



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"SOLUCIÓN PERTURBATIVA DE DOS ÁTOMOS
DE DOS NIVELES CON PÉRDIDAS Y
FORZAMIENTO COHERENTE"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA

RICARDO DEL ROSAL GARDUÑO

DIRECTORES DE TESIS

DR. JUAN MAURICIO TORRES GONZALEZ

No. de CVU: 1257646

OCTUBRE DE 2025

Universidad Autónoma de Puebla
Instituto de Física “Luis Rivera Terrazas”

**Solución perturbativa de dos átomos de
dos niveles con pérdidas y forzamiento
coherente**

Tesis presentada por

Ricardo Del Rosal Garduño

para obtener el grado de

**Maestría en Ciencias
(Física)**

Dirigida por

Juan Mauricio Torres Gonzalez

Puebla, México

Octubre 2025

©2025 - Ricardo Del Rosal Garduño

Derechos Reservados

Dedicado a ...

*Mi mamá, cuyo apoyo, sacrificio y amor incondicional me han permitido llegar
hasta aquí. Gracias por estar siempre a mi lado. Te amo.*

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mis padres, Margarita Garduño Alvarez y Ricardo Del Rosal Pulido, por su apoyo incondicional a lo largo de todos mis estudios y durante la realización de esta tesis. A mi mamá, por ser un ejemplo constante de perseverancia y dedicación, que me inspira cada día; y a mi papá, por su interés genuino en mi trabajo y por las valiosas pláticas que compartimos sobre él, que me ayudaron a reflexionar y mejorar mi enfoque. Los amo profundamente y siempre estaré agradecido por todo lo que han hecho por mí.

También agradezco a mi hermana, Karen Del Rosal Garduño, por su compañía y apoyo. Gracias a esas pequeñas reuniones en las que, aunque cada quién trabajaba en sus proyectos, compartíamos tiempo juntos, nos acompañábamos y nos motivábamos mutuamente.

No puedo dejar de agradecer profundamente a mi novia, Dulce Palma Martínez, quien se ha convertido en un pilar fundamental en mi vida, brindándome apoyo, motivación y alegría, acompañándome en cada etapa, celebrando los pequeños logros y ayudándome a superar los desafíos durante la realización de esta tesis. Su amor y respaldo han sido esenciales para que este proyecto se hiciera realidad.

Deseo dar mi agradecimiento a mis abuelitos, Margarita Álvarez Herrera y Guillermo Garduño Vázquez (Q.E.P.D.), quienes siempre nos brindaron su apoyo a mí, a mi hermana y a mi madre, incluso abriéndonos su hogar en momentos difíciles. Los valores y enseñanzas que me transmitieron han sido esenciales para alcanzar mis estudios. Los amo y siempre estaré agradecido por su amor y guía.

Le agradezco enormemente a mi gran amigo y compañero de investigación, José Bladimir Guzmán. Las pláticas con él sobre mecánica cuántica, sistemas abiertos y otros temas han enriquecido significativamente mis conocimientos y contribuyeron a la ejecución de esta tesis. No menos importante, valoro la alegría y los momentos compartidos, como las salidas a comer durante las jornadas de trabajo, que hicieron más amena esta etapa de mi formación académica.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Juan Mauricio Torres González, mi director de tesis, ya que sin su paciente enseñanza, guía y apoyo, la realización de este trabajo no habría sido posible.

Agradezco a los investigadores que fungen como comité evaluador de esta tesis por sus aportaciones, que han contribuido a mejorar este trabajo.

Se agradece a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado por el apoyo otorgado para la conclusión de esta tesis dentro del Eje IV. Modelo de Investigación Abierta y compartida. Objetivo 13. Formar recursos humanos que impacten positivamente en el contexto social y científico como consecuencia de su accionar en una comunidad para lograr una educación desarrolladora de la transformación. Indicador establecido en el Plan de Desarrollador Institucional 2021-2025.

Finalmente, agradezco a la BUAP, y en particular al IFUAP, por mi formación académica a través del posgrado en Maestría en Ciencias (Física). Asimismo, extendo mi gratitud a la Secretaría de Ciencias, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), cuyo apoyo económico mediante la Beca Nacional para Estudios de Posgrado, así como el brindado a través del proyecto de investigación “Operaciones cuánticas en sistemas cuánticos abiertos incluyendo átomos y moléculas en cavidades” con clave CF-2023-I-1751, han sido fundamentales para la realización de este trabajo.

Solución perturbativa de dos átomos de dos niveles con pérdidas y forzamiento coherente

Resumen

En este trabajo se estudia la dinámica de las poblaciones, las coherencias y el entrelazamiento en un sistema compuesto por dos átomos de dos niveles acoplados, sujetos a pérdidas y a un forzamiento coherente. El entrelazamiento, recurso esencial en tecnologías cuánticas emergentes, se analiza mediante una medida cuantitativa como lo es la concurrencia, que permite caracterizar su presencia y evolución. Como base teórica, se revisan los sistemas cuánticos de dos niveles, que son la unidad mínima de información y el modelo esencial en el desarrollo de tecnologías cuánticas, así como los sistemas abiertos, donde la interacción con el entorno afecta la dinámica. Bajo la aproximación de Born-Markov, la pérdida de información y energía hacia el entorno se describe mediante la ecuación maestra de Lindblad, formulada en términos del superoperador liouvilliano. El caso sin forzamiento se resuelve de manera exacta, lo que proporciona un escenario de referencia para el análisis perturbativo. Posteriormente, se desarrolla la teoría de perturbaciones de segundo orden en el caso degenerado aplicada a superoperadores, con el apoyo del software Mathematica para manejar la complejidad algebraica. Dichas soluciones permiten comparar la evolución con y sin forzamiento coherente, brindando una visión clara del efecto de la excitación externa sobre las magnitudes estudiadas. Finalmente, los resultados perturbativos se contrastan con soluciones numéricas, validando la aproximación empleada.

Perturbative solution of two two-level atoms with losses and coherent driving

Abstract

This work studies the dynamics of populations, coherences, and entanglement in a system composed of two coupled two-level atoms, subject to losses and coherent driving. Entanglement, an essential resource in emerging quantum technologies, is analyzed through a quantitative measure known as concurrence, which allows one to characterize its presence and evolution. As a theoretical foundation, two-level quantum systems are first reviewed as the minimal unit of information and a fundamental model in the development of quantum technologies, together with open quantum systems, where interaction with the environment affects the dynamics. Under the Born-Markov approximation, the loss of information and energy to the environment can be consistently described by the Lindblad master equation, expressed in terms of the Liouvillian superoperator. The undriven case is solved exactly, providing a reference scenario for the perturbative analysis. Subsequently, second-order degenerate perturbation theory for superoperators is developed, with the support of Mathematica to handle the algebraic complexity. These solutions allow for comparison between the evolution with and without coherent driving, offering a clear perspective on the effect of external excitation on the studied quantities. Finally, the perturbative results are contrasted with numerical solutions, validating the employed approach.

Participación en eventos

- **Teoría de perturbaciones en sistemas cuánticos abiertos con forzamiento coherente**, Ricardo Del Rosal Garduño, José Bladimir Guzmán, Juan Mauricio Torres Gonzalez, Reunión Anual de la División de Información Cuántica, INAOE, Puebla, México (2025).

Contenido

Introducción	1
1 Fundamentos teóricos	3
1.1 Sistemas cuánticos	3
1.1.1 Sistemas cuánticos cerrados	4
1.1.2 Sistemas cuánticos abiertos	5
1.1.3 Sistemas de dos niveles	7
1.2 Operador de densidad	9
1.2.1 Estados puros y mezclados	9
1.2.2 Matriz de densidad	9
1.2.3 Pureza	11
1.2.4 Matriz de densidad reducida	12
1.2.5 Evolución temporal de la matriz de densidad	13
2 Sistemas cuánticos abiertos markovianos	15
2.1 Teoría de superoperadores	16
2.1.1 Vectorización	18
2.1.2 Régimen markoviano y ecuación maestra de Lindblad	19
2.2 Eigensistema de 1 TLS sin forzamiento	21
2.3 Eigensistema de 2 TLS sin forzamiento	24
2.4 Sistemas con forzamiento y marco de interacción	29
3 Teoría de perturbaciones	34
3.1 Caso no degenerado	34
3.2 Caso degenerado	38
3.3 Solución perturbativa de 1 TLS con forzamiento	44
3.3.1 Comparación con la solución exacta para el estado estacionario	48
3.4 Solución perturbativa de 2 TLS con forzamiento	48
4 Dinámica, observables y entrelazamiento	53
4.1 Evolución temporal de 1 TLS	54
4.1.1 Poblaciones	58
4.1.2 Coherencias	59
4.1.3 Comparación con solución numérica	61

4.2	Evolución temporal de 2 TLS	62
4.2.1	Poblaciones	64
4.2.2	Coherencias	67
4.2.3	Entrelazamiento	68
4.2.4	Comparación con solución numérica	73
5	Conclusiones	76
A	Solución de 2 TLS	78
A.1	Forma matricial de los eigenvectores de \mathcal{K}	78
A.2	Cálculos de la acción de \mathcal{J}	79
A.3	Cálculos del eigensistema derecho de \mathcal{L}	82
A.4	Cálculos del eigensistema izquierdo de \mathcal{L}	87
	Bibliografía	92

Introducción

La física cuántica, desde sus inicios a principios del siglo XX, ha transformado nuestra comprensión del mundo microscópico y ha dado lugar a una gran cantidad de desarrollos teóricos y experimentales. En particular, los sistemas cuánticos simples, como el átomo de dos niveles, han jugado un papel fundamental en el establecimiento de los conceptos básicos de la teoría y en el diseño de experimentos cruciales para su validación. Hoy en día, el estudio de estos sistemas no sólo constituye un interés académico, sino que también resulta esencial para el avance de las llamadas tecnologías cuánticas, como la computación y la comunicación cuántica [1].

Una de las características más notables de la mecánica cuántica es la posibilidad de generar y manipular entrelazamiento, una correlación no clásica entre subsistemas que no puede explicarse mediante teorías locales realistas. El entrelazamiento se ha consolidado como un recurso indispensable para el desarrollo de aplicaciones tecnológicas de frontera: permite implementar protocolos de comunicación cuántica segura y algoritmos de computación cuántica con ventajas exponenciales frente a los clásicos. Dado su importancia, resulta natural preguntarse cómo evoluciona el entrelazamiento en sistemas realistas, es decir, en sistemas que no están perfectamente aislados y que, por tanto, están sujetos a interacciones con su entorno [2].

En este contexto, los sistemas cuánticos abiertos representan el marco teórico adecuado para abordar problemas donde la interacción con el entorno introduce fenómenos como la decoherencia y la disipación de energía, que afectan directamente la dinámica de poblaciones, coherencias y correlaciones cuánticas. Una de las herramientas más utilizadas para describir la dinámica de estos sistemas es la ecuación maestra de Lindblad, obtenida bajo las aproximaciones de Born y Markov. Esta ecuación proporciona una forma consistente de modelar la evolución temporal de la matriz densidad a través

del superoperador liouvilliano, lo cual permite capturar tanto los efectos unitarios del hamiltoniano como los procesos disipativos inducidos por el entorno [3]. Dentro de este marco, en esta tesis se estudia un sistema compuesto por dos átomos de dos niveles acoplados, sujetos a pérdidas y sometidos a un forzamiento coherente. La dinámica de este sistema resulta especialmente interesante porque combina la disipación asociada al acoplamiento con el entorno y la excitación externa debida al forzamiento.

Resolver de manera exacta la dinámica de este sistema con forzamiento no es factible ya que, en general, requiere hallar las raíces de un polinomio de grado 16. Por esta razón, como punto de partida, en este trabajo se analiza el caso sin forzamiento, el cual puede resolverse de manera exacta y sirve tanto como sistema de referencia “no perturbado” como escenario de comparación directa. Este enfoque permite identificar claramente los efectos introducidos por la excitación externa y establece la base para aplicar técnicas aproximadas.

En particular, se recurre a la teoría de perturbaciones de segundo orden en el caso degenerado, aplicada aquí en el espacio de superoperadores. Este marco teórico resulta especialmente adecuado para el estudio del liouvilliano asociado al sistema y permite obtener soluciones analíticas aproximadas a la dinámica [4]. La implementación práctica de esta técnica requiere manejar expresiones algebraicas de gran complejidad, motivo por el cual se hace uso del software Mathematica, que facilita el cálculo explícito de las correcciones perturbativas.

Finalmente, las soluciones obtenidas mediante el método perturbativo se emplean para comparar la evolución con y sin forzamiento coherente, ofreciendo una visión clara de la influencia de la excitación externa en las magnitudes de interés. Estas soluciones analíticas se contrastan con soluciones numéricas, lo que permite validar la metodología y, al mismo tiempo, enriquecer la comprensión del sistema bajo distintos regímenes de interacción.

En conjunto, esta investigación busca aportar una descripción de cómo el forzamiento coherente y la disipación afectan la dinámica de sistemas cuánticos de dos niveles acoplados, con énfasis en el comportamiento del entrelazamiento. Además, utilizando las soluciones analíticas aproximadas, se busca identificar las condiciones en las que el entrelazamiento se maximiza en el estado estacionario.

Capítulo 1

Fundamentos teóricos

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo del trabajo. Se comienza con una revisión de los sistemas cuánticos cerrados y abiertos, resaltando sus diferencias en cuanto a la dinámica y la interacción con el entorno. A continuación, se introduce el sistema cuántico de dos niveles, que constituye el modelo más simple y, a la vez, el más relevante en el estudio de la dinámica cuántica, al servir como bloque básico de construcción para sistemas más complejos. Posteriormente, se aborda el formalismo del operador de densidad, indispensable para describir tanto estados puros como estados mezclados. Se presentan las propiedades fundamentales de la matriz de densidad, su interpretación física y las herramientas que ofrece para caracterizar la evolución temporal de un sistema, ya sea aislado o en interacción con un entorno. Este marco conceptual servirá de base para las secciones siguientes, donde se profundizará en la descripción de la dinámica de sistemas abiertos mediante la ecuación maestra y el formalismo de superoperadores.

1.1 Sistemas cuánticos

La mecánica cuántica emergió en las primeras décadas del siglo XX como marco teórico indispensable para explicar fenómenos que desafían los principios de la física clásica [5]. Entre estos destacan el efecto fotoeléctrico, cuya explicación requirió suponer que la energía se transfiere en unidades discretas (cuantos), y la radiación de cuerpo negro, que reveló limitaciones fundamentales en la termodinámica clásica. Las formulaciones pioneras de Schrödinger, Heisenberg y otros contemporáneos se fundamentaron en una idealización metodológica: sistemas cuánticos cerrados, es decir, sistemas que no intercambian energía ni

información con su entorno. Esta simplificación permitió establecer principios teóricos clave, como la ecuación de onda de Schrödinger o las relaciones de conmutación de Heisenberg, que sentaron las bases del formalismo cuántico.

Sin embargo, en aplicaciones prácticas y en particular, en tecnologías emergentes como la computación cuántica, el aislamiento total de un sistema es imposible. Las partículas interactúan inevitablemente con su entorno debido a vibraciones térmicas, campos electromagnéticos o imperfecciones en los materiales, un fenómeno llamado acoplamiento ambiente-sistema. Estas interacciones provocan decoherencia cuántica, que degrada características esenciales como la superposición y el entrelazamiento, bases de los algoritmos cuánticos. Para abordar estos desafíos, los sistemas cuánticos abiertos se vuelven indispensables.

La evolución hacia sistemas abiertos no invalida las teorías originales, sino que las complementa. Los sistemas cerrados, aunque idealizados, definen un estándar teórico para medir y controlar las desviaciones causadas por el entorno. Así, mientras los modelos aislados establecen los principios fundamentales de la mecánica cuántica, los sistemas abiertos ofrecen las herramientas prácticas para aplicarlos en un mundo real donde el control absoluto es inalcanzable. Esta dualidad entre idealización y pragmatismo es clave para avanzar en tecnologías cuánticas viables.

1.1.1 Sistemas cuánticos cerrados

En el contexto de sistemas cuánticos cerrados, el estado físico de un sistema está completamente determinado por un vector de estado $|\psi(t)\rangle$ perteneciente a un espacio de Hilbert \mathcal{H} . La dinámica de este estado está gobernada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (1.1)$$

donde H es el hamiltoniano del sistema, un operador hermítico que representa su energía total. La evolución temporal se expresa formalmente a través de un operador unitario $U(t, t_0)$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) |\psi(0)\rangle = H U(t, t_0) |\psi(0)\rangle. \quad (1.2)$$

La solución de esta ecuación permite conocer el estado del sistema en cualquier instante t a partir de su estado inicial $|\psi(0)\rangle$. Si H no depende del tiempo, la forma del operador de evolución temporal es $U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$ y por lo tanto, la evolución

temporal de un estado es:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} |\psi(0)\rangle. \quad (1.3)$$

La interpretación física de $|\psi(t)\rangle$ es probabilística, si el sistema se encuentra en el estado $|\psi\rangle$, la probabilidad de obtener un valor a al medir un observable A (representado por un operador hermítico) está dada por:

$$P(a) = |\langle a|\psi\rangle|^2, \quad (1.4)$$

donde $|a\rangle$ es el eigenvector de A correspondiente al eigenvalor a . Este principio, introducido por Born, establece el vínculo fundamental entre la teoría matemática y los resultados experimentales.

En esta sección es importante notar que $U(t, t_0)$ es unitario ($U^\dagger U = \mathbb{1}$) y por lo tanto preserva la norma del estado:

$$\langle \psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle \psi(t_0)|U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = \langle \psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle = 1, \quad (1.5)$$

lo que implica que la evolución temporal de un sistema cuántico cerrado es unitaria. Esta propiedad es fundamental para la interpretación de la mecánica cuántica, ya que garantiza la conservación de probabilidades [5, 6].

Si bien el estudio de sistemas cerrados constituye la base de la mecánica cuántica, la mayoría de los fenómenos físicos de interés involucran algún grado de interacción con el entorno. En escenarios realistas, resulta necesario adoptar el marco de los sistemas cuánticos abiertos, que permite describir la influencia del entorno sobre la dinámica del sistema.

1.1.2 Sistemas cuánticos abiertos

Los sistemas cuánticos abiertos son aquellos que interactúan de manera irreversible con un entorno externo, intercambiando energía, información o partículas. A diferencia de los sistemas cerrados, esta interacción, ilustrada en la [Figura 1.1](#), introduce efectos no unitarios que obligan a generalizar el formalismo cuántico estándar. En particular, los estados del sistema ya no pueden describirse mediante vectores de estado, sino que requieren matrices de densidad ρ , las cuales codifican tanto la información cuántica intrínseca del sistema como las correlaciones estadísticas inducidas por el entorno (ver [Sección 1.2](#)). Además, la dinámica de ρ se rige por ecuaciones maestras que incorporan términos de disipación y ruido.

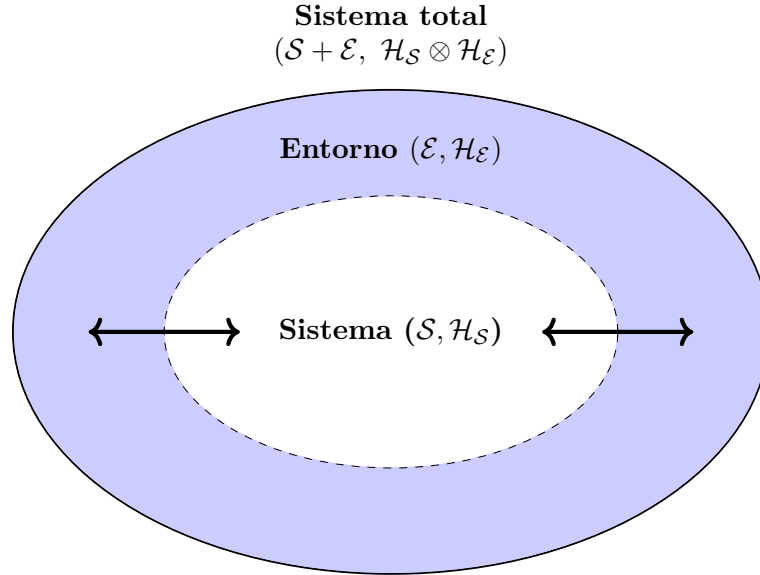


Figura 1.1: Esquema de un sistema cuántico abierto \mathcal{S} acoplado a un entorno \mathcal{E} con intercambio bidireccional de energía e información. La interacción mutua da lugar a fenómenos como la decoherencia cuántica y la disipación de energía.

Consideremos un sistema total $\mathcal{S} + \mathcal{E}$, donde \mathcal{S} es el sistema de interés acoplado a un sistema \mathcal{E} llamado entorno. Sea $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ el espacio de Hilbert asociado al sistema \mathcal{S} y $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ al entorno \mathcal{E} , el estado del sistema total se describe mediante un vector de estado $|\Psi(t)\rangle$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, que evoluciona de acuerdo con la ecuación de Schrödinger, en consecuencia, la evolución temporal del sistema total es unitaria. Sin embargo, al observar únicamente la evolución del estado del sistema \mathcal{S} , vemos que depende de su dinámica interna y de la interacción con el entorno, la cual genera correlaciones incapaces de ser descritas por una dinámica hamiltoniana unitaria. A la dinámica del sistema \mathcal{S} se le conoce como dinámica de sistema reducida y al sistema de interés también se le puede llamar sistema reducido.

El hamiltoniano del sistema total se puede escribir como la suma de tres términos:

$$H_{\text{total}} = H_{\mathcal{S}} + H_{\mathcal{E}} + H_{\mathcal{I}}, \quad (1.6)$$

el primero de los términos representa la energía del sistema de interés, el segundo la energía del entorno y el tercero la interacción entre ambos [7, 8]. Conocer la dinámica exacta del sistema de interés requiere resolver la ecuación de Schrödinger o en su defecto, la de von Neumann para el sistema total, lo cual es generalmente complicado. Sin embargo, bajo

ciertas condiciones, es posible obtener una aproximación de la dinámica del sistema \mathcal{S} que no dependa de la evolución del entorno. Esto da como resultado la ecuación maestra de Lindblad, la cual se estudiará en la [Subsección 2.1.2](#).

1.1.3 Sistemas de dos niveles

Los sistemas de dos niveles (TLS, por las siglas en inglés de Two-Level Systems) son modelos fundamentales en mecánica cuántica para describir sistemas físicos con solo dos estados accesibles. En sistemas clásicos, estos dos estados representan un bit, que codifica información binaria (0 o 1). En contraste, en sistemas cuánticos, un TLS describe un qubit, que explota la superposición cuántica para existir en cualquier combinación lineal de sus estados base,

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad \text{con } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (1.7)$$

donde α y β son números complejos que representan las amplitudes de probabilidad y la forma vectorial de los estados base es:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

A la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ se la conoce como base computacional y es la base estándar en la que se representan los qubits.

Matemáticamente, el espacio de estados de un qubit es isomorfo a una esfera unitaria llamada esfera de Bloch ([Figura 1.2](#)), esta es una representación geométrica en \mathbb{R}^3 donde cada punto sobre la superficie de la esfera corresponde a un estado puro del qubit (ver [Sección 1.2](#)). En la esfera de Bloch los polos norte y sur representan los estados base $|0\rangle$ y $|1\rangle$, respectivamente. Los puntos restantes quedan parametrizados por los ángulos $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Físicamente, θ representa la proporción de superposición entre los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, ya que si $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ el sistema se encuentra en uno de los estados base, para cualquier otro valor de θ el sistema se encuentra en una superposición de ambos estados siendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ el caso de máxima superposición. Por otro lado, ϕ representa la fase relativa entre los dos

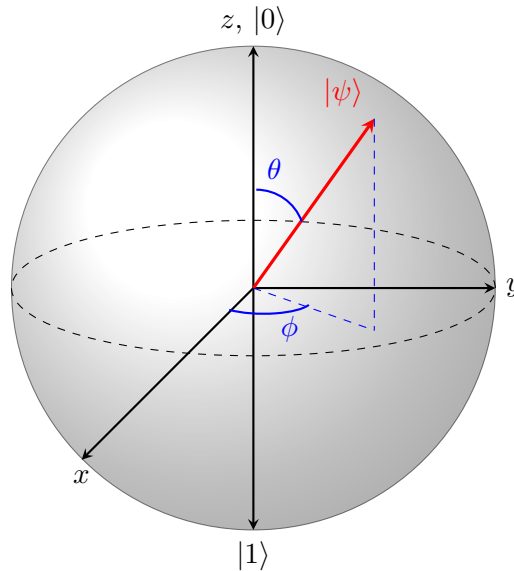


Figura 1.2: Representación de un estado $|\psi\rangle$ en la esfera de Bloch.

estados base, que no afecta la probabilidad de medir el sistema en uno u otro estado, pero sí influye en la interferencia cuántica y en la evolución temporal del sistema [1, 9].

Los sistemas de dos niveles pueden implementarse en diversos sistemas físicos, cada uno aprovechando propiedades cuánticas únicas para aislar y controlar dos estados accesibles. Por ejemplo, en los *qubits superconductores*, como los basados en uniones Josephson, se usan circuitos enfriados a temperaturas muy bajas para definir dos niveles de energía que se manipulan con pulsos de microondas [10]. En los *iones atrapados*, se confinan átomos cargados con campos electromagnéticos, y sus niveles internos se controlan con láseres, lo que permite realizar operaciones cuánticas con alta precisión [11]. También se pueden usar sistemas basados en *espines*, como los de núcleos atómicos o electrones. En estos casos, el sistema de dos niveles se forma a partir de dos posibles orientaciones del espín en presencia de un campo magnético externo.

A pesar de su aparente simplicidad, los sistemas de dos niveles constituyen la piedra angular sobre la cual se construyen muchas de las tecnologías cuánticas actuales. Ya sea en implementaciones basadas en espines, iones atrapados o circuitos superconductores, el modelo del sistema de dos niveles permite capturar la esencia de la dinámica cuántica y sirve como base para la manipulación coherente de qubits. Su estudio no solo facilita la comprensión de fenómenos fundamentales como la superposición y el entrelazamiento,

sino que también permite diseñar protocolos concretos para la computación, la simulación y la comunicación cuántica. Sin embargo, a pesar de los avances significativos, persisten importantes desafíos, como la mejora de los tiempos de coherencia, la reducción de errores durante la manipulación cuántica y la escalabilidad de estos sistemas hacia arquitecturas más complejas y funcionales.

1.2 Operador de densidad

1.2.1 Estados puros y mezclados

En mecánica cuántica, el estado de un sistema se puede describir de dos formas fundamentales: mediante un *estado puro* o un *estado mezclado*. Un estado puro representa el conocimiento completo sobre el sistema y se describe por un vector de estado $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert. Por ejemplo, en el caso de un sistema de dos niveles, un estado puro puede ser $|\psi\rangle = |0\rangle$. La información del sistema en este caso se puede expresar a través de la *matriz de densidad* como un operador proyector:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

No obstante, no todos los sistemas cuánticos están perfectamente aislados o preparados en un solo estado puro. Cuando existe una falta de información o hay interacción con un entorno externo, el sistema se describe mediante un estado mezclado. Estos representan distribuciones estadísticas de varios posibles estados puros con sus respectivas probabilidades. A modo de ejemplo, si un sistema tiene un 50% de probabilidad de estar en $|0\rangle$ y un 50% en $|1\rangle$, su matriz de densidad es

$$\rho = \frac{1}{2} |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

lo que corresponde a un estado completamente mezclado, es decir, con máxima incertidumbre sobre el estado real del sistema [1].

1.2.2 Matriz de densidad

La matriz de densidad ρ es un operador lineal que tiene las siguientes propiedades fundamentales [3]:

- Hermiticidad ($\rho = \rho^\dagger$): garantiza que los valores esperados de cualquier observable, $\langle O \rangle = \text{Tr}(\rho O)$, sean reales.
- Positividad ($\rho \geq 0$): asegura que las probabilidades asociadas a los estados del sistema sean siempre positivas o nulas.
- Normalización ($\text{Tr}(\rho) = 1$): garantiza que la probabilidad total del sistema sea 1.

Gracias a estas propiedades, la matriz de densidad permite describir tanto estados puros como mezclados, extendiendo el alcance del formalismo cuántico más allá de lo que es posible representar únicamente mediante vectores de estado.

En general, para un sistema que puede encontrarse en los estados puros $|\psi_i\rangle$ con probabilidades p_i , la matriz de densidad se define como

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \text{ donde } \sum_i p_i = 1 \text{ y } 0 \leq p_i \leq 1. \quad (1.12)$$

En el formalismo de la matriz de densidad, la *coherencia* se refiere a la presencia de elementos fuera de la diagonal en dicha matriz, cuando esta se expresa en una base dada. Estos elementos, conocidos como términos coherentes, contienen la información relativa a las superposiciones cuánticas entre distintos estados del sistema. En un sistema de dos niveles con estados base $|0\rangle$ y $|1\rangle$, una matriz de densidad genérica puede representarse como

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

donde los elementos diagonales ρ_{00} y ρ_{11} representan las probabilidades de encontrar el sistema en los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, respectivamente, mientras que los elementos fuera de la diagonal ρ_{01} y $\rho_{10} = \rho_{01}^*$ reflejan la coherencia cuántica entre dichos estados.

En los estados puros, caracterizados por la condición de idempotencia ($\rho^2 = \rho$), pueden existir términos fuera de la diagonal distintos de cero, lo cual indica máxima coherencia. En contraste, los estados mezclados, que representan mezclas estadísticas de estados puros, cumplen $\rho^2 < \rho$ y $\text{Tr}(\rho^2) < 1$, y suelen presentar coherencias reducidas o ausentes. Cuando todos los elementos fuera de la diagonal son nulos, la matriz es puramente diagonal y describe una mezcla completamente incoherente en la base considerada. No obstante, es importante destacar que no todos los estados puros presentan coherencia en una base dada: si el estado puro corresponde a uno de los vectores de la base utilizada, su

matriz de densidad será diagonal y, por tanto, no mostrará términos fuera de la diagonal. Por ello, la presencia de coherencia depende tanto de la naturaleza del estado como de la base en la que se lo representa.

1.2.3 Pureza

Distinguir entre estados puros y mezclados es importante porque refleja el grado de conocimiento que se tiene sobre el sistema cuántico y permite identificar si el sistema conserva propiedades cuánticas como la coherencia o el entrelazamiento. La pureza, definida como $\text{Tr}(\rho^2)$, es una herramienta útil para esta distinción: toma el valor 1 si el estado es puro, y es menor que 1 si el estado es mezclado. Consideremos el estado puro $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, la matriz de densidad correspondiente es:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

vemos entonces que $\rho^2 = \rho$ y por lo tanto $\text{Tr}(\rho^2) = 1$, confirmando que el estado es puro. Por otro lado, si consideramos el estado mezclado dado por la matriz de densidad en la ecuación (1.11), tenemos que su cuadrado es:

$$\rho^2 = \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

En este caso, la pureza es $\text{Tr}(\rho^2) = \frac{1}{2} < 1$, lo que indica que el estado es mezclado.

En los sistemas cuánticos abiertos, la interacción con el entorno conduce a la pérdida de coherencia y, con ello, a una disminución de la pureza del estado. Mientras que un sistema aislado puede mantenerse en un estado puro durante su evolución unitaria, un sistema abierto sufre una evolución no unitaria que mezcla el estado cuántico, reflejando una pérdida de información hacia el entorno. Físicamente, la coherencia representa la existencia de superposiciones cuánticas entre distintos estados del sistema. Estos términos coherentes son responsables de fenómenos característicos de la mecánica cuántica, como la interferencia y el entrelazamiento. La coherencia es crucial para el funcionamiento de tecnologías cuánticas, como la computación y la comunicación cuántica, ya que permite que los sistemas cuánticos procesen información de forma no clásica. Su preservación es esencial, mientras que su pérdida debido a la interacción con el entorno conduce a la decoherencia, un

proceso que degrada las propiedades cuánticas del sistema y constituye uno de los principales retos en el desarrollo de dichas tecnologías [12].

1.2.4 Matriz de densidad reducida

En la teoría de sistemas cuánticos compuestos, cuando un sistema total está formado por dos o más subsistemas, es común que solo uno de ellos sea de interés. La *matriz de densidad reducida* permite describir la física del subsistema en cuestión ignorando (trazando sobre) los grados de libertad del resto del sistema.

Sea un sistema total compuesto por dos partes, \mathcal{S} (el sistema) y \mathcal{E} (el entorno), descrito por una matriz de densidad conjunta $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{E}} = \rho_{\mathcal{S}} \otimes \rho_{\mathcal{E}}$ que actúa sobre el espacio de Hilbert compuesto $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. La matriz de densidad reducida del sistema \mathcal{S} , denotada como $\rho_{\mathcal{S}}$, se obtiene mediante el trazado parcial sobre los grados de libertad del entorno:

$$\rho_{\mathcal{S}} = \text{Tr}_{\mathcal{E}}(\rho_{\mathcal{S}\mathcal{E}}) = \sum_j^{\dim(\mathcal{H}_{\mathcal{E}})} (\mathbb{1}_{\mathcal{S}} \otimes \langle j |_{\mathcal{E}}) \rho_{\mathcal{S}\mathcal{E}} (\mathbb{1}_{\mathcal{S}} \otimes |j\rangle_{\mathcal{E}}), \quad (1.16)$$

donde $\{|j\rangle\}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Intuitivamente, esto equivale a ignorar la información del entorno al enfocarse únicamente en las observables y estados del sistema \mathcal{S} .

