BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Postgrado en Ciencias Matemáticas

EL IMPACTO DEL MÉTODO DEL FORCING EN EL DISCURSO MATEMÁTICO

TESIS

que para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

EMILIO ANGULO PERKINS

Director de Tesis:
Dr. Juan Angoa Amador

Puebla, Puebla. 2 de Noviembre de 2016

BUAP

Dra. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

EMILIO ANGULO PERKINS

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 18 de noviembre de 2016, con la tesis titulada:

El Impacto del Método del Forcing en el Discurso Matemático

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 18 de noviembre de 2016

Dr. FERNANDO MACÍAS ROMERO
COORDINADOR DEL POSTGRADO
EN MATEMÁTICAS.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS - SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO
1578

Ccp. Archivo.
DRA. LAHR/mtrv

60 AÑOS DE AUTONOMÍA UNIVERSITARIA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A, Ciudad Universitaria, Col. San Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Working for the rat race
You know you're wasting your time
Working for the rat race
You're no friend of mine
Rat Race, The Specials (fragmento)

Al amor de mi vida:
Kalina, Kaly y Ale.
A Alejandro
A todos mis muertos

Agradecimientos

A mi asesor, el Dr. Juan Angoa, por disfrutar su trabajo, por disfrutar la matemática y tratarla tanto con respeto como cariño. Por haberme aceptado como su alumno y haber tenido paciencia para guiar este trabajo por su sinuoso desarrollo. Una disculpa si es que el trabajo no refleja a cabalidad el esfuerzo y dedicación que el maestro Angoa vertió en su dirección.

A los colegas del Dr. Angoa que creyeron en la utilidad de éste trabajo desde su comienzo y durante su escarpado desarrollo, así como contribuyendo sustancialmente en él y finalmente conformando mi jurado. Mis sinceros agradecimientos a los maestros Manuel Ibarra, Agustín Contreras e Iván Martínez.

Agradezco al maestro Roberto Torres por su apoyo en mi formación, no sólo académica, desde hace ya siete años: sus clases, los seminarios, las ponencias, los consejos; ahora como sinodal, y siempre amigo.

A mi madre por el apoyo incondicional e ilimitado que me ha dado, en todo, siempre. A mis hermanas por su cariño, sus consejos y por la brecha que me abren. A mi padre por su apoyo. A mi familia toda.

Al maestro Raúl Escobedo, que me ayudó en los primeros pasos para emprender este ciclo que ahora concluye.

A la maestra Mary Toriz, por sus consideraciones para conmigo y oportuna ayuda.

A Teresa Velázquez por su excepcional labor administrativa, que durante estos años ha destacado por ser eficiente, expedita e incansablemente amable.

A los pueblos indígenas en resistencia de México y el mundo entero. A todos los pueblos en rebeldía por darle sentido a todo esto.

Al CONACYT por confiarme los recursos que la sociedad nos destina para el desarrollo de la ciencia en México.

Introducción

Así yo -una vez más el Occidente odioso,
la obstinada partícula
que subtiende todos sus discursos-
quisiera asomar a un campo
de contacto que el sistema que ha
hecho de mí esto
niega entre vociferaciones y teoremas.
Prosa del observatorio
Julio Cortazar

En la liturgia de acreditar una habilidad y por tanto obtener un grado nos asomamos a las distintas vertientes del nuestro trabajo, que en esta introducción declaramos y exhibimos. Primero que nada, reportar un trabajo que nos acredite como maestros en ciencias matemáticas nos lleva a la certeza de una propia concepción del trabajo matemático, creemos que no sólo debemos acreditar conocimientos que en su forma más inmediata sean matemáticos sino también reflexionar acerca de ellos desde una perspectiva humanística y cultural.

Así, después de deambular entre los conocimientos suficientes para entender el forcing, nos llenamos de sorpresas y dudas acerca de la naturaleza del sujeto llamado matemático haciendo matemáticas[1]. Con gran sorpresa vislumbramos a un matemático creando realidades y nuevos mundo es decir ampliando el mundo humano hasta llevarlo a una sólida cristralización de imagenerías y fantasías, labor que en sí incide de manera definitiva en otras actividades del quehacer humano.

El arte, la filosofía, lo lúdico, lo mítico reptan entre claroscuros y destellos, en la actividad matemática. No afirmamos que logramos en nuestro trabajo expresar estas presencias pero sí desde aquí declaramos que las tuvimos como explícitas inspiraciones. De hecho ahondar en cómo se dan estas presencias, cómo actúan estos protagonistas, es preocupación para posteriores trabajos.

Es de resaltar el importante Teorema de Completitud, que para nosotros significó un hito en nuestro trabajo, ya que fué el primer punto de crisis que localizamos (el segundo sería la justificación del forcing), que aparece cuando la matemática es producto de la reflexión y crítica de su misma metodología.

[1] La naturaleza de este sujeto se hizo presente al ir diseccionando el método del forcing, e ir encontrando elementos humanos en los alcances y lḿites del método. Gran parte del presente trabajo es el rastreo a estas huellas.

La lucha entre “significado” y “verdad” queda resuelta en este teorema y refleja una clásica solución matemática en un mundo humano que se debate en crear nuevos conocimientos y nuevas formas de valorar su verdad, la crisis quedó atrás pero no sus enseñanzas. Por lo anterior, el Teorema de Completitud, fue incluído a pesar de no jugar un papel esencial en la construcción técnica del forcing.

El trabajo que, en un primer intento, tenía la intención de describir el forcing y una aplicación de él, fue cambiado por las razones descritas anteriormente, incorporando una parte reflexiva y reduciendo la sección del forcing a una mera construcción, que fundamenta y valida nuestras reflexiones. Esperamos que este cambio produzca un resultado útil o motivador a la comunidad matemática local, al menos a nosotros nos permitió acceder a un mundo nuevo del quehacer matemático: **pensar la matemática**.

El capítulo 1 consiste de dos secciones, donde cada una puede considerarse como los preliminares para una de las partes del trabajo. En la primera sección, Filosofía de la Matemática, se exponen brevemente las escuelas filosóficas clásicas sobre la matemática. Sólo dentro de este contexto es posible apreciar, la utilidad e influencia del método forcing en la matemática para estudiar los límites epistemológicos de las pruebas de consistencia, hecho que será estudiado más a fondo en el capítulo 5. En esta breve sección no se abordan posturas como el platonismo de Gödel o el estructuralismo; en cambio, se le da especial atención al formalismo debido a que alrededor de esta postura es que se desarrollan los capítulos 4 y 5 (de hecho, todo la tesis). En la segunda sección, Teoría de Conjuntos, se enuncian definiciones y propiedades, casi siempre sin demostración y elementales en su mayoría, pero que son de uso recurrente para el desarrollo del capítulo 2 y 3. Algunas demostraciones se han agregado a esta sección respondiendo a dos razones, una, porque se hallaron frugalmente desarrolladas en la literatura o sencillamente no se encontraron y se ofrecen como contribución; la otra, porque las técnicas usadas en estas demostraciones serán reutilizadas para otros resultados.

La primera parte de la tesis, compuesta por los capítulos 2 y 3, contiene el estudio *en* la matemática del teorema de completitud y el método del forcing.

El capítulo 3 consiste en la exposición de los contenidos tratados en [19, IV.1 y IV.2]. Si existe mérito alguno, sería en agregar más detalle a la exposición de la referencia. Se intentó que la exposición del trabajo fuera autocontenida en su mayoría. Con este objetivo en mente, los fundamentos necesarios de Teoría de Modelos fueron desarrollados en un capítulo completo e independiente. Para este capítulo 2 se siguió la exposición de [18, II.1-II.12 , II.16-17] y [19, I.15-I.16].

La segunda parte de la tesis, compuesta por los capítulos 4 y 5, contiene el estudio *sobre* la matemática del método del forcing.

En el capítulo 4 se explica brevemente el concepto de paradigma introducido en 1970 por Kuhn en su obra *Estructura de las Revoluciones Científicas*, para después proceder a analizar su aplicabilidad al campo de la matemática. Se concluye con el estudio de las propiedades del método del forcing para ser considerado un cambio paradigmático.

En el capítulo 5 se exhiben y corroboran las consecuencias (esperadas) por el cambio paradigmático del forcing. Este capítulo es importante porque verifica que el análisis realizado en el capítulo 4 no es una explicación *post hoc*.

Esperamos que la lectura de este trabajo sea un recorrido, aunque posiblemente arduo y técnico, agradable y gratificante que exhiba características y problemáticas de la matemática usualmente invisibilizadas.

ÍNDICE GENERAL

I. PRELIMINARES

I.1. Filosofía de las Matemáticas

I.1.1 ¿Para qué?

Javier de Lorenzo explica en [11], que la adopción del método cartesiano en el siglo XVII tuvo por consecuencia que el análisis de fenómenos tenga la "pretensión de ser estrictamente mecanicista y sin creación de hipótesis 'ocultas' como las acciones a distancia o en vacíos inexistentes, aunque tengan que crearse hipótesis especiales para la explicación de cada uno de los fenómenos a considerar."

Añade también que

> De estos dogmas lógico-experimentales se iban a obtener, como sustrato de la ciencia, o marco en el cual se actúa y piensa, todo un haz de adjetivaciones y contraposiciones: rigor, universalidad, imparcialidad. . ., como atributos de lo que calificar científico. Bastaría observar el origen polémico del método cartesiano y su elección contra la elección metódica simbólica-mítica y los horrores de un Descartes a la acción a distancia, al magnetismo, al vacío. . . por estimarlos elementos representativos de lo irracional, todavía. De aquí que lo científico se contraponga a lo que califica, desde su criterio de racionalidad lógico positivista, como dogmas oscurantistas, manifestación de creencias acríticas y entorpecedoras.

Una mirada acrítica a estos señalamientos produciría una postura indiferente a ellos, se podría decir que eso pertenece al pasado y que la *ciencia* ha seguido *avanzando* (aunque no se tenga claro qué significa ciencia ni que esta avance) y que ahora tenemos precisas descripciones de los fenómenos magnéticos y gravitacionales. Pero los señalamientos del Dr. de Lorenzo van más allá, describe los alcances ideológicos, *aún* presentes, del método cartesiano:

> [. . .] ya en el marco ideológico, por la aparente imposibilidad de que en la matemática puedan influir cualesquiera creencias y

> contenidos, $[\cdots]$se la toma como el lenguaje base de las teorías científicas. Incluso se la va a adoptar como criterio para decidir si una teoría, si una disciplina puede estimarse, o no, según el papel que la Matemática juega en la misma.

Es increíble que la incertidumbre y falta de consenso sobre la epistemología del conocimiento matemático no hayan podido permear en esta, irónicamente, irracional postura.

Lo anteriormente dicho, no confronta de alguna manera, la validez, o no, de las actuales teorías científicas con fuerte apoyo matemático, sino que pone en crucial papel a la Filosofía de la Matemática.

¿Es esto *realmente* necesario? ¿Qué es lo que ocasiona la dificultad? Como se expuso, la herencia cartesiana fue agregando desconfianza a las suposiciones "ocultas", esto llegó a tal punto de afectar incluso a la matemática, ciencia considerada platónica por antonomasia. Esto es porque, una postura comúnmente aceptada, a veces implícitamente, es que la matemática, aparentemente, estudia entidades abstractas. Esto obliga a cuestionarnos cuál es la naturaleza de las entidades matemáticas y como es posible que obtengamos conocimiento de ellas. Si resultase que estos problemas son inabordables, uno podría sugerir si realmente tiene sentido estudiar matemáticas.

Por todo esto, se buscó formular posturas filosóficas libres de elementos platónicos. A continuación presentamos una breve reseña de las escuelas que aparecieron a principios del siglo XX basada en [13]

Logicismo

Grosso Modo, el proyecto logicista consiste en pretender reducir las matemáticas a la lógica. Dado que se supone que la lógica es neutral ante cuestiones ontológicas, este proyecto encajaba muy bien con el ambiente anti-platónico.

Históricamente, podríamos encontrar las raíces de este proyecto desde Leibniz. Pero para poder intentar desarrollar este proyecto detalladamente fue necesario que se articularan los principios básicos de las teorías centrales de la matemática (lo que se logró con los trabajos de Dedekind y Peano) y que los principios de la lógica también fueran detallados (esto hecho por Frege).

El primer intento serio fue realizado por Frege en 1884. Logró derivar los principios de la aritmética de Peano de las leyes básicas de la lógica de segundo orden. La derivación era correcta pero se fundaba en un principio que resultó no ser lógico y, aún peor, inconsistente. El principio en cuestión es la llamada *Ley Básica V de Frege*.

En una famosa carta a Frege en 1902, Russell demostró que de dicho principio podía derivarse una contradicción. Esta demostración sería después conocida como la *paradoja de Russell*.

Después, el mismo Russell intentó llevar a cabo el proyecto logicista junto con Witehead y su obra *Principia Mathematica*. Russell observó que la contradicción producida por la Ley Básica V provenía de poder construir colecciones de objetos a partir de cualquier propiedad. Así que Russell debilitó esto posibilitando que sólo se podían definir propiedades de objetos matemáticos previamente existentes, esto descarta las definiciones que implícitamente refieran al objeto en definición. De este modo, Russell parte de objetos base, puede definir propiedades de ellos y así generar colecciones determinadas por propiedades de objetos base; después se pueden definir propiedades de colecciones determinas por propiedades de objetos base y así tener colecciones determinadas por propiedades de colecciones determinadas por propiedades de objetos base... etc.

Pero Russell halló que sus principios no eran suficientemente fuertes para deducir de ellos los principios básicos de la aritmética. Entre otras cosas, no se podía justificar una colección infinita en los objetos base. Lo que difícilmente se podría considerar un principio lógico. Así, este segundo gran intento por reducir la matemática a la lógica fracasó también.

Sin embargo esto no ha detenido el proyecto logicista, aunque actualmente no ocupe la escena principal. Se observó que Frege usaba su Ley Básica V para poder deducir el Principio de Hume, a partir de ahí, la derivación no tiene ningún problema. A partir de este hecho se han realizado esfuerzos por demostrar que el principio de Hume es un principio lógico, lo cual no se ha logrado establecer satisfactoriamente. También se han realizado construcciones debilitadas de lógicas de segundo orden en donde la Ley Básica V de Frege no es inconsistente, pero de estas versiones debilitadas sólo se han podido derivar versiones debilitadas de las teorías aritméticas.

Intuicionismo

El intuicionismo es originado en el trabajo de L.E.J. Brouwer. De acuerdo a este proyecto, la matemática es escencialmente una actividad de construcción. Los números naturales son construcciones mentales, los números reales son construcciones mentales, las demostraciones y teoremas también son construcciones mentales, como también la significación matemática... Una construcción matemática es producida por un matemático *ideal*, i.e., estas abstracciones son realizadas por un matemático lo que implica limitaciones contingentes y físicas. Pero incluso refiriéndonos a un matemático *ideal* él no podrá nunca completar una construcción infinita, aunque podríamos pensar en una construcción con una cantidad arbitrariamente grande de pasos. Por esto, en el proyecto intuicionista se rechaza la existencia del infinito *de facto*; sólo se apela al infinito *potencial* en las construcciones. El ejemplo clásico es la construcción sucesiva de números naturales.

Por lo anterior, el intuicionismo rechaza las demostraciones existenciales no-constructivas. Las demostraciones no-constructivas son aquéllas que demuestran la existencia de entidades sin mencionar, ni siquiera implícitamente, un método de construcción para un ejemplo de la entidad. Una característica del proyecto intuicionista es el rechazo a las demostración que se basan sustancialmente en el uso del *principio del tercer excluído*

$$\varphi \vee \neg\varphi,$$

o alguna de sus equivalencias, como el principio de doble negación

$$\neg\neg\varphi \to \varphi$$

En la lógica clásica, estos principios son válidos. La lógica de la matemática intuicionista se puede obtener removiendo el principio del tercer excluido de la lógica clásica. Por supuesto que esta postura conlleva a un revisionismo del conocimiento matemático. Por ejemplo, la teoría clásica de aritmética elemental, la *Aritmética de Peano*, no es aceptada. En su lugar, una teoría intuicionista de la aritmética (llamada *Aritmética de Heyting*) es propuesta que no hace uso del principio del tercer excluido. Aunque la aritmética elemental intuicionista es más débil que la versión clásica, no hay tanta diferencia entre ellas. Es posible realizar una traducción sintáctica que traslada todos los teoremas clásicos de la aritmética en teoremas que son intuitivamente demostrables.

Durante las primeras décadas del siglo XX, este proyecto tuvo la simpatía de una parte significativa de la comunidad matemática. Esta situación cambió cuando se apreció que en matemáticas avanzadas la alternativa intuicionista difiere drásticamente de la teoría clásica. Por ejemplo, la teoría intuicionista del análisis matemático se vuelve considerablemente más complicada, y muy diferente. Esto cesó el proyecto intuicionista como solución fundacional. Sin embargo, la matemática intuicionista se sigue estudiando y desarrollando actualmente.

Formalismo

El formalismo que revisaremos es la versión que surgió con David Hilbert . Hilbert, en un modo parecido al intuicionismo, afirmaba que los números naturales (y su aritmética) eran la base de las matemáticas. Sin embargo, Hilbert no partía de los números naturales como construcciones mentales, sino que pueden ser incardinados en *símbolos*. Los símbolos son entidades abstractas, pero pueden ser representados por entidades físicas. Se puede tomar, por ejemplo, que el trazo de tinta | juegue el papel de 0, otro trazo de tinta || haría el papel de 1, y así sucesivamente. De este modo podríamos empezar a desarrollar, la aritmética clásica, sin embargo, querer extender esta aproximación hasta las matemáticas avanzadas difícilmente podría ser ejecutado.

El formalismo de Hilbert, no recurre a un revisionismo como lo hace el intuicionismo, ante la el conocimiento matemático existente. En su lugar, se adopta una postura instrumentalista. Las matemáticas avanzadas no corresponden a otra cosa que derivaciones de un sistema formal (Leer introducción de 2.1 en la página 21). Las afirmaciones de las matemáticas avanzadas son cadenas, sin significado propio, de símbolos. La demostración de esos enunciados no es más que un juego de manipulación y derivación bajo las reglas fijas del sistema formal. El objetivo del "juego de las matemáticas avanzadas" es proveer enunciados de la aritmética elemental, los cuales tienen una interpretación directa.

Hilbert estaba convencido de la posible interpretación concreta de la aritmética de Peano, o al menos de la interpretación directa de lo que es llamada Aritmética Recursiva Primitiva. Y el pensaba que cada enunciado arimético que puede ser demostrado a través de un recorrido por las matemáticas avanzadas, puede ser demostrado también directamente en la Aritmética de Peano. De hecho, el estaba casi convencido de que *cualquier* problema de la aritmética elemental podría decidirse a partir de los axiomas de la aritmética de Peano. Sin embargo, resolver problemas de aritmética sólo en la aritmética puede volverse casi imposible. La historia de las matemáticas había demostrado que haciendo un recorrido por las matemáticas avanzadas, a veces se podía llegar a la demostración de un enunciado aritmético mucho más corta y evidenciaba más propiedades que cualquier prueba meramente aritmética del mismo enunciado.

Desde la perspectiva formalista, un requisito que se le debe pedir a un sistema formal de matemáticas avanzadas es que sea consistente. Si no, todo enunciado es demostrable. Hilbert y sus estudiantes emprendieron la tarea de demostrar la consistencia de los postulados básicos del análisis estándar. Por supuesto, esto tendrían que realizarlo en un parte 'segura' de la matemática, como la aritmética. De otro modo la demostración no agregaría convicción sobre la consistencia del análisis matemático. En principio, esto parecía posible, y lograron demostrar la consistencia de la axiomática del análisis a partir de la artimética clásica de Peano. Este proyecto fue conocido como el *Programa* *de Hilbert*. El proyecto resultó más difícil de lo pensado. Y no pudieron demostrar la consistencia de la axiomática de Peano a partir de la aritmética de Peano.

Después Gödel demostraría (constructivamente) que existen enunciados aritméticos que son indecidibles en la Aritmética de Peano. Este resultado se conoce ahora como el *primer teorema de incompletitud* de Gödel. Esto pintaba mal para el Programa de Hilbert, sin embargo aún quedaba la posibilidad que la consistencia no fuera una de éstas proposiciones indecidibles. Lamentablemente, al poco tiempo Gödel demostró que, salvo que la aritmética de Peano sea inconsistente, la consistencia de la aritmética de Peano es independiente de la aritmética de Peano. Esto es conocido como el *segundo teorema de incompletitud* de Gödel.

Estos dos resultados conllevan a la imposibilidad del programa de Hilbert. Pero esto arroja un resultado importante: *Las matemáticas avanzadas no pueden ser interpretadas de modo meramente instrumentista*. Las matemáticas avanzadas puede demostrar enunciados aritméticos, como enunciados sobre consistencia, que están fuera del alcance de la aritmética de Peano.

Al igual que en los casos anteriores, esto no ha significado el fin del formalismo. De hecho, es la postura predominante en la comunidad matemática (a veces asumida implícitamente) expuesta principalmente del siguiente modo:

Curry propone en 1958 que la matemática consiste de una colección de sistemas formales que no tienen alguna interpretación particular, salvo las metamatemáticas (ver página 21). Tomando un sistema formal (página 21) de referencia, podemos decir que un enunciado es verdad si y solo si es derivable en el sistema. Esto significa que, en un principio, todos los sistemas formales matemáticos son igual de *válidos*. Sin embargo podría haber razones pragmáticas para preferir alguno sobre otro, por ejemplo, los sistemas inconsistentes son equivalentes y prácticamente inútiles.

Una objeción a esta postura es que, de hecho, no se estima por igual a todos los sistemas formales; se prefieren aquellos de los que se puede derivar la consistencia de la aritmética de Peano por encima de aquellos en donde es posible derivar la inconsistencia de la aritmética de Peano. Al final, esta problemática podría decidirse pragmáticamente, considerándose la *exactitud* (o *inexactitud*) de un sistema formal si describe *correctamente* (*incorrectamente*) un tema en particular, claramente esta postura deja un hueco al querer establecer cual debería ser la descripción correcta de *de un tema*; eso es ¿Cómo obtenemos *a priori* la información de este tema?

Otro intento para sostener la postura hilbertiana, defiende que *en algún* *sentido*, la aritmética de Peano podría ser completa. Para esto se argumenta que, las oraciones ciertas indecidibles en la Aritmética de Peano, necesitan recurrir a conceptos de *alto-nivel* (es decir en las matemáticas avanzadas). Si la única manera de demostrar estos enunciados, como podría ser la consistencia de la aritmética de Peano, hace uso indispensable de nociones que pertenecen a matemáticas avanzadas estos son problemas no aritméticos, a pesar de que se puedan expresar en lenguaje de la artimética de Peano.

El formalismo es la postura que se adopta en este texto; el intuicionismo sería indefendible ya que se utiliza fuertemente el principio del tercero excluido; además desde esta postura no tiene sentido hablar de colecciones infinitas completas como ω, ni qué decir de $\aleph_\omega$.

Predicativismo

El eje del predicativismo es evitar definiciones de objetos que hagan referencias implícitas al objeto que se define. No se puede definir una colección S mediante una condición que implícitamente hace referencia a S. Esto es llamado el *principio del círculo vicioso*. Las definiciones que violan este principio son llamadas *impredicativas*. Una definición modelable de un objeto sólo puede hacer referencia a entidades que existen independientemente de ella. Por ejemplo, espacio generado (spam) por un conjunto de vectores es definido como la intersección de todos los espacios vectoriales que contienen dicho conjunto, pero entre esos espacios vectoriales esta ese mismo espacio, lo cual vuelve impredicativa esta definición.

Gödel contrapuso a esta postura que, desde el punto de vista del platonismo[1], los entes matemáticos tienen una existencia independiente de la definición usada para nombrarlos.

De igual modo, el predicativismo sigue siendo desarrollado, y podría sugerirse que no fue tomado en cuenta por razones históricas. En 1920 cuando el predicativismo estaba terminando de confeccionarse como una alternativa viable, la comunidad matemática estaba ya trabajando en la teoría transfinita de Cantor (sumamente impredicativa), y los problemas de la paradoja de Russell habían sido ya sorteados.

I.1.2 Los Teoremas de ZFC

En esta subsección subrayaremos los señalamientos que Kunen hace en [19] sobre los resultados *de* **ZFC** y *sobre* **ZFC**.

Independientemente de la postura adoptada, uno debe distinguir entre los

[1] Cuando decimos *platonismo* estamos pensando en el platonismo matemático moderno, del cual no podríamos estar seguro que Platón sería un simpatizante.

teoremas de $\mathbf{ZFC}$ y los *esquemas en la metateoría*. Por ejemplo, considerese la inducción sobre los números naturales y sobre los ordinales. La inducción en $\mathbb{N}$ es la afirmación de que cada conjunto no vacío de números naturales contiene un elemento mínimo. Denotemos con $\mathbf{Ord}$ la clase de todos los ordinales (de Von Neumman); entonces la inducción en $\mathbf{Ord}$ es la afirmación que cada clase no vacía de ordinales contiene un elemento mínimo.

Trabajando en $\mathbf{ZFC}$; uno puede definir el conjunto $\mathbb{N} = \omega$; así, la inducción sobre $\mathbb{N}$ es expresada por una única oración,

$$\forall S \subseteq \mathbb{N}[S \neq \emptyset \to \exists x \in S \forall z \in \mathbb{N}[z < x \to z \notin S]],$$

que es demostrable a partir de $\mathbf{ZFC}$; por supuesto que requiere algo de trabajo traducir esta oración a una oración *oficial* del lenguaje de la teoría de conjuntos (sólo usando $\in, =$), pero nadie (ni un finitista) duda que esto puede ser hecho y después dar una prueba formal de esta oración a partir de $\mathbf{ZFC}$.

Trabajando en $\mathbf{ZFC}$, uno puede definir la propiedad "x es un ordinal" y después demostrar que no existe un conjunto que contenga a todos los ordinales. Dado que $\mathbf{ZFC}$ sólo tiene conjuntos, la clase $\mathbf{Ord}$ no existe. Es permisible usar el símbolo $\mathbf{Ord}$ como un modo de abreviar, si está claro que se puede expresar lo que se desea sin usarlo, en el mismo modo que un finitista se permite hablar sobre $\mathbb{N}$; por ejemplo "$x \in \mathbf{Ord}$" es una útil abreviación para la afirmación de que x satisface la Definición 1.8. Sin embargo, uno no puede expresar cuantificaciones sobre subclases arbitrarias de $\mathbf{Ord}$, así que no es posible expresar el principio de inducción escribiendo $\forall S \subseteq \mathbf{Ord}[S \neq \emptyset \to \cdots\cdots]$. Uno puede hablar de todos los sub*conjuntos* de $\mathbf{Ord}$, pero esto no encierra todo el potencial de la inducción; por ejemplo, una vez que se ha probado la existencia de un ordinal no-numerable, sería deseable aplicar inducción sobre la "clase" (no conjunto) S de todos los ordinales no numerables y afirmar que existe un elemento mínimo (que será llamado ω_1). Por lo cual, la inducción sobre $\mathbf{Ord}$ es realmente un esquema en la metateoría: Para cada fórmula $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ en el lenguaje de la teoría de conjuntos, uno podría pensar informalmente en la clase $\{x \in \mathbf{Ord} : \varphi(x, \vec{y})\}$ (que depende de $\vec{y}$), y afirmar que $\mathbf{ZFC} \vdash I_\varphi$, donde I_φ es la oración (abreviada por):

$$\forall \vec{y}[\exists x \in \mathbf{Ord} \varphi(x, \vec{y}) \to \exists x \in \mathbf{Ord}[\varphi(x, \vec{y}) \wedge \forall z \in \mathbf{Ord}[z < x \to \neg\varphi(z, \vec{y})]]];$$

Cuando uno afirma que "toda clase no vacía de ordinales contiene un elemento mínimo", realmente se está dando una explicación en la metateoría de como, dado cualquier φ, uno puede formar I_φ y después escribir una prueba formal de I_φ a partir de $\mathbf{ZFC}$. El hecho de que sea tan tedioso escribir todos los detalles explica por qué se usa la abreviación, “toda clase no vacía de ordinales contiene un elemento mínimo”.

Ahora, la independencia de la Hipótesis del Continuo es otro enunciado finitista sobre las pruebas formales que es demostrado en la metateoría. Se acostumbra decir, informalmente, que Gödel demostró “la consistencia relativa de la HC con $\mathbf{ZFC}$”. Lo que demostró realmente es que si φ es cualquier enunciado sobre aritmética elemental y $\mathbf{ZFC} + HC \vdash \varphi$, entonces $\mathbf{ZFC} \vdash \varphi$. φ podría ser $0 = 1$, por lo cual “HC es relativamente consistente con $\mathbf{ZFC}$” ($\mathbf{ZFC} + HC$ no puede ser inconsistente a menos que $\mathbf{ZFC}$ lo sea). De manera similar, Cohen demostró que “$\neg HC$ también es relativamente consistente con $\mathbf{ZFC}$”, con la misma interpretación formal. Decimos que HC es *independiente* de $\mathbf{ZFC}$ porque se ha demostrado que tanto HC como $\neg HC$ son relativamente consistentes con $\mathbf{ZFC}$.

Sin importar la postura filosófica que se adopte, uno debe tener en cuenta el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel. *Grosso Modo*, este dice que si Γ es una axiomatización formal de los fundamentos de las matemáticas, tal como $\mathbf{ZFC}$, y $\Gamma \vdash \mathrm{Con}(\Gamma)$ entonces Γ es inconsistente. Donde $\mathrm{Con}(\Gamma)$ es un enunciado formal en el lenguaje de Γ que afirma que Γ es consistente (esto es, no puede probar $\varphi \wedge \neg\varphi$ para ninguna oración φ). El Teorema supone que la pertenencia en Γ es decidible y que Γ es suficientemente fuerte para desarrollar el razonamiento finitista.

Lo explicado en el párrafo anterior nos advierte sobre la interpretación usual a la independencia de HC. Usualmente esta independencia se entiende informalmente como que, uno puede producir modelos de $\mathbf{ZFC} + HC$ y $\mathbf{ZFC} + \neg HC$. Pero ¿Dónde se han elaborado estos modelos? Si uno pudiera trabajar en $\mathbf{ZFC}$ y producir dichos modelos, entonces en particular, estaríamos produciendo modelos para $\mathbf{ZFC}$, así que $\mathbf{ZFC} \vdash \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC})$ y por lo tanto $\mathbf{ZFC}$ es inconsistente. Por lo cual tendremos mucho cuidado al enunciar resultados que involucren modelos de $\mathbf{ZFC}$.

I.2. Teoría de Conjuntos

En esta sección enunciamos resultados que, o bien se hará uso de las técnicas usadas en su demostración o porque en la literatura consultada la demostración no se encontraba del todo desarrollada. Entiéndase de lo anterior que esta sección incluye las definiciones necesarias para entender los resultados enunciados en ella, pero *no* contiene *todas* las definiciones o resultados referenciados en capítulos posteriores. Los resultados junto con sus demostraciones faltantes pueden ser encontrados en casi cualquier libro de Teoría de Conjuntos, como en [19].

I.2.1 Los Axiomas de ZFC

Como ya se mencionó, la postura adoptada es el formalismo y trabajaremos en el sistema formal (ver página 21) que tiene por axiomas matemáticos los que escribiremos a continuación, donde debe entenderse que toda variable libre es acotada universalmente:

Axioma 1. de Extensión

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$$

Axioma 2. de Fundación

$$\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))$$

Axioma 3. Esquema de Comprensión Para cada fórmula, φ, sin variable y libre,

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in v \wedge \varphi(x))$$

Axioma 4. de Apareamiento

$$\exists z(x \in z \wedge y \in z)$$

Axioma 5. de la Unión

$$\exists A \forall Y \forall x(x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A)$$

Axioma 6. Esquema del remplazo Para cada fórmula, φ, sin variable B libre,

$$\forall x \in A \exists! y \varphi(x, y) \rightarrow \exists B \forall x \in A \exists y \in B \varphi(x, y)$$

Para el resto de los axiomas se vuelve un poco más fácil escribirlos usando algunas nociones. A partir de los Axiomas 1,3,4,5, podemos definir $\subseteq$ (ser subconjunto), $\emptyset$ (el conjunto vacío), S (la función ordinal sucesor), $\cap$ (la función intersección), y $\mathrm{SING}(x)$ (afirmar que x es un conjunto singular, esto es, con un único elemento) como:

$$\begin{array}{lcl} x \subseteq y & \iff & \forall z(z \in x \rightarrow x \in y) \\ x = \emptyset & \iff & \forall z(\neg(z \in x)) \\ y = S(x) & \iff & \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \vee z = x) \\ w = x \cap y & \iff & \forall z(z \in w \leftrightarrow z \in x \wedge z \in y) \\ \mathrm{SING}(x) & \iff & \exists y \in x \forall z \in x(z = y) \end{array}$$

Axioma 7. del Infinito

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x))$$

Axioma 8. del Conjunto Potencia

$$\exists y \forall z(z \subseteq x \to z \in y)$$

Axioma 9. de Elección

$$\emptyset \notin F \wedge \forall x \in F \forall y \in F(x \neq y \to x \cap y = \emptyset) \to \exists C \forall x \in F(SING(C \cap x))$$

☼ $\mathbf{ZFC}$ = Axiomas 1-9. $\mathbf{ZF}$ = Axiomas 1-8.
☼ $\mathbf{ZC}$ y $\mathbf{Z}$ son $\mathbf{ZFC}$ Y $\mathbf{ZF}$, respectivamente, sin el Axioma 6 (Axioma del Remplazo).
☼ $\mathbf{Z}^-$, $\mathbf{ZF}^-$, $\mathbf{ZC}^-$, $\mathbf{ZFC}^-$ son $\mathbf{Z}$, $\mathbf{ZF}$, $\mathbf{ZC}$, $\mathbf{ZFC}$, respectivamente, sin el Axioma 2 (Axioma de Fundación). La mayoría de las matemáticas pueden ser desarrolladas dentro de ZC^-. El Axioma del Remplazo permite construir conjuntos de tamaño $\aleph_\omega$ y más grandes. También permite representar las relaciones de buen orden mediante ordinales de Neumann, lo cual es útil para la notación, aunque no sea estrictamente necesario.

El Axioma de Fundación dice que $\in$ es bien fundada (es decir, cada conjunto x no vacío tiene un elemento $y \in -$minimal. Esto excluye la existencia de conjuntos a, b tales que $a \in b \in a$. Este axioma no es requerido para el desarrollo estándar de las matemáticas (entiéndase Aritmética, Geometría, Análisis Matemático, Álgebra Moderna, Topología, Probabilidad, Variable Compleja, etc.) .

Las fórmulas lógicas con nociones definidas las veremos como una abreviación de fórmulas de $\in, =$ exclusivamente. En el caso de nociones predicativas definidas, como $\subseteq$, la fórmula sin abreviación se obtiene remplazando el símbolo por su definición (cambiando las variables usadas si fuese necesario), así, por ejemplo, el Axioma del Conjunto Potencia abrevia

$$\forall x \exists y \forall z((\forall v(v \in z \to v \in x)) \to z \in y).$$

En el caso de nociones funcionales, uno debe introducir cuantificadores adicionales; el Axioma del Infinito abrevia:

$$\exists x[\exists u(\forall v(v \notin u) \wedge u \in x) \wedge \forall y \in x \exists u(\forall z(z \in u \leftrightarrow z \in y \vee z = y) \wedge u \in x)].$$

En este caso, se ha remplazado "$S(y) \in x$" por "$\exists u(\psi(y, u) \wedge u \in x)$", donde ψ dice que u satisface la propiedad de ser igual a $S(y)$.

Se sigue la convención usual de que los hechos básicos sobre $=$ son tomados como hechos lógicos, y no son incluidos en nuestro listado de axiomas matemáticos. Así, por ejemplo, el converso del Axioma de Extensión,

$x = y \to \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$, es una verdad lógica, de hecho, la equivalencia es cierta para todas las relaciones binarias, no sólo $\in$ (Axioma 11 de nuestra lista de axiomas lógicos en 2.57).

Además, TCB ("Teoría de Conjuntos Básica")Denota los axiomas de Extensión, Fundación, Comprensión, Apareamiento y Unión, además de la disyunción: Axioma del Conjunto Potencia o Axioma del Remplazo. Análogamente TCB$^-$ denota los mismos axiomas menos el de Fundación.

I.2.2 Relaciones y Funciones

Como es usual, para hablar de funciones y relaciones recurriremos a la definición de par ordenado. También se sabe que cualquier definición de (x, y) que cumpla con

$$(x, y) = (v, w) \to x = v \wedge y = w$$

sirve como definición de par ordenado. En el desarrollo de la matemática no importa qué definición de par ordenado se use, sin embargo habrá veces que para nuestras demostraciones será útil referirnos a una definición en específico; se sigue aquí, como de costumbre, la definición de Kuratowski.

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Definición 1.1. *R es una* relación *(binaria) si R es un conjunto de pares ordenados, esto es*

$$\forall u \in R \exists x, y[u = \langle x, y \rangle].$$

xRy abrevia $\langle x, y \rangle \in R$ y $x \not R y$ abrevia $\langle x, y \rangle \notin R$

Definición 1.2.

- *R es* transitiva *sobre A sii $\forall x, y, z \in A[xRy \wedge yRz \to xRz]$.*
- *R es* reflexiva *sobre A sii $\forall x \in A[xRx]$.*
- *R es* irreflexiva *sobre A sii $\forall x \in A[x \not R x]$.*
- *R satisface* tricotomía *sobre A sii $\forall x, y \in A[xRy \vee yRx \vee x = y]$.*
- *R es un* pre-orden *sobre A si R es reflexiva y transitiva sobre A*
- *R* ordena parcialmente *A si R es un un pre-orden sobre A y satisface que $\neg\exists x, y \in A[xRy \wedge yRx \wedge x \neq y]$.*

- ↠ R *es un* orden parcial estricto sobre A *sii* R *es transitiva e irreflexiva sobre* A*.*

- ↠ R *es un* orden total estricto sobre A *sii* R *es transitiva e irreflexiva sobre* A *y satisface tricotomía sobre* A*.*

Definición 1.3. *Sea* R *una relación.* $y \in X$ *es* R-minimal *en* X *sii*

$$\neg \exists z (z \in X \wedge zRy)$$

y R-maximal *en* X *sii*

$$\neg \exists z (z \in X \wedge yRz) \ .$$

R *es* bien-fundada *sobre* A *sii para todo subconjunto* $X \subseteq A$ *no vacío, existe un* $y \in X$ *que sea* R*-minimal en* X*.*

Definición 1.4. R *es un* buen orden *sobre* A *sii* R *es un orden total estricto y bien fundada sobre* A*.*

Definición 1.5. B^A *(o* ${}^A B$*) es el conjunto de todas las funciones* f *tales que* $\mathrm{dom}(f) = A$ *y* $\mathrm{ran}(f) \subseteq B$*.*

Definición 1.6. $A^{<\alpha}$ *(o* ${}^{<\alpha}A$*) es el conjunto* $\bigcup_{\xi<\alpha} A^{\xi}$*.*

Si pensamos a A como un alfabeto, entonces podríamos ver a $A^{<\omega}$ como el conjunto de todas las "palabras", cadenas de longitud finita que pueden ser formadas con los elementos de A.

I.2.3 Ordinales y Aritmética Cardinal

En esta subsección listaremos algunas definiciones y propiedades necesarias para entender la idea general de la demostración de un resultado que será necesario para desarrollar la demostración del Teorema de Completitud 2.71. Informalmene, el resultado es el siguiente: Dado un conjunto A infinito bien ordenable (suponiendo el Axioma de Elección, cualquier conjunto infinito) la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de domino finito es la cardinalidad de A.

Definición 1.7. z *es un* conjunto transitivo *sii* $\forall y \in z \, [y \subseteq z]$*; de manera equivalente,* $\forall xy \, [x \in y \wedge y \in z \to x \in z]$*.*

Definición 1.8. z *es un* ordinal *(de von Neumann) sii* z *es un conjunto transitivo y* $\in$ *es un buen orden sobre* z*.*

La clase de todos los ordinales (que denotaremos por $\mathbf{Ord}$) es una clase propia, es decir, es una colección que no es conjunto, no pertenece a nuestro universo del discurso. Sin embargo trabajaremos con esta y muchas otras clases entendiendo que son abreviaciones de enunciados, fórmulas, significativas y útiles para nuestra teoría. Si escribimos $\alpha \in \mathbf{Ord}$ es una abreviación para decir que es verdad que $\Phi(\alpha)$, esto es, α satisface la propiedad Φ donde esta es una fórmula matemática que expresa lo enunciado en 1.8. Del mismo modo podríamos afirmar que $\in$ es transitiva sobre $\mathbf{Ord}$, aunque la definición de transitividad se dio para conjuntos, esto no sería más que la abreviación de la fórmula $\forall x, y, z[(\Phi(x) \wedge \Phi(y) \wedge \Phi(z)) \rightarrow ((x \in y \wedge y \in z) \rightarrow x \in z)]$. Se podrían verificar de manera similar todas las propiedades para ser un buen orden y, afirmaríamos entonces que $\in$ bien ordena a $\mathbf{Ord}$. Este tratamiento para con las clases se detallará más en la siguiente subsección y a lo largo del trabajo.

Definición 1.9.

1. *$X \preceq Y$ sii existe una función $f : X \to Y$ inyectiva.*
2. *$X \approx Y$ sii existe una función $f : X \to Y$ biyectiva.*

El siguiente teorema es un resultado básico para el desarrollo de la teoría de cardinales, la demostración de él hace uso de un resultado previo demostrado por Dedekind:

Lema 1.10. *Si $B \subseteq A$ y $f : A \to B$ inyectiva entonces $A \approx B$.*

La demostración del lema anterior Lema es bastante ingeniosa y es sumo recomendable leerla.

Teorema 1.11 (de Schröder-Bernstein). *$A \approx B$ sii $A \preceq B$ y $B \preceq A$.*

Definición 1.12. *Un* cardinal *(de von Neumann) es un ordinal α tal que $\xi \prec \alpha$ para todo $\xi < \alpha$. Donde $\xi \prec \alpha$ abrevia que $\xi \preceq \alpha$ pero no $\alpha \preceq \xi$.*

Esta última definición lo que nos dice es que un cardinal es un ordinal que no es biyectable con ninguno de los ordinales que lo anteceden.

Es conocido el teorema de Cantor que nos afirma que el conjunto potencia de A, al cual denotaremos por $\mathcal{P}(A)$, no es inyectable en A. De esto obtenemos que $\mathcal{P}(\omega)$ es no numerable, pero no nos afirma que exista un ordinal no numerable. El Axioma de Elección es equivalente que todo conjunto es bien ordenable; sin embargo Hartogs demostró, sin ayuda del axioma de elección que siempre podemos construir cardinales más grandes:

Teorema 1.13 (Hartogs). *Para cada conjunto A, existe un cardinal κ tal que $k \not\preceq A$.*

El resultado anterior justifica la siguiente

Definición 1.14. *Para α ordinal, α^+ denota el mínimo cardinal mayor que α.*

Definición 1.15. *Si A es bien-ordenable, entonces $|A|$ es el mínimo ordinal α tal que $A \approx \alpha$.*

Lema 1.16. *Supóngase que A, B son bien-ordenables. Entonces:*

- ♣ *$|A|$ es un cardinal.*
- ♣ *$A \preceq B$ sii $|A| \leq |B|$.*
- ♣ *$A \approx B$ sii $|A| = |B|$.*
- ♣ *$A \prec B$ sii $|A| < |B|$.*

Teorema 1.17 (AE). *Sea κ un cardinal infinito. Si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos con $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ y $|X| \leq \kappa$ para todo $X \in \mathcal{F}$, entonces $|\bigcup \mathcal{F}| \leq \kappa$.*

Teorema 1.18. *Si $\alpha \geq \omega$ entonces $|\alpha \times \alpha| = |\alpha|$. Por lo tanto, si $\kappa \geq \omega$ es un cardinal, entonces $|\kappa \times \kappa| = \kappa$.*

Definición 1.19. *Para cardinales k, λ: κ^λ es el cardinal $|{}^\lambda\kappa|$.*

Lema 1.20. $\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\theta : \theta < \lambda \wedge \theta = |\theta|\}$ *cuando κ y λ son cardinales con λ infinito y $\kappa \geq 2$.*

En el enunciado del lema "$\theta = |\theta|$" es sólo una manera de decir "θ es cardinal" en una fórmula.

Demostración. Sea $\rho = \sup\{\kappa^\theta : \theta < \lambda \wedge \theta = |\theta|$. Entonces $\kappa^{<\lambda} \geq \rho$ se sigue del hecho de que ${}^\theta\kappa \subseteq {}^{<\lambda}\kappa$ cuando $\theta < \lambda$. Por otra parte, tenemos que $\rho \geq \lambda$, ya que $k^\theta \geq 2^\theta \geq \theta^+$, entonces, para demostrar que $\kappa^{<\lambda} \leq \rho$, es suficiente demostrar que $|{}^\alpha\kappa| \leq \rho$ para toda $\alpha < \lambda$ (esto porque $\kappa^{<\lambda} = |{}^{<\lambda}\kappa| = |\bigcup_{\alpha<\lambda} {}^\alpha\kappa|$), dado que la unión de $\leq \rho$ conjuntos de tamaño $\leq \rho$ tiene tamaño $\leq \rho$ (ver Teorema 1.17). Pero si $\alpha < \lambda$ y $\theta = |\alpha|$, entonces

$$|{}^\alpha\kappa| = |{}^\theta\kappa| = \kappa^\theta \leq \rho\ .$$

La primera igualdad hace uso del hecho de que existe una biyección $f : \alpha \to \theta$, por lo cual se puede construir una biyección $F : {}^\alpha\kappa \to {}^\theta\kappa$ (No es difícil verificar que $F(g) = g \circ f^{-1}$ cumple lo pedido, siendo $F^{-1}(\gamma) = \gamma \circ f$); la segunda igualdad es por definición y la desigualdad es por hipótesis. $\square$

El resultado que perseguimos se deriva del lema anterior:

Corolario 1.21. *$\kappa^{<\omega} = \kappa$ cuando κ es un cardinal infinito.*

Demostración. Nos bastará ver que $\kappa^n = \kappa$ para todo $0 < n < \omega$. Para esto veremos que ${}^n\kappa \approx \kappa$, la demostración de este hecho será por inducción:

Para el pie de inducción, cuando $n = 1$ basta ver que la función definida por

$$\alpha \to \{(0, \alpha)\} \ ,$$

es biyectiva.

En nuestro paso inductivo supondremos válido para n y demostraremos para $S(n)$:
Por un lado, trivialmente podemos ver que $\kappa \preceq {}^{n\cup\{n\}}\kappa$ mediante

$$\alpha \to f = \alpha$$

i.e. identificamos cada α en κ con la función $f \in {}^{n\cup\{n\}}\kappa$ constante igual a α. Por otro lado tenemos que ${}^{n\cup\{n\}}\kappa \preceq {}^n\kappa \times \kappa$; para esto, se puede verificar que la función

$$f \to (f{\restriction}n, f(n))$$

es inyectiva.

Con todo lo anterior más nuestra hipótesis inductiva obtenemos que

$$\kappa \preceq {}^{n\cup\{n\}}\kappa \preceq {}^n\kappa \times \kappa \preceq \kappa \times \kappa$$

Aplicando el Teorema 1.18 se deduce que

$$\kappa \leq \kappa^{S(n)} \leq |\kappa \times \kappa| = \kappa$$

lo que concluye la prueba. □

I.2.4 Clases de Conjuntos, Recursión y los Conjuntos Bien Fundados

En los enunciados 1.22 a 1.39 se hace referencia a clases, es decir a colecciones de conjuntos que cumplen alguna propiedad, esta noción podría representarse por $\{x : \varphi(x)\}$. Sin embargo estos entes no tienen por que ser conjuntos y por lo tanto pueden no formar parte de nuestro universo, de este modo, dada una clase propia $\mathbf{A}$, determinada por la propiedad $\alpha(x)$, debe entenderse que $x \in \mathbf{A}$ es una abreviación de $\forall x[\alpha(x)]$; se tendrá especial cuidado en este aspecto cuando se trabaje con clases (no necesariamente propias), y éstas se escribirán en **negritas** cuando no sea claro del contexto que podrían ser clases propias.

