) | U \in \mathcal{U}\}$ es una base abierta en Y y

4) $\{\{A\} \cup [(\omega + 1) \times (A \backslash n_0)] | n_0 \in \omega\}$ son una base abierta para los puntos de $\mathcal{A}$.



(a) Los puntos de $\omega \times \omega$ son aislados

(b) Base para los puntos de F

(c) Vecindad de $\mathcal{U}$

(d) Base abierta para los puntos de $\mathcal{A}$

Figura 3-3: Topología del espacio $X = Y \cup \mathcal{A}$

Notemos que X es un espacio Hausdorff, con un subespacio Y que no es regular dado que el conjunto cerrado F de Y no puede ser separado de $\mathcal{U}$, por lo tanto Y no es regular en X. Además, Y es internamente compacto en X (ver Ejemplo 9 en [10]). Afirmemos que Y^+ es fuertemente Hausdorff en 2^X. En efecto, sea $F_1 \in Y^+$ y $F_2 \in 2^X$ con $F_1 \neq F_2$. Si $F_2 \in Y^+$, dado que Y es internamente compacto en X, es fácil obtener una separación en 2^X para los puntos F_1 y F_2. Por lo consiguiente, supongamos que $F_2 \notin Y^+$. Sea $A \in (F_2 \backslash Y) \cap \mathcal{A}$. Ahora, para cada $f \in F_1$ podemos elegir una base de vecindades U_f en X tal que $A \notin U_f$. Entonces, $F_1 \subseteq \bigcup_{i\leq n} U_{f_i}$ donde cada $f_i \in F_1$. El caso principal en cuando $f_i = \mathcal{U}$ para algún $i \leq n$. Sin perdida de generalidad supongamos que $f_1 = \mathcal{U}$ y que

$$\bigcup_{i\leq n} U_{f_i} = \cup[((\omega+1)\backslash n_0^i) \times \{n_i\}] \cup \bigcup_{k<i\leq n} \{(n_i, m_i)\}$$

y $U_{f_i} = \{\mathcal{U}\} \cup (\omega \times U)$ donde, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, $U \cap A = \phi$. Finalmente, dados $n_d = max\{n_0^i, n_i, m_i | i \leq n\}$, $W_1 = \bigcup_{i\leq n} U_{f_i}$ y $W_2 = \{A\} \cup [(\omega+1) \times (A\backslash n_d)]$. Entonces $F_1 \in W_1^+, F_2 \in W_2^-$ y $W_1 \cap W_2 = \phi$. Por lo que, Y^+ es fuertemente Hausdorff en 2^X.

A continuación centraremos nuestra atención al caso del axioma de separación llamado: Normalidad.

Definición 3.1.3 *Sea $Y \subseteq X$ un espacio topológico.*

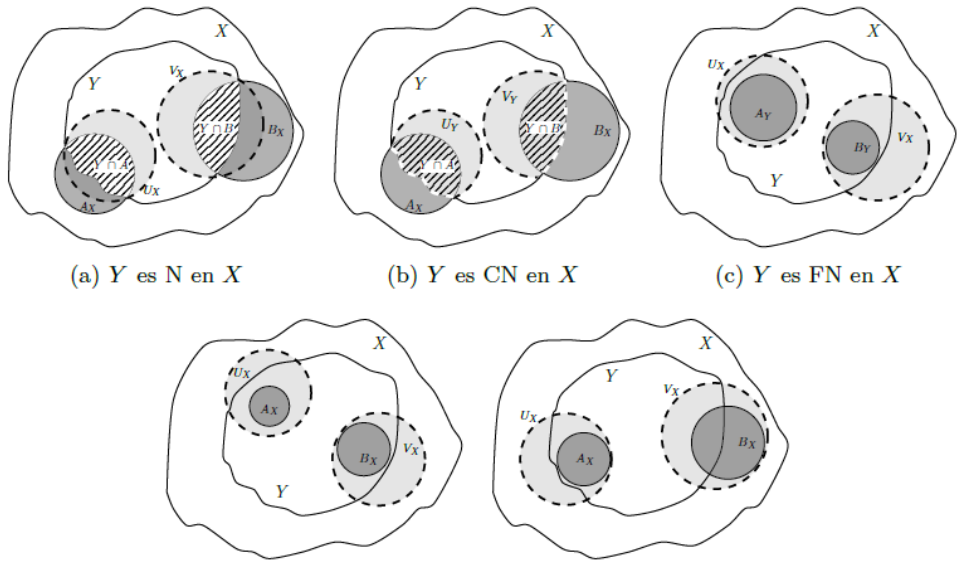
*(1) Y **es Normal en** X(abreviadamente Y es N en X) si cualquier par de conjuntos A, B, ajenos y cerrados en X, existen dos conjuntos abiertos disjuntos U y V en X tal que los conjuntos $A \cap Y \subseteq U$ y $B \cap Y \subseteq V$.*

*(2) Y **es Casi Normal en** X (abreviadamente Y es CN en X) si para cualquier par de conjuntos A, B, ajenos y cerrados en X, existen dos subconjuntos abiertos y ajenos U y V en Y tales que $A \cap Y \subseteq U$ y $B \cap Y \subseteq V$.*

*(3) Y **es Fuertemente Normal en** X (abreviadamente Y es FN en X) si cualquier par de conjuntos A, B, ajenos y cerrados en Y, existen dos subconjuntos abiertos y disjuntos U y V de X tal que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

*(4) Y **es Internamente Normal en** X (abreviadamente Y es IN en X) si para cada $A \subseteq Y$ y $B \subseteq Y$, los cuales son subconjuntos cerrados y ajenos en X , existen dos conjuntos abiertos y disjuntos U, V en X tales que de los conjuntos $A \subset U$ y $B \subset V$.*

*(5) Y **es Supernormal en** X (abreviadamente Y es SN en X) si para cada par de conjuntos cerrados y ajenos A, B en X, con $A \subseteq Y$, existen un par de conjuntos abiertos y ajenos en X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.*



(a) Y es N en X (b) Y es CN en X (c) Y es FN en X

(d) Y es IN en X (e) Y es SN en X

Figura 3-4: Diagrama del subespacio Y de un espacio topológico X que cumple con ser P en X, donde $P \in \{N, CN, FN, IN, SN\}$.

