



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"OPERACIONES CUÁNTICAS DE DOS QUBITS Y
PURIFICACIÓN DE ENTRELAZAMIENTO"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA

ROCÍO GÓMEZ ROSAS

DIRECTORES DE TESIS

DR. JUAN MAURICIO TORRES GONZÁLEZ

DR. AURELIO GERMÁN LUNA ACOSTA

No. de CVU: 784765

SEPTIEMBRE 2023

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia, a mis amigos y a todas esas personas que de alguna u otra manera han sido parte de mi vida y que quizá sin saberlo me han dado esa pequeña motivación para seguir avanzando, que llegaron en el momento exacto en que yo los necesitaba. No puedo dejar de manifestar mi gratitud al Dr. Juan Mauricio Torres González y al Dr. Germán Luna Acosta, quienes con su conocimiento hicieron posible este trabajo. Finalmente agradezco a CONACYT por la beca otorgada durante el periodo de doctorado.

Dedicado a todos aquellos que han creído en mi

Resumen

Actualmente las tecnologías cuánticas juegan un rol importante en la sociedad, ya que el control cuántico que se tiene sobre algunos sistemas nos permite idear nuevos dispositivos que influyan en la calidad de vida de las personas. Como algunos ejemplos podemos mencionar la información y computación cuántica, criptografía cuántica, sensores cuánticos, etc. Un requisito indispensable en algunas tecnologías cuánticas, es necesaria la cantidad cuántica conocida como “entrelazamiento”, sin embargo esta propiedad se ve fácilmente afectada por el entorno, por lo que es necesario restaurarla mediante un proceso conocido como protocolo de purificación de entrelazamiento. Este proceso consiste en realizar operaciones cuánticas sobre dos pares de qubits (sistemas cuánticos de dos niveles) , que se encuentran entrelazados y separados espacialmente, con la finalidad de obtener un solo par con una fidelidad mayor respecto a algún estado con entrelazamiento máximo. Este proceso se repite las veces necesarias hasta obtener una fidelidad lo más cercana posible a 1. En este punto es importante mencionar que el número de pares de qubits necesarios escala exponencialmente con el número de iteraciones, por lo que se busca una buena purificación de estados con el menor número de iteraciones posibles.

Este trabajo está enfocado en la mejora de la eficiencia de los protocolos de purificación ya existentes, a través de la exploración de operaciones cuánticas de qubits individuales que podrían ser usadas en protocolos de purificación. Tales operaciones surgen de manera natural en los modelos de átomos en cavidades y trampas de iones, como es el caso del modelo no lineal de Tavis-Cummings.

Abstract

Currently, quantum technologies play an important role in society, since the quantum control that we have over some systems allows us to devise new devices that influence people's quality of life. As some examples we can mention quantum information and computing, quantum cryptography, quantum sensors, etc. A prerequisite in some quantum technologies, the quantum quantity known as "entanglement" is required, however this property is easily affected by the environment, so it is necessary to restore it through a process known as entanglement purification protocol. This process consists of performing quantum operations on two pairs of qubits (two-level quantum systems), which are entangled and spatially separated, in order to obtain a single pair with a higher fidelity with respect to some state with maximum entanglement. This process is repeated as many times as necessary until obtaining a fidelity as close as possible to 1. At this point it is important to mention that the number of pairs of qubits needed scales exponentially with the number of iterations, so a good purification of states is sought with the fewest possible number of iterations. This work is focused on improving the efficiency of existing purification protocols, through the exploration of individual qubit quantum operations that could be used in purification protocols. Such operations arise naturally in models of atoms in cavities and ion traps, such as the nonlinear Tavis-Cummings model.

Publicaciones

- Rocío Gómez-Rosas, Carlos A. González-Gutiérrez, Juan Mauricio Torres González "Entangling operations in nonlinear two-atom Tavis-Cummings models", *Physical Review A*, 104, 063701, (2021).

Participación en eventos

- Operaciones cuánticas de dos qubits y purificación de entrelazamiento, Rocío Gómez Rosas, Tijuana, Baja California (En línea), México (2021).

Índice general

Agradecimientos	1
Resumen	5
Abstract	6
Introducción	11
1. Entrelazamiento y compuertas cuánticas	14
1.1. Entrelazamiento cuántico	14
1.2. Operaciones cuánticas	17
1.2.1. Compuertas cuánticas de dos qubits	19
1.3. Teleportación cuántica	19
2. Purificación de entrelazamiento	22
2.1. Protocolos de purificación de entrelazamiento	22
2.1.1. Protocolo de Bennett	23
2.1.2. Protocolo de purificación de Deutsch	24
2.1.3. Protocolo de purificación con compuertas no unitarias	25
2.2. Implementación compuerta Hadamard	27
3. Operaciones entrelazadoras con el modelo de dos átomos de Tavis-Cummings no lineal	31
3.1. Generalización del modelo de dos átomos de Tavis-Cummings no lineal	32
3.1.1. Vector de estado dependiente del tiempo	33
3.2. Escalas de tiempo relevantes	37

3.2.1.	Vector de estado a tiempos de resurgimiento fraccionales . . .	38
3.3.	Modelos específicos	39
3.3.1.	Modelo de Tavis-Cummings de dos átomos	40
3.3.2.	Modelo de Buck-Sukumar	40
3.3.3.	Modelo de trampa de iones	41
3.4.	Características dinámicas	44
3.4.1.	Oscilaciones de Rabi y representación del espacio fase	44
3.4.2.	Fidelidad del vector de estado aproximado	47
3.5.	Análisis del entrelazamiento	49
3.5.1.	Entrelazamiento de dos átomos	51
3.5.2.	Entrelazamiento entre el átomo y el oscilador	52
3.6.	Operaciones entrelazadoras	54
3.6.1.	Operaciones de dos qubits	54
4.	Purificación de entrelazamiento incluyendo estados mixtos con entrelazamiento máximo	57
4.1.	Proceso de purificación en una iteración	57
4.1.1.	Iteraciones posteriores y probabilidad total de éxito	59
4.2.	Estados diagonales en la base Bell	60
4.2.1.	Estados diagonales sin usar operaciones twirling	60
4.2.2.	Probabilidad total de éxito para estados de rango 2	61
4.3.	Estados mixtos con entrelazamiento máximo	63
4.3.1.	Proceso de purificación	64
4.3.2.	Purificación con nuestro protocolo	64
4.4.	Estados de rango tres	66
5.	Conclusiones	69
	Bibliografía	71

Introducción

Las bases de la teoría de la información fueron establecidas por Claude E. Shannon en 1948 [1]. El sistema de comunicación básicamente consistía de cinco partes: un fuente de información, la cual producía un mensaje o una serie de mensajes que serían recibidos en una terminal; un transmisor que opera sobre el mensaje para producir una señal que viaja sobre el canal; el canal, es el medio usado para transmitir la señal; el receptor, quien reconstruye el mensaje a partir de la señal (decodificación) y finalmente el destinatario, que es la persona a quien va dirigido el mensaje [1]. Se buscaba la transmisión óptima de los mensajes utilizando de manera eficiente los canales de comunicación, calculando la tasa de transmisión de información óptima para cada canal. Además también estudió los problemas de criptografía y sistemas secretos que proporcionaban interesantes aplicaciones en la teoría de la comunicación [2], así como el estudio de la transmisión de información en presencia de ruido [3].

La información se pensó durante mucho tiempo en términos clásicos, sin embargo una teoría completamente cuántica de la información se ha ido consolidando como un campo científico multidisciplinario que ha llamado la atención de ingenieros, matemáticos, físicos teóricos y experimentales. Algunos de los beneficios de esta teoría son la comunicación cuántica basada en protocolos de teleportación [4, 5], la construcción de computadoras cuánticas que podrían acelerar drásticamente la solución a ciertos problemas matemáticos, además de la habilidad de las computadoras cuánticas para factorizar números de manera eficiente [6], la criptografía cuántica, es otra de las aplicaciones que nos permite la transmisión confidencial de información clásica, en presencia de terceros [7]. Todos estos beneficios dependen de propiedades cuánticas como el principio de incertidumbre, la interferencia, el entrelazamiento cuántico, etc.[8].

Puesto que la información cuántica estudia los procesos de información utilizando los principios de la mecánica cuántica, es necesario el estudio de estados, compuertas y sistemas físicos cuánticos que puedan ser montados experimentalmente, además del estudio de datos cuánticos y su procesamiento. Un bit clásico, es un dígito del sistema de numeración binario, que puede ser representado por los valores 0 y 1, empleado como unidad mínima de información en la teoría de la información, generalmente un bit clásico es un sistema macroscópico y es descrito por uno o más parámetros continuos tal como el voltaje [8]. En información y computación cuántica los bits son contruidos sobre un concepto análogo, el bit cuántico o "qubit" (quantum bit) también tiene un estado, los estados básicos son $|0\rangle$ y $|1\rangle$, que corresponden a 0 o 1 del bit clásico, donde hemos usado la notación de Dirac para representar a los estados en mecánica cuántica [9]. También puede existir una superposición de estados representados matemáticamente como combinaciones lineales complejas de los estados base $|0\rangle$ y $|1\rangle$, por ejemplo [8, 9]

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1)$$

con α, β complejos. Los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son conocidos como la base computacional y forman una base completa y ortonormal.

La diferencia entre bits y qubits es que un bit puede contener un valor 0 o 1 y un qubit contiene ambos valores, hasta que éste es observado. La mecánica cuántica nos dice que al medir un qubit obtenemos el resultado 0 con probabilidad $|\alpha|^2$, o el resultado 1, con probabilidad $|\beta|^2$, con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ [9].

Un qubit, típicamente es un sistema microscópico tal como un átomo o un espín nuclear, es decir un sistema cuántico de dos niveles, como lo son los dos estados de una partícula de espín 1/2, el estado base y excitado de un átomo o las polarizaciones horizontal y vertical de un solo fotón [10]. El estado general de dos qubits tiene cuatro estados en la base computacional denotados por $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ y $|11\rangle$, en un par de qubits también puede existir superposición de estos cuatro estados [9], dado por

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle, \quad (2)$$

similar al caso de un qubit, medir por ejemplo $|00\rangle$, ocurre con una probabilidad de

$|\alpha_{00}|^2$.

Estados como los descritos en la ecuación (2) incluye a los conocidos estados de Bell, los cuales son estados "entrelazados" y corresponden a una situación en la cual el fotón o el electrón por si sólo no tienen un estado definido, aunque el par en conjunto sí lo tiene[8]. En la siguiente sección daremos los detalles de esta propiedad cuántica. La finalidad de este trabajo es explorar nuevas compuertas cuánticas que nos permitan mejorar la calidad del entrelazamiento entre los estados, utilizando la menor cantidad de recursos posibles.

Capítulo 1

Entrelazamiento y compuertas cuánticas

1.1. Entrelazamiento cuántico

Entre las características más famosas de la mecánica cuántica se encuentra el efecto Einstein-Podolsky-Rosen [11], en el que fueron observadas correlaciones fuertes anómalas entre partículas no interactuantes en el presente pero que habían interactuado en el pasado. Este tipo de correlaciones ocurren sólo cuando el estado del sistema completo está "entrelazado". Un estado está entrelazado si y solo si su vector de estado $|\Upsilon\rangle$ no puede ser expresado como un producto tensorial $|\Upsilon_A\rangle \otimes |\Upsilon_B\rangle$ de los estados individuales que lo componen.

El entrelazamiento es una propiedad de sistemas cuánticos multipartitas, sistemas que consisten de dos partes A y B , que se encuentran separados a grandes distancias como para interactuar, cuyo estado, puro o mixto, vive en un espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, que es un producto tensorial de los espacios de Hilbert de los sistemas individuales [12]. Esta propiedad es un recurso importante para muchas de las tareas de la información cuántica, tal como la computación y comunicación cuántica, esta propiedad es una herramienta esencial en física cuántica tanto experimental como teórica. Las primeras realizaciones experimentales de pares de fotones entrelazados fueron usados para demostrar la naturaleza cuántica de las correlaciones de polarización que pueden ocurrir en procesos de decaimiento [13, 14, 15], para confirmar

predicciones cuánticas de la teoría de la radiación [16] o para probar teoremas de Bell y excluir descripciones realistas locales de los fenómenos cuánticos observados [17, 18].