Definición 1.22 ($\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$)**.** *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{R}$ *clases, diremos que* $\mathbf{R}$ *es bien fundada sii*

$$\forall X \subseteq \mathbf{A}\, [X \neq \emptyset \to \exists y \in X(\neg \exists z \in X(z\mathbf{R}y))]\, .$$

Definición 1.23 ($\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$)**.** *Sea* $\mathbf{R}$ *una relación sobre una clase* $\mathbf{A}$*. Si* $y \in \mathbf{A}$*, sea* $y\!\downarrow = \mathrm{pred}_{\mathbf{R}}(y) = \mathrm{pred}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(y) = \{x \in \mathbf{A} : x\mathbf{R}y\}$*. Entonces* $\mathbf{R}$ *es* casi-conjunto *sobre* $\mathbf{A}$ *sii* $y\!\downarrow$ *es un conjunto para todo* $y \in \mathbf{A}$*.*

Obsérvese que se ha detallado en que sistema axiomático se pueden justificar las definiciones, la importancia de este hecho se puede apreciar en la discusión del Lema 1.28.

Definición 1.24. *La relación* $\mathbf{R}$ *es* extensional *sobre* A *sii* $(A, \mathbf{R})$ *satisface el Axioma de Extensión; equivalentemente,* $\forall x, y \in A[x\!\downarrow = y\!\downarrow \to x = y]$.

Lema 1.25. *Sea* $\mathbf{R}$ *una relación sobre una clase* $\mathbf{A}$ *y supongamos que tenemos definida una función* $\Phi : \mathbf{A} \to \mathbf{Ord}$ *tal que* $x\mathbf{R}y \to \Phi(x) < \Phi(y)$ *para cada* $x, y \in \mathbf{A}$*. Entonces* $\mathbf{R}$ *es bien fundada en* $\mathbf{A}$*.*

Teorema 1.26 (Inducción Transfinita; $\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$)**.** *Si* $\mathbf{R}$ *es bien fundada y casi-conjunto sobre* $\mathbf{A}$*, entonces cada subclase no vacía* $\mathbf{X}$ *de* $\mathbf{A}$ *tiene un elemento* $\mathbf{R}$*-minimal.*

Definición 1.27. *Para una relación* $\mathbf{R}$ *y una clase* $\mathbf{A}$*:*

1. s *es un* camino *(o,* $\mathbf{R}$*-camino) de* n pasos *en* $\mathbf{A}$ *sii* $n \in \omega$*,* $n \geq 1$*,* s *es una función,* $\mathrm{dom}(s) = n + 1$*,* $\mathrm{ran}(s) \subseteq \mathbf{A}$*, y* $\forall j < n[s(j)\mathbf{R}s(j+1)]$.

2. *La función* s *de (1) es llamada un camino* desde $s(0)$ a $s(n)$.

3. *La* clausura transitiva *de* $\mathbf{R}$ *sobre* $\mathbf{A}$ *es la relación* $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^*_{\mathbf{A}}$ *sobre* $\mathbf{A}$ *definida por* $x\mathbf{R}^*y$ *sii existe un camino en* $\mathbf{A}$ *desde* x *a* y*.*

Lema 1.28. *Para una relación* $\mathbf{R}$ *y una clase* $\mathbf{A}$*:*

1. $\mathbf{R}^*$ *es transitiva en* $\mathbf{A}$*.*

2. *Si* $\mathbf{R}$ *es casi-conjunto sobre* $\mathbf{A}$*, entonces* $\mathbf{R}^*$ *es casi-conjunto sobre* $\mathbf{A}$*.*

En teoría de conjuntos, $\mathbf{R}^*$ esta relacionada con la clausura transitiva de un conjunto. Considerando la relación $\in$ sobre la clase V, se tiene que el conjunto $\mathrm{pred}_{V,\in^*}(a)$ aparece repetidas veces en el desarrollo de la teoría, por lo que lo denotaremos con $\mathrm{trcl}(a)$. Suponiendo el Axioma de Fundación, cada conjunto a está únicamente determinado por el isomorfismo de $\in$ sobre $\mathrm{trcl}(\{\mathrm{a}\})$.

Informalmente, $\operatorname{trcl}(a)$ contiene todos los conjuntos usados para construir a. El axioma de Fundación dice, informalmente, que cada conjunto puede ser construido a partir de $\emptyset$. Usualmente, en los libros de texto de teoría de conjuntos se define $\operatorname{trcl}(y) = \bigcup\{\bigcup^n y : n \in \omega\}$, donde $\bigcup^n y$ está definido recursivamente por $\bigcup^0 y = y$ y $\bigcup^{n+1} y = \bigcup \bigcup^n y$. Se podrá ver que esto es equivalente a la definición dada anteriormente, una vez que han sido justificadas las definiciones recursivas.

Teorema 1.29 (Recursión Transfinita sobre Relaciones Bien-Fundadas)**.** *Supóngase que* $\mathbf{R}$ *es bien-fundada y casi conjunto sobre* $\mathbf{A}$ *y* $\forall x, s \exists! y \varphi(x, s, y)$. *Defínase* $G(x, s)$ *como el único* y *tal que* $\varphi(x, s, y)$. *Entonces podemos escribir una fórmula* ψ *para lo cual lo siguiente es demostrable:*

1. $\forall x \exists! y \psi(x, y)$, *así que* ψ *define una función* F, *donde* $F(x)$ *es el único* y *tal que* $\psi(x, y)$.
2. $\forall a \in A[F(a) = G(a, F\restriction(a\downarrow))]$.

Definición 1.30. *Supóngase que* $\mathbf{R}$ *es bien-fundada y casi-conjunto sobre* $\mathbf{A}$. *Defínase, recursivamente, para* $y \in \mathbf{A}$, $\operatorname{rank}(y) = \operatorname{rank}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(y) = \bigcup\{S(\operatorname{rank}(x)) : x \in y\downarrow\}$. *Sea* $\operatorname{rank}(y) = \emptyset$ *para toda* $y \notin \mathbf{A}$.

Justificación. A partir del Teorema 1.29. Sea $G(x, s) = \bigcup\{S(t) : t \in \operatorname{ran}(s))\}$; Entonces $F(a) = G(a, F\restriction(a\downarrow))$ se traduce a $F(a) = \bigcup\{S(F(c)) : c \in A \wedge c\mathbf{R}a\}$.

$\square$

Nótese que $S(u)$ está denotando la "función ordinal sucesor", $u \cup \{u\}$, que está definida para todo conjunto. Sin embargo, rank siempre será un ordinal; además para un conjunto de ordinales, es usual escribir $\sup$ en lugar de $\bigcup$ y $\alpha + 1$ por $S(\alpha)$:

Lema 1.31. *Si* $\mathbf{R}$ *es bien-fundada y casi-conjunto sobre* $\mathbf{A}$, *entonces* $\operatorname{rank}(y)$ *es un ordinal para toda* $y \in \mathbf{A}$, *por lo que* $\operatorname{rank}(y) = \sup\{\operatorname{rank}(x) + 1 : x \in \mathbf{A} \wedge x\mathbf{R}y\}$. *También se obtiene que* $x\mathbf{R}y \to \operatorname{rank}(x) < \operatorname{rank}(y)$ *para toda* $x, y \in \mathbf{A}$.

Definición 1.32. *El conjunto* b *es* bien-fundado *sii* $\in$ *es bien-fundada sobre* $\operatorname{trcl}(b)$, *en cuyo caso* $\operatorname{rank}(b)$ *denota* $\operatorname{rank}_{\{b\}\cup\operatorname{trcl}(b),\in}(b)$. $\mathbf{WF}$ *denota la clase de todos los conjuntos bien-fundados.*

Lema 1.33. *El Axioma de Fundación es equivalente a* $V = \mathbf{WF}$.

El lema anterior nos afirma que, suponiendo el Axioma de Fundación, $\mathrm{rank}_{V,\in}$ está definida para todo conjunto.

Definición 1.34. $R(\alpha) = \{x \in \mathbf{WF} : \mathrm{rank}(x) < \alpha\}$

Suponiendo el axioma de fundación podríamos afirmar que $\forall x \exists \alpha[\alpha \in \mathbf{Ord} \wedge x \in R(\alpha)]$. El siguiente Lema nos permitirá calcular $R(\alpha)$.

Lema 1.35. *Suponiendo el Axioma del Conjunto Potencia. Entonces $R(\delta)$ es un conjunto para cada $\delta \in \mathbf{Ord}$, y :*

1. $R(0) = \emptyset$.
2. $R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$.
3. $R(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} R(\alpha)$ *para ordinales límites* γ.

Es muy común en varios textos que (1), (2) y (3) del Lema 1.35 se tomen como la definición de $R(\alpha)$, y después se define $\mathbf{WF}$ como la clase $\bigcup\{R(\alpha) : \alpha \in \mathbf{Ord}\}$; después $\mathbf{rank}(x)$ es definido como el α tal que $x \in R(\alpha + 1)R(\alpha)$. Esta presentación simplifica la definición de todo estos conceptos, y sólo requiere recursión sobre $\mathbf{Ord}$ en lugar de la recursión sobre relaciones bien fundadas. Sin embargo, cuando se define así se puede creer es necesario el Axioma del Conjunto Potencia para la definición de rank, veremos también que con la presentación que se ha hecho será mucho más fácil demostrar que rank es una función definida y absoluta para modelos transitivos de $\mathbf{ZF} - \mathbf{C}$ (Corolario 2.112)

Definición 1.36. *Supóngase que $\mathbf{R}$ es bien fundada y casi-conjunto sobre $\mathbf{A}$. Definimos, recursivamente, para $y \in \mathbf{A}$,* $\mathrm{mos}(y) = \mathrm{mos}_{\mathbf{A},\mathbf{R}}(y) = \{\mathrm{mos}(x) : x \in \mathrm{pred}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, y)$. *Esta es llamada la* función Mostowski de colapso.

Definición 1.37. *La relación R es* extensional *sobre A sii (A, R) satisface el Axioma de Extensión, es decir, $\forall x, y \in A[x\restriction = y\restriction \rightarrow x = y]$.*

Teorema 1.38 (del Colapso de Mostowski; $\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$)**.** *Sea $\mathbf{R}$ una relación bien fundada, casi-conjunto y extensional sobre $\mathbf{A}$, entonces existen una clase transitiva $\mathbf{M}$ y un mapeo biyectivo $\mathbf{G} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{M}$ tal que $\mathbf{G}$ es un isomorfismo entre $(\mathbf{A}, \mathbf{R})$ y $(\mathbf{M}, \in)$. Además, $\mathbf{M}$ y $\mathbf{G}$ son únicos.*

Lema 1.39. *Suponga que $\in$ es bien fundada y extensional sobre $\mathbf{A}$. Sea $T \subseteq \mathbf{A}$ transitivo. Entonces* $\mathrm{mos}_{\mathbf{A},\in}(y) = y$ *para cada $y \in T$.*

I.2.5 Resultados Adicionales

Casi siempre se trabajará en **ZFC**, lo que implica la suposición del Axioma de Elección. Una de las equivalencias de este axioma que será usada es la conocida como el Lema de Tukey, a continuación lo enunciamos:

Definición 1.40. *Si* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$*, entonces* $X \in \mathcal{F}$ *es* maximal *en* $\mathcal{F}$ *sii es maximal respecto a la relación* $\subsetneq$ *(contención propia); esto es,* X *no es subconjunto propio de ningún elemento en* $\mathcal{F}$.

Definición 1.41. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ *es de* característica finita *sii para todo* $X \subseteq A$ *se cumple que:* $X \in \mathcal{F}$ *sii todo subconjunto finito de* X *pertenece a* $\mathcal{F}$.

Definición 1.42. *El* Lema de Tukey *es el enunciado: Si* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ *es de característica finita y* $X \in \mathcal{F}$*, entonces existe un elemento* $Y \in \mathcal{F}$ *maximal, tal que* $X \subseteq Y$

Se ha escrito el *Lema* de Tukey como definición por su equivalencia al Axioma de Elección.

PARTE I

II. TEORÍA DE MODELOS

II.1. Introducción

Se mencionó ya en 1.1 que, la postura adoptada es el formalismo, pero eso requiere la aclaración de algunos detalles. A continuación damos la descripción que Kunen da en el capítulo de Filosofía de las matemáticas en [18].

Primero. Toda la lógica formal es desarrollada *dos veces*.

Uno debe empezar trabajando en la metateoría. Como se ha dicho y es usual, la metateoría son todos los razonamientos obtenidos estrictamente por métodos finitistas, y por lo tanto es aceptada sin objeción (es posible construir en el mundo real un modelo para toda afirmación hecha en la metateoría). En la metateoría, se desarrolla la lógica formal, incluida la noción de prueba formal. Se deben demostrar algunos teoremas (finitistas) sobre nuestra noción de demostración. Esto incluye la Sonoridad de nuestro método de demostración (2.61), que, informalmente, nos dice que si $\Sigma \vdash \varphi$ entonces φ es verdad para todos los modelos *finitos* de Σ.

Con esta lógica formal en la metateoría, se puede definir la estructura de sistema formal como una terna que se compone de:

$\rightsquigarrow$ Un *Lenguaje*. Esto es una colección de símbolos y reglas *gramaticales* que nos dicen cuando una cadena, finita, de símbolos es un enunciado válido, al que se le llamará expresión bien formada.

$\rightsquigarrow$ Una lista de *Axiomas*. Los Axiomas son expresiones bien formadas. Los Axiomas se dividen en dos tipos, lógicos y matemáticos. Los axiomas lógicos son los que corresponden a una parte de la lógica formal mencionada en el párrafo anterior. Los axiomas matemáticos son expresiones bien formadas que se eligen por ser de algún interés matemático (ver la sección de *Formalismo* en la página 4).

$\rightsquigarrow$ Una colección de *Reglas de Inferencias*. Son reglas que producen nuevas expresiones bien formadas a partir, ya sea de los axiomas del sistema, o de expresiones bien formadas obtenidas previamente por estas mismas Reglas de Inferencias (estas nuevas expresiones bien formadas obtenidas a partir de las reglas de inferencia son los *teoremas* del sistema formal).

A los dos últimos elementos se les llama el *Sistema Deductivo* del Sistema Formal.

Así, se puede desarrollar $\mathbf{ZFC}$ (como sistema formal, donde los axiomas matemáticos serían nuestra lista de la página 10), y ya *dentro* de $\mathbf{ZFC}$, se puede desarrollar toda la matemática estandard, incluida la teoría de modelos, que en gran parte es no finitista. Para desarrollar la teoría de modelos, se necesita desarrollar nuevamente la lógica formal. Por supuesto que se usan los mismos razonamientos, excepto que ahora nuestros léxicos $\mathcal{L}$ y estructuras para $\mathcal{L}$ pueden tener una cardinalidad arbitraria; y ahora el razonamiento es formalizado dentro de $\mathbf{ZFC}$.

Por ejemplo, el enunciado "Axiomas 1,2$\nvdash$Axioma 4" esto puede ser visto tanto como un enunciado finitista en la metateoría, que se puede verificar en un modelo finito, o como un teorema formalizado dentro de $\mathbf{ZFC}$. Sin embargo, el enunciado "$\mathbf{ZFC} - \mathbf{P}\nvdash$Axioma 8(Axioma del Conjunto Potencia)", requiere de un modelo infinito, por lo cual sólo puede ser visto como un teorema formal de $\mathbf{ZFC}$. Pero, si Σ es el conjunto de axiomas $\mathbf{ZFC} - \mathbf{P}$ más la negación del Axioma 8, entonces la implicación "$\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\Sigma)$" puede ser visto como una afirmación en la metateoría; se podría dar el siguiente argumento finitista: Si Σ es inconsistente, podemos realizar una prueba formal de $\varphi \wedge \neg\varphi$ a partir de Σ, entonces podemos usar esto para construir una incosistencia en $\mathbf{ZFC}$, demostrando, en $\mathbf{ZFC}$, que el enunciado $H(\aleph_1) \models \varphi$ es tanto cierto como falso.

El tener que "hacer dos veces" las cosas no está restringido a la lógica formal, y aplica también a otros conceptos finitistas, aunque lo más usual es que cause problemas con la lógica formal.

En la mayoría de los casos, en este y el siguiente capítulo ignoraremos estos detalles finos, pero la distinción entre razonamientos en la metateoría y razonamientos en la teoría formal puede volverse muy importantes al discutir cuestiones sobre consistencia. Por ejemplo, el enunciado $\mathbf{ZFC}\nvdash\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC})$ es una afirmación en la metateoría sobre demostrabilidad , pero para enunciarlo es necesario que se tenga la lógica formal dentro de $\mathbf{ZFC}$ para escribir el enunciado $\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC})$ como una oración en el lenguaje de la teoría de conjuntos.

Segundo. El formalismo tiene por intención presentar las matemáticas como teoremas de $\mathbf{ZFC}$. Sería más honesto decir que se ha demostrado que las matemáticas *en principio* pueden ser vistas como teoremas formales de $\mathbf{ZFC}$.

Aunque se hará una presentación de qué es una prueba formal, no se escribirán muchas. De hecho, se hará énfasis en que formalizar demostraciones no triviales podría no ser posible con nuestra teoría de demostración. Para todas estas pruebas que no se explicitan se está apelando a la

Tesis 2.1. *Todo hecho finitista puede ser formalizado y demostrado en* **ZFC**.

Esta tesis es similar a la Tesis de Church-Turing, que dice que para cada función que es computable en el sentido informal puede demostrarse que satisface cualquier definición matemática de “computable”. Ninguna de las dos tesis es un enunciado matemático, y no puede darse por lo tanto una demostración matemática formal, pero nadie duda de su veracidad en los casos particulares en los que se aplica. Existen implementaciones computacionales que han logrado formalizar gran parte del cuerpo de las matemáticas, pero además de ser impráctico su uso por humanos, no se está en lo absoluto cerca de exhibir todas las matemáticas conocidas como demostraciones formales para algún sistema axiomático formal.

II.2. Sintaxis para Lógicas de Primer Orden

Definición 2.2. *Un léxico para la notación polaca es un par* (W, α) *donde* W *es un conjunto de símbolos y* $\alpha : W \to \omega$. *Sea* $W_n = \{s \in W : \alpha(s) = n\}$. *Decimos que los símbolos en* W_n *tienen aridad* n. $W^{<\omega}$ *denota el conjunto de todas las sucesiones finitas de símbolos en* W. *Las (bien-formadas) expresiones de* (W, α) *son todas las sucesiones construidas por la siguiente regla:*

Si $s \in W_n$ *y* τ_i *es un expresión para cada* $i < n$, *entonces* $s\tau_0 \cdots \tau_{n-1}$ *es una expresión.*

Observación: La definición permite que cada elemento de W_0 forme una expresión.
La cadena vacía no es una expresión bien-formada por nuestra definición.
Se está haciendo un abuso de notación: Como se mencionó en la introducción, la teoría de modelos se desarrolla *dos* veces. La primera, en la metateoría, donde la definición sería parecida a la dada en 2.2 pero al ser cadenas finitas en un léxico finito no habría referencia ni a ω ni a $W^{<\omega}$, y estaría justificada por la tesis de Church-Turing. La segunda, ya en la teoría de conjuntos, se construiría una función característica de ser expresión bien formada, de manera recursiva, que afirmaría la existencia de los τ_i y se haría sobre “la longitud” de la cadena (la noción de longitud se formalizará a continuación)

Diremos además que $a \in W$ tiene una *aparición* en $\sigma \in W^{<\omega}$ si $a = \sigma(x)$ para algún $x \in dom(\sigma)$

Notación. Si $\tau \in W^{<\omega}$, entonces $|\tau| = \mathrm{lg}(\tau) = \mathrm{dom}(\tau)$ denota la longitud de τ. Si $j \leq |\tau|$ entonces $\tau\lceil j$ es la cadena de los primeros j elementos de

τ .

Por segmento inicial de una expresión σ, se entenderá una sucesión que coincide con los *primeros* términos de σ. Formalmente γ es un segmento inicial de σ si $\lg(\gamma) \leq \lg(\sigma)$ y $\gamma(i) = \sigma(i)$ para todo $i \in \gamma$. γ será un segmento inicial propio si $\lg(\gamma) < \lg(\sigma)$.

Lema 2.3 (unicidad de lectura). *Sea σ una expresión del léxico (W, α). Entonces:*

1. *Ningún segmento inicial propio de σ es una expresión*
2. *Si σ tiene un primer símbolo s de aridad n, entonces existen únicas expresiones $\tau_0, \ldots, \tau_{n-1}$ tales que σ es $s\tau_0 \cdots \tau_{n-1}$*

Demostración. Se demostrará (1) y (2) simultáneamente por inducción sobre $|\sigma|$. Para el pie de inducción ($|\sigma| = 1$) tenemos que (1) se cumple por la definición de expresión, para (2) nótese que obligatoriamente la aridad de s tiene que ser 0 y por lo tanto se cumple al no existir (existen 0) expresiones τ que la procedan. Supongamos ahora que el lema es cierto para todas las expresiones de longitud menor a $|\sigma|$. Como ya se subrayó, la existencia de la parte (2) se sigue de la definición de "expresión". Ahora, sea σ' cualquier expresión que sea segmento inicial (posiblemente no propio) de σ. Dado que la cadena vacía no es una expresión, se debe cumplir que $\sigma' = s\tau'_0 \cdots \tau'_{n-1}$, donde todas las τ'_i son expresiones. Entonces τ_0 debe ser la misma que τ'_0, de otro modo una tendría que ser segmento inicial de la otra, lo que contradiría la parte (1) de la hipótesis inductiva. Esto nos da el pie de inducción para demostrar que $\tau_i = \tau'_i$ inductivamente sobre i: Si $\tau_j = \tau'_j$ para toda $j < i$, entonces τ_i y τ'_i empiezan en la misma posición en σ, así que $\tau_i = \tau'_i$ porque de otro modo una sería segmento inicial de la otra. Con esto se ha probado que $\sigma' = \sigma$ lo que demuestra (1) y (2).

□

Se necesitarán también algunos hechos acerca de subexpresiones:

Definición 2.4. *Si σ es una expresión del léxico (W, α), entonces una subexpresión de σ es una sucesión consecutiva de σ que también es una expresión.*

Por ejemplo, si σ es $++xy+zu$ tenemos que: $+xy$ es una subexpresión, así como la expresión de un único símbolo z. $+xu$ no es subexpresión; es una expresión construida con símbolos de σ, pero estos no son consecutivos. $+xy+$ tampoco es subexpresión; en este caso los símbolos son consecutivos pero no forman una buena expresión. Nótese que si nos fijamos en el segundo $+$, $+xy$ es la única subexpresión que empieza con ése $+$. Esto se demuestra y generaliza con el siguiente

Lema 2.5. *Si σ es una expresión del léxico (W, α), entonces cada aparición de un símbolo en σ empieza una única subexpresión.*

Demostración. La unicidad se obtiene del lema 2.3. La existencia se obtiene fácilmente por inducción. Para $|\sigma| = 1$ se observa que el único símbolo s que puede aparecer es σ completa la cual por hipótesis es buena expresión. Para $|\sigma| = n$ se tiene que si s tiene aparición en σ tiene dos alternativas ser símbolo inicial y trivialmente inicia la buena expresión σ; si s no es el símbolo inicial, entonces por ser σ buena expresión tenemos que $\sigma = b\tau_0\tau_1 \cdots \tau_k$ y s tiene aparición en algún τ_i y el resultado se verifica por hipótesis inductiva sobre $|\tau_i| < |\sigma|$. □

De este lema se obtiene fácilmente que toda expresión termina con un símbolo de aridad 0.

Definición 2.6. *Si σ es una expresión del léxico (W, α), el* alcance *de una aparición de un símbolo en σ es la única subexpresión que él empieza.*

Si σ es $+ + xy + zu$ es claro por lema 2.3 que el alcance del primer $+$ es toda σ, el alcance del segundo $+$ es $+xy$ y del tercer $+$ es $+zu$. Nótese que formalmente σ es una función con dominio algún ordinal finito.

Definición 2.7. *Los símbolos lógicos son los 8 siguientes:*

$$\wedge \vee \neg \rightarrow \leftrightarrow \forall \exists =$$

junto con un conjunto infinito numerable VAR de variables. Usualmente se usarán u, v, x, y, z, quizás con subíndices, para denotar las variables. Al conjunto que contiene los 8 primeros símbolos unión VAR lo denotaremos por LOG

Definición 2.8. *Un* léxico *para una lógica predicativa consiste de un conjunto $\mathcal{L}$ (de símbolos no-lógicos), particionado en conjuntos ajenos como $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ (de símbolos* funcionales *y* predicativos *respectivamente). $\mathcal{F}$ y $\mathcal{P}$ están a su vez particionados por aridad: $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$, y $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_n$. Los símbolos en $\mathcal{F}_n$ son llamados símbolos funcionales n-arios. Los símbolos en $\mathcal{P}_n$ son llamados símbolos predicativos n-arios. Los símbolos en $\mathcal{F}_0$ son llamados* símbolos constantes. *Los símbolos en $\mathcal{P}_0$ son llamados* letras proposicionales

Obsérvese que a diferencia de la Definición 2.2, no se mencionó a la función α, pero los símbolos se dieron en una partición, es fácil ver que ambas presentaciones son equivalentes.

Definición 2.9. *Dado un léxico $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n \cup \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_n$ como en la definición 2.8:*

1. *Los* términos *de $\mathcal{L}$ son expresiones bien-formadas en el léxico $\mathcal{F} \cup VAR$, como se definió en 2.2, donde los símbolos en VAR tiene aridad* 0 *y los símbolos en $\mathcal{F}_n$ tienen aridad n.*

2. *Las* fórmulas atómicas *de $\mathcal{L}$ son sucesiones de símbolos de la forma $p\tau_1 \cdots \tau_n$, donde $n \geq 0$, $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son términos de $\mathcal{L}$ y, o $p \in \mathcal{P}_n$, o p es el símbolo $=$ y en éste caso $n = 2$.*

3. *Las* fórmulas *de $\mathcal{L}$ son aquellas sucesiones de símbolos construidas bajo las siguientes reglas:*

   a. *Todas las fórmulas atómicas son fórmulas.*
   b. *φ es una fórmula y $x \in VAR$, entonces $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$ son fórmulas.*
   c. *Si φ es fórmula entonces $\neg\varphi$ lo es.*
   d. *Si φ y ψ son fórmulas, entonces también lo son $\vee\varphi\psi$, $\wedge\varphi\psi$, $\rightarrow \varphi\psi$, y $\leftrightarrow \varphi\psi$*

Obsérvese que es necesario un caso especial para "$=$" en (2) porque "$=$" es un símbolo lógico, y no un miembro de $\mathcal{P}_n$. Además todas las fórmulas y términos son expresiones bien-formadas del léxico polaco $\mathcal{F} \cup \mathcal{P} \cup VAR \cup \{\vee, \neg, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =\}$, donde $\neg$ tiene aridad 1 y los miembros de $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =\}$ tienen aridad 2. Aún así, muchas expresiones bien-formadas en este léxico no son ni fórmulas ni términos. Esto significa que nuestro Lema 2.3 de unicidad de lectura nos dice *más* de lo que necesitamos, no menos. Por ejemplo, sea χ $\vee\varphi\psi$, con φ y ψ fórmulas; cuando se defina la asignación de verdad se verá que para el caso de χ, dependerá del valor de verdad asignado a φ y ψ, por esto, será muy importante para nosotros saber que χ no puede ser reescrito como $\vee\varphi'\psi'$. Pero nuestro Lema 2.3 nos dice que esto será imposible aún cuando se permita que φ' y ψ' sean expresiones bien-formadas arbitrarias. La definición del *alcance* en expresiones polacas nos permitirá definir a las variables libres y acotadas. Pero primero veamos el siguiente resultado:

Lema 2.10. *En una fórmula φ, el alcance de cualquier aparición en φ de cualquier símbolo en $\mathcal{P} \cup \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =\}$ es una fórmula, el alcance de cualquier símbolo en $\mathcal{F} \cup VAR$ es un término.*

Demostración. Por inducción sobre $|\varphi|$.
Para el caso cuando es s es un símbolo en $\mathcal{P} \cup \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =\}$.
Si $|\varphi| = 1$ (No puede ser 0 por definición de una fórmula). Tenemos que, forzosamente,$s \in \mathcal{P}_0$ y aún más, s es todo φ la cual es fórmula, con lo cual se cumple el pie de inducción.
Para el paso inductivo suponemos válido para $|\varphi| = n < m$.
Si φ es de la forma (a), fórmula atómica, de la definición 2.9 tenemos que: Si s es el símbolo inicial, el lema de unicidad2.3 nos asegura que el alcance de s es toda φ la cual es fórmula. Pero s no puede tener aparición en τ_i para ninguna i, ya que por construcción, los términos no contienen símbolos del tipo de s.
Si φ es de la forma (b), (c), (d). Si s fuera el símbolo inicial, el argumento es exactamente el mismo que en el caso (a). Si φ fuera de la forma $\exists x\psi$, s no puede ser x,y al no ser el símbolo inicial, tiene aparición en ψ, por hipótesis inductiva aplicada a ψ el resultado se cumple. De manera análoga se demuestra para $\forall x\psi$, (c), (d)
Para el caso en el que $s \in \mathcal{F} \cup VAR$ obsérvese primero que el resultado se cumple para términos, es decir, que si s tiene aparición en un término, por el lema 2.5 su alcance es un término. Hecho esto, la demostración se sigue, casi igual, cuando s tiene aparición en una fórmula φ. □

Observación: Éste alcance es llamado usualmente una *subfórmula* o *subtérmino* de φ. A partir de aquí, realizaremos, durante gran parte del texto, pruebas inductivas sobre fórmulas, para esto modificaremos un poco nuestra técnica. Recordemos que la capacidad de realizar pruebas inductivas en ω, en algún ordinal α o en la clase de todos los ordinales recae en la propiedad de que en todas estas clases (propias o no) está definida una relación bien fundada. En ese tenor definiremos la siguiente relación: $S = \{(\psi, \varphi) \in \mathscr{F} \times \mathscr{F} : \psi \text{ es subfórmula de } \varphi\}$ donde $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{L}^{<\omega}$ es el conjunto de todas las fórmulas del léxico $\mathcal{L}$. Obsérvese que por axioma de comprensión esta relación está bien definida, además de que es conjunto y por lo tanto $\{\psi \in \mathscr{F} : \psi S \varphi\}$ también lo es para toda $\varphi \in \mathscr{F}$. Además si consideramos la función $\lg : \mathscr{F} \rightarrow \mathbf{Ord}$ que asocia a cada fórmula su longitud (su dominio) tenemos las hipótesis necesarias para el lema 1.25 y por lo tanto afirmamos que S es una relación bien fundada y así, por el teorema 1.26 obtenemos el principio de inducción para la relación S. Obsérvese que en esta relación, las fórmulas S-minimales son las fórmulas atómicas y por lo tanto, estas serán nuestro pie de inducción.

Definición 2.11. *Una aparición de una variable y en una fórmula φ es* acotada *si y sólo si yace dentro del alcance de un $\forall$ o $\exists$ actuando en (i.e., seguido por)*

y. Una aparición es libre *si y sólo si no es acotada. La fórmula φ es una* oración *(o* sentencia*) si y sólo si no tiene variables libres.*

Definición 2.12. *Si φ es una fórmula, una* cerradura universal *(o* clausura universal *de φ es cualquier* oración *de la forma $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \varphi$, donde $n \geq 0$.*

Obsérvese que se está pidiendo que la clausura universal sea una oración; así que si φ es ya una oración, ella es una clausura univeral de si misma. Tampoco se está especificando el orden en las variables; esto no será de importancia, dado que será fácil verificar (cuando se hayan definido las semánticas) que todas las clausuras universales son lógicamente equivalentes (informalmente y por ahora, entiéndase que tendrán el mismo valor de verdad bajo cualquier interpretación). Hasta aquí es necesario subrayar un hecho de la sintaxis que hemos definido, ésta permite que una misma variable tenga aparición tanto libre como acotada en una misma fórmula, podría ser que alguien encontrara esto confuso. Por ejemplo, con $\mathcal{L} = \{\in\}$, sea φ la fórmula $\wedge \exists y \in yx \in xy$ (la forma polaca de $\exists y(y \in x) \wedge x \in y$), la cual dice que "$x$ es no vacío y $x \in y$". Las primeras dos apariciones de y están en la subfórmula $\exists y \in yx$ y por lo tanto son acotadas, la tercera aparición de y es libre. φ es lógicamente equivalente a la fórmula $\varphi' : \wedge \exists z \in zx \in xy$, obtenida al cambiar de nombre a la variable acotada (o muda) y por z. El mismo problema aparece en cálculo; por ejemplo si definimos

$$f(x,y) = \sin(xy) + \int_1^2 \cos(xy)dy = \sin(xy) + \int_1^2 \cos(xt)dt$$

Ambas formas son correctas, pero la mayoría preferiría la segunda forma, usando t como la variable muda (o acotada) de integración. Después se verá que, con la semántica que se definirá, renombrar las variables mudas no cambia el significado de una fórmula lógica así que cada fórmula es lógicamente equivalente a una en la cual ninguna variable es acotada y libre.

Terminamos la sección con 2 observaciones de Kunen.

•Se ha utilizado el término *léxico* para el conjunto $\mathcal{L}$ de símbolos no lógicos. En la literatura de teoría de modelos, es más usual decir "el *lenguaje* $\mathcal{L}$", sin embargo en la teoría de lenguajes formales, *lenguaje* es un conjunto de cadenas hechas a partir de símbolos básicos (como el conjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}$). Nuestra terminología aquí es más cercana al significado común en español de "léxico" como la coleccion de palabras de un lenguaje; e.g. "gato","sombrero", etc. mientras que una oración en el lenguaje español es una cadena de estás palabras, como "El gato viste un sombrero".

•Las “variables” x, y, z, t, usadas son realmente $meta - variables$. Ni siquiera se ha dicho que son los elementos de VAR. Kunen en [18, I.15] define un léxico infinito numerable para la lógica predicativa a partir de ω; de manera burda, la idea es la siguiente: a los símbolos lógicos como $\wedge \vee \neg \rightarrow \leftrightarrow =$ se les asigna los números impares, mientras que los números pares serán letras proposicionales; éstas últimas pueden jugar el papel de variables y por lo tanto se puede seguir con la usanza en lógica, de usar letras tales como x, y, z, t para referirnos a elementos arbitrarios de VAR. Esto esta relacionado con lo dicho en 2.1

II.3. Abreviaciones

Siempre es difícil traducir matemáticas informales en un sistema lógico formal. Esto es verdad especialmente con nuestra notación Polaca. Dado que necesitamos estudiar lógica formal por sus aplicaciones a las matemáticas, introduciremos algunas abreviaciones que permitan expresar afrimaciones de interés matemático sin mucho dolor. Clasificaremos *grosso modo* las abreviaciones en abreviaciones de *bajo, medio* y *alto nivel*. Acontinuación presentaremos una idea sucinta de los tres tipos, para ver la discusión extendida acudir a [18, II.6].

Bajo nivel: Escribiremos las fórmulas y términos en la convención standar matemática; no hay riesgo de confución ya que incluso en esta convención hay una unicidad de significado, claro está, logrado gracias a una arbitraria pero previamente aceptada jerarquía de operadores (tanto para $+, -, (), etc.$ como para los símbolos lógicos. Para éstos últimos se considera la usual jerarquía en el siguiente orden $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. También es convención standard omitir cuantificadores repetidos; “$\forall x, y$” sólo pude significar “$\forall x \forall y$”.

Medio nivel: Corresponden a aquellas en las que usaremos expresiones en las que se mezcla el idioma español con expresiones lógicas. Siempre que se haga es bajo la suposición de que existe una forma de expresarlo en la notación polaca.

Alto nivel: Cuando la fórmula o término (sin abreviar) es claro hasta equivalencias con respecto a alguna teoría. Esto es común en álgebra. Por ejemplo digamos que estamos usando $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$ para tratar anillos con una unidad (o elemento 1). Entonces $3x$ puede abreviar $x + (x + x)$; pero también $(x + x) + x$. La equivalencia $\forall [x + (x + x) = (x + x) + x]$ no es válida lógicamente, dado que puede no ser cierto cuando $+$ no es asociativa, pero es válido en los anillos.

Un ejemplo más cercano a lo que nos atañe lo podemos ver en teoría de conjuntos. Si tenemos el léxico $\mathcal{L} = \{\in\}$ y se define $\emptyset$ como el (único) y tal que *emp*(y), donde *emp*(y) abrevia $\forall x[x \notin y]$. De este modo ¿Exactamente qué significa la abreviación "$\emptyset \in z$" en el léxico $\mathcal{L}$? Hay dos posibilidades, φ_1: $\exists y[emp(y) \wedge y \in z]$ y φ_2: $\forall y[emp(y) \rightarrow y \in z]$.

Éstas fórmulas φ_1 y φ_2 no son lógicas equivalentemente, dado que la oración $\forall z[\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2]$ es <u>falsa en el modelo</u>: $A = \{a, b\}$ donde $\in = \{(a, b), (b, a)\}$, dado que φ_1 es <u>falsa</u> para ambos elementos y φ_2 es <u>verdadera</u> para ambos elementos. Como sea $\forall z[\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2]$ es una <u>consecuencia lógica</u> de los axiomas de **ZF**, así que en el desarrollo de **ZF**, nunca será necesario explicitar cual abreviación se está utlizando.

Por supuesto, que las expresiones subrayadas necesitan ser definidas, lo que se hará en páginas posteriores, pero se expuso el ejemplo como una muestra interesante para nuestro tema de estudios de abreviaciones de alto nivel.

II.4. Semántica para lógica de primer orden

La *semántica* dotará de *significado* a las oraciones lógicas. Aunque en algunos ejemplos concretos que se han mencionado, el significado podría ser claro informalmente, es importante darle una definición matemática precisa a éste significado. Al hacer esto, coincidiendo con la noción de lenguaje (como el español), se verá que el significado de una misma oración dependerá del contexto (semántica).

Definición 2.13. *Dado un léxico para una lógica predicativa, $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n \cup \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_n$, una* estructura *para $\mathcal{L}$ es un par $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$ tal que A es un conjunto no vacío y $\mathcal{I}$ es una función con dominio $\mathcal{L}$ con cada $\mathcal{I}(s)$ una entidad semántica del tipo correcto, específicamente, escribiendo $s_{\mathfrak{A}}$ en lugar de $\mathcal{I}(s)$:*

- ♣ *Si $f \in \mathcal{F}_n$ con $n > 0$, entonces $f_{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$.*
- ♣ *Si $p \in \mathcal{P}_n$ con $n > 0$, entonces $p_{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$.*
- ♣ *Si $c \in \mathcal{F}_0$, entonces $c_{\mathfrak{A}} \in A$.*
- ♣ *Si $p \in \mathcal{P}_0$, entonces $p_{\mathfrak{A}} \in 2 = \{0, 1\} = \{F, V\}$.*

Nótese el caso especial para $n = 0$. Los símbolos en $\mathcal{F}_0$ son símbolos constantes así que denotan un elemento en el universo de la estructura. Símbolos en $\mathcal{P}_0$ son letras proposicionales , así que denotan un valor de verdad, F o V, para éstas el universo de la estructura es irrelevante. Se está siguiendo la convención usual de que 0 denota "falso" y 1 denota "verdadero". A una estructura $\mathfrak{A}$ para $\mathcal{L}$ también se le denominará *$\mathcal{L}$-estructura.*

También se está siguiendo la convención usual en teoría de modelos de pedir que $A \neq \emptyset$, ya que si permitimos estructuras vacías conduce a ciertas patologías después.

Seremos informales, excepto si hay riesgo de confusión,al denotar estructuras. Por ejemplo, si usamos $\mathcal{L}_{OR} = \{<, +, \cdot, -, 0, 1\}$, podríamos decir "Sea $\mathfrak{A} = \mathbb{R}$" y estaría claro del contexto que los símbolos $<, +, \cdot, -, 0, 1$ denotan su significado usual en $\mathbb{R}$.

Más adelante en el texto, la mayoría de las veces trabajaremos con modelos de la teoría de conjuntos, así $\mathcal{L} = \{\in\}$ y $\mathfrak{A} = (A, E)$ donde E será la pertenencia usual y, la mayoría del tiempo A será un conjunto transitivo. Por esto, para facilitar la lectura se introducirá la siguente

Definición 2.14. *Un* $\in$-modelo *es cualquier estructura* $\mathfrak{A} = (A, E)$ *para* $\mathcal{L} = \{\in\}$ *tal que* $E = \{(a, b) \in A \times A : a \in b\}$. *Para éstas estructuras se usará usualmente* A *en lugar de* $\mathfrak{A}$. *Un* modelo transitivo *es cualquier* $\in$*-modelo* A *tal que* A *es transitivo.*

Lo siguiente será definir la noción "$\mathfrak{A} \models \varphi$" ($\varphi$ es verdadero en $\mathfrak{A}$). Para ésto se construiría una función que, dependiendo de $\mathfrak{A}$, le asigne un valor de verdad a φ; pero si φ tiene cuantificadores habrá que verificar una subfórmula que sea para todos los elementos de A o para uno en particular, o en el caso de fórmulas nos cuantificadas, su valor de verdad dependerá de como se interpreten las variables, así que para evitar ambigüedades se definirá primero como deben interpretarse los términos de una fórmula, que a su vez depende de la interpretación de su variables; así que primero daremos las siguientes dos definiciones.

Definición 2.15. *Para términos* τ*, sea* $V(\tau)$ *el conjunto de variables con aparición en* τ. *Para fórmulas* φ*, sea* $V(\varphi)$ *el conjunto de variables que tienen* aparición libre *en* φ.

Definición 2.16. *Si* α *es un término, o una fórmula, una* asignación *para* α *en* A *es una función* σ *tal que* $V(\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(\sigma) \subseteq VAR$ *y* $\mathrm{ran}(\sigma) \subseteq A$.

Así podemos definir lo que será una "interpretación " de un término τ en $\mathfrak{A}$.

Definición 2.17. *Si* $\mathfrak{A}$ *es una estructura para* $\mathcal{L}$*, entonces definimos* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma] \in A$ *cuando* τ *es un término de* $\mathcal{L}$ *y* σ *una asignación para* τ *en* A *como sigue:*

1. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x)[\sigma] = \sigma(x)$ *cuando* $x \in \mathrm{dom}(\sigma)$.

2. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(c)[\sigma] = c_{\mathfrak{A}}$ *cuando* $c \in \mathcal{F}_0$.

3. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(f\tau_1\cdots\tau_n)[\sigma] = f_{\mathfrak{A}}(\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma],\cdots,\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)[\sigma])$ *cuando* $f \in \mathcal{F}_n$ *y* $n > 0$.

Si $V(\tau) = \emptyset$, *entonces* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)$ *abrevia* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\emptyset]$.

La mayoría de las veces, para el caso de una asignación σ concreta, usaremos la siguiente notación:
Con $\mathfrak{A} = \mathbb{Q}$, y $\sigma = \{(y,3),(x,2),(z,5)\}$
$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x)[2] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x)[\sigma]$.
Sin embargo, cuando haya riesgo de ambigüedad como en
$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x\cdot y)[2,3] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x\cdot y)[\sigma]$ se entenderá que la asignación se están haciendo según el orden de aparición u orden alfabético de las variables, pero si la ambigüedad persiste como en el siguiente caso se usará una notación explícita:
$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(y\cdot x)\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(y\cdot x)[\sigma]$

Usando la definición 2.17 y con $\mathfrak{A} = \mathbb{Q}$ tenemos que:
$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(y\cdot x)\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(y)\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot_{\mathfrak{A}} \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x)\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot_{\mathfrak{A}} 2 = 6.$

Nótese que estamos permitiendo en la definición de asignación que $\mathrm{dom}(\sigma)$ sea un superconjunto propio de $V(\sigma)$, de otro modo sería muy rebuscado definir el punto (3) de la definición, pero estó no afecta como se muestra en la siguiente:

Proposición 2.18. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$ *sólo depende de* $\sigma\restriction V(\tau)$; *esto es, si* $\sigma'\restriction V(\tau) = \sigma\restriction V(\tau)$ *entonces* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma'] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$.

Demostración. Por inducción sobre $|\tau|$. Si $|\tau| = 1$
Si τ es una símbolo constante el resultado es inmediato por (2) de 2.17. Si τ es una variable entonces $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma] = \sigma(x) = \sigma'(x) = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma']$.
Supongamos válido para $n < |\tau|$, con $1 < |\tau|$.
Como $1 < |\tau|$, τ es de la forma $f\tau_1\cdots\tau_{k-1}$ con $f \in \mathcal{F}_k$, así que:

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma] = f_{\mathfrak{A}}(\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma],\ldots,\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_{k-1})[\sigma]) \qquad (1)$$

Y notemos que

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_i)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_i)[\sigma'] \qquad (2)$$

para cada $1 \leq i \leq k-1$ por hipótesis inductiva.
Como $f_{\mathfrak{A}}$ función en A^k, combinando (1) y (2) tenemos que

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma] = f_{\mathfrak{A}}(\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma'],\ldots,\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_{k-1})[\sigma']) = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma'].$$

□

En particular, si $V(\tau) = \emptyset$ entonces, para cada σ, $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\emptyset] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)$, donde $\emptyset$ es la asignación vacía.

Definición 2.19. *Si $\mathfrak{A}$ es una estructura para $\mathcal{L}$, entonces definimos* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] \in \{0,1\} = \{V, F\}$ *cuando φ es fórmula atómica de $\mathcal{L}$ y σ es una asignación para φ en A como sigue:*

1. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(p)[\sigma] = p_{\mathfrak{A}}$ *cuando* $p \in \mathcal{P}_0$.
2. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(p\tau_1 \cdots \tau_n)[\sigma] = V$ *sii* $(\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma], \ldots, \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)[\sigma]) \in p_{\mathfrak{A}}$ *cuando* $p \in \mathcal{P}_n$ *y* $n > 0$.
3. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(= \tau_1\tau_2)[\sigma] = V$ *sii* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_2)[\sigma]$.

La cláusula (3) es necesaria ya que $=$ es un símbolo lógico, no de $\mathcal{L}$, así que $\mathfrak{A}$ no le asigna ningún significado a $=$; en cambio $\tau_1 = \tau_2$ siempre significa que τ_1 y τ_2 son el mismo objeto[1].

Siguiendo nuestro camino para definir valores para las fórmulas, usaremos la siguiente

Definición 2.20. $\sigma + (y/a) = \sigma\restriction(VAR\setminus\{y\}) \cup \{\langle y, a\rangle\}$.

Esto es, estamos asignado a y el valor a, descartando, si fuese necesario, el valor que σ da a y.

Podemos ya definir el valor de una fórmula φ el cual, como el valor de un término, es computado recursivamente :

Definición 2.21. *Si $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura, entonces definimos* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] \in \{0,1\} = \{V, F\}$ *cuando φ es una fórmula de $\mathcal{L}$ y σ es una asignación para φ en A como sigue:*

1. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\neg\varphi)[\sigma] = 1 - \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$.
2. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\wedge\varphi\psi)[\sigma], \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\vee\varphi\psi)[\sigma], \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\rightarrow\ \varphi\psi)[\sigma]$ *y* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\leftrightarrow\ \varphi\psi)[\sigma]$*, son obtenidos apartir de* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ *y* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi)[\sigma]$ *usando las tablas de verdad para* $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
3. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\exists y\varphi)[\sigma] = V$ *sii* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (y/a)] = V$ *para algún* $a \in A$.
4. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\forall y\varphi)[\sigma] = V$ *sii* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (y/a)] = V$ *para toda* $a \in A$.

[1] Ver explicación en la introducción del capítulo

$\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ *significa* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] = V$. *Si* $V(\varphi) = \emptyset$ *(es decir,* φ *es una oración), entonces* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ *abrevia* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\emptyset]$, *y* $\mathfrak{A} \models \varphi$ *significa* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi) = V$.