Es inmediato de la definición anterior que si X es un espacio normal y Y es subconjunto de X, entonces Y es P en X, para $P \in \{N, CN, FN, IN, SN\}$.

En el resultado siguiente presentamos las relaciones existentes entre estas nociones.

Lema 3.1.1 *Sean X un espacio y Y un subconjunto de X, Las afirmaciones siguientes se verifican.*

1) Si Y es FN en X, entonces Y es Normal en X.

2) Si Y es Normal en X, entonces Y es IN en X.

3) Si Y es Normal en X, implica que Y es CN en X.

4) Si Y es SN en X, entonces Y es IN en X.

Demostración.

1) Sean A y B cerrados ajenos en X. Denominemos $A' = A \cap Y$ y $B' = B \cap Y$, los cuales son cerrados y ajenos en Y. Como Y es FN en X, sabemos que existen dos subconjuntos abiertos disjuntos, U y V en X tal que $A \cap Y = A' \subset U$, $B \cap Y = B' \subset V$. Por lo tanto Y es normal.

2) Sea A y B dos subconjuntos de Y, los cuales son cerrados y ajenos en X, como Y es IN en X entonces existen U y V conjuntos abiertos y disjuntos en X tal que $A \cap Y \subseteq U$ y $B \cap Y \subseteq V$, en particular $A = A \cap Y \subseteq U$ y $B = B \cap Y \subseteq V$. Por lo tanto, Y es IN en X.

3) Supongamos que Y es normal en X. Sean A y B dos subconjuntos cerrados y ajenos en X, como Y es normal en X implica que hay dos abiertos ajenos U y V en X tales que $A \cap Y \subseteq U$ y $B \cap Y \subseteq V$, también se tiene que $U \cap Y = U'$ y $V \cap Y = V'$ los cuales son subconjuntos abiertos y ajenos en Y. Además $A \cap Y \subset U \cap Y = U'$ y $A \cap Y \subset V \cap Y = V'$. Por lo tanto Y es CN en X.

4) Sean $A, B \subseteq Y$ los cuales son cerrados y ajenos en X, Y es SN por lo que hay dos subconjuntos U y V abiertos y ajenos en X tal que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, por lo que se concluye que Y es IN en X.

La prueba está completa.

El siguiente esquema representa las relaciones que se desprenden, según el lema anterior.

$$\begin{array}{ccccc} Y \text{ es FN en } X & \Rightarrow & Y \text{ es N en } X & \Rightarrow & Y \text{ es IN en } X \\ & & \Downarrow & & \Uparrow \\ & & Y \text{ es CN en } X & & Y \text{ es SN en } X \end{array}$$

Los recíprocos de las relaciones que se establecen en el lema [relanorm] no se cumple, para lo cual revisaremos el ejemplo siguiente. Donde obtendremos un espacio X que contenga un subespacio Y el cual sea IN en X pero no sea SN en X, con lo que partiremos con el Deleted Tychonoff Plank.

Ejemplo 3.1.8 *(Deleted Tychonoff Plank*). Si ω_1 es el primer ordinal no numerable y ω es el primer ordinal infinito, entonces el Tychonoff Plank T esta definido como $[0,\omega_1] \times [0,\omega]$, donde la topología de ambos espacios esta dada por la topología de intervalos. El subespcaio $X = [0,\omega_1] \times [0,\omega] \backslash \{\omega_1,\omega\}$, es llamado el deleted Tychonoff Plank.

Recordemos que X es un espacio Tychonoff que no es normal, debido a que los conjuntos $A = \{(\omega_1,n)|0 \leq n < \omega\}$ y $B = \{(\alpha,\omega)|0 \leq \alpha < \omega_1\}$, son cerrados y ajenos en X los cuales no tienen una separación en X. Esto ocurre dado que, si suponemos que $U \subset X$ es una vecindad de A. Para cada punto $(\omega_1,n) \in A$ hay un ordinal $\alpha_n < \omega_1$ tal que $\{(\alpha,n)|\alpha_n < \alpha \leq \omega_1\} \subset U$.

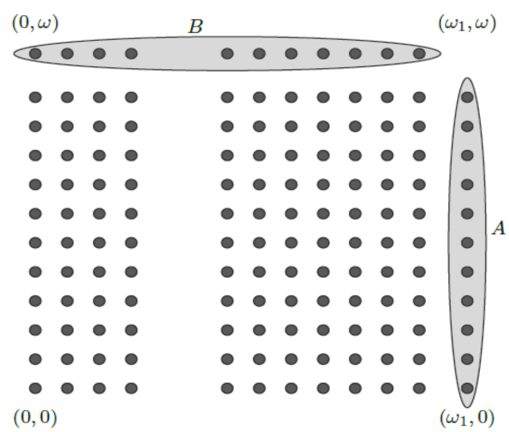


Figura 3-5: Deleted Tychonoff Plank

Sea $\overline{\alpha}$ el límite superior para los α_n; como es un ordinal se cumple que $\overline{\alpha} < \omega_1$, puesto que ω_1 tiene innumerables predecesores mientras que $\overline{\alpha}$ tiene un número contable de ellos. Así el conjunto $(\overline{\alpha},\omega_1] \times [0,\omega) \subset U$. Así, cualquier vecindad de $(\overline{\alpha}+1,\omega) \in B$ debe de intersecarse en U. En consecuencia, cualquier vecindad V de B interseca a U.

Tomemos a $Y = A \cup \{(0,1),(0,2),(0,3)\}$. Es claro que Y es IN en X, esto se cumple puesto que para cada par de ordinales $\alpha,\beta \in \omega$ con $\alpha \neq \beta$, podemos encontrar un intervalo que los separe.

Por último, revisemos que Y no es SN en X, esto se cumple si tomamos los conjuntos A,B definidos anteriormente, donde $A \subseteq Y$ y $B \subset X$, los cuales son conjuntos cerrados y ajenos que no pueden ser separados por vecindades ajenas.

El teorema que presentamos a continuación, es una versión relativizada de la conocida versión para la normalidad.

Teorema 3.1.3 *Si Y es un subespacio de X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) Y es es supernormal en X.