Similarmente podemos realizar el trazado parcial sobre el sistema \mathcal{S} para obtener la matriz de densidad reducida del entorno $\rho_{\mathcal{E}}$:

$$\rho_{\mathcal{E}} = \text{Tr}_{\mathcal{S}}(\rho_{\mathcal{S}\mathcal{E}}) = \sum_i^{\dim(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})} (\langle i |_{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}}) \rho_{\mathcal{S}\mathcal{E}} (|i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}}). \quad (1.17)$$

En este caso, $\{|i\rangle\}$ corresponde a una base ortonormal de $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. Notemos que esta idea viene de la definición usual de la traza de un operador, que es la suma de los elementos diagonales en una base dada:

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_i \langle i | \rho | i \rangle. \quad (1.18)$$

El uso de matrices de densidad reducidas es esencial en el estudio de sistemas cuánticos abiertos. Por ejemplo, si el estado total $|\psi\rangle$ está entrelazado, entonces $\rho_{\mathcal{S}}$ será un estado mezclado, incluso si el sistema total se encuentra en un estado puro. Para ver esto consideremos el estado de Bell de máximo entrelazamiento y su matriz de densidad:

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (1.19)$$

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}| = \frac{1}{2}(|00\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11| + |00\rangle \langle 11| + |11\rangle \langle 00|). \quad (1.20)$$

Si tomamos la traza parcial sobre el sistema B , obtenemos la matriz de densidad reducida del sistema A :

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_j (\mathbf{1}_A \otimes \langle j|_B) \rho_{AB} (\mathbf{1}_A \otimes |j\rangle_B) \quad (1.21)$$

$$= \frac{1}{2}[(\mathbf{1}_A \otimes \langle 0|_B) \rho_{AB} (\mathbf{1}_A \otimes |0\rangle_B) + (\mathbf{1}_A \otimes \langle 1|_B) \rho_{AB} (\mathbf{1}_A \otimes |1\rangle_B)] \quad (1.22)$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|). \quad (1.23)$$

Hemos obtenido el estado de máxima mezcla visto en la expresión (1.11) a partir de un estado puro máximamente entrelazado. Esto implica que el sistema A no posee una descripción pura por sí solo, ya que su estado está completamente correlacionado con el del sistema B [13].

1.2.5 Evolución temporal de la matriz de densidad

Como ya hemos visto, la evolución temporal del estado de un sistema cerrado descrito por vectores está gobernada por la ecuación de Schrödinger, para hallar la ecuación que describe la evolución temporal de la matriz de densidad, consideremos la matriz de densidad $\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$. Derivando esta expresión respecto del tiempo y utilizando la ecuación de Schrödinger junto con su conjugada, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} (|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|) \\ &= \left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t)| \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} H |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| - \frac{1}{i\hbar} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| H \\ &= -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)], \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde $[H, \rho] = H\rho - \rho H$ es el conmutador entre el hamiltoniano y la matriz de densidad. Esta expresión generaliza la evolución del estado a nivel de operadores, permitiendo extender la descripción a estados mezclados. La ecuación obtenida se conoce como la ecuación de von Neumann:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)]. \quad (1.25)$$

Para un sistema cerrado con evolución unitaria, la solución formal de la ecuación de von Neumann es:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t), \quad (1.26)$$

donde el operador de evolución temporal unitario es $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$. Esta forma garantiza que las propiedades fundamentales de la matriz de densidad (hermiticidad, positividad y normalización) se conserven en el tiempo [1].

Cuando el sistema cuántico está acoplado a un entorno externo, su evolución ya no es unitaria. En estos casos, la ecuación de von Neumann debe generalizarse para incluir procesos disipativos e irreversibles, lo cual conduce al uso de ecuaciones maestras, como la ecuación de Lindblad, para describir la dinámica de sistemas abiertos.

Capítulo 2

Sistemas cuánticos abiertos markovianos

Con la base conceptual sobre sistemas cuánticos abiertos y la evolución de la matriz densidad ya establecida, este capítulo se centra en la solución de sistemas markovianos mediante métodos exactos. En términos sencillos, un sistema markoviano es aquel cuya evolución en el tiempo no depende del pasado, sino únicamente del estado presente. Esto se logra bajo la llamada aproximación de Born-Markov, en la cual se asume un acoplamiento débil entre el sistema y el entorno, y que este último permanece en equilibrio sin retener memoria de interacciones anteriores [7]. Para abordar este tipo de sistemas, se introducen formalismos como los superoperadores y la vectorización. En el caso de 1 TLS, la vectorización constituye un enfoque eficiente para describir la dinámica de la matriz densidad. No obstante, cuando se consideran sistemas de mayor dimensión, como el de 2 TLS acoplados, resulta más adecuado trabajar directamente con la acción del liouvilliano \mathcal{L} sobre ρ , como se mostrará más adelante. Asimismo, se profundiza en las características del régimen markoviano, en el que la memoria del entorno se desprecia y la evolución del sistema puede describirse mediante la ecuación maestra de Lindblad, garantizando la positividad y la conservación de la traza de la matriz densidad [3].

El objetivo de este capítulo es construir un marco matemático sólido al resolver los eigensistemas (conjunto de eigenvalores y eigenvectores) exactos para el sistema sin forzamiento, compuesto por dos átomos de dos niveles (2 TLS) acoplados con pérdidas. Dado que el sistema se estudia en el régimen markoviano de los sistemas cuánticos abiertos,

las pérdidas se incorporan mediante términos disipativos que describen la interacción efectiva con el entorno. Este sistema constituye el caso no perturbado, sobre el cual se aplicará posteriormente la teoría de perturbaciones, sin entrar aún en la interpretación física de los resultados.

2.1 Teoría de superoperadores

En la descripción de sistemas cuánticos abiertos, donde el sistema de interés interactúa con un entorno externo, la evolución unitaria generada por el hamiltoniano deja de ser suficiente para describir de forma completa la dinámica. En este contexto, la matriz de densidad ρ no evoluciona según una simple conmutación con el hamiltoniano, sino que su evolución puede incluir efectos disipativos, decoherencia y pérdida de información hacia el entorno. Para abordar esta generalización, es útil introducir el concepto de *superoperadores*: operadores de segundo nivel que actúan sobre operadores. Los superoperadores permiten describir de forma sistemática la evolución de la matriz de densidad sin necesidad de conocer el estado del entorno ni la dinámica conjunta del sistema total.

Formalmente, un superoperador \mathcal{A} es una aplicación lineal que actúa sobre un operador ρ (por ejemplo, la matriz de densidad), y genera un nuevo operador:

$$\mathcal{A}\rho = \rho', \quad (2.1)$$

donde ρ' puede representar el estado del sistema en un tiempo posterior o el resultado de una interacción efectiva. Este formalismo no sólo incluye la evolución unitaria como un caso particular (a través del superoperador de conmutador), sino que también es capaz de describir procesos irreversibles como la decoherencia, la relajación o el entrelazamiento inducido por el entorno.

La ecuación de von Neumann también es llamada ecuación de Liouville por su analogía con la ecuación de Liouville en mecánica estadística clásica y por ello se puede expresar en términos de superoperadores como:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}(t)\rho(t), \quad (2.2)$$

donde \mathcal{L} es el superoperador de Liouville, que representa la evolución temporal del sistema. Para el caso de un hamiltoniano independiente del tiempo, el superoperador de Liouville

también es independiente del tiempo y por lo tanto tenemos que [7]:

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}(t-t_0)}\rho(t_0). \quad (2.3)$$

De esta forma, conociendo el superoperador de Liouville \mathcal{L} para un sistema dado, podemos determinar la evolución temporal de la matriz de densidad $\rho(t)$ a partir de su valor inicial $\rho(t_0)$.

Los superoperadores que consideraremos cumplen con la linealidad:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}) + \mathcal{L}(\mathcal{B}), \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(c\mathcal{A}) = c\mathcal{L}(\mathcal{A}), \quad c \in \mathbb{C}, \quad (2.4)$$

pero en general no son hermíticos ($\mathcal{L}^\dagger \neq \mathcal{L}$), lo cual implica que su ecuación de eigenvalores derecha sea diferente de la izquierda, esto es:

$$\mathcal{L}\hat{\rho}_n = \lambda_n\hat{\rho}_n, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}^\dagger\check{\rho}_n = \tilde{\lambda}_n\check{\rho}_n, \quad (2.6)$$

donde $\hat{\rho}_n$ y $\check{\rho}_n$ son los eigenvectores derechos e izquierdos respectivamente, y λ_n y $\tilde{\lambda}_n$ son los eigenvalores derechos e izquierdos respectivamente. Además, los eigenvalores izquierdos y derechos cumplen que $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n^*$ y los eigenvectores son biortonormales con respecto al producto interno de Hilbert-Schmidt [14, 15]:

$$\langle \check{\rho}_m, \hat{\rho}_n \rangle = \text{Tr}(\check{\rho}_m^\dagger \hat{\rho}_n) = \delta_{mn}. \quad (2.7)$$

La biortonormalidad puede entenderse como una generalización del concepto de ortonormalidad: en lugar de que los vectores sean mutuamente ortogonales dentro del mismo conjunto, cada eigenvector izquierdo es ortogonal a todos los eigenvectores derechos excepto al que comparte el mismo índice. De esta manera, es posible construir una base completa y expandir operadores incluso cuando el superoperador L no es hermítico, como se mostrará a continuación.

No todos los operadores no hermíticos son diagonalizables; en particular, cuando existen degeneraciones en el espectro, es necesario verificar si el operador admite una base completa de eigenvectores o si, por el contrario, requiere una forma de Jordan para su representación [16]. En nuestro caso, como se mostrará más adelante, aunque el liouvilliano presenta degeneraciones, sí es posible diagonalizarlo, lo que permite construir un conjunto completo de eigenvectores derechos e izquierdos.

Ya que los eigenvectores derechos e izquierdos forman una base completa del espacio de operadores, podemos expresar cualquier operador A como una combinación lineal de estos eigenvectores [14]:

$$A = \sum_n C_n \hat{\rho}_n, \quad \text{donde} \quad C_n = \text{Tr}(\check{\rho}_n^\dagger A). \quad (2.8)$$

Empleando esto podemos expandir la evolución temporal de la matriz de densidad $\rho(t)$ como

$$\rho(t) = \sum_n C_n(t) \hat{\rho}_n, \quad (2.9)$$

notemos que los coeficientes $C_n(t)$ dependen del tiempo. Sustituyendo esto en la ecuación (2.2) se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_n \dot{C}_n(t) \hat{\rho}_n &= \sum_n C_n(t) \mathcal{L}(\hat{\rho}_n) = \sum_n C_n(t) \lambda_n \hat{\rho}_n \\ \implies \dot{C}_n(t) &= \lambda_n C_n(t) \implies C_n(t) = e^{\lambda_n t} C_n(t_0). \end{aligned}$$

Finalmente la evolución temporal de la matriz de densidad es:

$$\rho(t) = \sum_n e^{\lambda_n(t-t_0)} C_n(t_0) \hat{\rho}_n, \quad \text{donde} \quad C_n(t_0) = \text{Tr}[\check{\rho}_n^\dagger \rho(t_0)]. \quad (2.10)$$

2.1.1 Vectorización

Una herramienta útil en la teoría de superoperadores es la vectorización por filas. Dado que los superoperadores actúan sobre operadores resulta conveniente representar estos operadores como vectores en un espacio de dimensión superior, lo que permite expresar las transformaciones mediante multiplicación matricial ordinaria. Esta técnica transforma un operador $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ en un vector $\text{vec}(A) \in \mathbb{C}^{d^2}$ al apilar sus filas de forma secuencial.

Formalmente, si A es una matriz de tamaño $d \times d$ con entradas A_{ij} , su vectorización por filas se define como:

$$\text{vec}(A) = \left(A_{11} \quad A_{12} \quad \cdots \quad A_{1d} \quad A_{21} \quad \cdots \quad A_{dd} \right)^T. \quad (2.11)$$

De esta forma, el espacio de operadores se convierte en un espacio vectorial de dimensión d^2 , sobre el cual los superoperadores pueden representarse como matrices de tamaño $d^2 \times d^2$.

A partir de ahora, representaremos la vectorización de un operador A como un ket con doble paréntesis angular:

$$\text{vec}(A) \equiv |A\rangle\rangle. \quad (2.12)$$

Esta notación es común en la literatura sobre teoría de superoperadores y teoría de matrices de densidad, y además permite trabajar con la notación de Dirac de manera formal, teniendo en cuenta que estos bra-kets forman una base biortonormal en lugar de ortonormal, como ocurre en el caso hermítico.

Este formalismo permite reformular la evolución temporal de la matriz de densidad, originalmente dada por la ecuación (2.2), como una ecuación diferencial vectorial:

$$\frac{d}{dt}|\rho\rangle\rangle = \mathcal{L}|\rho\rangle\rangle, \quad (2.13)$$

donde se usa la representación matricial del superoperador \mathcal{L} en el espacio vectorizado. Para construir esta representación matricial de superoperadores es común utilizar la identidad de Kronecker:

$$|A\rho B\rangle\rangle = (A \otimes B^T)|\rho\rangle\rangle. \quad (2.14)$$

2.1.2 Régimen markoviano y ecuación maestra de Lindblad

Describir la dinámica completa y exacta de un sistema cuántico acoplado a un entorno es, en general, una tarea inabordable. El entorno suele tener un número enorme de grados de libertad y su estado inicial es típicamente desconocido o, en el mejor de los casos, conocido sólo de forma estadística. Esta complejidad hace que la evolución del sistema no pueda describirse mediante una evolución unitaria simple, como lo haría un sistema aislado bajo la ecuación de Schrödinger. En su lugar, se requiere una descripción efectiva que capture la influencia del entorno sin necesidad de modelarlo completamente.

Una estrategia común es trabajar con la matriz de densidad reducida del sistema, obtenida al trazar sobre los grados de libertad del entorno. No obstante, incluso esta cantidad puede obedecer a una ecuación de evolución no local en el tiempo, ya que el entorno puede retener memoria de su interacción con el sistema. Para evitar este comportamiento complicado, se introducen dos aproximaciones clave: la aproximación de Born, que asume que el sistema y el entorno están débilmente acoplados, y la aproximación de Markov, que desprecia los efectos de memoria del entorno. Bajo estas suposiciones, se obtiene una ecuación local en el tiempo para la matriz de densidad del sistema, lo que define el régimen markoviano.

Para determinar la evolución temporal del sistema dentro del régimen markoviano consideremos un sistema acoplado a un entorno, con un hamiltoniano total dado por la

ecuación (1.6). La evolución total está gobernada por la ecuación de von Neumann:

$$\frac{d}{dt}\rho_{\text{total}}(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_{\text{total}}, \rho_{\text{total}}(t)]. \quad (2.15)$$

Para obtener una ecuación efectiva para el sistema, se utiliza la matriz de densidad reducida $\rho_S(t)$. Al trabajar en el marco de interacción y aplicar la aproximación de Born, se asume que el estado total se mantiene aproximadamente factorizado: $\rho_{\text{total}}(t) \approx \rho_S(t) \otimes \rho_E$, con el entorno en un estado estacionario ρ_E . Luego, bajo la aproximación de Markov, se extiende el límite superior de ciertas integrales al infinito y se ignoran las dependencias temporales pasadas, resultando en una ecuación local en el tiempo para ρ_S .

Mediante un desarrollo matemático más detallado, se puede demostrar que la forma más general que preserva la positividad, la traza y la hermiticidad de la matriz de densidad del sistema es [3, 7, 17]:

$$\frac{d\rho_S}{dt} = \mathcal{L}\rho_S = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \rho_S] + \sum_j \frac{\Gamma_j}{2}(2L_j\rho_S L_j^\dagger - L_j^\dagger L_j \rho_S - \rho_S L_j^\dagger L_j), \quad (2.16)$$

donde los L_j son operadores de Lindblad que encapsulan los efectos de la interacción con el entorno y Γ_j esta relacionada con las tasas de relajación del sistema generadas por el entorno. Esta es la **ecuación maestra de Lindblad**, deducida de forma rigurosa por Gorini, Kossakowski y Sudarshan en 1976 [18], y de forma independiente por Lindblad ese mismo año [19].

La ecuación (2.16) representa la evolución más general de tipo markoviano que es completamente positiva y preserva la traza. El primer término, de conmutador con el hamiltoniano, describe la evolución coherente del sistema, análoga a la ecuación de Schrödinger. Los términos restantes representan procesos irreversibles que surgen de la interacción con el entorno, como la disipación de energía y la pérdida de coherencia.

Cada operador L_k modela un canal de disipación o decoherencia. Por ejemplo, en un sistema de dos niveles, un operador de Lindblad típico es el operador de descenso σ , que describe la emisión espontánea del estado excitado al estado base. En este caso, la ecuación de Lindblad se puede escribir como:

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_j \gamma_j(2\sigma_j\rho\sigma_j^\dagger - \sigma_j^\dagger\sigma_j\rho - \rho\sigma_j^\dagger\sigma_j), \quad (2.17)$$

donde σ_j y σ_j^\dagger son los operadores de descenso y ascenso, respectivamente, del j -ésimo TLS y $\gamma_j = \Gamma_j/2$, esto es para simplificar los cálculos más adelante. Físicamente, Γ representa la

tasa de decaimiento espontáneo del átomo desde el estado excitado al estado base mediante la emisión de un fotón y define el tiempo de vida media del estado excitado como $\tau = 1/\Gamma$ [7].

2.2 Eigensistema de 1 TLS sin forzamiento

En esta sección resolvemos de forma explícita el espectro del superoperador de Liouville asociado a un sistema de dos niveles (TLS) en el régimen markoviano. Nuestro objetivo es encontrar el eigensistema (conjunto de eigenvalores y eigenvectores) derecho e izquierdo del liouvilliano, que describen completamente la evolución temporal del sistema. Para ello, partimos de la ecuación maestra de Lindblad en su forma matricial y representamos la matriz de densidad como un vector en un espacio de dimensión 4. Esta representación nos permite trabajar con una matriz cuya diagonalización proporciona una descripción completa de la dinámica.

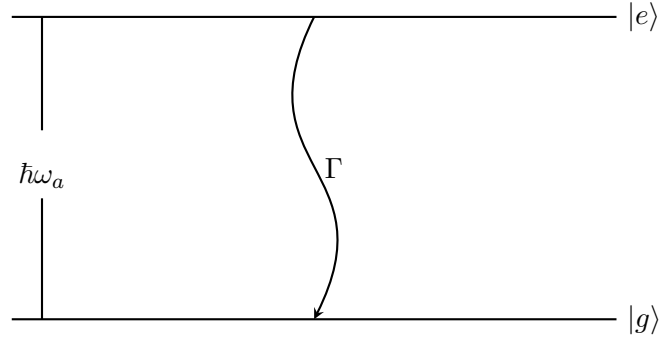


Figura 2.1: Representación de un TLS con tasa de decaimiento Γ y una separación de energía entre el estado base ($|g\rangle$) y excitado ($|e\rangle$) de $\hbar\omega_a$.

Consideramos un TLS con estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$, que representan el estado base y el estado excitado, respectivamente, sometido a un proceso de decaimiento del estado excitado hacia el base con tasa $\Gamma = 2\gamma$. El esquema de este sistema se muestra en la [Figura 2.1](#). Estos estados pueden ser representados en un espacio de Hilbert de dimensión 2 como:

$$|g\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

El hamiltoniano del sistema está dado por $H = E_e |e\rangle \langle e| + E_g |g\rangle \langle g|$, donde E_e y E_g son las energías asociadas al estado excitado y al estado base, respectivamente. La

diferencia de energía entre estos niveles es $\hbar\omega_a = E_e - E_g$, con ω_a siendo la frecuencia de transición del átomo. Podemos entonces escribir $E_e = E_g + \hbar\omega_a$ e introducirlo en el hamiltoniano, lo que nos permite reexpresarlo como

$$H = (E_g + \hbar\omega_a) |e\rangle \langle e| + E_g |g\rangle \langle g| = \hbar\omega_a |e\rangle \langle e| + E_g \mathbf{1}, \quad (2.19)$$

donde hemos utilizado que $|e\rangle \langle e| + |g\rangle \langle g| = \mathbf{1}$. El término $E_g \mathbf{1}$ representa una constante global de energía, que no tiene efecto sobre la dinámica del sistema. Por lo tanto, podemos fijar el nivel de energía de referencia en cero y trabajar con el hamiltoniano simplificado:

$$H = \hbar\omega_a |e\rangle \langle e| = \hbar\omega_a \sigma^\dagger \sigma, \quad (2.20)$$

donde hemos introducido los operadores de ascenso y descenso del sistema de dos niveles, definidos como $\sigma^\dagger = |e\rangle \langle g|$ y $\sigma = |g\rangle \langle e|$.

La evolución temporal del sistema está gobernada por la ecuación maestra de Lindblad, que en este caso se reduce a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\hat{\rho} &= -\frac{i}{\hbar}[H, \hat{\rho}] + \gamma(2\sigma\hat{\rho}\sigma^\dagger - \sigma^\dagger\sigma\hat{\rho} - \hat{\rho}\sigma^\dagger\sigma) \\ &= -\frac{i}{\hbar}(H\hat{\rho} - \hat{\rho}H - i\hbar\gamma\sigma^\dagger\sigma\hat{\rho} - i\hbar\gamma\hat{\rho}\sigma^\dagger\sigma) + 2\gamma\sigma\hat{\rho}\sigma^\dagger \\ &= -\frac{i}{\hbar}[(H - i\hbar\gamma\sigma^\dagger\sigma)\hat{\rho} - \hat{\rho}(H + i\hbar\gamma\sigma^\dagger\sigma)] + 2\gamma\sigma\hat{\rho}\sigma^\dagger \\ &= -\frac{i}{\hbar}(K\hat{\rho} - \hat{\rho}K^\dagger) + 2\gamma\sigma\hat{\rho}\sigma^\dagger, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde hemos definido el operador $K = H - i\hbar\gamma\sigma^\dagger\sigma$ como el hamiltoniano efectivo no hermítico del sistema, que incorpora el efecto del decaimiento del estado excitado hacia el estado base mediante el término imaginario.

Para construir la representación matricial del superoperador de Liouville \mathcal{L} , utilizamos la vectorización por filas de la matriz de densidad:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{vectorización}} |\rho\rangle\rangle = \begin{pmatrix} \rho_{00} \\ \rho_{01} \\ \rho_{10} \\ \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Aplicando esta transformación y usando la identidad de Kronecker (2.14), obtenemos una forma matricial explícita de \mathcal{L} para un TLS:

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{\hbar}(K \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes K^*) + 2\gamma\sigma \otimes \sigma \quad (2.23)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\gamma \\ 0 & -\gamma + i\omega_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma - i\omega_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\gamma \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Dado que \mathcal{L} es una matriz triangular superior, sus eigenvalores pueden leerse directamente de la diagonal. Estos son:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\gamma + i\omega_a, \quad \lambda_3 = -\gamma - i\omega_a, \quad \lambda_4 = -2\gamma \quad (2.25)$$

Con este conjunto de eigenvalores podemos resolver la ecuación de eigenvalores (2.5), obtenemos los siguientes eigenvectores derechos tras devolverlos a su forma matricial:

$$\hat{\rho}_1 = |g\rangle \langle g| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

$$\hat{\rho}_2 = |g\rangle \langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\hat{\rho}_3 = |e\rangle \langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\hat{\rho}_4 = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| = \sigma_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

El eigensistema izquierdo se resuelve de manera análoga utilizando \mathcal{L}^\dagger y la ecuación (2.6). Finalmente, en la [Tabla 2.1](#) se presenta el eigensistema derecho e izquierdo de un TLS:

n	λ_n	$\hat{\rho}_n$	$\check{\rho}_n$
1	0	$ g\rangle \langle g $	$\mathbf{1}$
2	$-\gamma + i\omega_a$	$ g\rangle \langle e $	$ g\rangle \langle e $
3	$-\gamma - i\omega_a$	$ e\rangle \langle g $	$ e\rangle \langle g $
4	-2γ	σ_z	$ e\rangle \langle e $

Tabla 2.1: Eigensistema derecho e izquierdo de 1 TLS. Recordemos que los eigenvalores correspondientes a los eigenvectores izquierdos son $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n^*$.

2.3 Eigensistema de 2 TLS sin forzamiento

El estudio de un único TLS resulta útil como punto de partida para familiarizarse con los elementos esenciales de la dinámica cuántica. Sin embargo, esta simplicidad limita la posibilidad de observar fenómenos genuinamente cuánticos que surgen al considerar múltiples sistemas en interacción. Entre estos fenómenos destaca el entrelazamiento, cuya presencia es indispensable para aplicaciones modernas en computación y procesamiento de información cuántica. En esta sección, se abordará el caso de dos TLS acoplados, donde tales efectos colectivos comienzan a manifestarse de forma no trivial.

El hamiltoniano que describe dos sistemas de dos niveles acoplados se expresa como:

$$H = \hbar\omega_1\sigma_1^\dagger\sigma_1 + \hbar\omega_2\sigma_2^\dagger\sigma_2 + \hbar\Omega(\sigma_1^\dagger\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2^\dagger), \quad (2.30)$$

donde los operadores de descenso se definen como $\sigma_1 = \sigma \otimes \mathbb{1}$ y $\sigma_2 = \mathbb{1} \otimes \sigma$. Los dos primeros términos corresponden a la energía de cada TLS individual, con frecuencias de transición ω_1 y ω_2 , respectivamente. El tercer término introduce el acoplamiento entre ambos TLS, con una intensidad dada por la constante de acoplamiento Ω , este término proviene de la interacción dipolo-dipolo [20]:

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 - 3(\vec{d}_1 \cdot \hat{r})(\vec{d}_2 \cdot \hat{r}) \right], \quad (2.31)$$

donde \vec{d}_1 y \vec{d}_2 son los operadores dipolares de los TLS, los cuales tienen la forma

$$\vec{d}_i = d_i(\sigma_i + \sigma_i^\dagger)\hat{u}_i, \quad (2.32)$$

con d_i la magnitud del dipolo, \hat{u}_i su dirección y \vec{r} el vector de separación entre ambos TLS [21]. Sustituyendo la forma de los operadores dipolares en H_{int} y aplicando la aproximación de onda rotante (RWA por sus singlas en inglés) ya que los términos que no conservan la energía oscilan rápidamente y su contribución promedio es despreciable, se obtiene:

$$H_{\text{int}} = \hbar\Omega(\sigma_1^\dagger\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2^\dagger), \quad \text{con } \Omega = \frac{d_1 d_2}{4\pi\epsilon_0 \hbar r^3} [\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 - 3(\hat{u}_1 \cdot \hat{r})(\hat{u}_2 \cdot \hat{r})]. \quad (2.33)$$

Ahora, construimos el hamiltoniano efectivo no hermítico de manera análoga a la sección anterior para incorporar el decaimiento de los estados excitados hacia el estado base de cada TLS:

$$K = H - i\hbar\gamma_1\sigma_1^\dagger\sigma_1 - i\hbar\gamma_2\sigma_2^\dagger\sigma_2, \quad (2.34)$$

donde γ_1 y γ_2 representan la mitad de las tasas de decaimiento de los TLS 1 y 2, respectivamente.

En computación cuántica, es habitual trabajar con sistemas compuestos por elementos físicamente idénticos, como átomos de la misma especie. Esta elección no solo simplifica el control experimental y la implementación de puertas lógicas, sino que también facilita la escalabilidad y mejora la eficiencia de los algoritmos cuánticos. Bajo esta motivación, consideraremos dos TLS idénticos, de modo que $\omega_1 = \omega_2 = \omega_a$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Definimos la variable compleja $z = \omega_a - i\gamma$ para simplificar la notación. Con estas suposiciones, la forma matricial del hamiltoniano efectivo toma la forma:

$$K = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & \Omega & 0 \\ 0 & \Omega & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Esta matriz es diagonal por bloques, lo que permite identificar fácilmente su espectro. El eigensistema de K y su adjunto K^\dagger es:

$$K |gg\rangle = 0, \quad (2.36)$$

$$K |\pm\rangle = \hbar(z \pm \Omega) |\pm\rangle, \quad (2.37)$$

$$K |ee\rangle = \hbar 2z |ee\rangle, \quad (2.38)$$

$$\langle gg| K^\dagger = 0, \quad (2.39)$$

$$\langle \pm| K^\dagger = \hbar(z^* \pm \Omega) \langle \pm|, \quad (2.40)$$

$$\langle ee| K^\dagger = \hbar 2z^* \langle ee|, \quad (2.41)$$

donde $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle \pm |ge\rangle)$.

Aunque es posible construir explícitamente la representación matricial de \mathcal{L} y resolver su espectro derecho e izquierdo de manera análoga al caso de un único TLS, esto implicaría trabajar con matrices de dimensión 16×16 , lo cual resulta poco práctico. En lugar de ello, aprovecharemos la estructura del sistema y deduciremos el eigensistema de \mathcal{L} a partir de su acción sobre la matriz densidad mediante los siguientes superoperadores auxiliares:

$$\mathcal{K}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}(K\hat{\rho} - \hat{\rho}K^\dagger), \quad (2.42)$$

$$\mathcal{J}\hat{\rho} = 2\gamma(\sigma_1\hat{\rho}\sigma_1^\dagger + \sigma_2\hat{\rho}\sigma_2^\dagger). \quad (2.43)$$

Con estos superoperadores, la ecuación maestra de Lindblad puede reescribirse como:

$$\mathcal{L}\hat{\rho} = \mathcal{K}\hat{\rho} + \mathcal{J}\hat{\rho}. \quad (2.44)$$

Dado que el superoperador \mathcal{K} está construido a partir del hamiltoniano efectivo K y su adjunto K^\dagger , su acción sobre la matriz densidad se puede entender completamente si conocemos el espectro de K y K^\dagger . En particular, los eigenvectores de \mathcal{K} serán combinaciones del tipo $|\phi_i\rangle\langle\phi_j|$, donde $|\phi_i\rangle$ y $\langle\phi_j|$ son eigenvectores de K y K^\dagger , respectivamente (en el Apéndice A.1 se muestran las formas matriciales de dichos eigenvectores). Por lo tanto, su acción está determinada por el eigensistema de K . No obstante, para completar la descripción del superoperador de Liouville \mathcal{L} , aún es necesario caracterizar la acción del superoperador \mathcal{J} .

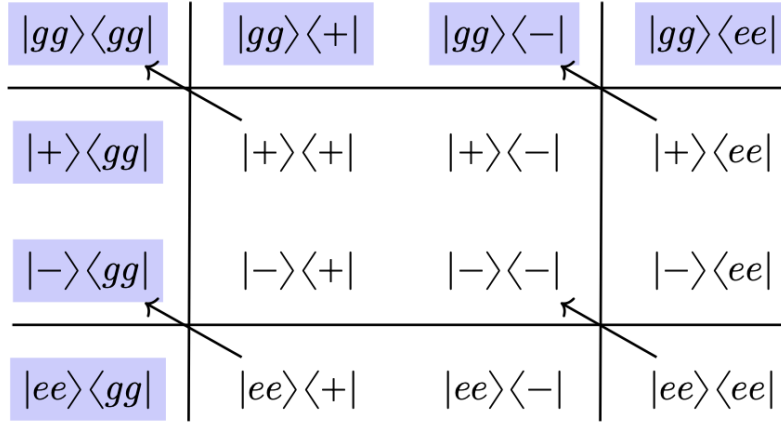


Figura 2.2: Esquema de la actuación del superoperador \mathcal{J} sobre matrices de densidad que son eigenvectores de \mathcal{K} y \mathcal{K}^\dagger .

El término \mathcal{J} se conoce como operador de brinco (aunque formalmente es un superoperador), y describe el proceso de decaimiento: su acción reduce el número de excitaciones en el sistema. Físicamente, esto representa la emisión de energía por parte del sistema, conectando estados con mayor excitación a otros con una excitación menor. Por ejemplo, los elementos marcados en azul en la Figura 2.2 corresponden a estados donde al menos uno de los lados (ket o bra) ya está en el estado base para ambos TLS. En estos casos, no es posible desexcitarlos más, por lo que \mathcal{J} simplemente los aniquila: $\mathcal{J}\hat{\rho} = 0$. En cambio, los demás elementos de la matriz (aquellos con una o más excitaciones en

ambos lados) son transformados en combinaciones lineales de estados con menor número de excitaciones. Por ejemplo, el término $|+\rangle\langle ee|$ tiene una excitación en el ket y dos en el bra. Bajo la acción de \mathcal{J} , este estado se proyecta sobre el subespacio con cero excitaciones en el ket y una en el bra, es decir, sobre una combinación lineal de $|gg\rangle\langle +|$ y $|gg\rangle\langle -|$.