El entrelazamiento es un fenómeno cuántico en el cual los estados de uno o más objetos están correlacionados, aún cuando éstos se encuentren separados espacialmente, como ejemplo de estados puros con entrelazamiento máximo podemos mencionar a los estados de Bell que forman un base completa y ortonormal

$$\begin{aligned} |\Psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle) \\ |\Phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Estados puros que no están entrelazados conforman la base computacional y están dados por

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |00\rangle, & |\Psi\rangle &= |11\rangle, \\ |\Psi\rangle &= |01\rangle, & |\Psi\rangle &= |10\rangle. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Algunas propiedades del entrelazamiento para estados puros son las siguientes [12]

- Esta propiedad se conserva bajo operaciones locales unitarias, dicha transformación unitaria puede ser representada por $U = U_A \otimes U_B$.
- El entrelazamiento entre un par de sistemas cuánticos puede ser purificado con la finalidad de obtener pares entrelazados con una mayor fidelidad, utilizando únicamente operaciones locales y comunicación clásica entre los laboratorios.

Varios trabajos se han realizado con la intención de encontrar medidas cuantitativas de entrelazamiento, particularmente para estados mixtos de un sistema bipartita [19, 12], quizá la más básica de estas mediciones es el entrelazamiento de formación, que tiene por objetivo cuantificar los recursos necesarios para crear un determinado estado entrelazado [20]. El problema de medir el entrelazamiento sigue abierto,

puesto que es complicado para sistemas multipartitas, sin embargo para sistemas bipartitas el problema está claro en el caso de estados puros, pero para estados mixtos únicamente se conoce la fórmula analítica para dos qubits. El entrelazamiento de formación es definido como sigue [12], dada una matriz de densidad ρ de un par de sistemas cuánticos A y B , considere todas las posibles descomposiciones de estados puros ρ , es decir, los estados $|\psi_i\rangle$ con probabilidades p_i , tales que

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.3)$$

para cada estado puro, el entrelazamiento E es definido como la entropía de cualquiera de los dos subsistemas A y B [19, 20]

$$E(\psi) = -\text{Tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) = -\text{Tr}(\rho_B \log_2 \rho_B), \quad (1.4)$$

donde ρ_A es la traza parcial de $|\psi\rangle \langle \psi|$ sobre el subsistema A , de manera análoga para ρ_B . La traza parcial es una generalización de la traza. Donde Tr_B es un mapeo de operadores sobre el sistema B . Y nos permite analizar de manera independiente cada uno de los subsistemas.

El entrelazamiento de formación para un par de qubits puede ser expresado como una función explícita de la matriz de densidad ρ [20], haciendo uso de la transformación "spin-flip", la cual es una función aplicable a estados con un número arbitrario de qubits. Para un estado de un solo qubit, esta transformación es definida como sigue

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y |\psi^*\rangle, \quad (1.5)$$

donde $|\psi^*\rangle$ es el complejo conjugado de $|\psi\rangle$ y $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ una de las matrices de Pauli.

Para realizar la transformación spin-flip sobre n qubits se aplica a cada qubit individual, en el caso de dos qubits, el estado es transformado de la siguiente forma

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (1.6)$$

Aunque se ha introducido la operación spin-flip para lidiar con estados mixtos, el concepto es también conveniente para expresar el entrelazamiento de un estado puro de dos qubits. Se ha mostrado en [21] que el entrelazamiento definido en (1.4) puede ser escrito como $E(\psi) = \mathbb{E}(C(\psi))$, donde C , la concurrencia es definida como

$$C(\psi) = \left| \langle \psi | \tilde{\psi} \rangle \right|, \quad (1.7)$$

En el caso especial del entrelazamiento entre dos qubits una fórmula para el entrelazamiento de formación de estados mixtos ya ha sido probada [21], $E(\rho) = (\mathbb{C}(\rho))$, con

$$C(\rho) = \max \{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (1.8)$$

donde λ_i , $i = 1, \dots, 4$, son los valores propios de la matriz no Hermitiana $\rho\tilde{\rho}$ ordenados de manera decreciente.

Más allá de confirmar la validez de la mecánica cuántica, el entrelazamiento cuántico ha asumido un rol vital en la teoría de la información, por lo que esta propiedad será utilizada a lo largo de este trabajo.

1.2. Operaciones cuánticas

Una computadora clásica es construida de circuitos eléctricos compuestos por cables y compuertas lógicas, de manera análoga una computadora cuántica requiere de circuitos cuánticos, compuestos por compuertas cuánticas elementales para manipular la información cuántica [9].

Como ejemplo consideremos la compuerta lógica clásica de un solo bit, la compuerta NOT, la cual es definida por su tabla de verdad en la cual $0 \rightarrow 1$ y $1 \rightarrow 0$, es decir, los bits 0 y 1 son intercambiados. Una compuerta análoga cuántica NOT también puede ser definida [9]. La compuerta cuántica NOT actúa linealmente, es decir, toma el estado

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.9)$$

y lo transforma en

$$|\psi'\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle. \quad (1.10)$$

Podemos definir una matriz X para representar la compuerta NOT como sigue

$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

si escribimos el estado cuántico en notación vectorial, entonces la correspondiente salida de la compuerta NOT es representada como

$$X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Se pueden construir muchas compuertas de un solo qubit, entre ellas podemos mencionar las siguientes [9]

$$Y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad Z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

otra de ellas es la compuerta Hadamard

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Una compuerta unitaria arbitraria de un solo qubit puede ser descompuesta como un producto de rotaciones, por ejemplo un rotación en torno a alguno de los ejes

$$\begin{pmatrix} \cos \gamma/2 & -\sin \gamma/2 \\ \sin \gamma/2 & \cos \gamma/2 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

y una compuerta que puede ser entendida como una rotación alrededor del eje \hat{z} , junto con un corrimiento de fase global, $e^{i\alpha}$, por lo que una compuerta lógica cuántica

arbitraria de un solo qubit puede ser representada como [9]

$$U = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} e^{-i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma/2 & -\sin \gamma/2 \\ \sin \gamma/2 & \cos \gamma/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

1.2.1. Compuertas cuánticas de dos qubits

Las compuertas cuánticas pueden ser aplicadas a cualquier subconjunto de qubits, por lo que una familia universal de compuertas puede ser implementada [9]. La típica compuerta cuántica lógica multi-qubits es la compuerta NOT-Controlada o CNOT. Esta compuerta tiene dos qubits de entrada, conocidos como el qubit de control y el qubit objetivo. La acción de la compuerta podría describirse como sigue: si el qubit de control es establecido como 0, entonces el qubit objetivo permanece sin cambio, si el qubit de control es establecido como 1, entonces el qubit objetivo es intercambiado, es decir,

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |00\rangle & |10\rangle &\rightarrow |11\rangle \\ |01\rangle &\rightarrow |01\rangle & |11\rangle &\rightarrow |10\rangle. \end{aligned} \quad (1.17)$$

El objetivo es desarrollar una teoría general de transformaciones de estados que puedan ser realizadas en un sistema bipartita sin la necesidad de juntar las partes. Considere estas transformaciones para ser realizadas por “Alice” y “Bob” cada uno teniendo acceso a los subsistemas. Permitimos a Alice y Bob realizar acciones locales sobre los sistemas de dos qubits, por ejemplo, transformaciones unitarias y mediciones en sus respectivos subsistemas y en ocasiones se les permite coordinar sus acciones mediante comunicación clásica entre ellos [12].

1.3. Teleportación cuántica

La teleportación cuántica es una técnica que nos permite transmitir información de estados cuánticos, incluso en ausencia de un canal de comunicación cuántico entre el mensajero y el receptor [9]. El objetivo principal del protocolo de teleportación es transmitir la información de qubit A a un qubit distante C , utilizando operaciones cuánticas de dos qubits locales y comunicación clásica entre los laboratorios.

El protocolo funciona de la siguiente manera [9], suponemos que Alice se encuentra en su laboratorio y tiene dos qubits A y B , por otro lado Bob en su laboratorio tiene acceso a un qubit C que en el pasado fue entrelazado con el qubit B y es descrito por un estado puro con entrelazamiento máximo, por ejemplo uno de los estados de Bell $|\Phi^+\rangle$, ver fig. (1.1).

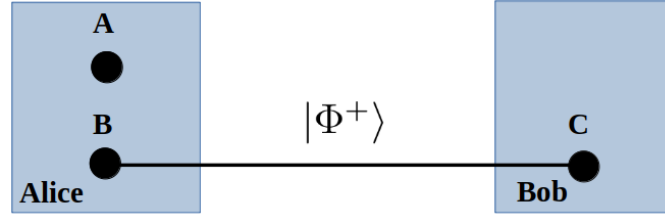


Figura 1.1: Diagrama del protocolo de teleportación. El objetivo de este protocolo es transmitir la información del qubit A , descrito por $|\psi\rangle_A$, a un qubit distante C usando únicamente operaciones cuánticas locales en los laboratorios de Alice y Bob y comunicación clásica entre ellos.

La meta es transmitir la información del qubit A , el cual es descrito por el estado $|\psi\rangle_A = \alpha |0\rangle_A + \beta |1\rangle_A$ a Bob. Donde la etiqueta hace referencia al estado del qubit A . Alice hace interaccionar su qubit A con el qubit B , sin embargo al estar entrelazado con C el qubit de Bob automáticamente se ve afectado por esta interacción, el estado del sistema completo es descrito por

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= |\psi\rangle_A \otimes |\Phi^+\rangle_{BC} & (1.18) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |0\rangle_A + \beta |1\rangle_A) \otimes (|00\rangle_{BC} + |11\rangle_{BC}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |00\rangle_{AB} |0\rangle_C + \alpha |01\rangle_{AB} |1\rangle_C + \beta |10\rangle_{AB} |0\rangle_C + \beta |11\rangle_{AB} |1\rangle_C) \\
 &= \frac{1}{2} [|\Phi^+\rangle_{AB} (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)_C + |\Phi^-\rangle_{AB} (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle)_C \\
 &\quad + |\Psi^+\rangle_{AB} (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle)_C + |\Psi^-\rangle_{AB} (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle)_C].
 \end{aligned}$$

De la ecuación (1.18) podemos notar que el estado total del sistema se ve como una combinación entre cuatro estados de Bell y el estado inicial del qubit A que inicialmente queríamos teleportar. El siguiente paso del protocolo consiste en realizar una medición por Alice, es decir, proyectar sobre alguno de los cuatro estado de Bell.

Es importante mencionar que Alice sólo tiene acceso a los qubits que están en su laboratorio, A y B . En el momento en el que Alice realiza su medición, el qubit C de Bob también colapsará a un estado en particular. Por ejemplo si Alice proyecta sobre el estado $|\Phi^+\rangle$ el qubit C colapsa al estado $\alpha|0\rangle_C + \beta|1\rangle_C$, el cual queríamos teleportar. Sin embargo si Alice mide el estado $|\Phi^-\rangle$, el qubit C colapsa al estado $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$. En este caso Alice comunica a Bob de manera clásica que realice una operación sobre su qubit tal que $U(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \rightarrow \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ para así obtener la información del qubit original.

Es importante mencionar que la teleportación cuántica no permite una comunicación más rápida que la velocidad de la luz, ya que para completar el proceso de teleportación Alice debe transmitir el resultado de su medición a Bob a través de un canal de comunicación clásico[9].

La teleportación es crucial en la teoría de la información ya que representa un ingrediente fundamental en el desarrollo de muchas tecnologías cuánticas [22]. La teleportación cuántica ha sido alcanzada en los laboratorios alrededor del mundo usando una variedad de tecnología [22], incluyendo qubits fotónicos, resonancia magnética nuclear, modelos ópticos, ensamblajes atómicos, átomos atrapados y sistemas de estado sólido. Hoy en día estamos viviendo una era de grandes avances tecnológicos en los que el control cuántico que se tiene sobre algunos sistemas nos permite idear nuevas aplicaciones, por lo tanto es de suma importancia obtener sistemas cuánticos cuyo entrelazamiento sea el máximo posible, ya que esta cantidad es el recurso necesario para poder llevar cabo todas las tareas en computación e información cuántica. En el capítulo 2 hablaremos sobre los procesos de purificación de estados cuánticos y cómo puede mejorarse la eficiencia de estos protocolos para optimizar el uso de este recurso. Posteriormente en el capítulo 3, hablamos sobre el modelo de Tavis-Cummings no lineal y cómo a partir de éste surgen de manera natural compuertas cuánticas que pueden ser utilizadas en los protocolos de purificación para mejorar la eficiencia. Finalmente en el capítulo 4, tratamos la purificación de diferentes tipos de estados con las modificaciones adecuadas a los protocolos de purificación ya existentes, con la finalidad de disminuir el número de iteraciones necesarias para purificar a los estados.