2) Para cada $A \subseteq Y$ cerrado en X y cada conjunto U abierto en X que contenga a A, existe un conjunto V abierto en X tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Demostración.

$1) \Longrightarrow 2)$ Supongamos que Y es SN en X. Sean $A \subseteq Y$ un cerrado en X y U un subconjunto abierto en X tal que $A \subseteq U$. Notemos que A y $X \backslash U$ son conjuntos ajenos los cuales son cerrados en X. Entonces sea V y W dos conjuntos abiertos y ajenos en X tal que $A \subset V$ y $X \backslash U \subset W$, por lo que $A \subseteq V \subseteq \overline{V}$. Revisemos que $V \cap W = \phi$, es decir, hay que verificar que $\overline{V} \cap W = \phi$, si no ocurre existe $x \in \overline{V} \cap W$, lo que significa que $x \in \overline{V}$ y $x \in W$, entonces $x \in V \cap W$ que es una contradicción, por lo anterior $\overline{V} \cap W = \phi$, como consecuencia $\overline{V} \cap (X \backslash U) = \phi$ así $\overline{V} \subseteq U$. Por lo tanto $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

$1) \Longrightarrow 2)$ Sean A y B dos conjuntos cerrados y ajenos en X tal que $A \subseteq Y$. Dado que $A \subseteq X \backslash B$ abierto en X, existe un subconjunto abierto V en X tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \backslash B$, notemos que $\overline{V}$ es cerrado en X y $X \backslash \overline{V}$ es abierto en X que contiene a B. Tomando a $U_A = X \backslash B$ y $V_B = X \backslash \overline{V}$, donde $U_A \cap V_B = \phi$, se llega a que hay dos subconjuntos U_A y V_B los cuales son abiertos y ajenos en X que separan a A y a B.

La prueba está completa.

El siguiente ejemplo es el caso de un subespacio Y de un espacio topológico X el cual es normal pero no es normal en X.

Ejemplo 3.1.9 *(Plano de Niemytzki o plano Moore)* Constituido por el espacio $X = P \cup Y$, donde $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, con la topología Euclideana T_e y el conjunto $Y = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Esto es, $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$, definimos la topología T_e^* que genera al espacio X agregando a τ

los conjuntos de la forma $\{z\} \cup D$, donde $z \in Y$ y D es un disco abierto en P, el cual es tangente a Y en el punto z.

Revisemos que el espacio Y es cerrado y discreto. Sea $z \in X\backslash Y$, con $z = (a, b), b > 0$, entonces hay un disco $D(z, \frac{|b|}{2})$ tal que $z \in D(z, \frac{|b|}{2}) \subseteq X\backslash Y$ y $D(z, \frac{|b|}{2}) \cap Y = \phi$, por lo que z no puede ser punto de acumulación de Y. Por otra parte, sea $z \in Y$, entonces hay un abierto $\{z\} \cup D$ de z, donde D es un disco abierto en P el cual es tangente a Y en el punto z, por lo que $(\{z\} \cup D) \cap Y = \{z\}$. Por lo tanto, Y es un conjunto cerrado y discreto. Además, puesto que para cada $y \in Y$, una base de vecindades para y contiene solo un punto de Y, se concluye que todo subconjunto de Y es cerrado. Por lo anterior, se puede concluir que Y es normal.

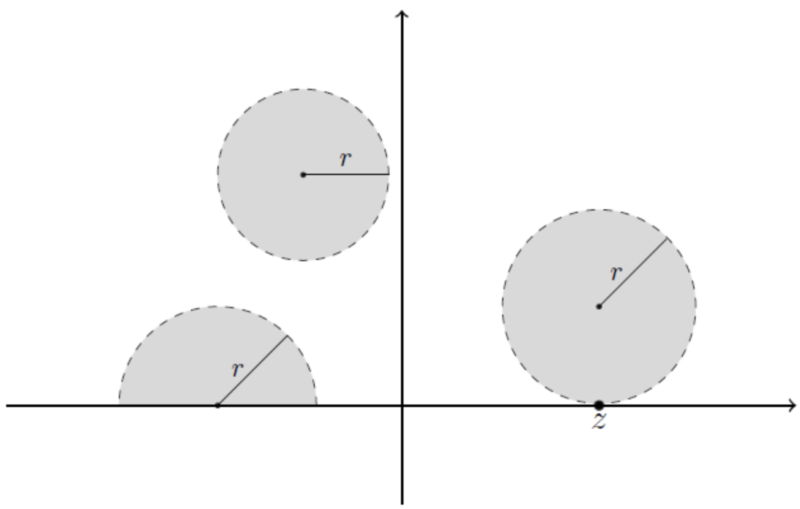


Figura 3-6: Abiertos en el Plano de Niemytzki

Se quiere ver que Y no es SN en X , por lo que tomemos el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ y el de los irracionales $\mathbb{I}$, los cuales son dos subconjuntos de Y, que son ajenos y cerrados. Sea U y V dos conjuntos abiertos en X tales que $\mathbb{Q} \subset U$ y $\mathbb{I} \subset V$. Para cada punto $y \in \mathbb{I}$ le corresponde un disco $D_y \subset V$ de radio r_x tangente a Y en el punto y, definamos el

conjunto $S_n = \{x \in \mathbb{I} | r_x > 1/n\}$. Entonces la colección $\{S_n\}$ junto con los puntos de $\mathbb{Q}$ forman una cubierta contable del espacio (Y, τ), donde τ es la topología Euclidiana, el cual es de segunda categoría. Por lo tanto, algunos de los conjuntos S_n fallan en ser densos en ninguna parte en (Y, τ), por lo que para un entero n_0 hay un intervalo $(a, b) \subset Y$ en el cual $\{y \in Y | r_y > \frac{1}{n_0}\}$ es denso.

Entonces cada vecindad para cada uno de los racionales en (a, b) debe de intersecar V, por lo que U y V no pueden ser ajenos.

3.2. Compacidad relativa

Una de las propiedades de cubiertas más conocidadas y estudiadas en topología es la propiedad de compacidad. En esta sección haremos un breve estudio sobre la relativización de la compacidad.

Definición 3.2.1 *Y es* ***compacto*** *en X si y solo si para toda cubierta abierta de X existe una subcubierta finita de X para Y.*

El siguiente resultado surge de forma inmediata de la definición de compacidad.