La definición 2.20 es necesaria ya que σ podría darle valores a las variables que no son libres en φ; así, esos valores son irrelevantes y seguramente tendrán que ser descartados al computar el valor de verdad de φ.

Notación: Si $\mathfrak{A}$ es una estructura para $\mathcal{L}$ y φ es una fórmula para $\mathcal{L}$ con variables libres entre $x_1, \ldots, x_n$, y $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ y $A \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ y $(\varphi(a_1, \ldots, a_n))^{\mathfrak{A}}$ y $(\varphi(a_1, \ldots, a_n))^A$ todas denotan $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$, donde $\sigma = \{(x_1, a_1), \ldots, (x_n, a_n)\}$.

Obsérvese que pareciera que nuestra notación $(\varphi(a_1, \ldots, a_n))^A$ sólo afectara a las variables libres de φ restringiéndolas a elementos de A, pero recordemos que según la Definición 2.21, para calcular el valor de una fórmula con cuantificadores, por ejemplo, $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\forall x \varphi)[\sigma]$, se tiene que calcular $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (x/a)]$ para cada $a \in A$. Así que con la notación del superíndice, $(\varphi)^A$ debe entenderse que todas las variables, incluídas las acotadas, toman valores en A

La definición dada por recursividad está justificada por 1.29; como se está trabajando sobre un conjunto A, dada una fórmula φ, la colección de todas las asignaciones para φ, sigue siendo un conjunto; por lo cual la relación $(\psi, \sigma')R(\varphi, \sigma)$ sii ψ es subfórmula de φ, es casi conjunto. En 2.106 se trata la situación para clases. Se puede verificar que al igual que con los términos:

Proposición 2.22. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$ *sólo depende de* $\sigma \restriction V(\varphi)$*; esto es, si* $\sigma' \restriction V(\varphi) = \sigma \restriction V(\varphi)$ *entonces* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma'] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$.

La demostración se realiza por inducción de modo similar al hecho con los términos.

Definición 2.23. *Si* $\mathfrak{A}$ *es una* $\mathcal{L}$*-estructura y* Σ *es un conjunto de oraciones de* $\mathcal{L}$ *entonces* $\mathfrak{A} \models \Sigma$ *se cumple si,* $\mathfrak{A} \models \varphi$ *para cada* $\varphi \in \Sigma$.

Definición 2.24. *Si* Σ *es un conjunto de oraciones de* $\mathcal{L}$ *y* ψ *es una oración de* $\mathcal{L}$*, entonces* $\Sigma \models \psi$ *se cumple si,* $\mathfrak{A} \models \psi$ *para toda* $\mathcal{L}$*-estructura tal que* $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

En español, decimos que ψ es una *consecuencia semántica* de Σ. Nótese el abuso del símbolo $\models$; se le ha dado dos significados distintos en las definiciones 2.23 y 2.24. Esto nunca genera confusión ya que siempre será claro del contexto si el objeto a la izquierda de $\models$ es un conjunto de oraciones o una estructura.

Definición 2.25. *Si Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$ entonces Σ es* semánticamente consistente *o* satisfactorio *(denotado simbólicamente por $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$) si existe algún $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$ "inconsistente" significa "no consistente".*

Óbservese que lo recién definido es la consistencia *semántica* ($\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$), ésto es porque también hay una consistencia *sintáctica* ($\mathrm{Con}_{\vdash}(\Sigma)$) la cual es definida bajo la noción semántica de demostrabilidad ($\Sigma \vdash \psi$) la cual significa que hay una prueba formal de ψ a partir de Σ. El teorema de completitud(2.71) nos dice que $\Sigma \vdash \psi$ sii $\Sigma \models \psi$; de lo cual también se obtendrá que $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ sii $\mathrm{Con}_{\vdash}(\Sigma)$.

Lema 2.26. *(**Reductio ad Absurdum**) Si Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$ y ψ es una oración de $\mathcal{L}$, entonces*

a. $\Sigma \models \psi$ *sii* $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ *es semánticamente inconsistente.*

b. $\Sigma \models \neg\psi$ *sii* $\Sigma \cup \{\psi\}$ *es semánticamene inconsistente.*

La demostración del Teorema 2.26 se obtiene rápidamente. El sentido "$\Rightarrow$" en ambos incisos se sigue por contradicción de la definición de consistencia. Para el sentido "$\Leftarrow$" considérese la contrarecíproca y la definición 2.24.

Teorema 2.27 (**Teorema de Compacidad**)**.** *Si Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$:*

1. *Si cada subjonjunto finito de Σ es semánticamente consistente, entonces Σ es semánticamente consistente.*

2. *Si $\Sigma \models \psi$, entonces hay un $\Delta \subseteq \Sigma$ finito tal que $\Delta \models \psi$.*

Aunque aún no tenemos las herramientas para demostrar el Teorema de Compacidad podemos estrenar el Lema 2.26 para ver que (1) y (2) del Teorema de Compacidad son equivalentes:

Demostración de (1) sii (2) del Teorema de Compacidad. (1)$\Rightarrow$(2): Supongamos que $\Sigma \models \psi$, entonces $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ no es consistente por 2.26. Entonces por hipótesis tenemos que existe $\Delta \subseteq \Sigma \cup \{\neg\psi\}$ finito tal que es inconsistente, por lo que $\Delta' = \Delta \cup \{\neg\psi\}$ es inconsistente; nuevamente, el lema 2.26 nos asegura que $\Delta' \models \psi$.

(2)$\Rightarrow$(1): Sea $\psi \in \Sigma$ y supongamos que $\neg\mathrm{Con}(\Sigma)$, entonces $\neg\mathrm{Con}(\Sigma \cup \{\psi\})$. El lema 2.26 nos asegura que $\Sigma \models \neg\psi$ y por hipótesis tenemos que existe $\Delta \subseteq \Sigma$ finito tal que $\Delta \models \neg\psi$ que combinado, nuevamente, con el 2.26 obtenemos que el conjunto $\Delta' = \Delta \cup \{\psi\} \subseteq \Sigma$ es inconsistente. $\square$

Definición 2.28. *Si $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura con universo A, entonces $|\mathfrak{A}|$ denota $|A|$.*

De este modo, afirmaciones sobre el tamaño de $\mathfrak{A}$ realmente se refieren a $|A|$; por ejemplo "$\mathfrak{A}$ es un modelo infinito" significa que $|A|$ es infinito.

Teorema 2.29 (de Löwenheim-Skolem). *Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$ tales que para toda n finita, Σ tiene un modelo (finito o infinito) de tamaño $\geq n$. Entonces para toda $\kappa \geq \max(|\mathcal{A}|, \aleph_0)$, Σ tiene un modelo de tamaño κ.*

II.5. Algunas nociones adicionales de semántica

Definición 2.30. *Si ψ es una fórmula de $\mathcal{L}$, entonces ψ es* lógicamente válida *sii $\mathfrak{A} \models \psi[\sigma]$ para todas las $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y toda asignación σ para ψ en $\mathfrak{A}$.*

La fórmula $x = x$ y la oración $\forall x(x = x)$ son válidas lógicamente porque nuestras definición de $\models$ siempre interpreta el símbolo lógico $=$ como la auténtica identidad. Muchas fórmulas, como $\forall xp(x) \to \neg\exists x\neg p(x)$, son obviamente válidas lógicamente, y muchas otras, como $p(x) \to \forall p(y)$, obviamente no son válidas lógicamente. Hay muchos ejemplos triviales, pero por el famoso teorema de Church ([18, Theorem IV.2.2]), se sabe que no existe algoritmo que pueda decidir en general que fórmulas son válidas lógicamente.

Definición 2.31. *Si φ, ψ son fórmulas de $\mathcal{L}$, entonces φ, ψ son* equivalentes logicamente *si la fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ es válida lógicamente.*

Esto es lo mismo que decir que $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ sii $\mathfrak{A} \models \psi[\sigma]$ para toda $\mathfrak{A}$ y para toda σ. Por ejemplo $p(x) \vee q(x)$ y $q(x) \vee p(x)$ son lógicamente equivalentes.

Lema 2.32. *Si φ es una fórmula, y las oraciones ψ y χ son ambas clausuras universales de φ, entonces ψ, χ son equivalentes lógicamente.*

Demostración. Digamos que $y_1, \ldots, y_k$ son las variables libres de φ, donde $k \geq 0$. Entonces ψ es de la forma $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \varphi$, donde cada y_i esta listado al menos una vez en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nótese ahora que $\mathfrak{A} \models \psi$ sii $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k]$ para toda $_1, \ldots, a_k \in A$ (definición 2.21). Dado que lo mismo es verdad para χ, tenemos que $\mathfrak{A} \models \psi$ sii $\mathfrak{A} \models \chi$. $\square$

Debido al resultado anterior, es común decir "*la* clausura universal" para referirse a alguna (la que sea) clausura universal de φ, ya que en la mayoría de los caso no importará cual es usada.

Lo siguiente es una noción *relativa* de equivalencia lógica:

Definición 2.33. *Si φ, ψ son fórmulas de $\mathcal{L}$ y Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$, entonces φ, ψ son* equivalente con respecto a Σ *si la clausura universal de $\varphi \leftrightarrow \psi$ es verdad en todos los modelos de Σ. Si τ_1 y τ_2 son términos, entonces τ_1, τ_2 son* equivalentes con respecto a Σ *sii para toda $\mathfrak{A} \models \Sigma$ y todas las asignaciones σ para τ_1, τ_2 en A,* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_2)[\sigma]$.

Esta noción apareció en la discusión de las abreviaciones (de alto nivel, ver la sección 2.3). Por ejemplo, si Σ contiene la ley asociativa los términos $x \cdot (y \cdot z)$ y $(x \cdot y) \cdot z$ son equivalentes con respecto a Σ, mientras sólo estemos tratando modelos de Σ, es seguro usar xyz como una abreviación, sin tener que recordar cual de los dos términos abrevia. Uno podría definir términos τ_1, τ_2 ser *equivalentes logicamente* si son equivalentes respecto $\emptyset$, pero esto no es de interés ya que:

Proposición 2.34. *Si*

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_2)[\sigma] \quad (*)$$

para toda $\mathfrak{A}$ y toda σ, entonces τ_1 y τ_2 son los mismos términos.

Definición 2.35. *Si β y τ son términos y x es una variable, entonces $\beta(x \rightsquigarrow \tau)$ es el término que resulta de remplazar en β todas las apariciones* libres *de x por τ.*

Justificación. Por inducción sobre $|\beta|$. Si $|\beta| = 1$. Tenemos que β es de la forma s donde $s \in \mathcal{F}_0 \cup VAR$. Si s es distinto de x, no se realiza ninguna sustitución por no haber apariciones libres de x y por lo tanto $\beta(x \rightsquigarrow \tau)$ es β nuevamente, que ya era término. Si s es x entonces $\beta(x \rightsquigarrow \tau)$ es τ que es término.
Supongamos válido para $m < |\beta|$ con $1 < |\beta|$. Tenemos que β es de la forma $s\tau_1 \cdots \tau_k$ donde s no puede ser x ya que eso implicaría que $|\beta| = 1$, por esto, cada aparición libre de x en β debe aparecer en algun τ_i pero por hipótesis inductiva, al hacer la sustitución, es decir $\tau_i(x \rightsquigarrow \tau)$, vuelve a ser término, y por lo tanto, $\beta(x \rightsquigarrow \tau) = s\tau_1(x \rightsquigarrow \tau) \cdots \tau_k(x \rightsquigarrow \tau)$ es término. □

Y cuando la definición dice remplazar, es literalmente remplazar, si β es $\cdot xy$ entonces $\beta(x \rightsquigarrow +xz)$ es $\cdot + xzy$. Veremos a continuación que esta sustitución tiene el comportamiento deseado en las semánticas.

Lema 2.36. *Si $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura, y σ es una asignación para β y para τ en A, y $a = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$, entonces*

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\beta(x \rightsquigarrow \tau))[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\beta)[\sigma + (x/a)]$$

Demostración. Si x no tiene aparición en β el resultado es trivial por la proposición 2.18. Proseguimos por inducción sobre β.
Si $|\beta| = 1$. Tenemos que β es x, entonces

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\beta(x \rightsquigarrow \tau))[\sigma] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma] & = & a \\ & = & \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(x)[\sigma + x/a] \\ & = & \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\beta)[\sigma + (x/a)]. \end{array}$$

Supongamos válido para $m < |\beta|$. Tenemos que β es de la forma $s\tau_1\tau_2 \cdots \tau_k$ donde $s \in \mathcal{F}_k$. Por lo tanto

$$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\beta(x \rightsquigarrow \tau))[\sigma] = f_{\mathfrak{A}}(\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1(x \rightsquigarrow \tau))[\sigma], \ldots, \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_k(x \rightsquigarrow \tau))[\sigma])$$

que por hipótesis inductiva es igual a

$$f_{\mathfrak{A}}(\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1)[\sigma + x/a], \ldots, \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_k)[\sigma + x/a]) = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\beta)[\sigma + x/a]$$

□

Definición 2.37. *Si φ es una fórmula, x es una variable, y τ es un término, entonces*
$\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ es la fórmula que resulta de φ remplazando todas las apariciones libres *de x por τ.*

Claro que uno debe verificar que $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ es realmente una fórmula, pero esto se puede hacer de manera similar que en 2.35.

Grosso modo, $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ dice acerca de τ lo que φ dice acerca de x. Uno debe tener cuidado cuando τ contiene variables. Digamos que φ es $\exists y(x < y)$. Entonces $\forall x\varphi$ es verdad en $\mathbb{R}$, por lo que uno esperaría que la clausura universal de cada $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ fuera verdad. Por ejemplo si τ es, respectivamente, 1 y $z + z$, entonces $\exists y(1 < y)$ y $\forall z\exists y(z + z < y)$son ambas verdad en $\mathbb{R}$. Pero si τ es $y + 1$, entonces $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ es la oración $\exists y(y + 1 < y)$, la cual es falsa en $\mathbb{R}$. El problema fue que la variable y en τ quedó "capturada" por el $\exists y$, lo que cambia su *significado*, este problema queda especificado con la siguiente

Definición 2.38. *Un término τ es* libre para *x en un fórmula φ si ninguna aparición libre de x esta dentro del alcance de un cuantificador $\exists y$ o $\forall y$ donde y es una variable que tiene aparición en τ.*

Observación: Si x no tiene apariciones libres (sea porque no aparezca o todas sus apariciones sean acotadas) en φ, τ siempre es libre para x en φ.

Si la sustitución es libre, entonces tiene el significado pretendido, formalizado por el:

Lema 2.39. *Supóngase que $\mathfrak{A}$ es una estructura para $\mathcal{L}$, φ es una fórmula de $\mathcal{L}$, τ es un término de $\mathcal{L}$, y σ es una asignación para φ y τ en A, y $a = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$. Supóngase que τ es libre para x en φ. Entonces*

$$\mathfrak{A} \models \varphi(x \rightsquigarrow \tau)[\sigma] \textit{ sii } \mathfrak{A} \models \varphi(x[\sigma + (x/a)] \quad .$$

Demostración. Por inducción en φ. Para el pie de inducción, cuando φ es atómica, se usa el lema 2.36. También obsérvese que si x no es libre en φ, entonces $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ es φ,(véase observación a definición 2.38) y el valor asignado por σ a x es irrelevante, así que el lema se obtendría inmediatamente sin necesidad de inducción. Los casos proposicionales para la inducción se obtienen directamente de aplicar la hipótesis inductiva. Consideremos ahora el caso con cuantificadores, donde φ es $\exists y\psi$ o $\forall y\psi$. Supongamos que hay apariciones libres de x en φ (si no fuera así, nuevamente el resultado sería inmediato), entonces las variables x y y deben ser distintas (de lo contrario x no sería libre) y x debe tener una aparición libre en ψ, así que, como τ es libre para x en φ, y no tiene aparición en τ. A partir de las observaciones hechas la inducción se puede aplicar directamente, usando la definición de $\models$:
Para ambos casos de cuantificadores, la dificultad está en considerar varias $\sigma + (y/b)$. Si $\mathfrak{A} \models \varphi(x \rightsquigarrow \tau)[\sigma]$ entonces $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi(x \rightsquigarrow \tau))[\sigma + (y/b)] = V$ para algún $b \in A$ (podrían ser para todo b, dependiendo del cuantificador). Sea $\sigma' = \sigma + (y/b)$ y $a' = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma']$ tenemos por hipótesis inductiva que:
$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi(x))[\sigma + (y/b) + (x/a')] = V$; pero $a = a'$ porque y no tiene aparición en τ.

El otro sentido es análogo. □

Observación: $\varphi(\tau)$ abrevia $\varphi(x \rightsquigarrow \tau)$ cuando es claro a partir del contexto que es la variable x la que es remplazada. Para este fin, usualmento nos referiremos a φ como "$\varphi(x)$" a través del texto. De manera similar, si nos referimos a "$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$", y $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son términos, entonces $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ denota la fórmula obtenida por remplazar simultaneamente cada aparición libre de x_i por τ_i.

Esta convención "$\varphi(x)$" es usada frecuentemente en matemáticas informales para denotar una propiedad arbitraria de x; como por ejemplo en los enunciados de los axiomas de Remplazo y Comprensión.

Corolario 2.40. *Si τ es libre para x en $\varphi(x)$, entonces las fórmulas $\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(\tau)$ y $\varphi(\tau) \rightarrow \exists x\varphi(x)$ son válidas lógicamente.*

Demostración. Sea σ asignación para $\forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau)$. Demostraremos que $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau))[\sigma] = V$. Si $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\forall x\varphi(x))[\sigma] = F$ hemos acabado. Supóngase entonces que
$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\forall x\varphi(x))[\sigma] = V$, entonces $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi(x))[\sigma + (x/a)] = V$ ($\mathfrak{A} \models \varphi(x)[\sigma + (x/a)]$) para $a = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$. Como τ libre para x en φ, entonces por el lema 2.39: $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi(\tau))[\sigma] = V$ ($\mathfrak{A} \models \varphi(x \rightsquigarrow \tau)[\sigma]$); por lo tanto $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau)[\sigma]$. Como σ y $\mathfrak{A}$ fueron arbitrarias concluimos que $\forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau)$ es válida lógicamente.
Se procede de manera similar para el caso existencial. □

Se sigue del lema 2.39 el siguiente

Lema 2.41. *Supóngase que $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de $\mathcal{L}$ sin más varibles libres que $x_1, \ldots, x_n$, y $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son términos de $\mathcal{L}$ sin variables libres. Sean $a_i = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_i)$. Entonces $\mathfrak{A} \models \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ sii $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.*

Hasta ahora, el léxico $\mathcal{L}$ a estado fijo para cada estructura que se ha discutido. Pero también se puede considerar fijar el dominio del discurso y variar $\mathcal{L}$. Esta variación usualmente será a través de léxicos contenidos y cuando se escriba $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1$ implica que todos los símbolos conservan su tipo en $\mathcal{L}_0$ y $\mathcal{L}_1$; nunca, en una misma discusión, se usará el mismo nombre de algún símbolo para distintos tipos. Todo esto queda bien definido con la siguiente:

Definición 2.42. *Si $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1$ y $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$ es una estructura para $\mathcal{L}_1$ entonces $\mathfrak{A}\restriction\mathcal{L}_0$ denota $(A, \mathcal{I}\restriction\mathcal{L}_0)$. $\mathfrak{A}\restriction\mathcal{L}_0$ es llamada una* reducción *de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}$ es llamada una* expansión *de $\mathfrak{A}\restriction\mathcal{L}_0$.*

Nótese que en la definición anterior $\mathcal{I}$ es realmente una función con dominio $\mathcal{L}_1$, y literalmente se está restringiendo a $\mathcal{L}_0$

Frecuentemente, empezaremos con una estructura $\mathcal{L}_0$ y nos preguntaremos acerca de sus expansiones. El siguiente lema muestra que nociones como $\Sigma \models \psi$ y $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ (definición 2.25) no se alteran si expandimos el léxico. Por eso no mencionamos a $\mathcal{L}$ explícitamente y escribimos algo como $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \psi$ o $\mathrm{Con}_{\models,\mathcal{L}}(\Sigma)$.

Lema 2.43. *Supóngase que Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}_0$, que ψ es una oración de $\mathcal{L}_0$ y que $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1$. Entonces son equivalentes:*

α. *$\mathfrak{A}_0 \models \psi$ para toda $\mathcal{L}_0$-estructura $\mathfrak{A}_0$ tal que $\mathfrak{A}_0 \models \Sigma$*

β. *$\mathfrak{A}_1 \models \psi$ para toda $\mathcal{L}_1$-estructura $\mathfrak{A}_1$ tal que $\mathfrak{A}_1 \models \Sigma$*

Y también son equivalentes los siguientes:

a. Existe una $\mathcal{L}_0$-estructura $\mathfrak{A}_0$ tal que $\mathfrak{A}_0 \models \Sigma$

b. Existe una $\mathcal{L}_1$-estructura $\mathfrak{A}_1$ tal que $\mathfrak{A}_1 \models \Sigma$

Demostración. Para (b)$\rightarrow$ (a): Si $\mathfrak{A}_1 \models \Sigma$ entonces también $\mathfrak{A}_1 \restriction \mathcal{L}_0 \models \Sigma$, dado que la verdad de las $\mathcal{L}_0$-oraciones es la misma en $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_1 \restriction \mathcal{L}_0$. Para (a)$\rightarrow$ (b): Sea $\mathfrak{A}_0$ cualquier $\mathcal{L}_0$-estructura tal que $\mathfrak{A}_0 \models \Sigma$. Expándase $\mathfrak{A}_0$ *arbitrariamente* a una $\mathcal{L}_1$-estructura $\mathfrak{A}_1$. Entonces aún tenemos que $\mathfrak{A}_1 \models \Sigma$. $(\alpha) \leftrightarrow (\beta)$ se realiza similarmente. □

Observación: La demostración anterior puede considerarse esencialmente trivial, pero esto es debido al hecho de que las estructuras son no vacías por la definición 2.13. Si se permitiera al dominio del discurso A ser vacío, entonces aún podríamos elaborar todas las definiciones básicas, pero este lema fallaría. Por ejemplo, si ψ es $\forall x p(x) \rightarrow \exists x p(x)$, ψ sería falsa en la estructura vacía, ya que en ella $\forall x p(x)$ es cierto y $\exists x p(x)$ es falso, pero ψ es verdadero en cualquier otra estructura. Si $\mathcal{L}_0 = \{p\}$ y $\mathcal{L}_1 = \{p, c\}$ con c un símbolo constante, tendríamos una situación patológica en la cual $\{\neg\psi\}$ sería consistente como una $\mathcal{L}_0$-oración pero no como una $\mathcal{L}_1$-oración: En la demostración de $(a) \rightarrow (b)$, no habría manera de expandir la estructura vacía a una $\mathcal{L}_1$ estructura porque los símbolos constantes deben ser interpretados como elementos de A. Esta patología explica porque siempre se supone que el universo es no-vacío en la teoría de modelos.

Debe ser clara la distinción entre reducción/expansión, donde se fija un A y se reduce/incrementa $\mathcal{L}$; y subestructura/extensión, donde se fija $\mathcal{L}$ y se reduce/incrementa A. La noción de subestructura generaliza las nociones de subgrupo, subanillo, etc., del álgebra:

Definición 2.44. *Supóngase que $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$ y $\mathfrak{B} = (B, \mathcal{J})$ son estructuras para $\mathcal{L}$. Entonces $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ significa que $A \subseteq B$ y que las funciones y relaciones de $\mathfrak{A}$ son restricciones de las correspondientes funciones y relaciones en B. Específicamente:*

- ♠ *Si $f \in \mathcal{F}_n$ con $n > 0$, entonces $f_\mathfrak{A} = f_\mathfrak{B} \restriction A^n$.*
- ♠ *Si $p \in \mathcal{P}_n$ con $n > 0$, entonces $p_\mathfrak{A} = p_\mathfrak{B} \cap A^n$.*
- ♠ *Si $c \in \mathcal{F}_0$, entonces $c_\mathfrak{A} = c_\mathfrak{B}$.*
- ♠ *Si $p \in \mathcal{F}_0$, entonces $p_\mathfrak{A} = p_\mathfrak{B} \in 2 = \{0, 1\} = \{V, F\}$.*

$\mathfrak{A}$ *es llamada una* subestructura *(o* submodelo*) de* $\mathfrak{B}$*, y* $\mathfrak{B}$ *es llamada una* extensión *de* $\mathfrak{A}$.

Nótese que para las constantes, $c_{\mathfrak{A}}$, debe ser un elemento de A y para funciones $f_{\mathfrak{A}}$ debe tener su imagen en A. Así que, si partimos de un modelo $\mathfrak{B}$ y un subconjunto arbitrario $A \subseteq B$, no podemos afirmar que en general A puede ser una subestructura para $\mathfrak{B}$. La siguiente definición generaliza la noción de isomorfismo entre grupos y anillos:

Definición 2.45. *Supóngase que* $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$ *y* $\mathfrak{B} = (B, \mathcal{J})$ *son estructuras para el mismo léxico* $\mathcal{L}$*.* Φ *es un* isomorfismo *de* $\mathfrak{A}$ *sobre* $\mathfrak{B}$ *(denotado por* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$*) si* $\Phi : A \to B$ *es biyectiva y* Φ *preserva la estructa, esto es:*

- *Si* $f \in \mathcal{F}_n$ *con* $n > 0$*, entonces* $f_{\mathfrak{B}}(\Phi(a_1), \ldots, \Phi(a_n)) = \Phi(f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n))$ *para toda* $a_1, \ldots, a_n \in A$.
- *Si* $p \in \mathcal{P}_n$ *con* $n > 0$*, entonces* $(\Phi(a_1), \ldots, \Phi(a_n)) \in p_{\mathfrak{B}}$ *sii* $(a_1, \ldots, a_n) \in p_{\mathfrak{A}}$ *para toda* $a_1, \ldots, a_n \in A$.
- *Si* $c \in \mathcal{F}_0$*, entonces* $c_{\mathfrak{B}} = \Phi(c_{\mathfrak{A}})$.
- *Si* $p \in \mathcal{P}_0$*, entonces* $p_{\mathfrak{B}} = p_{\mathfrak{A}} \in 2 = \{0, 1\} = \{V, F\}$.

Definición 2.46. *Si* Σ *es un conjunto de oraciones de* $\mathcal{L}$*, entonces* Σ *es* completo *(con respecto a* $\mathcal{L}$*) si* Σ *es semánticamente consistente y para toda oración* φ *de* $\mathcal{L}$*, se cumple o que* $\Sigma \models \varphi$ *o que* $\Sigma \models \neg\varphi$.

Si se dice "Σ es completo", se entiende que $\mathcal{L}$ es el conjunto de símbolos usados en Σ. Σ por lo general *no* será completo respecto a un léxico $\mathcal{L}$ más grande:

Proposición 2.47. *Supóngase que* Σ *es un conjunto de oraciones de* $\mathcal{L}$ *y* $\mathcal{L}' \supsetneq \mathcal{L}$*, con* $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ *conteniendo al menos un símbolo predicativo. Entonces* Σ *no puede ser completo respecto a* $\mathcal{L}'$.

Demostración. Sea $p \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ un símbolo predicativo de aridad n y φ de la forma $\exists x_1, \ldots, x_n p(x_1, \ldots, x_n)$.
Si no existe $\mathfrak{A}$, $\mathcal{L}'$-estructura, tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$ hemos acabado. Así que proseguimos suponiendo que existe $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Entonces $\mathfrak{A}{\restriction}\mathcal{L} \models \Sigma$ (ya que Σ es conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$ y su valor de verdad no depende de $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$, véase demostración de 2.43) Sea $\mathfrak{B}$ una $\mathcal{L}'$-estructura extensión de $\mathfrak{A}{\restriction}\mathcal{L}$ tal que $p_{\mathfrak{B}} = \emptyset$ si $0 < n$ o $p_{\mathfrak{B}} = F$ si $n = 0$, así $\mathfrak{B} \models \Sigma$ y $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$.

Construyase otra $\mathcal{L}'$-estructura extensión de $\mathfrak{A}\lceil\mathcal{L}$ ahora con $p_{\mathfrak{B}} = A^n$ si $0 < n$ o $p_{\mathfrak{B}} = V$ si $n = 0$, así $\mathfrak{B}' \models \Sigma$ y$\mathfrak{B}' \models \varphi$. Se concluye que ni $\Sigma \models \varphi$ ni $\Sigma \models \neg\varphi$. $\square$

Un ejemplo (quizás artificial) de un conjunto de oraciones Σ completo es la teoría de una estructura dada:

Definición 2.48. *Si $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura, entonces la* teoría de $\mathfrak{A}$*,* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ *es el conjunto de todas las $\mathcal{L}$-oraciones φ tales que $\mathfrak{A} \models \varphi$.*

Lema 2.49. *Si $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura entonces* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ *es completo (respecto a $\mathcal{L}$).*

Demostración. $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ es semánticamente consistente porque $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Sea φ una $\mathcal{L}$-oración, tenemos que o $\mathfrak{A} \models \varphi$ o bien $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$; sin pérdida de generalidad supóngase que $\mathfrak{A} \models \varphi$, veremos que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \models \varphi$. Sea $\mathfrak{B}$ una $\mathcal{L}$-estructura tal que $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ entonces $\mathfrak{B} \models \varphi$. Como $\mathfrak{B}$ fue arbitraria, concluímos que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \models \varphi$. $\square$

Definición 2.50. *Si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ son estructuras para $\mathcal{L}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ son* equivalentes elementalmente*) sii para toda $\mathcal{L}$-oración φ se cumple que $\mathfrak{A} \models \varphi$ sii $\mathfrak{B} \models \varphi$.*

Se sigue de esta y de la Definición 2.48 que, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ sii $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

Lema 2.51. *Si $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ o $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.*

En el Lema anterior no se ha definido el significado de $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$; esta noción, $\mathfrak{A}$ submodelo elemental de $\mathfrak{B}$, se verá con precisión más adelante (ver Definición 2.97), por ahora puede entenderse, informalmente, como lo afirmación de $\mathfrak{A}$ ser submodelo de $\mathfrak{B}$ y además, todo lo que se cumpla en $\mathfrak{B}$ para elementos de A se cumple también en $\mathfrak{A}$.

Las siguientes dos proposiciones ilustran la idea de que todas las variables (los elementos de VAR) son "esencialmente equivalentes", dado que nuestras definiciones las tratan a todas por igual.

Proposición 2.52. *Sean z, w dos variables diferentes. Sea φ, o $\varphi(z)$, una formula de $\mathcal{L}$. Supóngase que w es libre para z en φ y que w no tiene apariciones libres en φ. Como lo hemos venido haciendo, $\varphi(w)$ denota $\varphi(z \rightsquigarrow w)$. Se tiene que: z es libre para w en $\varphi(w)$ y que z no tiene apariciones libres en $\varphi(w)$; $\varphi(z)$ es lo mismo que $(\varphi(w))(w \rightsquigarrow z)$; $\forall z\varphi(z)$, $\forall w\varphi(w)$ son lógicamente equivalentes y $\exists z\varphi(z)$, $\exists w\varphi(w)$ son lógicamente equivalentes.*

Demostración.
1) z es libre para w en $\varphi(w)$.
Si en φ toda aparición de z es acotada entonces $\varphi(z \rightsquigarrow w) = \varphi$ y por vacuidad z es libre para w en $\varphi(w) = \varphi$. Si z tiene aparaciones libres φ; por hipótesis w libre para z en $\varphi(z)$ y w no tiene apariciones libres en $\varphi(z)$ entonces w tiene apariciones libres en $\varphi(w)$ y ninguna está en el alcance de algún $\exists z$ o $\forall z$ (si lo estuviera implicaría que o w tenía aparación libre en φ o que se reemplazó una z acotada) por lo tanto z es libre para w en $\varphi(w)$.
2) z no tiene aparación libre en $\varphi(w)$
Esto es trivial a partir de la definición 2.37.
3) De 1) y 2) concluímos que $\varphi(z)$ es lo mismo que $(\varphi(w))(w \rightsquigarrow z)$.
4) $\forall z\varphi(z)$ y $\forall w\varphi(w)$ son lógicamente equivalentes:
Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y σ una asignación para $\varphi(z)$ y $\varphi(w)$.Por verificar que $\mathfrak{A} \models \forall z\varphi(z) \rightarrow \forall w\varphi(w)[\sigma]$. Pero esto es equivalente a verificar que $\mathfrak{A} \models \forall z\varphi(z) \rightarrow \varphi(w)[\sigma + w/a]$ para toda $a \in A$ pero esto último es cierto por corolario 2.40. Para el inverso 1) y 2) nos aseguran las hipótesis para aplicar pasos análogos y obtenemos que $\forall w\varphi(w) \rightarrow \forall z(\varphi(w))(w \rightsquigarrow z)$ es lógicamente válido pero por 3) obtenemos la implicación deseada.
Para el caso existencial se procede de manera análoga.

$\square$

Proposición 2.53. *Sea φ una fórmula de $\mathcal{L}$ y z cualquier variable. Sea w una variable que no tiene aparición alguna en φ. Sea φ' la fórmula que resulta de remplazar todas las apariciones* acotadas *de z en φ por w; las apariciones libres de z no se remplazan. Entonces φ y φ' son equivalentes lógicamente.*

Demostración. Por inducción en φ.
El pie de inducción, las fórmulas atómicas, es trivial ya que no hay cuantificadores en la expresión.
Para el caso de las fórmulas que no empiezan con cuantificadores o que empiezan con cuantificadores pero no sobre la variable z se sigue directo; para ilustrar el procedimiento demostraremos el caso cuando φ es $\wedge\psi\gamma$:
φ' es $(\wedge\psi\gamma)'$ que es $\wedge\psi'\gamma'$. Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y σ una asignación para $\wedge\psi\gamma \leftrightarrow \wedge\psi'\gamma'$. Por demostrar que $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\wedge\psi\gamma \leftrightarrow \wedge\psi'\gamma')[\sigma] = V$. Demostremos primero una implicación. Supongamos que $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\wedge\psi\gamma)[\sigma] = V$ (para el caso en que es falso, el resultado es cierto). Tenemos entonces que $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\psi)[\sigma] = V$ y $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\gamma)[\sigma] = V$; por hipótesis inductiva tenemos que $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\psi')[\sigma] = V$ y $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\gamma')[\sigma] = V$, entonces $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\wedge\psi'\gamma')[\sigma] = V$ y por lo tanto $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\wedge\psi\gamma \rightarrow \wedge\psi'\gamma')[\sigma] = V$. El recíproco se demuestra de igual manera.

El caso cuando φ es $\forall z\psi(z)$. Por hipótesis inductiva tenemos que ψ y ψ' son lógicamente equivalentes, así que $\forall z\psi(z)$ y $\forall z\psi'(z)$ son equivalentes. Como φ' es $\forall w\psi'(w)$ donde $\psi'(w)$ es $\psi'(z \rightsquigarrow w)$ verificaremos que se cumplen las hipótesis de la proposición anterior.
•) w es libre para z en ψ'.
Ninguna aparición libre de z puede estar en el alcance de $\exists w$ o $\forall w$ ya que implicaría que o w tiene aparición en ψ o hubo una aparición acotada de z que no fue remplazada en ψ'.
••) w no tiene aparición libre en ψ'.
Esto es cierto ya que no tiene aparición en ψ y en ψ' todas sus apariciones son acotadas.
Por la proposición anterior tenemos que $\forall w\psi'(w)$ es equivalente lógicamente a $\forall z\psi'(z)$ y por lo tanto a $\forall z\psi(z)$. El caso existencial se sigue de igual manera. □

II.6. Tautologías

De manera informal, una *tautología predicativa* (o simplemente *tautología*) es una fórmula cuya validez lógica es aparente sólo del significado de los conectivos lógicos, sin hacer referencia al significado de $=, \forall\exists$. Por ejemplo, $p(x) \to p(x)$ es una tautología, mientras que $\forall xp(x) \to \forall yp(y)$ y $x = x$ no lo son, dado que se necesita entender el significado de de $\forall$ y $=$, respectivamente, para ver que son válidas lógicamente.

Definición 2.54. *Una fórmula es* básica *si (en notación polaca) no empieza con un conectivo proposicional.*

Por ejemplo, $\forall xp(x) \to \forall yp(y)$ no es básica, pero es una implicación entre dos fórmulas básicas. En la definición de "tautología", consideramos las fórmulas básicas como distintos elementos atómicos sin analizar. Obsérvese que cada fórmula es obtenida a partir de fórmulas básicas usando conectivos proposicionales si es necesario

Definición 2.55. *Una* asignación de verdad *para $\mathcal{L}$ es una función v del conjunto de fórmulas básicas de $\mathcal{L}$ a $\{0, 1\} = \{F, V\}$. Dada una asignación de verdad v, definimos (recursivamente) $\bar{v}(\varphi) \in \{F, V\}$ como sigue:*

1. $\bar{v}(\neg\varphi) = 1 - \bar{v}(\varphi)$.

2. $\bar{v}(\wedge\varphi\psi)$, $\bar{v}(\vee\varphi\psi)$, $\bar{v}(\to \varphi\psi)$, *y* $\bar{v}(\leftrightarrow \varphi\psi)$ *se obtienen apartir de* $\bar{v}(\varphi)$ *y* $\bar{v}(\psi)$ *usando las tablas de verdad para* $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$.

φ es una tautología proposicional *si $\bar{v}(\varphi) = V$ para todas las asignaciones de verdad v.*

Al comparar las definiciones 2.55 2.21 y la definición 2.30, se observa que:

Proposición 2.56. *Toda tautología proposicional es válida lógicamente.*

Bosquejo de Demostración: Sea φ una tautología proposicional en el léxico $\mathcal{L}$; como se hizo notar, toda fórmula se puede obtener a partir de fórmulas básicas usando conectores proposiconales; por nuestra definición 2.21 tenemos que el valor de φ dependerá entonces del valor de cada una de las fórmulas básicas ψ_φ que la componen. Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y σ una asignación para φ; sea $v_{\mathfrak{A},\sigma}$ una asignación de verdad tal que $v_{\mathfrak{A},\sigma}(\psi_\varphi) = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi_\varphi)[\sigma]$ para cada subfórmula básica de φ ($v_{\mathfrak{A},\sigma}$ podría asignar el valor F a todas las demás fórmulas básica de $\mathcal{L}$, si es que se quiere precisar cómo es $v_{\mathfrak{A},\sigma}$) entonces por la definición 2.21 tenemos que: $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma] = \bar{v}_{\mathfrak{A},\sigma} = V$ por ser φ tautología.

II.7. Pruebas Formales

Se dará una presentación de la teoría de pruebas formales; el objetivo es construir un sistema que sea fácil de definir y analizar matemáticamente, no uno que sea fácil de aplicar. En nuestra teoría, tendremos una regla de inferencia:

$$\text{MODUS PONENS}: \quad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

Es decir, informalmente, que habiendo probado tanto φ como $\varphi \to \psi$ podemos luego concluir ψ. Formalmente será introducida en nuestra definición de prueba formal, pero antes definiremos lo que se considera afirmaciones "obviamente válidas" y les llamaremos "axiomas lógicos".

Definición 2.57. *Un* axioma lógico *de $\mathcal{L}$ es cualquier oración de $\mathcal{L}$ que es una clausura universal de una fórmula que sea de algún tipo de los listados a continuación. Aquí, x, y, z, posiblemente con subíndices, denotan variables arbitrarias.*

1. *tautologías proposicionales*
2. *$\varphi \to \forall x\varphi$, donde x no es libre en φ.*
3. *$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$.*
4. *$\forall x\varphi \to \varphi(x \rightsquigarrow \tau)$, donde τ es cualquier término que sea libre para x en φ.*

5. $\varphi(x \rightsquigarrow \tau) \to \exists x\varphi$, *donde* τ *es cualquier término que sea libre para* x *en* φ.

6. $\forall x\neg\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\varphi$.

7. $x = x$.

8. $x = y \leftrightarrow y = x$.

9. $x = y \wedge y = z \to x = z$.

10. $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to (f(x_1 \ldots x_n) = f(y_1 \ldots y_n))$, *cuando* $n > 0$ *y* f *es una símbolo funcional de* $\mathcal{L}$ *de aridad* n.

11. $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to (p(x_1 \ldots x_n) \leftrightarrow p(y_1 \ldots y_n))$, *cuando* $n > 0$ *y* p *es una símbolo predicativo de* $\mathcal{L}$ *de aridad* n.

Proposición 2.58. *Todos los axiomas lógicos son válidos lógicamente.*

Demostración. Los casos más complicados ya han sido demostrados. Para las tautologías está la proposición 2.56; para los axiomas del tipo (4) y (5) véase 2.40. Se demostrán (2) y (3) dejando el resto como ejercicio.
2. Sea φ una $\mathcal{L}$-fórmula y γ la clausura de $\varphi \to \forall x\varphi$ (un axioma del tipo (2)). Sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y σ una asignación para γ. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ el conjunto (posiblemente vacío) $V(\varphi \to \forall x\varphi)$ y $a, a_1, \ldots, a_n$ valores arbitrarios de A. Sea σ' la asignación resultante después de realizar las reasignaciones a todos lo cuantificadores iniciales de γ según la definición 2.21 ($\sigma'(x_1) = a_1, \ldots, \sigma'(x_n) = a_n$).
$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma'] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma' + (x/a)]$ por 2.22. Entonces $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma'] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\forall x\varphi)[\sigma']$, ergo $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi \to \forall x\varphi)[\sigma'] = V$. Como $a, a_1, \ldots, a_n$ arbitrarios concluímos que $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\gamma)[\sigma] = V$.
3. Sea φ y ψ $\mathcal{L}$-fórmulas y γ la clausura de $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ (un axioma del tipo (3)). Sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y σ una asignación para γ. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ el conjunto (posiblemente vacío) $V(\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi))$ y $a, b, a_1, \ldots, a_n$ valores arbitrarios de A. Sea σ' la asignación resultante después de realizar las reasignaciones a todos lo cuantificadores iniciales de γ ($\sigma'(x_1) = a_1, \ldots, \sigma'(x_n) = a_n$). Sea $b \in A$, supondremos que las dos hipótesis de las implicaciones son verdaderas, de otro modo el resultado es trivial, así suponemos que $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\forall x(\varphi \to \psi))[\sigma'] = V$ y $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\forall x\varphi)[\sigma] = V$. Por demostrar que $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi)[\sigma' + x/b] = V$
Por hipótesis tenemos que $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma' + x/b] = V$ ☺

y además $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi \to \psi)[\sigma' + x/b] = V$
así por ☺ tenemos que $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\psi)[\sigma' + x/b]$.
Como $a_1, \ldots, a_n$ valores arbitrarios de A concluimos que $\text{val}_{\mathfrak{A}}(\gamma)[\sigma] = V$. $\square$

Definición 2.59. *Si Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$, entonces una* prueba formal *a partir de Σ es una sucesión finita no vacía de oraciones de $\mathcal{L}$, $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, tal que para cada i que cumple que, o $\varphi_i \in \Sigma$ o φ_i es un axioma lógico o para algún $j, k < i$, φ_i se obtiene de φ_j, φ_k por Modus Ponens (esto es, φ_k es $(\varphi_j \to \varphi_i)$). Esta suceción es una prueba formal* **de** *la última oración, φ_n.*

Definición 2.60. *Si σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$, y φ es una oración de $\mathcal{L}$, entonces $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ sii existe una prueba formal de φ desde Σ .*

Lema 2.61 (Sonoro). *Si $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ entonces $\Sigma \models \varphi$.*

Demostración. Supóngase que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y que $\mathcal{A} \models \Sigma$; por demostrar que $\mathcal{A} \models \varphi$. Sea $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ una prueba formal de φ a partir de Σ; entonces φ_n es φ. La demostración se hará por inducción sobre i, demostrando que $\mathcal{A} \models \varphi_i$. Hay tres casos: Si $\varphi_i \in \Sigma$ se usa que $\mathcal{A} \models \Sigma$. Si φ_i es un axioma lógico, se procede por la proposición 2.58. Los primeros dos casos, cubren el pie de inducción. Para el último caso, si Modus Ponens se utiliza, entonces nótese que $\mathcal{A} \models \varphi_i$ se sigue de que $\mathcal{A} \models \varphi_j \to \varphi_i$ y $\mathcal{A} \models \varphi_j$ por hipótesis inductiva. $\square$

II.8. Estrategias para la construcción de pruebas

Como se ha indicado, nuestra definición de prueba formal realmente no facilita la escritura de un amplio cuerpo de la matemática. Sin embargo, en esta sección se demostrarán algunos principios generales que muestran como los argumentos de la matemática informal pueden ser reproducidos dentro de la teoría formal de pruebas. Además, estos métodos nos serviran posteriormente como lemas en la demostración del Teorema de Completitud.

El primer argumento informal que consideraremos es cuando, para probar que $\varphi \to \psi$, suponemos que φ es verdadero y deducimos ψ. Formalizando obtenemos:

Lema 2.62. ***Teorema Deductivo*** *$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi$ sii $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.*

Demostración. Para $\Rightarrow$: Escribimos la demostración de $\varphi \to \psi$ a partir de Σ y agregamos dos lineas al final para obtener una demostración de ψ a partir de

$\Sigma \cup \{\varphi\}$: Escribimos φ y después aplicamos Modus Ponens para poder escribir ψ.

Para $\Leftarrow$: Supongamos que $\psi_0, \ldots, \psi_n$ es una prueba formal de ψ a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$; por lo que ψ_n es ψ. Se demostrará por inducción sobre i que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi_i$.

Para nuestro pie de inducción tenemos 2 casos:

Caso 1. ψ_i es un axioma lógico o pertenece a Σ. Así, en una demostración a partir de Σ, podemos escribir en cualquier paso ψ_i, de este modo podemos construir una demostración de 3 lineas de $\varphi \to \psi_i$ a partir de Σ:

0.	ψ_i	
1.	$\psi_i \to (\varphi \to \psi_i)$	tautología
2.	$\varphi \to \psi_i$	1, 0, modus ponens

Caso 2. ψ_i es φ, lo que convierte a $\varphi \to \psi_i$ en una tautología, así que sería una demostración de una linea.

Para el paso inductivo suponemos ahora, que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi_j$. para toda $j < i$. Tenemos ahora 3 casos. Los primeros dos serían los mismos que en nuestro pie de inducción y se demostraría de igual manera (no necesitan la hipótesis inductiva).

Caso 3. Para algunos $j, k < i$ ψ_i se sigue de ψ_j y ψ_k por Modus Ponens, por lo cual, ψ_k es $(\psi_j \to \psi_i)$. Para esto procedemos del siguiente modo:

0.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi_j$	hipótesis inductiva
1.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to (\psi_j \to \psi_i)$	hipótesis inductiva
2.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} (\varphi \to \psi_j) \to [[\varphi \to (\psi_j \to \psi_i)] \to (\varphi \to \psi_i)]$	tautología
3.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} [\varphi \to (\psi_j \to \psi_i)] \to (\varphi \to \psi_i)$	2,0 modus ponens
4.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \to \psi_i$	3,1 modus ponens

Obsérvese que en el Caso 1, se esta mostrando explícitamente una demostración formal, mientras que en el Caso 3, lo que se esta mostrando es como construir una demostración formal teniendo una demostración formal de $\varphi \to \psi_i$ a partir de demostraciones formales de $\varphi \to \psi_j$ y $\varphi \to \psi_k$. $\square$

Ahora procederemos a formalizar lo que es denominado *demostración por contradicción* o *reducción al absurdo*. El cual dice que para demostrar φ, suponemos que φ es falso y derivamos una contradicción. El Lema 2.26 es la versión semántica de este argumento. Pero primero será necesario especificar que estamos entendiendo por “contradicción”:

Definición 2.63. *Si Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$ entonces Σ es* inconsistente sintacticamente *($\neg\text{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$) sii existe alguna oración φ de $\mathcal{L}$ tal que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$. "consistente" significa "no inconsistente".*

El siguiente lema nos provee de una equivalencia de "consistencia".

Lema 2.64. *Si Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a. $\neg\text{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$.

b. $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ *para toda oración* ψ *de* $\mathcal{L}$.