Capítulo 2

Purificación de entrelazamiento

2.1. Protocolos de purificación de entrelazamiento

El entrelazamiento es el recurso fundamental para llevar a cabo las tareas de comunicación cuántica. Sin embargo los estados entrelazados generados son estados ruidosos debido a su interacción con el entorno, por lo que es necesario llevar a cabo un proceso de purificación. El objetivo principal de estos protocolos es intercambiar dos pares de qubits con cierto grado de entrelazamiento por un par que tenga un grado mayor, usando únicamente operaciones locales en los laboratorios distantes (A y B) y comunicación clásica entre ellos [23], ver diagrama (2.1).

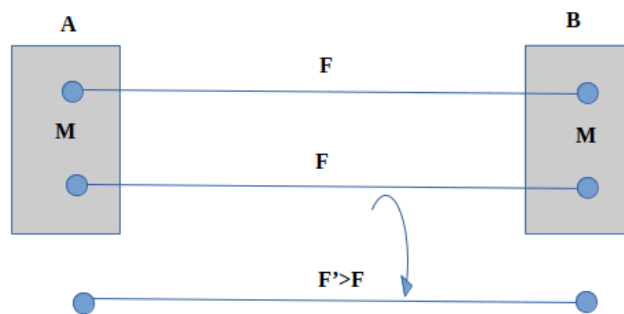


Figura 2.1: Diagrama protocolo de purificación. Se realizan operaciones locales de dos qubits en los laboratorios A y B, con el objetivo de intercambiar un par de qubits entrelazado por uno con mayor grado de entrelazamiento.

Este proceso se repite hasta que la fidelidad del estado respecto a un estado con entrelazamiento máximo sea lo más cercana posible a 1. La fidelidad del estado ρ mixto general de dos qubit viene dada por la siguiente expresión [5]

$$F = \langle \Psi^- | \rho | \Psi^- \rangle, \quad (2.1)$$

en este caso la fidelidad ha sido tomada con respecto a uno de los estados de Bell.

Es importante mencionar que el número de qubits requeridos en un protocolo de purificación crece de manera exponencial con el número de iteraciones necesarias para purificar los estados, por lo que se busca una purificación eficiente con el menor número de pasos posibles.

2.1.1. Protocolo de Bennett

El primer protocolo de purificación fue introducido por Bennett y colaboradores [5]. Este protocolo utiliza estados diagonales en la base de Bell, caracterizados por un sólo parámetro F , dichos estados son conocidos como estados de Werner, dados por

$$\hat{\rho}_W(F) = F |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-| + \frac{1-F}{3} (|\Psi^+\rangle \langle \Psi^+| + |\Phi^-\rangle \langle \Phi^-| + |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|). \quad (2.2)$$

Una de las ventajas de describir a los estados de esta forma es que su fidelidad queda determinada únicamente por el parámetro F . Un estado general bipartita puede ser transformado en un estado de Werner mediante la aplicación de operaciones unitarias aleatorias del grupo $SU(2)$, conocidas como operaciones "twirling"[12].

Este protocolo de purificación utiliza las siguientes operaciones locales [5]:

- Rotaciones unilaterales de Pauli, es decir que se aplican únicamente a uno de los pares de qubits.
- Rotaciones de $\pi/2$ bilaterales, operaciones que son aplicadas por ambos observadores a los pares de qubits.
- Compuertas cuánticas unitarias como X-OR y NOT-Controlada realizadas de manera bilateral.

También es importante mencionar que en este protocolo la fidelidad inicial de los estados, respecto a $|\Psi^-\rangle$, debe ser mayor a $1/2$, para asegurar la convergencia de la fidelidad a 1.

En la figura 2.2 graficamos la fidelidad de estados diagonales de Werner, en función de la fidelidad posterior a la primera y segunda iteración. Podemos notar cómo la fidelidad aumenta desde la primera iteración del protocolo.

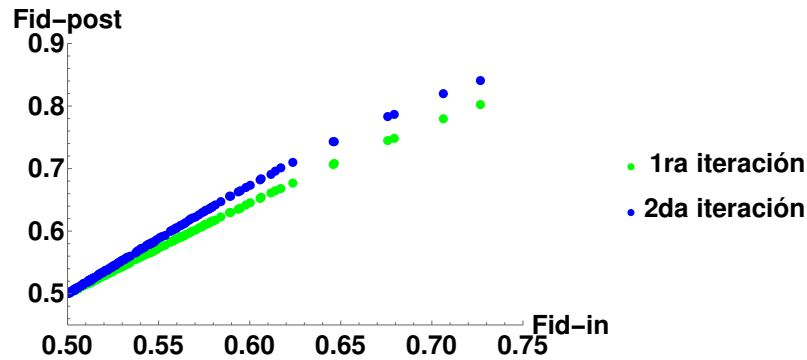


Figura 2.2: Gráfica de la fidelidad inicial de estados diagonales de Werner en función de la fidelidad posterior a la primera y segunda iteración.

2.1.2. Protocolo de purificación de Deutsch

El protocolo de Deutsch al igual que el de Bennett, fue de los primeros protocolos de purificación de entrelazamiento. En este trabajo [24] presentan un protocolo basado en un algoritmo cuántico iterativo, que usa la compuerta unitaria NOT-Controlada y estado diagonales arbitrarios en la base de Bell.

Para ver los efectos de este procedimiento, considere el caso en el cual cada par de qubits está en el estado $\hat{\rho}$ y el estado conjunto de los dos pares de qubits es el producto $\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}'$. Donde $\hat{\rho}$ comprende los dos qubits que llamaremos qubits de control y $\hat{\rho}'$ los dos qubits objetivo. Alice y Bob miden los qubits objetivo en la base computacional. Si las mediciones coinciden, es decir, que ambos espines están arriba o abajo, ellos mantienen el par de qubits de control para la segunda iteración del protocolo y descartan el par objetivo, si la salida de la medición no coincide, ambos pares son descartados.

El operador $\hat{\rho}$ es expresado en la base de Bell, $\{|\Phi^+\rangle, |\Psi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Phi^-\rangle\}$ y además

denotamos por $\{A, B, C, D\}$ los elementos de la diagonal de los estados en tal base. Note que $A = \langle \Phi^+ | \hat{\rho} | \Phi^+ \rangle$ es la fidelidad inicial. El objetivo es aproximar la fidelidad a 1, lo cual implica que los otros elementos se vayan a cero.

En la segunda iteración del protocolo el operador de densidad se verá modificado como $\tilde{\rho}$ con los siguientes elementos en la diagonal $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}\}$, donde

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{A^2 + B^2}{N}, & \tilde{B} &= \frac{2CD}{N}, \\ \tilde{C} &= \frac{C^2 + D^2}{N}, & \tilde{D} &= \frac{2AB}{N}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

con $N = (A+B)^2 + (C+D)^2$ la probabilidad de que Alice y Bob obtengan resultados coincidentes en las mediciones de un par de qubits objetivo. En este protocolo la fidelidad inicial de los estados, A , debe ser mayor a $1/2$, para garantizar la convergencia de la fidelidad a 1, de forma similar al caso del protocolo de Bennett [5]. En este caso se tienen 3 parámetros, por lo cual es más difícil determinar su convergencia. Sin embargo el resultado ya está hecho en [25].

2.1.3. Protocolo de purificación con compuertas no unitarias

Este protocolo de purificación se diferencia de los otros protocolos en dos pasos esenciales [23]. En el primero, no es necesaria la aplicación de rotaciones unitarias aleatorias locales para transformar los estados en estados diagonales o estados de Werner, ya que este protocolo usa estados en la base de Bell completamente arbitrarios, dados por $\rho = \sum_{i,j=1}^4 r_{ij} |i\rangle \langle j|$, donde

$$|1\rangle \equiv |\Psi^-\rangle, \quad |2\rangle \equiv |\Phi^-\rangle, \quad |3\rangle \equiv |\Phi^+\rangle, \quad |4\rangle \equiv |\Psi^+\rangle. \quad (2.4)$$

Segundo, la aplicación de compuertas NOT-controladas son reemplazadas por una compuerta no unitaria, que puede ser implementada en sistemas de átomos en cavidades.

Se considera como condición inicial el estado producto de dos pares de qubits $\rho = \rho^{A_1, A_2} \otimes \rho^{B_1, B_2}$, donde se asume que ambos pares comienzan en el mismo estado, con cierto grado de entrelazamiento y sus componentes de qubit están en ubicaciones distantes etiquetadas por A y B. El protocolo de purificación sigue los siguientes pasos

[23]

- La operación cuántica de dos qubits M (proyector de rango 2) es aplicada localmente en los laboratorios A y B, donde

$$M = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|. \quad (2.5)$$

Después de aplicar satisfactoriamente la operación cuántica M el sistema se convierte en el estado:

$$\rho' = \frac{\Pi\rho\Pi^\dagger}{\text{Tr}\{\Pi^\dagger\Pi\rho\}}, \quad \Pi = M^{A_1,A_2}M^{B_1,B_2}. \quad (2.6)$$

- Uno de los pares, por ejemplo (A_2, B_2) es localmente medido en la base computacional. Hay cuatro posibles estados en los que podemos encontrar el par de qubits, $(A_2, B_2) : |jk\rangle^{A_2,B_2} \equiv |j\rangle^{A_2} |k\rangle^{B_2}$, $j, k \in \{0, 1\}$.
- Dependiendo del resultado de la medición, la compuerta cuántica $V_j^{A_1}B_{k+1}^{B_1}$ es aplicada al par de qubits remanente, con $V_j = (|1\rangle\langle 1| + i|0\rangle\langle 0|)\sigma_x^j$, σ_x la matriz de Pauli. El estado final de los dos qubits es entonces dado por

$$\rho'^{A_1,B_1} = (V_j^{A_1}V_{k+1}^{B_1})\tilde{\rho}^{A_1,B_1}(V_j^{A_1}V_{k+1}^{B_1})^\dagger. \quad (2.7)$$

La elección del par de qubits medido es libre, puesto que la operación cuántica M es simétrica en contraste con la compuerta NOT-controlada usada en los protocolos anteriores.

Después de la primera iteración del protocolo la matriz de densidad resultante ρ' , conocida como estado X, tiene las siguientes entradas distintas de cero

$$\begin{aligned} r'_1 &= \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2 - r_{21}^2}{N}, & r'_2 &= 2\frac{r_3r_4 - |r_{34}|^2}{N}, \\ r'_4 &= \frac{r_3^2 + r_4^2 - r_{34}^2 - r_{43}^2}{N}, & r'_3 &= 2\frac{r_1r_2 - |r_{12}|^2}{N}, \\ r'_{14} &= \frac{r_{14}^2 + r_{23}^2 - r_{13}^2 - r_{24}^2}{N}, & r'_{23} &= 2\frac{r_{23}^*r_{14}^* - r_{13}^*r_{24}^*}{N}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

con $N/2$ la probabilidad de éxito de la operación cuántica y $N = (r_1 + r_2)^2 + (r_3 +$

$$r_4)^2 - (r_{12} + r_{21})^2 - (r_{34} + r_{43})^2.$$

Este protocolo permite que la fidelidad inicial de los estados sea menor que el umbral $1/2$, ya que la condición de purificación viene dada por

$$(2r_1 - 1)(1 - 2r_2) > (2\text{Im}[r_{12}])^2 - (2\text{Re}[r_{34}])^2. \quad (2.9)$$

El siguiente ejemplo muestra como el protocolo es capaz de purificar estados entrelazados iniciales con una fidelidad baja respecto a los estados de Bell. Consideremos el siguiente estado inicial, con $c \in (0, 0.5]$

$$\rho_2 = c |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-| + (1 - c) |\Upsilon_{\text{sep}}\rangle \langle \Upsilon_{\text{sep}}|, \quad (2.10)$$

donde $|\Upsilon_{\text{sep}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi^+\rangle + |\Psi^+\rangle)$. Este estado tiene la característica de que puede ser purificado en un sólo paso del protocolo, con probabilidad $c^2/2$ y cuya fidelidad inicial puede ser menor a $1/2$.