OBSERVACIÓN:

3.1 Si Y es compacto en X y $Y = X$ entonces X es compacto.

3.2 Si Y es compacto en X y Z es un subconjuto arbitrario de Y, entonces Z es compacto en X.

Ejemplo 3.2.1 Sean $X = [-1,0] \cup \mathbb{N}$ con la topología de subespacio en $\mathbb{R}$. Note que $\mathbb{N}$ es un subespacio cerrado, discreto e infinito en X; luego, X no puede ser compacto. Sin embargo, $Y = [-1,0]$ resulta compacto en X (pues Y es compacto).

El lema siguiente proporciona una caracterización de la compacidad relativa.

Lema 3.2.1 *Y es compacto en X si y sólo si Y es compacto en $\overline{Y}^X$.*

($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\overline{Y}^X$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, existe V_U abierto en X tal que $U = \overline{Y}^X \cap V_U$. Denominemos $\mathcal{V} = \{V_U : U \in \mathcal{U}\} \cup \{X \setminus \overline{Y}^X\}$. Claramente $\mathcal{V}$ es cubierta bierta de X, por hipótesis existe una subcubierta $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ tal que $Y \subseteq \bigcup \mathcal{W}$. Por lo tanto Y es compacto en $\overline{Y}^X$.

(⇐) Sea $\mathcal{U}$ cubierta abierta de X. Notar que $\overline{Y}^X \subseteq X$. Denotemos a $\mathcal{U}' = \{U \cap \overline{Y}^X : U \in \mathcal{U}\}$, donde $\mathcal{U}'$ es una cubierta abierta de $\overline{Y}^X$. Como Y es compacto en $\overline{Y}^X$, existe $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}'$ tal que $Y \subseteq (U_1 \cap \overline{Y}^X) \cup (U_2 \cap \overline{Y}^X) \cup (U_3 \cap \overline{Y}^X) \cap \ldots \cup (U_n \cap \overline{Y}^X)$, es decir $Y \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (U_k \cap \overline{Y}^X)$, por tanto Y es compacto en X.

La prueba está completa.

Una de las caracterizaciones bien conocidas para la compacidad es aquélla que involucra a la propiedad de la intersección finita. El teorema siguiente presenta una versión relativizada de este hecho.

Teorema 3.2.1 Y es compacto en X si y sólo si toda familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Y que cumple la PIF, se cumple que $\bigcap\{\overline{\mathrm{P}}^{\mathrm{X}} : \mathrm{P} \in \mathcal{C}\} \neq \phi$.

Demostración.

(⇒) Por contradicción, supongamos que existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ y cumple la PIF tal que $\bigcap\{\overline{P}^X : P \in \mathcal{C}\} = \phi$. Notar que $X \subseteq \bigcup\{X \backslash \overline{P}^X : P \in \mathcal{C}\}$. Sea $x \in X$, tal que $x \notin \bigcap\{\overline{P}^X : P \in \mathcal{C}\}$, por lo que existe $P' \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin X \backslash \overline{P'}^X$ entonces $x \in X \backslash \overline{P'}^X$. Como Y es compacto en X, existen $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \in \mathcal{C}$ y cada $P_i \subseteq Y$, tal que $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (X \backslash \overline{Y_i}^X)$. Ahora $\bigcap_{k=1}^{n} P_i \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \overline{P_i}^X \subseteq X \backslash Y$, además de que $\bigcap_{k=1}^{n} P_i \subseteq Y$ lo que implicaría que $\bigcap_{k=1}^{n} P_i = \phi$ lo cual no puede ocurrir ya que $\mathcal{C}$ cumple con la PIF.

(⇐) Por contradicción, supongamos que Y no es compacto en X, es decir, existe $\mathcal{U}$ cubierta abierta de X tal que no existe una subcubierta finita para Y. Sea $\mathcal{C} = \{Y \cap (X \backslash U) : U \in \mathcal{U}\}$. Afirmamos que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ es una familia de subconjuntos de Y puesto que para cada $U \in \mathcal{U}$ se tiene que $Y \cap (X \backslash U) \subseteq Y$. Además sea $[Y \cap (X \backslash U_1)] \cap [Y \cap (X \backslash U_2)] = Y \cap [X \backslash (U_1 \cup U_2)]$. Supongamos que $Y \cap [X \backslash (U_1 \cup U_2)] = \phi$ entonces $Y \subseteq U_1 \cup U_2$ lo cual no es posible ya que Y no es compacto en X. Por lo tanto $\mathcal{C}$ cumple con la PIF. De la hipótesis, $\bigcap\{\overline{P}^X : P \in \mathcal{C}\} \neq \phi$, además $\bigcap\{\overline{P}^X : P \in \mathcal{C}\} = \bigcap\{\overline{Y \cap (X \backslash U)}^X : U \in \mathcal{U}\} \subseteq \bigcap\{\overline{Y}^X \cap \overline{X \backslash U}^X : U \in \mathcal{U}\} = \bigcap\{\overline{Y}^X \cap (X \backslash U) : U \in \mathcal{U}\} = \bigcap\{X \backslash U : U \in\} \cap \overline{Y}^X = \overline{Y}^X \cap [X \backslash \bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}] = \phi$ lo cual no es posible.

La prueba está completa.

Entre los resultados importantes en compacidad es el hecho de que satisfacen ser ambos Hausdorff y compactos, son normales. Ahora presentamos una versión relativizada de ésto.

Teorema 3.2.2 *Si Y es FH en X y compacto en X, entonces Y es IN en X.*

Demostración. Primero demostraremos que Y es IR en X. Sean $A \subseteq Y$ cerrado en X y $x \in Y \setminus A$. Note que si A es cerrado en X, por el lema 3.1.1 se tiene que A es compacto en X.

Ahora bien, dado que Y es FH en X, para cada $X \in X$ existen U_x y V_x abiertos ajenos, en X, tales que $x \in U_x$ y $y \in V_x$. Obsérvese que la colección $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X \setminus \{y\}\} \cup \{X \setminus A\}$ es una cubierta abierta de X. Luego dado que A es compacto en X, existe $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ tal que $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathcal{V} = \{U_{x_1}, \dots U_{x_n}\}$ y que para cada i, $U_{x_1} \neq X \setminus A$. Pongamos $U = \bigcup\{U_{x_1}, \dots U_{x_n}\}$ y $V = \bigcup\{V_{x_1}, \dots V_{x_n}\}$. Entonces $y \in V$, $A \subseteq U$ y $V \cap U = \emptyset$. Por lo tanto Y es IR.