Demostración. (b)$\to$(a) es inmediato de la Definición 2.63. Para (a)$\to$(b). Como $\neg\text{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ significa que existe una oración φ de $\mathcal{L}$ tal que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$. Con lo anterior basta con usar la tautología $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ y aplicar Modus Ponens dos veces. □

El resultado anterior exhibe el porqué era necesario reformular la teoría de conjuntos; Kunen nos dice que Cantor probablemente sintió que su teoría de conjuntos sólo era medianamente inconsistente, pero por éste último resultado no podemos ser "medianamente inconsistente"; una vez que se ha derivado una inconsistencia, se puede probar lo que sea.

Lema 2.65. ***(Prueba por Contradicción)*** *Si Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$ y φ es una oración de $\mathcal{L}$, entonces*

1. $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ *sii* $\neg\text{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\neg\varphi\})$.

2. $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ *sii* $\neg\text{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\varphi\})$.

Demostración. Para (1), ($\Rightarrow$) Se sigue inmediatamente del hecho trivial que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$. Para ($\Leftarrow$), tenemos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ por el Lema 2.64, así que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi \to \varphi$ por el Teorema Deductivo (Lema 2.62). Además tenemos que $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ es una tautología, así que aplicando Modus Ponens tenemos que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.

(2) Se demuestra de manera análoga. □

Hasta aquí se usado repetidas veces la técnica de escribir una tautología y después aplicar Modus Ponens, esta estrategia puede ser generalizada como razonamiento tautológico.

Definición 2.66. ψ se sigue tautologicamente *de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sii $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi$ es una tautología proposicional.*

Lema 2.67. ***(Razonamiento Tautológico)*** *Si $\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ son oraciones de $\mathcal{L}$ y ψ se sigue tautologicamente de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, entonces $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \psi$.*

Demostración. Si demostramos que $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \psi))\cdots))$ es una tautología, basta con aplicar Modus Ponens n veces.

Demostraremos que dicha oración es una tautología inductivamente. Para esto, damos por cierto que $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi) \leftrightarrow (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi))$ es una tautología, conocida como la ley de exportación. La ley de exportación es nuestro pie inductivo.

Suponiendo válido para $m < n$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi \quad &\leftrightarrow \quad ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \to \psi \\
&\leftrightarrow \quad ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to (\cdots \to (\varphi_n \to \psi)\cdots)) \\
&\leftrightarrow \quad \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \psi)\cdots))
\end{aligned}$$

El primer "$\leftrightarrow$" hace uso de la asociatividad de "$\wedge$", el segundo y el tercero son aplicación de la hipótesis inductiva. □

Éste resultado es usualmente usado en conjunción con el siguiente, que se demuestra fácilmente pegando pruebas formales:

Lema 2.68. ***(Transitividad de $\vdash$)*** *Si $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$, y $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi_i$ para $i = 1, \dots, n$, entonces $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \psi$.*

Lema 2.69. ***(Reglas de los Cuantificadores)***

$$\begin{array}{llll}
\textbf{\textit{IU:}} & \forall x\varphi(x) \vdash_{\mathcal{L}} \varphi(\tau) & \textbf{\textit{GU:}} & \dfrac{\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi(c)}{\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall x\varphi(x)} \\
\textbf{\textit{IE:}} & \dfrac{\Sigma \cup \{\varphi(c)\} \vdash_{\mathcal{L}'} \psi}{\Sigma \cup \{\exists x\varphi(x)\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi} & \textbf{\textit{GE:}} & \varphi(\tau) \vdash_{\mathcal{L}} \exists x\varphi(x)
\end{array}$$

Donde, Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$, y $\varphi(x)$ es una fórmula de $\mathcal{L}$ con a lo más la variable x libre. En IU y GE, τ es un término de $\mathcal{L}$ sin variables, así que $\varphi(\tau)$ es una oración. En GU y IE, c es una símbolo constante el cual no pertenece *a $\mathcal{L}$, y $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$. En IE, ψ es una oración de $\mathcal{L}$.*

IU e IE corresponden a "Instar Universalmente" e "Instar Existencialmente". GU y GE corresponden a "Generalización Universal" y "Generalización Existencial". La regla IU (Instar Universalmente) corresponde al paso informal de que si una oración universal $\forall x\varphi(x)$ es cierta, entonces podemos concluir un caso específico $\varphi(\tau)$. Del mismo modo, GE (Generalización Existencial) corresponde al paso informal de que si podemos probar que φ se cumple para un τ específico, entonces sabemos que $\exists x\varphi(x)$. Informalmente, IU y GE son "obviamente correctos", dado que $\forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau)$ y $\varphi(\tau) \to \exists\varphi(x)$ son oraciones válidas (axiomas lógicos).

La linea horizontal significa "si $\cdots$ entonces $\cdots$", así, GU (Generalización Universal)afirma que si $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi(c)$ entonces $\Sigma_{\mathcal{L}}\forall x\varphi(x)$. GU es más artificioso que IU, dado que de un caso $\varphi(c)$ generalmente no se puede generalizar que $\forall x\varphi(x)$. GU corresponde a las palabras informales "pero c era arbitrario". Si estuviéramos trabajando con una colección Σ de hechos conocidos de los números reales lo más probable es que Σ usé la constante 0 y que $\Sigma \vdash 0+0=0$, sin embargo no podemos concluir de esto que $\Sigma \vdash \forall x(x+x=x)$, dado que la constante 0 es explícitamente mencionada en Σ.

La regla IE (Instar Existencialmente) corresponde al argumento informal "Tómese c tal que $\cdots$". Para ilustrar el usa de las cuatro reglas de cuantificadores, digamos que estamos probando que $\exists x\forall y p(x,y) \to \forall y\exists x p(x,y)$. Informalmente, suponemos que $\exists x\forall y p(x,y)$ es verdad y tómamos (IE) c tal que $\forall y p(c,y)$. Consideremos cualquier objeto d. Entonces $p(c,d)$ (IU), así $\exists x p(x,d)$ (GE). Pero d fue arbitrario (UG), así que $\forall y\exists x p(x,)$. Al escribir los pasos más formalmente, el orden de aplicación de las reglas es permutado:

0.	$p(c,d) \vdash_{\mathcal{L}''} p(c,d)$	tautología
1.	$p(c,d) \vdash_{\mathcal{L}''} \exists x p(x,d)$	0, GE
2.	$\forall y p(c,y) \vdash_{\mathcal{L}''} \exists p(x,d)$	1, IU
3.	$\forall y p(c,y) \vdash_{\mathcal{L}'} \forall y\exists x p(x,y)$	2, GU
4.	$\exists x\forall y p(x,y) \vdash_{\mathcal{L}} \forall y\exists x p(x,y)$	3, IE
5.	$\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \exists x\forall y p(x,y) \to \forall y\exists x p(x,y)$	4, Teorema Deductivo

En este ejemplo $\mathcal{L} = \{p\}, \mathcal{L}' = \{p,c\}, \mathcal{L}'' = \{p,c,d\}$. En el paso (2) se está usando implícitamente la transitividad de $\vdash$. En el paso (0) podría citarse el Lema 2.67, pero también es un hecho trivial de la definicion de $\vdash$ (la única linea φ constituye una prueba formal, por definición, de φ cuando φ pertenece al conjunto Σ de hipótesis). Las lineas (0-5) no representan una prueba formal realmente sino una demostración de que hay una prueba formal. La demostraciones del Teorema Deductivo y de las reglas de cuantificadores son constructivas, y con ellas se tendría como escribir explícitamente una prueba formal, aunque seguramente serán más de 6 lineas.

Demostración. Para el IU y GE, basta con usar Modus Ponens en conjunción del hecho de que $\forall x\varphi(x) \to \varphi(\tau)$ y $\varphi(\tau) \to \exists\varphi(x)$ son axiomas lógicos del tipo 4 y 5, respectivamente.

Para GU, sea $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ una prueba formal en $\mathcal{L}'$ de $\varphi(c)$ a partir de Σ; por lo cual, φ_n es $\varphi(c)$. Sea y una variable que no tiene aparición en ninguna parte de la demostración, y sea $\varphi_i(y)$ la fórmula resultante de remplazar todas las apariciones de c por y en φ_i; por lo cual $\varphi_n(y)$ es $\varphi(y)$. Demostraremos inductivamente sobre i que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall y \psi_i(y)$; para $i = n$, el resultado nos dirá que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall y \varphi(y)$. Esto será suficiente ya que a continuación mostramos que $\forall y \varphi(y) \vdash_{\mathcal{L}} \forall x \varphi(x)$:

0.	$\forall y \varphi(y)$	hipótesis
1.	$\forall x[\forall y \varphi(y) \to \varphi(x)]$	axioma del tipo 4
2.	$\forall x[\forall y \varphi(y) \to \varphi(x)] \to (\forall x \forall y \varphi(y) \to \forall x \varphi(x))$	axioma del tipo 3
3.	$\forall x \forall y \varphi(y) \to \forall x \varphi(x)$	2,1, modus ponens
4.	$\forall y \varphi(y) \to \forall x \forall y \varphi(y)$	axioma tipo 2
5.	$\forall x \forall y \varphi(y)$	4,0, modus ponens
6.	$\forall x \varphi(x)$	3,5, modus ponens

Al igual que en la demostración del Teorema Deductivo, nuestro pie de inducción tiene 2 casos; el Caso 1 exhibirá por que fue necesario hacer el cambio de variable a y.

Caso 1. φ_i es un axioma lógico. Entonces ψ_i es una “fórmula” del mismo tipo de axioma, es decir, ψ_i es la misma estructura que φ_i pero no es una oración, sin embargo $\forall y \psi_i$ es una clausura, convirtiéndose así en una axioma del mismo tipo que φ_i. (Teníamos que cambiar c por una variable que no estuviera en la prueba ya que, al remplazar c podría estar en el alcance de alguna variable y podría ser que ya no fuera un axioma lógico).

Caso 2. $\varphi_i \in \Sigma$. Entonces φ_i no usa la constante c (Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$), así que $\psi_i(y)$ es simplemente la oración φ_i, y $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall \psi_i(y)$ ya que $\varphi_i \to \forall y \varphi_i$ es un axioma lógico del tipo 2.

Como mencionamos al principio, al igual que en la prueba del Teorema Deductivo, tenemos 3 casos para el paso inductivo, siendo los dos primeros los mismos que en nuestro pie de inducción y demostrándose del mismo modo ya que no usan la hipótesis inductiva.

Caso 3. Para algún $j, k < i$, φ_i se obtiene de $\varphi_j, \varphi k$ por Modus Ponens, por lo cual φ_k es $(\varphi_j \to \varphi_i)$. Entonces

0.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall y \psi_j(y)$	hipótesis inductiva
1.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall y(\psi_j(y) \to \psi_i(y))$	hipótesis inductiva
2.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall y(\psi_j(y) \to \psi_i(y)) \to (\forall y \psi_j(y) \to \forall y \psi_i(y))$	axioma tipo 3
3.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall y \psi_j(y) \to \forall y \psi_i(y)$	2,1, modus ponens
4.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall y \psi_i(y)$	3,0, modus ponens

Por último, para verificar IE, la convertiremos en una aplicación de GU. Supongamos que $\Sigma \cup \{\varphi(c)\} \vdash_{\mathcal{L}'} \psi$, tenemos entonces que $\neg\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}'}(\Sigma \cup \{\varphi(c), \neg\psi\})$, y la demostración por contradicción (ver 2.65) implica que $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash_{\mathcal{L}'} \neg\varphi(c)$. Entonces por GU, $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash_{\mathcal{L}} \forall x \neg\varphi(x)$. Por lo tanto, $\neg\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\neg\psi, \neg\forall x \neg\varphi(x)\})$, lo que implica que $\Sigma \cup \{\neg\forall x \neg\varphi(x)\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ (usando demostración por contradicción nuevamente).

Por otra parte, $\forall x \neg\varphi(x) \leftrightarrow \neg\exists\varphi(x)$ es un axioma lógico (del tipo 6), y $\neg\forall x \neg\varphi(x)$ se sigue tautológicamente de este axioma y $\exists x \varphi(x)$. Por lo tanto, usando razonamiento tautológico (Lema 2.67) y transtividad de $\vdash$, tenemos que $\Sigma \cup \{\exists x \varphi(x)\} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ □

Una aplicación en particular de GU será usada y será útil aislar su enunciado:

Lema 2.70. *Supóngase que Σ y φ están en $\mathcal{L}$, con φ siendo una oración, y $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$, donde c es símbolo constante. Supóngase que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$. Entonces $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.*

Demostración. GU implica que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall\varphi$. Pero como φ es oración, x no es una variable libre en φ, por lo cual $\forall x\varphi \to \varphi$ es un axioma lógico del tipo 4. □

II.9. Teorema de completitud

Este resultado relaciona las nociones semánticas ($\models$) con las sintácticas ($\vdash$). Así, puede ser visto tanto como un resultado sobre consistencia como sobre demostrabilidad.

Teorema 2.71. ***(Teorema de Completitud)*** *Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$. Entonces*

1. $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ *sii* $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$.
2. *Para cada oración φ de $\mathcal{L}$, $\Sigma \models \varphi$ sii $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$.*

Una vez que esto sea demostrado, podemos abandonar los subíndices de "$\vdash$" y "Con".

De hecho, se puede ver fácilmente que los dos enunciados del Teorema 2.71 son equivalente, y ya hemos probado una dirección de ellos. Para limitarnos a lo que nos falta por demostrar enunciemos el:

Lema 2.72. ***(Lema Principal)*** *Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$, y supóngase que* $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$. *Entonces* $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$.

Lema 2.73. *Lema 2.72 implica el Teorema 2.71*

Demostración. Ya se ha demostrado que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ implica $\Sigma \models \varphi$, esta implicación es llamada la dirección *sonora* (por el Lema 2.61). Con esto podemos probar la dirección *sonora* de (1), $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$ implica $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$, dado que si $\neg\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ entonces existe alguna φ tal que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ y $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$; pero entonces $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \models \neg\varphi$, así, por la definición de $\models$ (ver Definición 2.24), no puede haber un modelo de Σ, entonces $\neg\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$.

De este modo, suponiendo Lema 2.72, tenemos ambas direcciones de (1), pero con esto tenemos (2) por:

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \text{ sii } \neg\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\neg\varphi\})\text{sii}\neg\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) \text{ sii } \Sigma \models \varphi \ .$$

Aquí el primer “sii” usa el Lema 2.65, el segundo “sii” usa (1), y el tercero es inmediato de la definición de $\models$ (si todo modelo que satisface Σ satisface φ no será por lo tanto posible encontrar un modelo que satisfaga Σ y $\neg\varphi$), o se puede recurrir al Lema 2.26. $\square$

Por lo anterior, nos centraremos ahora a demostrar el Lema Principal. El Teorema de Completitud fue demostrado por primera vez por Gödel en 1929. Independientemente, en 1929, Herbrand describió un método para constuir modelos usando los términos de $\mathcal{L}$. En 1949, Henkin se dio cuenta que uno podría usar las ideas de Herbrand como base para exponer el Teorema de Completez. De manera burda, aquí están los tres pasos básicos, que en orden lógico son los siguientes:

Paso 1. Añadir constantes testigos.

Paso 2. Extender a un conjunto maximal consistente.

Paso 3. Construir el modelo de Herbrand y demostrar que funciona.

Como ha sido el caso hasta este punto, seguiremos la demostración de Kunen en [18]; en la cual se demostrará primero (3). Una vez realizado esto, (1) y (2) surgirán necesariamente al intentar que el modelo de Herbrand funcione.

Para demostrar el Lema Principal, estamos suponiendo $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$, que es una aserción puramente sintáctica acerca de Σ. Lo que se quiere demostrar es que $\mathrm{Con}_{\models}(\Sigma)$, lo que significa que se debe construir un modelo $\mathfrak{A} \models \Sigma$. ¿De dónde obtendremos el modelo? Dado que lo único que tenemos es la sintaxis, debemos usar nuestros objetos sintácticos para constuir el modelo. Esta construcción asemeja algunas construcciones en álgebra, como los grupos libres y el anillo de poliniomios, donde el anillo, grupo o campo es construido a partir de objetos sintácticos.

Empezaremos describiendo el universo del modelo. Si nosotros *tuviéramos* un modelo, los *términos* del lenguaje denotaría los elementos del modelos. Dado que no tenemos un modelo aún, es natural dejar que los términos por si mismos *sean* los objetos del modelo. Precisando, sólo usaremos términos sin variables, dado que esos denotan elementos "fijos" del modelo:

Definición 2.74. *Un término τ de $\mathcal{L}$ es* cerrado *sii τ no contiene variables. Sea $\mathtt{CT}_0(\mathcal{L})$ el conjunto de todos los términos cerrados de $\mathcal{L}$.*

Para un término τ de esta índole, su valor $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)$ depende sólo de τ y $\mathfrak{A}$, y no en ninguna asignación de variable (ver Definición 2.17). Dado que no estamos permitiendo la estructura vacía, nosotros sólo podemos usar $\mathtt{CT}_0(\mathcal{L})$ como el universo de un modelo cuando $\mathcal{L}$ tiene algunos términos cerrados; esto es, cuando $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$, donde, como se definió en 2.8, $\mathcal{F}_0$ es el conjunto de símbolos constantes de $\mathcal{L}$. Entonces, podemos construir una estructura para $\mathcal{L}$ en el sentido de la Definición 2.13 como sigue:

Definición 2.75. *Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$ y supóngase que $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. Defínase el* modelo de término cerrado $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{CT}_0(\mathcal{L}, \Sigma)$ *como la $\mathcal{L}$-estructura cuyo universo es $\mathtt{CT}_0(\mathcal{L})$ tal que:*

- *Si $f \in \mathcal{F}_n$ con $n > 0$, y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathtt{CT}_0(\mathcal{L})$, entonces $f_{\mathfrak{A}_0}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ es el término cerrado $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.*
- *Si $p \in \mathcal{P}_n$ con $n > 0$, y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathtt{CT}_0(\mathcal{L})$, entonces $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in p_{\mathfrak{A}_0}$ sii $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.*
- *Si $c \in \mathcal{F}_0$, entonces $c_{\mathfrak{A}_0} = c$.*
- *Si $p \in \mathcal{P}_0$, entonces $p_{\mathfrak{A}_0} = 1$(verdad) sii $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$.*

Podemos ver, rápidamente, que la valuación de un término cerrado es él mismo:

Lema 2.76. *Si $\tau \in \mathtt{CT}_0(\mathcal{L})$ entonces $\mathrm{val}_{\mathfrak{CT}_0(\mathcal{L},\Sigma)}(\tau) = \tau$.*

Demostración. Sea φ un término cerrado, el pie de inducción es cuando $\varphi \in \mathcal{F}_0$, es decir, φ es c para algún $c \in \mathcal{F}_0$. Por definición se obtiene la igualdad deseada, $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}_0}(c) = c_{\mathfrak{A}_0} = c$. Para el paso inductivo, supongamos que φ es de la forma $f\tau_1, \ldots, \tau_n$ donde $f \in \mathcal{F}_n$ y cada τ_i es un término cerrado. Entonces $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}_0}(\varphi) = f_{\mathfrak{A}_0}(\tau_{1_{\mathfrak{A}_0}}, \ldots, \tau_{n_{\mathfrak{A}_0}}) = f(\tau_{1_{\mathfrak{A}_0}}, \ldots, \tau_{n_{\mathfrak{A}_0}})$ y esta última expresión es igual a $f\tau_1, \ldots, \tau_n$ por hipótesis inductiva. □

Obsérvese que la definición de $\mathfrak{CT}_0(\mathcal{L},\Sigma)$ tiene sentido incluso si Σ es inconsistente, así que posiblemente no se pueda afirmar que $\mathfrak{CT}_0(\mathcal{L},\Sigma) \models \Sigma$ en general. También nótese que las interpretaciones de las funciones no dependen de Σ. Por ejemplo, digamos que $\mathcal{L} = \{+, 0\}$ y Σ contiene el axioma $\forall x[x + 0 = x]$. El dominio $\mathtt{CT}_0(\mathcal{L})$ es infinito numerable, y se forma usando sólo $\mathcal{L}$, no Σ. El dominio contiene los términos cerrados $0, 0 + 0, 0 + (0 + 0), (0 + 0) + 0$, etc. Todos estos son objetos distintos (el primero es un término cerrado de longitud 1, el segundo un término cerrado de longitud 3 que usa dos términos constantes y uno funcional, etc.), por lo cual $\mathfrak{CT}_0 \models 0 + 0 \neq 0$, a pesar de que $\Sigma \vdash 0 + 0 = 0$. Este ejemplo sugiere que los elementos de nuestro dominio no deberían ser realmente los términos cerrados, sino las *clases de equivalencias* de los términos cerrados, donde dos términos son equivalentes sii Σ demuestra que son iguales.

Definición 2.77. *Defínase una relación $\sim$ (de hecho $\sim_{\mathcal{L},\Sigma}$) sobre $\mathtt{CT}_0(\mathcal{L})$ por:*

$$\tau \sim \sigma \textit{ sii } \Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \tau = \sigma\ .$$

Lema 2.78. *$\sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathtt{CT}_0(\mathcal{L})$.*

Demostración. Para ver que $\sim$ es simétrica basta con usar el axioma lógico del tipo (8), $\forall x, y[x = y \leftrightarrow y = x]$. Aquí un bosquejo de la prueba formal:

1.	$\Sigma \vdash \tau = \sigma$	Hipótesis
2.	$\emptyset \vdash \forall x, y[x = y \leftrightarrow y = x]$	Axioma lógico del tipo 8
3.	$\Sigma \vdash \tau = \sigma \leftrightarrow \sigma = \tau$	2, IU (dos veces)
4.	$\Sigma \vdash \sigma = \tau$	1,3 Consecuencia Tautológica

Para ver que $\sim$ es reflexiva,se sigue inmediatamente de Instar Universalmente al axioma lógico del tipo (7), $\forall x[x = x]$.

Para ver que $\sim$ es transitiva usaremos el axioma lógico del tipo (9), $\forall x, y, z[x = y \wedge y = z \to x = z]$. Para nuestro bosquejo de prueba formal recordemos que $\tau_1 \sim \tau_2$ sii $\Sigma \vdash \tau_1 = \tau_2$:

1.	$\Sigma \vdash \tau_1 = \tau_2 \wedge \tau_2 = \tau_3$	Hipótesis
2.	$\emptyset \vdash \forall x, y, z[x = y \wedge y = z \to x = z]$	Axioma lógico del tipo (9)
3.	$\Sigma \vdash \tau_1 = \tau_2 \wedge \tau_2 = \tau_3 \to \tau_1 = \tau 2$	2, IU (tres veces)
4.	$\Sigma \vdash \tau_1 = \tau_3$	1,3 Modus Ponens

$\square$

Habiendo demostrado que $\sim$ es una relación de equivalencia, podemos formar el conjunto cociente $\mathtt{CT}_0/\sim$, pero también será necesario definir una $\mathcal{L}$-estructura adecuada sobre el cociente:

Definición 2.79. *Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$ y supóngase que $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. Defínase $\mathtt{CT}(\mathcal{L}, \Sigma) = \mathtt{CT}_0(\mathcal{L})/\sim$, y defínase el* Modelo de Herbrand $\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ *como la $\mathcal{L}$-estructura cuyo universo es $\mathtt{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ tal que:*

- *Si $f \in \mathcal{F}_n$ con $n > 0$, y $[\tau_1], \ldots, [\tau n] \in \mathtt{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$, entonces $f_{\mathfrak{A}}([\tau_1,] \ldots, [\tau_n])$ es la clase de equivalencia $[f\tau_1, \ldots, \tau_n])$.*
- *Si $p \in \mathcal{P}_n$ con $n > 0$, y $[\tau_1], \ldots, [\tau_n] \in \mathtt{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$, entonces $([\tau_1], \ldots, [\tau n]) \in p_{\mathfrak{A}}$ sii $\Sigma \vdash_L p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.*
- *Si $c \in \mathcal{F}_0$, entonces $c_{\mathfrak{A}} = [c]$.*
- *Si $p \in \mathcal{P}_0$, entonces $p_{\mathfrak{A}} = 1$(verdad) sii $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$.*

Justificación. Cuando $n > 0$, debemos verificar que nuestras definiciones de $f_{\mathfrak{A}}$ y $p_{\mathfrak{A}}$ son independientes de los representantes de clase que se escojan. En concreto, digamos $\tau_i \sim \sigma_i$ para $i = 1, \ldots, n$. De este modo cada $[\tau_i] = [\sigma_i]$. Nuestra definición de $f_{\mathfrak{A}}$ sería ambigua a menos que pudiéramos constatar que $[f(\tau_1, \ldots, \tau_n)] = [f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)]$; esto es, que $f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \sim f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Para verificar lo anterior, nótese que $\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n[x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n] \rightarrow (f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$ es un axioma lógico del tipo (10), así que $\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} [\tau_1 = \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \tau_n = \sigma_n] \rightarrow (f(\tau_1, \ldots, \tau_n) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))$ por IU (ver Lema 2.69, aplicado $2n$ veces). Dado que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \tau_i = \sigma_i$ para cada i, por nuestra definición de $\sim$ tenemos que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} f(\tau_1, \ldots, \tau_n) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, ya que esto se sigue tautológicamente (ver Lema 2.67). Por lo tanto, $f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \sim f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Similarmente, nuestra definición de $p_{\mathfrak{A}}$ podría ser ambigua a menos que verifiquemos que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ sii $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Para verificar esto, se procede de manera similar a lo ya hecho, ahora usando que $\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n[x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n] \rightarrow (p(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow p(y_1, \ldots, y_n))$ es un axioma lógico del tipo 11. $\square$

Obsérvese que en esta justificación y en la del lema 2.78, “simplemente pasó” que tuvieramos las oraciones necesarias en nuestro listado de axiomas lógicos. La lista elegida es un poco arbitraria; se ha construido con el objetivo de que la demostración del Teorema de Completitud se cumpliera.

Tenemos ahora que, en la estructura cociente $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$, los terminos que *deberían* ser iguales, son iguales. Según el ejemplo anteriormente dado $\mathfrak{CT}_0 \models 0+0 \neq 0$, pero $\mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma) \models 0+0=0$ porque $[0+0]=[0]$. A continuación se exhibirán los casos precisos en que nuestro modelo "funciona" como nos gustaría sin tener que agregar restricciones sobre Σ:

Lema 2.80. *Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$ y supóngase que $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. Sea $\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(\mathcal{L},\Sigma)$. Entonces*

1. *Si τ es cualquier término cerrado de $\mathcal{L}$, entonces* $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau) = [\tau]$.
2. *Si φ es una oración de $\mathcal{L}$ de la forma $\forall x_1,\ldots,x_n\psi(x_1,\ldots,x_n)$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$ sii $\mathfrak{A} \models \varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ para cualesquier términos cerrados $\tau_1,\ldots,\tau_n$.*
3. *Si φ es una oración atómica, entonces $\Sigma \vdash_L \varphi$ sii $\mathfrak{A} \models \varphi$.*
4. *Si $\Sigma \vdash_L \varphi$, donde φ es la clausura de una fórmula atómica, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$.*

Demostración. (1). Por inducción: Si $\tau = c \in \mathcal{F}_0$, por definición $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(c) = [c]$.
Si τ es de la forma $f\tau_1\ldots\tau_n$, entonces
$\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(f\tau_1\ldots\tau_n) = f_{\mathfrak{A}}(\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1),\ldots,\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)) = f_{\mathfrak{A}}([\tau_1],\ldots,[\tau_n]) = [f\tau_1\cdots\tau_n]$. La segunda igualdad es por hipótesis inductiva y la tercera por definición de $\mathfrak{A}$.

(2) Se hará una implicación, siendo la otra similar. Supongámos que $\mathfrak{A} \models \varphi$. Sean términos cerrados $\tau_1,\ldots,\tau_n$ arbitrarios pero fijos. Como todo elemento de A es de la forma $[\tau]$ para algún τ término cerrado, la hipótesis $\mathfrak{A} \models \varphi$ nos asegura qué $\mathfrak{A} \models \psi[[\tau_1],\ldots,[\tau_n]$. (1) nos asegura que $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_i) = [\tau_i]$ por lo cual tenemos que $\mathfrak{A} \models \psi[\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1),\ldots,\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_n)]$ pero esto sii $\mathfrak{A} \models \psi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ por Lema2.41.

(3) Si φ es de la forma $p(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ donde cada τ_i es un término cerrado tenemos que:
$\mathfrak{A} \models \varphi$ sii $([\tau_1],\ldots,[\tau_n]) = ([\tau_1],\ldots,[\tau_n]) \in p_{\mathfrak{A}}$ sii $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p(\tau_1,\ldots,\tau_n)$.
La primera igualdad es por (1) y la segunda doble implicación es por definición de $p_{\mathfrak{A}}$.

Si φ es $\tau_1 = \tau_2$ entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$ sii $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_1) = [\tau_1] = [\tau_2] = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau_2)$ sii $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \tau_1 = \tau_2$. La última doble implicación es por definición de $\sim$.

(4) Digamos que φ es $\forall x_1,\ldots,x_k\psi(x_1,\ldots,x_k)$, donde ψ es atómica. Usando (2), bastará mostrar que $\mathfrak{A} \models \psi(\tau_1,\ldots,\tau_k)$ para cualesquier

$\tau_1, \ldots, \tau_k \in \mathtt{CT}_0$. Como $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$, entonces $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \psi(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ por IU. Dado que
$\psi(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ es una oración atómica, el resultado se obtiene por (3).

$\square$

En particular, si sucediera que todas las oraciones de Σ son clausuras de fórmulas atómicas, entonces $\mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma) \models \Sigma$. Esta situación puede suceder ocasionalmente. Por ejemplo, digamos que $\mathcal{L} = \{\cdot, i, 1, a, b\}$ donde a, b son símbolos constantes, y Σ es el conjunto de axiomas para grupos $GP = \{\gamma_1, \gamma_{2,1}, \gamma_{2,2}\}$ donde:

γ_1. $\forall xyz[x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z]$

$\gamma_{2,1}$. $\forall x[x \cdot 1 = 1 \cdot x = x]$

$\gamma_{2,2}$. $\forall x[x \cdot i(x) = i(x) \cdot x = 1]$

En este caso, Σ no menciona a a, b, pero implica que varios términos cerrados que involucran a, b que "deberían" serlo de hecho lo son. Por ejemplo, por la ley asociativa γ_1 e IU, $\Sigma \vdash a \cdot (b \cdot a) = (a \cdot b) \cdot a$. También, el Lema 2.80 implica que $\mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ es un grupo, dado que los tres axiomas de Σ son ecuaciones universalmente cuantificadas (es decir cerraduras de fórmulas atómicas, las cuales son satisfechas por el modelo por el punto (4) del referido lema).

En muchos casos, $\mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ no cumplirá el ser modelo para Σ. Un ejemplo que ilustrará los dos principales problemas que podríamos tener. Sea $\mathcal{L} = \{<, a, b\}$, donde a, b son símbolos constantes, y digamos que Σ afirma que $<$ es un orden estricto total sin elemento máximo ($\forall y \exists x(y < x)$). Así Σ no menciona a, b. Los únicos términos cerrados son a y b; y $a \not\sim b$, dado que $\Sigma \nvdash a = b$. Por esto, $\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ tiene dos elementos $[a] = \{a\}$ y $[b] = \{b\}$, y $<_{\mathfrak{A}}$ es la relación vacía, dado que $\Sigma \nvdash \tau < \sigma$ para cualquier τ, σ en $\{a, b\}$.

- Problema 1. $\Sigma \vdash \exists x(b < x)$, pero $\mathfrak{A} \not\models \exists x(b < x)$.
- Problema 2. Σ contiene el axioma de tricotomía de un orden total, así que por IU, $\Sigma \vdash (a < b \vee b < a \vee a = b)$, pero esto es falso en $\mathfrak{A}$ porque $<_{\mathfrak{A}}$ es el vacío.

Estos dos problemas son resultos por el Paso 1 y 2 que se mencionaron en la página 55. En el paso 1, agregamos nuevas "constantes testigo" para nombrar algo que debería existir; en este ejemplo se agregaría una constante c más el axioma $b < c$. Esto proceso debe repetirse infinitas veces, dado que cualquier orden total, sin elemento máximo, es infinito. En el Paso 2, se extenderá nuestro Σ consistente a un conjunto maximalmente consistente; en este ejemplo, escogeríamos cualquiera de los casos, $a < b$, $b < a$, $a = b$ y lo agregaríamos a Σ. Este dos pasos pueden realizarse en cualquier orden. Kunen decide iniciar con el Paso 2 ya que es un poco más fácil de explicar:

Definición 2.81. *Un conjunto de oraciones de* Σ *en* $\mathcal{L}$ *es* maximalmente*(*$\vdash, \mathcal{L}$*)* consistente *sii*

1. $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$*, y*
2. *No existe un conjunto de oraciones* Π *de* $\mathcal{L}$ *tal que* $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Pi)$ *y* $\Sigma \subsetneqq \Pi$.

Como se ha mencionado anteriormente, una vez que el Teorema de Completitud esté probado, escribiremos simplemente $\mathrm{Con}(\Sigma)$. Entonces, uno usualmente diría que Σ es "maximalmente consistente", pero seguirá siendo importante que tengamos un léxico $\mathcal{L}$ específico en mente, dado que para cada Σ tendremos superconjuntos propios que serán consistentes si permitimos expandir $\mathcal{L}$.

Lema 2.82. *Si* Δ *es un conjunto de oraciones en* $\mathcal{L}$ *y* $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}$*, entonces existe un* Σ *en* $\mathcal{L}$ *tal que* $\Sigma \supseteq \Delta$ *y* Σ *maximalmente(*$\vdash, \mathcal{L}$*) consistente.*

Demostración. Sea S el conjunto de todas las oraciones de $\mathcal{L}$; entonces $\Delta \in \mathcal{P}(S)$. Sea $\mathcal{F} = \{\Pi \in \mathcal{P}(S) : \mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Pi)\}$. Entonces $\mathcal{F}$ es de carácter finito (ver 1.41). En efecto, Si existe Γ subconjunto finito de $\Pi \in \mathcal{P}(S)$ tal que $\neg\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Gamma)$ entonces la prueba formal de inconsistencia de Γ es una prueba formal de inconsistencia para Π y si $\neg\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Pi)$ es porque tenemos una una prueba formal de inconsistencia a partir de un subconjunto finito Γ (las pruebas formales siempre son finitas) de Π. El contrarecíproco de esta doble implicación son las condiciones para que $\mathcal{F}$ sea de caracter finito. Se sigue del Lema de Tukey (1.42) que existe un elemento maximal $\Sigma \in \mathcal{F}$ tal que $\Sigma \supseteq \Delta$. $\square$

Se podría usar indistintamente el Lema de Zorn o recursión transfinita para demostrar que tal Σ existe. En la prueba del Teorema de Completitud, si se desea producir un modelo para Δ, primero obtendremos un $\Sigma \supseteq \Delta$ maximal y después obtener un modelo tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Por supuesto que tendríamos que $\mathfrak{A} \models \Delta$. El modelo de términos cerrados $\mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Sigma)$ será más fácil de manipular que $\mathfrak{CT}(\mathcal{L}, \Delta)$ debido a las siguientes propiedades que se obtiene por la maximalidad:

Lema 2.83. *Supóngase que Σ en $\mathcal{L}$ es maximalmente$(\vdash, \mathcal{L})$ consistente. Entonces para cualesquier oraciones φ, ψ de $\mathcal{L}$ se cumple que:*

1. $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ *sii* $\varphi \in \Sigma$.
2. $(\neg\varphi) \in \Sigma$ *sii* $\varphi \notin \Sigma$.
3. $(\varphi \vee \psi) \in \Sigma$ *sii* $\varphi \in \Sigma$ *o* $\psi \in \Sigma$.

Demostración. Para (1): $\Leftarrow$ es claro. Para $\Rightarrow$, usamos que $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$ y que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$. De esto modo obtenemos que $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\varphi\})$, de no serlo tendríamos por Lema 2.65 que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ lo cual contradiría la consistencia de Σ; concluimos así que $\varphi \in \Sigma$ por maximalidad.

Para(2): $\Rightarrow$ se sigue inmediato, ya que si $\varphi \in \Sigma$ contradiría $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$. Para $\Leftarrow$, $\varphi \notin \Sigma$ implica que $\neg\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\varphi\})$ por maximalidad. Pero entonces $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ usando prueba por contradicción (nuevamente, Lema 2.65), así tenemos que $(\neg\varphi) \in \Sigma$ por (1).

Para (3) $\Leftarrow$: Si Σ contiene a φ o ψ, El lema 2.67 nos asegura que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \vee \psi$ ya que $\varphi \to \varphi \vee \psi$ es una tautología. Por lo tanto $(\varphi \vee \psi) \in \Sigma$ por (1).

Para (3) $\Rightarrow$: Si suponemos que $(\varphi \vee \psi) \in \Sigma$ y que $\varphi \notin \Sigma$ y $\psi \notin \Sigma$. Entonces Σ contiene $\neg\varphi$ y $\neg\psi$ por (2), lo que contradice $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$. □

Continuando con el ejemplo dado anteriormente, donde Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L} = \{<, a, b\}$ que afirma que $<$ es un orden estricto total sin elemento máximo, sea $\Sigma' \supset \Sigma$ maximal. Usando Σ' para construir nuestro modelo de Σ, el Lema 2.83 resuelve el Problema 2. Esto es así ya que, se ahora $\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(,\Sigma')$. $\Sigma' \vdash (a < b \vee b < a \vee a = b)$, así que $(a < b \vee b < a \vee a = b) \in \Sigma'$ (por 1 de 2.83) y por lo tanto contiene a una de las oraciones $a < b$, $b < a$, $a = b$; cual de ellas depende de Σ', ya que la extensión maximal no es única, pero Σ' no puede contener más de una de estas oraciones, ya que cualquier par contradiría los axiomas de orden estricto total.

Este ejemplo puede generalizarse; los conjuntos maximalmente consistentes pueden decidir todas las oraciones que no usen cuantificadores:

Lema 2.84. *Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$. Supóngase que $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ y que Σ es maximalmente($\vdash, \mathcal{L}$) consistente. Sea $\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(,\Sigma)$. Sea φ una oración de $\mathcal{L}$ que no usa cuantificador alguno. Entonces $\varphi \in \Sigma$ sii $\mathfrak{A} \models \varphi$.*

Demostración. Para simplificar la redacción, haremos uso de la siguiente notación. Definiremos $\mathrm{val}_{\Sigma}(\varphi)$ como V sii $\varphi \in \Sigma$ y F sii $\varphi \notin \Sigma$ (o equivalentemente, sii $\neg\varphi \in \Sigma$ por el Lema 2.83). Entonces nuestro lema 2.84 puede ser reformulado como que $\mathrm{val}_\Sigma(\varphi) = \mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ siempre que φ no contenga cuantificadores.

La demostración la haremos por inducción sobre φ. Dado que φ no usa cuantificadores, la obtenemos a partir de oraciones atómicas usando conectivos proposicionales.

Para el pie de inducción, supongamos que φ es una oración atómica. Entonces $\varphi \in \Sigma$ sii $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ por el Lema 2.83, y $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ sii $\mathfrak{A} \models \varphi$ por el Lema 2.80.

Para el paso inductivo, supondremos que el lema es cierto para oraciones de menor longitud (nuestra hipótesis inductiva), y probaremos el lema para φ. Hay 5 casos, dependiendo de como φ es construida a partir de oraciones de menor longitud.

Si φ es $\neg\psi$, entonces $\neg\psi \in \Sigma$ sii $\psi \notin \Sigma$ sii $\mathfrak{A} \not\models \psi$ sii $\mathfrak{A} \models \neg\psi$. Los tres "sii" usados corresponden, respectivamente, al Lema 2.83, hipótesis inductiva, y la definición de $\models$.

Para los otros cuatro casos, φ es de la forma $\psi \bigodot \chi$, donde $\bigodot$ es alguno de los símbolos $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Por Definición 2.21, $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ es calculado a partir de $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\psi)$ y $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\chi)$ usando la tabla de verdad de $\bigodot$. Nuestra inducción estará completa demostrando que $\mathrm{val}_\Sigma(\varphi)$ también está determinado por $\mathrm{val}_\Sigma(\psi)$ y $\mathrm{val}_\Sigma(\chi)$ usando la misma tabla de verdad. Obsérvese que, a grandes rasgos, esto es cierto ya que obtendremos que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ a través de razonamientos tautológicos (2.67) que usan la misma tabla de verdad usada en la definición de tautología (2.55) que son válidas lógicamente (i.e. válidas en todos los modelos). Examinemos esto a detalle para cada caso:

Si $\bigodot$ es $\vee$, el resultado se sigue inmediatamente del Lema 2.83.

Si $\bigodot$ es $\leftrightarrow$. Si $\mathrm{val}_\Sigma(\psi) = \mathrm{val}_\Sigma(\chi)$, entonces tenemos que o $\{\psi, \chi\} \subseteq \Sigma$ o $\{\neg\psi, \neg\chi\} \subseteq \Sigma$, así que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ (ya que se sigue tautológicamente), entonces $\varphi \in \Sigma$ por Lema 2.83, y concluimos que $\mathrm{val}_\Sigma(\varphi) = V$. Si $\mathrm{val}_\Sigma(\psi) \neq \mathrm{val}_\Sigma(\chi)$, tenemos que, o $\{\neg\psi, \chi\} \subseteq \Sigma$ o $\{\psi, \neg\chi\} \subseteq \Sigma$, tenemos que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ nuevamente por razonamiento tautológico y así nuevamente el Lema 2.83 nos asegura que $\neg\varphi \in \Sigma$ y por lo tanto $\mathrm{val}_\Sigma(\varphi) = F$. En los cuatro casos para $\mathrm{val}_\Sigma(\psi)$ y $\mathrm{val}_\Sigma(\chi)$ obtenemos que $\mathrm{val}_\Sigma(\varphi)$ esta determinado por ellos dos usando la tabla de verdad de $\leftrightarrow$.

Si $\bigodot$ es $\wedge$. Si $\mathrm{val}_\Sigma(\psi) = \mathrm{val}_\Sigma(\chi) = V$ obtenemos que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ por razonamiento tautológico ($\psi \wedge \chi \rightarrow \psi \wedge \chi$ es tautología), i.e. $\mathrm{val}_\Sigma(\varphi) = V$. Si $\mathrm{val}_\Sigma(\psi) = F$ obtenemos que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\psi$ por razonamiento tautológico ($\neg\psi \rightarrow \neg(\psi \wedge \chi)$), i.e. $\mathrm{val}_\Sigma(\varphi) = F$, el otro caso es análogo. Lo cual coincide con la tabla de verdad de $\wedge$.

Por último, si $\odot$ es $\to$ procedemos de manera similar. Si $\text{val}_\Sigma(\psi) = F$ (caso en que la hipótesis es falsa) usamos que $\neg\psi \to \neg\psi \lor \chi$ es tautología y $\neg\psi \lor \chi \to \psi \to \chi$ también lo es. Si $\text{val}_\Sigma(\psi) = V$ (caso en que la hipótesis es verdadera). Si $\text{val}_\Sigma(\psi) = V$ usamos la tautología $\chi \to \chi \lor \neg\psi$. Si $\text{val}_\Sigma(\chi) = F$ usamos la tautología $\psi \land \neg\chi \to \psi \land \neg\chi$. □

Con esto tenemos resuelto el Problema 2 ahora queda resolver el Problema 1, el cual involucra oraciones con cuantificadores. Reformulando lo anteriormente dicho, debemos asegurar que siempre que un axioma implique la existencia de algo, tengamos un término cerrado que lo nombre. Formalizaremos esto con las siguientes definiciones:

Definición 2.85. *Una* oración existencial *es una oración de la forma* $\exists x\varphi(x)$.

La definición implica que ninguna variable, salvo x, puede ser libre en φ, así $\varphi(\tau)$ es una oración para cada término cerrado τ.

Definición 2.86. *Si* Σ *es un conjunto de oraciones de* $\mathcal{L}$ *y* $\exists x\varphi(x)$ *es una oración existencial, entonces* τ *es un* término testigo *para* $\exists x\varphi(x)$ *(con respecto a* $\Sigma, \mathcal{L}$*) sii* $\tau \in \mathtt{CT}_0(\mathcal{L})$ *y* $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} (\exists x\varphi(x) \to \varphi(\tau))$*. Entonces* Σ tiene testigos en $\mathcal{L}$ *sii cada oración existencial tiene algún término testigo.*

Un conjunto de axiomas podría tener términos testigos para algnas oraciones existenciales y para otras no. Por ejemplo, digamos que Σ son los axiomas para campos expresados en $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot, -, i\}$, donde "$-$" denota el inverso aditivo e "i" denota el inverso multiplicativo. Sea $\varphi(x)$ la fórmula $x + 1 = 0$ y $\psi(x)$ la fórmula $(1 + 1) \cdot x = 1$. Entonces -1 es un término testigo para $\exists x\varphi(x)$ y $i(1 + 1)$ es un término testigo para $\exists x\psi(x)$. En el caso de φ, tanto $\exists x\varphi(x)$ y $\varphi(-1)$ son demostrable a partir de Σ. En el caso de ψ, ni $\exists x\psi(x)$ ni $\psi(i(1 + 1))$ son demostrable a partir de Σ (podría ser que en nuestro campo fuera de característica dos y por lo tanto $1 + 1 = 0$), pero la implicación $\exists x\psi(x) \to \psi(i(1 + 1))$ es demostrable usando el axioma del inverso multiplicativo, $\forall x[x \neq 0 \to x{\cdot}i(x) = 1]$. Este es un ejemplo de una oración existencial demostrable y con testigos y de otra no demostrable pero también con testigo. Sin embargo, no hay símbolo en nuestro léxico para $\sqrt{2}$, así que si $\chi(x)$ es $x \cdot x = 1 + 1$, entonces no hay término testigo para $\exists x\chi(x)$; informalmente, para ver este hecho, pensemos en el campo de los números reales, donde cada τ término cerrado denota un número racional, así que $\chi(\tau)$ es falsa y por lo tanto la implicación $\exists x\chi(x) \to \chi(\tau)$ es falsa para todos los términos cerrados τ. ¿Qué pasaría si agregáramos un nuevo símbolo constante c al léxico y el axioma $\exists x\chi(x) \to \chi(c)$ a Σ ? Este axioma no afirma que 2 deba tener una raíz cuadrada, sino que, si la tuviera, entonces "c" la denotaría. Entonces, informalmente, no sólo el nuevo axioma es consistente, sino que escencialmente no dice algo nuevo; esto sería de hecho una *extensión conservadora* en el sentido de que si θ es cualquier enunciado sobre campos que no mencione "c", y θ es demostrable usando el nuevo axioma, entonces θ es demostrable sin usar el nuevo axioma. Esta afirmación se formalizará con los Lemas2.88 y 2.90. Para motivar la introducción de estos tipos de axiomas y constantes, veamos que nos resuelven el Problema 1:

Lema 2.87. *Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$. Supongamos que Σ es un maximalmente$(\vdash, \mathcal{L})$ consistente y que Σ tiene testigos en $\mathcal{L}$. Sea $\mathfrak{A} = \mathfrak{CT}(,\Sigma)$. Entonces $\mathfrak{A} \models \Sigma$.*

Demostración. Se demostrará que

$$\varphi \in \Sigma \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \quad (*)$$

para cada oración φ de $\mathcal{L}$. Definamos $S(\varphi)$ como el número total de apariciones de los símbolos $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$ en φ. Se hará inducción sobre $S(\varphi)$.

Si $S(\varphi) = 0$ (i.e., φ es atómica), entonces $(*)$ se cumple por 2.84.

Supongamos ahora que $S(\varphi) > 0$ y que $(*)$ se cumple para toda oración con menor S. Existen dos casos principales a considerar.

En los casos proposicionales, φ es de la forma $\neg\psi$ o $\psi \odot \chi$, donde $\odot$ es alguno de los símbolos, $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$. Podemos demostrar $(*)$ exactamente del mismo modo que en la prueba del Lema 2.84.

En los casos de cuantificadores, φ es $\exists x\psi(x)$ o $\forall x\psi(x)$.

Si φ es de la forma $\exists x\psi(x)$, entonces podemos fijar un término testigo tal que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} (\exists x\psi(x) \rightarrow \psi(\tau))$. Entonces $S(\psi(\tau)) = S(\varphi) - 1$, por lo tanto $(*)$ se cumple para $\psi(\tau)$.