2.2. Implementación compuerta Hadamard

En la siguiente parte del trabajo partimos del protocolo con compuertas no unitarias, que utiliza matrices de entrada arbitrarias en la base de Bell y de acuerdo al mapeo dado por (2.8) después de la primera iteración del protocolo obtenemos estados X de la siguiente forma

$$\rho' = \begin{pmatrix} r'_1 & 0 & 0 & r'_{14} \\ 0 & r'_2 & r'_{23} & 0 \\ 0 & r'_{32} & r'_3 & 0 \\ r'_{41} & 0 & 0 & r'_4 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Sin embargo nos damos cuenta que si a la matriz dada por la expresión (2.11) le aplicamos una transformación unitaria U sobre qubits individuales, tal que la

transforme de la siguiente manera

$$\rho'' = U^{1,2} \rho' = \begin{pmatrix} r'_1 & r'_{14} & 0 & 0 \\ r'_{41} & r'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r'_3 & r'_{32} \\ 0 & 0 & r'_{23} & r'_4 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

donde $U^{1,2} = U^1 \otimes U^2$ indica que la transformación unitaria es aplicada sobre los qubits individuales, posteriormente al aplicar el protocolo de purificación obtenemos un estado diagonal en la base de Bell, que evita las operaciones “twirling” de los otros protocolos que generan pérdida de entrelazamiento.

Las operaciones twirling son 12 operaciones locales unitarias del grupo $SU(2)$, son necesarias y suficientes para transformar cualquier estado de dos qubits $\hat{\rho}$ en un estado de Werner; cuatro operaciones son necesarias para llevar $\hat{\rho}$ a un estado diagonal de Bell $\hat{\rho}_{BD}$ y a su vez tres operaciones más transforman $\hat{\rho}_{BD}$ en un estado de Werner $\hat{\rho}_W$. Esto puede ser escrito como [26]

$$\hat{\rho}_W = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \hat{B}_j^\dagger \hat{\rho}_{BD} \hat{B}_j, \quad \hat{\rho}_{BD} = \frac{1}{4} \sum_1^4 \hat{B}_j^\dagger \hat{B}_j^\dagger \hat{\rho} \hat{B}_j \hat{B}_j, \quad (2.13)$$

donde hemos usado las cuatro transformaciones unitarias

$$\begin{aligned} \hat{B}_j &= \hat{b}_j^A \otimes \hat{b}_j^B, & \hat{b}_1^l &= \frac{\hat{\mathbb{I}}^l + i\hat{\sigma}_x^l}{\sqrt{2}} & \hat{b}_2^l &= \frac{\hat{\mathbb{I}}^l - i\hat{\sigma}_y^l}{\sqrt{2}}, \\ \hat{b}_3^l &= |1\rangle \langle 1|^l + i|0\rangle \langle 0|^l, & \hat{b}_4^l &= \hat{\mathbb{I}}^l, & l &\in \{A, B\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

las cuales han sido expresadas en términos de transformaciones locales unitarias \hat{b}_j actuando en un solo qubit, los operadores de Pauli, $\hat{\sigma}_x$ y $\hat{\sigma}_y$ y la identidad $\hat{\mathbb{I}}$.

Por lo tanto nuestra intención es encontrar la transformación unitaria que realice la rotación dada en (2.12). Para ello necesitamos que U transforme los estados de Bell de la siguiente manera

$$U^{1,2} |\Psi^+\rangle \rightarrow |\Phi^-\rangle, \quad U^{1,2} |\Psi^-\rangle \rightarrow |\Psi^-\rangle, \quad U^{1,2} |\Phi^+\rangle \rightarrow |\Phi^+\rangle. \quad (2.15)$$

Por lo tanto escribimos la transformación unitaria más general posible, dada por

$$U^1 = \begin{pmatrix} e^{-i(\beta+\delta)/2} \cos(\gamma/2) & -e^{i(\delta-\beta)/2} \sin(\gamma/2) \\ e^{i(\beta-\delta)/2} \sin(\gamma/2) & e^{i(\beta+\delta)/2} \cos(\gamma/2) \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

La transformación unitaria sobre qubits individuales es importante, ya que las operaciones se aplican de manera local en laboratorios distantes. Podemos aplicar U^1 a cualquiera de los estados de Bell y obtener una combinación lineal de la siguiente forma

$$\begin{aligned} U^1 |\Phi^\pm\rangle &= a_1^\pm |\Phi^+\rangle + b_1^\pm |\Phi^-\rangle + c_1^\pm |\Psi^+\rangle + d_1^\pm |\Psi^-\rangle, \\ U^1 |\Psi^\pm\rangle &= a_2^\pm |\Phi^+\rangle + b_2^\pm |\Phi^-\rangle + c_2^\pm |\Psi^+\rangle + d_2^\pm |\Psi^-\rangle. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Explícitamente tenemos

$$\begin{aligned} U^1 |\Phi^+\rangle &= \cos(\gamma/2) \cos((\beta + \delta)/2) |\Phi^+\rangle - i \cos(\gamma/2) \sin((\beta + \delta)/2) |\Phi^-\rangle \\ &+ i \sin(\gamma/2) \cos((\beta - \delta)/2) |\Psi^+\rangle - \sin(\gamma/2) \cos((\beta + \delta)/2) |\Psi^-\rangle, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} U^1 |\Phi^-\rangle &= -i \cos(\gamma/2) \sin((\beta + \delta)/2) |\Phi^+\rangle + \cos(\gamma/2) \cos((\beta + \delta)/2) |\Phi^-\rangle \\ &+ \sin(\gamma/2) \cos((\beta - \delta)/2) |\Psi^+\rangle - i \sin(\gamma/2) \cos((\beta - \delta)/2) |\Psi^-\rangle, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} U^1 |\Psi^+\rangle &= i \sin(\gamma/2) \sin((\beta - \delta)/2) |\Phi^+\rangle - \sin(\gamma/2) \cos((\beta - \delta)/2) |\Phi^-\rangle \\ &+ \cos(\gamma/2) \cos((\beta + \delta)/2) |\Psi^+\rangle - i \cos(\gamma/2) \sin((\beta + \delta)/2) |\Psi^-\rangle, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} U^1 |\Psi^-\rangle &= \sin(\gamma/2) \cos((\beta - \delta)/2) |\Phi^+\rangle - i \sin(\gamma/2) \sin((\beta - \delta)/2) |\Phi^-\rangle \\ &- i \cos(\gamma/2) \sin((\beta + \delta)/2) |\Psi^+\rangle + \cos(\gamma/2) \cos((\beta + \delta)/2) |\Psi^-\rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Comparando las ecuaciones (2.18-2.21) con (2.15) y resolviendo para los parámetros γ , β y δ , encontramos que la transformación unitaria es la siguiente

$$U^{1,2} = U^1 \otimes U^2 = H \otimes H, \quad (2.22)$$

con

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Que resulta ser una matriz Hadamard. Finalmente aplicando la transformación anterior y el protocolo de purificación con compuertas no unitarias hemos encontrado una manera eficiente de obtener estados diagonales en la base de Bell, evitando la aplicación de transformaciones adicionales, como las "twirling", que son difíciles de implementar y generan pérdida de entrelazamiento. Es importante mencionar que este método no sólo genera estados diagonales en la base de Bell, sino que además incrementa la fidelidad de los estados iniciales durante el proceso.

En el siguiente capítulo hablaremos de cómo es que este tipo de compuertas cuánticas surgen de manera natural en sistemas de átomos en cavidades, las cuales son útiles en la implementación de los protocolos de purificación de entrelazamiento.

Capítulo 3

Operaciones entrelazadoras con el modelo de dos átomos de Tavis-Cummings no lineal

Las compuertas cuánticas utilizadas en los protocolos de purificación de entrelazamiento pueden ser implementadas a través de modelos de átomos en cavidades. Dichas compuertas son esenciales para llevar a cabo un proceso de purificación exitoso, también pueden implementarse para generar estados que se purifican de manera mucho más eficiente, como fue el caso de la implementación de la compuerta H (Hadamard) en el capítulo anterior, que genera estados diagonales en la base de Bell de manera directa. En este capítulo hablaremos de cómo compuertas como la M , utilizada en el protocolo de compuertas no unitarias [23], surge naturalmente en modelos de átomos de cavidades. Además se encuentra que existe una compuerta adicional a M que resulta ser bastante útil para mejorar la eficiencia de los protocolos de purificación ya mencionados en este trabajo.

La electrodinámica cuántica en cavidades es crucial para la implementación de compuertas cuánticas de qubits atómicos, útiles en información cuántica y protocolos de computación cuántica. En esta parte del trabajo se estudia una versión generalizada del modelo de Tavis-Cummings de dos átomos con una interacción entre el campo y la materia. Se deriva una solución analítica aproximada del vector de estado dada en términos de estados de Bell y estados coherentes del campo. Esta forma ge-

neral y simple de estudio permite estudiar el entrelazamiento en el sistema y generar operaciones de entrelazamiento de dos qubits.

3.1. Generalización del modelo de dos átomos de Tavis-Cummings no lineal

Comencemos con la presentación del Hamiltoniano de una versión generalizada del modelo de Tavis-Cummings que además tiene un acoplamiento no lineal dependiente de la intensidad, cuyos primeros estudios fueron realizados por [27]. Estamos interesados en obtener una solución aproximada general en términos de estados de Bell y estados coherentes del campo. Donde los estados coherentes iniciales se toman con un número promedio de cuantos grande, ya que es conveniente para analizar el entrelazamiento en el sistema.

Consideramos el siguiente Hamiltoniano que describe dos átomos de dos niveles que interactúan resonantemente con un oscilador armónico

$$H = \hbar\omega I + V, \quad I = a^\dagger a + S_z \quad (3.1)$$

el Hamiltoniano libre es representado en términos del operador I que representa el número de excitaciones del sistema. El operador de interacción dependiente de la intensidad viene dado por

$$V = \hbar\Omega (f(a^\dagger a)aS_+ + a^\dagger f(a^\dagger a)S_-). \quad (3.2)$$

Con a y a^\dagger los operadores de creación y aniquilación. La naturaleza del oscilador será especificada dependiendo del modelo en particular, esta podría ser óptica o mecánica. La interacción incluye la función dependiente de la intensidad $f(a^\dagger a)$ dando lugar a una interacción no lineal entre el campo y los átomos. $\hbar\Omega$ representa la energía de acoplamiento entre los estados internos del átomo y los grados de libertad del oscilador.

El problema se trabaja en la siguiente base

$$\begin{aligned} |\varphi^n\rangle &= |\Psi^-\rangle |n\rangle, & |\varphi_{-1}^n\rangle &= |gg\rangle |n+1\rangle, \\ |\varphi_0^n\rangle &= |\Psi^+\rangle |n\rangle, & |\varphi_1^n\rangle &= |ee\rangle |n-1\rangle, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde se han empleado dos de los estados de Bell

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{|ge\rangle \pm |eg\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\Phi^\pm\rangle = \frac{|gg\rangle \pm |ee\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.4)$$

Los estados en (3.3) son estados propios de I con valor propio n que toma valores de -1 a ∞ . La representación matricial de cada bloque con n fija puede ser representada como

$$V^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_n & 0 \\ \Omega_n & 0 & \Omega_{n-1} \\ 0 & \Omega_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

donde Ω_n es dado por la siguiente expresión

$$\Omega_n = \Omega\sqrt{2} \langle n+1 | a^\dagger f(a^\dagger a) | n \rangle. \quad (3.6)$$

El hecho de que una de las frecuencias propias en este bloque de 3×3 sea cero implica la existencia de una familia invariante adicional de estados junto con $|\Psi^-\rangle |n\rangle = |\varphi^n\rangle$. Esta característica se pierde en el caso fuera de la resonancia, donde las transiciones atómicas difieren de la frecuencia del oscilador. En este caso, términos adicionales aparecen en la diagonal de la expresión (3.5).

3.1.1. Vector de estado dependiente del tiempo

Con la finalidad de simplificar los cálculos, se elige trabajar en el marco de interacción con respecto a la energía libre. En particular el vector de estado dependiente del tiempo está dado por

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iI\phi} e^{iI\omega t} |\Psi(t)\rangle_S, \quad (3.7)$$

donde $|\Psi(t)\rangle_S$ es el vector de estado en el marco de Schrödinger, el parámetro real ϕ es la fase del estado inicial del campo que es preparado en un estado coherente arbitrario dado por

$$|\alpha e^{i\phi}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{in\phi} |n\rangle, \quad p_n = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (3.8)$$

Podemos restringir nuestro análisis a valores no negativos de α sin pérdida de generalidad. En esta forma explotamos la conmutatividad de la constante I con la interacción V a fin de simplificar el problema y el número promedio de cuantos es dado por $N = \langle a^\dagger a \rangle = \alpha^2$.