Ahora, sean A y B dos subconjuntos de Y, cerrados y ajenos en X. De lo anterior tenemos que para cada $b \in B$, existen abiertos ajenos (en X) U_b y V_b tales que $A \subseteq U_b$ y $b \in V_b$; luego, la colección $\{V_b : A \subseteq V_b\} \cup \{X \setminus B\}$ es una cubierta abierta de X y dado que B es compacto en X, existen (sin pérdida de generalidad), $b_1, b_2, \dots b_n \in B$ tales que $B \subseteq \bigcup\{V_{b_1}, \dots V_{b_n}\}$. No es difícil verificar que $U = \bigcap\{U_{b_1}, \dots U_{b_n}\}$ y $V = \bigcup\{V_{b_1}, \dots V_{b_n}\}$ son abiertos y ejenos en X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Por tanto Y es IN en X.

Otro hecho bastante conocido en compacidad es aquel que establece que todo subespacio compacto de un espacio Hausdorff es cerrado. Para el caso de la compacidad relativa no siempre se verifica este hecho.

Ejemplo 3.2.2 Tomemos a $X = \mathbb{R}$ con la topología usual. Ya hemos visto que $[0,1]$ es compacto en X. Luego, de la Observación 3.2, obtenemos que $Y = (0,1)$, es compacto en X y, evidentemente, Y no es cerrado en X.

Terminamos esta sección con otra relativzación para la compacidad.

Definición 3.2.2 *Y es **internamente compacto** en X si y sólo si para todo $Z \subseteq Y$ cerrado en X, Z es compacto.*

Veamos si existe alguna relación entre compacidad en X la noción de internamente compacto en X.

Proposición 3.2.1 *Si Y es compacto en X entonces Y es internamente compacto en X.*

Demostración. Sea $Z \subset Y$ cerrado en X. Por demostrar que Y es compacto. Por la observación 3.2, tenemos que Z es compacto en X, y dado que Z es cerrado en X, concluimos que Z es compacto.

El recíproco del lema anterior no necesariamente se cumple como se observa en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 3.2.3 Tomemos a X como en el Ejemplo 3.2.1 y sea $Y = \mathbb{N}$. Dado que Y es cerrado y discreto, tenemos, por una lado que los subconjuntos de Y que son cerrados en X son los finitos; luego, éstos son compactos (por ser finitos) y por lo tanto, para todo $A \subseteq Y$ tal que $A = cl_X(A)$ se tiene que A es compacto. Así, Y es internamente compacto en X y, claramente, Y no es compacto en X.

3.3. relativización de algunas desigualdades cardinales

Entre los resultados más importantes en la teoría de los invariantes cardinales topológicos, resaltan los que proporcionas cotas superiores para la cardinalidad de espacios topológicos. Entre otros, los siguientes son bastante conocidos en ésta teoría. El lector interesado en la teoría de los invariantes cardinales puede consultar [16].

(I1) Para cada espacio Hausdorff X, $|X| \leq 2^{c(X)\chi(X)}$;

(I12) Si X es un espacio T_1, entonces $|X| \leq 2^{s(X)\psi(X)}$;

(I13) Para X Hausdorff se verifica que $|X| \leq 2^{L(X)\chi(X)}$.

Las pruebas originales de (I1) e (I3) usan argumentos de *cálculo de particiones* Šapirovskiĭ demostró el siguiente resultado. Su demosración está inspirada en la prueba de la desigualdad (I3), dada por Arhangel'skiĭ.

Si X es un espacio Hausdorff y $\kappa = s(X)$, entonces existe un subconjunto S de X tal que $|S| \leq 2^{\kappa}$ y $X = [S]_{\kappa}$. Pol modificó la técnica empleada por Šapirovskiĭ para demostrar el resultado previo y da demostraciones alternas para (I1) e (I3) (vea [14]). En [14], Hodel emplea esta *técnica* para demostrar la desigualdad (I2) y resalta en dicho artículo, que el trabajo de Pol y Šapirovskiĭ es una aproximación unificada para las tres desigualdades, una técnica de prueba, un algoritmo.

Autores como Hodel [15], Stavrova [21], y otros han obtenido resultados que capturan la parte común en la técnica de prueba de Pol y Šapirovskiĭ.

En esta sección presentamos un resultado de este tipo, debido a Arhangel'skiĭ [2], que captura la escencia en la técnica de la técnica de Pol y y Šapirovskiĭ, pero que además, permite obtener desigualdades de forma relativa. Antes daremos algunas nociones que serán empleadas para establecer y demostrar dicho teorema (Teorema 3.3.1).

Sean τ un número cardinal infinito, y λ un número cardinal no mayor a la cofinalidad de τ. Entonces $\mu = |\{A \subset Z: |A| < \lambda\}|$, donde Z es un conjunto de cardinalidad τ. Observe que si $\tau = \kappa^{+} = \lambda$, entonces $\mu = |\{A \subset Z: |A| < \lambda\}| = \{A \subset Z: |A| \leq \kappa\}| = 2^{\kappa}$. En particular, si $\tau = \omega_1 = \lambda$, entonces $\mu = 2^{\omega}$. De ahora en adelante, y mientras no se diga lo contrario, X es un conjunto no vacío y $\emptyset \neq Y \subseteq X$. También, $\mathcal{L}$ será una familia de subconjuntos de Y de cardinalidad no mayor que μ; es decir, $\mathcal{L} \subseteq [Y]^{\leq \mu}$, tal que para cada $F \in [Y]^{\leq \mu}$, existe $L \in \mathcal{L}$ tal que $F \subseteq L$. Obviamente una tal familia $\mathcal{L}$ existe; por ejemplo, $\mathcal{L} = [Y]^{\leq \mu}$, satisface la propiedad. Una τ-sucesión creciente en $\mathcal{L}$ es una sucesión transfinita $\{F_{\alpha}: \alpha < \tau\}$ de elementos de $\mathcal{L}$ tal que si $\alpha < \beta < \tau$ entonces $F_{\alpha} \subseteq F_{\beta}$

Un sensor s es el par $(\mathcal{A},\mathcal{F})$, donde $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de Y y $\mathcal{F}$ es una familia de familias de subconjuntos de X.