Lo anterior puede ser comprobado matemáticamente a través de la forma de \mathcal{J} como se muestra en el Apéndice A.2. A continuación, se resumen los resultados obtenidos de dicho análisis:

$$\mathcal{J}|gg\rangle\langle gg| = 0, \quad (2.45)$$

$$\mathcal{J}|gg\rangle\langle +| = 0, \quad (2.46)$$

$$\mathcal{J}|gg\rangle\langle -| = 0, \quad (2.47)$$

$$\mathcal{J}|gg\rangle\langle ee| = 0, \quad (2.48)$$

$$\mathcal{J}|+\rangle\langle gg| = 0, \quad (2.49)$$

$$\mathcal{J}|-\rangle\langle gg| = 0, \quad (2.50)$$

$$\mathcal{J}|ee\rangle\langle gg| = 0, \quad (2.51)$$

$$\mathcal{J}|+\rangle\langle +| = 2\gamma|gg\rangle\langle gg|, \quad (2.52)$$

$$\mathcal{J}|+\rangle\langle -| = 0, \quad (2.53)$$

$$\mathcal{J}|-\rangle\langle +| = 0, \quad (2.54)$$

$$\mathcal{J}|-\rangle\langle -| = 2\gamma|gg\rangle\langle gg|, \quad (2.55)$$

$$\mathcal{J}|+\rangle\langle ee| = 2\gamma|gg\rangle\langle +|, \quad (2.56)$$

$$\mathcal{J}|-\rangle\langle ee| = -2\gamma|gg\rangle\langle -|, \quad (2.57)$$

$$\mathcal{J}|ee\rangle\langle +| = 2\gamma|+\rangle\langle gg|, \quad (2.58)$$

$$\mathcal{J}|ee\rangle\langle -| = -2\gamma|-\rangle\langle gg|, \quad (2.59)$$

$$\mathcal{J}|ee\rangle\langle ee| = 2\gamma(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|). \quad (2.60)$$

Con estos resultados, estamos en posición de construir el sistema de eigenvalores y eigenvectores del superoperador \mathcal{L} . En particular, cuando el operador de brinco aniquila una matriz de densidad (como ocurre, por ejemplo, con $|gg\rangle\langle gg|$) se cumple que $\mathcal{L}\hat{\rho} = \mathcal{K}\hat{\rho}$. Esto implica que dicha matriz de densidad es un eigenvector de \mathcal{L} . A partir de ahí, basta evaluar la acción explícita de \mathcal{L} sobre $\hat{\rho}$ para determinar el eigenvalor correspondiente.

Cuando el operador de brinco aniquila una matriz de densidad, es posible proponer un ansatz para el eigenvector de \mathcal{L} como la suma de un eigenvector de \mathcal{K} y del vector

hacia el que el operador de brinco lo proyecta, ponderado por un coeficiente desconocido. Aplicando el superoperador \mathcal{L} a este ansatz, se puede determinar el valor del coeficiente de manera consistente, lo que permite construir explícitamente el eigenvector de \mathcal{L} y obtener el eigenvalor asociado. Estos cálculos se presentan en el Apéndice A.3.

Para determinar el eigensistema izquierdo del superoperador \mathcal{L} , una opción sería trabajar directamente con su adjunto \mathcal{L}^\dagger ; sin embargo, resulta más eficiente aprovechar que los eigenvalores izquierdos corresponden al complejo conjugado de los derechos. Los eigenvectores izquierdos $\check{\rho}_m$ se construyen a través de un ansatz que satisfaga la condición de biortonormalidad bajo el producto interno de Hilbert-Schmidt. En primer lugar, se impone la normalización mediante $\text{Tr}(\check{\rho}_n^\dagger \hat{\rho}_n) = 1$, y luego se verifica la biortogonalidad con el resto de los eigenvectores derechos: $\text{Tr}(\check{\rho}_m^\dagger \hat{\rho}_n) = 0$ para todo $n \neq m$. Si esta última condición no se cumple, el ansatz se corrige añadiendo un término que cancele la contribución indeseada. Los cálculos se muestran en el Apéndice A.4.

Los resultados completos para el eigensistema derecho e izquierdo de un sistema de 2 TLS se presentan en la [Tabla 2.2](#).

\mathbf{n}	$\lambda_{\mathbf{n}}$	$\hat{\rho}_{\mathbf{n}}$	$\check{\rho}_{\mathbf{n}}$
1	0	$ gg\rangle\langle gg $	$\mathbf{1}$
2	$-\gamma + i(\omega_a + \Omega)$	$ gg\rangle\langle + $	$ gg\rangle\langle + + \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} +\rangle\langle ee $
3	$-\gamma + i(\omega_a - \Omega)$	$ gg\rangle\langle - $	$ gg\rangle\langle - - \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} -\rangle\langle ee $
4	$-2(\gamma - i\omega_a)$	$ gg\rangle\langle ee $	$ gg\rangle\langle ee $
5	$-\gamma - i(\omega_a + \Omega)$	$ +\rangle\langle gg $	$ +\rangle\langle gg + \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} ee\rangle\langle + $
6	$-\gamma - i(\omega_a - \Omega)$	$ -\rangle\langle gg $	$ -\rangle\langle gg - \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} ee\rangle\langle - $
7	$-2(\gamma + i\omega_a)$	$ ee\rangle\langle gg $	$ ee\rangle\langle gg $
8	-2γ	$ +\rangle\langle + - gg\rangle\langle gg $	$ +\rangle\langle + + ee\rangle\langle ee $
9	$-2(\gamma + i\Omega)$	$ +\rangle\langle - $	$ +\rangle\langle - $
10	$-2(\gamma - i\Omega)$	$ -\rangle\langle + $	$ -\rangle\langle + $
11	-2γ	$ -\rangle\langle - - gg\rangle\langle gg $	$ -\rangle\langle - + ee\rangle\langle ee $
12	$-3\gamma + i(\omega_a - \Omega)$	$ +\rangle\langle ee - \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} gg\rangle\langle + $	$ +\rangle\langle ee $
13	$-3\gamma + i(\omega_a + \Omega)$	$ -\rangle\langle ee + \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} gg\rangle\langle - $	$ -\rangle\langle ee $
14	$-3\gamma - i(\omega_a - \Omega)$	$ ee\rangle\langle + - \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} +\rangle\langle gg $	$ ee\rangle\langle + $
15	$-3\gamma - i(\omega_a + \Omega)$	$ ee\rangle\langle - + \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} -\rangle\langle gg $	$ ee\rangle\langle - $
16	-4γ	$ ee\rangle\langle ee - +\rangle\langle + - -\rangle\langle - + gg\rangle\langle gg $	$ ee\rangle\langle ee $

Tabla 2.2: Eigensistema derecho e izquierdo de 2 TLS.

En este punto resulta pertinente aclarar el significado físico de los eigenvalores complejos. En mecánica cuántica estamos acostumbrados a trabajar con hamiltonianos

hermíticos, cuyos eigenvalores son reales y se interpretan de manera directa como las energías del sistema en diferentes estados. En contraste, el liouvilliano no es un operador hermítico, por lo que sus eigenvalores no necesariamente son reales. No obstante, siguen teniendo una interpretación física clara: como se aprecia en la ecuación (2.10), los eigenvalores aparecen en los exponentes que gobiernan la evolución temporal. De este modo, la parte real de un eigenvalor corresponde a un decaimiento exponencial, mientras que su parte imaginaria describe una oscilación asociada al eigenvector correspondiente.

Esta interpretación es consistente con la física del sistema. Por ejemplo, el estado doblemente excitado es el que presenta el mayor decaimiento, ya que al contener dos excitaciones la probabilidad de emisión espontánea es más alta. De manera opuesta, el estado fundamental no puede decaer más, por lo que su eigenvalor asociado es exactamente cero. Finalmente, los eigenvalores complejos se relacionan con eigenvectores que involucran coherencias, es decir, superposiciones entre estados distintos. Un caso ilustrativo es la coherencia $|gg\rangle\langle ee|$, cuyo eigenvalor complejo refleja la oscilación debida a la interferencia entre ambos estados. En el capítulo 4 profundizaremos en la dinámica y el significado físico de estos resultados.

2.4 Sistemas con forzamiento y marco de interacción

Hasta ahora hemos resuelto los sistemas sin forzamiento, que servirán como sistemas no perturbados para abordar el problema principal de esta tesis: dos átomos de dos niveles acoplados entre sí y sometidos a un forzamiento coherente en el contexto de sistemas cuánticos abiertos. Este forzamiento coherente consiste en un campo eléctrico con ciertas características, que detallaremos más adelante. Para poder desarrollar la teoría de perturbaciones independiente del tiempo, es conveniente pasar primero a un marco de interacción, en el cual la dependencia temporal se elimina del hamiltoniano. A continuación, describiremos este cambio de marco, del de Schrödinger al de interacción, para el caso de dos TLS, ya que el de un solo TLS es análogo, salvo por la ausencia de los términos de interacción entre ambos sistemas y puede tratarse de manera similar.

En el marco de Schrödinger, el hamiltoniano total del sistema puede descomponerse en tres contribuciones,

$$H = H_{\text{libre}} + H_{\text{int}} + H_{\text{ac}}, \quad (2.61)$$

donde el término de evolución libre de los 2 TLS está dado por

$$H_{\text{libre}} = \hbar\omega_a \left(\sigma_1^\dagger \sigma_1 + \sigma_2^\dagger \sigma_2 \right), \quad (2.62)$$

el acoplamiento directo entre ellos se describe mediante

$$H_{\text{int}} = \hbar\Omega \left(\sigma_1^\dagger \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2^\dagger \right), \quad (2.63)$$

y la interacción con un campo externo clásico proviene del acoplamiento dipolar de cada TLS con un campo electromagnético, tal como el generado por un láser [21]:

$$H_{\text{ac}} = -\vec{d}_1 \cdot \vec{E}(t) - \vec{d}_2 \cdot \vec{E}(t). \quad (2.64)$$

Sustituyendo el operador de dipolo (asumiendo que ambos átomos poseen un dipolo de la misma magnitud) y escribiendo el campo eléctrico como $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega_L t) \hat{e}$, donde E_0 es la amplitud, ω_L la frecuencia y \hat{e} el vector unitario de polarización, se obtiene

$$H_{\text{ac}} = -dE_0 \cos(\omega_L t) \left[(\sigma_1^\dagger + \sigma_1)(\hat{u}_1 \cdot \hat{e}) + (\sigma_2^\dagger + \sigma_2)(\hat{u}_2 \cdot \hat{e}) \right]. \quad (2.65)$$

Para simplificar la expresión anterior, consideramos que la polarización del campo eléctrico está alineada con los dipolos de ambos TLS. En este caso se cumple $\hat{u}_1 \cdot \hat{e} = \hat{u}_2 \cdot \hat{e} = 1$, lo que implica además que los dipolos son paralelos entre sí. Definiendo la constante de acoplamiento dipolar entre cada TLS y el campo externo como $\hbar\epsilon_0 = -dE_0$, el hamiltoniano de interacción con el campo se reduce a

$$H_{\text{ac}} = \hbar\epsilon_0 \cos(\omega_L t) (\sigma_1^\dagger + \sigma_1 + \sigma_2^\dagger + \sigma_2). \quad (2.66)$$

Una vez establecido el hamiltoniano total en el marco de Schrödinger, y dado que nuestro interés es trabajar en un marco en rotación con la frecuencia del láser, introducimos el operador unitario [21]:

$$U(t) = e^{-i\omega_L t (\sigma_1^\dagger \sigma_1 + \sigma_2^\dagger \sigma_2)}, \quad (2.67)$$

el cual nos permite realizar el cambio de representación. En particular, la matriz de densidad en el marco de interacción se obtiene a partir de la transformación

$$\rho_I(t) = U^\dagger(t) \rho(t) U(t). \quad (2.68)$$

Por lo tanto, la evolución temporal de la matriz de densidad en el marco de interacción viene dada por:

$$\dot{\rho}_I(t) = \dot{U}^\dagger(t) \rho(t) U(t) + U^\dagger(t) \dot{\rho}(t) U(t) + U^\dagger(t) \rho(t) \dot{U}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= i\omega_L N U^\dagger(t) \rho(t) U(t) + U^\dagger(t) \dot{\rho}(t) U(t) - i\omega_L U^\dagger(t) \rho(t) U(t) N \\
&= i\omega_L [N, \rho_I(t)] + U^\dagger(t) \dot{\rho}(t) U(t),
\end{aligned} \tag{2.69}$$

donde $N = \sigma_1^\dagger \sigma_1 + \sigma_2^\dagger \sigma_2$ es el operador número total de excitaciones en el sistema.

Sustituyendo la ecuación maestra de Lindblad en el marco de Schrödinger (2.17) en la expresión anterior, obtenemos:

$$\dot{\rho}_I(t) = -i\omega [N, \rho_I(t)] - \frac{i}{\hbar} [U^\dagger(t) (H_{\text{int}} + H_{\text{ac}}) U(t), \rho_I(t)] + U^\dagger(t) \mathcal{D}(\rho(t)) U(t), \tag{2.70}$$

donde $\omega = \omega_a - \omega_L$ corresponde a la desintonización del láser respecto a la frecuencia de transición atómica, y el término disipativo está dado por $\mathcal{D}(\rho(t)) = \gamma \sum_i (2\sigma_i \rho \sigma_i^\dagger - \sigma_i^\dagger \sigma_i \rho - \rho \sigma_i^\dagger \sigma_i)$.

A continuación se calcula la transformación de los hamiltonianos de interacción entre los TLS y de acoplamiento con el campo. Para el primer caso, notemos que $[N, \sigma_1^\dagger \sigma_2] = [N, \sigma_1 \sigma_2^\dagger] = 0$, ya que ambos operadores conservan el número total de excitaciones al desexcitar un átomo y excitar el otro. De esta forma,

$$U^\dagger(t) H_{\text{int}} U(t) = H_{\text{int}}. \tag{2.71}$$

En cuanto al acoplamiento con el campo, utilizamos las relaciones de conmutación $[N, \sigma_i] = -\sigma_i$ y $[N, \sigma_i^\dagger] = \sigma_i^\dagger$, de las cuales se sigue que

$$U^\dagger(t) \sigma_i U(t) = \sigma_i e^{-i\omega_L t}, \quad U^\dagger(t) \sigma_i^\dagger U(t) = \sigma_i^\dagger e^{i\omega_L t}. \tag{2.72}$$

Con esto, el hamiltoniano de acoplamiento en el marco de interacción toma la forma

$$\begin{aligned}
U^\dagger(t) H_{\text{ac}} U(t) &= \hbar \epsilon_0 \cos(\omega_L t) (\sigma_1 e^{-i\omega_L t} + \sigma_1^\dagger e^{i\omega_L t} + \sigma_2 e^{-i\omega_L t} + \sigma_2^\dagger e^{i\omega_L t}) \\
&= \hbar \epsilon \left(\sigma_1 e^{-2i\omega_L t} + \sigma_2 e^{-2i\omega_L t} + \sigma_1^\dagger e^{2i\omega_L t} + \sigma_2^\dagger e^{2i\omega_L t} + \sigma_1 + \sigma_1^\dagger + \sigma_2 + \sigma_2^\dagger \right),
\end{aligned} \tag{2.73}$$

donde se ha usado la identidad $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ y la definición $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{2}$. Finalmente, aplicando RWA, en la cual se descartan los términos que oscilan rápidamente con factores $e^{\pm 2i\omega_L t}$, se obtiene la expresión simplificada

$$U^\dagger(t) H_{\text{ac}} U(t) \approx \hbar \epsilon \left(\sigma_1 + \sigma_1^\dagger + \sigma_2 + \sigma_2^\dagger \right). \tag{2.74}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la ecuación de evolución de la matriz de densidad en el marco de interacción, se llega a:

$$\dot{\rho}_I(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_I, \rho_I(t)] + \gamma \sum_i (2\sigma_i \rho_I \sigma_i^\dagger - \sigma_i^\dagger \sigma_i \rho_I - \rho_I \sigma_i^\dagger \sigma_i), \tag{2.75}$$

donde el hamiltoniano efectivo en el marco de interacción es

$$H_I = \hbar\omega \left(\sigma_1^\dagger \sigma_1 + \sigma_2^\dagger \sigma_2 \right) + \hbar\Omega \left(\sigma_1^\dagger \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2^\dagger \right) + \hbar\epsilon \left(\sigma_1 + \sigma_1^\dagger + \sigma_2 + \sigma_2^\dagger \right). \quad (2.76)$$

Notemos que $H_I = U^\dagger(t) H U(t) - i\hbar U^\dagger(t) \dot{U}(t)$, que es la transformación estándar de un hamiltoniano al marco de interacción [21]. Además, la forma del término disipativo permanece inalterada bajo esta transformación, debido a que las fases se cancelan al aplicar $U(t)$ y $U^\dagger(t)$ a los operadores de salto σ_i y σ_i^\dagger .

De este modo, hemos expresado la dinámica del sistema en el marco de interacción. En principio, para interpretar los resultados sería necesario regresar al marco de Schrödinger; sin embargo, como se mostrará a continuación, las propiedades que estudiaremos (poblaciones, módulos de coherencias y concurrencia) son invariantes bajo esta transformación. Asimismo, los estados iniciales del sistema se mantienen idénticos en ambos marcos, lo que permite analizar completamente la dinámica sin necesidad de retornar al marco de Schrödinger. Cabe señalar que las poblaciones, las coherencias y la concurrencia serán explicadas y detalladas más adelante; en este punto únicamente se demostrará su invarianza bajo el cambio de marco.

Poblaciones: notemos que los estados $|gg\rangle$, $|ge\rangle$, $|eg\rangle$ y $|ee\rangle$ son eigenestados del operador número N , con eigenvalores 0, 1, 1 y 2, respectivamente. Por lo tanto, las poblaciones, que tienen la forma $\langle j | \rho_I(t) | j \rangle$ con $j = gg, ge, eg, ee$, son invariantes bajo la transformación al marco de interacción.

$$\begin{aligned} \langle j | \rho_I(t) | j \rangle &= \langle j | U^\dagger(t) \rho(t) U(t) | j \rangle \\ &= \langle j | e^{i\omega_L t N} \rho(t) e^{-i\omega_L t N} | j \rangle \\ &= e^{i\omega_L t n_j} \langle j | \rho(t) e^{-i\omega_L t n_j} | j \rangle \\ &= \langle j | \rho(t) | j \rangle, \end{aligned} \quad (2.77)$$

donde n_j es el eigenvalor correspondiente al estado $|j\rangle$, el número de excitaciones del estado.

Módulos de coherencias: las coherencias entre los estados $|gg\rangle$, $|ge\rangle$, $|eg\rangle$ y $|ee\rangle$ también son invariantes bajo la transformación al marco de interacción. La forma de las coherencias es $\langle j | \rho_I(t) | k \rangle$ con $j, k = gg, ge, eg, ee$ y $j \neq k$. Siguiendo un razonamiento similar al caso de las poblaciones, se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle j | \rho_I(t) | k \rangle &= \langle j | U^\dagger(t) \rho(t) U(t) | k \rangle \\ &= \langle j | e^{i\omega_L t N} \rho(t) e^{-i\omega_L t N} | k \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle j | e^{i\omega_L t n_j} \rho(t) e^{-i\omega_L t n_k} | k \rangle \\
&= e^{i\omega_L t (n_j - n_k)} \langle j | \rho(t) | k \rangle \\
\Rightarrow |\langle j | \rho_I(t) | k \rangle| &= |\langle j | \rho(t) | k \rangle|. \tag{2.78}
\end{aligned}$$

Entrelazamiento: dado que el entrelazamiento no puede ser creado ni destruido mediante transformaciones unitarias locales [1], las medidas de entrelazamiento como la concurrencia y la negatividad son invariantes bajo la transformación $U = U_1 \otimes U_2$, con $U_i = e^{-i\omega_L t \sigma_i^\dagger \sigma_i}$, la cual es unitaria y actúa localmente sobre cada TLS.

Capítulo 3

Teoría de perturbaciones

En este capítulo se desarrolla la teoría de perturbaciones para superoperadores, herramienta fundamental para abordar sistemas cuya evolución no puede resolverse de manera exacta. Se comienza con el tratamiento del caso no degenerado, donde los eigenvalores del superoperador liouvilliano son distintos, para luego extender el análisis al caso degenerado, en el que coexisten múltiples eigenvectores asociados a un mismo eigenvalor. Este enfoque permite calcular correcciones a los eigensistemas de manera sistemática.

Asimismo, se introduce el marco de interacción, esta transformación facilita la incorporación de perturbaciones externas de manera controlada, adaptando la teoría de perturbaciones al contexto físico que nos interesa. Finalmente, la metodología desarrollada se aplica explícitamente a sistemas de 1 y 2 TLS, obteniendo soluciones aproximadas que permiten analizar el efecto del forzamiento sobre poblaciones, coherencias y entrelazamiento, cuya interpretación física se presenta en el [Capítulo 4](#).

3.1 Caso no degenerado

El propósito de esta sección es calcular correcciones de primer orden a los eigenvectores y hasta de segundo orden a los eigenvalores de un sistema cuántico abierto descrito por un superoperador de Liouville. Supondremos que dicho superoperador tiene la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \epsilon\mathcal{L}_1, \tag{3.1}$$

donde \mathcal{L}_0 representa la dinámica no perturbada, cuyo eigensistema, tanto derecho como izquierdo, se conoce con exactitud, y \mathcal{L}_1 es un término pequeño que introduce una perturbación en el sistema, gobernada por el parámetro $\epsilon \ll 1$.

Realizaremos una expansión en serie de potencias de ϵ para los eigenvalores y eigenvectores derechos e izquierdo del superoperador \mathcal{L} :

$$\lambda_n = \lambda_n^{(0)} + \epsilon \lambda_n^{(1)} + \epsilon^2 \lambda_n^{(2)} + \dots, \quad (3.2)$$

$$\hat{\rho}_n = \hat{\rho}_n^{(0)} + \epsilon \hat{\rho}_n^{(1)} + \epsilon^2 \hat{\rho}_n^{(2)} + \dots, \quad (3.3)$$

$$\tilde{\lambda}_n = \tilde{\lambda}_n^{(0)} + \epsilon \tilde{\lambda}_n^{(1)} + \epsilon^2 \tilde{\lambda}_n^{(2)} + \dots, \quad (3.4)$$

$$\check{\rho}_n = \check{\rho}_n^{(0)} + \epsilon \check{\rho}_n^{(1)} + \epsilon^2 \check{\rho}_n^{(2)} + \dots. \quad (3.5)$$

A continuación sustituimos las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) en la ecuación (2.5) y agrupando términos de igual orden en ϵ obtenemos [6, 22, 23]:

$$\epsilon^0 : (\lambda_n^{(0)} - \mathcal{L}_0) \hat{\rho}_n^{(0)} = 0, \quad (3.6)$$

$$\epsilon^1 : (\lambda_n^{(0)} - \mathcal{L}_0) \hat{\rho}_n^{(1)} = (\mathcal{L}_1 - \lambda_n^{(1)}) \hat{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.7)$$

$$\epsilon^2 : (\lambda_n^{(0)} - \mathcal{L}_0) \hat{\rho}_n^{(2)} = (\mathcal{L}_1 - \lambda_n^{(1)}) \hat{\rho}_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)} \hat{\rho}_n^{(0)}. \quad (3.8)$$

Notemos que la ecuación (3.6) no es más que la ecuación de eigenvalores para el superoperador liouvilliano no perturbado, cuyo eigensistema ya conocemos.

Definimos el proyector P_n como el operador que proyecta sobre el n -ésimo eigenvector derecho de orden cero. Su acción sobre un operador ρ está dada por

$$P_n \rho = \text{Tr}(\check{\rho}_n^{(0)\dagger} \rho) \hat{\rho}_n^{(0)}. \quad (3.9)$$

De forma complementaria, el proyector sobre el resto de eigenvectores derechos de orden cero se define como

$$Q_n = \mathbb{1} - P_n. \quad (3.10)$$

Algunas propiedades de estos proyectores que utilizaremos repetidamente son:

$$P_n \hat{\rho}_n^{(p)} = \begin{cases} \hat{\rho}_n^{(0)}, & \text{si } p = 0 \\ 0, & \text{si } p > 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$Q_n \hat{\rho}_n^{(p)} = \begin{cases} 0, & \text{si } p = 0 \\ \hat{\rho}_n^{(p)}, & \text{si } p > 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

donde hemos usado que $\text{Tr}(\check{\rho}_n^{(0)} \hat{\rho}_n^{(p)}) = 0$ para $p > 0$, es decir, las correcciones de los eigenvectores no tienen componente en su propio eigenvector de orden cero.

Además de estas propiedades también emplearemos que los proyectores conmutan con \mathcal{L}_0 ya que están contruidos a partir de sus eigenvectores:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 P_n \rho &= \mathcal{L}_0 \text{Tr}(\check{\rho}_n^{(0)\dagger} \rho) \hat{\rho}_n^{(0)} = \text{Tr}(\check{\rho}_n^{(0)\dagger} \rho) \mathcal{L}_0 \hat{\rho}_n^{(0)} = \text{Tr}(\check{\rho}_n^{(0)\dagger} \rho) \lambda_n^{(0)} \hat{\rho}_n^{(0)} \\ P_n \mathcal{L}_0 \rho &= \text{Tr}(\check{\rho}_n^{(0)\dagger} \mathcal{L}_0 \rho) \hat{\rho}_n^{(0)} = \text{Tr}[(\mathcal{L}_0^\dagger \check{\rho}_n^{(0)})^\dagger \rho] \hat{\rho}_n^{(0)} = \text{Tr}[(\lambda_n^{(0)*} \check{\rho}_n^{(0)})^\dagger \rho] \hat{\rho}_n^{(0)} = \text{Tr}(\check{\rho}_n^{(0)\dagger} \rho) \lambda_n^{(0)} \hat{\rho}_n^{(0)} \\ \implies \mathcal{L}_0 P_n &= P_n \mathcal{L}_0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Y como \mathcal{L}_0 conmuta con la identidad, Q_n también conmuta con \mathcal{L}_0 :

$$\mathcal{L}_0 Q_n = Q_n \mathcal{L}_0. \quad (3.14)$$

Para obtener la corrección a primer orden de los eigenvalores derechos, aplicamos P_n a la ecuación (3.7):

$$P_n (\lambda_n^{(0)} - \mathcal{L}_0) \hat{\rho}_n^{(1)} = P_n (\mathcal{L}_1 - \lambda_n^{(1)}) \hat{\rho}_n^{(0)}. \quad (3.15)$$

Utilizando la propiedades anteriores vemos que solo sobrevive el lado derecho de la expresión, entonces:

$$P_n \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(0)} = \lambda_n^{(1)} \hat{\rho}_n^{(0)}. \quad (3.16)$$

Con esto obtenemos que la corrección a primer orden de los eigenvalores derechos es:

$$\boxed{\lambda_n^{(1)} = \text{Tr}(\check{\rho}_n^{(0)\dagger} \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(0)})}. \quad (3.17)$$

En el caso de 1 y 2 TLS, la corrección de primer orden a los eigenvalores resulta ser nula. Por lo tanto, con el fin de simplificar los cálculos posteriores, aprovecharemos este resultado en lo que sigue.

La corrección a primer orden de los eigenvectores derechos, se obtiene aplicando Q_n a la ecuación (3.7):

$$\hat{\rho}_n^{(1)} = \frac{Q_n}{\lambda_n^{(0)} - \mathcal{L}_0} (\mathcal{L}_1 - \lambda_n^{(1)}) \hat{\rho}_n^{(0)}. \quad (3.18)$$

Observemos que el operador $(\lambda_n^{(0)} - \mathcal{L}_0)$ es invertible cuando se restringe al subespacio sobre el que proyecta Q_n . Esto se debe a que Q_n elimina la componente del eigenvector asociado a $\lambda_n^{(0)}$, y en consecuencia, \mathcal{L}_0 no actúa con ese eigenvalor dentro del subespacio. Así, el operador nunca se anula, evitando cualquier singularidad al invertirlo.

Utilizando que $\lambda_n^{(1)} = 0$ y el resolvente:

$$S_n = \frac{Q_n}{\lambda_n^{(0)} - \mathcal{L}_0}, \quad (3.19)$$

podemos escribir la corrección a primer orden de los eigenvectores derechos como:

$$\boxed{\hat{\rho}_n^{(1)} = S_n \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(0)}}. \quad (3.20)$$

Procedemos ahora al cálculo de la corrección de segundo orden de los eigenvalores derechos. Para ello, aplicamos el proyector P_n a la ecuación (3.8). Utilizando las propiedades y resultados previamente establecidos, se observa que el lado izquierdo se anula. Al aislar el término que contiene a $\lambda_n^{(2)}$, se obtiene:

$$\lambda_n^{(2)} \hat{\rho}_n^{(0)} = P_n \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(1)} = \text{Tr}(\check{\rho}_n^{(0)\dagger} \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(1)}) \hat{\rho}_n^{(0)}. \quad (3.21)$$

Haciendo uso de la expresión (3.20) para sustituir $\hat{\rho}_n^{(1)}$, obtenemos:

$$\boxed{\lambda_n^{(2)} = \text{Tr}(\check{\rho}_n^{(0)\dagger} \mathcal{L}_1 S_n \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(0)})}. \quad (3.22)$$

Finalmente, para la corrección de segundo orden de los eigenvectores derechos, aplicamos Q_n a la ecuación (3.8) para obtener:

$$\hat{\rho}_n^{(2)} = \frac{Q_n}{\lambda_n^{(0)} - \mathcal{L}_0} (\mathcal{L}_1 - \lambda_n^{(1)}) \hat{\rho}_n^{(1)}. \quad (3.23)$$

Utilizando la definición de S_n , el hecho de que $\lambda_n^{(1)} = 0$ y la expresión (3.20), podemos escribir la corrección de segundo orden de los eigenvectores derechos como:

$$\boxed{\hat{\rho}_n^{(2)} = S_n \mathcal{L}_1 S_n \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(0)}}. \quad (3.24)$$

Las correcciones a eigenvalores y eigenvectores izquierdos se obtienen de manera análoga al insertar las expansiones de eigenvalores y eigenvectores izquierdos ((3.4) y (3.5) respectivamente) en la ecuación de eigenvalores para \mathcal{L}_0^\dagger (2.6). Así como definiendo los proyectores a los eigenvectores izquierdos de orden cero como:

$$\tilde{P}_n \rho = \text{Tr}(\hat{\rho}_n^{(0)\dagger} \rho) \check{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.25)$$

$$\tilde{Q}_n = \mathbb{1} - \tilde{P}_n. \quad (3.26)$$

Sea $\tilde{S}_n = \frac{\tilde{Q}_n}{\lambda_n^{(0)*} - \mathcal{L}_0^\dagger}$, las correcciones izquierdas son:

derecha, son:

$$\epsilon^0 : (\lambda_D - \mathcal{L}_0)\hat{\rho}_n^{(0)} = 0, \quad (3.32)$$

$$\epsilon^1 : (\lambda_D - \mathcal{L}_0)\hat{\rho}_n^{(1)} = (\mathcal{L}_1 - \lambda_n^{(1)})\hat{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.33)$$

$$\epsilon^2 : (\lambda_D - \mathcal{L}_0)\hat{\rho}_n^{(2)} = (\mathcal{L}_1 - \lambda_n^{(1)})\hat{\rho}_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)}\hat{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.34)$$

$$\epsilon^3 : (\lambda_D - \mathcal{L}_0)\hat{\rho}_n^{(3)} = (\mathcal{L}_1 - \lambda_n^{(1)})\hat{\rho}_n^{(2)} - \lambda_n^{(2)}\hat{\rho}_n^{(1)} - \lambda_n^{(3)}\hat{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.35)$$

$$\epsilon^4 : (\lambda_D - \mathcal{L}_0)\hat{\rho}_n^{(4)} = (\mathcal{L}_1 - \lambda_n^{(1)})\hat{\rho}_n^{(3)} - \lambda_n^{(2)}\hat{\rho}_n^{(2)} - \lambda_n^{(3)}\hat{\rho}_n^{(1)} - \lambda_n^{(4)}\hat{\rho}_n^{(0)}. \quad (3.36)$$

Para continuar, debemos definir el proyector P_D que proyecta sobre el subespacio degenerado de eigenvectores de orden cero:

$$P_D = \sum_{n \in D} P_n. \quad (3.37)$$

Y por consiguiente, el proyector complementario Q_D que proyecta sobre el complemento ortogonal del subespacio degenerado:

$$Q_D = \mathbb{1} - P_D. \quad (3.38)$$

Notemos que, a diferencia del caso no degenerado, el operador P_D se define como la suma de los proyectores correspondientes a todos los eigenvectores de orden cero asociados al eigenvalor degenerado λ_D . Esta definición es necesaria porque todos estos eigenvectores comparten el mismo eigenvalor, lo que implica que intentar invertir la expresión $(\lambda_D - \mathcal{L}_0)$ sin aislar adecuadamente el subespacio degenerado conduciría a una singularidad.