Para el estado inicial del sistema, asumimos un estado producto puro de la forma $|\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle |\alpha\rangle$, donde los dos átomos comienzan en un estado arbitrario puro $|\psi\rangle$, dado por

$$|\psi\rangle = c_- |\Psi^- \rangle + c_+ |\Psi^+ \rangle + d_- |\Phi^- \rangle + d_+ |\Phi^+ \rangle, \quad (3.9)$$

que es una combinación lineal de los cuatro estados de Bell.

La solución a la ecuación de Schrödinger en el marco de interacción definida en (3.7), está dado por $|\Psi(t)\rangle = e^{-iVt/\hbar} |\Psi(0)\rangle$. Por tanto

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-iVt/\hbar} e^{ia^\dagger a \phi} ||\alpha\rangle |\psi\rangle \\ &= e^{-iVt/\hbar} e^{ia^\dagger a \phi} e^{iS_z \phi} ||\alpha\rangle e^{-iS_z \phi} |\psi\rangle \\ &= e^{-iVt/\hbar} e^{i(a^\dagger a + S_z)\phi} ||\alpha\rangle |\psi'\rangle, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde hemos usado que

$$\begin{aligned} e^{ia^\dagger a \phi} ||\alpha\rangle &= e^{ia^\dagger a \phi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} e^{in\phi} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} |n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\alpha| e^{i\phi})^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} |n\rangle = |\alpha\rangle, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\text{y } |\psi'\rangle = e^{-iS_z \phi} |\psi\rangle = e^{-iS_z \phi} (c_- |\Psi^- \rangle + c_+ |\Psi^+ \rangle + d_- |\Phi^- \rangle + d_+ |\Phi^+ \rangle).$$

En la base dada por (3.3) podemos expandir la solución del vector de estado dependiente del tiempo como

$$|\Psi(t)\rangle = c_- |\Psi^-\rangle |\alpha\rangle + \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{l=-1}^{D_n} C_{n,l}(t) |\varphi_l^n\rangle, \quad (3.12)$$

con $D_n = 1 - \delta_{n,0} - 2\delta_{n,-1}$, dado en términos de la delta de Kronecker. Como el problema es exactamente soluble, es posible obtener expresiones exactas analíticas para las amplitudes de probabilidad de (3.12). Donde hemos usado también relaciones de completos en la base de las energías, $\sum_{\nu=0,\pm} |E_m^\nu\rangle \langle E_m^\nu|$, con $e^{-iVt/\hbar} |E_m^\nu\rangle = e^{-iE_m^\nu t} |E_m^\nu\rangle$ y las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \langle E_m^\nu | n, 00 \rangle &= (-1)^{\nu+1} \frac{1}{\sqrt{22^{|\nu|}}} \delta_{m+1,n} & \langle E_m^\nu | n, 11 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{22^{|\nu|}}} \delta_{m-1,n} \\ \langle E_m^\nu | n, \Psi^+ \rangle &= \frac{\nu}{\sqrt{2}} \delta_{|\nu|,1} \delta_{m,n}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para obtener expresiones más sencillas y manejables, recurrimos a tres aproximaciones. La primera de ellas es reemplazar $\Omega_n \rightarrow \Omega_{n-1/2}$ y $\Omega_n \rightarrow \Omega_{n-1/2}$ en la ecuación (3.5), de esta forma los vectores propios de V^n son independientes de n . Siempre que $|\Omega_n - \Omega_{n-1}| \ll \Omega_n$, la parte despreciable puede considerarse como un pequeña perturbación, esto sucede por ejemplo en el caso en el que $\Omega_n \propto n$ o $\Omega_n \propto \sqrt{n}$. Con esta primera aproximación podemos encontrar que las energías diferentes de cero, están dadas por

$$E_{\pm}^{(n)} \simeq \pm \hbar \omega_n, \quad \omega_n = \sqrt{2} |\Omega_{n-1/2}|. \quad (3.14)$$

La segunda aproximación es aplicada a la distribución Poissoniana en los estados coherentes, es decir, $p_{n-1} \simeq p_n \simeq p_{n+1}$, la cual recae en el hecho de tener un número promedio grande de cuantos $N \gg 1$. Usando estas dos aproximaciones, obtenemos la siguiente forma de las amplitudes de probabilidad

$$C_{n,l}(t) = \left[\frac{c_+ - d_+}{2(-1)^l} e^{i\omega_n t} + \frac{d_+ + c_+}{2} e^{-i\omega_n t} - l d_- \right] \frac{p_{n-l}}{\sqrt{2}}, \quad (3.15)$$

con $l \in \{-1, 0, 1\}$.

La tercera aproximación es una expansión de Taylor alrededor del número promedio de fotones N hecha a las frecuencias propias dadas en (3.14), obteniendo

$$\omega_n \simeq \delta_N + \omega'_n, \quad \delta_N = \omega_N - \omega'_N N, \quad (3.16)$$

con $\omega'_n = d\omega_n/dn$.

Finalmente sustituyendo (3.16) en (3.15), uno puede aproximar el vector de estado $|\Psi(t)\rangle \approx |\Psi_{ap}(t)\rangle$ en términos de estados coherentes del campo y estados de Bell

$$|\Psi_{ap}(t)\rangle = [|\zeta\rangle |\alpha\rangle + |\Upsilon(t)\rangle] / \mathcal{N}(t), \quad (3.17)$$

donde $|\zeta\rangle |\alpha\rangle$ es independiente del tiempo, con el siguiente estado atómico estacionario

$$|\zeta\rangle = c_- |\Psi^-\rangle + d_- |\Phi_-\rangle. \quad (3.18)$$

La dependencia temporal está dada en el siguiente estado para los átomos y el oscilador

$$|\Upsilon(t)\rangle = \sum_{\pm} b_{\pm} e^{\mp i(\delta_N + S_z \omega'_N)t} |\phi_{\pm}\rangle |\alpha e^{\mp i\omega'_N t}\rangle, \quad (3.19)$$

que es dada en términos de dos estados coherentes dependientes del tiempo y los siguientes estados del átomo

$$|\phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi^+\rangle \pm |\Phi^+\rangle), \quad b_{\pm} = \frac{c_+ \pm d_+}{\sqrt{2}}. \quad (3.20)$$

La condición de normalización está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(t) &= 1 + 2 \operatorname{Re} [b_+^* b_- e^{i2h(t)}] e^{-2N \sin^2 \omega'_N t} \sin^2 \omega'_N t \\ &\quad - \sqrt{2} \operatorname{Im} [b_+ e^{-ih(t)} + b_- e^{ih(t)}] e^{-2N \sin^2 \omega'_N t/2} \sin \omega'_N t, \end{aligned} \quad (3.21)$$

con $h(t) = \delta_N t + N \sin \omega'_N t$.

El resultado en la ecuación (3.17) es el primer resultado importante, ya que da una expresión general del vector estado para un estado coherente inicial del oscilador y

estados atómicos arbitrarios. Se han encontrado expresiones analíticas similares para el modelo de dos átomos de Tavis-Cummings [26, 28] y para el modelo de Jaynes-Cummings

La aproximación de las frecuencias dada por (3.16) es válida siempre que las contribuciones a la evolución temporal correspondientes a órdenes superiores en la serie de Taylor sigan siendo despreciables. Estas contribuciones tienen la forma $t\omega_N^{(j)(n-N)^2}/j!$ y puede ser despreciado para valores pequeños de t . Sin embargo, a medida que transcurre el tiempo, cada contribución puede llegar a ser importante, ya que $\omega_n t$ es evaluada dentro de una exponencial como $e^{i\omega_n t}$ donde su valor se toma módulo 2π . Esto impone una restricción en el tiempo máximo de interacción $t \ll t_b$, es decir cuando este tiempo de interacción es menor que el tiempo de ruptura t_b , (breakdown), que es obtenido de la siguiente condición

$$\frac{|\omega_N^{(j)}(n-N)^j t_b|}{j!} = 1, \quad \rightarrow \quad t_b = \frac{j!}{(8N)^{j/2} |\omega_N^{(j)}|}, \quad (3.22)$$

donde $\omega_N^{(j)}$ es la primer derivada diferente de cero de orden $j > 1$, además hemos tomado en cuenta la desviación estándar de la distribución Poisson, dada por $\alpha = \sqrt{N}$ y por tanto reemplazamos $|n - N|$ con $\sqrt{8N}$.

Las expresiones obtenidas anteriormente en términos de estados de Bell y estados coherentes del campo nos permiten analizar de una manera más sencilla el entrelazamiento del sistema y sus características, como se verá en las siguientes secciones.

3.2. Escalas de tiempo relevantes

Las escalas de tiempo relevantes pueden encontrarse evaluando los valores esperados de las observables del sistema. Estas cantidades dependen del traslape de los estados coherentes, de la siguiente forma

$$\langle \alpha | \alpha e^{i\omega'_N t} \rangle = e^{iN \sin \omega'_N t} e^{-2N \sin^2 \omega'_N t / 2}. \quad (3.23)$$

Por ejemplo consideremos el valor esperado de S_z con un estado inicial $|ee\rangle |\alpha\rangle$ usando el traslape entre estados coherentes y la solución del vector de estado depen-

diente del tiempo (3.17), uno puede encontrar la siguiente expresión aproximada

$$\langle S_z(t) \rangle \simeq e^{-2N \sin^2 \omega'_N t/2} \cos(\delta_N t + N \sin \omega'_N t). \quad (3.24)$$

De esta expresión es posible identificar tres escalas de tiempo diferentes. La primera es la frecuencia de Rabi ω_N que determina el comportamiento oscilatorio. Estas oscilaciones eventualmente desaparecen y son modeladas por una envolvente Gaussiana, fenómeno conocido como oscilaciones de Rabi. Las oscilaciones reaparecen cuando el argumento de la exponencial en (3.24) desaparece, lo que se conoce como los resurgimientos de las oscilaciones de Rabi. Así tenemos los siguientes tiempos, tiempo de Rabi, tiempo de colapso y tiempo de resurgimiento

$$t_R = 2\pi/\omega_N, \quad t_c = 2/\sqrt{N} |\omega'_N|, \quad t_r = 2\pi/|\omega'_N|. \quad (3.25)$$

3.2.1. Vector de estado a tiempos de resurgimiento fraccionales

El tiempo de resurgimiento que previamente fue introducido, corresponde al momento en el cual todas las componentes del estado del oscilador en la ec.(3.17) regresa a la condición inicial $|\alpha\rangle$. A múltiplos fraccionales del tiempo de resurgimiento el sistema completo logra estados relevantes e interesantes[26, 28, 29]. Por ejemplo el vector de estado en múltiplos impares de un cuarto del tiempo de resurgimiento $t_r/4$, está dado como un estado completamente separable

$$\begin{aligned} |\Upsilon\left(\frac{kt_r}{4}\right)\rangle &= |\zeta_{1,k}\rangle \sum_{\pm} r^{-1} b_{\pm} e^{\mp ik\delta_N t_r/4} |\mp i\alpha\rangle, \\ |\zeta_{1,k}\rangle &= r \frac{|\Psi^+\rangle + i^k |\Phi^-\rangle}{\sqrt{2}}, \quad r = \sqrt{|c_+|^2 + |d_+|^2}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

con k un entero impar. Hemos llegado a este estado usando la ecuación (3.17) y la relación

$$e^{\mp iS_z\pi/2} |\Phi^+\rangle = \pm |\Phi^-\rangle. \quad (3.27)$$

Podemos notar que en el estado de la ecuación (3.26), la materia y el oscilador se

separan y que el estado atómico es independiente de la condición inicial. Para probar que el estado atómico es separable para cualquier valor de k puede utilizarse alguna de las medidas de entrelazamiento, tal como la concurrencia. Esto significa que incluso si los átomos estaban inicialmente entrelazados, no queda entrelazamiento en ninguna de las particiones del sistema tal como átomo-átomo, cualquiera de los átomos con el campo o ambos átomos con el campo. Este fenómeno, sin entrelazamiento en el sistema incluso si inicialmente estaba entrelazado, ha sido referido como “cuenca de atracción” en el modelo de Tavis-Cummings [28]. Es importante notar que esto solo pasa para el parte del estado dependiente del tiempo, $|\Upsilon(t)\rangle$, y por tanto, esta característica aplica solamente cuando las partes estacionarias desaparecen, es decir, ya sea $c_- = d_- = 0$.