Si $\varphi \in \Sigma$, entonces $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \psi(\tau)$ (recordemos que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} (\exists x\psi(x) \rightarrow \psi(\tau)))$, y por la maximalidad de Σ tenemos que $\psi(\tau) \in \Sigma$ (Lema 2.83), y por lo tanto $\mathfrak{A} \models \psi(\tau)$ y de este modo $\mathfrak{A} \models \varphi$ (el elemento que lo valida es $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)$).

Si $\mathfrak{A} \models \varphi$ entonces por definición "$\models$", $\mathfrak{A} \models \psi[a]$ para algún $a \in A$. Por definición de $\mathfrak{CT}(,\Sigma)$, este a es de la forma $[\pi]$ para algún término cerrado π, es decir $\mathfrak{A} \models \psi\,[[\pi]]$ pero como el Lema 2.80 nos asegura que $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\pi) = [pi]$ tenemos en conjunción del Lema 2.39 que $\mathfrak{A} \models \psi(\pi)$. Aplicando $(*)$ a $\psi(\pi)$, tenemos que $\psi(\pi) \in \Sigma$, por lo que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ por GE (Lema 2.69, y por la maximalidad de Σ concluimos que $\varphi \in \Sigma$.

Obsérvese que a diferencia del Lema 2.84 no pudimos usar inducción sobre la longitud de φ debido a que $\psi(\tau)$ o $\psi(\pi)$ podrían ser de longitud mayor que la de φ.

Por último, digamos que φ es de la forma $\forall x\psi(x)$. Si $\varphi \in \Sigma$, entonces $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \psi(\pi)$ para cada término cerrado π por IU, aplicando la maximalidad tenemos que $\psi(\pi) \in \Sigma$ para cada uno de estos términos π. Entonces, como en el caso de $\exists$, tenemos que $\mathfrak{A} \models \psi(\pi)$ para todo π, y el Lema 2.80 nos asegura que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Para la otra implicación demostraremos el contrarecíproco, supongamos que $\varphi \notin \Sigma$. Entonces $\neg\varphi \in \Sigma$ por maximalidad. Tomemos un término testigo para $\exists x\neg\psi(x) \to \neg\psi(\tau)$, esto nos asegura que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} (\exists x\neg\psi(x)) \to \neg\psi(\tau)$. Dado que podemos demostrar que $\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \neg\forall x\psi(x) \to \exists\neg\psi(x)$, tenemos que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} (\neg\varphi) \wedge (\neg\varphi \to \exists\neg\psi(x)) \wedge (\exists x\neg\psi(x) \to \neg\psi(\tau))$, con lo que podemos concluir que $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\psi(\tau)$ (se puede verificar que es un razonamiento tautológico o derivarlo apliando dos veces modus ponens), de este modo $\psi(\tau) \notin \Sigma$ porque Σ es consistente (ver 2.83, así que $\mathfrak{A} \not\models \psi(\tau)$ por $(*)$ para $\psi(\tau)$ y por lo tanto (por definición de $\models$) $\mathfrak{A} \not\models \varphi$. $\square$

Solo nos faltaría verificar que podemos construir conjuntos consistentes de oraciones con testigos. Lo demostraremos en varios pasos:

Lema 2.88. *Supóngase que Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$, $\exists\varphi(x)$ es una oración existencial de $\mathcal{L}$, y $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$, donde c es un símbolo constante y $c \notin \mathcal{L}$. Sea $\Sigma' = \Sigma \cup \{\exists x\varphi(x) \to \varphi(c)\}$. Supóngase que* $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$. *Entonces* $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}'}(\Sigma')$.

Demostración. Demostraremos el contrarecíproco. Asumiendo $\neg\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}'}(\Sigma')$ podemos realizar la siguiente prueba

0.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \neg(\exists x\varphi(x) \to \varphi(c))$	Demostración por contradicción
1.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \exists x\varphi(x)$	0, tautología
2.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}'} \neg\varphi(c)$	0, tautología
3.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \forall x\neg\varphi(x)$	2, GU
4.	$\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} \forall x\neg\varphi(x) \leftrightarrow \neg\exists x\varphi(x)$	axioma tipo 6
5.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg\exists x\varphi(x)$	3,4, tautología
6.	$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \exists x\varphi(x)$	1, Lema 2,70

Usando (5) y (6) concluimos que $\neg\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}(\Sigma)}$. En los pasos (1)(2)(5), se hace referencia al Lema 2.67 (en (1) y(2)se hace uso de la tautología $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$). En el paso (0), se está haciendo uso del Lema 2.65, el cual nos dice que $\neg\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma \cup \{\exists x\varphi(x) \to \varphi(c)\})$ sii $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg(\exists x\varphi(x) \to \varphi(c))$. $\square$

Este lema puede ser iterado y agregar constantes testigos para varias oraciones agregando un nuevo símbolo para cada oración:

Lema 2.89. *Supóngase que* Σ *es un conjunto de oraciones de* $\mathcal{L}$ *y* δ *es cualquier ordinal. Sea* c_α*, con* $\alpha < \delta$ *una colección de nuevos símbolos constantes; para* $\alpha \leq \delta$*, sea* $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L} \cup \{c_\xi : \xi < \alpha\}$*. Para cada* $\alpha < \delta$*, sea* $\exists x \varphi_\alpha(x)$ *una oración existencial de* $\mathcal{L}_\alpha$*. Sea* $\Sigma_\delta = \Sigma \cup \{\exists x \varphi_\alpha(x) \to \varphi(c_\alpha)\}$*, y supóngase que* $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$*. Entonces* $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}_\delta}(\Sigma_\delta)$*.*

Demostración. Demostración por inducción sobre los ordinales para la variable δ. El caso en que $\delta = 0$ es trivial, dado que $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ y $\Sigma_0 = \Sigma$. El caso cuando δ es sucesor, i.e. cuando $\delta = \gamma + 1$. Por hipótesis inductiva el resultado es cierto para γ, por lo cual sólo se desea agregar una oración existencial y un símbolo constante, y esto se sigue del Lema 2.88. Para el caso cuando δ es límite. Informalmente: Si procedemos por contradicción, suponemos que Σ_δ es inconsistente, pero como toda prueba es finita, esto implicaría que Σ_α es inconsistente para algún $\alpha < \delta$ lo cual contradice nuestra hipótesis inductiva. Formalizando esto obtenemos que: $\exists \Delta \subseteq \Sigma_\delta$ tal que $\Delta \vdash \psi$ y $\Delta \vdash \neg\psi$. Sea $A = \{\alpha \in \mathrm{Ord} : \Delta \subseteq \Sigma_\alpha\}$ sea $\beta = \min(\mathrm{A})$, $\beta < \delta$ ya que todas las pruebas son finitas; pero como $\Delta \subseteq \Sigma_\beta$ esto implica que $\Sigma_\beta \vdash_{\mathcal{L}_\beta} \psi$ y $\Sigma_\beta \vdash_{\mathcal{L}_\beta} \neg\psi$, lo cual contradice nuestra hipótesis inductiva. $\square$

Nótese que se podría escoger un ordinal δ tal que enumerara todas las oraciones existenciales de $\mathcal{L}$, el lema nos aseguraría que se pueden agregar δ constantes testigos para cada una de estas oraciones; el problema es que no podemos asegurar que tengamos testigos para todas las oraciones existenciales de nuestro nuevo léxico $\mathcal{L}_\delta$. Sin embargo, podemos repetir este procedimiento ω veces, y podremos asegurar que tenemos testigos para todas las oraciones existenciales. En esta construcción, todos nuestros términos testigos son símbolos constantes:

Lema 2.90. *Supóngase que* Σ *es un conjunto de oraciones de* $\mathcal{L}$ *y* $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}}(\Sigma)$*. Sea* $\kappa = \max(|\mathcal{L}|, \aleph_0)$*. Entonces existen* Σ' *y* $\mathcal{L}'$ *tal que*

1. $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$*, donde* $\mathcal{C}$ *es un conjunto de símbolos constantes.*

2. $|\mathcal{L}'| = |\mathcal{C}| = \kappa$*.*

3. $\Sigma \subseteq \Sigma'$ *y* Σ' *es un conjunto de oraciones de* $\mathcal{L}'$*.*

4. $\mathrm{Con}_{\vdash,\mathcal{L}'}(\Sigma')$*.*

5. Σ' tiene testigos en $\mathcal{L}'$.

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{c_\alpha : \alpha < \kappa \cdot \omega\}$; de este modo es fácil ver que (1). Para (2) basta observar que

$$\kappa \preceq \mathcal{L} \cup \mathcal{C} = \mathcal{L}' \preceq \{0\} \times \kappa \cup \{1\} \times \kappa \cdot \omega$$

de lo que se deriva que

$$\kappa = |\kappa \cdot \omega| \leq |\mathcal{L} \cup \mathcal{C}| \leq |\kappa + \kappa \cdot \omega| \leq |\kappa \cdot \omega| = \kappa.$$

Usando la terminología del Lema 2.89, tenemos que $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{\kappa \cdot \omega} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{L}_{\kappa \cdot n}$. Veamos que podemos construir κ oraciones existenciales para cada $\mathcal{L}_{\kappa \cdot n}$. Si $\kappa = |\mathcal{L}|$ podemos construir oraciones existenciales que usen uno y sólo un símbolo de $\mathcal{L}$ distinto cada una; en caso de que $\kappa = \aleph_0$ construimos las oraciones existenciales $\exists x[x = c_\alpha]$ con $c_\alpha \in \mathcal{C}$ y $\alpha \leq \omega$ (recordemos que estamos trabajando en $\mathcal{L}_{\kappa \cdot n}$). Veamos ahora que no hay más de κ oraciones existenciales debido a que si tomamos $A = \mathcal{L}_{k \cdot n} \cup \mathrm{LOG}$ tenemos que $|A| = \kappa$ (ver Teormea 1.17); además, como ya se comentó en la Definición 2.9, todas las fórmulas, incluidas las oraciones existenciales, están contenidas en $A^{<\omega}$ y este conjunto tiene cardinalidad κ por el Corolario 1.21. Así que podemos listar todas las oraciones existenciales como $\{\exists x \varphi_\alpha(x) : \kappa \cdot n \leq \alpha < \kappa \cdot (n+1)$. Aplicando ahora el Lema 2.89 con $\delta = \kappa \cdot \omega$, y haciendo $\Sigma' = \Sigma_\delta$ obtenemos (4) y trivialmente (3). (5) se cumple ya que $\{\exists x \varphi_\alpha : \alpha < \kappa \cdot \omega\}$ lista todas las oraciones existenciales de $\mathcal{L}'$,esto ya que toda oración existencial de $\mathcal{L}'$, al ser finita, debe ser oración para algún $\mathcal{L}_{\kappa \cdot n}$, léxico del cual ya se listaron todas las oraciones existenciales y hay un término testigo para cada una de ellas. □

Como se mencionó en el Lema 2.73, demostrando el Lema 2.72 demostraremos el Teorema de Completitud. Ahora podemos proceder a dicha empresa:

Demostración del Lema 2.72 y Teorema de Completitud. Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$, y supóngase que $\mathrm{Con}_{\vdash, \mathcal{L}}(\Sigma)$. Debemos demostrar que Σ tiene un modelo. Para esto seguimos los pasos que mencionamos en la página 55.

Paso 1: Aplicando el Lema 2.90, obtenemos la existencia de Σ' y $\mathcal{L}'$ tal que Σ' es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}'$, $\mathrm{Con}_{\vdash, \mathcal{L}'}(\Sigma')$, y Σ' tiene términos testigos en $\mathcal{L}'$.

Paso 2: Aplicando el Lema 2.82, obtenemos un $\Sigma^* \supseteq \Sigma'$ tal que Σ^* es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}'$, y Σ^* es maximalmente $(\vdash, \mathcal{L}')$ consistente. Por construcción, $\Sigma' \vdash_{\mathcal{L}'} \exists x \varphi(x) \to \varphi(\tau)$ para toda oración existencial para algún término τ de manera trivial, ya que Σ' contiene todas las oraciones de este tipo en $\mathcal{L}'$ y por lo tanto, por construcción, Σ^* también las contiene y por esto, Σ' también tiene testigos en $\mathcal{L}^*$.

Paso 3: Ahora, el modelo de Herbrand $\mathfrak{A}' := \mathfrak{CT}(\mathcal{L}', \Sigma^*)$ es un modelo de Σ^* debido al Lema 2.87. Obsérvese que lo que tenemos es un $\mathfrak{A}'$ que es una $\mathcal{L}'$-estructura, y no una $\mathcal{L}$-estructura. Pero tomando a $\mathfrak{A}$ como la reducción $\mathfrak{A}' \restriction \mathcal{L}$, obtendremos que $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura y que $\mathfrak{A} \models \Sigma$ (ver Lema2.43). □

Ahora que se ha demostrado el Teorema de Completitud, se pueden omitir los subíndices cuando hablemos de consistencia y simplemente escribir "$\mathrm{Con}(\Sigma)$", y para consecuencias lógicas, se puede escribir, indistintamente, $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma \vdash \varphi$. Incluso, podemos omitir los subíndices en nuestra noción $\vdash$:

Lema 2.91. *Supóngase que Σ es un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}_0$ y φ es una oración de $\mathcal{L}_0$ y supóngase que $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1$. Entonces $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_0} \varphi$ sii $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$.*

Demostración. $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_0} \varphi$ y$\Sigma \vdash_{\mathcal{L}_1} \varphi$ son equivalentes a $\Sigma \models \varphi$ (por nuestro teorema de completitud) y esta noción no depende de $\mathcal{L}$ (ver Lema 2.43). □

Podemos ahora demostrar el Teorema de Compacidad (35):

Demostración del Teorema 2.27 . Como ya se demostró después de enunciar el Teorema 2.27, las dos partes del teoremas son equivalentes, así que sólo se demostrará la segunda parte. Si suponemos que $\Sigma \models \psi$ hay que demostrar que existe un $\Delta \subseteq \Sigma$ tal que $\Delta \models \psi$. Pero esto se trivializa al usar el Teorema de Completitud remplazando "$\models$" por "$\vdash$" ya que todas las pruebas formales son finitas. □

Ya tenemos herramientas suficientes para demostrar el Teorema de Löwenheim-Skolem 2.29.La demostración del Lema2.72 demuestra la parte "descendente" de este teorema, esta es que si Σ tiene un modelo, entonces Σ tiene un modelo de menor tamaño:

Lema 2.92. *Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$, y supóngase que* $\mathrm{Con}(\Sigma)$. *Sea $\kappa = \max(|\mathcal{L}|, \aleph_0)$. Entonces Σ tiene un modelo $\mathfrak{A}$ con $|\mathfrak{A}| \leq \kappa$.*

Demostración. Se construye un modelo para Σ tal como en la demostración del Lema 2.72. Observemos que el modelo de Herbrand $\mathfrak{A}' = \mathfrak{CT}(\mathcal{L}', \Sigma^*)$ que se construye en la prueba tiene por universo $\mathtt{CT}(\mathcal{L}', \Sigma^*) = \mathtt{CT}_0(\mathcal{L}')/\sim$. Observemos que $\mathtt{CT}_0(\mathcal{L}')$, el conjunto de todos los términos cerrados, es de tamaño exactamente $|\mathcal{L}'| = \kappa$. Esto se puede verificar del mismo modo que en la demostración del Lema 2.90 se verificó el tamaño del conjunto de todas las oraciones existenciales: Como $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_\alpha : \alpha < \kappa \cdot \omega\}$, donde cada c_α es un símbolo constante y por lo cual tenemos al menos κ términos cerrados; pero, como se exhibió en la demostración, no hay más de κ cadenas finitas posibles para el léxico $\mathcal{L}'$. Por lo anterior podemos ver que el tamaño del universo esta acotado por

$$|\mathtt{CT}(\mathcal{L}', \Sigma^*)| \leq |\mathtt{CT}_0(\mathcal{L}')| = \kappa.$$

$\square$

En esta demostración, es posible que $|\mathtt{CT}(\mathcal{L}', \Sigma^*)| < \kappa$. Esto no se puede evitar dado que es posible que Σ sólo tenga modelos finitos. Sin embargo, si Σ tiene algún modelo infinito, entonces siempre podemos obtener modelos de cualquier tamaño infinito $\geq |\mathcal{L}|$ por el Teorema de Löwenheim-Skolem (página 36), que ahora será demostrado:

Demostración del Teorema 2.29. Tomemos $\kappa \geq \max(|\mathcal{L}|, \aleph_0)$. Para demostrar lo deseado, hay que producir un modelo de Σ de tamaño κ. Sea $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \mathcal{C} = \{c_{\alpha:\alpha<\kappa}\}$ es un conjunto de κ nuevos símbolos constantes; entonces $|\mathcal{L}^*| = \kappa$. Sea $\Sigma^* = \Sigma \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha < \beta < \kappa\}$. Evidentemente, cualquier modelo de Σ^* deberá tener, al menos tamaño κ; si obtenemos un modelo para Σ^*, esto es, si $\mathrm{Con}(\Sigma^*)$, entonces, el Lema 2.92 nos asegura que Σ^* tiene un modelo $\mathfrak{A}$ con $|\mathfrak{A}| \leq \kappa$, y por lo tanto $|\mathfrak{A}| = \kappa$.

Por esto, nos concentraremos en demostrar $\mathrm{Con}(\Sigma^*)$. El Teorema de Compacidad nos asegura que $\mathrm{Con}(\Sigma^*)$ se sigue si se demuestra que $\mathrm{Con}(\Delta)$ para cada $\Delta \subseteq \Sigma^*$ finito. Observemos que cada Δ de este tipo consistiría de algunas oraciones de Σ más algunas oraciones de la forma $c_\alpha \neq c_\beta$ con $\alpha, \beta \in F$, donde F es un subconjunto finito de κ. Por hipótesis sabemos que existe un modelo $\mathfrak{B}$ de Σ tal que $|\mathfrak{B}| \geq |F|$. Entonces $\mathfrak{B}$ es una $\mathcal{L}$-estructura. Se puede expandir $\mathfrak{B}$ a una $\mathcal{L}^*$-estructura, $\mathfrak{B}^*$, interpretando cada c_α con $\alpha \in F$ como elementos distintos de B; y cada $c_\alpha \notin F$ de manera arbitraria. Así, tenemos que $\mathfrak{B}^* \models \Delta$, i.e., $\mathrm{Con}(\Delta)$. $\square$

II.10. Conjuntos Definibles

En esta breve sección, escribiremos las definiciones necesarias para enunciar una versión formal el Teorema de Indefinibilidad de la verdad de Tarski, que fue mencionado al tratar el porque no es posible definir $\mathfrak{A} \models \varphi$ cuando el universo A es una clase propia. Pero además será necesario tenerlo presente para construir formalmente la noción de *forzamiento* en el capítulo III. Informalmente se piensa que es posible dar una *única* definición de '$\Vdash$' pero en realidad la definición de '$\Vdash$' depende de la oración φ que se desee *forzar*. La noción informal de forzamiento implica una contradicción con el Teorema de Indefinibilidad de Tarski y por eso es que será necesario enunciarlo claramente.

Definición 2.93. FORM_k *es el conjunto de fórmulas de* $\mathcal{L} = \{\in\}$ *con exactamente* k *variables libres; así que* FORM_0 *es el conjunto de oraciones de* $\mathcal{L}$*. Para* $\varphi \in \mathrm{FORM_k}$*, Sea* $D_\varphi = \{\vec{a} \in M^k : M \models \varphi[a_0, \ldots, a_{k-1}]\}$*; aquí se está suponiendo que* VAR *tiene un orden fijo decidible del tipo* ω*, así que la definición no es ambigua. Si* $\varphi \in \mathrm{FORM}_{k+l}$ *y* $\vec{b} \in M^l$*, sea* $D_{\varphi,\vec{b}} = \left\{\vec{a} \in M^k : M \models \varphi\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right\}$.

Los conjuntos de la forma $D_{\varphi,\vec{b}}$ se dice que son *definibles* (o decidibles) *sobre* M *con parámetros en* M, mientras que a los conjuntos de la forma D_φ se dice que son *definibles en* M *sin parámetros*. Agrupando estos conjuntos obtenemos,

Definición 2.94. $\mathcal{D}_k^-(M) = \{D_\varphi : \varphi \in \mathrm{FORM}_k\}$ *y*
$\mathcal{D}_k^+ = \{D_{\varphi,\vec{b}} : l \in \omega \wedge \varphi \in \mathrm{FORM}_{k+l} \wedge b_0, \ldots, b_{l-1} \in M\}$.

En modelos, M, transitivos de la TCB, como se puede definir el apareamiento de conjuntos $\mathcal{D}_2^- \subset \mathcal{D}_1^-$; $X \in \mathcal{D}_2^-$ sii $X \in \mathcal{D}_1^-(M)$ y $X \subseteq M \times M$. De manera similar, tenemos que $\mathcal{D}_2^+ \subset \mathcal{D}_1^+$. Por esto omitiremos los subíndices $1, 2, \ldots$.

Definición 2.95. *Cuando* M *es un modelo transitivo y* $M \models \mathrm{TBC}$*:*

$$\mathrm{SAT}_0 = \mathrm{SAT}_0^M = \{\varphi \in \mathrm{FORM}_0 : M \models \varphi\} \subset \mathrm{FORM}_0 \subseteq M.$$
$$\mathrm{SAT}_k = \mathrm{SAT}_k^M = \{(\varphi, \vec{a}) \in \mathrm{FORM}_k \times M^k : M \models \varphi[\vec{a}]\} \subset \mathrm{FORM}_k \times M^k \subset M \times M \subset M \quad (1 \leq k < \omega)\,.$$

Podemos ahora expresar el resultado de indefinibilidad de verdad:

Teorema 2.96. *Sea* M *un conjunto transitivo tal que* $M \models \mathrm{TCB}$*. Entonces*

a. $\mathrm{SAT}_0 \notin \mathcal{D}^-(M)$.

b. $\mathrm{SAT}_1 \notin \mathcal{D}^+(M)$.

II.11. Submodelos elementales

En esta sección se trabajará con una noción más fuerte que la de submodelo (Definición 2.44):

Definición 2.97. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras con $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Si φ es una fórmula de $\mathcal{L}$, entonces $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\varphi \mathfrak{B}$ significa que $\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi[\sigma]$ para todas las asignaciones σ para φ en A. $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ (*subestructura elemental o submodelo elemental*) significa que $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\varphi \mathfrak{B}$ para toda fórmula φ de $\mathcal{L}$.*

Lema 2.98. *Si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\varphi \mathfrak{B}$ siempre que φ está libre de cuantificadores y $\mathrm{val}_\mathfrak{A}(\tau)[\sigma] = \mathrm{val}_\mathfrak{B}(\tau)[\sigma]$, cuando τ es un término de $\mathcal{L}$ y σ es una asignación para τ en A.*

Bosquejo de Demostración: Empecemos por $\mathrm{val}_\mathfrak{A}(\tau)[\sigma] = \mathrm{val}_\mathfrak{B}(\tau)[\sigma]$ ☺. Sólo hay dos posibilidades para τ; si es símbolo constante o si empieza con un símbolo funcional, en ambos casos se sigue de la definición 2.44 que $\mathrm{val}_\mathfrak{A}(\tau)[\sigma] = \mathrm{val}_\mathfrak{B}(\tau)[\sigma]$.
Ahora, para demostrar que $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\varphi \mathfrak{B}$, se hará por inducción. Para el pie de inducción, cuando φ es atómica se tienen 2 casos, el caso cuando φ inicia con $=$ se sigue inmediatamente de ☺; ahora el caso cuando φ comienza con un símbolo proposicional lo dividimos en dos casos más, el primero cuando φ es una letra proposicional (símbolo de aridad 0) se sigue de la definición 2.44; segundo, cuando φ es de la forma $s\tau_1 \cdots \tau_n$ basta observar que $(\mathrm{val}_\mathfrak{B}(\tau_1)[\sigma], \dots, \mathrm{val}_\mathfrak{B}(\tau_n)[\sigma]) = (\mathrm{val}_\mathfrak{A}(\tau_1)[\sigma], \dots, \mathrm{val}_\mathfrak{A}(\tau_n)[\sigma])$ por ☺; con esto, y por la Definición 2.44 se obtiene lo deseado. El resto de la demostración (paso inductivo) se sigue rutinariamente.

Teorema 2.99 (Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente). *Sea $\mathfrak{B}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Fíjese κ tal que $\max(|\mathcal{L}|, \aleph_0) \leq \kappa \leq |B|$, y después elígase $S \subseteq B$ con $|S| \leq \kappa$. Entonces existe un $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ tal que $S \subseteq A$ y $|A| = \kappa$*

Lema 2.100. *Suponiendo Axioma de elección. Sea B un conjunto infinito tal que $(B, \in)$ satisface el Axioma de Extensión. Sea κ cualquier cardinal infinito tal que $\kappa \leq |B|$. Fijemos $S \subseteq B$ tal que S es transitivo y $|S| \leq \kappa$. Entonces hay un conjunto transitivo M tal que $S \subseteq M$, $(M, \in) \equiv (B, \in)$ y $|M| = \kappa$. En particular, hay un conjunto transitivo y numerable M tal que $(M, \in) \equiv (B, \in)$.*

Demostración. Por el Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski descendente, sea $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ tal que $S \subseteq A$ y $|A| = \kappa$. Entonces, A satisface el Axioma de Extensión. Además, por el Axioma de Fundación, $\in$ es bien fundada en A y por tanto podemos definir la función mos en A (ver Definición 1.36), y obtenemos un isomorfismo de $(A, \in)$ sobre $(M, \in)$ para algún conjunto transitivo M, (por el Lema 1.38). Además por el Lema 1.39, como S es transitivo,

$mos(y) = y$ para cada $y \in S$, con lo cual $S \subseteq M$. Además $|M| = \kappa$ ya que mos es una biyección y $|A| = \kappa$ y por Lema (2.51) $(M, \in) \equiv (A, \in) \equiv (B, \in)$ ya que $M \cong A$ y $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$. Finalmente, para obtener un conjunto transitivo y numerable M tal que $(M, \in) \equiv (B, \in)$, basta hacer $\kappa = \aleph_0$ y $S = \emptyset$. □

II.12. Modelos para la Teoría de Conjuntos

Las pruebas de independencia en la teoría de conjuntos se usan conceptos de teoría de modelos aplicados al caso $\mathcal{L} = \{\in\}$ para estudiar modelos que satisfagan algunos (o todos) los axiomas de **ZFC**. Es difícil encontrar ejemplos explícitos no triviales de $A \preccurlyeq B$ donde A, B son $\in$-modelo interesantes de la teoría de conjuntos. Pero, si uno considera $A \preccurlyeq_\varphi B$ para una φ específico, entonces hay ejemplos no triviales interesantes. Los más conocidos de éstos es cuando φ es una fórmula Δ_0. Siendo $\mathcal{L} = \{\in\}$, éstas son fórmulas en las cuales todos los cuantificadores están acotados; esto es, aparecen como $\forall x \in y \ldots$ o $\exists x \in y \ldots$. Generalizando la idea obtenemos la

Definición 2.101. *Supóngase que $\mathcal{L}$ contiene el símbolo $\in$ y posiblemente otros símbolos proposicionales y funcionales. Entonces las fórmulas Δ_0 de $\mathcal{L}$ son aquellas fórmulas construidas por las reglas:*

a. *Todas las fórmulas atómicas son fórmulas Δ_0.*

b. *Si φ es una fórmula Δ_0, y es una variable, y τ es un término que no contiene y, entonces $\forall y \in \tau\, \varphi$ y $\exists y \in \tau\, \varphi$ son fórmulas Δ_0.*

c. *Si φ es una fórmula Δ_0, entonces $\neg\varphi$ también.*

d. *Si φ y ψ son fórmulas Δ_0, entonces $\varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi, \varphi \to \psi$, y $\varphi \leftrightarrow \psi$ también lo son.*

En la definición, $\forall y \in \tau\, \varphi$ y $\exists y \in \tau\, \varphi$ son abreviaciones para $\forall y[y \in \tau \to \varphi]$ y $\exists y[y \in \tau \wedge \varphi]$ respectivamente; estas abreviaciones serán usuales en el resto del texto.

Lema 2.102. *Sea $\mathcal{L}$ como en la Definición 2.101, y supóngase que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. También supóngase que A es un conjunto transitivo y que $\in_A = \{(a, b) \in A \times A : a \in b\}$ y $\in_B = \{(a, b) \in B \times B : a \in b\}$. Entonces $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\varphi \mathfrak{B}$ para toda φ fórmula Δ_0 de $\mathcal{L}$.*

Demostración. Por inducción sobre φ. El pie de inducción, cuando φ es atómica, es el Lema 2.98. Los pasos inductivos para los conectores proposicionales se realizan de manera similar que en el Lema 2.98. En el paso inductivo para "$\exists$", supóntase que $\varphi(\overrightarrow{x}, z)$ es $\exists y[y \in \tau(\overrightarrow{x}, z) \wedge \psi(\overrightarrow{x}, y, z)]$, donde ψ es Δ_0, y supóngase (inductivamente) que $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\psi \mathfrak{B}$. Para cualquier n-ada $\overrightarrow{a}$ de A y $c \in A$ sea $\tau_{\overrightarrow{a},c}$ una abreviación de $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\overrightarrow{a}, c]$, lo cual es el mismo que $\mathrm{val}_{\mathfrak{B}}(\tau)[\overrightarrow{a}, c]$ porque $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Entonces para tales $\overrightarrow{a}, c$, la definición de $\models$ nos lleva a:

$$A \models \varphi[\overrightarrow{a}, c] \leftrightarrow \exists b \in A\{b \in \tau_{\overrightarrow{a},c} \wedge A \models \psi[\overrightarrow{a}, b, c]\} \leftrightarrow$$

$$\exists b \in B\{b \in \tau_{\overrightarrow{a},c} \wedge B \models \psi[\overrightarrow{a}, b, c]\} \leftrightarrow B \models \varphi[\overrightarrow{a}, c]$$

El segundo $\leftrightarrow$ usa $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\psi \mathfrak{B}$ además de que, en el "$\rightarrow$" sentido el cambio es evidente ya que $A \subseteq B$ y en el "$\leftarrow$" sentido el cambio es válido porque A es transitivo y así $\tau_{\overrightarrow{a},c} \subseteq A$. El paso inductivo para "$\forall$" es similiar. $\square$

A continuación un ejemplo de fórmulas Δ_0

$\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$	$\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$	$x \subseteq y$
$\forall z(z \notin x)$	$\forall z \in x(z \neq z)$	$\mathrm{emp}(x)$ o $x = \emptyset$
$\forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \vee z = x)$	$x \in y \wedge x \subseteq y \wedge$ $\forall z \in y(z = x \vee z \in x)$	$y = S(x)$
$\forall x(x \in y \leftrightarrow x \in v \wedge x \in w)$	$y \subseteq v \wedge y \subseteq w \wedge$ $\forall x \in v(\forall x \in w(x \in y))$	$\mathrm{int}(v, w, y)$ o $y = v \cap w$
$\exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in x \rightarrow z = y))$	$\exists y \in x \forall z \in x(x = y)$	$\mathrm{SING}(x)$

Ejemplo 2.103. *En la primera columna de la tabla se haya la fórmula en la sintaxis que desarrollamos en la Sección 2.2, y en la tercera se muestra la noción definida por esa fórmula. En la segunda columna se encuentran una fórmula Δ_0 lógicamente equivalente. En el tercer y cuarto renglón uno deber remplazar el "$\subseteq$" por la fórmula Δ_0 que define $\subseteq$ para obtener la fórmula Δ_0 real.*

En teoría de conjuntos, usualmente se refiere uno a $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\varphi \mathfrak{B}$ en términos de ser absoluto:

Definición 2.104. *φ es* absoluta *para A, B sii $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\varphi \mathfrak{B}$.*

Se verá ahora que la definición de "absoluto" tiene sentido incluso cuando se trabaja con modelos que son clases propias, así, podemos definir

Definición 2.105. *φ es* absoluta *para A sii $\mathfrak{A} \preccurlyeq_\varphi V$.*

Por ejemplo, el Lema 2.12, cuando se habla de modelos que son conjuntos, es una breviación para una oración en el léxico de la teoría de conjuntos, $\forall \varphi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}[\ldots\ldots \rightarrow \mathfrak{A} \preccurlyeq_{\varphi} \mathfrak{B}]$, y esto es demostrable a partir de $\mathbf{ZF}^{-} - \mathbf{P}$; aquí estamos usando la Definición 2.21 de valor de verdad de Tarski para expresar $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\varphi} \mathfrak{B}$. Cuando se está trabajando con clases $A = \{x : \alpha(x)\}$ y $B = \{x : \beta(x)\}$, donde α, β son fórmulas, entonces las afirmaciones sobre A y B se expresan realmente usando las fórmulas α y β. Así, el Lema 2.12 es realmente un esquema en la metateoría que dice que dadas cualesquier fórmulas α y β y una fórmula φ Δ_0, si nosotros podemos probar que $A \subseteq B$ (i.e. $\forall x(\alpha(x)) \rightarrow \beta(x))))$, y podemos porobar que A es transitiva $(\forall xy(\alpha(x) \wedge y \in x \rightarrow \alpha(y)))$, entonces también podemos probar $\mathfrak{A} \preccurlyeq_{\varphi} \mathfrak{B}$, lo cual significa que, usando la notación introducida después de la Definición 2.21: $\forall x_1, \ldots, x_n[\alpha(x_1) \wedge \ldots \wedge \alpha(x_n) \rightarrow (\varphi^{A}(\overrightarrow{x}) \leftrightarrow \varphi^{B}(\overrightarrow{x}))]$. En particular B podría ser V, en cuyo caso $A \subseteq B$ es trivial, y φ^{V} (la relativización de todos los cuantificadores a V) es equivalente a φ, de este modo, decir que φ es absoluta para A significa $\forall x_1, \ldots, x_n \in A[\varphi^{A}(\overrightarrow{x}) \leftrightarrow \varphi^{B}(\overrightarrow{x})]$; esto es, φ y φ^{A} tiene el mismo *significado* para miembros de A.

El uso de clases propias como modelos está relacionado a *interpretaciones relativas*. Esta es una noción general en la lógica formal. Es necesario abordar esto cuando se desean realizar pruebas de consistencia relativa de teoría de conjuntos, como $\mathrm{Con}(\mathbf{ZF}^{-}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathbf{ZF})$ y $\mathrm{Con}(\mathbf{ZF}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathbf{ZF} + \mathbf{HGC})$. Generalizando más, las interpretaciones relativas proveen pruebas de $\mathrm{Con}(\Lambda) \rightarrow \mathrm{Con}(\Gamma)$ para diversas teorías axiomáticas sin que éstas estén relacionadas con la teoría de conjuntos.Como nosotros estamos interesados en aplicaciones a la teoría de conjuntos, $\mathcal{L}_0$ siempre será $\{\in\}$. $\mathcal{L}$ será usualmente $\{\in\}$, pero podría no ser así. Así Λ serán algunos axiomas de teoría de conjuntos y Γ serán otros axiomas, usualmente (pero no siempre) para teoría de conjuntos. Por ejemplo, si Λ es $\mathbf{ZF}^{-}$ y Γ es $\mathbf{ZF}$, entonces $\mathcal{L} = \{\in\}$ y se puede probar que $\mathrm{Con}(\mathbf{ZF}^{-}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathbf{ZF})$ (La definición de Con se encuentra en 2.63 y para $\mathbf{ZF}^{-}$ ir a la página 10). Para hacer esto, se trabaja en $\mathbf{ZF}^{-}$ y se define la clase $M = BF$ (ver Definición 1.32), y se muestra que todos los axiomas de $\mathbf{ZF}$ se satisfacen en M. Claro, que la lógica formal no menciona la "clase"; sólo usa la fórmula $\mu(x)$ que dice que x es un conjunto bien fundado.

Para ilustrar lo dicho en un caso donde $\mathcal{L} \neq \{\in\}$, sea $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0\}$. Sea Γ los axiomas para la teoría de anillos escritas en este léxico. Podemos considerar el universo completo V como modelo para Γ si interpretamos $+$ como la diferencia simétrica $(x + y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x))$, $\cdot$ como $\cap$, y 0 como $\emptyset$. Esto provee una interpretación relativa de la teoría de anillos en la teoría de conjuntos. Se explicará por qué a pesar de ser V una clase propia, esta relativización da una prueba de consistencia relativa de $\mathrm{Con}(\mathbf{ZF}) \to \mathrm{Con}(\Gamma)$.

Conceptualmente, la noción de relativización es exactamente la misma que la noción de estructura $\mathfrak{A}$ (Definición 2.13) de la teoría de modelos, pero formalmente, dado que A podría ser una clase propia, la definición toma lugar en la metateoría.

Para tener una versión de clases de la estructura definida en 2.13, tendríamos que dar primero, análogamente, nuestra definición de valuación para términos ($\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\tau)[\sigma]$) y después nuestra valuación para fórmulas atómicas ($\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma]$, donde φ es de la forma $\tau_1 \in \tau_2$ o de la forma $\tau_1 = \tau_2$).

Para el caso de la valuación de términos, es posible justificar la definición recursiva a partir del Teorema 1.29. La relación $\mathbf{R}$ sobre la cual se hace la recursión sería, $(\tau', \sigma')\mathbf{R}(\tau, \sigma)$ sii τ' es un subtérmino propio de τ y $\sigma' = \sigma$. Esta $\mathbf{R}$ es tanto bien fundada (la función Φ del Lema 1.25 podría ser la longitud de τ) como casi-conjunto (dado que τ sólo puede tener una cantidad finita de subtérminos).

Para el caso de la valuación de fórmulas atómicas, la definición *no* es recursiva, por lo cual está justificada incluso cuando A es una clase.

El problema aparece cuando la fórmula tiene cuantificadores ($\forall, \exists$); si la fórmula no tuviera apariciones de cuantificadores, inclusive podría darse una definición recursiva al estilo de la valuación de términos para fórmulas con conectivos lógicos.

El problema con las clases para nuestra definición de estructura radica en:

1. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\exists y\varphi)[\sigma] = T$ sii $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (y/a)] = T$ para algún $a \in A$.

2. $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\forall y\varphi)[\sigma] = T$ sii $\mathrm{val}_{\mathfrak{A}}(\varphi)[\sigma + (y/a)] = T$ para toda $a \in A$.

Si estamos trabajando con un universo A que es conjunto, el *Teorema de Definibilidad de la Verdad de Tarski* nos asegura que es posible definir formalmente la noción "$\mathfrak{A} \models \varphi$" (nuestra Definición 2.21 está justificada por el Teorema 1.29 mediante la relación $\mathbf{R}$ que se da más adelante y es un ejemplo del Teorema de Definibilidad); pero si estamos trabajando con una clase A como universo (A podría ser incluso V), las colección de las funciones asignación σ forman una clase propia, por lo cual la relación $\mathbf{R}$ que nos sirve para el caso conjuntista, $(\varphi', \sigma')\mathbf{R}(\varphi, \sigma)$ sii φ' es subfórmula de φ, no es casi-conjunto y no podemos justificar su definición. Uno podría intentar cambiar la definición de $\mathbf{R}$ para que uno no tuviera que verificar *todas* las asignaciones posibles σ' para una fórmula del tipo $\forall y\varphi(y)$, pero el *Teorema de Indefinibilidad de la Verdad de Tarski* se sabe que no hay truco que funcione para el "modelo" $(V, \in)$.

Definición 2.106. *Si Λ es un conjunto de axiomas en $\{\in\}$ para teoría de conjuntos, y $\mathcal{L}$ es un léxico finito, una* interpretación relativa de $\mathcal{L}$ en Λ *consiste de una clase A no vacía junto con una asignación de entidades semánticas $s^{\mathfrak{A}}$ adecuada para cada símbolo de $\mathcal{L}$; esto es,*

1. *Si $f \in \mathcal{F}_n$ con $n > 0$, entonces $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$.*
2. *Si $p \in \mathcal{P}_n$ con $n > 0$, entonces $p^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$.*
3. *Si $c \in \mathcal{F}_0$, entonces $c^{\mathfrak{A}} \in A$.*
4. *Si $p \in \mathcal{P}_0$, entonces $p^{\mathfrak{A}} \in 2 = \{0, 1\} = \{F, V\}$.*

Nuevamente, dado que A podría ser una clase propia, realmente estamos trabajando en la metateoría y se están definiendo fórmulas. Para A, lo que realmente se tiene es una fórmula $\alpha(x)$; la afirmación de que A es no vacío, realmente significa que $\Lambda \vdash \exists x \alpha(x)$. En los puntos (2) y (4), $p^{\mathfrak{A}}$ es realmente una fórmula con n variables libres. En el punto (3), $c^{\mathfrak{A}}$ es realmente una constante definida, que significa que tenemos una fórmula $\varphi(y)$ en $\{\in\}$ para la cual $\Lambda \vdash \exists! y \in A \varphi(y)$. En el punto (1), se tiene una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ en $\{\in\}$ para la cual $\Lambda \vdash \forall x_1, \ldots, x_n \in A \exists! y \in A \varphi(\overrightarrow{x}, y)$.

Definición 2.107. *Dada una interpretación relativa $\mathfrak{A}$ como en la Definición 2.106, si τ es un término de $\mathcal{L}$ y φ es una fórmula, entonces $\tau^{\mathfrak{A}}$ es el término y $\varphi^{\mathfrak{A}}$ es la fórmula obtenidas al remplazar los distintos símbolos (f, p, c) de $\mathcal{L}$ por su respectivas formas relativizadas $(f^{\mathfrak{A}}, p^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}})$, y relativizando todos los cuantificadores de A, rempazando $\forall x \cdots$ por $\forall x \in A \cdots$ y $\exists x \cdots$ por $\exists x \in A \cdots$.*

El siguiente Lema expresa la misma idea que el Teorema Sonoro 2.61, aunque formalmente, la inducción se realiza en la meta-teoría:

Lema 2.108. *Sea $\mathfrak{A}$ una intepretación relativa de $\mathcal{L}$ en Λ, en el sentido de la Definición 2.106. Sean ψ y $\theta_1, \ldots, \theta_k$ oraciones de $\mathcal{L}$ y supóngase que $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\} \vdash \psi$. Entonces $\Lambda \vdash (\theta_1^{\mathfrak{A}} \wedge \ldots \wedge \theta_k^{\mathfrak{A}}) \to \psi^{\mathfrak{A}}$.*

Bosquejo de Demostración: La prueba se sigue de manera similar a 2.61. Por Lema 2.62 sólo es necesario verificar para el pie de inducción que $\Lambda \vdash \pi^{\mathfrak{A}}$ cuando π es un axioma lógico. El paso inductivo se sigue del mismo modo que 2.61. Así, en la mayoría de esta argumetnación, Λ no se usa. Se necesitará para demostrar que $A \neq \emptyset$, para aqué axioma lógico que su validez recaiga en esto. También, los axiomas de teoría de conjuntos en Λ puede ser necesitado para verificar que las funciones definidas en $\mathfrak{A}$ tengan sentido.

El siguiente corolario del Lema 2.108 es la base para varias pruebas de consistencia en la teoría de conjuntos:

Corolario 2.109. *Sea $\mathfrak{A}$ una interpretación relativa de $\mathcal{L}$ en Λ: Sea Γ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$, y supóngase que podemos verificar que $\Lambda \vdash \theta^{\mathfrak{A}}$ para cada axioma θ de Γ. Entonces en la metateoría podemos concluír que* $\mathrm{Con}(\Lambda) \to \mathrm{Con}(\Gamma)$*.*

Demostración. Trabajando en la metateoría, se demostrará el contrarecíproco. Supóngase que tenemos una contradicción en Γ, así que $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\} \vdash (\psi \wedge \neg\psi)^{\mathfrak{A}}$, donde $\theta_1, \ldots, \theta_k$ son axiomas de Γ. Aplicando el Lema 2.108, $\Lambda \vdash (\psi \wedge \neg\psi)^{\mathfrak{A}}$, lo cual es $\psi^{\mathfrak{A}} \wedge \neg\psi^{\mathfrak{A}}$ (Definición 2.107), lo cual es una contradicción a partir de Λ. $\square$

Lema 2.110. *($\mathbf{ZF}^- - \mathbf{P}$)Sea M una clase transitiva, y supóngase que los Axiomas de Extensión, Comprensión, Par y Union se cumplen en M.*

El Axioma de Infinitud se cumple en M si $\omega \in M$.

Axioma 9 se cumple en M sii para cada familia ajena de conjuntos no-vacíos en M tiene un conjunto elector en M.

Usando la absolutez de la sintaxis lógica, se puede obtener que la noción semántica $\mathfrak{A} \models \varphi$ es absoluta junto con las nociones relacionadas a ella como $\mathcal{D}^+(A)$ y $\mathcal{D}^-(A)$ (Definición 2.95). Para esto obsérvese que $\models$ está definido por recursión, y la absolutez se obtendrá de un lema general acerca de la absolutez de funciones definidas recursivamente. Este lema también implicará la absolutez de la función $\mathrm{rank}(x)$ (Definición 1.30), que también tiene una definición recursiva. Subrayamos el hecho de que el Teorema 1.29 justifica definiciones por recursión transfinita sobre relaciones bien fundadas $\mathbf{R}$ y $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}$ puede ser una clase propia, como **Ord** o V, en cuyo caso $\mathbf{R}$ debe ser también un casi-conjunto sobre $\mathbf{A}$.

Teorema 2.111. *Supóngase que $\mathbf{R}$ es una relación de aridad 2, G es una función de aridad 2 y $\mathbf{A}$ es una clase (una relación de aridad 1). Supóngase también que $\mathbf{R}$ es bien fundada y casi conjunto sobre $\mathbf{A}$ y sea F la función de aridad 1 del Teorema 1.29, tal que $\forall a \in \mathbf{A}[F(a) = G(a, F{\restriction}(\downarrow a))]$; supóngase que $F(a) = \emptyset$ para $a \notin A$.*

Sea M un modelo transtivo para $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$, y supóngase que $\mathbf{R}, \mathbf{A}, G$ son todas absolutas para M, y que $(\mathbf{R}$ es casi conjunto sobre $\mathbf{A})^M$, y que $a{\downarrow} \subseteq M$ para toda $a \in M$. Entonces $F^M(a)$ está definida para toda $a \in M$, y F es absoluta para M.

Demostración. Empecemos observando dos hechos:
Primero, ($\mathbf{R}$ es bien-fundada sobre $A)^M$: Para esto habría que verificar que todo sub**conjunto** de $\mathbf{A}$ en M (es decir todo subconjunto de $\mathbf{A}$ que sea elemento de M)tiene elemento $\mathbf{R}$-minimal; supongamos lo contrario, esto es, que existe $X \in M$ tal que $X \subseteq \mathbf{A}$ no tiene elemento $\mathbf{R}$-minimal, pero esto contradiría que $\mathbf{R}$ es bien fundada en V .
Segundo, la función $a \mapsto a\downarrow$ es absoluta para M: Como por hipótesis, $\mathbf{R}$ es casi-conjunto sobre $\mathbf{A}$ y ($\mathbf{R}$ es casi-conjunto sobre $\mathbf{A})^M$, podemos asegurar la existencia de la función, esto es; existe una fórmula $\theta(x, y)$ que define la noción $y = x\downarrow$ y además tenemos que se cumple tanto $\forall x\exists! y(x \in \mathbf{A} \rightarrow \theta(x, y))$ como $(\forall x\exists! y(x \in \mathbf{A} \rightarrow \theta(x, y)))^M$.

Supongamos ahora que $a, b \in M$ tales que $\theta(a, b)$, mostraremos que $\theta^M(a, b)$; como $a\downarrow = b \in M$, $\mathbf{R}$ es absoluta y $b = a\downarrow \subseteq M$ se tiene que $b = (a\downarrow)^M$ y por lo tanto $\theta^M(a, b)$. De manera similar se obtiene el regreso.