Como P_D es una suma de P_n , tanto P_D como Q_D conmutan con \mathcal{L}_0 . Veamos la aplicación de estos proyectores a los eigenvectores de orden cero y a las correcciones de orden superior:

$$P_D \hat{\rho}_n^{(0)} = \sum_{m \in D} P_m \hat{\rho}_n^{(0)} = \sum_{m \in D} \text{Tr}(\check{\rho}_m^{(0)\dagger} \hat{\rho}_n^{(0)}) \hat{\rho}_m^{(0)} = \sum_{m \in D} \delta_{mn} \hat{\rho}_m^{(0)} = \hat{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.39)$$

$$P_D \hat{\rho}_n^{(p)} = \sum_{m \in D} P_m \hat{\rho}_n^{(p)} = \sum_{m \in D} \text{Tr}(\check{\rho}_m^{(0)\dagger} \hat{\rho}_n^{(p)}) \hat{\rho}_m^{(0)}, \quad (3.40)$$

$$Q_D \hat{\rho}_n^{(0)} = \hat{\rho}_n^{(0)} - P_D \hat{\rho}_n^{(0)} = 0, \quad (3.41)$$

$$Q_D \hat{\rho}_n^{(p)} = \hat{\rho}_n^{(p)} - P_D \hat{\rho}_n^{(p)} = \hat{\rho}_n^{(p)} - \sum_{m \in D} \text{Tr}(\check{\rho}_m^{(0)\dagger} \hat{\rho}_n^{(p)}) \hat{\rho}_m^{(0)}, \quad (3.42)$$

donde $p \neq 0$. En este caso, la aplicación de los proyectores a las correcciones de los eigenvectores (ecuaciones (3.40) y (3.42)) no se simplifica como en el caso no degenerado. Por lo tanto, a lo largo del desarrollo será necesario encontrarlas explícitamente.

Iniciamos aplicando P_D a la ecuación (3.33):

$$P_D(\lambda_D - \mathcal{L}_0)\hat{\rho}_n^{(1)} = P_D(\mathcal{L}_1 - \lambda_n^{(1)})\hat{\rho}_n^{(0)}. \quad (3.43)$$

En esta ecuación el lado izquierdo se anula y utilizando la propiedad (3.39), el lado derecho se simplifica a:

$$\boxed{\lambda_n^{(1)}\hat{\rho}_n^{(0)} = P_D\mathcal{L}_1P_D\hat{\rho}_n^{(0)}}. \quad (3.44)$$

Esto es una ecuación de eigenvalores que nos permite calcular la corrección a primer orden para eigenvalores derechos. Para nuestro caso particular de 2 TLS con forzamiento, se cumple que $P_D\mathcal{L}_1P_D = 0$, lo que implica que la corrección de primer orden de los eigenvalores es nula, es decir, $\lambda_n^{(1)} = 0$. Al igual que en el caso no degenerado, utilizaremos esto para simplificar los cálculos posteriores.

Ahora aplicamos Q_D a la ecuación (3.33) para obtener:

$$(\lambda_D - \mathcal{L}_0)Q_D\hat{\rho}_n^{(1)} = Q_D\mathcal{L}_1\hat{\rho}_n^{(0)}. \quad (3.45)$$

Gracias a que Q_D proyecta al subespacio no degenerado, el operador $(\lambda_D - \mathcal{L}_0)$ es invertible en el subespacio degenerado, dando como resultado:

$$\boxed{Q_D\hat{\rho}_n^{(1)} = S_D\mathcal{L}_1\hat{\rho}_n^{(0)}}, \quad (3.46)$$

donde

$$S_D = \frac{Q_D}{\lambda_D - \mathcal{L}_0}. \quad (3.47)$$

A continuación, calcularemos las correcciones a segundo orden, para ello aplicamos P_D a la ecuación (3.34):

$$\begin{aligned} P_D(\lambda_D - \mathcal{L}_0)\hat{\rho}_n^{(2)} &= P_D(\mathcal{L}_1 - \lambda_n^{(1)})\hat{\rho}_n^{(1)} - P_D\lambda_n^{(2)}\hat{\rho}_n^{(0)} \\ \implies \lambda_n^{(2)}\hat{\rho}_n^{(0)} &= P_D\mathcal{L}_1\hat{\rho}_n^{(1)} = P_D\mathcal{L}_1\mathbb{1}\hat{\rho}_n^{(1)} = P_D\mathcal{L}_1P_D\hat{\rho}_n^{(1)} + P_D\mathcal{L}_1Q_D\hat{\rho}_n^{(1)} \\ \implies P_D\mathcal{L}_1Q_D\hat{\rho}_n^{(1)} &= \lambda_n^{(2)}\hat{\rho}_n^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Si ahora sustituimos la expresión (3.46) en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\boxed{M^{(2)}\hat{\rho}_n^{(0)} = \lambda_n^{(2)}\hat{\rho}_n^{(0)}}, \quad (3.49)$$

donde hemos definido la matriz $M^{(2)} = P_D\mathcal{L}_1S_D\mathcal{L}_1P_D$. Esta es una ecuación de eigenvalores que permite obtener las correcciones de segundo orden a los eigenvalores

derechos degenerados y, además, determina la buena base de eigenvectores degenerados de orden cero con la que debe realizarse el desarrollo perturbativo.

Solo nos queda hallar la corrección de segundo orden de los eigenvectores derechos. Para ello, comenzamos aplicando Q_D a la ecuación (3.34):

$$\begin{aligned} Q_D(\lambda_D - \mathcal{L}_0)\hat{\rho}_n^{(2)} &= Q_D(\mathcal{L}_1 - \lambda_n^{(1)})\hat{\rho}_n^{(1)} - Q_D\lambda_n^{(2)}\hat{\rho}_n^{(0)} \\ \implies Q_D\hat{\rho}_n^{(2)} &= S_D\mathcal{L}_1\hat{\rho}_n^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Separando $\hat{\rho}_n^{(1)}$ en sus componentes en el subespacio degenerado y no degenerado tenemos que:

$$Q_D\hat{\rho}_n^{(2)} = S_D\mathcal{L}_1P_D\hat{\rho}_n^{(1)} + S_D\mathcal{L}_1Q_D\hat{\rho}_n^{(1)}, \quad (3.51)$$

en donde ya conocemos la expresión de $Q_D\hat{\rho}_n^{(1)}$, sin embargo, aún falta determinar $P_D\hat{\rho}_n^{(1)}$.

Para determinar $P_D\hat{\rho}_n^{(1)}$, aplicamos P_D a la ecuación (3.35) para llegar a:

$$P_D\mathcal{L}_1Q_D\hat{\rho}_n^{(2)} = \lambda_n^{(2)}P_D\hat{\rho}_n^{(1)} + \lambda_n^{(3)}\hat{\rho}_n^{(0)}. \quad (3.52)$$

Sustituimos $Q_D\hat{\rho}_n^{(2)}$ y factorizamos el término $P_D\hat{\rho}_n^{(1)}$:

$$(\lambda_n^{(2)} - P_D\mathcal{L}_1S_D\mathcal{L}_1P_D)P_D\hat{\rho}_n^{(1)} = P_D\mathcal{L}_1S_D\mathcal{L}_1Q_D\hat{\rho}_n^{(1)} - \lambda_n^{(3)}\hat{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.53)$$

donde hemos usado que P_D es idempotente.

Si sustituimos la expresión de $M^{(2)}$ en la ecuación anterior, observamos que pueden surgir singularidades al intentar invertir el operador $(\lambda_n^{(2)} - M^{(2)})$. Para evitarlas, multiplicamos la ecuación por el proyector Q_n , que elimina la componente en la dirección del eigenvector degenerado correspondiente a $\lambda_n^{(2)}$ (específicamente, sólo este término puede generar la singularidad, ya que $\lambda_n^{(2)}$ no es degenerado y por lo tanto no hace falta multiplicar por Q_D). Tras aplicar Q_n y realizar la inversión de $(\lambda_n^{(2)} - M^{(2)})$, utilizamos que Q_n conmuta con P_D y con $M^{(2)}$, y que además $Q_n\hat{\rho}_n^{(0)} = 0$, para obtener:

$$\boxed{P_D\hat{\rho}_n^{(1)} = \frac{Q_n}{\lambda_n^{(2)} - M^{(2)}}P_D\mathcal{L}_1S_D\mathcal{L}_1S_D\mathcal{L}_1P_D\hat{\rho}_n^{(0)}}. \quad (3.54)$$

Con esta ecuación podemos calcular la corrección de primer orden de los eigenvectores derechos dentro del subespacio degenerado. En el caso particular de nuestro sistema de 2 TLS con forzamiento, se cumple que $P_D\mathcal{L}_1S_D\mathcal{L}_1S_D\mathcal{L}_1P_D = 0$. Como consecuencia, la corrección de primer orden de los eigenvectores derechos no tiene

componentes dentro del subespacio degenerado, es decir, está completamente contenida en el subespacio no degenerado:

$$P_D \hat{\rho}_n^{(1)} = 0 \implies \hat{\rho}_n^{(1)} = Q_D \hat{\rho}_n^{(1)}. \quad (3.55)$$

Utilizando estos resultados, regresamos a la ecuación (3.51) para obtener la corrección de segundo orden de los eigenvectores derechos dentro del subespacio no degenerado:

$$\boxed{Q_D \hat{\rho}_n^{(2)} = S_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(0)}}. \quad (3.56)$$

Para determinar la componente de la corrección en el subespacio degenerado, aplicamos el proyector P_D a la ecuación (3.36), lo que nos lleva a:

$$P_D \mathcal{L}_1 Q_D \hat{\rho}_n^{(3)} = \lambda_n^{(2)} P_D \hat{\rho}_n^{(2)} + \lambda_n^{(3)} P_D \hat{\rho}_n^{(1)} + \lambda_n^{(4)} \hat{\rho}_n^{(0)}. \quad (3.57)$$

Ahora necesitamos calcular $Q_D \hat{\rho}_n^{(3)}$. Para ello, aplicamos Q_D a la ecuación (3.35):

$$\begin{aligned} Q_D(\lambda_D - \mathcal{L}_0) \hat{\rho}_n^{(3)} &= Q_D(\mathcal{L}_1 - \lambda_n^{(1)}) \hat{\rho}_n^{(2)} - Q_D \lambda_n^{(2)} \hat{\rho}_n^{(1)} \\ \implies Q_D \hat{\rho}_n^{(3)} &= S_D \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(2)} - \lambda_n^{(2)} S_D \hat{\rho}_n^{(1)} \\ &= S_D \mathcal{L}_1 P_D \hat{\rho}_n^{(2)} + S_D \mathcal{L}_1 Q_D \hat{\rho}_n^{(2)} - \lambda_n^{(2)} S_D \hat{\rho}_n^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Sustituyendo esta expresión para $Q_D \hat{\rho}_n^{(3)}$ en la ecuación anterior y factorizando $P_D \hat{\rho}_n^{(2)}$, obtenemos:

$$(\lambda_n^{(2)} - P_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 P_D) P_D \hat{\rho}_n^{(2)} = P_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 Q_D \hat{\rho}_n^{(2)} - \lambda_n^{(2)} P_D \mathcal{L}_1 S_D \hat{\rho}_n^{(1)} - \lambda_n^{(3)} P_D \hat{\rho}_n^{(1)} - \lambda_n^{(4)} \hat{\rho}_n^{(0)}. \quad (3.59)$$

En esta ecuación primero notemos que el término con $\lambda_n^{(3)}$ se anula, ya que $P_D \hat{\rho}_n^{(1)} = 0$. Luego, multiplicamos por el proyector Q_n para evitar singularidades al invertir el operador $(\lambda_n^{(2)} - M^{(2)})$, al hacer esto el término $\lambda_n^{(4)} \hat{\rho}_n^{(0)}$ se anula automáticamente, ya que $Q_n \hat{\rho}_n^{(0)} = 0$ y también lo hace el término con $\lambda_n^{(2)}$ por lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda_n^{(2)} P_D \mathcal{L}_1 S_D \hat{\rho}_n^{(1)} &= \lambda_n^{(2)} P_D \mathcal{L}_1 S_D S_D \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(0)} \\ &= \frac{\lambda_n^{(2)}}{\lambda_D - \mathcal{L}_0} P_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 P_D \hat{\rho}_n^{(0)} \\ &= \frac{\lambda_n^{(2)}}{\lambda_D - \mathcal{L}_0} M^{(2)} \hat{\rho}_n^{(0)} \\ &= \frac{\lambda_n^{(2)^2}}{\lambda_D - \mathcal{L}_0} \hat{\rho}_n^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Por lo tanto, la ecuación finalmente se reduce a:

$$P_D \hat{\rho}_n^{(2)} = \frac{Q_n}{\lambda_n^{(2)} - M^{(2)}} P_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 P_D \hat{\rho}_n^{(0)}. \quad (3.61)$$

Con todo lo anterior, hemos obtenido las correcciones de primer y segundo orden de los eigenvalores, así como de los eigenvectores derechos tanto dentro como fuera del subespacio degenerado, expresados como $\hat{\rho}_n^{(p)} = P_D \hat{\rho}_n^{(p)} + Q_D \hat{\rho}_n^{(p)}$ para $p = 1, 2$. A continuación, resumimos las expresiones obtenidas:

$$\lambda_n^{(1)} \hat{\rho}_n^{(0)} = P_D \mathcal{L}_1 P_D \hat{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.62)$$

$$\lambda_n^{(2)} \hat{\rho}_n^{(0)} = P_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 P_D \hat{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.63)$$

$$Q_D \hat{\rho}_n^{(1)} = S_D \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.64)$$

$$P_D \hat{\rho}_n^{(1)} = \frac{Q_n}{\lambda_n^{(2)} - M^{(2)}} P_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 P_D \hat{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.65)$$

$$Q_D \hat{\rho}_n^{(2)} = S_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.66)$$

$$P_D \hat{\rho}_n^{(2)} = \frac{Q_n}{\lambda_n^{(2)} - M^{(2)}} P_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 S_D \mathcal{L}_1 P_D \hat{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.67)$$

Las correcciones izquierdas se obtienen de manera análoga, sustituyendo las expansiones de eigenvalores y eigenvectores izquierdos en la ecuación de eigenvalores para \mathcal{L}_0^\dagger (2.6) y definiendo los proyectores izquierdos como:

$$\tilde{P}_D = \sum_{n \in D} \tilde{P}_n, \quad (3.68)$$

$$\tilde{Q}_D = \mathbb{1} - \tilde{P}_D. \quad (3.69)$$

Dichas correcciones izquierdas para el caso degenerado son:

$$\tilde{\lambda}_n^{(1)} = \lambda_n^{(1)*}, \quad (3.70)$$

$$\tilde{\lambda}_n^{(2)} = \lambda_n^{(2)*}, \quad (3.71)$$

$$\tilde{Q}_D \check{\rho}_n^{(1)} = \tilde{S}_D \mathcal{L}_1^\dagger \check{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.72)$$

$$\tilde{P}_D \check{\rho}_n^{(1)} = \frac{\tilde{Q}_n}{\lambda_n^{(2)*} - M^{(2)*}} \tilde{P}_D \mathcal{L}_1^\dagger \tilde{S}_D \mathcal{L}_1^\dagger \tilde{S}_D \mathcal{L}_1^\dagger \tilde{P}_D \check{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.73)$$

$$\tilde{Q}_D \check{\rho}_n^{(2)} = \tilde{S}_D \mathcal{L}_1^\dagger \tilde{S}_D \mathcal{L}_1^\dagger \check{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.74)$$

$$\tilde{P}_D \check{\rho}_n^{(2)} = \frac{\tilde{Q}_n}{\lambda_n^{(2)*} - M^{(2)*}} \tilde{P}_D \mathcal{L}_1^\dagger \tilde{S}_D \mathcal{L}_1^\dagger \tilde{S}_D \mathcal{L}_1^\dagger \tilde{S}_D \mathcal{L}_1^\dagger \tilde{P}_D \check{\rho}_n^{(0)}, \quad (3.75)$$

donde

$$\tilde{S}_D = \frac{\tilde{Q}_D}{\lambda_D^* - \mathcal{L}_0^\dagger}. \quad (3.76)$$

3.3 Solución perturbativa de 1 TLS con forzamiento

En esta sección abordaremos la resolución del problema de un TLS perturbado por un forzamiento coherente, aplicando la teoría de perturbaciones en el caso no degenerado desarrollado anteriormente. El hamiltoniano del sistema se expresa como:

$$H = \hbar\omega\sigma^\dagger\sigma + \epsilon\hbar(\sigma^\dagger + \sigma), \quad (3.77)$$

donde el primer término corresponde al hamiltoniano no perturbado del TLS, previamente resuelto, mientras que el segundo introduce la perturbación en forma de un forzamiento coherente. Este último coincide con la versión del hamiltoniano de interacción entre el TLS y el campo electromagnético clásico obtenida en la sección anterior, particularizada ahora para un solo TLS. El hamiltoniano efectivo del sistema es:

$$K = \underbrace{\hbar(\omega - i\gamma)\sigma^\dagger\sigma}_{K_0} + \underbrace{\epsilon\hbar(\sigma^\dagger + \sigma)}_{K_1} \quad (3.78)$$

Ahora consideraremos la ecuación maestra de Lindblad correspondiente al sistema perturbado:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\hat{\rho} &= -\frac{i}{\hbar}(K\hat{\rho} - \hat{\rho}K^\dagger) + 2\gamma\sigma\hat{\rho}\sigma^\dagger \\ &= -\frac{i}{\hbar}(K_0\hat{\rho} - \hat{\rho}K_0^\dagger) - \frac{i}{\hbar}\epsilon(K_1\hat{\rho} - \hat{\rho}K_1^\dagger) + 2\gamma\sigma\hat{\rho}\sigma^\dagger \\ &= \mathcal{L}_0\hat{\rho} + \epsilon\mathcal{L}_1\hat{\rho}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

donde $\mathcal{L}_0\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}(K_0\hat{\rho} - \hat{\rho}K_0^\dagger) + 2\gamma\sigma\hat{\rho}\sigma^\dagger$ y $\mathcal{L}_1\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}(K_1\hat{\rho} - \hat{\rho}K_1^\dagger)$, cuya forma matricial es:

$$\mathcal{L}_1 = -i[(\sigma^\dagger + \sigma) \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes (\sigma + \sigma^\dagger)] = \begin{pmatrix} 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Antes de calcular las correcciones a los eigenvalores y eigenvectores es útil conocer la actuación de \mathcal{L}_1 sobre los eigenvectores de \mathcal{L}_0 , lo cual se puede obtener de la forma de \mathcal{L}_1 mencionada en el párrafo anterior o de multiplicar su forma matricial por la vectorización

de los eigenvectores de orden cero ($\mathcal{L}_1|\hat{\rho}_n^{(0)}\rangle\rangle$) y devolviendo el vector resultante a su forma matricial de operador. En cualquier caso se obtiene lo siguiente:

$$\mathcal{L}_1\hat{\rho}_1^{(0)} = -i(|e\rangle\langle g| - |g\rangle\langle e|), \quad (3.81)$$

$$\mathcal{L}_1\hat{\rho}_2^{(0)} = -i(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|), \quad (3.82)$$

$$\mathcal{L}_1\hat{\rho}_3^{(0)} = -i(|g\rangle\langle g| - |e\rangle\langle e|), \quad (3.83)$$

$$\mathcal{L}_1\hat{\rho}_4^{(0)} = -2i(|g\rangle\langle e| - |e\rangle\langle g|). \quad (3.84)$$

Con esto, podemos calcular las correcciones a primer orden de los eigenvalores sustituyendo lo anterior en la ecuación (3.17), para $n = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= \text{Tr}(\check{\rho}_1^{(0)\dagger} \mathcal{L}_1\hat{\rho}_1^{(0)}) \\ &= \text{Tr}\{\mathbf{1}[-i(|e\rangle\langle g| - |g\rangle\langle e|)]\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Siguiendo este procedimiento lo que se obtiene es que todas las correcciones a primer orden de los eigenvalores son nulas (como se advirtió anteriormente): $\lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = \lambda_3^{(1)} = \lambda_4^{(1)} = 0$.

Continuamos con el cálculo de las correcciones a primer orden para eigenvectores derechos, donde requerimos conocer la forma matricial de S_n . El proyector P_n aplicado a ρ no es más que $P_n\rho = \langle\check{\rho}_n^{(0)}, \rho\rangle\hat{\rho}_n^{(0)}$, al utilizar el producto de Hilbert-Schmidt se llega a la ecuación (3.9). Sin embargo, si utilizamos la vectorización, el producto interno al que se llega es el producto interno de dos vectores biortonormales:

$$P_n|\rho\rangle\rangle = \langle\langle\check{\rho}_n^{(0)}|\rho\rangle\rangle|\hat{\rho}_n^{(0)}\rangle\rangle \implies P_n = |\hat{\rho}_n^{(0)}\rangle\rangle\langle\langle\check{\rho}_n^{(0)}|. \quad (3.85)$$

Con este resultado podemos construir la forma matricial de P_n y por lo tanto la de Q_n y S_n . De esta manera, sustituyendo estas formas matriciales y vectorizadas en la ecuación (3.20) es que se obtienen las correcciones a primer orden de los eigenvectores, por ejemplo para $n = 1$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |\hat{\rho}_1^{(1)}\rangle\rangle &= S_1\mathcal{L}_1|\hat{\rho}_1^{(0)}\rangle\rangle \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\gamma} \\ 0 & \frac{1}{\gamma-i\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma+i\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{i\gamma+\omega} \\ -\frac{1}{-i\gamma+\omega} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.86)$$

El siguiente paso es devolver este vector a su forma matricial de operador, dando como resultado:

$$\hat{\rho}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{i\gamma+\omega} \\ -\frac{1}{-i\gamma+\omega} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{i\gamma+\omega} |g\rangle\langle e| - \frac{1}{-i\gamma+\omega} |e\rangle\langle g|. \quad (3.87)$$

Seguindo este procedimiento, las correcciones a primer orden de los eigenvectores derechos son:

$$\hat{\rho}_1^{(1)} = \frac{|e\rangle\langle g|}{i\gamma-\omega} - \frac{|g\rangle\langle e|}{i\gamma+\omega}, \quad (3.88)$$

$$\hat{\rho}_2^{(1)} = \frac{|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|}{i\gamma-\omega} \quad (3.89)$$

$$\hat{\rho}_3^{(1)} = \frac{|g\rangle\langle g| - |e\rangle\langle e|}{i\gamma+\omega}, \quad (3.90)$$

$$\hat{\rho}_4^{(1)} = 2 \left(\frac{|e\rangle\langle g|}{i\gamma+\omega} - \frac{|g\rangle\langle e|}{i\gamma-\omega} \right). \quad (3.91)$$

Las correcciones a segundo orden se obtienen mediante la inserción de la representación matricial de \mathcal{L}_1 , junto con los proyectores apropiados y la vectorización de los eigenvectores de orden cero, en las ecuaciones (3.22) y (3.24). Y las correcciones izquierdas se obtienen de manera análoga a estas.

Una vez obtenidas todas las correcciones, basta con sustituirlas en las expansiones correspondientes ((3.2)-(3.5)) para construir los eigenvalores y eigenvectores del sistema perturbado. Sin embargo, aún queda un paso fundamental: la normalización. En este contexto, los eigenvectores deben cumplir una condición de biortonormalidad hasta orden ϵ^2 . Para garantizarlo, es necesario renormalizarlos de la siguiente manera:

$$\hat{\rho}_n \rightarrow \frac{\hat{\rho}_n}{\sqrt{\text{Tr}(\hat{\rho}_n^\dagger \hat{\rho}_n)}}, \quad \check{\rho}_n \rightarrow \frac{\check{\rho}_n}{\left(\sqrt{\text{Tr}(\hat{\rho}_n^\dagger \hat{\rho}_n)} \right)^*}. \quad (3.92)$$

Finalmente, los eigenvalores y eigenvectores derechos e izquierdos del sistema perturbado hasta orden ϵ^2 son:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\gamma + i\omega - \frac{2\epsilon^2}{\gamma + i\omega}, \quad \lambda_3 = -\gamma - i\omega - \frac{2\epsilon^2}{\gamma - i\omega}, \quad \lambda_4 = -2\gamma + \frac{4\gamma\epsilon^2}{\gamma^2 + \omega^2} \quad (3.93)$$

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + \omega^2} & -\frac{\epsilon}{i\gamma + \omega} \\ -\frac{\epsilon}{-i\gamma + \omega} & \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + \omega^2} \end{pmatrix}, \quad (3.94)$$

$$\hat{\rho}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{-i\gamma + \omega} & 1 + \frac{\epsilon^2}{(\gamma + i\omega)^2} \\ -\frac{i\epsilon^2}{(\gamma + i\omega)\omega} & -\frac{\epsilon}{-i\gamma + \omega} \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

$$\hat{\rho}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{i\gamma + \omega} & \frac{i\epsilon^2}{(\gamma - i\omega)\omega} \\ 1 + \frac{\epsilon^2}{(\gamma - i\omega)^2} & -\frac{\epsilon}{i\gamma + \omega} \end{pmatrix}, \quad (3.96)$$

$$\hat{\rho}_4 = \begin{pmatrix} -1 + \epsilon^2 \left(\frac{1}{(-i\gamma + \omega)^2} + \frac{1}{(i\gamma + \omega)^2} \right) & \frac{2\epsilon}{-i\gamma + \omega} \\ \frac{2\epsilon}{i\gamma + \omega} & 1 + \frac{2\epsilon^2(\gamma^2 - \omega^2)}{(\gamma^2 + \omega^2)^2} \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

$$\check{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.98)$$

$$\check{\rho}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{-i\gamma + \omega} & 1 + \frac{\epsilon^2}{(\gamma - i\omega)^2} \\ \frac{i\epsilon^2}{(\gamma - i\omega)\omega} & \frac{\epsilon(3i\gamma - \omega)}{\gamma^2 + \omega^2} \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

$$\check{\rho}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{i\gamma + \omega} & -\frac{i\epsilon^2}{(\gamma + i\omega)\omega} \\ 1 + \frac{\epsilon^2}{(\gamma + i\omega)^2} & -\frac{\epsilon(3i\gamma + \omega)}{\gamma^2 + \omega^2} \end{pmatrix}, \quad (3.100)$$

$$\check{\rho}_4 = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + \omega^2} & \frac{\epsilon}{i\gamma + \omega} \\ -\frac{\epsilon}{-i\gamma + \omega} & 1 + \frac{\epsilon^2(3\gamma^2 - \omega^2)}{(\gamma^2 + \omega^2)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

3.3.1 Comparación con la solución exacta para el estado estacionario

El estado estacionario del sistema corresponde al eigenvector físico asociado al eigenvalor nulo, ya que este representa la solución invariante bajo la dinámica de la ecuación maestra. Para que sea físicamente válido, debe ser un operador densidad. En este caso, dicho estado a orden ϵ^2 es:

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + \omega^2} & -\frac{\epsilon}{i\gamma + \omega} \\ \frac{\epsilon}{i\gamma - \omega} & \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + \omega^2} \end{pmatrix}. \quad (3.102)$$

Calculemos el estado estacionario ($\hat{\rho}_{ss}$) de manera exacta utilizando la forma matricial de \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \epsilon \mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon i & -\epsilon i & 2\gamma \\ \epsilon i & -\gamma + i\omega & 0 & -\epsilon i \\ -\epsilon i & 0 & -\gamma - i\omega & \epsilon i \\ 0 & -\epsilon i & \epsilon i & -2\gamma \end{pmatrix}, \quad (3.103)$$

resolviendo la ecuación de eigenvalores $\mathcal{L}|\hat{\rho}_{ss}\rangle = 0$ obtenemos el estado estacionario exacto tras devolverlo a su forma matricial de operador:

$$\hat{\rho}_{ss} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + 2\epsilon^2 + \omega^2} & \frac{i\epsilon(\gamma + i\omega)}{\gamma^2 + 2\epsilon^2 + \omega^2} \\ -\frac{\epsilon(i\gamma + \omega)}{\gamma^2 + 2\epsilon^2 + \omega^2} & \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + 2\epsilon^2 + \omega^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + \omega^2} + \mathcal{O}(\epsilon^3) & -\frac{\epsilon}{i\gamma + \omega} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ \frac{\epsilon}{i\gamma - \omega} + \mathcal{O}(\epsilon^3) & \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + \omega^2} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{pmatrix}, \quad (3.104)$$

coincidiendo con la solución perturbativa a orden ϵ^2 . Esto nos indica que la solución perturbativa constituye una aproximación válida hasta ese orden. Además, dado que la solución exacta y la perturbativa coinciden dentro de este régimen, podemos confiar en los resultados obtenidos por el método perturbativo. De hecho, estas soluciones serán comparadas con simulaciones numéricas en secciones posteriores, con el fin de verificar su precisión.

3.4 Solución perturbativa de 2 TLS con forzamiento

En esta sección estudiaremos un sistema compuesto por 2 TLS acoplados, sobre el cual actúa una perturbación debida a un forzamiento coherente. Utilizaremos la teoría de perturbaciones en superoperadores para analizar cómo esta perturbación modifica los eigenvalores y eigenvectores del liouvilliano no perturbado. El hamiltoniano de 2 TLS

acoplados con un forzamiento coherente se expresa como:

$$H = \hbar\omega \left(\sigma_1^\dagger \sigma_1 + \sigma_2^\dagger \sigma_2 \right) + \hbar\Omega \left(\sigma_1^\dagger \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2^\dagger \right) + \hbar\epsilon \left(\sigma_1 + \sigma_1^\dagger + \sigma_2 + \sigma_2^\dagger \right). \quad (3.105)$$

Para incorporar los efectos disipativos, consideramos los decaimientos espontáneos de cada TLS, caracterizados por las tasas γ_1 y γ_2 (recordemos que en esta notación γ_i corresponde a la mitad de la tasa de decaimiento Γ_i). Esto se refleja en la dinámica no unitaria del sistema, que puede describirse mediante un hamiltoniano efectivo no hermítico, que está dado por:

$$K = H - i\hbar\gamma_1\sigma_1^\dagger\sigma_1 - i\hbar\gamma_2\sigma_2^\dagger\sigma_2. \quad (3.106)$$

El hamiltoniano efectivo total puede reescribirse como la suma del hamiltoniano efectivo del sistema no perturbado, denotado por K_0 , y un término adicional K_1 que representa la perturbación debida al forzamiento coherente. Es decir:

$$\begin{aligned} K = & \underbrace{\hbar\omega \left(\sigma_1^\dagger \sigma_1 + \sigma_2^\dagger \sigma_2 \right) + \hbar\Omega \left(\sigma_1^\dagger \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2^\dagger \right) - i\hbar\gamma_1\sigma_1^\dagger\sigma_1 - i\hbar\gamma_2\sigma_2^\dagger\sigma_2}_{K_0} \\ & + \underbrace{\hbar\epsilon \left(\sigma_1 + \sigma_1^\dagger + \sigma_2 + \sigma_2^\dagger \right)}_{K_1}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

En este análisis consideraremos que ambos TLS presentan la misma tasa de decaimiento, es decir, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Bajo esta consideración, sustituimos $K = K_0 + K_1$ en la ecuación maestra de Lindblad, la cual toma la forma $\mathcal{L}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}(K\hat{\rho} - \hat{\rho}K^\dagger) + 2\gamma\sigma_1\hat{\rho}\sigma_1^\dagger + 2\gamma\sigma_2\hat{\rho}\sigma_2^\dagger$, y obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\hat{\rho} = & \underbrace{-\frac{i}{\hbar}(K_0\hat{\rho} - \hat{\rho}K_0^\dagger) + 2\gamma\sigma_1\hat{\rho}\sigma_1^\dagger + 2\gamma\sigma_2\hat{\rho}\sigma_2^\dagger}_{\mathcal{L}_0\hat{\rho}} \\ & - \underbrace{\frac{i}{\hbar}(K_1\hat{\rho} - \hat{\rho}K_1^\dagger)}_{\mathcal{L}_1\hat{\rho}}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

De esta manera, obtenemos la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \epsilon\mathcal{L}_1$, la cual es adecuada para aplicar la teoría de perturbaciones en superoperadores. Para ello, es necesario convertir la ecuación en su representación matricial, lo cual se logra mediante el procedimiento de vectorización. Este proceso transforma los eigenvectores $\hat{\rho}$ en vectores columna de dimensión 16, y los superoperadores \mathcal{L}_0 y \mathcal{L}_1 en matrices de 16×16 . Dado el tamaño de las matrices involucradas, se utilizó un código en Mathematica para llevar a cabo los

cálculos de manera eficiente. En este código se separan explícitamente los subespacios degenerado y no degenerado del liouvilliano no perturbado. El subespacio degenerado está conformado por los eigenvectores etiquetados como 8 y 11 en la [Tabla 2.2](#), mientras que el subespacio no degenerado está compuesto por el resto de los eigenvectores. Con esta separación se construyen los proyectores adecuados: P_n para cada eigenvector derecho $\hat{\rho}_n$, y P_D para proyectar sobre el subespacio degenerado derecho.