Supondremos, en lo sucesivo, que con cada sensor $s=(\mathcal{A},\mathcal{F})$ tenemos asociado un subconjunto $\Theta(s)$ de X, llamado Θ–clausura de s.

Diremos que un sensor $s=(\mathcal{A},\mathcal{F})$ es pequeño, si cumple las condiciones siguientes:

- $|\mathcal{A}|<\lambda$ y $|\mathcal{F}|<\lambda$,
- Para cada γ en $\mathcal{F}$, $|\gamma|<\lambda$
- Para cada $A\in\mathcal{A}$, $|A|<\lambda$
- $Y\backslash\Theta(s)\neq\phi$.

Dado H un subconjunto de Y y γ una familia de subconjuntos de X. El sensor $s=(\mathcal{A},\mathcal{F})$ se dirá que es generado por el par (H,γ), si para cada $A\in\mathcal{A}$, $A\subseteq H$ y si para cada $\eta\subseteq\gamma$, $\eta\in\mathcal{F}$.

Sea Q el conjunto de todas las familias $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X tal que $|\mathcal{U}|\leq\mu$. Si g es una función de $\mathcal{L}$ hacia Q, $\xi\subseteq\mathcal{L}$, entonces $\mathcal{U}_g(\xi)=\cup\{g(E):E\in\xi\}$. Note que para cada $L\in\mathcal{L}$, $g(L)$ es una familia de subconjuntos de X tal que $|\mathcal{L}(L)|\leq\mu$; es decir, $g(L)\in[\mathcal{P}(X)]^{\leq\mu}$.

Definición 3.3.*1* *Sea g una función de $\mathcal{L}$ a Q, y ξ una subfamilia de $\mathcal{L}$.*

(I14) Un sensor s se llama bueno para ξ, si éste es generado por el par $(\cup\,\xi,\mathcal{U}_g(\xi))$ y $\cup\,\xi\subset\Theta(s)$.

(I15) Una (g,Θ) –hélice en $\mathcal{L}$ es una τ –sucesión creciente, con $\xi\subseteq\mathcal{L}$ tal que ningún sensor pequeño, s, es bueno para ξ.

Ahora estamos en posibilidad de establecer y demostrar el teorema genérico, debido a Arhangel'skii y. Como ye hemos dicho, éste es una poderosa herramienta que captura la parte común en muchas desigualdades ya establecidas y que puede emplearse para obtener nuevos resultados.

Teorema 3.3.1 *Para cada función g de $\mathcal{L}$ hacia Q, existe una sucesión que crece rápidamente en $\mathcal{L}$, es decir, hay una hélice en $\mathcal{L}$.*

Demostración. Construiremos una hélice en $\mathcal{L}$ por recursión transfinita. Sea F_0 cualquier elemento de $\mathcal{L}$; fijemos $\alpha < \tau$, y asumimos que $F_\beta \in \mathcal{L}$ está definido para cada $\beta < \alpha$. Hacemos $H_\alpha = \cup \{F_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\mathcal{U}_\alpha = \cup \{g(F_\beta) : \beta < \alpha\}$. Claramente, $|H_\alpha| \leq \mu$ y $|\mathcal{U}_\alpha| \leq \mu$.

Para cada sensor pequeño s generado por $(H_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$, fijemos un punto $m(s) \in Y \backslash \Theta(s)$. Agregamos todos estos puntos a H_α, con lo que obtenemos un conjunto B_α. Observemos que $|B_\alpha| \leq \mu$. Por lo tanto, $F_\alpha \in \mathcal{L}$ puede ser elegido para que $B_\alpha \subset F_\alpha$.

Vamos a mostrar que la τ −sucesión, $\xi = \{F_\alpha : \alpha < \tau\}$ crece rápidamente. Definamos $P = \cup\, \xi$ y supongamos lo contrario. Entonces, hay un sensor pequeño $s = (\mathcal{A}, \mathcal{F})$ generado por el par $(P, \mathcal{U}_g(\xi))$ tal que $P \subset \Theta(s)$. Dado que la cofinalidad de λ es menor que la de τ, entonces hay $\alpha < \tau$ tal que $A \subset H_\alpha$, para cada $A \in \mathcal{A}$ y $\eta \subset \mathcal{U}_\alpha$, para cada η en $\mathcal{F}$. Entonces $m(s) \in F_\alpha \subset P \subset \Theta(s)$, la cual es una contradicción con la elección de $m(s)$.

Para concluir este trabajo, a continuación vamos a presentar tres aplicaciones del teorema anterior. Estos resultados son versiones relativas y numerables de teoremas bien conocidos en la teoría de los invariantes cardinales de espacios topológicos.

Seguiremos con la notación presentada en la sección anterior, además de que si se elige una sucesión creciente ξ en $\mathcal{L}$, se escribirá $P = \cup\, \xi$. Finalizando, si en un argumento definimos la Θ −clausura sólo para sensores s de un tipo particular, eso significa que sólo esos sensores están efectivamente involucrados en el argumento y para todos los demás sensores de la Θ −clausura pueden ser tomados como el conjunto vacío.

Diremos que Y es inicialmente κ–Lindelöf en X, si para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, con cardinalidad menor o igual que κ, existe existe una subfamilia numerable de $\mathcal{U}$ la cual cubre a Y. No es difícil verificar que $Y \subseteq [Y]_\kappa \subseteq cl_Y(X)$, que si $Y \subseteq Z$, entonces $[Y]_\kappa \subseteq [Z]_\kappa$. También $[[Y]_\kappa]_\kappa$. Además, si X es primero numerable, entonces $\psi(X) \leq \omega$.

Corolario 3.3.1 Sea X un espacio Hausdorff y primero numerable, Y un subespacio denso de X el cual es inicialmente 2^ω-Lindelöf en X. Entonces $|X| \leq 2^\omega$ y el subespacio Y es Lindelöf en X.