A múltiplos impares del tiempo de resurgimiento, la parte dependiente del tiempo está dada por

$$|\Upsilon(\frac{k}{2}t_r)\rangle = |\zeta_{2,k}\rangle |-\alpha\rangle, \quad |\zeta_{2,k}\rangle = c_k |\Psi^+\rangle + d_k |\Phi^+\rangle, \quad (3.28)$$

con k un entero impar y los coeficientes dados por

$$\begin{aligned} c_k &= c_+ \cos \delta_N \frac{k}{2} t_r - i d_+ \sin \delta_N \frac{k}{2} t_r, \\ d_k &= -i^{2k+1} c_+ \sin \delta_N \frac{k}{2} t_r + i^{2k} d_+ \cos \delta_N \frac{k}{2} t_r. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Se tiene de nuevo un producto de estados de átomos y oscilador. Sin embargo, en este caso, la parte atómica podría estar entrelazada. Se puede mostrar que $|\zeta_{2,k}\rangle$ tiene el mismo grado de entrelazamiento que las componentes iniciales $c_+ |\Psi^+\rangle + d_+ |\Phi^+\rangle$. Por esta razón la ecuación (3.28) juega un rol importante para identificar las propiedades de entrelazamiento en el sistema.

3.3. Modelos específicos

Presentamos tres modelos que pueden ser descritos por la interacción Hamiltoniana dada por (3.2). El primero de ellos es el modelo de Tavis-Cummings, posteriormente el modelo de Buck-Sukumar y finalmente el modelo de trampa de iones.

3.3.1. Modelo de Tavis-Cummings de dos átomos

El modelo de Tavis-Cummings describe la interacción de un número arbitrario de átomos de dos niveles interactuando con un solo modo del campo cuantizado electromagnético. Aquí consideramos únicamente el caso de dos átomos, cuya interacción Hamiltoniana es diagonalizable en forma de bloques como en (3.5). En este caso $f(aa^\dagger) = 1$, los elementos de matriz en el bloque del potencial de interacción de (3.5) están dados por $\Omega_n = \sqrt{2n+2}$, las frecuencias propias o frecuencias de Rabi son obtenidas de (3.6) y son $\omega_n = \Omega\sqrt{4n+2}$. Para determinar el vector de estado completo (3.17), ocupamos las expresiones dadas por (3.16), obteniendo

$$\omega'_N = \frac{2\Omega}{\sqrt{4N+2}}, \quad \delta_N = \frac{2N+2}{\sqrt{4N+2}}. \quad (3.30)$$

Las escalas de tiempo relevantes para este modelo están dadas por

$$t_R \approx \frac{2\pi}{\Omega\sqrt{N}}, \quad t_b \approx \frac{\sqrt{N}}{\Omega}, \quad t_r = \frac{2\pi\sqrt{N}}{\Omega}. \quad (3.31)$$

La escala de tiempo más corta corresponde al periodo de las oscilaciones de Rabi t_R , el tiempo de ruptura (breakdown) t_b que es el tiempo en el que la aproximación de estados coherentes se rompe y finalmente el tiempo de resurgimiento de las oscilaciones de Rabi t_r . Como $t_r > t_b$, el resurgimiento de las oscilaciones de Rabi no serán perfectas.

3.3.2. Modelo de Buck-Sukumar

Es un modelo teórico para la interacción de un átomo de dos niveles con un sólo modo del campo electromagnético. En este modelo el acoplamiento del átomo y el campo se asumen no lineales en las variables del campo y puede interpretarse como una interacción dependiente de la intensidad. Sin embargo, una desventaja de este modelo, es que no tiene una implementación física.

Aquí consideramos la interacción de Buck-Sukumar para el caso de dos átomos, donde $f(a^\dagger a) = \sqrt{a^\dagger a}$, lo cual implica una dependencia lineal en n en el bloque de los elementos de matriz de V y sus frecuencias propias, están dadas por $\Omega_n = \Omega\sqrt{2(n+1)}$ y $\omega_n = (2n+1)\Omega$. Las frecuencias relevantes en el vector de estado dependiente del

tiempo están dadas por

$$\omega'_N = 2\Omega, \quad \delta_N = \Omega. \quad (3.32)$$

Las escalas temporales en este caso son dadas por los siguientes parámetros

$$t_R \approx \frac{\pi}{\Omega N}, \quad t_r = \frac{\pi}{\Omega}, \quad t_b = \frac{N^2}{\sqrt{2}N}. \quad (3.33)$$

Es importante notar que aquí el tiempo de ruptura t_b en la que nuestra aproximación de estados coherentes es válida escala como N^2 . EL valor aproximado de las frecuencias propias son lineales con n y por tanto predicen un valor infinito de t_b . Otra característica importante es que el tiempo de resurgimiento t_R es independiente del valor promedio del oscilador N .

3.3.3. Modelo de trampa de iones

El último modelo consiste de dos iones atrapados en un potencial armónico lineal producido por un campo de radiación monocromático clásico. En este caso a y a^\dagger representan los operadores de creación y aniquilación del centro de masa de movimiento de los iones. El Hamiltoniano libre está dado por $H_0 = \hbar\omega S_z + \hbar\nu a^\dagger a$. El acoplamiento con los niveles electrónicos es mediado por el campo monocromático externo cuya frecuencia está sintonizada con la primera banda lateral vibratoria y es dada por $\omega_L = \omega - \nu$. Con estas condiciones la interacción Hamiltoniana es independiente del tiempo en la imagen de interacción y también es descrita por (3.2). Donde la función dependiente de la intensidad está dada por la siguiente expresión

$$f(a^\dagger a) = \eta e^{-\eta^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\eta^2)^m}{m!(m+1)!} a^{\dagger m} a^m. \quad (3.34)$$

En este caso los elementos de matriz diferentes de cero del potencial V están dadas por

$$\Omega_n = \Omega \eta \sqrt{\frac{2}{n+1}} e^{\eta^2/2} L_n^{(1)}(\eta^2). \quad (3.35)$$

Este polinomio claramente muestra un comportamiento no lineal, sin embargo para un valor dado del parámetro de Lamb-Dicke η es posible encontrar un intervalo alrededor de un cierto valor de N que muestre aproximadamente un comportamiento lineal con n . Esta tarea se simplifica expresando los polinomios de Laguerre en términos de las funciones de Bessel, con lo que se obtiene la siguiente expresión, $\Omega_n \simeq \sqrt{2}\Omega J_1(2\eta\sqrt{n+1})$, por tanto las frecuencias propias están dada por

$$\omega_n \simeq 2\Omega \left| J_1 \left(2\eta\sqrt{n+1/2} \right) \right|, \quad (3.36)$$

donde $j_1(\sqrt{x})$ es la función de Bessel de primer tipo y orden uno. Las frecuencias ω_n son graficadas en la figura (3.1) para diferentes valores del parámetro de Lamb-Dicke.

Sea $2\eta\sqrt{n+1/2} = \sqrt{x}$, podemos analizar las frecuencias para valores arbitrarios de η y se puede encontrar un comportamiento aproximadamente lineal en el intervalo $x \in (7,25, 12,65)$. El punto donde la pendiente de $J_1(x)$ cambia de comportamiento se encuentra realizando una expansión en serie de Taylor alrededor de x_0 , donde x_0 es el cero de la función $\frac{d^2 J_1(x)}{dx^2}$. De esta forma uno es capaz de encontrar una relación entre el número promedio de cuantos N y el parámetro de Lamb-Dicke η ,

$$N = \frac{x_0}{4\eta^2} - 1/2, \quad x_0 = 9,95161. \quad (3.37)$$

El valor de x_0 es obtenido usando el método de Newton-Raphson. El valor de N decrece cuando η incrementa. Con la finalidad de ajustar una distribución Poissoniana con desviación estándar \sqrt{N} en el intervalo lineal, se tiene que cumplir la condición $\eta \leq 2,7/\sqrt{32x_0} \approx 0,156905$. Por esta razón, valores grandes del parámetro de Lamb-Dicke no pueden ser usados.

En la figura (3.1) también graficamos la amplitud de probabilidad de cada número de estado en el estado coherente de la ec (3.8) para diferentes valores del número promedio de cuantos N . Es importante notar que para valores pequeños del parámetro de Lamb-Dicke, el número promedio N incrementa y también el número de estados que se encuentran en la parte lineal de la función. La generación de estados coherente con número promedio de cuantos N grande en iones atrapados hoy es día es posible[30, 31, 32] y ofrece una perspectiva interesante para implementar este modelo.

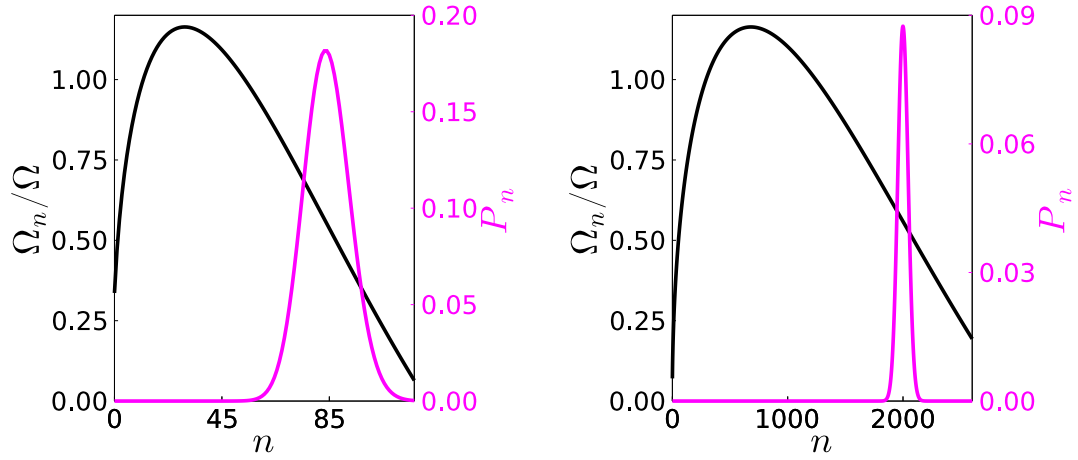


Figura 3.1: Frecuencias propias Ω_n como función del número cuántico n del oscilador para dos valores diferentes del número promedio de fotones y el parámetro de Lamb-Dicke $N = 85$, $\eta = 0,170582$ (izquierda), y $N = 2000$, $\eta = 0,0352653$ (derecha). Un comportamiento aproximadamente lineal puede ser apreciado alrededor de N . En magenta, presentamos la amplitud de probabilidad p_n de un estado de número en un estado coherente $|\alpha\rangle$, con $N = \alpha^2$. En ambos casos, las pequeñas contribuciones de p_n que desaparecen se encuentran fuera del intervalo lineal aparente de Ω_n .

Usando los resultados en las ecuaciones (3.36) y (3.37) uno puede obtener las frecuencias relevantes para el vector de estado (3.17) como

$$\begin{aligned} \omega_N &= 2\Omega J_1(\sqrt{x_0}) \approx 0,558924\Omega, \\ \omega'_N &= \frac{\Omega\sqrt{x_0}}{2N+1} (J_0(\sqrt{x_0}) - J_2(\sqrt{x_0})) \approx -\frac{2,50163\Omega}{2N+1}, \\ \delta_N &= \omega_N - N\omega'_N \approx \left(0,558924 + \frac{2,50163N}{2N+1}\right) \Omega. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Es importante notar que estas cantidades están dadas en términos del valor óptimo de N , por tanto, dependen de manera indirecta de η . En este caso las escalas de tiempo relevantes están dadas por

$$t_R \approx \frac{2\pi}{0,56\Omega}, \quad t_r \approx \pi \frac{4N+2}{2,5\omega}, \quad t_b \approx \frac{N^{3/2}}{10\Omega}. \quad (3.39)$$

En este modelo, el periodo de las oscilaciones de Rabi es independiente del número promedio de fonones N . El tiempo de rompimiento t_b de la aproximación de estado

coherente se asemeja al tiempo de resurgimiento como $t_b \approx \sqrt{N}/50$. Por tanto con la finalidad de tener una descripción verdadera, uno tiene, en principio que conseguir un número promedio de fotones grande. Por ejemplo, para una descripción precisa hasta un tiempo de interacción $t_r/2$ uno requiere valores de $N > 625$.