A partir de estos proyectores, se construyen los resolventes S_n y S_D , los cuales son necesarios para aplicar las fórmulas de corrección de primer y segundo orden. Estas expresiones se utilizan para los eigenvectores derechos, diferenciando entre el caso degenerado y no degenerado. El eigensistema izquierdo se construye de manera análoga, empleando los proyectores y resolventes izquierdos, así como las fórmulas para las correcciones izquierdas. De este modo, se obtienen las correcciones a los eigenvalores y eigenvectores del liouvilliano perturbado. A continuación, se muestran los 16 eigenvalores del sistema, observándose que la degeneración inicial se ha roto: los valores λ_8 y λ_{11} , que originalmente coincidían, ahora son distintos debido al efecto de la perturbación. Esta separación espectral es una manifestación directa de cómo la perturbación levanta la degeneración del sistema no perturbado.

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -\gamma + i(\omega + \Omega) + \frac{\epsilon^2(-2\gamma + 2i(\omega - 3\Omega))}{\omega^2 + (\gamma + i\Omega)^2}$$

$$\lambda_3 = -\gamma + i(\omega - \Omega) - \frac{2\epsilon^2}{\gamma + i(\omega + \Omega)}$$

$$\lambda_4 = -2\gamma + 2i\omega + \frac{\epsilon^2(-4\gamma + 4i\omega)}{\omega^2 + (\gamma + i\Omega)^2}$$

$$\lambda_5 = -\gamma - i(\omega + \Omega) - \frac{2\epsilon^2(\gamma + i(\omega - 3\Omega))}{\omega^2 + (\gamma - i\Omega)^2}$$

$$\lambda_6 = -\gamma - i\omega + i\Omega - \frac{2\epsilon^2}{\gamma - i(\omega + \Omega)}$$

$$\lambda_7 = -2(\gamma + i\omega) - \frac{4\epsilon^2(\gamma + i\omega)}{\omega^2 + (\gamma - i\Omega)^2}$$

$$\lambda_8 = -2\gamma - \frac{4\gamma\epsilon^2}{2\Omega(-\omega + \Omega) + \sqrt{(\gamma^2 + \omega^2)^2 + 2(\gamma^2 + \omega^2)\Omega^2 - 8\omega\Omega^3 + 5\Omega^4}}$$

$$\lambda_9 = -2\gamma - 4i\Omega \left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon^2}{(\gamma + i\omega)^2 + \Omega^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{10} &= -2\gamma + 4i\Omega \left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon^2}{(\gamma - i\omega)^2 + \Omega^2} \right) \\
\lambda_{11} &= -2\gamma + \frac{4\gamma\epsilon^2}{2(\omega - \Omega)\Omega + \sqrt{(\gamma^2 + \omega^2)^2 + 2(\gamma^2 + \omega^2)\Omega^2 - 8\omega\Omega^3 + 5\Omega^4}} \\
\lambda_{12} &= -3\gamma + i(\omega - \Omega) + \epsilon^2 \left(\frac{4\gamma}{\omega^2 + (\gamma + i\Omega)^2} - \frac{2(\gamma + i(\omega + 3\Omega))}{(\gamma + i\omega)^2 + \Omega^2} \right) \\
\lambda_{13} &= -3\gamma + i(\omega + \Omega) + \frac{2\epsilon^2}{\gamma - i(\omega - \Omega)} \\
\lambda_{14} &= -3\gamma - i(\omega - \Omega) + \epsilon^2 \left(\frac{4\gamma}{\omega^2 + (\gamma - i\Omega)^2} + \frac{-2\gamma + 2i(\omega + 3\Omega)}{(\gamma - i\omega)^2 + \Omega^2} \right) \\
\lambda_{15} &= -3\gamma - i(\omega + \Omega) + \frac{2\epsilon^2}{\gamma + i(\omega - \Omega)} \\
\lambda_{16} &= -4\gamma + \frac{8\gamma\epsilon^2}{\gamma^2 + (\omega - \Omega)^2}
\end{aligned}$$

Al comparar directamente los eigenvalores con el caso sin forzamiento se observan las primeras diferencias físicas, reflejadas en modificaciones tanto en las tasas de decaimiento como en las frecuencias de oscilación de los eigenvectores asociados. Un ejemplo ilustrativo es el eigenvalor 16, cuyo decaimiento se vuelve más lento debido al término correctivo de segundo orden que se suma en el régimen perturbativo. En consecuencia, algunos modos presentan una disminución en su tasa de decaimiento, mientras que en otros ésta se acelera. Como se discutirá en el Capítulo 4, estos cambios tienen un impacto directo en la dinámica de la evolución de las magnitudes del sistema, dependiendo del estado inicial considerado y de su acoplamiento con los eigenvectores correspondientes.

Tras aplicar la normalización adecuada se obtienen finalmente los eigenvectores derechos e izquierdos corregidos hasta segundo orden. Dado que el sistema posee 16 eigenvectores derechos y 16 izquierdos, cada uno representado por una matriz de 4×4 , el resultado completo es extenso. Por esta razón, solo se mostrará explícitamente el eigenvector más sencillo, correspondiente al estado estacionario del sistema:

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\epsilon^2}{\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2} & -\frac{\epsilon}{i\gamma + \omega + \Omega} & -\frac{\epsilon}{i\gamma + \omega + \Omega} & -\frac{\epsilon^2}{(\gamma - i\omega)(\gamma - i(\omega + \Omega))} \\ -\frac{\epsilon}{-i\gamma + \omega + \Omega} & \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2} & \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2} & 0 \\ -\frac{\epsilon}{-i\gamma + \omega + \Omega} & \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2} & \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2} & 0 \\ -\frac{\epsilon^2}{(\gamma + i\omega)(\gamma + i(\omega + \Omega))} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.109)$$

Como puede observarse, el estado estacionario con forzamiento difiere del caso sin perturbación, donde el sistema permanece en el estado base $|gg\rangle$. La presencia del forzamiento externo redistribuye las poblaciones entre los niveles de energía, lo cual se aprecia en los elementos diagonales de la matriz densidad. Aunque el estado en el que ambos átomos están excitados no adquiere población apreciable, sí aparecen componentes donde únicamente uno de los átomos se encuentra excitado.

El forzamiento también induce coherencias (elementos fuera de la diagonal distintos de cero). Aquellas coherencias que involucran una sola excitación, ya sea en el bra o en el ket, son de orden ϵ , mientras que las que involucran dos excitaciones son de orden ϵ^2 . Esto se debe a que cada aplicación del superoperador \mathcal{L}_1 sobre un eigenvector genera términos con una excitación adicional; en otras palabras, la acción de \mathcal{L}_1 introduce una excitación. Por consiguiente, los términos fuera de la diagonal restantes aparecerían a tercer orden, y el correspondiente al estado completamente excitado (dos excitaciones en el bra y dos en el ket) surgiría hasta cuarto orden.

Finalmente, aunque la traza de la matriz es igual a 1, la matriz del estado estacionario no es completamente positiva. Al sustituir los valores numéricos de los parámetros (que se determinarán más adelante), se obtiene un eigenvalor negativo, aunque de magnitud pequeña. Este efecto se debe a que la serie perturbativa fue truncada, de modo que al interpretar esta matriz como un operador de densidad aparecen pequeñas desviaciones asociadas precisamente a dicha truncación.

Capítulo 4

Dinámica, observables y entrelazamiento

El estudio de la dinámica de un sistema cuántico resulta fundamental porque permite describir cómo evoluciona su estado en el tiempo y, con ello, predecir fenómenos medibles en un experimento. La herramienta matemática para representar un sistema es la matriz de densidad ρ , la cual contiene toda la información estadística accesible sobre el mismo. Su estructura permite distinguir dos tipos de elementos: las entradas diagonales y las entradas fuera de la diagonal. Dentro de esta dinámica, resultan de particular interés ciertos observables que permiten cuantificar el comportamiento físico del sistema. En el caso de 1 TLS tenemos las poblaciones y coherencias, mientras que en el caso de 2 TLS se añade el entrelazamiento como una medida clave de las correlaciones cuánticas presentes. Estas magnitudes nos ofrecen una visión completa del comportamiento dinámico, desde la disipación energética hasta la persistencia de correlaciones cuánticas.

Para precisar estas ideas, consideremos una matriz de densidad genérica de dimensión 2×2 :

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{ge} \\ \rho_{eg} & \rho_{ee} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Las poblaciones corresponden a los elementos diagonales ρ_{gg} y ρ_{ee} , que representan la probabilidad de encontrar al sistema en el estado base $|g\rangle$ o en el estado excitado $|e\rangle$, respectivamente. Esto se deduce directamente de la regla de Born: para un estado $|\psi\rangle = \sum c_j |j\rangle$, $\rho_{jj} = |c_j|^2$ es la probabilidad de medir el estado $|j\rangle$.

Por otro lado, las coherencias son los elementos fuera de la diagonal, ρ_{ge} y ρ_{eg} , que cuantifican la superposición cuántica entre los estados base y excitado. Esto se puede entender a partir de un estado general $|\psi\rangle = c_g |g\rangle + c_e |e\rangle$, cuya matriz de densidad es:

$$\rho = \begin{pmatrix} |c_g|^2 & c_g c_e^* \\ c_e c_g^* & |c_e|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Aquí vemos que si c_g o c_e son cero, las coherencias desaparecen ($\rho_{ge} = \rho_{eg} = 0$) y el sistema se encuentra en el estado base o excitado, sin superposición entre ellos. En cambio, para una superposición máxima, el estado es una combinación con coeficientes de igual magnitud, por ejemplo, $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle)$, lo que da lugar a coherencias máximas ($\rho_{ge} = \rho_{eg} = \frac{1}{2}$). De esta forma vemos que las coherencias reflejan la superposición cuántica entre los estados.

La última magnitud de interés en este análisis es el entrelazamiento, una propiedad intrínsecamente cuántica mediante la cual dos o más sistemas (en nuestro caso, 2 TLS) exhiben correlaciones que no pueden explicarse clásicamente. Cuando los sistemas están entrelazados, sus estados individuales no están definidos de manera independiente hasta que se realiza una medición, y el resultado de medir uno de los subsistemas afecta instantáneamente la descripción estadística del otro. El entrelazamiento surge cuando los sistemas interactúan de manera que sus estados se vuelven inseparables; en nuestro caso, la interacción de los átomos a través del campo electromagnético. Matemáticamente, un estado entrelazado no puede escribirse como un producto tensorial de los estados individuales, es decir, no existe una descomposición del tipo

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B, \quad (4.3)$$

donde A y B representan los dos subsistemas. Un ejemplo paradigmático es el estado de Bell

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|gg\rangle + |ee\rangle), \quad (4.4)$$

que no puede factorizarse como $(a|g\rangle_A + b|e\rangle_A) \otimes (c|g\rangle_B + d|e\rangle_B)$. En este estado, medir el átomo A en $|g\rangle$ garantiza que el átomo B también se encontrará en $|g\rangle$, ilustrando la correlación perfecta característica del entrelazamiento.

4.1 Evolución temporal de 1 TLS

En esta sección se presentan los resultados para la dinámica de 1 TLS. Se comienza con el análisis de la dinámica sin forzamiento, utilizando el eigensistema mostrado en la

Tabla 2.1, para luego incorporar el forzamiento coherente a través del término perturbativo en el hamiltoniano. Después se realiza una comparación entre ambos casos, resaltando las diferencias en la evolución temporal de las poblaciones y coherencias. Finalmente, se incluyen soluciones numéricas del caso con forzamiento que permiten validar el método perturbativo desarrollado anteriormente.

En esta clase de sistemas es común utilizar átomos de rubidio-87, en donde la transición más empleada corresponde a la línea D2, con una longitud de onda de 780 nm. Esto implica una frecuencia de transición de $\omega_{a_0} = 3.84 \times 10^{14}$ Hz, mientras que el estado excitado presenta una vida media asociada a una tasa de decaimiento de $\Gamma_0 = 3.812 \times 10^7$ Hz, equivalente a un tiempo de aproximadamente 26 ns [24]. Para simplificar el tratamiento, es conveniente reescalar y adimensionalizar estas magnitudes. Tomamos como referencia una desintonía del láser con la frecuencia de transición atómica de $\omega_0 = 1.885 \times 10^8$ Hz. Dado que esta desintonía es mucho menor que la frecuencia de transición, el sistema se encuentra cerca de la resonancia, lo que permite que el láser acople de manera eficiente al átomo y lo excite desde el estado fundamental al excitado. Al dividir todas las magnitudes reales entre ω_0 , obtenemos las unidades adimensionales: $\omega = \omega_0/\omega_0 = 1$ y $\Gamma = \Gamma_0/\omega_0 \approx 0.2$. El subíndice “0” denota los valores físicos reales. De manera análoga, el tiempo se reescala como $t = t_0\omega_0$, de modo que en lo sucesivo trabajaremos con tiempos y frecuencias adimensionales al graficar la dinámica del sistema.

Al analizar el caso con forzamiento, es necesario considerar este término como una perturbación débil, de modo que la convergencia de la serie perturbativa para los eigenvalores y eigenvectores del liouvilliano. Dicha serie se construye en potencias del parámetro ϵ , el cual debe ser lo suficientemente pequeño para asegurar su validez. Surge entonces la pregunta: ¿qué tan pequeño debe ser ϵ ? Si observamos la corrección de primer orden a los eigenvectores derechos en (3.20), podemos reescribirla en forma de sumatoria al utilizar la expresión explícita del operador S_n :

$$\hat{\rho}_n^{(1)} = \sum_{m \neq n} \frac{\text{Tr} \left(\hat{\rho}_m^{(0)\dagger} \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(0)} \right)}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}} \hat{\rho}_m^{(0)}. \quad (4.5)$$

Esto nos permite estimar una cota para ϵ a partir de la magnitud de esta corrección. En efecto, si el módulo de la suma anterior es menor que uno, entonces el término de primer orden constituye una pequeña corrección sobre el orden cero. Podemos capturar esta condición como

$$\epsilon < \frac{|\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}|}{\left| \text{Tr} \left(\check{\rho}_m^{(0)\dagger} \mathcal{L}_1 \hat{\rho}_n^{(0)} \right) \right|}. \quad (4.6)$$

El caso más restrictivo se da cuando los eigenvalores $\lambda_n^{(0)}$ y $\lambda_m^{(0)}$ están muy próximos, es decir, cuando el numerador de la fracción se hace pequeño. Además, el denominador se maximiza cuando el operador \mathcal{L}_1 induce la mayor elongación posible sobre $\hat{\rho}_n^{(0)}$, lo cual puede estimarse mediante el eigenvalor de mayor módulo de \mathcal{L}_1 , denotado como $\lambda_{\mathcal{L}_1}$. En consecuencia, una cota razonable para que la serie converja es [25]:

$$\epsilon < \frac{\min_{n \neq m} |\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}|}{\max(|\lambda_{\mathcal{L}_1}|)}. \quad (4.7)$$

Para nuestro caso de 1 TLS, tenemos que $\epsilon < \gamma$. Esta condición no es estrictamente necesaria: podrían existir valores mayores de ϵ para los cuales la serie aún converge y los resultados de la teoría de perturbaciones son válidos. No obstante, esta cota nos ofrece una guía sobre los posibles valores del parámetro de forzamiento. De hecho, como se mostrará más adelante en las gráficas numéricas, al considerar $\epsilon = \gamma = 0.1$ se obtienen resultados satisfactorios.

Para determinar la evolución temporal de las diferentes observables a estudiar consideraremos un estado inicial general:

$$\rho(0) = (1 - a) |g\rangle \langle g| + c |g\rangle \langle e| + c^* |e\rangle \langle g| + a |e\rangle \langle e| = \begin{pmatrix} 1 - a & c \\ c^* & a \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

donde $a \in [0, 1]$ y $|c|^2 \leq a(1 - a)$. Esta representación captura todos los posibles estados físicos del sistema, incluyendo tanto estados puros como mixtos, y es adecuada para estudiar la evolución temporal completa bajo la dinámica abierta, ya que es la matriz de 2×2 mas general que cumple con las condiciones fundamentales de hermiticidad, traza unitaria y positividad requeridas para cualquier matriz de densidad.

Los coeficientes $C_n(0)$ de la matriz de densidad inicial $\rho(0)$ son:

$$C_1(0) = \text{Tr}[\check{\rho}_1^\dagger \rho(0)] = \text{Tr}[\mathbf{1} \rho(0)] = \text{Tr}[\rho(0)] = 1, \quad (4.9)$$

$$C_2(0) = \text{Tr}[\check{\rho}_2^\dagger \rho(0)] = \text{Tr}[|e\rangle \langle g| \rho(0)] = c, \quad (4.10)$$

$$C_3(0) = \text{Tr}[\check{\rho}_3^\dagger \rho(0)] = \text{Tr}[|g\rangle \langle e| \rho(0)] = c^*, \quad (4.11)$$

$$C_4(0) = \text{Tr}[\check{\rho}_4^\dagger \rho(0)] = \text{Tr}[|e\rangle \langle e| \rho(0)] = a. \quad (4.12)$$

Sustituyendo estos coeficientes y los eigenvalores y eigenvectores de la [Tabla 2.1](#) en la ecuación (2.10), obtenemos la evolución temporal de la matriz de densidad en el caso sin forzamiento:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= (1 - ae^{-2\gamma t}) |g\rangle \langle g| + ce^{(-\gamma+i\omega)t} |g\rangle \langle e| + c^* e^{(-\gamma-i\omega)t} |e\rangle \langle g| + ae^{-2\gamma t} |e\rangle \langle e| \\ &= \begin{pmatrix} 1 - ae^{-2\gamma t} & ce^{(-\gamma+i\omega)t} \\ c^* e^{(-\gamma-i\omega)t} & ae^{-2\gamma t} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Para el caso con forzamiento, iniciaremos de dos estados específicos, en vez de uno general (esto es debido a la complejidad de las expresiones): el estado excitado $|e\rangle$ y el estado con máxima superposición $\frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle)$. Tomando $\rho(0) = |e\rangle \langle e|$, calculamos los coeficientes $C_n(0)$ y los sustituimos en la ecuación (2.10) utilizando los eigenvalores y eigenvectores perturbados hasta segundo orden que calculamos en el capítulo anterior, obtenemos los siguientes elementos de la matriz de densidad evolucionada en el tiempo:

$$\rho_{gg}(t) = 1 - \rho_{ee}(t), \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}\rho_{ee}(t) &= e^{t\left(\frac{4\gamma\epsilon^2}{\gamma^2+\omega^2}-2\gamma\right)} + \epsilon^2 \left(-\frac{(5\gamma^2 - 3\omega^2) e^{t\left(\frac{4\gamma\epsilon^2}{\gamma^2+\omega^2}-2\gamma\right)}}{(\gamma - i\omega)^2(\gamma + i\omega)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2} + \frac{(-\omega - 3i\gamma)e^{t\left(-\frac{2\epsilon^2}{\gamma+i\omega}-\gamma+i\omega\right)}}{(\omega - i\gamma)(\gamma^2 + \omega^2)} - \frac{(\omega - 3i\gamma)e^{t\left(-\frac{2\epsilon^2}{\gamma-i\omega}-\gamma-i\omega\right)}}{(\omega + i\gamma)(\gamma^2 + \omega^2)} \right),\end{aligned}\quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}\rho_{ge}(t) &= \epsilon \left(-\frac{1}{\omega - i\gamma} + \frac{e^{t\left(\frac{4\gamma\epsilon^2}{\gamma^2+\omega^2}-2\gamma\right)}}{\omega + i\gamma} + \frac{2i\gamma e^{t\left(-\frac{2\epsilon^2}{\gamma-i\omega}-\gamma-i\omega\right)}}{(\gamma - i\omega)(\gamma + i\omega)} \right) + \frac{1}{2} e^{t\left(-\frac{2\epsilon^2}{\gamma-i\omega}-\gamma-i\omega\right)} \\ &\quad + \epsilon^2 \left(\frac{2\omega e^{t\left(\frac{4\gamma\epsilon^2}{\gamma^2+\omega^2}-2\gamma\right)}}{(-\omega + i\gamma)(\gamma - i\omega)^2} - \frac{ie^{t\left(-\frac{2\epsilon^2}{\gamma+i\omega}-\gamma+i\omega\right)}}{2\omega(\gamma + i\omega)} + \frac{(3\omega + i\gamma)e^{t\left(-\frac{2\epsilon^2}{\gamma-i\omega}-\gamma-i\omega\right)}}{2\omega(\gamma - i\omega)^2} \right),\end{aligned}\quad (4.16)$$

$$\rho_{eg}(t) = \rho_{ge}(t)^*. \quad (4.17)$$

De manera análoga, se puede calcular la evolución temporal de la matriz de densidad correspondiente al estado de máxima superposición $\rho(0) = \frac{1}{2}(|g\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e| +$

$|e\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|$). Sin embargo, debido a la extensión de las expresiones resultantes, no se presenta aquí explícitamente.

4.1.1 Poblaciones

Consideramos como estado inicial el estado excitado, es decir, $\rho(0) = |e\rangle\langle e|$, lo que equivale a fijar $a = 1$ y $c = 0$ en la forma general de la matriz de densidad (4.8). Utilizando la matriz (4.13) vemos que, para el caso sin forzamiento, la población del estado base es $P_g = 1 - e^{-2\gamma t}$ y la del estado excitado es $P_e = e^{-2\gamma t}$. A partir de ahora utilizaremos la notación $\rho_{jj} = P_j$ para denotar las poblaciones de los estados $|j\rangle$. Cuando el sistema presenta forzamiento las poblaciones están dadas por las entradas diagonales de la matriz de densidad, es decir, las expresiones (4.14) y (4.15).

A partir de estas expresiones podemos observar que el forzamiento introduce un término de orden ϵ^2 sobre el decaimiento exponencial, lo que se traduce en un decaimiento más lento. Esto tiene sentido desde el punto de vista físico, ya que el forzamiento añade energía al sistema, contrarrestando parcialmente la pérdida asociada al acoplamiento con el entorno y, por lo tanto, ralentizando la relajación hacia el estado de equilibrio. Además, en el mismo orden de perturbación, el forzamiento genera términos oscilantes que dependen no solo de la tasa de decaimiento γ , sino también de la frecuencia ω . En contraste, en el caso sin forzamiento, la dinámica estaba gobernada únicamente por γ . Esta dependencia adicional surge porque el término de forzamiento acopla las poblaciones con las coherencias, introduciendo oscilaciones en la evolución de la matriz de densidad. Este comportamiento se puede observar en la [Figura 4.1](#), donde se comparan las poblaciones con y sin forzamiento.

Cabe destacar que, en el caso sin forzamiento, el estado estacionario al que evoluciona el sistema corresponde al estado base. En cambio, cuando se incluye el forzamiento, el estado estacionario es distinto, ya que contiene términos de segundo orden en ϵ . Como consecuencia, aunque las poblaciones asociadas a estos términos no son estrictamente nulas, su magnitud es muy pequeña. Las expresiones correspondientes y sus valores calculados para los parámetros que hemos considerado son los siguientes:

$$P_g^{ss} = 1 - \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + \omega^2} \approx 0.99, \quad (4.18)$$

$$P_e^{ss} = \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + \omega^2} \approx 0.01. \quad (4.19)$$

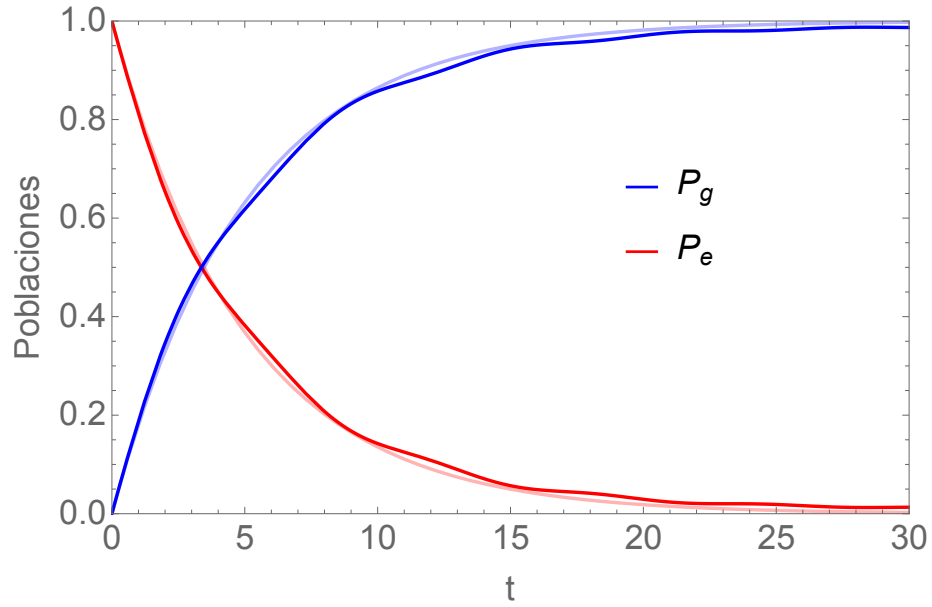


Figura 4.1: Evolución temporal de las poblaciones P_g y P_e para el caso con forzamiento y en un tono más claro el caso sin forzamiento. $\Gamma = 2\gamma = 0.2, \omega = 1, \epsilon = 0.1$.

4.1.2 Coherencias

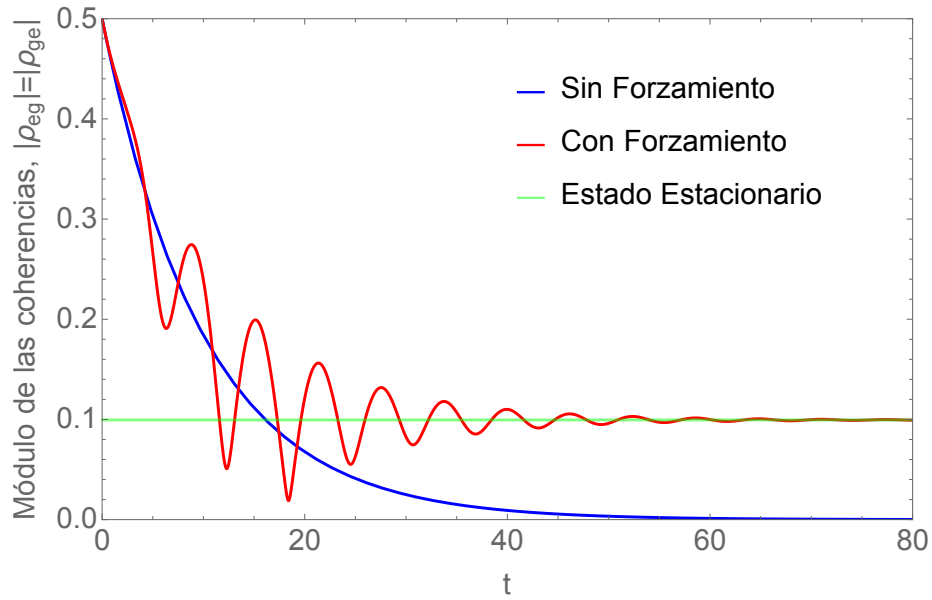


Figura 4.2: Evolución temporal del módulo de las coherencias de 1 TLS con y sin forzamiento. $\Gamma = 2\gamma = 0.2, \omega = 1, \epsilon = 0.1$.

Para estudiar las coherencias tomaremos un estado inicial con superposición máxima, esto se logra haciendo $a = c = 1/2$ en la expresión (4.8). Para calcular la evolución temporal del módulo de las coherencias en el caso sin forzamiento, sustituimos estos valores en la expresión (4.13), obteniendo: $|\rho_{ge}| = |\rho_{eg}| = \frac{1}{2}e^{-\gamma t}$. Para el caso con forzamiento, la expresión de las coherencias (recordando que $\rho_{eg} = \rho_{ge}^*$) en el marco de interacción es:

$$\begin{aligned} \rho_{ge}(t) = & \frac{1}{2}e^{t\left(-\gamma - \frac{2\epsilon^2}{\gamma - i\omega} - i\omega\right)} + \epsilon \left[\frac{2i\gamma e^{t\left(-\gamma - \frac{2\epsilon^2}{\gamma - i\omega} - i\omega\right)}}{(\gamma - i\omega)(\gamma + i\omega)} - \frac{1}{-i\gamma + \omega} + \frac{(-i\gamma + \omega) e^{t\left(-2\gamma + \frac{4\gamma\epsilon^2}{\gamma^2 + \omega^2}\right)}}{\gamma^2 + \omega^2} \right] \\ & + \epsilon^2 \left[-\frac{i e^{t\left(-\gamma - \frac{2\epsilon^2}{\gamma + i\omega} + i\omega\right)}}{2(\gamma + i\omega)\omega} - \frac{e^{t\left(-\gamma - \frac{2\epsilon^2}{\gamma - i\omega} - i\omega\right)}(i\gamma + 3\omega)}{2\omega(i\gamma + \omega)^2} - \frac{2i\omega e^{t\left(-2\gamma + \frac{4\gamma\epsilon^2}{\gamma^2 + \omega^2}\right)}}{(\gamma - i\omega)(\gamma^2 + \omega^2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Al tomar el módulo de la expresión (4.20) se obtiene la [Figura 4.2](#), donde se aprecia una diferencia significativa entre las dinámicas con y sin forzamiento coherente. En presencia de forzamiento, las coherencias no decaen directamente a cero; en cambio, presentan oscilaciones amortiguadas que relajan hacia un valor estacionario distinto de cero. Este valor puede calcularse evaluando $|\rho_{ge}|$ en la matriz de densidad correspondiente al estado estacionario perturbado $\hat{\rho}_1$, utilizando los parámetros $\gamma = 0.1$, $\omega = 1$ y $\epsilon = 0.1$:

$$|\rho_{eg}^{ss}| = \left| \frac{\epsilon}{i\gamma - \omega} \right| = \frac{0.1}{\sqrt{0.1^2 + 1^2}} \approx 0.0995. \quad (4.21)$$

Este valor corresponde a la línea recta verde mostrada en la [Figura 4.2](#). Al compararlo con el valor obtenido a partir de la solución exacta para el estado estacionario (expresión (3.104)), cuyo módulo es $|\rho_{eg}| \approx 0.0975$, se observa una buena concordancia.

Este comportamiento se comprende desde la teoría de perturbaciones, donde las correcciones a las coherencias aparecen ya a primer orden en ϵ , mientras que las correcciones a las poblaciones sólo surgen a segundo orden. Físicamente, esto se debe a que el forzamiento coherente (con forma de σ_x) actúa directamente sobre los elementos no diagonales de la matriz de densidad según la ecuación maestra de Lindblad. En contraste, las poblaciones requieren que las coherencias generadas a primer orden interactúen con el forzamiento para inducir cambios en estas. Por lo tanto, las coherencias son más sensibles al forzamiento, mostrando efectos significativos incluso para valores pequeños de ϵ .

4.1.3 Comparación con solución numérica

Para finalizar el estudio del sistema de 1 TLS, realizamos una comparación entre la solución perturbativa y la solución numérica exacta del sistema. Esta comparación tiene como propósito validar la precisión y aplicabilidad del enfoque perturbativo desarrollado previamente. Las Figuras 4.3–4.4 muestran los resultados de esta comparación para las poblaciones y el módulo de las coherencias, partiendo de los estados previamente utilizados en cada caso.

Para las poblaciones, se observa una excelente concordancia entre la solución numérica y la perturbativa, siendo prácticamente indistinguibles. En las coherencias se aprecia una diferencia leve pero perceptible en las amplitudes de oscilación a tiempos más largos. Esta discrepancia es esperable, ya que las coherencias están particularmente influenciadas por los efectos de ordenes inferiores en la expansión perturbativa, permitiendo que cualquier imprecisión se propague directamente. A pesar de ello, la forma general de la dinámica es bien capturada, y la solución perturbativa sigue ofreciendo una descripción cualitativa precisa y cuantitativamente razonable.

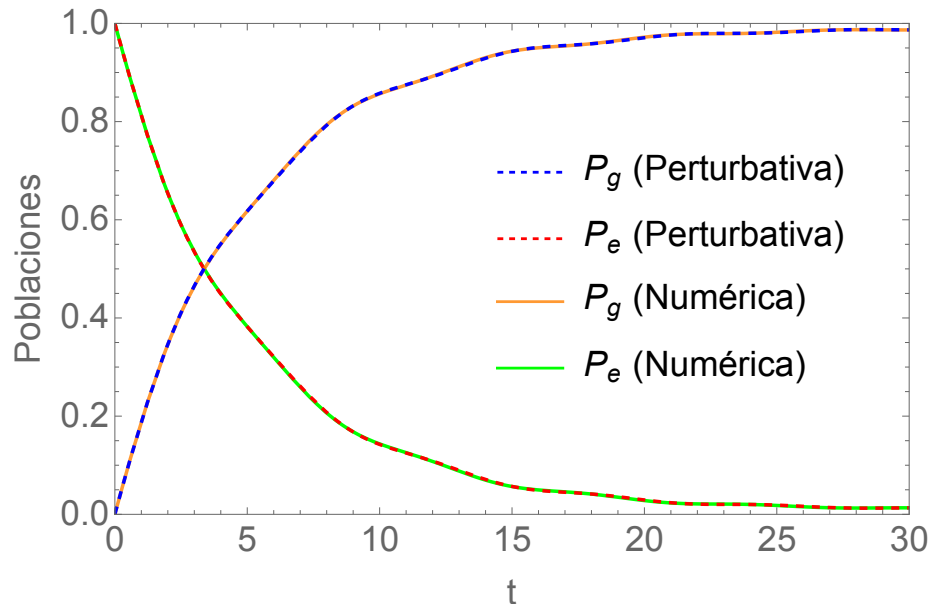


Figura 4.3: Comparación entre la solución perturbativa y numérica de las poblaciones de 1 TLS con forzamiento. $\Gamma = 2\gamma = 0.2$, $\omega = 1$, $\epsilon = 0.1$.