Demostración. Puesto que X es primero numerable, fijamos, para cada $x \in X$, una base local numerable, $\mathcal{B}_x$, de x en X. Supongamos que $\tau = \aleph_1 = \lambda$, entonces $\mu = 2^{\omega}$. Para $F \in \mathcal{L}$, definimos $g(F) = \cup \{\mathcal{B}_x : x \in \overline{F}\}$. Entonces $|\overline{F}| \leq 2^{\omega}$ y $|g(F)| \leq 2^{\omega}$. Además, $\Theta((\phi, \{\gamma\})) = \cup \gamma$, y $\Theta(s) = \phi$ para todos los demás sensores. Por el Teorema [main], existe una hélice $\xi = \{F_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ en $\mathcal{L}$. Sean $P = \cup\{F_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ y $F = \cup\{\overline{F}_\alpha : \alpha < \ \aleph\}$

Afirmamos que F es cerrado en X. En efecto, sea $x \in cl_X(F)$. Por cada $B \in \mathcal{B}_x$ tomamos un punto $x_B \in F \cap B$ y denotemos F_x al conjunto formado por tales puntos. Claramente $F_x \subseteq F$ y $x \in cl_x(F_x)$. Ahora, dado que $F_x \subseteq F$ y $|F_x| \leq \omega$, existe $\alpha < \aleph_1$ tal que $F_x \subseteq F_\alpha \subseteq cl_X(F_\alpha) \subseteq F$. Por tanto $x \in F$ y por ende F es cerrado en X.

Vamos a mostrar que $Y \subseteq F$. Supongamos que no es así. Fijemos un punto $y \in Y \backslash F$. Claramente, la familia $\gamma = \{V \in \mathcal{U}_g(\xi) : y \notin V\} \cup \{X \backslash F\}$ es cubierta abierta de X de cardinalidad menor o igual que 2^{ω} y como Y es inicialmente 2^{ω}–Lindelöf, existe una subfamilia numerable η' de γ tal que $Y \subset \cup \eta'$. Sea $eta = \eta' \backslash \{X \backslash F\}$.

Notemos que $P \subset (F \cap Y) \subset \cup \eta \subset Y \backslash \{y\}$. Entonces $s = (\phi, \{\eta\})$ es un sensor pequeño bueno para ξ, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $Y \subset F$ y $|Y| \leq |F| \leq 2^{\omega}$. Finalmente, dado que $X = cl_X(Y) \subset F$, concuimos que $|X| \leq 2^{\omega}$.

El número de Souslin o celularidad de Y en X, denotado $c(Y, X)$, es el menor cardinal infinito κ tal que la cardinalidad de toda familia de subconjuntos abiertos en X y ajenos por pares, cada uno de los cuales intersecta a Y, es menor o igual a κ. El lema siguiente es pieza clave en la demostración del Corolario 3.3.2.

Lema 3.3.1 *Si $c(Y, X) \leq \omega$, entonces para cada familia γ de subconjuntos abiertos de X existe una subfamilia numerable η de γ tal que $(\cup \gamma) \cap Y \subset \overline{\cup \eta}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{E}$ la familia de todos los subconjuntos abiertos V de X tal que $V \cap Y$ es distinto del vació y existe $U \in \gamma$ tal que $V \subset V$. Tomemos cualquier familia maximal ajena ξ de elementos de $\mathcal{E}$. Entonces ξ es numerable puesto que $c(X, Y) \leq \omega$. Para cada $V \in \xi$, fijemos $U_V \in \gamma$ tal que $V \subset U_V$.

Entonces $\eta = \{U_V : V \in \xi\}$ es como queremos. En efecto, si tomamos $y \in Y \backslash \overline{\cup \eta}$ y $W \in \gamma$ tal que $y \in W$ entonces podemos encontrar $V \in \mathcal{E}$ tal que $y \in V \subset W$ y $(\cup \eta) \cap V = \phi$. Por lo que, $\xi \cup \{V\}$ es una subfamilia ajena de $\mathcal{E}$ estrictamente mayor que ξ, lo que contradice el suponer de que ξ es el maximal de $\mathcal{E}$.

El corolario siguiente es una versión relativizada de la deisgualdad I1), dada al inicio de esta sección.

Corolario 3.3.2 *Si Y es un espacio T_2 en X, el número de Souslin de Y en X es contable y X es primero numerable en todos los puntos de Y, entonces $|Y| \leq 2^{\omega}$.*

Demostración. Puesto que X es primero numerable en todos los puntos de Y, para cada $y \in Y$, $\mathcal{B}_y$ es una base local numerable de y en X . Definamos a $\Theta((\phi, \mathcal{F})) = \bigcup\{\overline{\gamma} : \gamma \in \mathcal{F}\}$, $\tau = \aleph_1 = \lambda$, $\mu = 2^{\omega}$ y $g(F) = \bigcup\{\mathcal{B}_x : x \in F\}$, para $F \in \mathcal{L}$. Por el Teorema [main], existe una hélice ξ en $\mathcal{L}$. Vamos a mostrar que $Y = P$. Supongamos lo contrario, y fijemos $y \in Y \backslash P$. Para cada $V \in \mathcal{B}_y$, sea $P_V = P \backslash \overline{V}$ y $\gamma_V = \{U \in \mathcal{U}_g(\xi) : U \cap \overline{V} = \phi\}$. Entonces γ_V cubre a P_V y $\cup \{P_V : V \in \mathcal{B}_y\} = P$. Dado que $c(X, Y) \leq 2^{\omega}$, por el Lema [lemacoro2], podemos encontrar una subfamilia numerable η_V de γ_V tal que $P_V \subset \overline{\cup (\eta_v)}$. Como $\overline{(\cup \eta_V)} \cap V = \phi$. Notemos que $y \notin \overline{(\cup \eta_V)}$.

Además, tenemos que $P = \bigcup\{P_V : V \in \mathcal{B}_y\} \subset \bigcup\{\overline{\cup \eta_V} : V \in \mathcal{B}_y\}$. Por lo que $(\phi, \{\eta_V : V \in \mathcal{B}_y\})$ es un sensor pequeño y bueno para ξ lo cual es una contradicción. Por lo anterior, se llega a que $P = Y$ y, por lo tanto, $|Y| = |P| \leq 2^{\omega}$.