Modelo	Ωt_R	Ωt_c	Ωt_r	Ωt_b
Tavis-Cummings	$2\pi/\sqrt{N}$	2	$2\pi\sqrt{N}$	\sqrt{N}
Buck-Sukumar	π/N	$1/\sqrt{N}$	π	$N^2/\sqrt{2}$
ion-trap	11,2	$1,6\sqrt{N}$	$5N$	$0,1N^{3/2}$

Cuadro 3.1: Escalas de tiempo relevantes para los tres modelos en términos del número promedio de fotones N : Periodo de las oscilaciones de Rabi, tiempo de colapso, tiempo de resurgimiento y tiempo de rompimiento de la aproximación del estado coherente.

En la tabla 3.1, presentamos un resumen de la dependencia en N en diferentes tiempos para los tres modelos presentados.

3.4. Características dinámicas

En esta parte del trabajo presentamos los resultados y la comparación de los cálculos numéricos de las características dinámicas de los tres modelos específicos introducidos en la sección anterior. Nos enfocamos en el colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi y probamos nuestro resultado analítico con los cálculos numéricos exactos que son evaluados usando la forma exacta del vector de estado en la ecuación (3.12).

3.4.1. Oscilaciones de Rabi y representación del espacio fase

Las escalas de tiempo relevantes pueden ser obtenidas al evaluar los valores esperados de las observables del sistema. En este trabajo hemos decidido evaluar el valor medio de S_z , el cual puede ser analíticamente evaluado de nuestra expresión aproximada en (3.17) con el resultado dado en (3.24).

En la figura (3.2) se grafica el resultado numérico exacto de $\langle S_z(t) \rangle$ para los diferentes modelos con un estado atómico inicial $|ee\rangle$ y un número promedio de fotones

$N = 85$ y $N = 2000$. Las curvas negra, cian y magenta corresponden respectivamente al modelo de Tavis-Cummings, Buck-Sukumar y trampa de iones. Presentamos las oscilaciones de Rabi cercanas a $t = 0$ (columna izquierda) y alrededor de t_r (columna derecha). La primera característica evidente es que para los tres modelos el colapso de las oscilaciones de Rabi ocurre en la misma fracción del tiempo de resurgimiento t_r , es decir, la envolvente Gaussiana es la misma en términos del tiempo adimensional t/t_r .

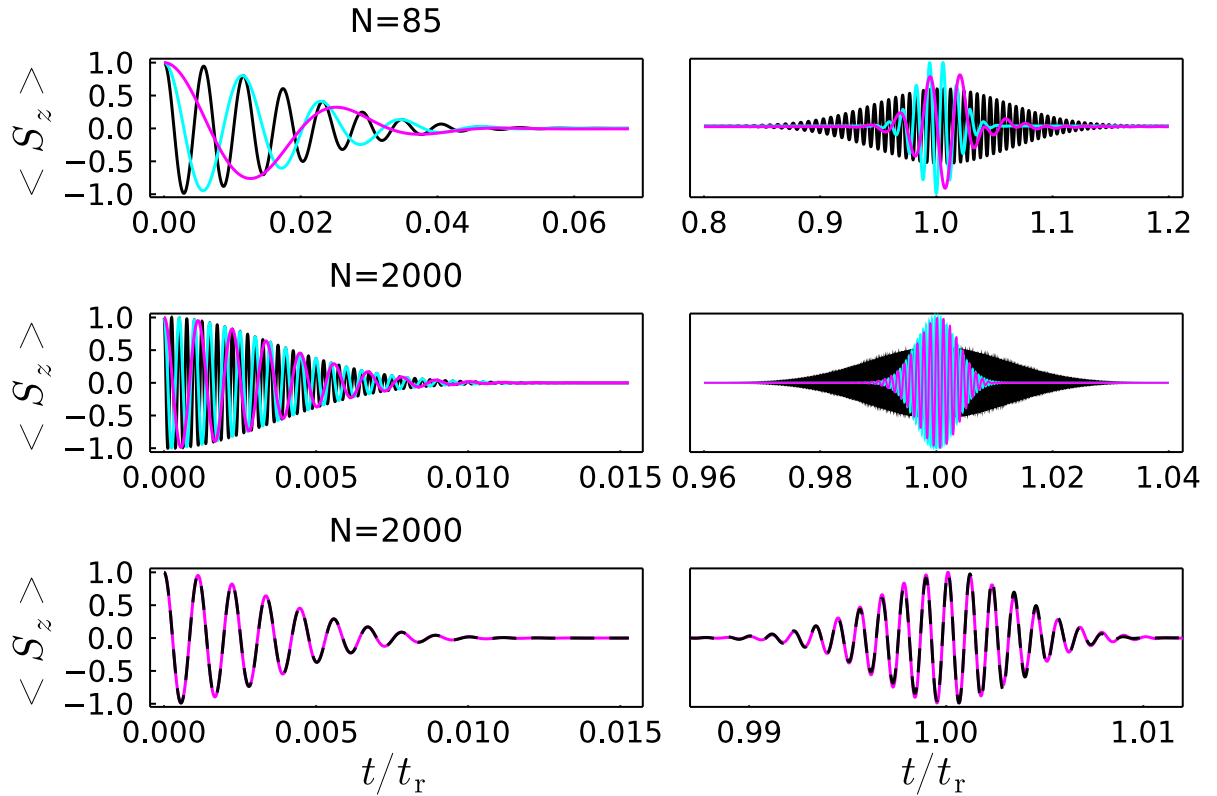


Figura 3.2: Valor esperado del operador S_z para dos diferentes valores del número promedio de cuantos $N = 85$ (gráficas de arriba) y $N = 2000$ (gráficas de en medio). En la columna izquierda, las oscilaciones de Rabi y sus colapsos son presentados. En la columna derecha el primer resurgimiento de las oscilaciones de Rabi son mostrados alrededor del tiempo t_r . Las curvas negra, cian y magenta corresponden respectivamente a los modelos de Tavis-Cummings, Buck-Sukumar y trampa de iones. En la línea de gráficas presentamos una comparación entre la predicción analítica en la ecuación (3.24) (curva punteada) y el cálculo exacto numérico (línea continua) usando las condiciones del modelo de trampa de iones y con $N = 2000$.

Para la reaparición de las oscilaciones de Rabi alrededor de t_r , solo el modelo de Tavis-Cummings presenta un ensanchamiento de la región oscilatoria. El modelo de Buck-Sukumar presenta resurgimientos perfectos para los dos valores de N . En el caso del modelo de trampa de iones no presenta una mejora aparente, sin embargo, para $N = 85$ las oscilaciones muestran asimetrías y los resurgimientos se muestran perfectos para este modelo con $N = 2000$.

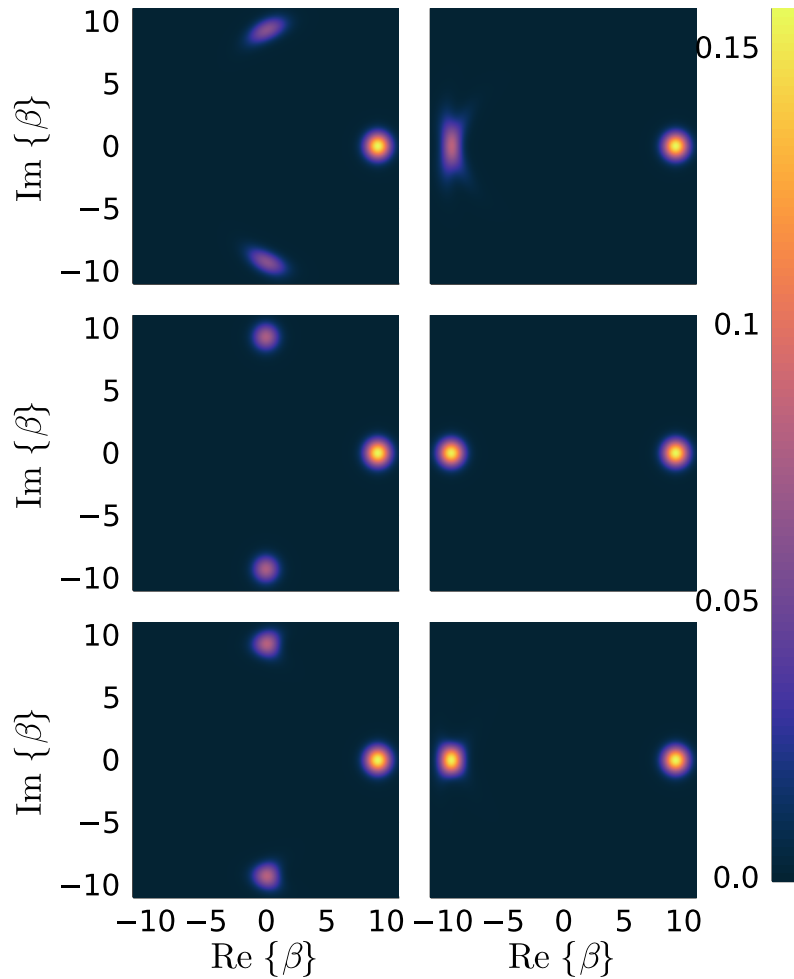


Figura 3.3: Función de Husimi de la matriz de densidad reducida para el oscilador en un estado coherente inicial $|\alpha\rangle$ y para tiempo de interacción $t = t_r/4$ (columna izquierda) y $t = t_r/2$ (columna derecha). Los resultados corresponden al modelo de Tavis-Cummings, Buck-Sukumar y trampa de iones para la primera, segunda y tercera fila respectivamente.

El colapso y resurgimiento de las oscilaciones de Rabi puede ser aclarado mediante la visualización del estado del oscilador en el espacio fase con la ayuda de alguna distribución de cuasiprobabilidad. En este trabajo utilizamos la función de Husimi que puede ser considerada como el valor esperado de la matriz de densidad reducida del oscilador ρ_{os} con respecto al estado coherente $|\beta\rangle$,

$$\begin{aligned} Q(\beta) &= \langle \beta | \rho_{os}(t) | \beta \rangle / \pi, \\ \rho_{os} &= \text{Tr}_{at} \{ |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)| \}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Hemos usado la notación Tr_{at} para la traza parcial con respecto a los grados de libertad electrónicos atómicos y hemos considerado β como un parámetro complejo.

En la figura 3.3 hemos graficado la función de Husimi $Q(\beta)$ para los tres modelos descritos anteriormente en dos tiempos de interacción diferentes, $t_r/4$ y $t_r/2$. Como usamos dos átomos excitados como estado inicial y un estado coherente para el oscilador con $\alpha = \sqrt{85}$. Como se puede observar el estado inicial $|\alpha\rangle$ permanece como una componente estacionaria en todo el tiempo.

Podemos notar que las componentes temporales del campo del modelo de Tavis-Cummings (gráfica de arriba) sufre una distorsión en el tiempo $t_r/4$ y esta característica es mucho más notoria para el tiempo $t_r/2$. En contraste todas las componentes del modelo de Buck-Sukumar (gráfica de en medio) mantiene su forma, lo cual es una evidencia de su evolución en estados coherentes. Finalmente en el caso del modelo de trampa de iones, las componentes del campo siguen la misma trayectoria y su forma se distorsiona ligeramente. Este comportamiento nos indica que la aproximación en estados coherentes es bastante buena, incluso con $N = 85$.

3.4.2. Fidelidad del vector de estado aproximado

Pongamos ahora la atención en el análisis numérico para la validez de nuestro cálculo analítico. Para verificar la aproximación de la Ec.(3.17) consideramos la fidelidad entre el vector de estado exacto $|\Psi(t)\rangle$ y su aproximación $|\Psi_{ap}(t)\rangle$ como función del tiempo, esto es

$$F(t) = | \langle \Psi_{ap}(t) | \Psi(t) \rangle |^2 / \mathcal{N}. \quad (3.41)$$

La normalización \mathcal{N} de $|\Psi_{\text{ap}}(t)\rangle$ está dada por (3.21).