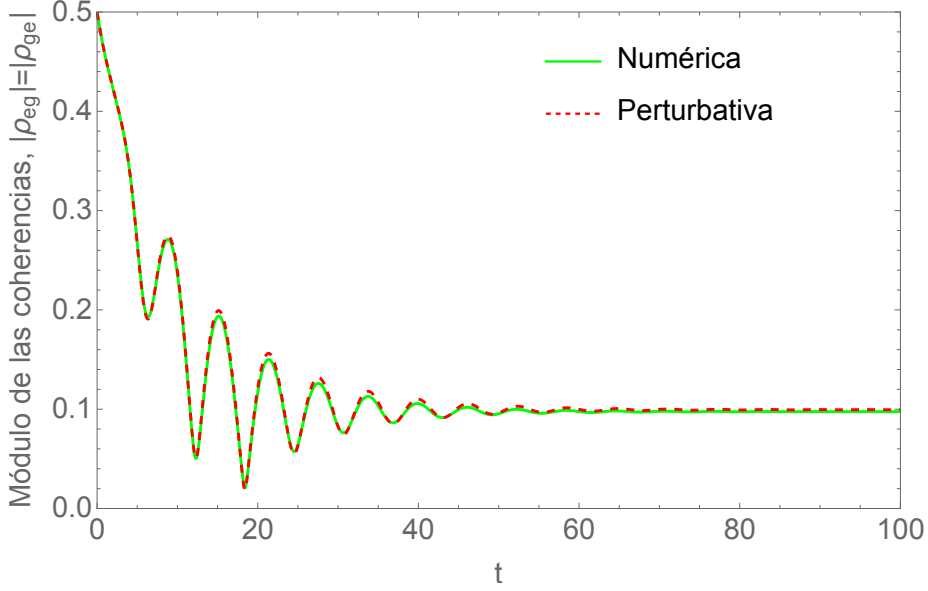


Figura 4.4: Comparación entre la solución perturbativa y numérica del módulo de las coherencias de 1 TLS con forzamiento. $\Gamma = 2\gamma = 0.2, \omega = 1, \epsilon = 0.1$.

4.2 Evolución temporal de 2 TLS

Al expandir este análisis al caso de 2 TLS, la dinámica adquiere una mayor complejidad debido a la interacción entre ambos subsistemas. Esta configuración permite la aparición del entrelazamiento, cuya evolución a lo largo del tiempo estudiaremos mediante la concurrencia, medida de entrelazamiento para sistemas bipartitos.

La forma general de las matrices densidad que utilizaremos corresponde a un espacio de Hilbert de dimensión 4. En la base $|gg\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle, |ee\rangle$, la matriz densidad ρ toma la forma:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{gggg} & \rho_{ggge} & \rho_{ggeg} & \rho_{ggee} \\ \rho_{gegg} & \rho_{gege} & \rho_{geeg} & \rho_{geee} \\ \rho_{eggg} & \rho_{egge} & \rho_{egeg} & \rho_{egee} \\ \rho_{eeeg} & \rho_{eege} & \rho_{eeeg} & \rho_{eeee} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

De nuevo, los elementos diagonales de esta matriz, representan las poblaciones de los estados de la base. Por ejemplo, $P_{ge} = \rho_{gege}$ corresponde a la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|ge\rangle$. En general, la probabilidad total debe conservarse, lo cual se refleja en la condición $\text{Tr}(\rho) = 1$. Los elementos fuera de la diagonal representan las coherencias

cuánticas entre distintos estados del sistema. Estos términos indican que el sistema no está simplemente en una mezcla clásica de estados, sino en una superposición cuántica entre ellos. Por ejemplo, el elemento ρ_{ggee} representa la coherencia entre los estados $|gg\rangle$ y $|ee\rangle$; si este término es distinto de cero, significa que el sistema tiene una componente que involucra ambos estados simultáneamente. Las coherencias son esenciales para describir propiedades puramente cuánticas como el entrelazamiento. Por ello, en este trabajo prestaremos especial atención a la evolución temporal de ciertos términos coherentes, como ρ_{ggee} o ρ_{egeg} , que se relacionan directamente con la presencia de entrelazamiento entre ambos TLS.

Para estudiar la evolución temporal de las poblaciones utilizaremos como estado inicial aquel donde ambos TLS se encuentran en el estado excitado, es decir, $|ee\rangle$. En cuanto a las coherencias y el entrelazamiento, consideraremos como estado inicial los estados de Bell, los cuales son estados con máxima superposición entre dos estados de la base y presentan el mayor grado de entrelazamiento posible. Estos estados son [1]:

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|gg\rangle \pm |ee\rangle), \quad (4.23)$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ge\rangle \pm |eg\rangle). \quad (4.24)$$

Notemos que los estados $|\Phi^\pm\rangle$ involucran superposiciones entre los estados donde ambos TLS están en el mismo estado (ambos en el estado base o ambos en el estado excitado), mientras que los estados $|\Psi^\pm\rangle$ involucran superposiciones entre los estados donde los TLS están en estados opuestos (uno en el estado base y el otro en el estado excitado, y viceversa). Esta diferencia es crucial, ya que afecta la dinámica del entrelazamiento y las coherencias a lo largo del tiempo como veremos más adelante. Las matrices de densidad correspondientes a estos estados iniciales son:

$$\rho_{|ee\rangle}(0) = |ee\rangle\langle ee| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

$$\rho_{|\Phi^\pm\rangle}(0) = |\Phi^\pm\rangle\langle\Phi^\pm| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

$$\rho_{\Psi^\pm}(0) = |\Psi^\pm\rangle\langle\Psi^\pm| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

En el caso sin forzamiento, utilizando la ecuación (2.10) junto con los resultados del eigensistema presentados en la [Tabla 2.2](#), y considerando como condición inicial $\rho_{|ee\rangle}(0)$, se obtiene:

$$\rho_{|ee\rangle}(t) = \begin{pmatrix} 1 + e^{-4\gamma t} - 2e^{-2\gamma t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-4\gamma t} + e^{-2\gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-4\gamma t} + e^{-2\gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-4\gamma t} \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Similarmente, la evolución temporal de las matrices de densidad correspondientes a los estados de Bell para el caso sin forzamiento es:

$$\rho_{\Phi^\pm}(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}e^{-4\gamma t} - e^{-2\gamma t} & 0 & 0 & \pm\frac{1}{2}e^{-2(\gamma-i\omega)t} \\ 0 & -\frac{1}{2}e^{-4\gamma t} + \frac{1}{2}e^{-2\gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}e^{-4\gamma t} + \frac{1}{2}e^{-2\gamma t} & 0 \\ \pm\frac{1}{2}e^{-2(\gamma+i\omega)t} & 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-4\gamma t} \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\rho_{\Psi^\pm}(t) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2\gamma t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-2\gamma t} & \pm\frac{1}{2}e^{-2\gamma t} & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{2}e^{-2\gamma t} & \frac{1}{2}e^{-2\gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

4.2.1 Poblaciones

Para estudiar la dinámica de las poblaciones de 2 TLS consideraremos como estado inicial a $\rho_{|ee\rangle}(0)$, por lo que, las poblaciones del sistema sin forzamiento están dadas por los elementos diagonales de la expresión (4.28):

$$P_{gg}(t) = 1 + e^{-4\gamma t} - 2e^{-2\gamma t}, \quad (4.31)$$

$$P_{ge}(t) = -e^{-4\gamma t} + e^{-2\gamma t}, \quad (4.32)$$

$$P_{eg}(t) = -e^{-4\gamma t} + e^{-2\gamma t}, \quad (4.33)$$

$$P_{ee}(t) = e^{-4\gamma t}. \quad (4.34)$$

Para calcular las poblaciones en el caso con forzamiento, insertamos nuestros eigenvalores y eigenvectores perturbados en la expresión (2.10), y después calculamos su producto interno con el estado del que queremos conocer su población. Por ejemplo, para la expresión más sencilla que corresponde a la población del estado excitado, se tiene:

$$\begin{aligned} P_{ee}(t) &= \text{Tr}(\rho_{|ee\rangle}(t) |ee\rangle \langle ee|) \\ &= e^{\gamma t \left(-4 + \frac{8\epsilon^2}{A}\right)} + \epsilon^2 \left\{ \frac{2}{A} e^{\gamma t \left(-4 + \frac{8\epsilon^2}{A}\right)} + \text{Re} \left[\frac{4(-4\gamma + B)}{AB} e^{t \left(-4\gamma + B + \epsilon^2 \left(\frac{4\gamma}{\omega^2 + (\gamma - i\Omega)^2} + \frac{-2A + 8i\Omega}{\Omega^2 + (\gamma - i\omega)^2}\right)\right)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(C + \sqrt{D})(-E + \sqrt{D})}{F\sqrt{D}} e^{t \left(-2\gamma - \frac{4\gamma\epsilon^2}{-C + \sqrt{D}}\right)} + \frac{(-C + \sqrt{D})(E + \sqrt{D})}{F\sqrt{D}} e^{t \left(-2\gamma + \frac{4\gamma\epsilon^2}{C + \sqrt{D}}\right)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde hemos definido las siguientes cantidades para simplificar la notación:

$$A = \gamma^2 + (\omega - \Omega)^2, \quad (4.36)$$

$$B = \gamma - i(\omega - \Omega), \quad (4.37)$$

$$C = 2\Omega(\omega - \Omega), \quad (4.38)$$

$$D = \gamma^4 + 2\gamma^2(\omega^2 + \Omega^2) + (\omega - \Omega)^2(\omega^2 + 2\omega\Omega + 5\Omega^2), \quad (4.39)$$

$$E = \gamma^2 + \omega^2 + 4\omega\Omega - \Omega^2, \quad (4.40)$$

$$F = \gamma^4 + 2\gamma^2(\omega^2 + \Omega^2) + (\omega^2 - \Omega^2)^2. \quad (4.41)$$

De manera análoga, se obtienen las expresiones para las demás poblaciones que no se muestran aquí por su extensión. Este caso es el más sencillo porque los eigenvectores generalmente no se acoplan con el estado excitado, ya que para ello la perturbación debería excitar dichos eigenvectores al máximo. Esto implica que los coeficientes $C_n(t_0)$ y $\text{Tr}(\hat{\rho}_n |ee\rangle \langle ee|)$ son, en su mayoría, nulos. En cambio, para estados iniciales menos excitados, las contribuciones de otros eigenvectores sí se manifiestan, generando expresiones mucho más complejas para la dinámica.

La comparación entre la evolución temporal de las poblaciones de los estados con y sin forzamiento se muestra en la [Figura 4.5](#). En ausencia de forzamiento, el estado base $|gg\rangle$ tiende a poblarse completamente, estabilizándose en 1 a tiempos largos. Sin embargo, cuando se introduce el forzamiento, esta situación cambia de manera notable: el estado base

ya no se estabiliza en 1, sino que, a través del cálculo del estado estacionario, se obtiene que la probabilidad de hallar el sistema en $|gg\rangle$ está dada por

$$P_{gg}^{ss} = \text{Tr}(\hat{\rho}_1 |gg\rangle \langle gg|) = 1 - \frac{2\epsilon^2}{\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2} = 0.9375, \quad (4.42)$$

Esto evidencia que el forzamiento mantiene una fracción no nula de población fuera del estado base incluso a tiempos largos. En cuanto al estado doblemente excitado $|ee\rangle$, la probabilidad de encontrar al sistema en él decae a cero en el régimen estacionario, es decir,

$$P_{ee}^{ss} = \text{Tr}(\hat{\rho}_1 |ee\rangle \langle ee|) = 0. \quad (4.43)$$

Esto puede apreciarse en la expresión (4.35), donde los términos dominantes en los exponentes son negativos, por lo que el límite cuando $t \rightarrow \infty$ tiende a cero. Además, dado que las correcciones son de orden ϵ^2 , la dinámica resultante es prácticamente la misma que en el caso sin forzamiento. No obstante, el forzamiento permite que persista población en los estados de una sola excitación, $|ge\rangle$ y $|eg\rangle$, para los cuales se cumple que

$$P_{ge}^{ss} = P_{eg}^{ss} = \text{Tr}(\hat{\rho}_1 |ge\rangle \langle ge|) = \text{Tr}(\hat{\rho}_1 |eg\rangle \langle eg|) = \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2} = 0.03125. \quad (4.44)$$

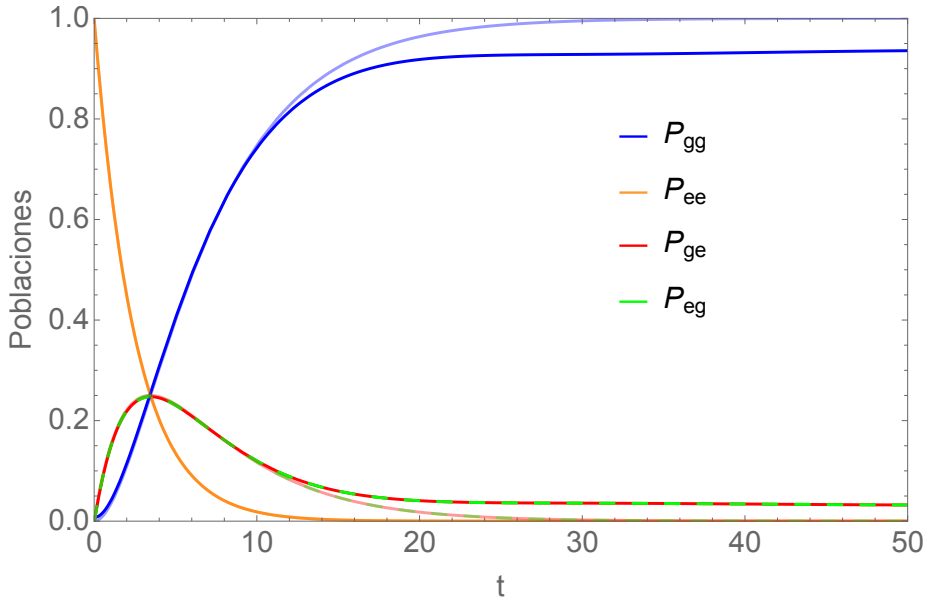


Figura 4.5: Comparación de la evolución temporal de las poblaciones de 2 TLS con y sin forzamiento coherente (gráficas con tonos más intensos y menos intensos respectivamente).

$\Gamma = 2\gamma = 0.2$, $\omega = 1$, $\Omega = -0.9$, $\epsilon = 0.025$.

4.2.2 Coherencias

El módulo de las coherencias del sistema sin forzamiento, partiendo de los estados de Bell como condiciones iniciales, se obtiene a partir de las expresiones (4.29) y (4.30):

$$|\rho_{ggee}(t)| = |\rho_{geeg}(t)| = \frac{1}{2}e^{-2\gamma t}. \quad (4.45)$$

En el caso con forzamiento, las expresiones resultan demasiado extensas para mostrarlas explícitamente. No obstante, su cálculo sigue un procedimiento análogo al de las poblaciones: se insertan los eigenvalores y eigenvectores perturbados en la expresión (2.10), y a continuación se evalúa el producto interno con la coherencia deseada, tomando finalmente su módulo.

En la Figura 4.6 se muestra la evolución temporal de las coherencias, considerando como estado inicial el correspondiente estado de Bell que las contiene. Como puede observarse, ambas coherencias alcanzan un estado estacionario distinto de cero, en contraste con el caso sin forzamiento. Las coherencias $|\rho_{ggee}|$ y $|\rho_{geeg}|$, asociadas a la superposición entre los estados $|gg\rangle$ y $|ee\rangle$, presentan un valor estacionario muy cercano a cero, ya que el estado doblemente excitado no sobrevive a tiempos largos y, por lo tanto, la superposición que lo contiene también es pequeña. En cambio, para las coherencias $|\rho_{geeg}|$ y $|\rho_{egge}|$, que cuantifican la superposición entre los estados con una sola excitación, el valor estacionario es significativamente mayor. Esto se explica porque los estados $|ge\rangle$ y $|eg\rangle$ sí persisten a tiempos largos. Los valores de estas coherencias en el estado estacionario son:

$$|\rho_{ggee}^{ss}| = |\rho_{geeg}^{ss}| = |\text{Tr}(\hat{\rho}_1 |gg\rangle \langle ee|)| = \frac{\epsilon^2}{\sqrt{(\gamma^2 + \omega^2)(\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2)}} \approx 0.0044, \quad (4.46)$$

$$|\rho_{geeg}^{ss}| = |\rho_{egge}^{ss}| = |\text{Tr}(\hat{\rho}_1 |ge\rangle \langle eg|)| = \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2} = 0.03125. \quad (4.47)$$

Las coherencias asociadas al estado de Bell $|\Phi^\pm\rangle$, que conectan $|gg\rangle$ y $|ee\rangle$, muestran oscilaciones más pronunciadas que las del estado $|\Psi^\pm\rangle$, relacionadas con la superposición entre $|ge\rangle$ y $|eg\rangle$. La razón es que, en el caso de $|\Phi^\pm\rangle$, el forzamiento coherente conecta los estados con cero y dos excitaciones mediante transiciones intermedias en el subespacio de una excitación, lo cual genera múltiples trayectorias de evolución y, por ende, interferencias más marcadas. En cambio, la evolución de $|\Psi^\pm\rangle$ permanece confinado al subespacio de una excitación, donde la dinámica es más restringida y las oscilaciones resultan menos notorias.

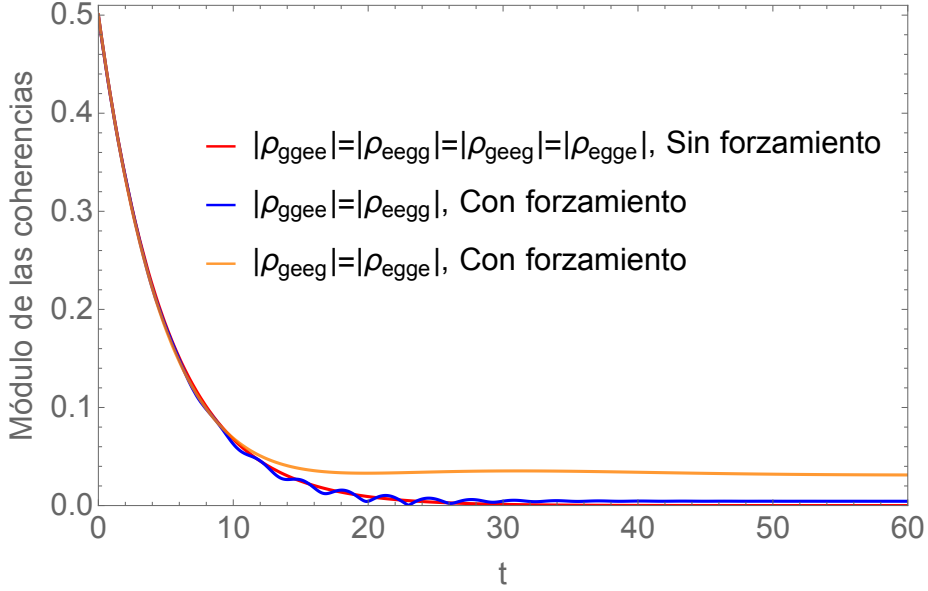


Figura 4.6: Evolución temporal del módulo de las coherencias de 2 TLS con y sin forzamiento. $\Gamma = 2\gamma = 0.2$, $\omega = 1$, $\Omega = -0.9$, $\epsilon = 0.025$.

4.2.3 Entrelazamiento

El entrelazamiento cuántico se entiende como un tipo particular de correlaciones no clásicas entre subsistemas, imposibles de generar únicamente mediante operaciones locales y comunicación clásica (LOCC, por sus siglas en inglés). En este sentido, el entrelazamiento constituye un recurso genuinamente cuántico, pues da lugar a correlaciones que no tienen análogo clásico. Este recurso, en combinación con operaciones LOCC, puede aprovecharse para el desarrollo de tecnologías de información y computación cuánticas con capacidades que superan a las de sus contrapartes clásicas [2].

La noción de entrelazamiento surgió inicialmente como un concepto cualitativo, utilizado para señalar comportamientos propiamente cuánticos en sistemas compuestos. Con el desarrollo de la teoría, se introdujeron medidas cuantitativas que permiten caracterizar y comparar el grado de entrelazamiento. Entre ellas, una de las más empleadas para sistema bipartitos es la concurrencia [26]. Dada una matriz de densidad ρ , en la base computacional, se construye una matriz auxiliar $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$, donde ρ^* es la conjugada compleja de ρ . Calculando los eigenvalores ξ_i de la matriz producto $R = \rho\tilde{\rho}$

(ordenados de mayor a menor), la concurrencia se define como:

$$C(\rho) = \max\left(0, \sqrt{\xi_1} - \sqrt{\xi_2} - \sqrt{\xi_3} - \sqrt{\xi_4}\right). \quad (4.48)$$

La concurrencia toma valores en el intervalo $[0, 1]$, donde 0 indica un estado separable sin entrelazamiento y 1 corresponde a un estado máximamente entrelazado. No obstante, en ciertos casos la matriz de densidad adquiere una estructura particular denominada estado tipo X , ρ_X , en la que únicamente los elementos de la diagonal y la antidiagonal son distintos de cero. En tales situaciones, la concurrencia toma una forma simplificada [27]:

$$C(\rho_X) = 2 \max\left(0, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}\right). \quad (4.49)$$

Esta expresión resulta particularmente útil en el análisis de la evolución temporal de los estados de Bell en ausencia de forzamiento, dado que las matrices de densidad (4.29) y (4.30) conservan la estructura tipo X . De este modo, la concurrencia puede calcularse directamente a partir de la fórmula anterior, obteniéndose:

$$C(\rho_{\Phi^\pm}(t)) = e^{-4\gamma t}, \quad (4.50)$$

$$C(\rho_{\Psi^\pm}(t)) = e^{-2\gamma t}. \quad (4.51)$$

La concurrencia presenta una decaída exponencial en función del tiempo y, en el régimen de tiempos largos, desaparece, indicando la pérdida de este recurso fundamental. Cabe destacar, además, que para los estados de Bell $|\Phi^\pm\rangle$ la concurrencia se extingue más rápidamente que para los estados $|\Psi^\pm\rangle$, lo cual se debe a que los primeros contienen dos excitaciones que se disipan con mayor rapidez en el entorno.

Para estudiar el caso con forzamiento, deseamos conocer los parámetros del sistema que maximicen el entrelazamiento en el estado estacionario mientras nos mantenemos en el régimen perturbativo. Para esto, calculamos la concurrencia del estado estacionario perturbado de 2 TLS con forzamiento coherente, $\hat{\rho}_1$, mostrado en la expresión (3.109):

$$C(\hat{\rho}_1) = \max\left[0, 2\epsilon^2 \left(\frac{1}{\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2} - \frac{1}{\sqrt{(\gamma^2 + \omega^2)(\gamma^2 + (\omega + \Omega)^2)}}\right)\right], \quad (4.52)$$

lo cual evidencia que la concurrencia es del orden de ϵ^2 , indicando que el entrelazamiento en el estado estacionario resulta ser débil. Al calcular el máximo de esta expresión, derivando con respecto a Ω y buscando los puntos críticos imponiendo que la derivada sea igual a cero, se obtiene que la concurrencia alcanza su valor máximo cuando $\Omega = -\omega$.

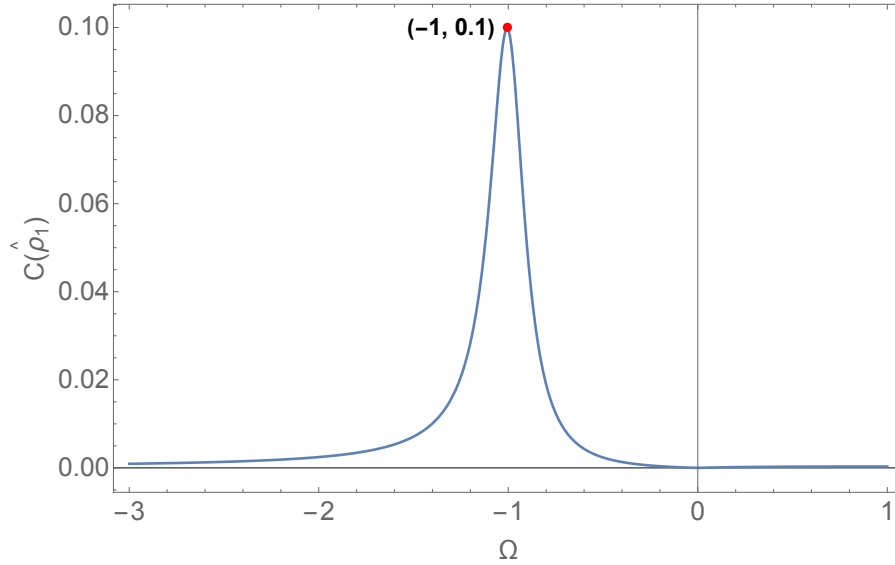


Figura 4.7: Gráfica de la concurrencia del estado estacionario calculado semi-analíticamente. Se observa que la concurrencia es máxima en $\Omega = -1$ para los parámetros $\Gamma = 2\gamma = 0.2$, $\omega = 1$, $\epsilon = 0.025$.

Lo notable de este resultado es que, a pesar de haber sido obtenido mediante un tratamiento perturbativo relativamente sencillo, también puede extrapolarse al caso exacto. En efecto, es posible calcular de forma analítica el estado estacionario (el único eigenvector que puede determinarse exactamente, ya que su autovalor asociado es cero) y, a partir de él, evaluar numéricamente la concurrencia. Este procedimiento conduce a la gráfica semianalítica mostrada en la [Figura 4.7](#), donde se aprecia un máximo localizado en $\Omega = -\omega = -1$. Con base en estos resultados, seleccionamos $\Omega = -0.9$, ya que se encuentra próximo a la zona de máxima concurrencia, evitando al mismo tiempo posibles problemas asociados a nuevas degeneraciones que aparecen al elegir $\Omega = -\omega$ exactamente. En términos físicos, esto corresponde a una frecuencia real de acoplamiento dipolo-dipolo de $\Omega_0 = -1.7 \times 10^8$ Hz, valor que resulta razonable al asociarse con una distancia interatómica cercana a $0.5\mu\text{m}$ y una configuración donde los dipolos son paralelos entre sí y al vector de separación para generar así un acoplamiento negativo (véase [\(2.33\)](#)).

Ahora estimamos un valor para el parámetro de perturbación ϵ a partir de la expresión [\(4.7\)](#). Considerando los parámetros del sistema; $\Gamma = 2\gamma = 0.2$, $\omega = 1$ y $\Omega = -0.9$, se obtiene que ϵ debe ser menor a 0.035. Esto corresponde a una frecuencia real de forzamiento del orden de los MHz.

Con los valores elegidos para los parámetros del modelo, el tiempo de relajación hacia el estado estacionario se puede estimar a partir de la relación

$$\tau \sim \frac{1}{\Delta}, \quad (4.53)$$

donde Δ corresponde al valor absoluto de la parte real del eigenvalor distinto de cero más pequeño [7]. En nuestro caso, se tiene $\Delta = 0.11225$, de modo que el tiempo de relajación resulta en $\tau \approx 9$. Lo que indica que, para que el sistema alcance efectivamente el estado estacionario, el tiempo de evolución debe ser mayor que este valor. En unidades físicas, esto corresponde a un tiempo de relajación real de aproximadamente

$$\tau_0 = \frac{\tau}{\omega_0} \approx 4.77 \times 10^{-8} \text{ s.} \quad (4.54)$$

Para el caso con forzamiento no es posible obtener una expresión completamente analítica de la concurrencia, ya que las matrices de densidad evolucionadas en el tiempo no mantienen la forma tipo X . Por ello, se recurre a un enfoque semianalítico para evaluar la expresión general de Wootters (4.48). Con este objetivo, en el código en Mathematica se implementó una función para calcular la concurrencia de la evolución temporal de los estados de Bell en intervalos de tiempo de 0.1 dentro del rango $0 \leq t \leq 50$. Los resultados obtenidos se han representado gráficamente en las Figuras 4.8 y 4.9 con su comparación sin forzamiento.

En la dinámica de la concurrencia se observan más oscilaciones para los estados $|\Phi^\pm\rangle$ en comparación con los estados $|\Psi^\pm\rangle$. Esto se debe a que, al igual que en el caso de las coherencias, el forzamiento coherente conecta los estados con cero y dos excitaciones mediante trayectorias intermedias que generan interferencias, mientras que el subespacio de una sola excitación en el que se encuentra $|\Psi^\pm\rangle$ ofrece menos caminos de acoplamiento y, por tanto, una evolución más suave. También podemos destacar que, a diferencia del caso sin forzamiento, la evolución temporal de los estados $|\Phi^+\rangle$ y $|\Phi^-\rangle$ resulta distinta entre sí, lo mismo que ocurre con los estados $|\Psi^+\rangle$ y $|\Psi^-\rangle$. Esta diferencia surge porque el término de forzamiento, representado por el operador σ_x , no conserva la paridad del número de excitaciones. En consecuencia, se rompe la simetría entre los estados con signos opuestos en la superposición, lo que modifica su evolución temporal de manera diferenciada.

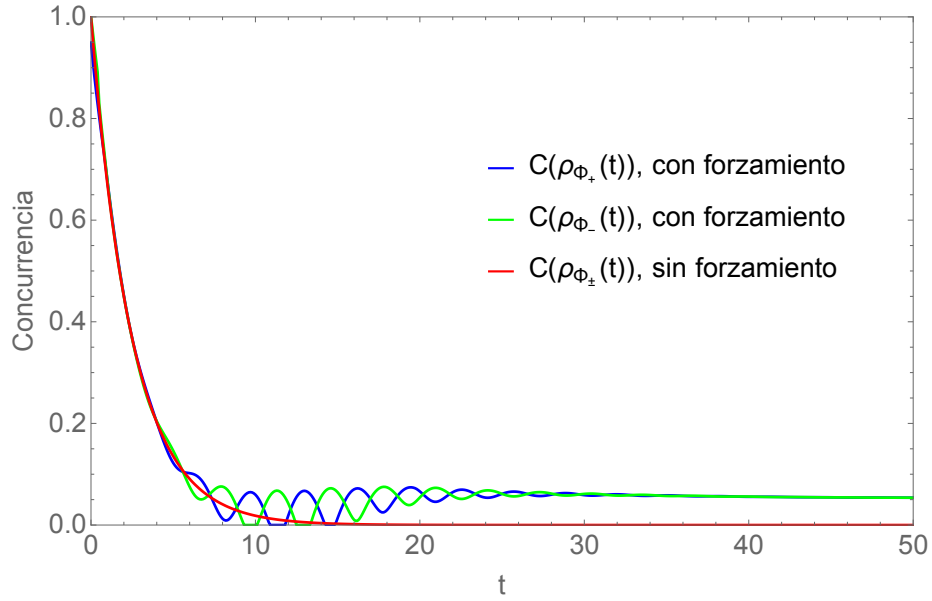


Figura 4.8: Comparación de la evolución temporal de la concurrencia a partir de los estados iniciales $|\Phi_{\pm}\rangle$ con y sin forzamiento coherente. $\Gamma = 2\gamma = 0.2$, $\omega = 1$, $\Omega = -0.9$, $\epsilon = 0.025$.