Ahora obsérvese que el Teorema 1.29 es un teorema de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$, así que F^M está definida; además se tiene que, si $F\lceil(a\downarrow) = F^M\lceil(a\downarrow)$ entonces $F(a) = F^M(a)$ por la absolutez de G. Si F no fuera absoluta, entonces un elemento $\mathbf{R}$-minimal de $\{a \in M : F(a) \neq F^M(a)\}$ sería contradictorio (verifíquese). □

El Teorema 2.111 implica inmediatamente que:

Corolario 2.112. *Las función* $\mathrm{rank}(x)$ *es absoluta para modelos transitivos tales que* $M \models \mathbf{ZF} - \mathbf{P}$.

Corolario 2.113. *Las nociones "φ es una fórmula de $\mathcal{L}$" y "$\mathfrak{A} \models \varphi[\sigma]$" son absolutas para modelos transitivos tales que* $M \models \mathbf{ZF} - \mathbf{P}$.

Y también que

Corolario 2.114. *Las funciones $\mathcal{D}(A, P)$, $\mathcal{D}^+(A)$ y $\mathcal{D}^-(A)$ son absolutas para modelos transitivos tales que* $M \models \mathbf{ZF} - \mathbf{P}$

Corolario 2.115. *La función* $\mathrm{trcl}(x)$ *es absoluta para modelos transitivos tales que* $M \models \mathbf{ZF} - \mathbf{P}$.

Demostración. La construcción de $\mathrm{trcl}(x)$ se hará en varios pasos, pero el medular para asegurar su absolutez consiste en asegurar la absolutez de $\bigcup^n(x)$. Para esto tomamos la fórmula $\varphi(n, s, y)$ que define la función $G(n, s)$, donde n juega el papel de parámetro y $n \in \omega$:
$G(n, s) = \bigcup s(m - 1)$ si s es función $\wedge \mathrm{dom}(s) = m + 1 \wedge m \leq n$ y

$G(n,s) = \emptyset$ en cualquier otro caso. Como todas las nociones usadas son absolutas para modelos de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$ así como $\in$ es bien fundada, obtenemos que por el Teorema 2.111 que la fórmula $\psi(n,x,y)$ que se obtiene de 1.29 que define la función $\bigcup^n(x)$ es absoluta.

Para cada x_0, $\mathrm{trcl}(x_0)$ se construye como sigue. Como se verifica que $\forall n \in \omega \exists! y \psi(n, x_0, y)$, el Axioma de reemplazo asegura la existencia del conjunto $\{\bigcup^n x_0 : n \in \omega\}$ y, por último, con el Axioma de Unión obtenemos el conjunto deseado $\mathrm{trcl}(x_0) := \bigcup\{\bigcup^n x_0 : n \in \omega\}$

Obsérvese que que todas las nociones usadas son absolutas y que, en particular, la construcción realizada con el Axioma de reemplazo es absoluta por ser conjunto de imágenes de funciones absolutas. $\square$

II.12.1 Teorema del Reflejo

El teorema del reflejo es una útil y poderosa herramienta para producir modelos de una parte "suficiente mente grande" de $\mathbf{ZFC}$; esto significa que el Teorema del Reflejo demostrará que, para cualquier lista finita Λ de instancias del Axioma del Remplazo, $\mathbf{ZFC} \vdash \exists\gamma[R(\gamma) \models \mathbf{ZC} \cup \Lambda]$.

Para esto, será necesaria una "versión para clases" del criterio de Tarski-Vaught.

Definición 2.116. *Una lista de formulas $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ es* cerrado bajo subfórmulas *sii cada subfomula de cada φ_i está también en la lista, y ninguna fórmula en la lista usa el cuantificador universal $\forall$.*

Lema 2.117. *Sea $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ sea una lista cerrada bajo subfórmulas de fórmulas de $\mathcal{L} = \{\in\}$. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ clases con $\emptyset \neq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. Entonces las siguientes aserciones son equivalentes:*

1. $\bigwedge_{i<n}(A \preceq_{\varphi_i} B)$.

2. *Para todas las fórmulas existenciales $\varphi_i(x_1, \ldots, x_r)$, de la forma $\exists y \varphi_j(\vec{x}, y)$, lo siguiente es cierto:*

$$\forall a_1, \ldots, a_r \in \mathbf{A}[\varphi_i^{\mathbf{B}}(\vec{a}) \to \exists b \in \mathbf{A} \varphi_j^{\mathbf{B}}(\vec{a}, b)].$$

Como es usual en enunciados que hacen referencias a clases, este lema es una abreviación para un afirmación en la metateoría, la cual diría, que dadas fórmulas $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ junto con $\alpha(x), \beta(x)$ (que definen las clases $\mathbf{A}, \mathbf{B}$), uno puede demostrar en $\mathbf{ZF}$ que si $\emptyset \neq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, entonces $(1) \leftrightarrow (2)$.

Teorema 2.118. *Sea $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ cualquier lista de fórmulas de $\mathcal{L} = \{\in\}$. Supóngase que B es una clase no-vacía y $A(\xi)$ es un conjunto para cada $\xi \in \mathrm{Ord}$, y supóngase que:*

I $\xi < \eta \to A(\xi) \subseteq A(\eta)$.

II $A(\eta) = \bigcup_{\xi<\eta} A(\xi)$ *para η límite.*

III $B = \bigcup_{\xi\in\mathrm{Ord}} A(\xi)$.

Entonces $\forall\xi\exists\eta > \xi[A(\eta) \neq \emptyset \wedge \bigwedge_{i<n}(A(\eta) \preccurlyeq_{\varphi_i} B) \wedge \eta$ *es un ordinal límite*$]$.

La aplicación más usual, y que necesitaremos en el capítulo siguiente, es cuando $\mathbf{B} = V$ y $A(\xi) = R(\xi)$; Entonces (I), (II), (III) son propiedades evidentes observando que (III) es la reafirmación del Axioma de Fundación que estamos suponiendo.

Como ha sucedido, este teorema es una abreviación de una afirmación en la metateoría que diría, dadas fórmulas $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ junto con $\beta(x), \alpha(v, x)$ (que definen $\mathbf{B}$ y la función $\xi \mapsto A(\xi)$), una cierta oración es teorema de $\mathbf{ZF}$.

Demostración. Se puede suponer que la lista es cerrada bajo subfórmulas; si no lo fuese, se remplaza cada φ_i por una fórmula lógicamente equivalente que no use $\forall$ ($\forall$ se puede remplazar por $\neg\exists\neg$), y después añadir a la lista todas las subfórmulas de cada fórmula que aparece en la lista.

Para cada fórmula $\varphi_i(\vec{x})$ existencial (es decir, de la forma $\exists y\varphi_j(\vec{x}, y)$) donde $\vec{x}$ denota una r-ada; claro que r depende de la fórmula, es decir realmente $r = r_i$), definimos $F_i : B^r \to \mathbf{Ord}$ del siguiente modo: Si $\varphi_j^B(\vec{a}, b)$. Si $\varphi_i^B(\vec{a})$, entonces $F_i(a)$ es el mínimo ζ tal que $\exists b \in A(\zeta)\varphi_j^B(\vec{a}, b)$. Si $\neg\varphi_i^B(\vec{a})$, entonces $F_i(\vec{a}) = 0$. Observemos que F_i son una especia de funciones electoras, pero no es necesario asumir el Axioma de Elección ya que se esta apelando al buen orden de $\mathbf{Ord}$ para *definir* un ζ tal que $A(\zeta)$ que contenga al menos un b con la propiedad deseada.

Ahora, defínase $G_i : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ del siguiente modo:

$$G_i(\xi) = \sup\{F_i(a_1, \ldots, a_r) : a_1, \ldots, a_r \in A(\xi)\}$$

cuando φ_i es existencial y $r = r_i$. Cuando φ_i no es existencial, sea $G_i(\xi) = 0$. Por último, sea $K(\xi)$ el máximo de $\xi + 1$ y $\max\{G_i(\xi) : i < n\}$.

De este modo; tómese ξ arbitrario; lo que se desea demostrar sera satisfecho si exhibimos un $\eta > \xi$ tal que $A(\eta) \neq \emptyset$ y que satisfaga (2) del Lema 2.117 para $A(\eta), B$. Para esto, sea ζ_0 el mínimo $\zeta > \xi$ tal que $A(\zeta) \neq \emptyset$, y sea

$\zeta_{n+1} = K(\zeta_n)$. Como $\eta + 1 \leq K(\zeta_n)$, tenemos que $\xi < \zeta_0 < \zeta_1 < \cdots$. Sea $\eta = \sup\{\zeta_k : k \in \omega\}$.

Verifiquemos que efectivamente η es límite y que (2) de 2.117 se satisface para $A(\eta)$ y B.

η es límite: Procedamos por contradicción. Supongamos que η es sucesor, i.e. $\eta = S(\alpha)$ para algún $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Si $\eta \notin \{\zeta_k : k \in \omega\}$ entonces α sería la mínima cota superior, lo cual es una contradicción. Si $\eta \in \{\zeta_k : k \in \omega\}$ entonces $\eta = \zeta_k$ para algún $k \in \omega$ pero $\zeta_k < \zeta_{k+1} \in \{\zeta_k : k \in \omega\}$ por lo cual η no sería la mínima cota superior, lo cual es una contradicción. Por lo tanto η es límite.

(2) de 2.117 se satisface para $A(\eta)$ y B: Sean $\varphi_i(x_1 \ldots, x_r)$ fórmula existencial de la lista (es decir es de la forma $\exists y \varphi_j(\vec{x}, y)$). Sean $a_1, \ldots, a_r \in A(\eta)$, por construcción de η y que es límite, tenemos que existe $\zeta_k < \eta$ tal que $a_1, \ldots, a_r \in A(\zeta_k)$ pero entonces, por construcción, tenemos que si $\varphi_i^B(\vec{a})$ entonces $\exists b \in A(G_i(\zeta_k))\varphi_j^B(\vec{a}, b)$; pero

$$\max\{\zeta_k + 1, \max\{G_i(\zeta_k) : i < n\}\} = \zeta_{k+1} < \eta$$

y por hipótesis tenemos que $A(G_i(\zeta_k)) \subseteq A(\zeta_{k+1}) \subseteq A(\eta)$. $\square$

II.12.2 Nociones Absolutas y el modelo de BF

En esta subsección, se recopilan resultados básicos sobre nociones absolutas y modelos para pedazos de $\mathbf{ZFC}$ a partir de $R(\gamma)$ (ver Definición 1.34 y Lema 1.35). Las pruebas de estos resultados se pueden encontrar en [19] como también en [2].

Lema 2.119. *Las siguientes nociones conjuntistas están definidas por fórmulas que TCB demuestra son equivalentes a fórmulas Δ_0 (ver Definición 2.101 y Lema 2.12). Por lo tanto, son absolutas en todo modelo transitivo M para TCB.*

1. *x es un conjunto transitivo.*
2. *x es un ordinal.*
3. *x es un ordinal sucesor.*
4. *$x = 0$.*
5. *x es un ordinal límite.*
6. *x es un número natural.*
7. *$x \subseteq \omega$.*
8. *$x = \omega$.*

Lema 2.120. *Las siguientes nociones son absolutas para modelos transitivos de TCB:*

1. *La función 0-aria $\emptyset$.*

2. *La función sucesor 1-aria* S.

3. *La función intersección 2-aria cap.*

4. *La función unión 2-aria* $\cup$, *las funciones unión e intersección 1-arias* $\bigcup$ *y* $\bigcap$, *para la cual se define* $\bigcap \emptyset = \emptyset$.

5. *La relación ternaria:* $\{x, y\} = z$.

6. *La función de apareamiento 2-aria* $\{x, y\}$, *y la función singular 1-aria* $\{x\}$, *y la función par ordenado 2-aria* $\langle x, y\rangle$.

7. *Las propiedades:* z *es un par ordenado, y* x *es una relación.*

8. $\mathrm{dom}(x)$ *y* $\mathrm{ran}(x)$.

9. *Las propiedades:* f *es una función,* f *es inyectiva,* f *es sobreyectiva, y* f *es biyección.*

10. *La función binaria* $f(x)$, *definida como* $\emptyset$ *a menos que* f *sea una función y* $x \in \mathrm{dom(f)}$.

11. *La función binaria* $x \times y$.

12. *Todas las propiedades de relación de* R *y* A *definidas en 1.2.*

Obsérvese que, *primero*, en (6) se afirma que es absoluta la función "par ordenado" y *después* se afirma que la propiedad de ser par ordenado es absoluta. Esto es posible porque la función "par ordenado" se puede definir sin hacer referencia a la fórmula $\varphi(x, y, z)$ que diría que $z = \langle x, y\rangle$, como sería lo usual.

Respecto a modelos de pedazos de $\mathbf{ZFC}$ tenemos como corolario del Teorema 2.118 que:

Corolario 2.121. *Sea* Λ *un conjunto finito de axiomas de* $\mathbf{ZF}$. *Entonces*

1. $\mathbf{ZF} \vdash \exists \eta\, [R(\eta) \models \mathbf{Z} \cup \Lambda]$.

2. $\mathbf{ZFC} \vdash \exists \eta\, [R(\eta) \models \mathbf{ZC} \cup \Lambda]$.

3. $\mathbf{ZFC} \vdash \exists M\, [M \models \mathbf{ZC} \cup \Lambda \wedge |M| = \aleph_0 \wedge M$ *es transitito3*$]$.

III. EL MÉTODO DEL FORCING

III.1. Filtros Genéricos

Ya se mencionó que no es posible demostrar en $\mathbf{ZFC}$ la existencia de un modelo de $\mathbf{ZFC}$, pero sí la existencia de un modelo de $\mathbf{ZC}$ con suficientes oraciones del Axioma del Reemplazo para manejar cualquier prueba (las demostraciones son finitas). Así, cada vez que se diga que M es un modelo de $\mathbf{ZFC}$ debe entenderse con ésta última connotación. La técnica del Forcing nos permitirá, dado un modelo de $\mathbf{ZFC}$, construir otro *forzando* a que cumpla propiedades que nosotros deseemos. Para esto, se necesita recorrer cierto camino de definiciones y proposiciones, dentro de las cuales, el lema de Definibilidad y el de Verdad jugarán un papel importante.

Definición 3.1. *Un* copo de forcing *es una terna,* $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$*, tal que* $\leq$ *es un pre-orden sobre* $\mathbb{P}$ *y* $\mathbb{1} \in \mathbb{P}$ *es elemento máximo* $(\forall p \in \mathbb{P}[p \leq \mathbb{1}])$.

Notación: A los elementos de $\mathbb{P}$ se les llama *condiciones de forcing*. $p \leq q$ se lee "p extiende q".

La Definición 1.2 nos dice que un *pre-orden* es un *orden parcial* sólo si $\neg\exists p, q \in \mathbb{P}[p \leq q \wedge q \leq p \wedge p \neq q]$. Este será el caso para nuestro objetivo, más no es necesario para el desarrollo de la teoría. Para economizar la lectura, se abusará de la notación al referirnos al "copo de forcing $\mathbb{P}$" (o simplemente el copo $\mathbb{P}$) cuando este claro del contexto cuales son $\leq$ y $\mathbb{1}$. Usualmente abreviaremos el término *copo de forcing* simplemente por *copo* cuando no haya riesgo de confusión.

Definición 3.2. *Sea* $\mathbb{P}$ *un copo. Entonces* $p, q \in \mathbb{P}$ *son compatibles (denotado por* $p \not\perp q$*) si tienen una* extensión común*; esto es, existe un* $r \in \mathbb{P}$ *tal que* $r \leq p$ *y* $r \leq q$*;* p, q *son incompatibles (denotado por* $p \perp q$*) si no son compatibles.*

Observación (Notación)*:* Sea $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$ sea un copo de forcing. Entonces "$\mathbb{P} \in M$" abrevia "$(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}) \in M$".

Es necesario hacer esta aclaración porque siempre será importante suponer que M contiene la relación de orden $\leq$, no sólo el conjunto $\mathbb{P}$.

Definición 3.3. *Sea $\mathbb{P}$ un copo de forcing. Entonces*
$D \subseteq \mathbb{P}$ *es* denso *en $\mathbb{P}$ sii* $\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in D[q \leq p]$.
$D \subseteq \mathbb{P}$ *será* denso por debajo de p *en $\mathbb{P}$ sii* $\forall q \leq p \exists r \in D[r \leq q]$.

Definición 3.4. *Sea $\mathbb{P}$ un copo de forcing. Entonces $G \subseteq \mathbb{P}$ es un* filtro sobre $\mathbb{P}$ *sii*

1. $\mathbb{1} \in G$.

2. $\forall p, q \in G \exists r \in G[r \leq p \wedge r \leq q]$.

3. $\forall p, q \in \mathbb{P}[q \leq p \wedge q \in G \rightarrow p \in G]$ *(G es* cerrado ascendentemente*).*

Definición 3.5. *Dado un copo de forcing $\mathbb{P}$, G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M sii G es un filtro sobre $\mathbb{P}$ y $G \cap D \neq \emptyset$ para todo conjunto denso $D \subseteq \mathbb{P}$ tal que $D \in M$.*

La existencia de estos filtros para nuestros modelos se puede obtener del siguiente

Lema 3.6 (de Existencia del Filtro Genérico)**.** *Sea $\mathbb{P}$ cualquier copo de forcing, sea $\mathcal{D}$ una familia numerable de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, y tómese cualquier $p \in \mathbb{P}$. Entonces existe un filtro G sobre $\mathbb{P}$ tal que $p \in G$ y $G \cap D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{D}$.*

Demostración. Lístese $\mathcal{D}$ como $\{D_n : n \in \omega\}$. Usando AE y recursión sobre ω, se puede elegir $r_n \in \mathbb{P}$ para $n \in \omega$ tal que $r_0 = p$ y $r_{n+1} \leq r_n$ y $r_{n+1} \in D_n$; debe existir tal r_{n+1} porque D_n es denso. Un bosquejo de como justificar esta construcción es como sigue: Lístese $\mathbb{P}$ como $\{p_\xi : \xi < \kappa\}$ (AE) y sea $\varphi(s, y)$ una fórmula que tiene por parámetros a p, κ y la indexación de $\mathcal{D}$ y $\mathbb{P}$, que define la función $G(s)$; para conjuntos s que son funciones con dominio $\xi \in \mathbf{Ord}$, $G(s)$ es

$$G(s) = \begin{cases} p & \text{si } \xi = 0 \\ p_\alpha & \text{si } \xi = \beta + 1 < \omega \\ & \text{donde } \alpha = \min\{\xi < \kappa : p_\xi \leq_{\mathbb{P}} s(\beta) \wedge p_\xi \in D_\beta\} \end{cases}$$

y $\emptyset$ en cualquier otro caso. De este modo se puede usar el principio de recursión en ω y obtener la sucesión deseada. Sea $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n[r_n \leq q]\}$. Entonces se puede ver que G es un filtro, $p \in G$, y cada $r_{n+1} \in G$, así que $G \cap D_n \neq \emptyset$. $\square$

Así, cuando M es numerable y por lo tanto contiene sólo una cantidad numerable de conjuntos densos, se obtiene de manera inmediata del lema anterior la existencia de los filtros genéricos:

Lema 3.7 (de Existencia del Filtro Genérico)**.** *Sea M un mtn (modelo transitivo numerable) para **ZF-P** y sea $\mathbb{P} \in M$ un copo de forcing. Entonces para cada $p \in \mathbb{P}$, existe un filtro G sobre $\mathbb{P}$ tal que $p \in G$ y G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M.*

Óbservese que la noción de ser denso es absoluta pero la enumeración de los conjuntos densos en tipo ω (usada en la demostración de 3.6) debe hacerse fuera de M por (*AE*) , así que usualmente G no está en M:

Definición 3.8. *$r \in \mathbb{P}$ es un* átomo del copo $\mathbb{P}$ *sii no existen $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $p \leq r$, $q \leq r$ y $p \perp q$.*

Lema 3.9. *Si $\mathbb{P} \in M$ no tiene átomos, y el filtro G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $G \notin M$.*

Demostración. Sea $D = \mathbb{P} \backslash G$, así D es denso: Sea $q \in \mathbb{P}$, si $q \notin G$, q mismo es su extensión; si $q \in G$ entonces existen r, s con $r \leq q$ y $s \leq q$ tales que $r \perp s$, por lo tanto o $r \notin G$ o $s \notin G$, lo que asegura en ambos casos una extensión de q en D. Supongamos ahora que $G \in M$, entonces $D \in M$ (por ser mtn de **ZF-P**), pero al ser G $\mathbb{P}$-genérico sobre M se tiene que $G \cap D \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. □

Si $\mathbb{P}$ tiene un átomo r, uno puede obtener filtros genéricos en M, tal como el filtro $\{q \in \mathbb{P} : q \not\perp r\}$, pero los copos con átomos son de poco interés para lo que desarrollaremos.

III.2. Nombres y Extensión Genérica

Definición 3.10. *τ es un* $\mathbb{P}$-nombre *sii τ es una relación y*

$$\forall \langle \sigma, p \rangle \in \tau [\sigma \textit{ es un } \mathbb{P} - \textit{nombre} \wedge p \in \mathbb{P}]$$

Esta definición es hecha por recursión. En la terminología del Teorema 1.29, lo que se está definiendo es la función característica $F : V \to \{0, 1\}$ de la clase de los $\mathbb{P}$ nombres. Una idea de la relación sería $G(\tau, s) = 1$ sii τ es una relación, s una función con dominio $\tau{\downarrow}$ (ver Definición 1.23)y $\forall \langle \sigma, p \rangle \in \tau[s(\sigma) = 1 \wedge p \in \mathbb{P}]$; $G(\tau, s) = 0$ en cualquier otro caso. La recursión sería sobre la relación casi-conjunto bien fundada $\mathbf{R}$, donde $x\mathbf{R}y$ sii $x \in \mathrm{trcl}(y)$.

En la definición anterior no se menciona el orden en $\mathbb{P}$. Tampoco hace mención a modelos, pero se usará relativizada al mtn M. Dado que $\mathbf{R}$ y los conceptos usados en la recursión son absolutos para modelos transitivos de $\mathbf{ZF}-\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$ y la noción de ser $\mathbb{P}$-nombre son también absolutas (ver 2.111).

Definición 3.11. *Si M es un modelo transitivo de **ZF-P** y $\mathbb{P} \in M$, entonces $M^{\mathbb{P}} = V^{\mathbb{P}} \cap M = \{\tau \in M : (\tau \text{ es un } \mathbb{P} - \text{nombre })^M\}$*

Definición 3.12. *Si τ es un $\mathbb{P}$-nombre y $G \subseteq \mathbb{P}$, entonces se define por recursión:*

$$\mathrm{val}(\tau, G) = \tau_G = \{\mathrm{val}(\sigma, G) : \exists p \in G[\langle \sigma, p\rangle \in \tau]\}\ .$$

*Entonces $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$ cuando M es un modelo transitivo de **ZF-P** y $\mathbb{P} \in M$. $\mathrm{val}(\tau, G)$*

Así, las “personas que viven en M” pueden decidir cuáles conjuntos son $\mathbb{P}$-nombres y discutir sus propiedades, pero al no tener acceso al filtro genérico G, el cual es necesario para la computación de $\mathrm{val}(\tau, G)$, no pueden saber que es lo que los nombres nombran ni conocer el modelo $M[G]$.

La definición de nombre y valuación está relacionada al concepto de que, por el Axioma de Fundación, podemos obtener todos los conjuntos a partir de la nada mediante la iteración del *coleccionar*; esto es, tomar un montón de conjuntos y ponerlos entre llaves, $\{\ldots\ldots\}$. Por ejemplo, $\emptyset$ es un $\mathbb{P}$-nombre (porque la Definición 3.10 es cierta por vacuidad para $\emptyset$), y $\emptyset_G = \{\} = \emptyset$. Si tenemos tres nombres $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ y quisiéramos recolectar los objetos que nombran, entonces construímos $\tau = \{\langle \sigma^1, \mathbb{1}\rangle, \langle \sigma^2, \mathbb{2}\rangle, \langle \sigma^3, \rangle\}$. Cuando G es cualquier filtro, $\mathbb{1} \in G$, así $\tau_G = \{\sigma^1_G, \sigma^2_G, \sigma^3_G\}$. Pero si $p^1, p^2, p^3 \in \mathbb{P}$ y $\pi = \{\langle \sigma^1, p^1\rangle, \langle \sigma^2, p^2\rangle, \langle \sigma^3, p^3\rangle\}$, entonces esta colección estaría “*condicionada* en G”; esto es que, π_G es algún subconjunto de $\{\sigma^1_G, \sigma^2_G, \sigma^3_G\}$, y no podremos saber cual subconjunto sin conocer cuales de los p^1, p^2, p^3 pertenecen a G.

Definición 3.13. *Dado un copo $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$ y cualquier conjunto x definimos $\check{x} = \{\langle \check{y}, \mathbb{1}\rangle : y \in x\}$.*

Esta definición, también es recursiva sobre la misma relación : Obtendríamos una función $F : V \to \{0, 1\}$ de la clase de los $\check{x}$. La relación sería $G(x, s) = \{\langle s(y), \mathbb{1}\rangle : y \in x\}$ sii s es una función con dominio $x{\downarrow}$; $G(x, s) = 0$ en cualquier otro caso.

Se demuestra fácilmente por inducción, sobre la misma relación naturalmente, que $\check{x}$ siempre es un $\mathbb{P}$-nombre.

Lema 3.14. *Supóngase que M es un modelo transitivo de* $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$ *con* $\mathbb{P} \in M$ *y G un filtro sobre $\mathbb{P}$. Entonces:*

1. $\forall x \in M[\check{x} \in M^{\mathbb{P}} \wedge \mathrm{val}(\check{x}, G) = x]$.
2. $M[G] \supseteq M$.

Demostración. Para (1): $\check{x} \in M$ porque el Teorema 2.111 asegura que $\check{x}$ es absoluta. $\mathrm{val}(\check{x}, G)$ se verificará por inducción. Para el pie de inducción tenemos que $\mathrm{val}(\check{\emptyset}, G) = \emptyset$ por vacuidad. Suponemos válido para todo $y \in \mathrm{trcl(x)}$ (ver definición en la página 18); observemos que

$$\mathrm{val}(\check{x}, G) = \{\mathrm{val}(\check{y}, G) : \exists p \in G[\langle \check{y}, p\rangle \in \check{x}]\} =$$

$$\{\mathrm{val}(\check{y}, G) : \langle \check{y}, \mathbb{1}\rangle \in \check{x}\} = \{\mathrm{val}(\check{y}, G) : y \in x\}$$

así, podemos aplicar la hipótesis inductiva (ya que $x \subseteq \mathrm{trcl}(x)$) y se obtiene lo deseado.

(2) Se sigue inmediatamente de (1). □

Como ya se mencionó, usualmente $G \notin M$, pero las "personas viviendo en M" pueden elaborar un nombre, Γ, con el cual ellos saben que estan nombrando a G:

Definición 3.15. *Dado un copo de forcing $\mathbb{P}$, se define* $\Gamma = \{\langle \check{p}, p\rangle : p \in \mathbb{P}.\}$

Esta definición, así como la de $\check{x}$ dependen de $\mathbb{P}$, no se hace explícita en la notación porque $\mathbb{P}$ siempre será clara a partir del contexto. A partir de que $\Gamma_G = \{\check{p}_G : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G$ se obtiene el

Lema 3.16. *Con las hipótesis del Lema 3.14, Γ es un $\mathbb{P}$-nombre y $\Gamma_G = G$. Por lo tanto, $G \in M[G]$.*

Como se puede ver, tanto $\check{x}$ y Γ son nombres elaborados explícitamente para nombrar objetos determinados, será común que usemos $\mathring{G}$ en lugar del nombre Γ del lema anterior .También se pueden elaborar nombres para los pares ordenados y no ordenados:

Definición 3.17. $\mathrm{up}(\sigma, \tau) = \{\langle \sigma, \mathbb{1}\rangle, \langle \tau, \mathbb{1}\rangle\}$ *y*
$\mathrm{op}(\sigma, \tau) = \mathrm{up}(\mathrm{up}(x, x), \mathrm{up}(\sigma, \tau))$.

Lema 3.18. *Con las hipótesis del Lema 3.14, si $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$, entonces* $\mathrm{up}(\sigma, \tau)$, $\mathrm{op} \in M^{\mathbb{P}}$, $\mathrm{val}(\mathrm{up}(\sigma, \tau), G) = \{\sigma_G, \tau_G\}$, *y* $\mathrm{val}(\mathrm{op}(\sigma, \tau), G) = \langle \sigma_G, \tau_G\rangle$.

Lema 3.19. *Con las hipótesis del Lema 3.14 se tiene que $M[G]$ es transitivo y modelo para los Axiomas de Extensión, Fundación, Paridad, y Unión.*

Demostración. Sea $x = \tau_G \in M[G]$ (donde $\tau \in M^{\mathbb{P}}$), por definición, todo elemento de x es de la forma σ_G (donde $\langle \sigma, p\rangle \in \tau$ para algún $p \in \mathbb{P}$ y por lo tanto $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$), así, $M[G]$ es transitivo.Para verificar que el Axioma de Extensión, $\forall x, y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$, se cumple en $M[G]$, es decir (Axioma de Extensión$^{M[G]}$) supongamos que $x, y \in M[G]$ arbitrarios y supongamos que $(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))^{M[G]}$, pero ésta última oración implica $(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))$ ya que $\forall z(z \in x \vee z \in y) \rightarrow z \in M[G]$ (por transitividad de $M[G]$)y así podemos usar el Axioma de Extensión. El Axioma de Fundación se cumple en toda clase porque estamos asumiendo $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$. El Axioma de Apareamiento lo obtenemos a partir del Lema 3.18 (si $a, b \in M[G] \rightarrow \{a, b\} \in M[G]$). Para verificar que $M[G]$ satisface el Axioma de Unión, nótese que según nuestra versión de el Axioma de la Unión (página 10), es suficiente demostrar que para cualquier $a \in M[G]$, existe un $b \in M[G]$ tal que $\bigcup a \subseteq b$. Tómese $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $a = \tau_G$, sea $\pi = \bigcup \mathrm{dom}(\tau)$, y sea $b = \tau_G$.

Nótse que τ, al ser nombre, es un conjunto de pares ordenados de la forma $\langle \sigma, p\rangle$ y que $\mathrm{dom}(\tau)$ resulta ser el conjunto de cada uno de esos nombres σ. Así, por la Definición 3.10, tenemos que la unión de cualquier colección de nombres es también un nombre, por lo tanto π es un $\mathbb{P}$-nombre, y $\pi \in M$ por ser $\bigcup$ absoluta (ver la subsección de nociones absolutas y el modelo de $\mathbf{BF}$ en 2.12.2), por lo cual $b \in M[G]$.

Veamos ahora que, efectivamente, b es el conjunto deseado. Si $c \in a = \tau_G$, entonces $c = \sigma_G$ para algún $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$. Entonces, $\sigma \subseteq \pi$, así que, aplicando la Definición 3.12, $c = \sigma_G \subseteq \pi_G = b$. Por lo tanto, $\bigcup a \subseteq b$. □

Nótese que no se probó que si $a \in M[G] \rightarrow \bigcup a \in M[G]$. Esto se obtendrá cuando sea haya demostrado que $M[G]$ satisface el Axioma de Comprensión, el cual nos requerirá exigir que G sea genérico, a diferencia de ahora que sólo hemos requerido que sea G un filtro.

Veamos antes que, si bien $M[G]$ es más *grande* que M, no lo es demasiado:

Lema 3.20. *Con las hipótesis del Lema 3.14:*

1. $\mathrm{rank}(\tau_G) \leq \mathrm{rank}(\tau)$ *para todo* $\tau \in M^{\mathbb{P}}$.

2. $o(M[G]) = o(M)$

3. $|M[G]| = |M|$.

Donde $o(X)$ denota el mínimo ordinal que no pertenece a X.

Demostración. (1) puede demostrarse por inducción sobre τ. El pie de inducción, cuando $\tau = \emptyset$ es trivialmente cierto. Para el paso inductivo usamos que:

$$\begin{array}{rcc} \operatorname{rank}(\tau_G) & = & \sup\{\operatorname{rank}(x)+1 : x \in \tau_G\} \\ & \leq & \sup\{\operatorname{rank}(\sigma_G)+1 : \sigma \in \operatorname{dom}(\tau)\} \\ & \leq & \sup\{\operatorname{rank}(\sigma)+1 : \sigma \in \operatorname{dom}(\tau)\} \\ & \leq & \sup\{\operatorname{rank}(x)+1 : x \in \tau\} \\ & = & \operatorname{rank}(\tau) \end{array}$$

Donde los dos "=" usados corresponden al Lema [19, Lemma I.9.24], que afirma que para $b \in \mathbf{BF}$ se cumple la igualdad $\operatorname{rank}(b) = \sup\{\operatorname{rank}(x) + 1 : x \in b\}$. El Primer "$\leq$" es sencillamente porque se agregaron elementos al conjunto. El segundo "$\leq$" corresponde a la hipótesis inductiva y el último "$\leq$" es debido también al Lema [19, Lemma I.9.24] que además afirma que $x \in b \in \mathbf{BF} \to \operatorname{rank}(x) < \operatorname{rank}(b)$.

Para (2), veremos que contienen los mismo ordinales ambos modelos. Si $\alpha \in M[G] \cap \mathbf{Ord}$, entonces $\alpha = \tau_G$ para algún $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, y por lo tanto $\alpha = \operatorname{rank}(\alpha) \leq \operatorname{rank}(\tau) \in M \cap \mathbf{Ord}$ por que rank es noción absoluta. De este modo, $M[G] \cap \mathbf{Ord} = M \cap \mathbf{Ord}$ se sigue de que $M[G] \supseteq M$.

Para (3), $M^{\mathbb{P}} \subseteq M \subseteq M[G]$ implica que $|M[G]| \leq |M^{\mathbb{P}}| \leq |M| \leq |M[G]|$; donde el primer "$\leq$" es por la Definición 3.12 de $M[G]$. $\square$

Más adelante se demostrará que $M[G]$ es un modelo para $\mathbf{ZFC}$, cuando M lo es; pero ahora probaremos que es el mínimo modelo conteniendo a M que lo cumple:

Lema 3.21. *Con las hipótesis del Lema 3.14, sea N un modelo transitivo de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$ tal que $M \subseteq N$ y $G \in N$. Entonces $M[G] \subseteq N$.*

Demostración. La Definición 3.12 recursiva de $\operatorname{val}(\tau, G)$ cumple con las hipótesis del Teorema 2.111, G es absoluta al usar sólo nociones absolutas, R la relación también es absoluta, casi conjunto y casi conjunto en M por Corolario 2.115, y el mismo corolario asegura la condición de $\operatorname{pred}(a, R) \subseteq M$; así que $\tau, G \in N$ implica que $\tau_G \in N$. $\square$

El siguiente lema no será relevante durante los resultados inmediatos a exponer pero será usado para poder demostrar el lema de verdad.

Lema 3.22. *Supóngase que G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y éste último un mtn de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$. Supóngase que $D \subseteq \mathbb{P}$, $D \in M$, y que D es denso por debajo de $p \in \mathbb{P}$. Si $p \in G$ entonces $G \cap D \neq \emptyset$.*

Demostración. Nótese que el caso cuando $p = \mathbb{1}$ es reafirmar que G sea "genérico". Para el caso general, defínase $D^+ = D \cup \{q \in \mathbb{P} : q \perp p\}$. Veamos que D^+ es denso:
Sea $s \in \mathbb{P}$, si $s \perp p$ entonces $s \in D^+$; si no, entonces $\exists q' \in \mathbb{P}$ tal que q' es extensión común de p y q, por lo que existe $r \in D \subseteq D^+$ tal que $r \leq q' \leq p$ y por lo tanto D^+ es denso.
Como $\perp$ es una noción absoluta para M tenemos que $D^+ \in M$, así que $G \cap D^+ \neq \emptyset$. Pero entonces $G \cap D \neq \emptyset$ porque para todo $q \in G \cap D^+$, como $p \in G$ y G es un filtro, se tiene que q y p tienen una extensión común, así que $q \in D$. □

III.3. La Noción de Forzamiento

Definición 3.23. *Para un copo $\mathbb{P}$, el $\mathbb{P}$* lenguaje de Forcing *$\mathcal{FL}_{\mathbb{P}}$ es la clase de las fórmulas lógicas construidas usando la relación binaria $\in$ y todos los nombres en $V^{\mathbb{P}}$ como símbolos constantes.*

Definición 3.24. *Sea ψ una oración de $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$. Entonces $M[G] \models \psi$ tiene la connotación usual para conjuntos dada por la Definición 2.21, interpretando $\in$ como la pertenencia, e interpretando cada nombre τ como τ_G.*

Definición 3.25. *Supóngase que M es un mtn para $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$, $\mathbb{P} \in M$ es un copo de forcing, y ψ es una* oración *de $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$. Entonces $p \Vdash_{\mathbb{P},M} \psi$ se cumple sii: $M[G] \models \psi$ para todos los filtros G sobre $\mathbb{P}$ tales que $p \in G$ y G sea $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Se omitiran los subíndices $\mathbb{P}, M$ en $\Vdash$ cuando sean claros del contexto. "$p \Vdash \psi$" se lee "p fuerza ψ".*

Aquí se está suponiendo que M es numerable, así podemos asegurar la existencia de filtros genéricos. Obsérvese que sólo se ha definido $p \Vdash \psi$ para oraciones ψ, y no fórmulas arbitrarias. Un ejemplo: Sea $\mathring{G}$ nombre para G, si $p \leq q$ entonces $p \Vdash \check{q} \in \mathring{G}$, dado que para todos los filtros G, si $p \in G$ entonces $q \in G$. Nótese que $\mathbb{1} \Vdash \psi$ sii $M[G] \models \psi$ para *todos* los filtros G que son $\mathbb{P}$-genéricos sobre M. Por ejemplo, si ψ es el Axioma de Unión, entonces $\mathbb{1} \Vdash \psi$ por el Lema 3.19. También se tiene que, $q \in G \wedge q \leq p \rightarrow p \in G$ cuando G es un filtro, así que de la Definición 3.25, se obtiene el siguiente hecho sencillo acerca del forcing:

Lema 3.26. *Si $p \Vdash \varphi$ y $q \leq p$ entonces $q \Vdash \varphi$.*

Definición 3.27. *$\mathcal{AL}_{\mathbb{P}}$ es la clase de todas las oraciones atómicas de $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}}$; éstas son de la forma $\tau = \vartheta$ y $\pi \in \tau$.*

Definición 3.28. *Para cualquier copo $\mathbb{P}$ y nombres $\tau, \vartheta, \pi \in V^{\mathbb{P}}$:*

1. $p \Vdash^* \tau = \vartheta$ *sii* $\forall \sigma \in \mathrm{dom}(\tau) \cup \mathrm{dom}(\vartheta) \forall q \leq p[q \Vdash^* \sigma \in \tau \leftrightarrow q \Vdash^* \sigma \in \vartheta]$.

2. $p \Vdash^* \pi \in \tau$ *sii* $\{q \leq p : \exists \langle \sigma, r\rangle \in \tau[q \leq r \wedge q \Vdash^* \pi = \sigma]\}$ *es denso por debajo de* p.

Antes de proseguir con la justificación de ésta definición véanse los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.29.

a. $p \Vdash^* \tau = \tau$ *porque el "$\leftrightarrow$" en (1) es tautológico.*

b. Si $\langle \sigma, r\rangle \in \tau$ *y* $p \leq r$ *entonces* $p \Vdash^* \sigma \in \tau$ *ya que* $q \Vdash^* \sigma = \sigma$ *para toda* q*, así para toda* $q \leq p$, q *pertenece al conjunto descrito en (2).*

Esta definición por recursión esta justificada en $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$ usando el Teorema 1.29. La función que se está definiendo es la función característica de la afirmación en cuestión, $\mathbf{F} : \mathbb{P} \times \mathcal{AL}_{\mathbb{P}} \to \{0, 1\}$. Para aplicar el Teorema 1.29 es necesario trabajar *sobre* una relación $\mathbf{R}$ bien-fundada. Para este fin fíjense $\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2 \in \mathbf{V}^{\mathbb{P}}$, y fíjense $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$. $x \lhd y$ abrevia $x \in \mathrm{ctr}(y)$. Entonces:

1. $(p_1, \sigma_1 \in \tau_1)\mathbf{R}(p_2, \sigma_2 = \tau_2)$ sii
   $(\sigma_1 \lhd \sigma_2$ o $\sigma_1 \lhd \tau_2)$ y $(\tau_1 = \sigma_2$ o $\tau_1 = \tau_2)$.

2. $(p_1, \sigma_1 = \tau_1)\mathbf{R}(p_2, \sigma_2 \in \tau_2)$ sii
   $\sigma_1 = \sigma_2$ y $\tau_1 \lhd \tau_2$.

3. $(p_1, \sigma_1 \in \tau_1)\not{\mathbf{R}}(p_2, \sigma_2 \in \tau_2)$ y $(p_1, \sigma_1 = \tau_1)\not{\mathbf{R}}(p_2, \sigma_2 = \tau_2)$.

Si $\mathcal{L} = \{\in, \sigma_2, \tau_2\} \cup \{\mathrm{ctr}(\sigma_2 \cup \tau_2)\}$ es un léxico donde $\in$ es un símbolo predicativo de aridad 2 y los demás elementos son símbolos constantes (funcionales de aridad 0) y tomamos $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \subseteq (\mathcal{L} \cup \{=\})^{<\omega}$ como el conjunto de todas las fórmulas atómicas (Definición 2.9) tenemos que, $(\sigma_2, \tau_2){\downarrow} \subseteq \mathbb{P} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ demostrando que $\mathbf{R}$ es casi-conjunto. Se puede ver que la recursion se da *sobre* $\mathbf{R}$. Para la demostración de que $\mathbf{R}$ es bien fundada, primero defínase $\rho(p, \sigma = \tau) = \rho(p, \sigma \in \tau) = \max(\mathrm{rank}(\sigma), \mathrm{rank}(\tau)) \in \mathbf{Ord}$. Defínase también $\mathrm{tipo}(\mathrm{p}, \sigma = \tau) = 1$ y $\mathrm{tipo}(p, \sigma \in \tau)$ igual a 0 si $\mathrm{rank}(\sigma) < \mathrm{rank}(\tau)$ e igual a 2 si $\mathrm{rank}(\sigma) \geq \mathrm{rank}(\tau)$. Definimos $\Gamma : \mathbb{P} \times \mathcal{AL}_{\mathbb{P}} \to \mathbf{Ord}$ por $\Gamma(p, \varphi) = 3 \cdot \rho(p, \varphi) + \mathrm{tipo}(p, \varphi)$. De esta manera tenemos que $(p_1, \varphi_1)\mathbf{R}(p_2, \varphi_2) \to \Gamma(p_1, \varphi_1) < \Gamma(p_2, \varphi_2)$, así que $\mathbb{R}$ es bien fundada por Lema 1.25.

Lema 3.30. *Para $\varphi \in \mathcal{AL}_{\mathbb{P}}$:*

a. Si $p \Vdash^* \varphi$ y $p_1 \leq p$ entonces $p_1 \Vdash^* \varphi$.

b. $p \Vdash^* \varphi$ sii $\{p_1 \leq p : p_1 \Vdash^* \varphi\}$ es denso por debajo de p.

Demostración. Para (a) se deriva de la definición de $\Vdash^*$: En el caso que φ sea $\tau = \vartheta$, como la propiedad se cumple para todo $q \leq p$ en particular se cumple para todo $q \leq p_1 \leq p$. En el caso que φ sea $\pi \in \tau$, sea $A(p) = \{p_1 \leq p : p_1 \Vdash^* \varphi\}$, al ser éste conjunto denso por debajo de p es denso por debajo de $p_1 \leq p$, así, dado $s \leq p_1$ se tiene una extensión $q \in A(p)$, es fácil verificar que $q \in A(p_1)$.
Para (b): La implicación "$\rightarrow$" es inmediata por (a). Para la implicación "$\leftarrow$" cuando φ es $\pi \in \tau$: Sea $A(p) = \{q \leq p : \exists\langle\sigma, r\rangle \in \tau[q \leq r \wedge q \Vdash^* \pi = \sigma]\}$. Por demostrar que $A(p)$ es denso por debajo de p, así que sea $h \leq p$, entonces, por hipótesis, existe $p' \in \{p_1 \leq p : p_1 \Vdash^* \pi \in \tau\}$ pero entonces por definición de $p' \Vdash^* \pi \in \tau$ existe $q_1 \leq p' \leq h \leq p$ tal que $q_1 \in A(p') \subseteq A(p)$ y por lo tanto $A(p)$ es denso. Para cuando φ es $\tau = \vartheta$: Supongamos que $A = \{p_1 \leq p : p_1 \Vdash^* \tau = \vartheta\}$ es denso debajo de p. Recordemos que $p \Vdash^* \tau = \vartheta$ si $\forall\sigma \in \mathrm{dom}(\tau) \cup \mathrm{dom}(\vartheta) \forall q \leq p[q \Vdash^* \sigma \in \tau \leftrightarrow q \Vdash^* \sigma \in$
$vartheta]$. Sea $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau) \cup \mathrm{dom}(\vartheta)$ y $q \leq p$. Por demostrar que $q \Vdash^* \sigma \in \tau \leftrightarrow q \Vdash^* \sigma \in \vartheta$. Demostremos por separado las implicaciones; supongamos que $q \Vdash^* \sigma \in \tau$. Por demostrar que $q \Vdash^* \sigma \in \vartheta$, pero por el caso que ya demostramos de (b), esto es equivalente a demostrar que $B = \{q_1 \leq q : q_1 \Vdash^* \sigma \in \vartheta\}$ es denso por debajo de q.
Sea $r \leq q$, entonces por hipótesis existe $p_1 \leq r \leq q \leq p$ tal que $p_1 \Vdash^* \tau = \vartheta$, esto es

$$p_1 \Vdash^* \sigma \in \vartheta \leftrightarrow p_1 \Vdash^* \sigma \in \tau \quad (\smiley),$$

por hipótesis $q \Vdash^* \sigma \in \tau$ y como $p_1 \leq q$ aplicando (a) tenemos que
$p_1 \Vdash^* \sigma \in \tau$, pero por $(\smiley)$ se cumple que $p_1 \Vdash^* \sigma \in \vartheta$, así, $p_1 \in B$ lo que concluye la demostración de que B es denso. Se realiza un trabajo análogo para la otra implicación y por ser σ y q arbitrarios se obtiene la demostración deseada. □

Definición 3.31. *Para $\varphi \in \mathcal{AL}_{\mathbb{P}}$ y $p \in \mathbb{P}$: $p \Vdash^* \neg\varphi$ sii $\neg\exists q \leq p[q \Vdash^* \varphi]$.*

Se sigue del Lema 3.30:

Lema 3.32. *Para $\varphi \in \mathcal{AL}_{\mathbb{P}}$ y $p \in \mathbb{P} : p \Vdash^* \varphi$ sii $\neg\exists q \leq p[q \Vdash^* \neg\varphi]$.*

Bosquejo. Es fácil verificar que $p \Vdash^* \varphi \leftrightarrow \{p_1 \leq p : p_1 \Vdash^* \varphi\}$ es denso debajo de p $\leftrightarrow \neg\exists q \leq p[\neg\exists q_1 \leq q[q_1 \Vdash^* \varphi]] \leftrightarrow \neg\exists q \leq p[q \Vdash^* \neg\varphi]$. Para la implicación $\leftarrow$ en el segundo $\leftrightarrow$ basta observar que si $r \leq p$ entonces $\exists q_1 \leq r$ tal que $q_1 \Vdash^* \varphi$ como $q_1 \leq r \leq p$ entonces $q_1 \in \{p_1 \leq p : p_1 \Vdash^* \varphi\}$ y por lo tanto éste conjunto es denso.

□

III.4. Lemas de Verdad y Definibilidad

El siguiente lema relacionará $\Vdash^*$ con modelos y filtros genéricos; aún no se hará mención de $\Vdash$, pero los lemas de Verdad y Definibilidad se seguirán facilmente de éste.

Lema 3.33. *Sea el conjunto M un modelo transitivo de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$, con $\mathbb{P} \in M$. Sea $\varphi \in \mathcal{AL}_{\mathbb{P}} \cap M$ fija. Sea G $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces*

a. Si $p \in G$ y $(p \Vdash^* \varphi)^M$ entonces $M[G] \models \varphi$.

b. Si $M[G] \models \varphi$ entonces existe $p \in G$ tal que $(p \Vdash^* \varphi)^M$.