Definición 3.3.2 *Llamaremos a X un espacio estrictamente quasi-Lindelöf, si para cada subconjunto cerrado P de X y para cada familia numerable $\{\gamma_i : i \in \omega\}$ de familias de subconjuntos abiertos de X tales que $P \subset \cup \{\cup \gamma_i : i \in \omega\}$ se puede elegir una subfamilia numerable η_i de γ_i para cada $i \in \omega$ de modo que $P \subset \cup \{\overline{\cup \eta_i} : i \in \omega\}$.*

Proposición 3.3.1 *Si X es Lindelöf entonces X es estrictamente quasi-Lindelöf.*

El siguiente corolario es un resultado del Lema 3.3.1

Proposición 3.3.2 *Si $c(X,X) \leq \omega$, entonces X es estrictamente quasi-Lindelöf*.

El corolario que presentamos a continuación, y con el cual terminamos nuestro trabajo, es una generalización común (por las proposiciones anteriores) a las desigualdades I1) e I3).

Corolario 3.3.2 *Sea X un espacio primero numerable, T_2 y estrictamente quasi-Lindelöf. Entonces $|X| \leq 2^{\omega}$*

Demostración. Sea $\tau = \aleph_1 = \lambda$, $\mu = 2^{\omega}$ y $g(F) = \cup\{\mathcal{B}_x : x \in \overline{F}\}$. Por lo que existe $\xi = \{F_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ en $\mathcal{L}$. Es suficiente con demostrar que el conjunto $P = \cup\,\xi$ es denso en X, puesto que $|P| \leq 2^{\omega}$ y X es primero numerable y T_2.

Supongamos lo contrario y fijemos a $z \in X \backslash \overline{P}$. Para $V \in \mathcal{B}_z$ definamos $\gamma_V = \{U \in \mathcal{U}_g(\xi) : Y \cap V = \phi\}$. Dado que X es primero numerable, $\overline{P} = \{\cup\, F_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$, por lo cual $\mathcal{U}_g(\xi) = \cap\{\mathcal{B}_x : x \in \overline{P}\}$. Entonces $\overline{P} \subset \cup\{\cup\,\gamma_V : V \in \mathcal{B}_z\}$, ya que X es T_2. Notemos que la familia $\mathcal{B}_z$ es numerable, por lo que podemos elegir una subfamilia numerable η_V de γ_V para cada V en $\mathcal{B}_z$ de modo que

$$\overline{P} \subset \cup\{\overline{\cup\,\eta_V} : V \in \mathcal{B}_z\}$$

Definamos al sensor s como

$$s = (\phi, \{\eta_V : V \in \mathcal{B}_z\})$$

.

Debemos mostrar que el sensor s es bueno para ξ, lo cual se sigue del hecho de que s es generado por $(\cup\,\xi, \mathcal{U}_g(\xi))$ y todas las familias que pertenecen a s son numerables. Puesto que $(\cup\,\gamma_V) \cap V = \phi$, se deduce que $(\cup\,\eta_V) \cap V = \phi$, además, V es abierto que implica que $\overline{U\eta_V} \cap V = \phi$ para todos los $V \in \mathcal{B}_z$. Por lo anterior, se llega a que z no pertenece a $\Theta(s)$ y s es un sensor pequeño bueno para ξ, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto $|X| \leq 2^{\omega}$.

Bibliografía

[1] Adams, C. and Franzosa, R. (2008). *Introduction to Topology*. Pearson.

[2] Arhangel'skii, A. V. (1995). A generic theorem in the theory of cardinal invariants of topological spaces. *Comment. Math. Univ. Carolin*, 36:303–325.

[3] Arhangel'skii, A. V. (1996). Relative topological properties and relative topological spaces. *Topology and its Apllications*, 70:87–99.

[4] Arhangel'skii, A. V. (2002). Relative normality and dense subspaces. *Topology and its Apllications*, 123:27–36.

[5] Arhangel'skii, A. V. and Genedi, H. M. M. (1989). Beginnings of the theory of relative topological properties. *General Topology, Spaces and Mappings*, pages 3 – 48.

[6] Bella, A. (1991). A couple of questions concerning cardinal invariants. *Topology and its Applications*, pages 1–5.

[7] Bonanzinga, M. (2013). On the hausdorff number of a topological space. *Houston J. Math*, 39:1013–1030.

[8] Bonanzinga, M., Stavrova, D., and Staynova, P. (2017). Separation and cardinality – some new results and old questions. *Topology and its Apllications*, 221:556 – 569.

[9] Chodounský, D. (2006). Relative topological properties. Master's thesis, The University of North Carolina.

[10] Chodounský, D. and Murtinová, E. (2008). Internal normality and internal compactness. *Topology and its Apllications*, 155:201 –206.

[11] Díaz Reyes, J., Martínez Ruiz, I., and Ramírez Páramo, A. (2018). Relative properties topological of hyperspaces. *To appear in Mathematica Slovaka*.

[12] Engelking, R. (1989). *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Polish Sci. Publ., Warsaw.

[13] Hernández Hernández, F. (1998). *Teoría de Conjuntoss*. Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas.

[14] Hodel, R. (1979). A technique for proving inequalities in cardinal functions. *Topology Proc.*, 4:115–120.

[15] Hodel, R. (1992). Combinatorial set theory and cardinal functions inequalities. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 111:567–575.

[16] Hodel, R. E. (1984). *Cardinal functions I, Handbook of Set-Theoric Topology*. North-Holland, Amsterdam.

[17] Hrbacek, K. and Jech, T. (1978). *Introduction to Set Theory*. Marcel Dakker, Inc., Second Edition.

[18] Juhász, I. (1971). *Cardinal Functions in Topology*. Mathematical Centre, Amsterdam.

[19] Kunen, K. (1980). *Set theory, an introduction to independence proofs*. Studies in Logic and the foundamentations of Mathematics.

[20] Munkres, J. R. (2009). *Topology*. PHI Learning Privade Limited.

[21] Stavrova, D. (1997). Unified approach to the theory of topological cardinal invariants. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 50:5–8.

[22] Steen, L. A. and Seebach, J. A. J. (1995). *Counterexamples in Topology*. Springer-Verlag.