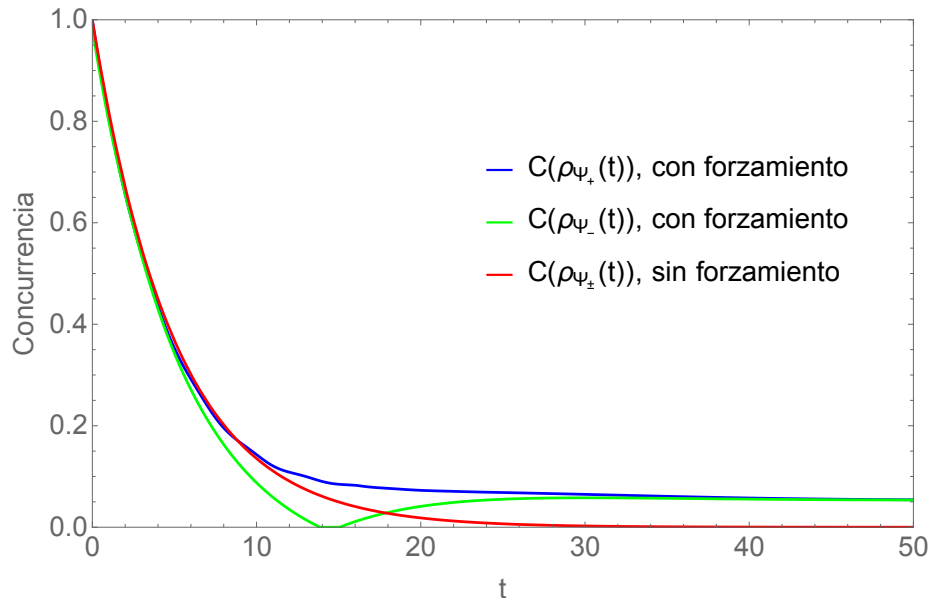
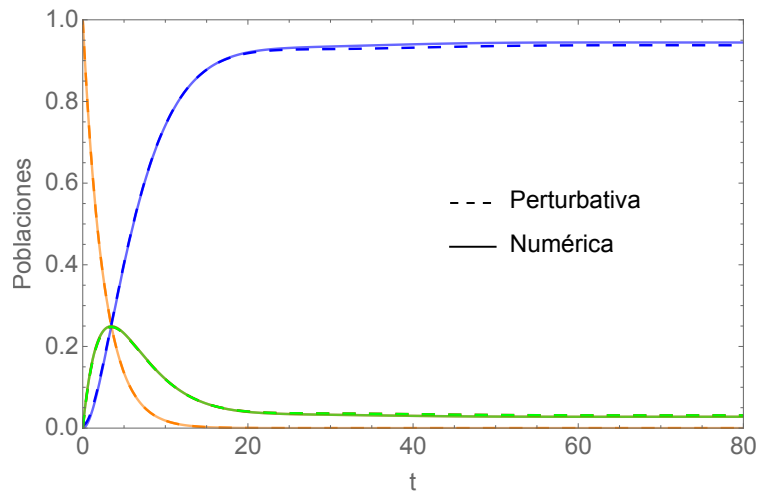


Figura 4.9: Comparación de la evolución temporal de la concurrencia a partir de los estados iniciales $|\Psi_{\pm}\rangle$ con y sin forzamiento coherente. $\Gamma = 2\gamma = 0.2$, $\omega = 1$, $\Omega = -0.9$, $\epsilon = 0.025$.

En ambas figuras se observa que, tras un tiempo suficientemente largo, la concurrence tiende al mismo valor, independientemente de si el sistema comenzó en los estados $|\Phi^\pm\rangle$ o en $|\Psi^\pm\rangle$. Esta coincidencia se debe a que, en un sistema cuántico abierto descrito por la ecuación maestra de Lindblad, el estado estacionario es único. Por consiguiente, sin importar el estado inicial, la dinámica lleva al sistema hacia un mismo estado estacionario. Como la concurrence depende únicamente del estado actual, el valor alcanzado en el régimen estacionario resulta idéntico para ambos casos iniciales, reflejando un entrelazamiento relativamente bajo de $C(\hat{\rho}_1) \approx 0.054$.

4.2.4 Comparación con solución numérica

En la [Figura 4.12](#) se presentan las comparaciones entre las soluciones numéricas y las obtenidas mediante teoría de perturbaciones para las distintas magnitudes estudiadas: poblaciones, coherencias y concurrence. En todos los casos se observa una excelente concordancia, lo que valida la aplicabilidad del método perturbativo en el régimen de forzamiento débil. Las discrepancias más notorias aparecen en la concurrence. Esto se debe a que esta no depende linealmente de la matriz densidad, sino que involucra operaciones no lineales como raíces cuadradas, lo que amplifica incluso variaciones pequeñas en la aproximación perturbativa. Aun así, el acuerdo entre ambas soluciones es notable y suficiente para capturar de manera precisa la dinámica esencial del entrelazamiento en este régimen.



(a)

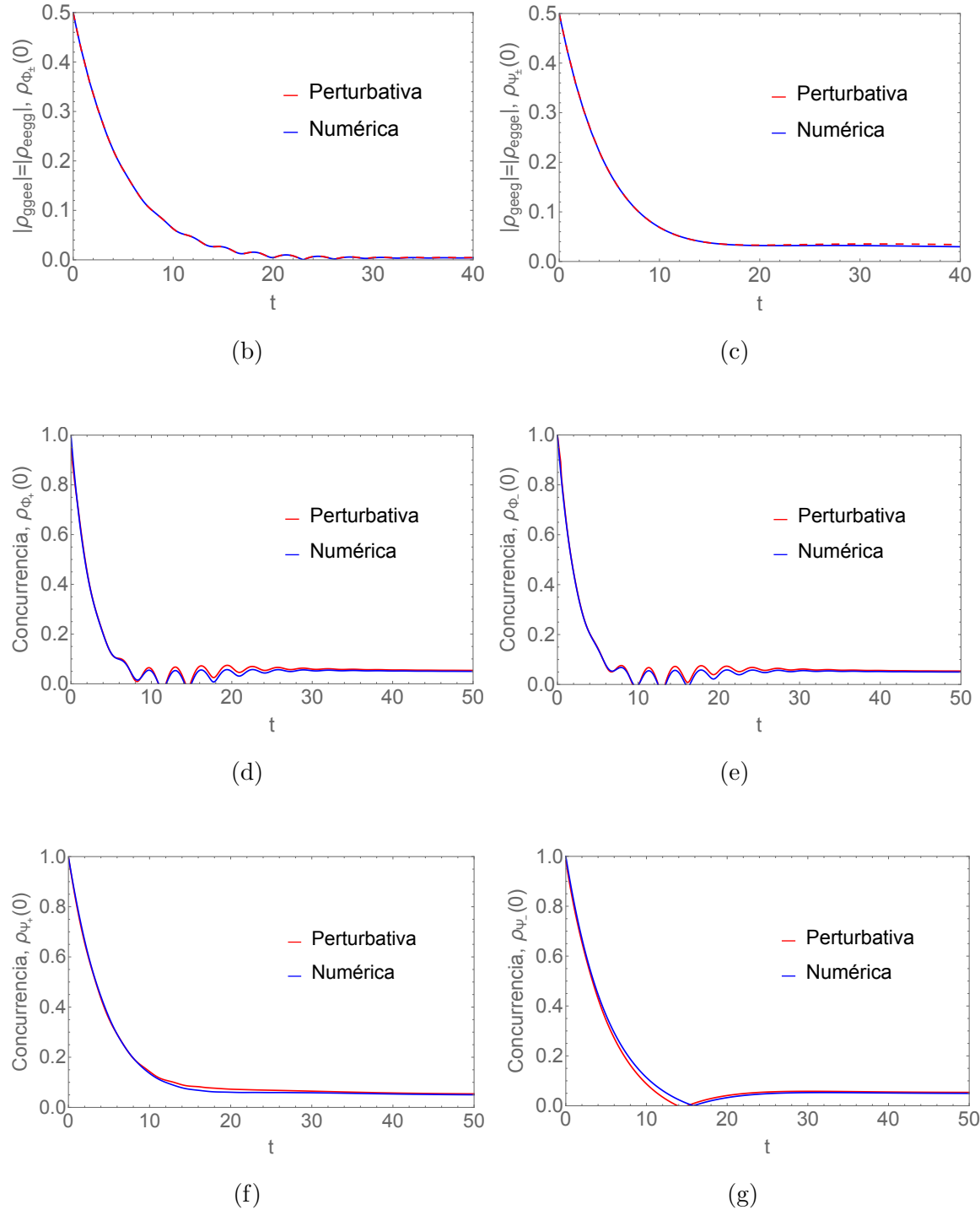


Figura 4.12: Comparación entre la solución numérica y perturbativa para (a) poblaciones, (b) y (c) coherencias, (d) y (e) concurrencia a partir de los estados iniciales $|\Phi_{\pm}\rangle$, (f) y (g) concurrencia a partir de los estados iniciales $|\Psi_{\pm}\rangle$.

Un caso ilustrativo de las limitaciones del método se muestra en la [Figura 4.13](#), donde se considera la cota para forzamiento anteriormente calculada, $\epsilon = 0.035$. En este escenario, aunque las poblaciones todavía muestran un comportamiento similar entre la solución numérica y la perturbativa, la concurrencia diverge rápidamente, reflejando que el sistema ha salido del dominio de validez de la teoría de perturbaciones.

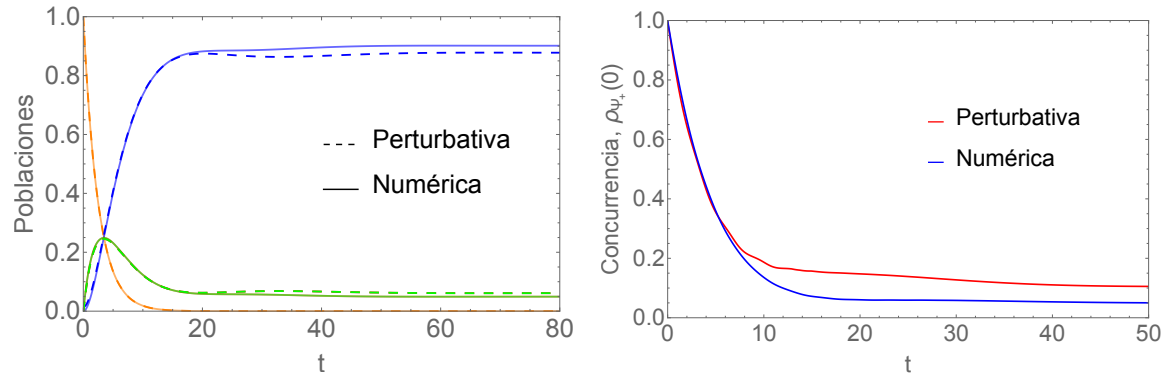


Figura 4.13: El error en la solución perturbativa aumenta cuando $\epsilon = 0.035$.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se estudió la dinámica de un sistema conformado por dos átomos de dos niveles acoplados, sujetos a decaimiento espontáneo y a la acción de un forzamiento coherente. Para su descripción se empleó la ecuación maestra de Lindblad en el régimen markoviano. Para obtener dicha solución, se desarrolló una teoría de perturbaciones para superoperadores, abarcando tanto los casos no degenerado como degenerado, que permite calcular correcciones de segundo orden en los eigenvalores y eigenvectores de un liouvilliano independiente del tiempo, proporcionando un esquema sistemático para describir el sistema perturbado. Con este enfoque fue posible analizar tanto la evolución temporal de las poblaciones y coherencias como el comportamiento del entrelazamiento a través de la concurrencia.

Cabe mencionar que la teoría de perturbaciones, en general, no es sencilla de aplicar, ya que su implementación depende fuertemente de las características particulares de cada sistema físico. Sin embargo, se ha demostrado que, para ciertas magnitudes físicas, como algunas poblaciones, coherencias y la concurrencia del estado estacionario, la teoría de perturbaciones proporciona una descripción adecuada y consistente, permitiendo analizar el efecto del forzamiento coherente sin recurrir a una resolución exacta del problema. Por ejemplo, el eigenvector correspondiente al estado estacionario presenta una forma compacta y clara, lo que permitió aplicar de manera analítica la fórmula de la concurrencia y determinar el valor del entrelazamiento en tiempos largos. A partir de este análisis se obtuvo una condición interesante para maximizar el entrelazamiento estacionario en el régimen de forzamiento débil, a saber, que $\Omega = -\omega$. Dicha condición puede cumplirse mediante un ajuste adecuado de la orientación relativa de los dipolos atómicos, lo que abre la posibilidad

de control experimental del entrelazamiento en estos sistemas.

Finalmente, la comparación entre las soluciones numéricas y perturbativas mostró una concordancia satisfactoria en el régimen de forzamiento débil. Esto confirma que la aproximación perturbativa es válida en este dominio y que las soluciones analíticas obtenidas proporcionan un marco coherente para entender ciertas dinámicas del sistema. Cabe destacar que, en este régimen, la concurrencia alcanza valores pequeños (del orden de 0.05), lo cual es consistente con la naturaleza débil del forzamiento. No obstante, este resultado sigue siendo relevante, pues permite identificar de manera clara las condiciones físicas que maximizan el entrelazamiento en el estado estacionario. En este trabajo se sientan las bases para la aplicación de la teoría de perturbaciones en sistemas de este tipo abriendo la posibilidad de emplearla en estudios futuros para explorar otros fenómenos de interés, como la resonancia de fluorescencia, entre otros procesos dinámicos en sistemas abiertos de dos niveles.

Apéndice A

Solución de 2 TLS

A.1 Forma matricial de los eigenvectores de \mathcal{K}

Los eigenvectores de \mathcal{K} tienen la forma $|\phi_i\rangle\langle\phi_j|$, donde $|\phi_i\rangle$ y $\langle\phi_j|$ son eigenvectores de K y K^\dagger , respectivamente. Las formas matriciales de los 16 eigenvectores de \mathcal{K} son:

$$\begin{aligned} |gg\rangle\langle gg| &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & |gg\rangle\langle +| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ |gg\rangle\langle -| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & |gg\rangle\langle ee| &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ |+\rangle\langle gg| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & |+\rangle\langle +| &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ |+\rangle\langle -| &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & |+\rangle\langle ee| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|-\rangle \langle gg| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & |-\rangle \langle +| &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
|-\rangle \langle -| &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & |-\rangle \langle ee| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
|ee\rangle \langle gg| &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & |ee\rangle \langle +| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
|ee\rangle \langle -| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & |ee\rangle \langle ee| &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

A.2 Cálculos de la acción de \mathcal{J}

Utilizando que $\mathcal{J}\hat{\rho} = 2\gamma(\sigma_1\hat{\rho}\sigma_1^\dagger + \sigma_2\hat{\rho}\sigma_2^\dagger)$, se puede calcular la acción de \mathcal{J} sobre los eigenvectores de \mathcal{K} :

$$\mathcal{J}|gg\rangle \langle gg| = 2\gamma(\sigma_1|gg\rangle \langle gg|\sigma_1^\dagger + \sigma_2|gg\rangle \langle gg|\sigma_2^\dagger) = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{J}|gg\rangle \langle +| = 2\gamma(\sigma_1|gg\rangle \langle +|\sigma_1^\dagger + \sigma_2|gg\rangle \langle +|\sigma_2^\dagger) = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{J}|gg\rangle \langle -| = 2\gamma(\sigma_1|gg\rangle \langle -|\sigma_1^\dagger + \sigma_2|gg\rangle \langle -|\sigma_2^\dagger) = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{J}|gg\rangle \langle ee| = 2\gamma(\sigma_1|gg\rangle \langle ee|\sigma_1^\dagger + \sigma_2|gg\rangle \langle ee|\sigma_2^\dagger) = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{J}|+\rangle \langle gg| = 2\gamma(\sigma_1|+\rangle \langle gg|\sigma_1^\dagger + \sigma_2|+\rangle \langle gg|\sigma_2^\dagger) = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{J}|-\rangle \langle gg| = 2\gamma(\sigma_1|-\rangle \langle gg|\sigma_1^\dagger + \sigma_2|-\rangle \langle gg|\sigma_2^\dagger) = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{J} |ee\rangle \langle gg| = 2\gamma(\sigma_1 |ee\rangle \langle gg| \sigma_1^\dagger + \sigma_2 |ee\rangle \langle gg| \sigma_2^\dagger) = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} |+\rangle \langle +| &= 2\gamma(\sigma_1 |+\rangle \langle +| \sigma_1^\dagger + \sigma_2 |+\rangle \langle +| \sigma_2^\dagger) \\ &= 2\gamma \left[\sigma_1 \left(\frac{|eg\rangle + |ge\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle eg| + \langle ge|}{\sqrt{2}} \right) \sigma_1^\dagger + \sigma_2 \left(\frac{|eg\rangle + |ge\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle eg| + \langle ge|}{\sqrt{2}} \right) \sigma_2^\dagger \right] \\ &= \gamma(|gg\rangle \langle gg| + |gg\rangle \langle gg|) \\ &= 2\gamma |gg\rangle \langle gg|, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} |+\rangle \langle -| &= 2\gamma(\sigma_1 |+\rangle \langle -| \sigma_1^\dagger + \sigma_2 |+\rangle \langle -| \sigma_2^\dagger) \\ &= 2\gamma \left[\sigma_1 \left(\frac{|eg\rangle + |ge\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle eg| - \langle ge|}{\sqrt{2}} \right) \sigma_1^\dagger + \sigma_2 \left(\frac{|eg\rangle + |ge\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle eg| - \langle ge|}{\sqrt{2}} \right) \sigma_2^\dagger \right] \\ &= \gamma(|gg\rangle \langle gg| - |gg\rangle \langle gg|) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} |-\rangle \langle +| &= 2\gamma(\sigma_1 |-\rangle \langle +| \sigma_1^\dagger + \sigma_2 |-\rangle \langle +| \sigma_2^\dagger) \\ &= 2\gamma \left[\sigma_1 \left(\frac{|eg\rangle - |ge\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle eg| + \langle ge|}{\sqrt{2}} \right) \sigma_1^\dagger + \sigma_2 \left(\frac{|eg\rangle - |ge\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle eg| + \langle ge|}{\sqrt{2}} \right) \sigma_2^\dagger \right] \\ &= \gamma(|gg\rangle \langle gg| - |gg\rangle \langle gg|) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} |-\rangle \langle -| &= 2\gamma(\sigma_1 |-\rangle \langle -| \sigma_1^\dagger + \sigma_2 |-\rangle \langle -| \sigma_2^\dagger) \\ &= 2\gamma \left[\sigma_1 \left(\frac{|eg\rangle - |ge\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle eg| - \langle ge|}{\sqrt{2}} \right) \sigma_1^\dagger + \sigma_2 \left(\frac{|eg\rangle - |ge\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle eg| - \langle ge|}{\sqrt{2}} \right) \sigma_2^\dagger \right] \\ &= \gamma(|gg\rangle \langle gg| + |gg\rangle \langle gg|) \\ &= 2\gamma |gg\rangle \langle gg|, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} |+\rangle \langle ee| &= 2\gamma(\sigma_1 |+\rangle \langle ee| \sigma_1^\dagger + \sigma_2 |+\rangle \langle ee| \sigma_2^\dagger) \\ &= 2\gamma \left[\sigma_1 \left(\frac{|eg\rangle + |ge\rangle}{\sqrt{2}} \right) \langle ee| \sigma_1^\dagger + \sigma_2 \left(\frac{|eg\rangle + |ge\rangle}{\sqrt{2}} \right) \langle ee| \sigma_2^\dagger \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \gamma(|gg\rangle \langle ge| + |gg\rangle \langle eg|) \\ &= 2\gamma |gg\rangle \left(\frac{\langle ge| + \langle eg|}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

$$= 2\gamma |gg\rangle \langle +|, \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}|- \rangle \langle ee| &= 2\gamma(\sigma_1|- \rangle \langle ee| \sigma_1^\dagger + \sigma_2|- \rangle \langle ee| \sigma_2^\dagger) \\ &= 2\gamma \left[\sigma_1 \left(\frac{|eg\rangle - |ge\rangle}{\sqrt{2}} \right) \langle ee| \sigma_1^\dagger + \sigma_2 \left(\frac{|eg\rangle - |ge\rangle}{\sqrt{2}} \right) \langle ee| \sigma_2^\dagger \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \gamma (|gg\rangle \langle ge| - |gg\rangle \langle eg|) \\ &= 2\gamma |gg\rangle \left(\frac{\langle ge| - \langle eg|}{\sqrt{2}} \right) \\ &= -2\gamma |gg\rangle \langle -|, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}|ee \rangle \langle +| &= 2\gamma(\sigma_1|ee \rangle \langle +| \sigma_1^\dagger + \sigma_2|ee \rangle \langle +| \sigma_2^\dagger) \\ &= 2\gamma \left[\sigma_1 |ee\rangle \left(\frac{\langle eg| + \langle ge|}{\sqrt{2}} \right) \sigma_1^\dagger + \sigma_2 |ee\rangle \left(\frac{\langle eg| + \langle ge|}{\sqrt{2}} \right) \sigma_2^\dagger \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \gamma (|ge\rangle \langle gg| + |eg\rangle \langle gg|) \\ &= 2\gamma \left(\frac{|ge\rangle + |eg\rangle}{\sqrt{2}} \right) \langle gg| \\ &= 2\gamma |+\rangle \langle gg|, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}|ee \rangle \langle -| &= 2\gamma(\sigma_1|ee \rangle \langle -| \sigma_1^\dagger + \sigma_2|ee \rangle \langle -| \sigma_2^\dagger) \\ &= 2\gamma \left[\sigma_1 |ee\rangle \left(\frac{\langle eg| - \langle ge|}{\sqrt{2}} \right) \sigma_1^\dagger + \sigma_2 |ee\rangle \left(\frac{\langle eg| - \langle ge|}{\sqrt{2}} \right) \sigma_2^\dagger \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \gamma (|ge\rangle \langle gg| - |eg\rangle \langle gg|) \\ &= 2\gamma \left(\frac{|ge\rangle - |eg\rangle}{\sqrt{2}} \right) \langle gg| \\ &= -2\gamma |- \rangle \langle gg|, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}|ee \rangle \langle ee| &= 2\gamma(\sigma_1|ee \rangle \langle ee| \sigma_1^\dagger + \sigma_2|ee \rangle \langle ee| \sigma_2^\dagger) \\ &= 2\gamma(|ge\rangle \langle ge| + |eg\rangle \langle eg|) \\ &= \gamma[(|eg\rangle + |ge\rangle)(\langle eg| + \langle ge|) + (|eg\rangle - |ge\rangle)(\langle eg| - \langle ge|)] \\ &= 2\gamma(|+\rangle \langle +| + |- \rangle \langle -|). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A.3 Cálculos del eigensistema derecho de \mathcal{L}

Para calcular los eigenvalores y eigenvectores de \mathcal{L} , se utiliza la relación $\mathcal{L}\hat{\rho} = \mathcal{K}\hat{\rho} + \mathcal{J}\hat{\rho}$ junto con las ecuaciones (2.36)-(2.41) y (2.45)-(2.60). Cuando el operador de brinco no aniquila al eigenvector de \mathcal{K} se propone un ansatz para el eigenvector de \mathcal{L} conformado por el eigenvector de \mathcal{K} y el vector al que \mathcal{J} lo envía multiplicado por un término a determinar. A continuación se muestran los cálculos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|gg\rangle\langle gg| &= \mathcal{K}|gg\rangle\langle gg| + \mathcal{J}|gg\rangle\langle gg| \\ &= -\frac{i}{\hbar}(K|gg\rangle\langle gg| - |gg\rangle\langle gg|K^\dagger) + 0 \\ &= 0, \end{aligned} \tag{A.17}$$

$\therefore \hat{\rho}_1 = |gg\rangle\langle gg|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|gg\rangle\langle +| &= \mathcal{K}|gg\rangle\langle +| + \mathcal{J}|gg\rangle\langle +| \\ &= -\frac{i}{\hbar}(K|gg\rangle\langle +| - |gg\rangle\langle +|K^\dagger) + 0 \\ &= i(z^* + \Omega)|gg\rangle\langle +|, \end{aligned} \tag{A.18}$$

$\therefore \hat{\rho}_2 = |gg\rangle\langle +|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_2 = i(z^* + \Omega) = -\gamma + i(\omega_a + \Omega)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|gg\rangle\langle -| &= \mathcal{K}|gg\rangle\langle -| + \mathcal{J}|gg\rangle\langle -| \\ &= -\frac{i}{\hbar}(K|gg\rangle\langle -| - |gg\rangle\langle -|K^\dagger) + 0 \\ &= i(z^* - \Omega)|gg\rangle\langle -|, \end{aligned} \tag{A.19}$$

$\therefore \hat{\rho}_3 = |gg\rangle\langle -|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_3 = i(z^* - \Omega) = -\gamma + i(\omega_a - \Omega)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|gg\rangle\langle ee| &= \mathcal{K}|gg\rangle\langle ee| + \mathcal{J}|gg\rangle\langle ee| \\ &= -\frac{i}{\hbar}(K|gg\rangle\langle ee| - |gg\rangle\langle ee|K^\dagger) + 0 \\ &= 2iz^*|gg\rangle\langle ee|, \end{aligned} \tag{A.20}$$

$\therefore \hat{\rho}_4 = |gg\rangle\langle ee|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_4 = 2iz^* = -2(\gamma - i\omega_a)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}|+\rangle\langle gg| &= \mathcal{K}|+\rangle\langle gg| + \mathcal{J}|+\rangle\langle gg| \\
&= -\frac{i}{\hbar}(K|+\rangle\langle gg| - |+\rangle\langle gg|K^\dagger) + 0 \\
&= -i(z + \Omega)|+\rangle\langle gg|,
\end{aligned} \tag{A.21}$$

$\therefore \hat{\rho}_5 = |+\rangle\langle gg|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_5 = -i(z + \Omega) = -\gamma - i(\omega_a + \Omega)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}|-\rangle\langle gg| &= \mathcal{K}|-\rangle\langle gg| + \mathcal{J}|-\rangle\langle gg| \\
&= -\frac{i}{\hbar}(K|-\rangle\langle gg| - |-\rangle\langle gg|K^\dagger) + 0 \\
&= -i(z - \Omega)|-\rangle\langle gg|,
\end{aligned} \tag{A.22}$$

$\therefore \hat{\rho}_6 = |-\rangle\langle gg|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_6 = -i(z - \Omega) = -\gamma - i(\omega_a - \Omega)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}|ee\rangle\langle gg| &= \mathcal{K}|ee\rangle\langle gg| + \mathcal{J}|ee\rangle\langle gg| \\
&= -\frac{i}{\hbar}(K|ee\rangle\langle gg| - |ee\rangle\langle gg|K^\dagger) + 0 \\
&= -2iz|ee\rangle\langle gg|,
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$\therefore \hat{\rho}_7 = |ee\rangle\langle gg|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_7 = -2iz = -2(\gamma + i\omega_a)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(|+\rangle\langle +| + \alpha_{++}|gg\rangle\langle gg|) &= \mathcal{K}(|+\rangle\langle +| + \alpha_{++}|gg\rangle\langle gg|) + \mathcal{J}(|+\rangle\langle +| + \alpha_{++}|gg\rangle\langle gg|) \\
&= -\frac{i}{\hbar}(K|+\rangle\langle +| - |+\rangle\langle +|K^\dagger) + \mathcal{J}|+\rangle\langle +| \\
&= -i[(z + \Omega)|+\rangle\langle +| - (z^* + \Omega)|+\rangle\langle +|] + 2\gamma|gg\rangle\langle gg| \\
&= -i(z - z^*)|+\rangle\langle +| + 2\gamma|gg\rangle\langle gg| \\
&= -i(z - z^*)\left(|+\rangle\langle +| + \frac{2\gamma}{-i(z - z^*)}|gg\rangle\langle gg|\right) \\
&\implies \alpha_{++} = \frac{2\gamma}{-i(z - z^*)} = -1,
\end{aligned} \tag{A.24}$$

$\therefore \hat{\rho}_8 = |+\rangle\langle +| - |gg\rangle\langle gg|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_8 = -i(z - z^*) = -2\gamma$.

$$\mathcal{L}|+\rangle\langle -| = \mathcal{K}|+\rangle\langle -| + \mathcal{J}|+\rangle\langle -|$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{\hbar}(K|+\rangle\langle-|-|+\rangle\langle-|K^\dagger) + 0 \\
&= -i[(z + \Omega)|+\rangle\langle-|-|(z^* - \Omega)|+\rangle\langle-|] \\
&= -i(z - z^* + 2\Omega)|+\rangle\langle-|, \tag{A.25}
\end{aligned}$$

$\therefore \hat{\rho}_9 = |+\rangle\langle-|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_9 = -i(z - z^* + 2\Omega) = -2(\gamma + i\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}|-\rangle\langle+| &= \mathcal{K}|-\rangle\langle+| + \mathcal{J}|-\rangle\langle+| \\
&= -\frac{i}{\hbar}(K|-\rangle\langle+|-|-\rangle\langle+|K^\dagger) + 0 \\
&= -i[(z - \Omega)|-\rangle\langle+|-|(z^* + \Omega)|-\rangle\langle+|] \\
&= -i(z - z^* - 2\Omega)|-\rangle\langle+|, \tag{A.26}
\end{aligned}$$

$\therefore \hat{\rho}_{10} = |-\rangle\langle+|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_{10} = -i(z - z^* - 2\Omega) = -2(\gamma - i\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(|-\rangle\langle-| + \alpha_{--}|gg\rangle\langle gg|) &= \mathcal{K}(|-\rangle\langle-| + \alpha_{--}|gg\rangle\langle gg|) + \mathcal{J}(|-\rangle\langle-| + \alpha_{--}|gg\rangle\langle gg|) \\
&= -\frac{i}{\hbar}(K|-\rangle\langle-|-|-\rangle\langle-|K^\dagger) + \mathcal{J}|-\rangle\langle-| \\
&= -i[(z - \Omega)|-\rangle\langle-|-|(z^* - \Omega)|-\rangle\langle-|] + 2\gamma|gg\rangle\langle gg| \\
&= -i(z - z^*)|-\rangle\langle-| + 2\gamma|gg\rangle\langle gg| \\
&= -i(z - z^*) \left(|-\rangle\langle-| + \frac{2\gamma}{-i(z - z^*)}|gg\rangle\langle gg| \right) \tag{A.27} \\
&\implies \alpha_{--} = \frac{2\gamma}{-i(z - z^*)} = -1,
\end{aligned}$$

$\therefore \hat{\rho}_{11} = |-\rangle\langle-| - |gg\rangle\langle gg|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_{11} = -i(z - z^*) = -2\gamma$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(|+\rangle\langle ee| + \alpha_{+ee}|gg\rangle\langle+| + \alpha'_{+ee}|gg\rangle\langle-|) \\
&= \mathcal{K}(|+\rangle\langle ee| + \alpha_{+ee}|gg\rangle\langle+| + \alpha'_{+ee}|gg\rangle\langle-|) + \mathcal{J}(|+\rangle\langle ee| + \alpha_{+ee}|gg\rangle\langle+| + \alpha'_{+ee}|gg\rangle\langle-|) \\
&= -i[(z + \Omega)|+\rangle\langle ee| - 2z^*|+\rangle\langle ee| - \alpha_{+ee}(z^* + \Omega)|gg\rangle\langle+| - \alpha'_{+ee}(z^* - \Omega)|gg\rangle\langle-|] \\
&\quad + 2\gamma|gg\rangle\langle+| \\
&= -i(z - 2z^* + \Omega)|+\rangle\langle ee| + [i\alpha_{+ee}(z^* + \Omega) + 2\gamma]|gg\rangle\langle+| + i\alpha'_{+ee}(z^* - \Omega)|gg\rangle\langle-| \\
&= -i(z - 2z^* + \Omega) \left[|+\rangle\langle ee| + \frac{i\alpha_{+ee}(z^* + \Omega) + 2\gamma}{-i(z - 2z^* + \Omega)}|gg\rangle\langle+| + \frac{i\alpha'_{+ee}(z^* - \Omega)}{-i(z - 2z^* + \Omega)}|gg\rangle\langle-| \right] \tag{A.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \alpha_{+ee} &= \frac{i\alpha_{+ee}(z^* + \Omega) + 2\gamma}{-i(z - 2z^* + \Omega)} \implies \alpha_{+ee} = \frac{2i\gamma}{z - z^* + 2\Omega} = -\frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} \\ \implies \alpha'_{+ee} &= -\frac{\alpha'_{+ee}(z^* - \Omega)}{z - 2z^* + \Omega} \implies \alpha'_{+ee} = 0, \end{aligned}$$

$\therefore \hat{\rho}_{12} = |+\rangle \langle ee| - \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} |gg\rangle \langle +|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_{12} = -i(z - 2z^* + \Omega) = -3\gamma + i(\omega_a - \Omega)$.

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(|-\rangle \langle ee| + \alpha_{-ee} |gg\rangle \langle +| + \alpha'_{-ee} |gg\rangle \langle -|) \\ &= \mathcal{K}(|-\rangle \langle ee| + \alpha_{-ee} |gg\rangle \langle +| + \alpha'_{-ee} |gg\rangle \langle -|) + \mathcal{J}(|-\rangle \langle ee| + \alpha_{-ee} |gg\rangle \langle +| + \alpha'_{-ee} |gg\rangle \langle -|) \\ &= -i[(z - \Omega) |-\rangle \langle ee| - 2z^* |-\rangle \langle ee| - \alpha_{-ee}(z^* + \Omega) |gg\rangle \langle +| - \alpha'_{-ee}(z^* - \Omega) |gg\rangle \langle -|] \\ &\quad - 2\gamma |gg\rangle \langle +| \\ &= -i(z - 2z^* - \Omega) |-\rangle \langle ee| + i\alpha_{-ee}(z^* + \Omega) |gg\rangle \langle +| + [i\alpha'_{-ee}(z^* - \Omega) - 2\gamma] |gg\rangle \langle -| \\ &= -i(z - 2z^* - \Omega) \left[|-\rangle \langle ee| + \frac{i\alpha_{-ee}(z^* + \Omega)}{-i(z - 2z^* - \Omega)} |gg\rangle \langle +| + \frac{i\alpha'_{-ee}(z^* - \Omega) - 2\gamma}{-i(z - 2z^* - \Omega)} |gg\rangle \langle -| \right] \end{aligned} \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned} \implies \alpha_{-ee} &= -\frac{\alpha_{-ee}(z^* + \Omega)}{z - 2z^* - \Omega} \implies \alpha_{-ee} = 0 \\ \implies \alpha'_{+ee} &= \frac{i\alpha'_{-ee}(z^* - \Omega) - 2\gamma}{-i(z - 2z^* - \Omega)} \implies \alpha'_{+ee} = -\frac{2i\gamma}{z - z^* - 2\Omega} = \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega}, \end{aligned}$$

$\therefore \hat{\rho}_{13} = |-\rangle \langle ee| + \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} |gg\rangle \langle -|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_{13} = -i(z - 2z^* - \Omega) = -3\gamma + i(\omega_a + \Omega)$.