Nótese que no se está pidiendo que M sea numerable, aunque si M es no numerable, podría no haber algún G genérico. También, de nuestra Definición 3.28 es fácil ver que $\Vdash^*$ para φ *atómicas* es absoluta, así que el lema pudo haberse escrito con $p \Vdash^* \varphi$ en lugar de $(p \Vdash^* \varphi)^M$. Se escribió de tal modo porque después se demostrará el enunciado para oraciones φ arbitrarias de $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}}$, las cuales no tienen porque ser absolutas, habiendo dicho lo anterior, durante la prueba del lema se omitirá la relativización ya que no afecta para el caso particular tratado. La prueba se hará por inducción sobre la relación $\mathbf{R}$ mencionada en la justificación de la Definición 3.28; se puede verificar que los elementos minimales de $\mathbf{R}$ son de la forma (p, φ) donde φ es $\emptyset = \emptyset$ o $\emptyset \in \emptyset$ y $p \in \mathbb{P}$.

Demostración. Como se mencionó, la demostración será sobre la relación $\mathbf{R}$ mencionada; para el pie de inducción nótese que un caso minimal $(p, \emptyset \in \emptyset)$ invalida los antecedentes de ambos casos del lema en cuestión, por lo que ambas implicaciones resultan trivialmente ciertas. El otro caso $(p, \emptyset = \emptyset)$ es fácil de verificar, (a) se sigue del Ejemplo 3.29 y (b) es trivial. Proseguimos con el paso inductivo.

Para (a): Sea $p \in G$ fijo.

Si $p \Vdash^* \pi \in \tau$ entonces $D := \{q \leq p : \exists\langle\sigma, r\rangle \in \tau[q \leq r \wedge q \Vdash^* \pi = \sigma]\}$ es denso debajo de p por definición de $\Vdash^*$, y $D \in M$, ya que las nociones que lo definen son absolutas para M y M es modelo transitivo de $\mathbf{ZF}-\mathbf{P}$, así que, por 3.22, tómese $q \in G \cap D$; como $q \in D$ tómese $\langle \sigma, r\rangle \in tau$ con $q \leq r$ y $q \Vdash^* \pi = \sigma$. Nótese que $(q, \pi = \sigma)\mathbf{R}(p, \pi \in \tau)$ y que $q \in G$, así que podemos aplicar la hipótesis inductiva (a), obteniendo que, $M[G] \models \pi = \sigma$, esto es, $\pi_G = \sigma_G$. También se tiene que $r \in G$ ya que $q \leq r$ y G es un filtro, así que, como $\langle \sigma, r\rangle \in \tau$, $\pi_G = \sigma_G \in \tau_G$. Por lo tanto $M[G] \models \pi \in \tau$.

Si $p \Vdash^* \tau = \vartheta$, entonces demostraremos que $\tau_G \subseteq \vartheta_G$; la prueba de que $\vartheta_G \subseteq \tau_G$ es análoga. Tómese un elemento de τ_G, éste debe ser de la forma σ_G, donde $\langle \sigma, r\rangle \in \tau$ y $r \in G$; demostraremos que $\sigma_G \in \vartheta_G$. Como $r, p \in G$ tómese $q \in G$ extensión común. Entonces $q \Vdash^* \sigma \in \tau$ (véase Ejemplo 3.29) pero ésto implica que $q \Vdash^* \sigma \in \vartheta$ (por $q \leq p$ y $p \Vdash^* \tau = \vartheta$). Como $(q, \sigma \in \vartheta)\mathbf{R}(p, \tau = \vartheta)$ y $q \in G$, podemos aplicar la hipótesis inductiva (a), obteniendo que $M[G] \models \sigma \in \vartheta$, esto es, $\sigma_G \in \vartheta_G$.

Para (b):

Si $M[G] \models \pi \in \tau$, se debe encontrar un $p \in G$ tal que $D := \{q \leq p : \exists \langle \sigma, r\rangle \in \tau[q \leq r \wedge q \Vdash^* \pi = \sigma]\}$ es denso por debajo de p. Por definición de τ_G, tómese $\langle \sigma, r\rangle \in \tau$ tal que $\pi_G = \sigma_G$, esto es, $M[G] \models \pi = \sigma$. Aplicando hipótesis inductiva (b) ($(p_1, \pi = \sigma)\mathbf{R}(p_2, \pi \in \tau)$ para cualesquier p_1, p_2) podemos tomar $p \in G$ tal que $p \Vdash^* \pi = \sigma$. Se puede suponer que $p \leq r$, de no serlo así, como $r, p \in G$ y G filtro se toma una extensión común, que además por inciso (a) del Lema 3.30 también cumplirá con $\Vdash^* \pi = \sigma$; pero nuevamente éste Lema implica que $D \supseteq p{\downarrow}$.

Cuando φ es $\tau = \vartheta$, sea D el conjunto de todos los $p \in \mathbb{P}$ tales que al menos se cumple uno de los siguientes casos:

1. $p \Vdash^* \tau = \vartheta$
2. Para algún $\sigma \in \operatorname{dom}(\tau) \cup \operatorname{dom}(\vartheta) : p \Vdash^* \sigma \in \tau$ y $p \Vdash^* \neg\sigma \in \vartheta$.
3. Para algún $\sigma \in \operatorname{dom}(\tau) \cup \operatorname{dom}(\vartheta) : p \Vdash^* \neg\sigma \in \tau$ y $p \Vdash^* \sigma \in \vartheta$.

Entonces $D \in M$ por argumentos análogos a los dados cuando φ es $\pi \in \tau$ en el inciso (a), el conjunto es no vacío ya que para todo $p \in \mathbb{P}$ si $p \Vdash^* \tau = \vartheta$ es falso entonces, por Definición 3.31 y Lema 3.32 existe un $q \leq p$ que cumple (2) o (3) y por estos mismos argumentos se tiene que D es denso. Supongamos entonces que $M[G] \models \tau = \vartheta$ (i.e. $\tau_G = \vartheta_G$), tómese $p \in G \cap D$ (G es $\mathbb{P}$-genérico). Si se cumple (1), hemos acabado. Si se cumple (2), entonces $p \Vdash^* \sigma \in \tau$ implica que $M[G] \models \sigma \in \tau$ por inciso (a), así que $\sigma_G \in \tau_G = \vartheta_G$; como $(p_1, \sigma \in \vartheta)\mathbf{R}(p_2, \tau = \vartheta)$ podemos aplicar inducción (b) y tomar $q \in G$ tal que $q \Vdash^* \sigma \in \vartheta$. Como $p, q \in G$, sea r extensión común. Entonces, por

Lema 3.30 incisio (a) $r \Vdash^* \sigma \in \vartheta$, pero dado que $r \leq p$, esto contradice (por Definición 3.31) que $p \Vdash^* \neg\sigma \in \vartheta$. Una contradicción similar se obtiene si p cumple (3). $\square$

Lema 3.34. *Sea M un mtn de $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$, con $\mathbb{P} \in M$. Para $p \in \mathbb{P}$ y $\varphi \in \mathcal{AL}_{\mathbb{P}} \cap M$, $p \Vdash \varphi$ sii $(p \Vdash^* \varphi)^M$.*

Demostración. Nuevamente, como se está discutiendo sobre oraciones atómicas, podemos omitir las relativizaciones a M. Para $\leftarrow$: Es necesario demostrar que $M[G] \models \varphi$ para todo filtro G $\mathbb{P}$-genérico tal que $p \in G$, pero ésto es el Lema 3.33.

Para $\rightarrow$: Supóngase que $p \Vdash \varphi$ y que $(p \not\Vdash^* \varphi)^M$. Por Lema 3.32, tómese $q \leq p$ tal que $q \Vdash^* \neg\varphi$, lo cual, por la Definición 3.31, implica que $\neg\exists r \leq q[r \Vdash^* \varphi]$. Sea G filtro genérico con $q \in G$. Entonces, como $q \leq p$, $p \in G$ y así $M[G] \models \varphi$. Por Lema 3.33, tómese $s \in G$ tal que $s \Vdash^* \varphi$. Dado que $q, s \in G$, tómese r extensión común. Tenemos entonces por Lema 3.30 que $r \Vdash^* \varphi$, lo cual es una contradicción. $\square$

Para proseguir, será necesario definir la noción de $p \Vdash^* \varphi$ para $\varphi \in \mathcal{FL}_{\mathbb{P}}$, ésta definición puede inspirarse naturalmente en propiedades de $\Vdash$ que serán demostradas más adelante en los Lemas 3.43,3.45y 3.46 pero puede ser útil como motivación leerlas antes .

Definición 3.35. . *Para cualquier copo $\mathbb{P}$, definimos la noción de $p \Vdash^*_{\mathbb{P}} \varphi$ para oraciones φ de $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}}$ por las siguientes reglas:*

1. *Para φ atómica, como se definió en 3.28.*
2. *$p \Vdash^* \varphi \wedge \psi$ sii $p \Vdash^* \varphi$ y $p \Vdash *\psi$.*
3. *$p \Vdash^* \neg\varphi$ sii $\neg\exists q \leq p[q \Vdash *\psi]$.*
4. *$p \Vdash^* \varphi \rightarrow$ sii $\neg\exists q \leq p[q \Vdash^* \varphi \wedge q \Vdash^* \neg\psi]$.*
5. *$p \Vdash^* \psi \vee \psi$ sii $\{q : [q \Vdash^* \varphi] \vee [q \Vdash^* \psi]\}$ es denso por debajo de p.*
6. *$p \Vdash^* \varphi \leftrightarrow \psi$ sii $\neg\exists q \leq p[q \Vdash^* \varphi \wedge q \Vdash^* \neg\psi]$ y $\neg\exists q \leq p[q \Vdash^* \psi \wedge q \Vdash^* \neg\varphi]$.*
7. *$p \Vdash^* \forall x\varphi(x)$ sii $p \Vdash^* \varphi(\tau)$ para toda $\tau \in V^{\mathbb{P}}$.*
8. *$p \Vdash^* \exists x\varphi(x)$ sii $\{q : \exists\tau \in V^{\mathbb{P}}[a \Vdash^* \varphi(\tau)]\}$ es denso debajo de p.*

Nótese que, en la metateoría, para cada fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L} = \{\in\}$, con n variables libres, se está asociando otra fórmula $Forces_\varphi(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}, p, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$ con $n + 4$ variables libres que afirma que $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$ es un copo de forcing, $p \in \mathbb{P}$, $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n \in V^{\mathbb{P}}$, y $p \Vdash^*_{\mathbb{P}} \varphi(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$. Esto no es más que una recursión sobre $\lg(\varphi)$ (ver definición en la página 24), realizada en la metateoría. *Grosso Modo*, la Definición 3.28 nos da el caso inicial ($\lg(\varphi) = 3$), que nos produciría las fórmulas $forces_{x=y}(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}, p, \varkappa_1, \varkappa_2)$ y $forces_{x\in y}(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}, p, \varkappa_1, \varkappa_2)$. Los casos proposicionales son casi directos. Para los cuantificadores nótese que la relación recursiva más intuitiva no es posible de llevar a cabo, esto es, para el caso (7) $p \Vdash^* \forall x\varphi(x)$ sii $p \Vdash^* \varphi(\tau)$ para toda $\tau \in V^{\mathbb{P}}$ uno esperaría que $\varphi(\tau)\mathbf{R}\forall x\varphi(x)$, sin embargo, al ser $V^{\mathbb{P}}$ una clase, esta relación $\mathbf{R}$ no sería casi conjunto. Sin embargo esto realmente no es un problema ya que la recursión en la metateoría, no está contemplando constantes, así (7) es descrito, a través de la metateoría, por la fórmula $\forall x(\text{nombre}(x) \to p \Vdash^* \varphi(x))$. Todos estos detalles no estarán presentes al momento de enunciar nuestros lemas.

El siguiente lema es la *extensión* de los lemas 3.30 y 3.32

Lema 3.36. *Para $\varphi \in \mathcal{FL}_{\mathbb{P}}$:*

a. Si $p \Vdash^* \varphi$ y $p_1 \leq p$ entonces $p_1 \Vdash^* \varphi$.

b. $p \Vdash^* \varphi$ sii $\{p_1 \leq p : p_1 \Vdash^* \varphi\}$ es denso por debajo de p.

c. $p \Vdash^* \varphi$ sii $\neg\exists q \leq p[q \Vdash^* \neg\varphi]$.

Demostración. (a) se puede obtener fácilmente por inducción en φ. (c) se obtiene fácilmente a partir de (b): Para '$\leftarrow$', sea $r \leq p$ entonces $r \not\Vdash^* \neg\varphi$ sii $\exists s \leq r[s \Vdash^* \varphi]$. Para '$\to$', obsérvese que $\exists q \leq p[\neg\exists r \leq q[r \Vdash^* \varphi]]$ sii $\{p_1 \leq p : p_1 \Vdash^* \varphi\}$ no es denso por debajo de p sii $p \not\Vdash^* \varphi$. Para (b), '$\to$' es inmediata a partir de (a), para '$\leftarrow$' se obtienen sin complicación por inducción, por ejemplo:

Si φ es $\forall x\psi(x)$ y $\{p_1 \leq p : \forall\tau \in V^{\mathbb{P}}[p_1 \Vdash^* \psi(\tau)]\}$ es denso por debajo de p. Así, si fijamos $\tau \in V^{\mathbb{P}}$, por demostrar que $p \Vdash^* \psi(\tau)$; tenemos que $\{p_1 \leq p : p_1 \Vdash^* \psi(\tau)\}$ es denso por debajo de p lo que implica que $p \Vdash^* \psi(\tau)$ por hipótesis inductiva (b) para $\psi(\tau)$.

Si φ es $\chi \vee \psi$, sea $A = \{q : [q \Vdash^* \varphi] \vee [q \Vdash^* \psi]$. Si $r \leq p$ entonces $\exists p_1 \leq p$ tal que $p_1 \Vdash^* \chi \vee \psi$ sii $A_1 = \{q \leq p_1 : [q \Vdash^* \varphi] \vee [q \Vdash^* \psi]\}$ es denso por debajo de p_1. Como $A_1 \subseteq A$ denso por debajo de p se obtiene que A denso por debajo de p. En este caso, como varios otros, no es necesaria la hipótesis inductiva. $\square$

Lema 3.37. *Sea M un modelo transitivo de $\mathbf{ZF}-\mathbf{P}$, con $\mathbb{P}\in M$. Tomemos $\varphi\in\mathcal{FL}_{\mathbb{P}}\cap M$ fija. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces*

a. Si $p\in G$ y $(p\Vdash^*\varphi)^M$ entonces $M[G]\models\varphi$.

b. Si $M[G]\models\varphi$ entonces existe algún $p\in G$ al que $(p\Vdash^*\varphi)^M$.

Demostración. Se puede probar (a) y (b) por inducción sobre φ. Sea $L(\varphi)$ una abreviación de la afirmación que e lema se cumple para φ. Hay 7 casos por probar de la Definición 3.35, correspondientes a los incisos (2-8) (el primero es nuestro pie de inducción). Todos estos casos se pueden obtener sin muchas complicaciones.

$L(\varphi)\to L(\neg\varphi)$: Para (a), si $p\in G$ y $(p\Vdash^*\neg\varphi)$ y $M[G]\models\varphi$, entonces por $L(\varphi)$, tomemos $r\in G$ tal que $(r\Vdash^*\varphi)^M$, y entonces tómese $q\in G$ tal que $q\leq p$ y $q\leq r$. Entonces $(q\Vdash^*\varphi)^M$ por Lema 3.36 (aplicado en M) y $q\leq p$, contradiciendo la definición de "$p\Vdash^*\neg\varphi$" (aplicada en M). Aquí, se está usando el hecho de que $M\models\mathbf{ZF}-\mathbf{P}$, que es un pedazo suficiente de teoría de conjuntos para justificar el Lema 3.36. Para (b), nótese que $D:=\{p\in\mathbb{P}:(p\Vdash^*\varphi)^M\vee(p\Vdash^*\neg\varphi)^M\}\in M$, y así D es denso, ya que dado $s\in\mathbb{P}$, de no existir $p\leq s$ tal que $p\Vdash^*\varphi$ se satisface la definición de "$s\Vdash^*\neg\varphi$". Supóngase que $M[G]\models\neg\varphi$, y tómese $p\in G\cap M$. Si $(p\Vdash^*\neg\varphi)^M$ hemos acabado, si $(p\Vdash^*\varphi)^M$, por (a) de $L(\varphi)$ tendríamos que $M\models\varphi$ lo que es una contradicción.

$[\forall\tau\in M^{\mathbb{P}}L(\varphi(\tau)]\to L(\exists\varphi(x))$: Para (a), si $p\in G$ y $(p\Vdash^*\exists x\varphi(x))^M$, entonces $D:=\{q:\exists\tau\in M^{\mathbb{P}}[q\Vdash^*\varphi(\tau)^M]\}$ es denso por debajo de p (Definición 3.35 relativizada a M). Dado que $p\in G$ y G es genérico, tómese $q\leq p$ y $\tau\in M^{\mathbb{P}}$ tal que $q\in G$ y $(q\Vdash^*\varphi(\tau))^M$ (3.22). Entonces $M[G]\models\varphi(\tau)$ por (a) para $\varphi(\tau)$, así $M[G]\models\exists x\varphi(x)$. Para (b), si $M[G]\models\exists x\varphi(x)$ entonces se puede tomar $\tau inM^{\mathbb{P}}$ tal que $M[G]\models\varphi(\tau)$. Aplicando (b) para $\varphi(\tau)$, tómese $p\in G$ tal que $(p\Vdash^*\varphi(\tau))^M$. Entonces $(p\Vdash^*\exists\varphi(x))^M$ se sigue de 3.36 (a) (aplicado a M). $\square$

Ahora proseguiremos a obtener el análogo del Lema 3.34, la demostración se sigue exactamente igual remplazando los Lemas 3.30, 3.32 por 3.36 y 3.33 por 3.37.

Lema 3.38. *Sea M un mtn de $\mathbb{ZF}-\mathbb{P}$, con $\mathbb{P}\in M$. Para $p\in\mathbb{P}$ y $\varphi\in\mathcal{FL}_{\mathbb{P}}\cap M$, $p\Vdash\varphi$ sii $(p\Vdash^*\varphi)^M$.*

Ya tenemos las herramientas suficientes para demostrar dos lemas fundamentales para el desarrollo de la teoría del forcing. Como se ha venido diciendo, el método de forcing consiste en construir un modelo de **ZF** que cumpla con alguna condición deseada, esto se logra definiendo un orden parcial adecuado en un modelo de **ZF** tal que su extensión genérica $M[G]$ satisfaga lo deseado; la pregunta inmediata ante esta afirmación es ¿Cómo nos aseguramos de que la condición deseada será forzada por la estructura de M?, esto se resuelve con el

Lema 3.39 (de Verdad). *Sea M un mtn de* $\mathbf{ZF}-\mathbf{P}$*, sea $\mathbb{P} \in M$ un copo de forcing, sea ψ una oración de $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$, y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces $M[G] \models \psi$ sii existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \psi$.*

Esta doble implicación nos permiter construir nombres para que ψ se satisfaga y verificar que son esos nombres los que necesitamos. Pero ¿Cómo verificaremos que ese nombre estará en M? Para esto entra en juego el *Lema de Definibilidad.Grosso modo*, el Lema dice que la noción $\Vdash$, es definible en M, ésto es, verificable a partir de los elementos de M, a pesar de, en apariencia, depender de filtros genéricos que pueden no pertenecer a M. Intuitivamente el lema diría algo como $\{(p, \psi) : p \Vdash \psi\} \in \mathcal{D}^+(M)$ (Definición 2.95). Se está usando $\mathcal{D}^+(M)$ y no $\mathcal{D}^-(M)$ porque $\mathbb{P}$ podría usarse como parámetro en la definición, pero aún así, esto es falso. Considérese el copo más trivial, $\mathbb{P} = \{\mathbb{1}\}$, así cada nombre es de la forma $\check{a}$, y $\mathbb{1} \Vdash \psi$ sii ψ es verdadera en M (todo nombre $\check{a}$ en $M[G]$ es a); de este modo, si ψ es una oración de $\mathcal{LF} \cap M^{\mathbb{P}}$ podemos decir que ψ es de la forma $\varphi(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_k)$, lo que abreviaremos con $\varphi(\vec{\check{a}})$. Así, si aceptamos la definición intuitiva tendríamos que $\{(\mathbb{1}, \varphi[\vec{\check{a}}]) : \mathbb{1} \Vdash \varphi[\vec{\check{a}}]\} \in \mathcal{D}^+(M)$, es decir, existe una fórmula $\theta(x, y, z)$ que lo define, pero entonces $\{(\vec{a}, \varphi) : M \models \varphi[\vec{a}]\} = \{(\vec{a}, \varphi) : \exists \vec{x}[\vec{x} = \vec{\check{a}} \wedge \theta(\mathbb{1}, \varphi[\vec{x}], \mathbb{P})]\} \in D^+(M)$, lo que contradice el Teorema de indefinibilidad de Tarski (Teorema 2.96). Por lo tanto, el lema puede ser correctamente enunciado de la siguiente manera:

Lema 3.40 (de Definibilidad). *Sea M un mtn para* $\mathbf{ZF}-\mathbf{P}$. *Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula en $\mathcal{L} = \{\in\}$, con todas las variables libres enlistadas. Entonces*

$$\{(p, \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n) : (\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}) \textit{ es un copo de forcing } \wedge p \in \mathbb{P} \wedge$$

$$(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}) \in M \wedge \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n \in M^{\mathbb{P}} \wedge p \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)\}$$

pertenece a $\mathcal{D}^-(M)$.

Por ejemplo, supongamos que nos interesa estudiar el conjunto $S = \{n \in \omega : (\varphi(n, \sigma_G))^{M[G]}\}$, ¿Por qué habría de pertenecer este conjuto a $M[G]$? (Esta pregunta forma parte de otra más general, ¿Cómo justificar el axioma de comprensión en $M[G]$?) Podemos asegurar la pertenencia de S en $M[G]$

construyendo el nombre adecuado, en éste caso el nómbre τ que cumpliría con $S = \tau_G$ sería

$$\{\langle \check{n}, p\rangle : n \in \omega \wedge p \in \mathbb{P} \wedge p \Vdash \varphi(\check{n}, \sigma)\}. \qquad (♫)$$

Pero ahora el problema se traslada a ¿Por qué ♫ debería pertenecer a M ? Pero para esto sólo es necesario justificar que el conunto $W := \{x : \exists n[n \in \omega \wedge x = \check{n}]\}$ pertenece a M, lo cual es cierto por que M verifica comprensión y remplazo; y como $\mathbb{P} \in M$, el Lema de Definibilidad y nuevamente el axioma de comprensión en M nos aseguran que $\tau \in M$.

Demostración de Lemas de Verdad y Definibilidad. Para el Lema de Verdad, se remplaza $(p \Vdash^* \varphi)^M$ por $p \Vdash \varphi$ en 3.37 (b). Para el Lema de Definibilidad, la noción $(p \Vdash^* \varphi(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n))^M$ es definible en M, la justificación se encuentra en 3.35 y la discusión sobre ella. □

III.5. Extensión Genérica para ZFC

Dotados de los Lemas de Verdad y Definibilidad,podemos pasar a demostrar que $M[G] \models \mathbf{ZFC}$ si suponemos que $M \models \mathbf{ZFC}$. Esto lo separaremos en dos resultados.

Lema 3.41. *Sea M un mtn para $\mathbf{ZF} - \mathbf{P}$, sea $\mathbb{P} \in M$ un copo de forcing, y sea G $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces $M[G]$ es un modelo para todos los axiomas de $\mathbb{ZF} - \mathbb{P}$ excepto tal vez el Axioma de Remplazo.*

Demostración. Empezaremos con el Axioma de Comprensión el cual generaliza la discusión sobre (♫). Por brevedad, sea $N = M[G]$.

Sea φ una fórmula arbitraria pero fija de $\mathcal{L} = \{\in\}$ sin y libre. φ podría tener x, z libres, posiblemente junto con otras variables $\upsilon^0, \ldots, \upsilon^{n-1}$, así que las escribimos como $\varphi(x, z, \upsilon^0, \ldots, \upsilon^{n-1})$. Escribimos la indización como superíndice en lugar de subíndice en afán de claridad. Tenemos que verificar que

$$\forall z, \upsilon^0, \ldots, \upsilon^{n-1} \in N \exists y \in N \forall x \in N[x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi^N(x, z, \vec{\upsilon})]$$

Dado que $N = M[G]$, tómense $\pi_G, \sigma^0_G, \ldots, \sigma^{n-1}_G \in N$ (correspondientes a $z, \upsilon^0, \ldots, \upsilon^{n-1}$), donde $\pi, \sigma^0, \ldots, \sigma^{n-1} \in M^{\mathbb{P}}$. Sea $S = \{x \in \pi_G : \varphi^N(x, \pi_G, \sigma^0, \ldots, \sigma^{n-1})\}$. Será suficiente (y necesario) demostrar que $S \in N$, así que debemos construir un nombre $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\tau_G = S$. Para acortar la notación, $\tilde{\varphi}(x)$ denotará la *fórmula* $\varphi(x, \pi, \sigma^0, \ldots, \sigma^{n-1})$ de $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$. Tenemos que π es un conjunto de pares de la forma $\langle \vartheta, r\rangle$ y que cada elemento de π_G es alguno de éstos ϑ_G, así que $S = \{\vartheta_G : \varphi \in \mathrm{dom}(\pi) \wedge M[G] \models (\vartheta \in \pi \wedge \tilde{\varphi}(\varphi))\}$. Definamos

$$\tau = \{\langle \vartheta, p\rangle : \vartheta \in \mathrm{dom}(\pi) \wedge p \in \mathbb{P} \wedge p \Vdash (\vartheta \in \pi \wedge \tilde{\varphi}(\vartheta))\}.$$

Entonces $\tau_G = \{\vartheta_G : \vartheta \in \mathrm{dom}(\pi) \wedge \exists p \in G p \Vdash (\vartheta \in \pi \tilde{\varphi}(\vartheta))\}$, y $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ por lema de definibilidad y porque $\mathrm{dom}(\pi) \times \mathbb{P} \in M$. La definición de $\Vdash$ implica que $\tau_G \subseteq S$. Para demostrar que $S \subseteq \tau_G$, tomemos $\vartheta_G \in S$, por lo tanto $\vartheta \in \mathrm{dom}(\pi)$. Entonces $M[G] \models (\vartheta \in \pi \wedge \tilde{\varphi}(\vartheta))$, así, por el Lema de Verdad, tomamos un $p \in G$ tal que $p \Vdash (\vartheta \in \pi \wedge \tilde{\varphi}(\vartheta))$. Entonces $\langle \vartheta, p\rangle \in \tau$, por lo tanto $\vartheta_G \in \tau_G$.

En vista del Lema 3.19, sólo falta probar el Axioma de Infinitud, el cual es cierto porque $\omega \in N$. (ver 2.110). □

Teorema 3.42. *Sea M un mtn para* **ZF***, sea $\mathbb{P} \in M$ un copo de forcing, y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces $M[G] \models$* **ZF***. Aún más, $M[G] \models$* **ZFC** *si $M \models$* **ZFC***.*

Demostración. Los axiomas restantes son el del Conjunto Potencia, Remplazo y Elección.

Para el Conjunto Potencia, será suficiente demostrar que para cada $a \in M[G]$, existe un $b \in M[G]$ tal que $\mathcal{P}(a) \cap M[G] \subset b$. Tomemos un $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\tau_G = a$. Sea $Q = (\mathcal{P}(\mathrm{dom}(\tau) \times \mathbb{P}))^M$. Éste es el conjunto de todos los nombres $\vartheta \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\mathrm{dom}(\vartheta) \subseteq \mathrm{dom}(\tau)$ (verifíquese). Sea $\pi = Q \times \mathbb{1}$ y $b = \pi_G = \{\vartheta_G : \vartheta \in Q\}$. Ahora, tómese cualquier $c \in \mathcal{P}(a) \cap M[G]$; demostraremos que $c \in b$. Tómese $\varkappa \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\varkappa_G = c$, y sea $\vartheta = \{\langle \sigma, p\rangle : \sigma \in \mathrm{dom}(\tau) \wedge p \Vdash \sigma \in \varkappa\}$; tenemos que $\vartheta \in M$ (como se ha venido haciendo, esto es posible por el lema de Definibilidad y el Axioma de Comprensión aplicado en M con $\mathrm{dom}(\tau) \times \mathbb{P}$ y $\Vdash$); Dado que $\vartheta \in Q$, terminaremos si demostramos que $\vartheta_G = c$. $\vartheta_G \subseteq c$ se cumple porque $\vartheta_G = \{\sigma_G : \exists p \in G\, p \Vdash \sigma \in \varkappa\}$ y cada uno de éstos σ_G está en $\varkappa_G = c$ por definición de $\Vdash$. Para demostrar que $c \subseteq \vartheta_G$: dado que $c \subset a = \tau_G$, cada elemento de c es de la forma σ_G para algún $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$. Dado que $\sigma_G \in c = \varkappa_G$, el Lema de Verdad nos asegura la existencia de un $p \in G$ tal que $p \Vdash \sigma \in \varkappa$; por la construcción de Q y ϑ tenemos por consecuencia que $\langle \sigma, p\rangle \in \vartheta$, así $\sigma_G \in \vartheta_G$.

Para el Axioma de Remplazo, suponemos que $a \in M[G]$ y $(\forall x \in a \exists y \tilde{\varphi}(x, y))^{M[G]}$, y exhibiremos un $b \in M[G]$ tal que $(\forall x \in a \exists y \in b \tilde{\varphi}(x, y))^{M[G]}$. Se ha abreviado la notación de φ de igual modo que en la demostración del Axioma de Comprensión; por esto, $\tilde{\varphi}(x, y)$ es una fórmula en $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$, que puede contener algunos nombres como parámetros fijos. Sabemos que $a = \tau_G \in M[G]$ para algún nombre τ. Así que $M[G] \models \forall x \in \tau \exists y \tilde{\varphi}(x, y)$. Trabajando en M, se puede construir un conjunto Q de nombres tal que para todo $p \in \mathbb{P}$ y todo $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$, si existe un nombre ϑ tal que $p \Vdash \tilde{\varphi}(\sigma, \vartheta)$, entonces al menos uno de esos ϑ pertenece a Q. Podemos obtener tal Q usando el Teorema del Reflejo2.118 en M: Como estamos suponiendo que M es un mtn de ZF, se puede dentro de M "demostrar" el Teorema del Reflejo, el entrecomillado es porque, como ya se ha discutido, lo que se usará será un caso particular del esquema de teorema; éste es para la clase de Bien Fundados en M, la clase misma M y la fórmula $\psi(x_1, x_2, x_3, y, w, z, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$ dada por

$$\mathrm{nombre}_{x_1}(w) \wedge z \in \mathrm{dom}(w) \wedge \exists \vartheta [y \Vdash \varphi(z, \vartheta, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)] \, .$$

La fórmula nombre es la función característica, equivalente a la afirmación $w \in M^{x_1}$; nótese además que fue necesario enunciar φ y no $\tilde{\varphi}$ ya que el Teorema del reflejo es para fórmulas del léxico $\mathcal{L} = \{\in\}$; no es necesario enunciar que x_1, x_2, x_3 definen un copo de forcing ni que $y \in x_1$ ni que $z, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n \in M^{x_1}$ porque eso ya esta enunciado en la fórmula $y \Vdash \varphi(z, \vartheta, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$ y que el Lema de Definibilidad nos asegura que cumple con las hipótesis necesarias. De este modo Q puede ser $M^{\mathbb{P}} \cap (R(\alpha))^M$ para un $\alpha < o(M)$ suficientemente grande ($R(\alpha)$ debe contener a $\mathbb{P}$ y a τ). Sea $\pi = Q \times \{\mathbb{1}\}$ y $b = \pi_G = \{\vartheta_G : \vartheta \in Q\}$.

Para demostrar $(\forall x \in a \exists y \in b \tilde{\varphi}(x, y))^{M[G]}$, tómese $x \in a$. Entonces $x = \sigma_G$ para algún $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$. Entonces $M[G] \models \exists y \tilde{\varphi}(\sigma, y)$, así que existe un $\vartheta \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $M[G] \models \tilde{\varphi}(\sigma, \vartheta)$, y por lo tanto, por el Lema de Verdad, existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \tilde{\varphi}(\sigma, \vartheta)$. Entonces, por construcción, existe un $\vartheta \in Q$ tal que $p \Vdash \tilde{\varphi}(\sigma, \vartheta)$. Si $y = \vartheta_G$, entonces $y \in b$ y $(\tilde{\varphi}(x, y))^{M[G]}$.

Para demostrar que $M[G] \models AE$, tomemos un $a = \tau_G \in M[G]$; demostraremos que a tiene un buen orden en $M[G]$. Trabajando en M, usamos AE y bien ordenamos $\mathrm{dom}(\tau)$, lo cual es equivalente a la existencia de un isomorfismo de $\mathrm{dom}(\tau)$ y algún ordinal α lo que nos permite "listar" τ como $\{\sigma^\xi : \xi < \alpha\}$; sea $\mathring{f}$ el nombre $\{\langle \mathrm{op}(\check{\xi}, \sigma^\xi), \mathbb{1}\rangle : \xi < \alpha\}$. En $M[G]$ tenemos que $f := \mathring{f}_G$. Por el Lema 3.18, $f = \{\langle \xi, \sigma^\xi_G \rangle : \xi < \alpha\}$, así que f es una función con $\mathrm{dom}(f) = \alpha$ y $a \subseteq \mathrm{ran}(f)$ (a podría ser subconjunto propio dependiendo de M, ver la Definición 3.12 y su discusión). Por lo tanto, trabajando en $M[G]$, podemos bien-ordenar a de la siguiente manera, $x \lhd y$ sii $\min\{\xi < \alpha : f(\xi) = x\} < \min\{\xi < \alpha : f(\xi) = y\}$. $\lhd$ efectivamente bien ordena a a ya que el buen orden de $\mathbf{Ord}$ sobre α es absoluto (ver sección de nociones absolutas y el modelo de $\mathbf{BF}$ en 2.12.2) y $a \subseteq \operatorname{ran}(f)$.

$\square$

Se concluye el capítulo con una colección de resultados básicos y útiles para el estudio del método del forcing y sus aplicaciones.

Lema 3.43. *Para cualquier copo $\mathbb{P} \in M$ y oraciones $\varphi, \psi \in \mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$:*

1. *Ningún p puede forzar φ y $\neg\varphi$.*
2. *Si φ, ψ son equivalentes logicamente, entonces $p \Vdash \varphi$ sii $p \Vdash \psi$.*
3. *Si $p \Vdash \varphi$ y $q \leq p$ entonces $q \Vdash \varphi$.*
4. *$p \Vdash \varphi \wedge \psi$ sii $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \psi$.*
5. *$p \Vdash \neg\varphi$ sii $\neg\exists q \leq [q \Vdash \varphi]$ y $p \Vdash \varphi$ sii $\neg\exists q \leq p[q \Vdash \neg\varphi]$.*
6. *$p \Vdash \varphi \to \psi$ sii $\neg\exists q \leq p[q \Vdash \varphi \wedge q \Vdash \neg\psi]$.*
7. *$p \Vdash \varphi \vee \psi$ sii $\{q \leq p : [q \Vdash \psi] \vee [q \Vdash \psi]\}$ es denso por debajo de p.*
8. *$p \Vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ sii $\neg\exists q \leq p[q \Vdash \varphi \wedge q \Vdash \neg\psi]$ y $\neg\exists q \leq p[q \Vdash \psi \wedge q \Vdash \neg\varphi]$.*

Demostración. $(1-4)$ se obtienen fácilmente a partir de la definición (3.25) de forzamiento; obsérvese que (1) también usa el hecho de que existe un filtro G genérico tal que $p \in G$ (3.7) para eliminar el caso en que p fuerce tanto a φ como $\neg\varphi$ por vacuidad. El punto (3) ya había sido mencionado en 3.26.

Para el primer $\leftrightarrow$ de (5): $\to$ se sigue de (3) y (1). Para $\leftarrow$, demostraremos el contrarecíproco, supóngase que $p \nVdash \neg\varphi$, entonces tómese un filtro G genérico con $p \in G$ tal que $M[G] \models \varphi$. Entonces, por el Lema de verdad, podemos tomar un $r \in G$ tal que $r \Vdash \varphi$. Dado que G es filtro y $r, p \in G$, tómese $q \in G$ extensión común de r y p. Entonces $q \leq p$ y, por (3), $q \Vdash \varphi$. Para el segundo $\leftrightarrow$, aplicamos el primer caso a $\neg\neg\varphi$ para obtener que $p \Vdash \neg\neg\varphi$ sii $\neg\exists q \leq p[q \Vdash \neg\varphi]$ y después se aplica (2) para obtener lo deseado.

Para (6),(7) y (8), el resultado se sigue de (4) y (5) mediante el usa de (2) y el cambio a equivalencias lógicas de $\varphi \to \psi$ por $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$, $\varphi \vee \psi$ por $\neg\varphi \to \psi$, y $\varphi \leftrightarrow \psi$ por $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. En particular para (7) en que es necesario demostrar la densidad de un conjunto, se procede de la siguiente manera
$p \nVdash \neg\varphi \to \psi$ sii $\exists r \leq p[[r \Vdash \neg\varphi] \wedge [r \Vdash \neg\psi]]$ sii $\exists r \leq p \forall q \leq r[[q \nVdash \varphi] \wedge [q \nVdash \psi]]$, así que $p \Vdash \varphi \vee \psi$ sii $\forall r \leq p \exists q \leq r[q \Vdash \varphi \vee q \Vdash \psi]$, así que $p \Vdash \varphi \vee \psi$ sii $\forall r \leq p \exists q \leq r[q \Vdash \varphi \vee q \Vdash \psi]]$. $\square$

En la prueba de (5), el modo en que se usó el Lema de Verdad para obtener un $q \leq p$ tal que $q \Vdash \varphi$ es muy usual, así que vale la pena aislar el método:

Lema 3.44. *Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $M[G] \models \varphi$ y $p \in G$, entonces existe un $q \in G$. tal que $q \Vdash \varphi$ y $q \leq p$*

Trabajando en M, uno podría ver (4-8) del Lema 3.43 como los paso proposicionales para una definición recursiva de $\Vdash$. Por supuesto que faltarían los pasos para cuantificadores:

Lema 3.45. *Para cualquier copo de forcing $\mathbb{P} \in M$ y una fórmula $\varphi(x) \in \mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$, sin más variables libres que x:*

1. *$p \Vdash \forall x\varphi(x)$ sii $p \Vdash \varphi(\tau)$ para todo $\tau \in M^{\mathbb{P}}$.*
2. *$p \Vdash \exists x\varphi(x)$ sii $\{q \leq p : \exists\tau \in M^{\mathbb{P}}[q \Vdash \varphi(\tau)]\}$ es denso por debajo de p.*

Demostración. Para (1), $p \Vdash \forall x\varphi(x)$ sii para todo G genérico que contiene a p, $M[G] \models \forall x\varphi(x)$; y $M[G] \models \forall x\varphi(x)$ sii $M[G] \models \varphi(\tau)$ para toda $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Así, $p \Vdash \forall x\varphi(x)$ sii para todo $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ y todo G genérico que contenga a p, $M[G] \models \varphi(\tau)$, lo cual es equivalente a $\forall\tau \in M^{\mathbb{P}}[p \Vdash \varphi(\tau)]$.

(2) lo obtendremos a partir de (1) y el Lema 3.43 aplicados a la equivalencia de $\exists x\varphi(x)$ con $\neg\forall x\neg\varphi(x)$. Por 3.43 (5), $p \Vdash \neg\forall x\neg\varphi(x)$ sii para toda $r \leq p$, $r \nVdash \forall x\neg\varphi(x)$. Pero por (1) tenemos que $r \nVdash \forall x\neg\varphi(x)$ sii $r \nVdash \neg\varphi(\tau)$ para algún $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, así que aplicando 3.43(5) nuevamente $r \nVdash \neg\varphi(\tau)$ sii $\exists q \leq r[q \Vdash \varphi(\tau)]$. Así obtenemos lo deseado: $p \Vdash \neg\forall x\neg\varphi(x)$ sii $\forall r \leq p\exists\tau \in M^{\mathbb{P}}\exists q \leq r[q \Vdash \varphi(\tau)]$. □

Lema 3.46. *Para cualesquier copo de forcing $\mathbb{P} \in M$ y nombres $\tau, \vartheta, \pi \in M^{\mathbb{P}}$:*

1. *$p \Vdash \tau = \vartheta$ sii $\forall\sigma \in \mathrm{dom}(\tau) \cup \vartheta\forall q \leq p[q \Vdash \sigma \in \tau \leftrightarrow q \Vdash \sigma \in \vartheta]$.*
2. *$p \Vdash \pi \in \tau$ sii $\{q \leq p : \exists\langle\sigma, r\rangle \in tau[q \leq r \wedge q \Vdash \pi = \sigma]\}$ es denso por debajo de p.*

Demostración. La prueba de este lema es inmediata de 3.38 y la definición de $\Vdash^*$ □

PARTE II

IV. EL MÉTODO DE FORCING COMO CAMBIO PARADIGMÁTICO

IV.1. Introducción Histórica

Esta sección en su totalidad es un resumen y traducción de la introducción al capítulo 10 de [15]. La intensión de la sección es contextualizar el proceso de desarrollo del método de Forcing para contrastar la severidad y profundidad de las aserciones realizadas en las secciones posteriores.

En abril de 1963 el analista Paul Cohen de la Universidad de Stanford circuló notas bosquejando pruebas de la independencia del Axioma de Elección de **ZF** y de la Hipótesis del Continuo de **ZFC**. Estas pruebas fueron, como era de esperarse, los ejemplos inaugurales de su técnica de forcing para extensiones de modelos de la teoría de conjuntos.

Cohen presentó en ponencia sus resultados en Mayo de 1963 en el Institute for Advanced Study, y después dos artículos [6] y [5] sobre los resultados de Hipótesis del Continuo fueron rápidamente comunicados por Gödel en el *Proceedings of the National Academy of Sciencies U.S.A.*, donde sus propios resultados sobre consistencia con L habían aparecido 25 años antes.

Impelidos por la manifiesta señal de un procedimiento general en el trabajo revolucionario de Cohen, los logicistas desarrollaron pronto la teoría del forcing y empezaron a obtener resultados nuevos con él. Para mediados de 1963 Solomon Feferman en Stanford obtuvo resultados en aritmética de primer y segundo orden y sobre el Axioma de Elección, y para el verano Levy obtuvo nuevos resultados trabajando el Axioma de Elección. Después dos resultados de notable sofisticación fueron obtenidos en la Universidad de Princeton: Uno por William Easton a finales de 1963 sobre potencias en cardinales regulares por forcing en clases, y otro por Solovay a mediados de 1964 que si existe un cardinal inaccesible, entonces en un modelo interno de una extensión de forcing, cada conjunto de reales es lebesgue-medible.

El forcing provee un esquema notablemente general y flexible con fuertes fundamentos intuitivos para establecer consistencia relativa e independencia. De acuerdo con Scott: “La teoría de conjuntos nunca será la misma después de Cohen, y simplemente no hay comparación en la sofisticación de nuestro conocimiento acerca de la teoría de modelos contrastada con la época pre-Cohen.” En retrospectiva uno puede señalar los precursores del forcing en la semántica de Beth para la lógica intuicionista; en el estudio de homomorfismos 2-valuado de modelos Boolean-valuados; en el argumento de Stephen Kleene y Emil Post para producir Turing degrees incomparables; y especialmente en el argumento two-quantifier de Clifford Spector para producir Turing degrees minimales. De cualquier modo, Cohen no estaba al tanto de estos esbozos y comenzó con simples y básicas intuiciones. Su logro en particular yace en idear un procedimiento concreto para extender modelos de la teoría de conjuntos de una manera mínima sin alterar los ordinales. Scott continua:

> Yo conocía a casi todos los teóricos-conjuntistas de la época, y pienso que puedo decir que ninguno habría imaginado que la demostración habría ido de esa manera. Los métodos de la Teoría de Modelos nos habían mostrado cuantos modelos *no-estándar* habían; pero Cohen, empezando desde muy primitivos principios, encontró la manera de mantener los modelos *estándar* (ésto es, con colecciones bien-ordenadas de ordinales)

La teoría de conjuntos ha sufrido un cambio abismal, y más allá de como la materia fue enriquecida, es difícil transmitir su rareza.

Las observaciones concluyentes de Cohen anticipan notablemente el progreso posterior en los cardinales grandes, pero atenuadas por un trasfondo de duda e incertudumbre:

> A pesar de que las matemáticas pueden ser comparadas con una labor Prometeica, llena de vida, energía y gran asombro, éstas contienen la semilla de una duda aplastante. Es bueno que sólo rara vez nos pausemos a revisar la situación y aterricemos nuestros pensamientos acerca de estos profundos cuestionamientos. Durante el resto de nuestras vidas matemáticas miraremos y tal vez participaremos en el glorioso proceso. Grandes interrogantes de la teoría de conjuntos que parecían intocables eventualmente cedieron. Nuevos axiomas son investigados y grandes y más grandes cardinales son de alguna manera traídos más cerca a nuestra intuición. A través de todo esto, la teoría de números se mantiene como un faro de luz. Si, como espero no pase muy seguido, nuestras dudas empiezan a superarnos, nos replegaremos de nuevo en los confines seguros de la teoría de números hasta que revigorizados, nos aventuremos de nuevo dentro del inseguro campo de la

> teoría de conjuntos. Éste es nuestro destino, vivir con dudas, perseguir un ente de cuya *plenitud*[absolutness] no estamos seguros, en resumen para darnos cuenta de que la única ciencia "verdadera" es ella en si de la misma mortal, y quizás, empírica naturaleza como todas las empresas humanas.

El forcing fue forjado rápidamente en un método general, particularmente por los esfuerzos de Solovay. Complicaciones al describir cuando una fórmula se cumple sobre un rango de extensiones genéricas condujeron a Solovay a la idea de un *valor Boleano*. Lo cual era una idea similar a lo que Vopěnka había desarollado en un trabajo sobre la independencia de HC. Esta concepción fue generalizada y desarrollada independientemente por Solovay y Scott. Desarrollaron una total reformulación del forcing en terminos de modelos boleanvaluados, culminando en una formulación esencialmente equivalente a la de Vopěnka. El método es totalmente general, dado que cualquier orden parcial puede ser "completado" de manera natural para obtener un álgebra Boleana. Scott popularizó su enfoque en su propia reelaboración de la independencia de la HC y en notas que distribuyo en la conferencia de 1967 en la U.C.L.A. Los modelos boleano-valuados mostraron cómo evadir la conexión del lenguaje ramificado de Cohen con la jerarquía L y la dependencia en un $\in$-modelo numerable. Con elegante álgebra y pareciendo completar más información, éstos modelos prometían ser la manera correcta de aproximarse a los resultados de indenpendencia. Pero en la misma conferencia en U.C.L.A. Joseph Shoenfield mostró que el forcing capturaba el quid del enfoque Boleano de una manera más directa. Aún más, los modelos Boleano-valuados fueron encontrados muy pronto demasiado abstractos y no intuitivos para establecer *nuevos* resultados de consistencia, así que a los pocos años los conjuntistas estaban trabajando con ordenes parciales.

IV.2. Paradigmas en la Ciencia

En 1962 Thomas Kuhn publica *La estructura de las revoluciones científicas*[16], texto con el cual se le da la estocada final a la concepción del progreso lineal y acumulativo de la ciencia (camino ya avanzado con la obra de Popper)[1]. Se plantea un progreso a partir de saltos cualitativos en nuevas direcciones obtenidos por cambios *paradigmáticos*, que fuerzan un replanteamiento del área del conocimiento en cuestión y una incompatibilidad, respecto a la visión del mundo, con la postura anterior. La idea de paradigma juega un papel central y articulador en el desarrollo de la obra de Khun. Debido a la profun-

[1] Afirmación hecha por el mismo Kuhn en [20]

didad y generalización del texto de Khun, el concepto de paradigma recibe distintos matices y cualidades. Observemos dos enunciados que creemos son significativos en su obra así como útiles para nuestro análisis; el primero aparece en su obra original de 1962

> Sus realizaciones carecían hasta tal punto de precedentes, que eran capaces de atraer a un grupo duradero de partidarios alejándolos de los modos rivales de actividad y a la vez eran lo bastante abiertas para dejarle al grupo de profesionales de la ciencia así definido todo tipo de problemas por resolver. En adelante me referiré con el término *paradigmas* a los logros que comparten estas dos características[...].

La segunda cita corresponde al epílogo agregado en 1969

> El paradigma como ejemplo compartido es el elemento central de lo que ahora considero el aspecto más novedoso y menos comprendido de este libro.

Con base en el desarrollo del texto de Khun y teniendo como eje los dos enunciados previamente señalados, identificamos los dos siguientes componentes escenciales de un paradigma:

- ⋆ Debe ser ejemplar
- ⋆ Debe ofrecer una colección nueva de problemas por resolver.

Que un suceso sea ejemplar es que ofrezca un modo de reproducirlo; no solo para repetirlo sino para hacer variaciones sobre el mismo, permitiendo que la segunda cualidad sea viable científicamente, esto es, ofrecer nuevos problemas por resolver. Para detallar más estas ideas, desarrollemos un ejemplo imaginario: Si alguien pudiese transmutar plomo en oro, pero fuera incapaz de reproducir el proceso o explicarlo, este suceso no sería un cambio paradigmático, sino una anomalía dentro del paradigma existente, y se buscaría el modo de resolverlo, según el paradigma establecido o una nueva propuesta *paradigmática*; en cambio si se ofreciera el método con el cual se logró tal resultado, estaríamos, probablemente, frente a un cambio paradigmático, ya que ejemplifica el proceso y abre la posibilidad de investigar a que otros materiales se les puede aplicar el proceso. Un ejemplo real lo podemos apreciar en el siglo XVIII; hasta antes de esta fecha, se habían detectado fenómenos relacionados con la electricidad, montado experimentos y elaborado teorías sobre ello; sin embargo lo que se tenían eran observaciones de fenómenos inconexos y no significativos (en cuanto no eran interpretables) y teorías incapaces de explicarles. La construcción de la botella de Layden (originalmente pensada como una botella para capturar el "fluido" eléctrico), en su forma final, a diferencia de los experimentos predecesores, era ejemplar y abría un campo de problemas por resolver, al abandonarse el estudio de la electricidad como fluido y centrar la atención en las dos capas conductoras; esto es, representó un cambio paradigmático.

El objetivo de este capítulo es analizar, a partir de la visión de Kuhn, el método del forcing como cambio paradigmático y la manifestación concreta de sus consecuencias. Evidentemente, lo primero es asegurar la validez de la teoría kuhniana del cambio científico y la factibilidad de su aplicación a las matemáticas. Este es un tema por sí mismo extenso y abierto. Lo que se ofrece a continuación es un breve resumen que expone las fortalezas y debilidades del análisis de Kuhn y la razón por la cual se ha escogido. Para un desarrollo más detallado del tema consúltese [16],[20],[3], [21].

Varios intentos se han hecho para construir una Teoría General del Cambio Científico (TGCC), están, por ejemplo, los hechos por Popper, Kuhn, Lakatos y Laudan. Para la comunidad de la filosofía de la ciencia, ninguno ha logrado ofrecer una respuesta completamente satisfactoria.

La propuesta de Kuhn fue criticada fuertemente en sus inicios, y aún ahora se le sigue achacando que es una concepción irracional del cambio científico así como también se le acusa de proponer que la decisión entre teorías rivales es totalmente subjetiva[2] . Los señalamientos anteriormente dichos, son las críticas más comunes y están basadas sobre mal interpretaciones de los textos de Kuhn.

Nos centraremos en lo que considero los principales problemas de la teoría de Kuhn al *competir* con otras TGCC y de los cuales erróneamente se derivan señalamientos equivocados, como los mencionados anteriormente.

-La descripción de Kuhn es extremadamente vaga en muchas cuestiones, rara vez se enuncian clara, explícita y univocamente descripciones de nociones medulares como lo son *paradigma*[3] *o crisis*, así como los criterios para la selección entre teorías rivales o la delimitación entre ciencia normal y ciencia

[2]"En los escritos de Kuhn, el problema de la racionalidad aparece en conexión con los paradigmas y la elección de teorías." *In Kuhn's writings, the issue of rationality arises in connection with paradigms and with theory- choice* Corry en [8]

[3]"Éste término vago (y sus muchos sinónimos) fue objeto de dura crítica y de varias reformulacione". *This vague term (and its several synonyms) was object of harsh criticisms and several reformulations* Corry en [8]

extraordinaria[4].

-La continuidad del quehacer científico, de la ciencia, en su totalidad, toma un marcado y predominante carácter socio-psicológico. [5]

De lo anterior se puede concluir, de manera coincidente con la postura generalizada, que el análisis kuhniano no provee de una TGCC satisfactoria.[6] Sin embargo, la incapacidad del análisis kuhniano de articular una TGCC no invalida sus contribuciones para la construcción de esta. El análisis de Kuhn provee de una herramienta descriptiva que detalla bastante el proceso de cambio al estudiar un suceso histórico en particular (aunque falla en articular estos sucesos de manera general) y las consecuencias de su aceptación en el área y comunidad científica. Es por estos elementos que, por su evidente utilidad y fecundidad, recurrimos al análisis kuhniano.

Al recurrir a Kuhn como herramienta teórica para el análisis de este cambio científico en particular no se está cometiendo más error que el que comete un ingeniero al recurrir a la mecánica newtoniana para sus cálculos.

Habiendo discutido la aplicabilidad del método kuhniano en general, prosigue evaluar su aplicabilidad a la matemática. Con lo anteriormente discutido quedan claras las bondades del análisis paradigmático de nuestro caso, que en concreto serían: apreciar detalladamente cómo impactó el método del Forcing a, los *programas* de investigación (problemas resueltos y por resolver, validación de métodos y soluciones), y a la percepción de la matemática por parte de la misma comunidad. A continuación se expondrá, el desarrollo de la problemática sobre la aplicabilidad del análisis kuhniano a las matemáticas.

En las matemáticas, como en ninguna otra ciencia, prevaleció (y hasta hoy es comúnmente aceptada,) la concepción acumulativa (generalizadora) del desarrollo matemático. Cuando se dio la *revolución historiográfica* de las cien-

[4]El mismo Kuhn, como también sus seguidores y críticos, seguido abordaban estas cuestiones que pertenencen a distitnos ejes sin separarlas claramente; esto ha sido fuente de [$\cdots$] una típica dificultad al discutir la teoría de Kuhn y su aplicabilidad*Kuhn himself, as well as his followers and critics, often addressed the issues belonging to the different axes without clearly separating them; this has been the source of a [...] typical difficulty in discussing Kuhn's theory and its applicability.* Leo Corry en [8]

[5]Pero el andamiaje conceptual de Kuhn para lidiar con la continuidad en la ciencia es socio-psicológico *But Kuhn's conceptual framework for dealing with continuity in sciencie is socio-psychological[...]* Lakatos en [20]. El punto de partida de Kuhn es la socio-psicología (o sociología).*Kuhn's starting point is the social psychology (or sociology) of the normal scientific community.* Mehrtens en [23]

[6]Realmente el estudio de las fallas del análisis kuhniano es más amplio y profundo. En [20] se exponen las críticas a la obra de Kuhn por parte de sus contemporáneos. En [3] se realiza un estudio más actual, dentro del cual incluye como falla de Kuhn el confundir criterios descriptivos con normativos.

cias, con Kuhn como principal exponente[7], las Matemáticas fueron la ciencia menos susceptible al fenómeno y, no obstante, donde más oposición se tuvo a las ideas de Kuhn.

Probablemente, el primer artículo publicado que tomó posición en la discusión fue el de Crowe, *Ten "Laws" Concerning Patterns of Change in the Hisotry of Mathematics* ([10]), en cuyo trabajo, la décima y culminante ley afirma que *Las revoluciones nunca ocurren en matemáticas*.

Sin embargo, el posicionamiento de Crowe es sumamente débil cuando uno escruta lo que él entiende por "*en matemáticas*". Para empezar, no explicita qué entiende por matemáticas, pero afirma que la nomenclatura, simbolismo, metamatemáticas, metodología, e historiografía de las matemáticas, no forman parte de las matemáticas[8].

Estas debilidades en la argumentación de Crowe fueron perfectamente señaladas por Mehrtens en [23], donde elabora una crítica a las "leyes" propuestas por Crowe; explicando dichas "leyes" a través de los conceptos de la teoría kuhniana.

Respecto a la postura de Merthens sobre las revoluciones en matemáticas, expongo a continuación extractos de la sección de su artículo respecto a la décima "ley" de Crowe.

> Hasta muy avanzado el siglo diecinueve, el magisterio de Cambridge y Oxford consideraron cualquier intento de mejorar la teoría de fluxiones como una impía revuelta contra la sagrada memoria de Newton. El resultado fue que la escuela newtoniana de Inglaterra y la escuela continental leibniziana divergieron[...] El dilema fue roto en 1812 cuando un grupo de jóvenes matemáticos en Cambridge quienes, bajo la inspiración del mayor Robert Woodhouse, formaron una "Sociedad Analítica" para propagar la notación diferencial. [...] Este movimiento encontró inicialmente

[7] Sobre esto, véase por ejemplo, el análisis de Buchdahl en [4]. Mehrtens menciona en [23] "*the «new historiography of science»* , whose basic book is T. S. Kuhn's essay *The Structure of Scientific Revolutions*". "*Yet beyond one's own evaluation of the merits of Kuhn's actual views, there is at least one undeniable virtue that must be conceded to his work: that of having brought about the widespreadadoption of a new agenda for debate in the history and philosophy of science*. . .". Leo Corry en *The Kuhnian Agenda and the History of Mathematics*, síntesis de sus dos artículos [7] y [9]

[8] *Also, the stress in law 10 on the preposition «in» is crucial, for, as a number of the earlier laws make clear, revolutions may occur in mathematical nomenclature, symbolism, metamathematics (e.g. the metaphysics of mathematics), methodology (e.g. standards of rigor), and perhaps even in the historiography of mathematics.*

una fuerte crítica, que fue superada con acciones como la publicación de una traducción al inglés del "Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus" de Lacroix. La nueva generación de Inglaterra empezó entonces a participar en las matemáticas modernas [Struik 1948, 246-8][9]

Para la comunidad matemática inglesa esto fue una revolución. Un apartado substancial de la matriz disciplinaria, el compromiso con el sistema newtoniano de notación, fue desechado. Este es uno pero muy sugestivo ejemplo, y hay más.

Aún así, Crowe sostiene que no hay revoluciones en matemáticas. El probablemente rechazaría el ejemplo dado diciendo que no es una revolución *en* las matemáticas. Para el "la preposición 'en' es crucial". Desafortunadamente el no explica qué significa *en* matemáticas, excepto que la nomenclatura, simbolismo, metamatemáticas, metodología, e historiografía no están *en* las matemáticas. Probablemente Crowe tiene los "contenidos" o la "substancia" de las matemáticas (¿Qué es esto?).

Pero tómese un ejemplo: una pieza de matemáticas muy en el sentido de Crowe sería el teorema de Taylor, que ha sido invariablmente válido desde su publicación en 1715. Pero ¿Es el mismo contenido en la publicación original de Taylor y en los libros de texto modernos? Siempre existe un amplio trasfondo conectado con dicho teorema. Actualmente el concepto de función es completamente diferente, el análisis infinitesimal está montado sobre las bases de la topología general, con el teorema de Taylor los matemáticos tienen una generalización de los espacios de Banach en mente, y así. Aún así hay algo más que mera tradición conectando el teorema de 1715 y su versión actual. El ejemplo debería mostrar que este "contenido" es difícil de asir. *Uno no puede desnudar los contenidos de la nomenclatura, simbolismo, metamatemáticas, etc.*[El énfasis es mío].

Tomemos, digamos, el texto *Moderne Algebra* de Waerden de 1930 y cualquier libro de texto de álgebra de 1830. La diferencia es rotunda; el conjunto completo de campos estrechamente conectados, terminología, simbolismo, metodología, y las metamatemáticas han cambiado. Todos estos elementos estan entrelazados: un concepto, por ejemplo, no esta sólo determinado por su propio

[9]Struik, Dirk J. 1948 *A Concise History of Mathematics* 2nd ed. New York (Dover)

> contenido en una definición dada, sino también esta determinado por las conexiones en el que es usado. Por lo tanto, hay una "meta-física" para él. Aún más, cada uno de estos elementos es substancial para la teoría como acontecimiento histórico. Consecuentemente, Yo diría que los cambios en metodología, simbolismo, etc., son cambios *en* matemáticas.

Desde la respuesta de Merthens a Crowe, la discusión se ha prolongado con numerosos estudios, críticas y publicaciones.

Leo Corry ofrece en [8], un análisis del estado de la problemática en 1996.

Corry afirma que en las disciplinas científicas aparecen dos, mas o menos discernibles tipos de preguntas. El primer tipo incluye preguntas acerca del objeto de estudio de la disciplina. El segundo tipo comprende preguntas de la disciplina *qua* disciplina, o meta-preguntas (Preguntas que la disciplina hace sobre la *misma* disciplina como ¿Qué preguntas son válidas? o ¿Cuáles de ellas deben ser respondidas?). Resolver el primer tipo de cuestiones está siempre dentro de los objetivos de cualquier disciplina y, obviamente, los practicantes de tal disciplina están usualmente comprometidos a dicha actividad. Respecto a las cuestiones del segundo tipo, sin embargo, donde uno puede encontrar algunos científicos intentando conscientemente responderlas, uno puede encontrar otros científicos respondiéndolas sólo implícita o tácitamente, y aún otros ignorando la existencia de este tipo de preguntas. Incluso se puede encontrar científicos que deliberadamente evaden lidiar con ellas.

Hay afirmaciones, continúa Corry, que fácilmente pueden ser clasificadas como respuestas a alguno de los tipos de preguntas mencionados anteriormente. Sin embargo, para otras oraciones, podría ser más difícil establecer cuando son respuestas acerca del objeto de estudio, o cuando de la disciplina *qua* disciplina. Cada una de las tres leyes de Newton, por ejemplo, claramente pertenecen a la primera categoría; las tres son afirmaciones sobre como los cuerpos se mueven. La aserción que el sistema de Copérnico es "más simple" que el de Ptolomeo, claramente pertenece al segundo tipo: es una aserción sobre teorías astronómicas en lugar de una aserción sobre los cuerpos celestes. Los teoremas de Gödel son resultados muy profundos *dentro* de una rama específica de las matemáticas, pero también pueden ser tomados como aserciones *sobre* las matemáticas, la disciplina.

De este modo se pueden identificar dos capas relacionadas a cualquier disciplina científica; el "cuerpo del conocimiento" y las "imágenes del conocimiento". El cuerpo del conocimiento incluye las aserciones que responden a cuestiones relacionadas al objeto de estudio de la disciplina, mientras que las imágenes del conocimiento incluyen aserciones acerca de la disciplina *qua* disciplina. Esta división no siempre es marcada y, seguramente, está históricamente determinada: la clasificación de una afirmación perteneciendo a alguna capa puede cambiar a través del tiempo.

Los párrafos anteriores exponen los cimientos del análisis realizado por Corry. Previamente realiza un análisis de la obra de Kuhn para identificar los puntos de la *agenda* kuhniana.

Corry concluye, a través de un ejercicio analítico y sintético (ambos con contraste histórico). Que las categorías de *paradigma* y *revolución* son aplicables a la imagen del conocimiento matemático.

Esto resuelve la falaz contradicción entre, la existencia de revoluciones y cambios paradigmáticos en la matemática y el aparente progreso acumulativo-generalizador de la matemática. Efectivamente, el conocimiento matemático *tiende* a un proceso acumulativo-generalizador de manera exacerbada en comparación de otras ciencias, así el *cuerpo del conocimiento* de la matemática toma este cariz. Más no por lo anterior dejan de suceder fenómenos revolucionarios en la *disciplina*. La causa del aspecto acumulativo-generalizador en el cuerpo del conocimiento matemático falta por dilucidarse. La respuesta a si esta causa es parte de la naturaleza del cuerpo del conocimiento será independiente del actual fenómeno de manifestación acumulativa-generalizadora de dicho cuerpo.

Las consecuencias descritas en el Capítulo 5 fueron identificadas *antes* de emprender el actual trabajo y fueron el eje principal para la configuración de éste. Se resalta este hecho por que *no* fueron ejemplos buscados *ad hoc* u obtenidos a partir de la visión de marco teórico alguno. Estos fenómenos manifiestos, son detallados y explicitados por Malykhin en el reporte que realizó de la sesión combinada del Seminario de Moscú de Topología y la Sociedad Matemática Rusa de 1987; sin embargo Malykhin no alcanza a contextualizar estos fenómenos dentro de un proceso general del cambio científico. Afirma, en consonancia con la postura dominante, que el forcing es una herramienta muy útil para obtener resultados absolutos (aquellos resultados "reales", los que se pueden obtener a partir de ZFC,ver página 120), pero afirma, sabiendo que hay algo más, que "Al mismo tiempo, su valor objetivo, sin dudas, no se reduce sólo a esto.[$\cdots$] No hay duda de que en el futuro su valor sólo incrementará"[10], sin desarrollar cual es ese "valor objetivo". Creo que las secciones restantes del texto exhiben una parte de este "valor" y certeza de su crecimien-

[10]*At the same time its objective value, without a doubt, does not reduce merely to this.[$\cdots$] There is no doubt that in the future its value will only increase*. Malykhin en [22]

to que Malykhin intuye pero no explicita. Sin embargo, para develarlas fue necesario contextualizar el método del forcing dentro de la Historia y Filosofía de la Matemática y hacer uso de la justificación de Corry.

Creo necesario agregar algunas observaciones sobre el análisis de Corry. En él, Corry no da "su interpretación" sobre la teoría kuhniana del cambio científico, sino todo lo contrario, lo evita y estudia las limitaciones de los trabajos que operan de este modo. Corry ofrece los ejes que el identifica de la teoría kuhniana con los enunciados que los describen, generalizando así, el proceder de optar por *una* interpretación particular de la teoría kuhniana por un nivel de compromiso con los enunciados. Menciona que entre más compromiso y más literalmente se acepten, se obtienen resultados más radicales pero difíciles de aplicar a la historia en su conjunto más allá de sucesos históricos particulares, pero entre menor compromiso y de manera más relativa se acepten, se obtiene mayor consonancia con la historia pero los resultados obtenidos se vuelven más obvios o triviales.

Podemos describir el análisis de Corry no como una interpretación de la teoría kuhniana sino como un esquema para estas interpretaciones. Con lo anterior ¿Cómo encaja el análisis hecho del forcing realizado en este trabajo? Intentando seguir la postura de Corry y no caer en interpretaciones particulares, nuestro análisis realizado sobre el forcing responde, *sin importar el nivel de compromiso* al enunciado (2.1) "Paradigmas, no teorías (ni descubrimientos individuales, por supuesto) son las unidades básicos de los logros y cambios científicos"[11]; respecto al (2.2), si uno sitúa en la postura formalista como la postura mayoritariamente aceptada en la comunidad científica, también se cumple que "Un científico no puede, mientras se halle bajo un paradigma, entender seriamente un paradigma rival" [12].

Esos dos enunciados son los correspondientes al eje de los paradigmas, además, las consecuencias coinciden con el análisis de Corry al ser identificadas como cambios directos en la imagen del conocimiento de la matemática y *después* indirectos en el cuerpo del conocimiento.

Sin embargo, hay que explicitar que no se ataca en este trabajo a fondo el eje de la disociación entre ciencia normal y ciencia revolucionaria, donde el forcing debería cumplir con los requisitos de la última y servir de parámetro para la distinción.

[11]*Paradigms, not theories (and, of course, not individual discoveries), are the basic units of scientific achievement and change.*

[12]*A scientist cannot, while under the sway of one paradigm, seriously entertain a rival paradigm.*

IV.3. El Forcing como paradigma

En este capítulo se justificará el por que el método de Forcing representa un cambio paradigmático en la matemática (como ya se explicó, en la imagen del conocimiento matemático); pero antes abordaremos los alcances de este cambio paradigmático.

La matemática como ciencia está constituida por muchas y extensas áreas. El forcing aparece como respuesta a lo que Hilbert había considerado el problema más importante por resolver en las matemáticas, la Hipótesis del Continuo; de este modo, el método de Cohen trastocó profundamente la Teoría de Conjuntos y, por la naturaleza del método, a la Teoría de Modelos

La cualidad del forcing de ser ejemplar puede ser apreciada en las afirmaciones de Kanamori y Malykhin " El forcing provee un esquema notablemente general y flexible con fuertes fundamentos intuitivos para establecer consistencia relativa e independencia.", "El forcing es una poderosa herramienta que permite discernir si alguna afirmación es compatible con ZFC" respectivamente; así como en la de Joan Bagarya en [1]

> *La técnica de* forcing*,[...], ha sido desarrollada a lo largo de los casi 50 años de su existencia de manera impresionante, dando lugar a una teoría extremadamente sotisficada desde el punto de vista técnico* que ha permitido resolver un gran número de problemas abiertos, tanto dentro de la misma teoría de conjuntos como en otras áreas de la matemática[13]

además, el quinto párrafo de la sección 4.1 (página 107)ofrece ejemplos históricos de la rapidez con la que fue adoptado el forcing como método.

El capítulo 3 (página 85)exhibe explícitamente el forcing como método; si bien esa no es la exposición de Cohen en [6] y [5], el perfeccionamiento y refinamiento del método como es expuesto en el capítulo refleja fielmente la cualidad que se está estudiando: el ser ejemplar.

A continuación abordaremos la cualidad del método de abrir un panorama nuevo de problemas; donde esto debe entenderse como la apertura de la posibilidad de *resolver* problemas, ya sean totalmente nuevos o problemas conocidos que son inatacables o están excluidos de la ciencia normal. En palabras de Kuhn, un cambio paradigmático produce un consiguiente desplazamiento en los problemas susceptibles de examen científico y en las normas con las cuales la profesión determina qué habrá de contar como un problema admisible o como solución legítima a un problema.

[13]El énfasis es mío

Más arriba en el texto, esto ya se había insinuado cuando Bagarya afirma que el método de forcing “ [...] ha permitido resolver un gran número de problemas abiertos, tanto dentro de la misma teoría de conjuntos como en otras áreas”. Entraremos en más detalles haciendo uso del artículo de Malykhin [22] que identifica claramente este proceso. La lucidez con la que Malykhin percibe esto es evidente en su detallado análisis[14] y es preludiada por su introducción, el énfasis es mío:

> En este artículo hablaremos acerca de los cambios que el forcing ha traído en la topología general; no tanto acerca de los resultados que han sido obtenidos haciendo uso de él como de la alteración del modo en que las cosas son investigadas y *acerca de las nuevas preguntas importantes que emergen* e incluso, tal vez, un poco acerca del cambio en la psicología del pensamiento matemático del trabajo matemático en ésta área.

Lo que haré en el resto de la sección será exponer las ideas de Malykhin (del texto [22])que permitan identificar la apertura de las nuevas áreas de investigación.

“El lector estará familiarizado con el hecho de que casi toda la matemática actual esta construida a partir de una base conjuntista. Después de la aparición de las paradojas en la teoría de conjuntos, ésta fue axiomatizada por diversos métodos. El más conocido, más difundido y el más intuitivamente aceptado es el sistema de Zermelo-Fraenkel ZFC con el axioma de elección.

ZFC se nos presenta como un sistema axiomático sumamente fuerte; se asume que cualquier enunciado matemático puede expresarse en términos de éste sistema, así que éste sistema puede ser considerado la base de toda la matemática moderna. Sin embargo de acuerdo al teorema de incompletitud de Gödel la fuerza de éste sistema está limitado por la presencia de afirmaciones que son independientes de él, ésto es que ni la afirmación $\mathbf{T}$ ni su negación $\neg\mathbf{T}$ pueden ser demostradas en **ZFC**. Si **ZFC** es consistente, hecho que la mayoría de los matemáticos **creen**, entonces ambos sistemas axiomáticos $\mathbf{ZFC} + \mathbf{T}$ y $\mathbf{ZFC} + \neg\mathbf{T}$ son consistentes y, al menos en principio, podrían ser postulados como la base de todas las matemáticas.

Desde antes de la invención del forcing se sabía sobre ésta situación, pero los matemáticos *no tenían herramienta alguna para reconocer afirmaciones*

[14]Malykhin indica que el artículo está basado en el reporte plenario dado por el mismo en la sesión combinada del all-Moscow seminar “Topology Circle” y la Moscow Mathematical Society el 19 de Mayo de 1987

independientes. El forcing es una poderosa herramienta que permite discernir si alguna afirmación es compatible con ZFC .

Con la aparición del forcing, *se incorporó, al trabajo matemático la verificación de la consistencia o independencia de postulados sobre los que había un existente interés pero una trayectoria de indemostrabilidad.* ”[15]

Malykhin explica una estructuración del trabajo matemático; esta estructura consiste en resultados absolutos y resultados relativos de primer y segundo tipo. Los resultados absolutos, contemplan todos los resultados matemáticos obtenidos a partir de **ZFC**. Los resultados relativos de primer tipo son resultados matemáticos obtenidos a partir de **ZFC** con hipótesis adicionales, los de segundo tipo son resultados **meta-matemáticos** sobre consistencia. Plantea que el quehacer matemático anterior al forcing fluía en el orden listado de los resultados matemáticos: Se busca demostrar enunciados dentro de **ZFC** (resultados absolutos), en caso de que esta empresa fracase, se procede a intentar demostrar esos enunciados con hipótesis adicionales a **ZFC** (resultados relativos del primer tipo), si nuevamente es inaccesible la prueba del enunciado se procede finalmente a analizar su consistencia o independencia (resultados relativos del segundo tipo).

Dentro de este proceso, no significa que no hubiera desarrollo de resultados que *después* se sabría son independientes de ZFC; pero estos resultados, al no poder comprobarse su consistencia se convertían en resultados *condicionales* y *estaban excluídos del cuerpo de la matemática considerado* standard; resultados del tipo, por ejemplo: Asumiendo S, el objeto K puede existir; donde no se sabe si S es compatible con **ZFC**.

Comparense los pasajes resaltados hasta ahora con la siguiente cita de Kuhn en [16]:

> Todas ellas [las revoluciones científicas] produjeron un consiguiente desplazamiento en los problemas susceptibles de examen científico y en las normas con las cuales la profesión determinaba qué habría de contar como un problema admisible o como solución legítima a un problema

Podemos asegurar sin equivocación que el método del forcing incorporó nuevos problemas a la matemática, siendo los ejemplos más notorios, los resultados de consistencia.

Hasta aquí se ha explicado en qué ha consistido la apertura de los nuevos problemas por resolver en términos generales. Merece ser resaltada la similitud

[15]El énfasis es mío.

con las anomalías que identifica Kuhn en los periodos de crisis; problemas que son abordados parcialmente (resultados condicionales) pero que sólo son comprensibles hasta la aceptación de un paradigma que los incorpore al cuerpo de la *ciencia normal* (resultados de consistencia).

En la sección 4 de [1] se pueden encontrar referencias a como se ha desarrollado el método del forcing así como problemas resueltos y por resolver a partir de éste.

V. CONSECUENCIAS DEL CAMBIO PARADIGMÁTICO

Como se mencionó y discutió a inicio del capítulo; a partir del análisis kuhniano, estudiaremos las consecuencias del forcing como cambio paradigmático.

V.1. Cambio en los planes de investigación

En esta subsección traduzco fragmentos de lo que considero puntos medulares de la sección §2 de [22] concernientes a los cambios en los planes de investigación.

Hablando estrictamente -nos dice Malykhin- todos los resultados relativos son metamatemáticos, no ocurren en **ZFC** pero nos hablan acerca de sus consistencia, por ejemplo, un resultado obtenido asumiendo **HC** nos dice que el resultado es compatible con **ZFC**. Aún así, la división mencionada es útil al menos por dos razones. Primero, es posible obtener resultados relativos del 1er grupo, esto es, con hipótesis adicionales, sin saber del forcing. Así es como era antes de la invención del forcing, cuando **HC**, **HGC**, la hipótesis de Luzin $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ y demás, fueron usadas intensivamente. Segundo, obtener resultados de compatibilidad por forcing es construir un modelo para el cual la correspondiente afirmación **T** es satisfecha. Más aún, usualmente no se sabe mucho acerca de este modelo. Por lo tanto, si uno logra probar que **T** es satisfecha con alguna hipótesis adicional **S** que es ya bien conocida y ampliamente usada, digamos **HC**, entonces esto debería considerarse un avance: la prueba de la implicación **S**$\rightarrow$**T** no requiere conocimiento de forcing, **T** se convierte psicológicamente más aceptable, sabemos ahora que **T** es compatible con todas las afirmaciones que son implicadas por **S**. Con el incremento cuantitativo de investigación en cualquier área de las matemáticas, la oportunidad de obtener resultados absolutos en esta área se reduce, y es remplazada al moverse en nuevas y menos investigadas áreas. Se esta volviendo más y más difícil obtener resultados absolutos, así que su valor crece. Obtenemos más y más resultados relativos, están apareciendo en todos lados. Están jugando un papel cada vez mayor, incluso para encontrar nuevos resultados absolutos. Como cuestión de hecho, si uno tiene éxito al establecer que una afirmación **T** es compatible con

ZFC, sabemos entonces que ¡Es imposible construir un contraejemplo a ella en **ZFC**! En algunos casos, el resultado de compatibilidad de alguna afirmación juega el papel de una señal de alto para cualquiera que esté buscando el resultado absoluto correspondiente.

Pregunta Malykhin: ¿Cuanto tiempo y qué tan seguido ha pasado esto? y ¿Está pasando ahora? Primero tratamos de demostrar una afirmación T en la cual estamos interesados usando sólo los axiomas de **ZFC**, esto es, deseamos obtener un resultado *absoluto*. No funciona. Empezamos a utilizar suposiciones adicionales, como **HC**; en este procesos queremos obtener un resultado *relativo* pero en el lenguaje de la teoría de conjuntos usando un axioma adicional. Incluso esto puede no funcionar. Entonces aplicamos forcing y obtenemos un resultado de *compatibilidad* de T con **ZFC**. De hecho esto es ya un resultado *metamatemático*. Afirma que en **ZFC** no hay una prueba de la negación de T. Pero de todo, probar que T es compatible con **ZFC** es, en cierto sentido, lo más fácil de las tres posibilidades listadas. Esto significa que ahora que sabemos la técnica del forcing, la sucesión de hechos será invertida más rápido que nunca. Primero probamos por forcing que T es compatible con **ZFC**. Ésto es tranquilizador. Después encontramos que para que T sea válida es suficiente que cierta aseveración S, cuya compatibilidad con **ZFC** es conocida, sea satisfecha, como **HC**. Es posible que después un resultado absoluto correspondiente sea también conseguido, no obstante, lo más común es que sea más débil que el obtenido originalmente por forcing y todavía más, es conseguido muchos años después. En la actualidad no hay muchos ejemplos de resultados obtenidos de esta manera, pero la cantidad está creciendo. Para concluir, he aquí un ejemplo:

Una pregunta acerca del comportamiento del número de Suslin cuando un espacio es cuadrado: ¿Puede incrementar? En 1950 Kuiper probó que $c(KC^2) = \aleph_1 > c(KC) = \aleph_0$ para el continuo de Suslin KC. Antes de la construcción por forcing del primer continuo de Suslin esto era puramente un resultado condicional, para el cual la compatibilidad con **ZFC** no era conocida. Después de la construcción del primer KC la compatibilidad de una respuesta afirmativa a esta pregunta fue conocida. Entonces en 1980, suponiendo **HC**, fue construído un espacio X tal que $c(X^2) > c(X) = \aleph_0$. Finalmente, en 1986 Todorčević construyó, sin ninguna hipótesis adicional, un bicompactum Y para el cual $c(Y^2) > c(Y)$. Tenemos que recalcar que también, asumiendo [**AM** + ¬**HC**], la numerabilidad del número de Suslin es preservada al multiplicar cualquier familia de espacios, así que es imposible construir en **ZFC** un espacio Z para el cual $c(Z) = \aleph_0 < c(Z^2)$.

V.2. Definición de la matemática

Como se ha llegado a mencionar, casi por regla general, un cambio paradigmático va acompañado de un cambio en la cosmovisión, sin embargo ese cambio es acotado por distintos factores. Las ecuaciones de Maxwell representa un cambio de cosmovisión sobre los fenómenos electro-magnéticos, pero no cambió la cosmovisión newtoniana, por ejemplo.

Ya se ha mencionado (ver 1.1) que la postura filosófica dominante en la actualidad en las matemáticas es el formalismo [1] que nació del *programa de Hilbert* , a pesar de que sus limitaciones fueron instantáneamente exhibidas al publicarse los resultados de incompletitud de Gödel, y podemos encontrar ejemplos de la aceptación de esta postura como en [13]:

> Todo esto no significa el fin del formalismo. Incluso de cara a los teoremas de incompletitud, es coherente sostener que matemáticas son la ciencia de los sistemas formales.[2]

Esto es totalmente consecuente con el análisis de Kuhn, que nos dice que las anomalías **no** son el criterio determinante para desechar un paradigma, es necesario la aparición de un paradigma que lo reemplace. Esta idea es desarrollada de manera actualizada y con mayor detalle como la primera ley del cambio científico que propone Hakob Barseghyan en [3][3].

Así, acotaremos la connotación de "(*re*)*Definición de la matemática*" a la postura formalista, que como ya se expuso, no es la única, y al área fundacional de las matemáticas. La acotación al área fundacional de las matemáticas se refiere a que, incluso dentro del quehacer matemático reivindicado como formalista, la redefinición cosmogónica que trastoca profundamente la mayoría de las teorías que componen el área fundacional de las matemáticas (la teoría de conjuntos, la teoría de modelos y la teoría de pruebas), se va difuminando conforme se aleja uno de éstas teorías. Estas manifestaciones periféricas de la redefinición de las matemáticas a partir del cambio paradigmático son principalmente la legitimación de nuevas hipótesis.

[1]El formalismo, como las distintas escuelas filosóficas sobre la matemática, tiene distintas vertientes; cuando hacemos referencia al formalismo, siempre es a la versión de Hilbert. Para más detalles véase [26]

[2]*All this does not spell the end of formalism. Even in the face of the incompleteness theorems, it is coherent to maintain that mathematics is the science of formal systems.*

[3]"De acuerdo a la primera ley, cualquier elemento del mosaico de teorías aceptadas y metodos empleados se mantiene en el mosaico hasta que es remplazado por otro uno o varios elementos."*According to the first law , any element of the mosaic of accepted theories and employed methods remains in the mosaic except insofar as it is overthrown by another element or elements.*

Después de lo dicho en los párrafos anteriores, uno podría cuestionar la utilidad del análisis de una redefinición tan acotada. La relevancia de esta es porque aparece en el área **fundacional** de la postura **dominante** en la comunidad matemática. Por lo cual, los detalles de estos cambios ofrecen información valiosa para un estudio mas amplio de la Historia y Filosofía de la Matemática en particular, así como para la Historia y Filosofía de la Ciencia en general, sin embargo esto queda fuera del alcance de este trabajo.

Habiendo hecho las observaciones anteriores, por brevedad, omitiremos su mención en lo que resta de la subsección, entendiéndose que cuando se haga referencia a "las matemáticas" o su definición (o redefinición) es bajo las acotaciones previamente expuestas, es decir, estas referencias son desde la postura formalista, que sigue siendo relevante ya que su área fundacional es la aceptada mayoritariamente por la comunidad matemática.

A modo de introducción, podemos apreciar la certeza de Malykhin de estar ante un cambio profundo e influyente en las matemáticas cuando dice que la situación respecto al forcing es análoga con la aparición de las geometrías no-Euclideanas. Claro que aquella vez fue la primera vez de una situación tal en la historia de las matemáticas y el impacto psicológico fue más fuerte. Pero Malhykin nos hace el llamamiento a observar que "la constitución de la situación con el forcing va más profundo en la fundamentación de las matemáticas: La consistencia de las geometrías no-Euclideanas se redujo al final a la consistencia de la aritmética; la cuestión sobre la consistencia de ésta última no se había considerado en ese momento" En cambio, con el forcing, nos dice "... para la consistencia de la teoría de conjuntos, uno podría decir, que no hay a donde girar, ¡Es ella misma el último recurso!"[4]

Hemos dicho que la redefinición se ha dado en el área fundacional de las matemáticas, compuesta actualmente por la teoría de conjuntos, teoría de modelos, teoría de pruebas y teoría de recursividad, sin embargo, como la teoría de conjuntos tiene la capacidad de expresar los resultados de las otras tres, suele privilegiarse a la teoría de conjuntos como *la* teoría fundacional de las matemáticas. La teoría de conjuntos como teoría fundacional de las matemáticas es un hecho que es mencionado y desarrollado, en distintos grados, en libros de texto (que se mencione en libros de texto será importante para este análisis más adelante) como [12], [25], [14],[17], observado y discutido en [24] y analizado estadísticamente en [27][5] , esta concepción no se encuentra

[4] *...for the consistency of set theory, there is, one might say, nowhere to turn -it is itself the last resort!* en [22].

[5] En este texto, Zalamea añade un Apéndice al final que exhibe una tabla que intenta "regis-

limitada únicamente al área conjuntista y es ampliamente compartida por la comunidad matemática como lo señala Potter en [24]:

> Libros de texto modernos sobre teoría de conjuntos están plagados con variantes de esta aserción: uno de ellos afirma tajantemente que 'teoría de conjuntos son los fundamentos de las matemáticas' (Kunen 1980, p.xi), y sentencias similares son encontradas no sólo (como podría esperarse) en libros escritos por matemáticos conjuntistas sino también en muchos libros de matemáticas convencionales. En efecto, este papel para la teoría de conjuntos se ha vuelto tan familiar que difícilmente alguien que llegue tan lejos como el leer este libro podría desconocerlo del todo. [6].

La teoría de conjuntos ocupa el lugar fundacional en la matemática porque responde el problema de *objeto de estudio*: prácticamente todo objeto matemático puede ser interpretado como un conjunto. Teniendo la axiomatización como ideal de toda teoría matemática, y siendo $\mathbf{ZFC}$, la axiomatización más aceptada y usada de la teoría de conjuntos, el papel fundacional de dicha teoría se expresa comúnmente como "La matemática es el estudio de consecuencia de $\mathbf{ZFC}$"

Es necesario hacer algunas observaciones de lo que se ha expuesto hasta el momento antes de proseguir. Al iniciar la subsección se mencionó que la concepción de definición de las matemáticas estaría acotada al área fundacional y a la postura formalista. Pero el párrafo precedente exhibe una concepción de la matemática a partir de la teoría de conjuntos, el área fundacional, sin mencionarse una sola vez la cuestión formalista. A pesar de esto, he decidido limitar el alcance a la postura formalista por la siguiente razón. Es un hecho, como lo subraya Potter en [24][7] , que la forma actual de la Teoría de Conjuntos se debe en gran medida a la persecución por obtener una teoría fundacional de las

---

trar [...] ciertos énfasis y temáticas en la historia y la filosofía de la lógica, según se realizan dentro del 'ámbito angloamericano' ". En la clasificación propuesta, la categoría de filosofía analítica contiene la teoría de conjuntos con una lógica clásica de primer orden subyacente.

[6] *Modern textbooks on set theory are littered with variants of this claim: one of them states baldly that 'set theory is the foundation of mathematics' (Kunen 1980, p. xi), and similar claims are to be found not just (as perhaps one might expect) in books written by set theorists but also in many mainstream mathematics books. Indeed this role for set theory has become so familiar that hardly anybody who gets as far as reading this book can be wholly unaware of it.*

[7] "Debemos tener este uso fundacional en mente, [$\cdots$] porque ha influenciado enormemente para determinar el modo en que la teoría ha sido desarrollada [...]". *we shall need to bear this foundational use for set theory in mind throughout, [...] because it has been enormously influential in determining the manner in which the theory has been developed[...].*

matemáticas, y este hacer se dio en el contexto histórico del programa de Hilbert. Considero que no es un factor que pueda ser obviado. La consecuencia de esta postura es que el alcance de este cambio paradigmático puede haber impactado otras escuelas filosóficas de las matemáticas, pero es una cuestión que no se abarcará y que no invalida los razonamientos hechos o por hacer en este trabajo. Sin embargo, subrayar la influencia del formalismo de Hilbert conduce a otro resultado que se exhibirá brevemente más adelante.

Dado que la mayoría de los resultados matemáticos se obtienen a partir de **ZFC** y casi en su totalidad todos los resultados con aplicación técnica, hay una inclinación natural a considerar **ZFC** como *la* base de las matemáticas.

Sin embargo el forcing y los resultados de compatibilidad que ha arrojado han mermado y socavado fuertemente la postura de que "las matemáticas son todo aquello que se pueda obtener a partir de **ZFC**" Ahora se sabe que se puede trabajar en nuevos sistemas de teoría de conjuntos (por ejemplo $\mathbf{ZFC}+\mathbf{HC}, \mathbf{ZFC}+\mathbf{HGC}, \mathbf{ZFC}+\mathbf{AM}$), obtener resultados nuevos en ellos y que no hay, aún, una buena razón para negarlos como resultados legítimamente matemáticos, aunque uno está obligado a explicitar en que sistema fueron obtenidos.

Con el análisis de Corry, se puede apreciar con detalle, la *profundidad* con que el método del forcing afectó a la disciplina matemática: El párrafo anterior sintetiza la enorme repercusión del método en el *cuerpo del conocimiento* matemático. Recordemos además que Corry nos indica que, en el caso de las matemáticas, los cambios paradigmáticos y sus consecuentes revoluciones se dan en la *imagen del conocimiento*, capa en la que sin duda alguna, se encuentra la concepción de las matemáticas, y que resuelve la clasificación entre resultados 'matemáticos' y 'metamatemáticos'. También recordemos que la división entre la imagen y el cuerpo del conocimiento es contingente, es decir, histórica; Malykhin nos señala en repetidas ocasiones que los resultados de consistencia e independencia, que se consideran en la imagen del conocimiento, es decir, resultados metamatemáticos, están tomando prioridad en el desarrollo de las investigaciones, y que la cantidad de ellos aumenta a una velocidad creciente. ¿Cuanto tiempo puede pasar para qué, una área que cada vez recibe más atención y esfuerzos de la comunidad matemática en general se considere parte del cuerpo del conocimiento matemático?

Sobre esta última cuestión, Malykhin pareció no reparar; aún más, parece estar convencido de que no habrá cambios de este tipo cuando nos dice

> Of course, the main body of mathematics, as expressed by Arkhangel'skii, continues to consist of "absolute" results; these are

> the results that are obtained from the usual axioms of set theory, that is, results in **ZFC**

"Por supuesto, el cuerpo principal de las matemáticas, como lo expresó Arkhangel'skii, continua consistiendo de resultados 'absolutos'; estos son resultados que se obtuvieron de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos, esto es, resultados en **ZFC**".

VI. CONCLUSIONES

1. Conocer matemática es una amplia y basta actividad, que en un marco más amplio, se debe incluir como parte de la cultura humana.

2. Reflexionar acerca de la estructura del discurso matemático exige una profunda formación matemática, pero esta reflexión no sólo se debe realizar en los terrenos matemáticos; la historia,el arte, la filosofía serán herramientas importantes para realizar esta reflexión.

3. Este tipo de reflexiones nos lleva a un producto híbrido: por un lado es filosofía y por otro es matemática. Una mejor comprensión del discurso matemático nos hará mejores matemáticos, ya que permite conocer la naturaleza del conocimiento matemático, lo que permite diseñar y proyectar nuestra actividad matemática.

4. Las áreas poco afectadas por el forcing siguen y podrían seguir teniendo la concepción clásica formalista de las matemáticas, sin embargo, la matemática producida por la postura formalista estaba empezando a ser desbordada por los problemas *condicionales*. Ahora *no se duda al reconocer a los investigadores de forcing y axiomas independientes como matemáticos*: el método del forcing los incorporó al cuerpo formalista matemático como problemas de *consistencia*. Este fenómeno estudiado de manera crítica desde la Historia y la Filosofía de la Matemática implica una modificación en la concepción de las matemáticas, imagen del conocimiento, que a su vez implicó una modificación en el cuerpo del conocimiento (imagen y cuerpo del conocimiento en la acepción de Corry). Estos problemas de indepencia se convirtieron en el más importante acceso a una ampliación de los problemas matemáticos.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

ÍNDICE ALFABÉTICO

BIBLIOGRAFÍA

[1] Joan Bagaria. La teoría de conjuntos. *La gaceta de la RSME*, 14(2):1–20, 2012.

[2] Sergio Atayan García Balán. *La Técnica de Forcing y Algunas Aplicaciones*. Tesis de Maestría. Benemértia Universidad Autónoma de Puebla, 2014.

[3] Hakob Barseghyan. *The laws of scientific change*. Springer, Cham, 2015.

[4] G. Buchdahl. A revolution in historiography of science. *History of Science*, 4:55, 1965.

[5] Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis i. *Proceedings of the London Mathematical Society U.S.A.*, 50:1143–1148, 1963.

[6] Paul J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis ii. *Proceedings of the London Mathematical Society U.S.A.*, 51:105–110, 1964.

[7] Leo Corry. The kuhnian agenda and the history of mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science*, 24:95–117, 1993.

[8] Leo Corry. The kuhnian agenda and the history of mathematics, 1995. `http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/paradigms.pdf`[Web. 3 de Junio 2016].

[9] Leo Corry. Paradigms and images in the history of mathematics. In E. Ausejo and M. Hormigon, editors, *Paradigms and Mathematics*, pages 169–192. Siglo XXI, 1996.

[10] Michael J. Crowe. Ten “laws” concerning patterns of chane in the history of mathematics. *Historia Mathematica*, 2, 1975.

[11] Javier de Lorenzo. *El metodo axiomatico y sus creencias (Serie de filosofia y ensayo) (Spanish Edition)*. Tecnos, 1980.

[12] Herbert B. Enderton. *Elements of Set Theory*. Academic Press, 1 edition, 5 1977.

[13] Leon Horsten. Philosophy of mathematics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2016 edition, 2016.

[14] Karel Hrbacek and Thomas Jech. *Introduction to Set Theory, Third Edition, Revised and Expanded (Chapman and Hall/CRC Pure and Applied Mathematics)*. Marcel Dekker, 3 edition, 1999.

[15] Akihiro Kanamori. *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from their Beginnings*. Springer, 1994.

[16] Thomas S. Kuhn. *La estructura de las revoluciones científicas*. FCE,México, 1971.

[17] Kenneth Kunen. *Set Theory An Introduction To Independence Proofs (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)*. North Holland, 12 1983.

[18] Kenneth Kunen. *The Foundations of Mathematics*. College Publications, 2009.

[19] Kenneth Kunen. *Set Theory*. Number 34. College Publications, 2009.

[20] I. Lakatos and A. Musgrave. *Criticism and the Growth of Knowledge: Volume 4: Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London, 1965*. Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London, 1965. Cambridge University Press, 1970.

[21] Imre Lakatos. *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery (Cambridge Philosophy Classics)*. Cambridge University Press, reissue edition, 10 2015.

[22] V.I. Malykhin. New methods in general topology connected with forcing. *Russian Math. Surveys*, 43:4:95–110, 1988.

[23] Herbert Mehrtens. T.s. kuhn's theories and mathematics: A discussion paper on the "new historiography" of mathematics. *Historia Mathematica*, 3:297–320, 1976.

[24] Michael Potter. *Set Theory and Its Philosophy: A Critical Introduction*. Oxford University Press Inc., 1 edition, 2004.

[25] Ernest Schimmerling. *A Course on Set Theory*. Cambridge University Press, 1 edition, 8 2011.

[26] Alan Weir. Formalism in the philosophy of mathematics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 2015 edition, 2015.

[27] Fernando Zalamea. Javier de lorenzo: por una filosofía dinámica de la praxis matemática. *Mathesis*, II(I):1–35, 1964.