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(|ee\rangle \langle +| + \alpha_{ee+} |+\rangle \langle gg| + \alpha'_{ee+} |-\rangle \langle gg|) \\ &= \mathcal{K}(|ee\rangle \langle +| + \alpha_{ee+} |+\rangle \langle gg| + \alpha'_{ee+} |-\rangle \langle gg|) + \mathcal{J}(|ee\rangle \langle +| + \alpha_{ee+} |+\rangle \langle gg| + \alpha'_{ee+} |-\rangle \langle gg|) \\ &= -i[2z |ee\rangle \langle +| - (z^* + \Omega) |ee\rangle \langle +| + \alpha_{ee+}(z + \Omega) |+\rangle \langle gg| + \alpha'_{ee+}(z - \Omega) |-\rangle \langle gg|] \\ &\quad + 2\gamma |+\rangle \langle gg| \\ &= -i(2z - z^* - \Omega) |ee\rangle \langle +| + [-i\alpha_{ee+}(z + \Omega) + 2\gamma] |+\rangle \langle gg| - i\alpha'_{ee+}(z - \Omega) |-\rangle \langle gg| \\ &= -i(2z - z^* - \Omega) \left[|ee\rangle \langle +| + \frac{-i\alpha_{ee+}(z + \Omega) + 2\gamma}{-i(2z - z^* - \Omega)} |+\rangle \langle gg| + \frac{-i\alpha'_{ee+}(z - \Omega)}{-i(2z - z^* - \Omega)} |-\rangle \langle gg| \right] \end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\implies \alpha_{ee+} = \frac{-i\alpha_{ee+}(z + \Omega) + 2\gamma}{-i(2z - z^* - \Omega)} \implies \alpha_{ee+} = \frac{2i\gamma}{z - z^* - 2\Omega} = -\frac{\gamma}{\gamma - i\Omega}$$

$$\implies \alpha'_{ee+} = \frac{\alpha'_{ee+}(z - \Omega)}{2z - z^* - \Omega} \implies \alpha'_{ee+} = 0,$$

$\therefore \hat{\rho}_{14} = |ee\rangle \langle + | - \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} | + \rangle \langle gg |$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_{14} = -i(2z - z^* - \Omega) = -3\gamma - i(\omega_a - \Omega)$.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(|ee\rangle \langle - | + \alpha_{ee-} | + \rangle \langle gg | + \alpha'_{ee-} | - \rangle \langle gg |) \\ &= \mathcal{K}(|ee\rangle \langle - | + \alpha_{ee-} | + \rangle \langle gg | + \alpha'_{ee-} | - \rangle \langle gg |) + \mathcal{J}(|ee\rangle \langle - | + \alpha_{ee-} | + \rangle \langle gg | + \alpha'_{ee-} | - \rangle \langle gg |) \\ &= -i[2z |ee\rangle \langle - | - (z^* - \Omega) |ee\rangle \langle - | + \alpha_{ee-}(z + \Omega) | + \rangle \langle gg | + \alpha'_{ee-}(z - \Omega) | - \rangle \langle gg |] \\ &\quad - 2\gamma | - \rangle \langle gg | \\ &= -i(2z - z^* + \Omega) |ee\rangle \langle - | - i\alpha_{ee-}(z + \Omega) | + \rangle \langle gg | + [-i\alpha'_{ee-}(z - \Omega) - 2\gamma] | - \rangle \langle gg | \\ &= -i(2z - z^* + \Omega) \left[|ee\rangle \langle - | + \frac{-i\alpha_{ee-}(z + \Omega)}{-i(2z - z^* + \Omega)} | + \rangle \langle gg | + \frac{-i\alpha'_{ee-}(z - \Omega) - 2\gamma}{-i(2z - z^* + \Omega)} | - \rangle \langle gg | \right] \end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned} \implies \alpha_{ee-} &= \frac{\alpha_{ee-}(z + \Omega)}{2z - z^* + \Omega} \implies \alpha_{ee-} = 0 \\ \implies \alpha'_{ee-} &= \frac{-i\alpha'_{ee-}(z - \Omega) - 2\gamma}{-i(2z - z^* + \Omega)} \implies \alpha'_{ee-} = -\frac{2i\gamma}{z - z^* + 2\Omega} = \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega}, \end{aligned}$$

$\therefore \hat{\rho}_{15} = |ee\rangle \langle - | + \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} | - \rangle \langle gg |$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_{15} = -i(2z - z^* + \Omega) = -3\gamma - i(\omega_a + \Omega)$.

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(|ee\rangle \langle ee | + \alpha_e | + \rangle \langle + | + \alpha'_e | + \rangle \langle - | + \alpha''_e | - \rangle \langle + | + \alpha'''_e | - \rangle \langle - | + \alpha_e^{iv} | gg \rangle \langle gg |) \\ &= \mathcal{K}(|ee\rangle \langle ee | + \alpha_e | + \rangle \langle + | + \alpha'_e | + \rangle \langle - | + \alpha''_e | - \rangle \langle + | + \alpha'''_e | - \rangle \langle - | + \alpha_e^{iv} | gg \rangle \langle gg |) \\ &\quad + \mathcal{J}(|ee\rangle \langle ee | + \alpha_e | + \rangle \langle + | + \alpha'_e | + \rangle \langle - | + \alpha''_e | - \rangle \langle + | + \alpha'''_e | - \rangle \langle - | + \alpha_e^{iv} | gg \rangle \langle gg |) \\ &= -i[2z |ee\rangle \langle ee | + \alpha_e(z + \Omega) | + \rangle \langle + | + \alpha'_e(z + \Omega) | + \rangle \langle - | + \alpha''_e(z - \Omega) | - \rangle \langle + | \\ &\quad + \alpha'''_e(z - \Omega) | - \rangle \langle - | - 2z^* |ee\rangle \langle ee | - \alpha_e(z^* + \Omega) | + \rangle \langle + | - \alpha'_e(z^* - \Omega) | + \rangle \langle - | \\ &\quad - \alpha''_e(z^* + \Omega) | - \rangle \langle + | - \alpha'''_e(z^* - \Omega) | - \rangle \langle - |] + 2\gamma | + \rangle \langle + | + 2\gamma | - \rangle \langle - | \\ &\quad + 2\gamma\alpha_e | gg \rangle \langle gg | + 2\gamma\alpha_e''' | gg \rangle \langle gg | \\ &= -2i(z - z^*) |ee\rangle \langle ee | + [-i\alpha_e(z + \Omega) + i\alpha_e(z^* + \Omega) + 2\gamma] | + \rangle \langle + | \\ &\quad + [-i\alpha'_e(z + \Omega) + i\alpha'_e(z^* - \Omega)] | + \rangle \langle - | + [-i\alpha''_e(z - \Omega) + i\alpha''_e(z^* + \Omega)] | - \rangle \langle + | \\ &\quad + [-i\alpha'''_e(z - \Omega) + i\alpha'''_e(z^* - \Omega) + 2\gamma] | - \rangle \langle - | + 2\gamma(\alpha_e + \alpha_e''') | gg \rangle \langle gg | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2i(z - z^*) \left[|ee\rangle \langle ee| + \frac{-i\alpha_e(z + \Omega) + i\alpha_e(z^* + \Omega) + 2\gamma}{-2i(z - z^*)} |+\rangle \langle +| \right. \\
&\quad + \frac{-i\alpha'_e(z + \Omega) + i\alpha'_e(z^* - \Omega)}{-2i(z - z^*)} |+\rangle \langle -| + \frac{-i\alpha''_e(z - \Omega) + i\alpha''_e(z^* + \Omega)}{-2i(z - z^*)} |-\rangle \langle +| \\
&\quad \left. + \frac{-i\alpha'''_e(z - \Omega) + i\alpha'''_e(z^* - \Omega) + 2\gamma}{-2i(z - z^*)} |-\rangle \langle -| + \frac{2\gamma(\alpha_e + \alpha'''_e)}{-2i(z - z^*)} |gg\rangle \langle gg| \right] \quad (\text{A.32})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies \alpha_e &= \frac{-i\alpha_e(z + \Omega) + i\alpha_e(z^* + \Omega) + 2\gamma}{-2i(z - z^*)} \implies \alpha_e = \frac{2i\gamma}{z - z^*} = \frac{2i\gamma}{-2i\gamma} = -1 \\
\implies \alpha'_e &= \frac{-i\alpha'_e(z + \Omega) + i\alpha'_e(z^* - \Omega)}{-2i(z - z^*)} \implies \alpha'_e = 0 \\
\implies \alpha''_e &= \frac{-i\alpha''_e(z - \Omega) + i\alpha''_e(z^* + \Omega)}{-2i(z - z^*)} \implies \alpha''_e = 0 \\
\implies \alpha'''_e &= \frac{-i\alpha'''_e(z - \Omega) + i\alpha'''_e(z^* - \Omega) + 2\gamma}{-2i(z - z^*)} \implies \alpha'''_e = \frac{2i\gamma}{z - z^*} = \frac{2i\gamma}{-2i\gamma} = -1 \\
\implies \alpha_e^{iv} &= \frac{2\gamma(\alpha_e + \alpha'''_e)}{-2i(z - z^*)} \implies \alpha_e^{iv} = \frac{-2i\gamma}{z - z^*} = \frac{2i\gamma}{2i\gamma} = 1,
\end{aligned}$$

$\therefore \hat{\rho}_{16} = |ee\rangle \langle ee| - |+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -| + |gg\rangle \langle gg|$ es un eigenvector de \mathcal{L} con eigenvalor $\lambda_{16} = -2i(z - z^*) = -4\gamma$.

A.4 Cálculos del eigensistema izquierdo de \mathcal{L}

Un resultado general de la ecuación maestra de Lindblad es que el operador identidad (1) es un eigenvector izquierdo del superoperador liouvilliano asociado al eigenvalor nulo.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^\dagger \mathbb{1} &= -\frac{i}{\hbar}(K^\dagger \mathbb{1} - \mathbb{1}K) + 2\gamma(\sigma_1^\dagger \mathbb{1} \sigma_1 + \sigma_2^\dagger \mathbb{1} \sigma_2) \\
&= -\frac{i}{\hbar}[H + i\hbar\gamma(\sigma_1^\dagger \sigma_1 + \sigma_2^\dagger \sigma_2) - H + i\hbar\gamma(\sigma_1^\dagger \sigma_1 + \sigma_2^\dagger \sigma_2)] + 2\gamma(\sigma_1^\dagger \sigma_1 + \sigma_2^\dagger \sigma_2) \\
&= -2\gamma(\sigma_1^\dagger \sigma_1 + \sigma_2^\dagger \sigma_2) + 2\gamma(\sigma_1^\dagger \sigma_1 + \sigma_2^\dagger \sigma_2) \\
&= 0. \quad (\text{A.33})
\end{aligned}$$

$\therefore \check{\rho}_1 = \mathbb{1}$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_1^* = 0$.

Para obtener el resto de los eigenvalores izquierdos se utiliza la técnica propuesta en la [Sección 2.3](#).

Para $\check{\rho}_2$ sabemos que $\text{Tr}(\check{\rho}_2^\dagger \check{\rho}_2) = \text{Tr}(\check{\rho}_2^\dagger |gg\rangle \langle +|) = 1$, por lo que si $\check{\rho}_2^\dagger = |+\rangle \langle gg|$ se cumple la primera condición. Sin embargo, la segunda condición no se cumple, ya que para

$n = 12$ se tiene que:

$$\text{Tr}(\check{\rho}_2^\dagger \hat{\rho}_{12}) = \text{Tr} \left[(|+\rangle \langle gg|) \left(|+\rangle \langle ee| - \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} |gg\rangle \langle +| \right) \right] = -\frac{\gamma}{\gamma + i\Omega}.$$

Para corregir esto, proponemos un ansatz de la forma $\check{\rho}_2^\dagger = |+\rangle \langle gg| + \beta_2 |ee\rangle \langle +|$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\check{\rho}_2^\dagger \hat{\rho}_{12}) &= \text{Tr} \left[(|+\rangle \langle gg| + \beta_2 |ee\rangle \langle +|) \left(|+\rangle \langle ee| - \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} |gg\rangle \langle +| \right) \right] = -\frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} + \beta_2 = 0, \\ \implies \beta_2 &= \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega}, \\ \implies \check{\rho}_2^\dagger &= |+\rangle \langle gg| + \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} |ee\rangle \langle +|. \end{aligned}$$

$\therefore \check{\rho}_2 = |gg\rangle \langle +| + \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} |+\rangle \langle ee|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_2^* = -\gamma - i(\omega_a + \Omega)$.

Para $\check{\rho}_3$ sabemos que $\text{Tr}(\check{\rho}_3^\dagger \hat{\rho}_3) = \text{Tr}(\check{\rho}_3^\dagger |gg\rangle \langle -|) = 1$, por lo que si $\check{\rho}_3^\dagger = |-\rangle \langle gg|$ se cumple la primera condición. Sin embargo, la segunda condición no se cumple, ya que para $n = 13$ se tiene que:

$$\text{Tr}(\check{\rho}_3^\dagger \hat{\rho}_{13}) = \text{Tr} \left[(|-\rangle \langle gg|) \left(|-\rangle \langle ee| + \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} |gg\rangle \langle -| \right) \right] = \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega}.$$

Para corregir esto, proponemos un ansatz de la forma $\check{\rho}_3^\dagger = |-\rangle \langle gg| + \beta_3 |ee\rangle \langle -|$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\check{\rho}_3^\dagger \hat{\rho}_{13}) &= \text{Tr} \left[(|-\rangle \langle gg| + \beta_3 |ee\rangle \langle -|) \left(|-\rangle \langle ee| + \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} |gg\rangle \langle -| \right) \right] = \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} + \beta_3 = 0, \\ \implies \beta_3 &= -\frac{\gamma}{\gamma - i\Omega}, \\ \implies \check{\rho}_3^\dagger &= |-\rangle \langle gg| - \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} |ee\rangle \langle -|. \end{aligned}$$

$\therefore \check{\rho}_3 = |gg\rangle \langle -| - \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} |-\rangle \langle ee|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_3^* = -\gamma - i(\omega_a - \Omega)$.

Para $\check{\rho}_4$ sabemos que $\text{Tr}(\check{\rho}_4^\dagger \hat{\rho}_4) = \text{Tr}(\check{\rho}_4^\dagger |gg\rangle \langle ee|) = 1$, por lo que si $\check{\rho}_4^\dagger = |ee\rangle \langle gg|$ se cumple la primera condición. En este caso, la segunda condición se cumple directamente,

$$\text{Tr}(\check{\rho}_4^\dagger \hat{\rho}_n) = 0, \text{ para todo } n \neq 4.$$

$\therefore \check{\rho}_4 = |gg\rangle \langle ee|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_4^* = -2(\gamma + i\omega_a)$.

Para $\check{\rho}_5$ sabemos que $\text{Tr}(\check{\rho}_5^\dagger \hat{\rho}_5) = \text{Tr}(\check{\rho}_5^\dagger |+\rangle \langle gg|) = 1$, por lo que si $\check{\rho}_5^\dagger = |gg\rangle \langle +|$ se cumple la primera condición. Sin embargo, la segunda condición no se cumple, ya que para $n = 14$ se tiene que:

$$\text{Tr}(\check{\rho}_5^\dagger \hat{\rho}_{14}) = \text{Tr} \left[(|gg\rangle \langle +|) \left(|ee\rangle \langle +| - \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} |+\rangle \langle gg| \right) \right] = -\frac{\gamma}{\gamma - i\Omega}.$$

Para corregir esto, proponemos un ansatz de la forma $\check{\rho}_5^\dagger = |gg\rangle\langle +| + \beta_5 |+\rangle\langle ee|$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\check{\rho}_5^\dagger \hat{\rho}_{14}) &= \text{Tr} \left[(|gg\rangle\langle +| + \beta_5 |+\rangle\langle ee|) \left(|ee\rangle\langle +| - \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} |+\rangle\langle gg| \right) \right] = -\frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} + \beta_5 = 0, \\ \implies \beta_5 &= \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega}, \\ \implies \check{\rho}_5^\dagger &= |gg\rangle\langle +| + \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} |+\rangle\langle ee|.\end{aligned}$$

$\therefore \check{\rho}_5 = |+\rangle\langle gg| + \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} |ee\rangle\langle +|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_5^* = -\gamma + i(\omega_a + \Omega)$.

Para $\check{\rho}_6$ sabemos que $\text{Tr}(\check{\rho}_6^\dagger \hat{\rho}_6) = \text{Tr}(\check{\rho}_6^\dagger |-\rangle\langle gg|) = 1$, por lo que si $\check{\rho}_6^\dagger = |gg\rangle\langle -|$ se cumple la primera condición. Sin embargo, la segunda condición no se cumple, ya que para $n = 15$ se tiene que:

$$\text{Tr}(\check{\rho}_6^\dagger \hat{\rho}_{15}) = \text{Tr} \left[(|gg\rangle\langle -|) \left(|ee\rangle\langle -| + \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} |-\rangle\langle gg| \right) \right] = \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega}.$$

Para corregir esto, proponemos un ansatz de la forma $\check{\rho}_6^\dagger = |gg\rangle\langle -| + \beta_6 |-\rangle\langle ee|$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\check{\rho}_6^\dagger \hat{\rho}_{15}) &= \text{Tr} \left[(|gg\rangle\langle -| + \beta_6 |-\rangle\langle ee|) \left(|ee\rangle\langle -| + \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} |-\rangle\langle gg| \right) \right] = \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} + \beta_6 = 0, \\ \implies \beta_6 &= -\frac{\gamma}{\gamma + i\Omega}, \\ \implies \check{\rho}_6^\dagger &= |gg\rangle\langle -| - \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} |-\rangle\langle ee|.\end{aligned}$$

$\therefore \check{\rho}_6 = |-\rangle\langle gg| - \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} |ee\rangle\langle -|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_6^* = -\gamma + i(\omega_a - \Omega)$.

Para $\check{\rho}_7$ sabemos que $\text{Tr}(\check{\rho}_7^\dagger \hat{\rho}_7) = \text{Tr}(\check{\rho}_7^\dagger |ee\rangle\langle gg|) = 1$, por lo que si $\check{\rho}_7^\dagger = |gg\rangle\langle ee|$ se cumple la primera condición. En este caso, la segunda condición se cumple directamente,

$$\text{Tr}(\check{\rho}_7^\dagger \hat{\rho}_n) = 0, \text{ para todo } n \neq 7.$$

$\therefore \check{\rho}_7 = |ee\rangle\langle gg|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_7^* = -2(\gamma - i\omega_a)$.

Para $\check{\rho}_8$ sabemos que $\text{Tr}(\check{\rho}_8^\dagger \hat{\rho}_8) = \text{Tr}[\check{\rho}_8^\dagger (|+\rangle\langle +| - |gg\rangle\langle gg|)] = 1$, por lo que si $\check{\rho}_8^\dagger = |+\rangle\langle +|$ se cumple la primera condición. Sin embargo, la segunda condición no se cumple, ya que para $n = 16$ se tiene que:

$$\text{Tr}(\check{\rho}_8^\dagger \hat{\rho}_{16}) = \text{Tr} [(|+\rangle\langle +|) (|ee\rangle\langle ee| - |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| + |gg\rangle\langle gg|)] = -1.$$

Para corregir esto, proponemos un ansatz de la forma $\check{\rho}_8^\dagger = |+\rangle\langle +| + \beta_8 |ee\rangle\langle ee| + \beta'_8 |-\rangle\langle -| + \beta''_8 |gg\rangle\langle gg|$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\check{\rho}_8^\dagger \hat{\rho}_{16}) &= \mathrm{Tr} [(|+\rangle \langle +| + \beta_8 |ee\rangle \langle ee| + \beta'_8 |-\rangle \langle -| + \beta''_8 |gg\rangle \langle gg|) \\ &\quad (|ee\rangle \langle ee| - |+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -| + |gg\rangle \langle gg|)] \\ &= -1 + \beta_8 - \beta'_8 + \beta''_8 = 0.\end{aligned}$$

β''_8 debe ser igual 0 para mantener la primera condición, y β'_8 también debe ser igual a 0 para satisfacer la biortogonalidad con $\hat{\rho}_{11}$. Así que tenemos que $\beta_8 = 1$.

$\therefore \check{\rho}_8 = |+\rangle \langle +| + |ee\rangle \langle ee|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_8^* = -2\gamma$.

Para $\check{\rho}_9$ sabemos que $\mathrm{Tr}(\check{\rho}_9^\dagger \hat{\rho}_9) = \mathrm{Tr}(\check{\rho}_9^\dagger |+\rangle \langle -|) = 1$, por lo que si $\check{\rho}_9^\dagger = |-\rangle \langle +|$ se cumple la primera condición. En este caso, la segunda condición se cumple directamente,

$$\mathrm{Tr}(\check{\rho}_9^\dagger \hat{\rho}_n) = 0, \text{ para todo } n \neq 9.$$

$\therefore \check{\rho}_9 = |+\rangle \langle -|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_9^* = -2(\gamma - i\Omega)$.

Para $\check{\rho}_{10}$ sabemos que $\mathrm{Tr}(\check{\rho}_{10}^\dagger \hat{\rho}_{10}) = \mathrm{Tr}(\check{\rho}_{10}^\dagger |-\rangle \langle +|) = 1$, por lo que si $\check{\rho}_{10}^\dagger = |+\rangle \langle -|$ se cumple la primera condición. En este caso, la segunda condición se cumple directamente,

$$\mathrm{Tr}(\check{\rho}_{10}^\dagger \hat{\rho}_n) = 0, \text{ para todo } n \neq 10.$$

$\therefore \check{\rho}_{10} = |-\rangle \langle +|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_{10}^* = -2(\gamma + i\Omega)$.

Para $\check{\rho}_{11}$ notamos que es un caso análogo a $\check{\rho}_8$, pero con $|-\rangle \langle -|$ en lugar de $|+\rangle \langle +|$. Por lo tanto, proponemos el ansatz $\check{\rho}_{11}^\dagger = |-\rangle \langle -| + |ee\rangle \langle ee|$ y observamos que cumple ambas condiciones:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\check{\rho}_{11}^\dagger \hat{\rho}_{11}) &= \mathrm{Tr} [(|-\rangle \langle -| + |ee\rangle \langle ee|) (|ee\rangle \langle ee| - |gg\rangle \langle gg|)] = 1, \\ \mathrm{Tr}(\check{\rho}_{11}^\dagger \hat{\rho}_n) &= 0, \text{ para todo } n \neq 11.\end{aligned}$$

$\therefore \check{\rho}_{11} = |-\rangle \langle -| + |ee\rangle \langle ee|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_{11}^* = -2\gamma$.

Para $\check{\rho}_{12}$ sabemos que $\mathrm{Tr}(\check{\rho}_{12}^\dagger \hat{\rho}_{12}) = \mathrm{Tr} \left[\check{\rho}_{12}^\dagger \left(|+\rangle \langle ee| - \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} |gg\rangle \langle +| \right) \right] = 1$, por lo que si $\check{\rho}_{12}^\dagger = |ee\rangle \langle +|$ se cumple la primera condición. En este caso, la segunda condición se cumple directamente,

$$\mathrm{Tr}(\check{\rho}_{12}^\dagger \hat{\rho}_n) = 0, \text{ para todo } n \neq 12.$$

$\therefore \check{\rho}_{12} = |+\rangle \langle ee|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_{12}^* = -3\gamma - i(\omega_a - \Omega)$.

Para $\check{\rho}_{13}$ sabemos que $\text{Tr}(\check{\rho}_{13}^\dagger \hat{\rho}_{13}) = \text{Tr} \left[\check{\rho}_{13}^\dagger \left(|-\rangle \langle ee| + \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} |gg\rangle \langle -| \right) \right] = 1$, por lo que si $\check{\rho}_{13}^\dagger = |ee\rangle \langle -|$ se cumple la primera condición. En este caso, la segunda condición se cumple directamente,

$$\text{Tr}(\check{\rho}_{13}^\dagger \hat{\rho}_n) = 0, \text{ para todo } n \neq 13.$$

$\therefore \check{\rho}_{13} = |-\rangle \langle ee|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_{13}^* = -3\gamma - i(\omega_a + \Omega)$.

Para $\check{\rho}_{14}$ sabemos que $\text{Tr}(\check{\rho}_{14}^\dagger \hat{\rho}_{14}) = \text{Tr} \left[\check{\rho}_{14}^\dagger \left(|ee\rangle \langle +| - \frac{\gamma}{\gamma - i\Omega} |+\rangle \langle gg| \right) \right] = 1$, por lo que si $\check{\rho}_{14}^\dagger = |+\rangle \langle ee|$ se cumple la primera condición. En este caso, la segunda condición se cumple directamente,

$$\text{Tr}(\check{\rho}_{14}^\dagger \hat{\rho}_n) = 0, \text{ para todo } n \neq 14.$$

$\therefore \check{\rho}_{14} = |ee\rangle \langle +|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_{14}^* = -3\gamma + i(\omega_a - \Omega)$.

Para $\check{\rho}_{15}$ sabemos que $\text{Tr}(\check{\rho}_{15}^\dagger \hat{\rho}_{15}) = \text{Tr} \left[\check{\rho}_{15}^\dagger \left(|ee\rangle \langle -| + \frac{\gamma}{\gamma + i\Omega} |-\rangle \langle gg| \right) \right] = 1$, por lo que si $\check{\rho}_{15}^\dagger = |-\rangle \langle ee|$ se cumple la primera condición. En este caso, la segunda condición se cumple directamente,

$$\text{Tr}(\check{\rho}_{15}^\dagger \hat{\rho}_n) = 0, \text{ para todo } n \neq 15.$$

$\therefore \check{\rho}_{15} = |ee\rangle \langle -|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_{12}^* = -3\gamma + i(\omega_a + \Omega)$.

Para $\check{\rho}_{16}$ sabemos que $\text{Tr}(\check{\rho}_{16}^\dagger \hat{\rho}_{16}) = \text{Tr} \left[\check{\rho}_{16}^\dagger (|ee\rangle \langle ee| - |+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -| + |gg\rangle \langle gg|) \right] = 1$, por lo que si $\check{\rho}_{16}^\dagger = |ee\rangle \langle ee|$ se cumple la primera condición. En este caso, la segunda condición se cumple directamente,

$$\text{Tr}(\check{\rho}_{16}^\dagger \hat{\rho}_n) = 0, \text{ para todo } n \neq 16.$$

$\therefore \check{\rho}_{16} = |ee\rangle \langle ee|$ es un eigenvector de \mathcal{L}^\dagger con eigenvalor $\lambda_{12}^* = -4\gamma$.

Bibliografía

- [1] Nielsen, M. A. y Chuang, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information* (10th ed.). Cambridge University Press, Estados Unidos, 2010.
- [2] Plenio, M. B., & Virmani, S. *An introduction to entanglement measures*, Quantum Information & Computation, vol. 7, no. 1-2, pp. 1–51, 2007. Disponible en: [arXiv:quant-ph/0504163](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0504163).
- [3] Manzano, D. *A Short Introduction to the Lindblad Master Equation*, AIP Advances, vol. 10, no. 2, 025106, 2020. DOI: [10.1063/1.5115323](https://doi.org/10.1063/1.5115323).
- [4] Li, A. C. Y., Petruccione, F. y Koch, J. *Perturbative approach to Markovian open quantum systems*. Scientific Reports, 4, 4887 (2014). DOI:[10.1038/srep04887](https://doi.org/10.1038/srep04887).
- [5] Zettili, N. *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*, 2nd ed., Wiley, Estados Unidos, 2009.
- [6] Sakurai, J. J. y Napolitano, J. *Modern Quantum Mechanics*. 3.^a ed. Addison-Wesley, Estados Unidos, 2017.
- [7] Breuer, H.-P. y Petruccione, F. *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press, Estados Unidos, 2002.
- [8] Carmichael, H. *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer, 1993.
- [9] Walls, D. F. y Milburn, G. J. *Quantum Optics*, 2nd ed., Springer, Australia, 2008.
- [10] Devoret, M. H. y Martinis, J. M. *Superconducting Qubits: A Short Review*. Quantum Information Processing, 3(4), 163-203, 2004. DOI: [10.1023/B:QUIP.0000041029.21435.1a](https://doi.org/10.1023/B:QUIP.0000041029.21435.1a).

- [11] Häffner, H., Roos, C. F. y Blatt, R. *Quantum computing with trapped ions*. Physics Reports, vol. 469, pp. 155–203, 2008. DOI: [10.1016/j.physrep.2008.09.003](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.09.003).
- [12] Fortin, Sebastián. 2016. "Decoherencia cuántica". En Diccionario Interdisciplinar Austral, editado por Claudia E. Vanney, Ignacio Silva y Juan F. Franck. http://dia.austral.edu.ar/Decoherencia_cuntica
- [13] Ryan LaRose. QuIC Seminar 6: Quantum States and Partial Trace. <https://www.ryanlarose.com/semester-i.html>. Seminario presentado el 19 de noviembre de 2018. Accedido el 17 de abril de 2025.
- [14] Bienert, N. *Manifestations of Mechanical Effects of Light in Atom Optics*. Tesis Doctoral. Abteilung für Quantenphysik, Universität Ulm, 2004.
- [15] Pileio, G. "Lecture 1: Operator and Superoperator Algebra". En: *The Principles of Nuclear Magnetism*, Royal Society of Chemistry, 2013, pp. 1–33. DOI: [10.1039/9781849737541-00001](https://doi.org/10.1039/9781849737541-00001).
- [16] Strang, G. *Linear Algebra and Its Applications* (4th ed.). Cengage Learning, Estados Unidos, 2006.
- [17] Brasil, C. A., Fanchini, F. F. y Napolitano, R. J. (2012). *A simple derivation of the Lindblad equation*. Revista Brasileira de Ensino de Física, 35(1), 1-7. DOI: [10.1590/S1806-11172013000100003](https://doi.org/10.1590/S1806-11172013000100003).
- [18] Gorini, V., Kossakowski, A., y Sudarshan, E. C. G. "Completely positive dynamical semigroups of N-level systems," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 17, no. 5, pp. 821–825, 1976. DOI: [10.1063/1.522979](https://doi.org/10.1063/1.522979).
- [19] Lindblad, G. *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Communications in Mathematical Physics, vol. 48, no. 2, pp. 119–130, 1976. DOI: [10.1007/BF01608499](https://doi.org/10.1007/BF01608499).
- [20] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*. 3.^a ed. Wiley, Estados Unidos, 1998.
- [21] Steck, D. A. *Quantum and Atom Optics*. Revision 0.13.21, 5 de junio de 2023. University of Oregon Department of Physics, disponible en <https://atomoptics.uoregon.edu/~dsteck/teaching/quantum-optics/>.

- [22] Gómez, E. A., Castaño-Yepes, J. D. y Thirumuruganandham, S. P. *Perturbation theory for open quantum systems at the steady state*. Results in Physics, 10, 353–355 (2018). DOI: [10.1016/j.rinp.2018.06.038](https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.06.038).
- [23] Massachusetts Institute of Technology Open Course. *Quantum Physics III*. 2018. Teoría de perturbaciones. Disponible en: <https://ocw.mit.edu/courses/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/pages/lecture-notes/>.
- [24] Kramida, A., Ralchenko, Yu., Reader, J. y NIST ASD Team. *NIST Atomic Spectra Database (version 5.12)*. 2024. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD. Disponible en: <https://physics.nist.gov/asd>. DOI: <https://doi.org/10.18434/T4W30F>. Consultado el 9 de septiembre de 2025.
- [25] Kato, T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. 2.^a ed. Springer-Verlag, Berlín, 1980.
- [26] Wootters, W. K. *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits*, Physical Review Letters, vol. 80, no. 10, pp. 2245-2248, 1998. DOI: [10.1103/PhysRevLett.80.2245](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245).
- [27] Mendonça, P. E. M. F., Marchioli, M. A., & Galetti, D. *Entanglement universality of two-qubit X-states*, Annals of Physics, vol. 351, pp. 79–103, 2014. Disponible en: [arXiv:1407.3021](https://arxiv.org/abs/1407.3021).