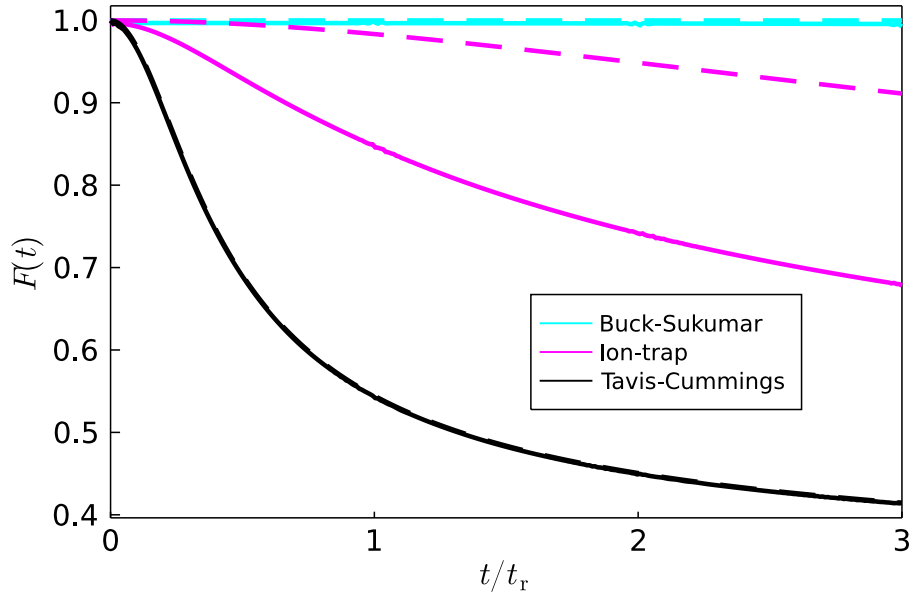


Figura 3.4: Fidelidad promedio como una función del tiempo del vector de estado aproximado en la Ec (3.17) con respecto al vector de estado numérico para dos valores del número promedio de cuantos: la línea continua corresponde a $N = 85$ y la línea punteada $N = 2000$. El promedio ha sido realizado sobre 1000 condiciones iniciales aleatorias.

En la figura (3.4) graficamos la fidelidad $F(t)$ promediada sobre 1000 condiciones iniciales aleatorias distribuidas uniformemente de acuerdo a la correspondiente medida de Haar. Para los tres casos hemos elegidos dos valores diferentes del número de cuantos, $N = 85$ presentada en línea continua y $N = 2000$ en línea punteada. Para el modelo de Tavis-Cummings (curva negra) la fidelidad cae mucho antes del primer resurgimiento. En el caso del modelo de Buck-Sukumar (curva cian) muestra una muy buena fidelidad para el intervalo de tiempo completo. Finalmente para el modelo de trampa de iones (curva magenta) la fidelidad se mantiene arriba de 0,9 para $N = 85$ y mejora significativamente para $N = 2000$.

En el contexto de las tareas de computación e información cuántica con qubits atómico, el oscilador puede ser considerado como un grado de libertad auxiliar. En tal situación, el estado de los modos no juega un rol importante y uno podría restringir su atención únicamente a los estados atómicos. Por lo tanto el estado más importante

a probar es la matriz de densidad reducida de los átomos cuya fidelidad con respecto al estado reducido exacto puede ser evaluado como

$$F_{\text{at}} = \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_{\text{at}}(t)} \rho_{\text{at}}^{\text{ap}}(t) \sqrt{\rho_{\text{at}}(t)}} \right)^2. \quad (3.42)$$

Las matrices de densidad atómicas reducidas son tomadas del vector de estado total aproximado y exacto como $\rho_{\text{at}}^{\text{ap}} = \text{Tr}_{\text{osc}} |\Psi_{\text{ap}}(t)\rangle \langle \Psi_{\text{ap}}(t)|$ y de manera similar para $\rho_{\text{ap}} = \text{Tr}_{\text{osc}} |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$. En la figura 3.5 graficamos la fidelidad atómica $F_{\text{at}}(t)$ como una función del tiempo y promediamos sobre 1000 condiciones iniciales aleatorias. Notemos que la fidelidad es extremadamente buena para todos los modelos, incluyendo el modelo de Tavis-Cummings, para tiempos donde las componentes del campo se separan, es decir, para tiempos diferentes a t_r y $t_r/2$. Alrededor de estos tiempos, el modelo de Tavis-Cummings no logra una buena fidelidad, sin embargo, el modelo de Buck-Sukumar muestra una buena fidelidad para cualquier valor de N , en el caso del modelo de la trampa de iones, la fidelidad incrementa con N . Este resultado también corrobora que la aproximación de estados coherentes describe con precisión el modelo de Buck-Sukumar y el modelo de trampa de iones para valores de N grandes. En el caso del modelo de Tavis-Cummings aunque la aproximación de estados coherentes falla para describir el estado completo, el estado atómico es bien descrito para tiempos que no están cerca del tiempo de resurgimiento y a la mitad de este.

3.5. Análisis del entrelazamiento

El entrelazamiento es una característica importante del sistema en el contexto de la información y computación cuántica, especialmente el entrelazamiento atómico cuando los átomos son considerados como qubits. Como el sistema es exactamente soluble, uno podría, en principio, calcular en forma cerrada ciertas medidas de entrelazamiento para cualquier sistema bipartita. Sin embargo las expresiones resultantes muy probablemente serán complicadas y difíciles de analizar. En este trabajo tomamos ventaja de nuestra aproximación con la finalidad de evaluar expresiones analíticas simples para cualquier condición inicial en un tiempo específico. Para ello

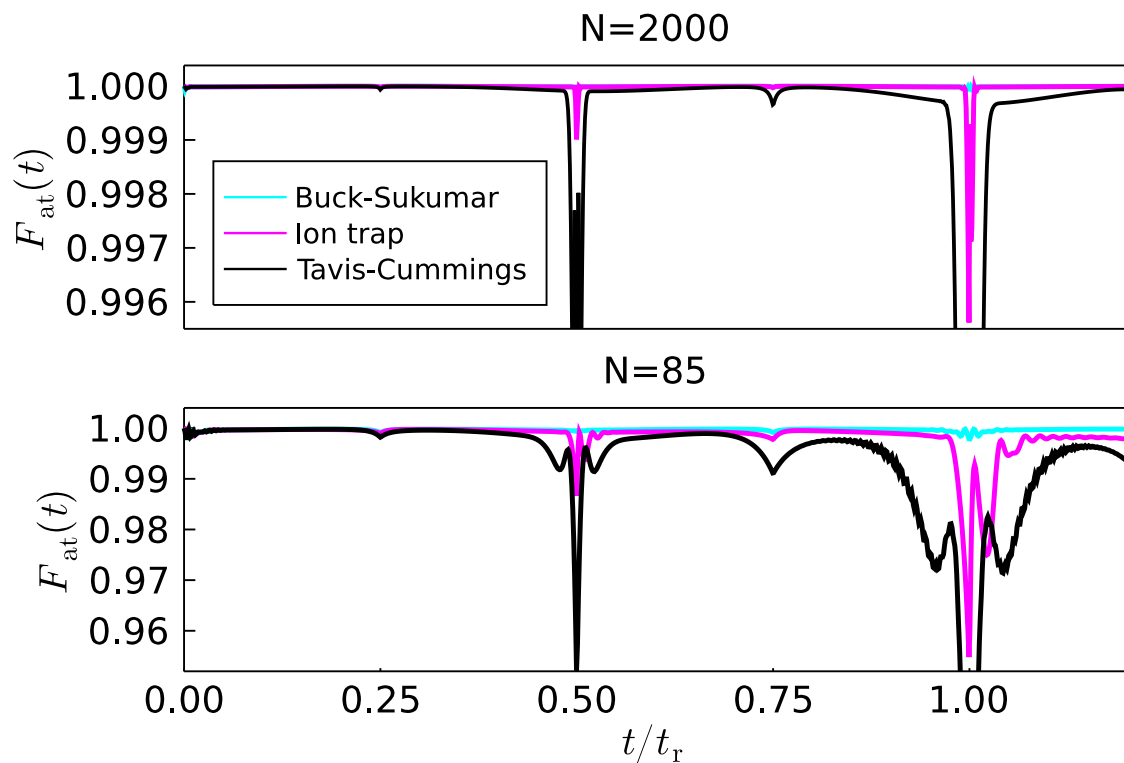


Figura 3.5: Fidelidad promedio como una función del tiempo del vector de estado aproximado en la Ec (3.17) con respecto al vector de estado numérico para dos valores del número promedio de cuantos: la línea continua corresponde a $N = 85$ y la línea punteada $N = 2000$. El promedio ha sido realizado sobre 1000 condiciones iniciales aleatorias.

estudiaremos la matriz de densidad reducida para el sistemas de dos-qubits dada por $\rho_{\text{at}}(t) = \text{Tr}_{\text{osc}} |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$. Además concentramos nuestra atención a tiempos específicos de interacción dados por $jk t_r/4$, con k múltiplos impares de un cuarto del tiempo de resurgimiento ($j = 1$) y medio tiempo de resurgimiento ($j = 2$). En estos tiempo la matriz de densidad tiene la siguiente forma simple

$$\rho_{\text{at}} \left(\frac{jk}{4} t_r \right) = |\zeta\rangle \langle \zeta| + |\zeta_{j,k}\rangle \langle \zeta_{j,k}| \quad (3.43)$$

con k entero positivo impar. Para $j = 1$ se tiene que usar el estado de la ecuación (3.26) y el estado en la ecuación (3.28) para $j = 2$. El ket $|\zeta\rangle$ es el estado atómico estacionario en la ecuación (3.17). Usando ρ_{at} es posible evaluar el entrelazamiento entre los átomos y el entrelazamiento entre los átomos y el oscilador.

3.5.1. Entrelazamiento de dos átomos

Entendemos a la concurrencia como una medida de entrelazamiento entre los átomos. Para un estado general d dos qubits ρ esta es definida como

$$C(\rho) = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4), \quad (3.44)$$

donde las cuatro λ_i son las raíces cuadradas de los valores propios del operador no Hermitiano positivo $\rho\tilde{\rho}$ en orden decreciente. Donde $\tilde{\rho} = \sigma_y^{\otimes 2} \rho^* \sigma_y^{\otimes 2}$ con ρ^* es el complejo conjugado de ρ en la base computacional y σ_y el operador de Pauli. Con esto es fácil calcular que la concurrencia para el estado dado por (3.9) está dada por

$$C(|\Psi\rangle) = |c_-^2 - d_-^2 - c_+^2 + d_+^2|. \quad (3.45)$$

Habiendo introducido la medida de entrelazamiento y su forma inicial, es apropiado evaluar esta cantidad para el estado mixto de los átomos después de la interacción con el modo. En los múltiplos impares de los cuartos del tiempo de resurgimiento, la expresión para la concurrencia puede ser evaluada en una forma cerrada usando usando las ecuaciones (3.43) y (3.44). Uno puede encontrar que los dos valores diferentes de cero de λ_i están dados por $\left(\sqrt{|c_-^2 - d_-^2|^2 + 2|d_r|^2} \pm |c_-^2 - d_-^2| \right) / 2$. Por

tanto la concurrencia se reduce a la expresión simple

$$C\left(\rho_{\text{at}}\left(\frac{k}{4}t_r\right)\right) = \left|\langle\zeta|\tilde{\zeta}\rangle\right| = |c_-^2 - d_-^2| \quad (3.46)$$

Este resultado nos muestra que el entrelazamiento atómico en este punto tiene contribución sólo de la parte estacionaria del vector de estado.

A la mitad del tiempo de resurgimiento, la matriz de densidad de los átomos está dada por un operador de rango dos, donde sus constituyentes cumplen con $\langle\zeta|\zeta_{2,k}\rangle = \langle\zeta|\tilde{\zeta}_{2,k}\rangle = 0$. Esta característica nos permite calcular de manera simple la concurrencia

$$\begin{aligned} C\left(\rho_{\text{at}}\left(\frac{k}{2}t_r\right)\right) &= \left|\left|\langle\zeta|\zeta_{2,k}\rangle\right| - \left|\langle\zeta|\tilde{\zeta}_{2,k}\rangle\right|\right| \\ &= \left||c_-^2 - d_-^2| - |d_+^2 - c_+^2|\right| \\ &\leq C(|\psi\rangle), \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde hemos usado $c_{k,\phi}^2 - d_{k,\phi}^2 = d_\phi^+ - c_+$. La última desigualdad se sigue de la desigualdad del triángulo inversa e indica que el entrelazamiento de múltiples pares del medio tiempo de resurgimiento no puede ser mayor que el entrelazamiento inicial. En la figura (3.6) hemos graficado la concurrencia promediada 1000 condiciones aleatorias iniciales. La predicción analítica es indicada con un punto rojo y muestra una predicción precisa al cálculo numérico. En todos los valores del tiempo notamos que hay un punto crítico en el comportamiento; en este caso todos ellos son máximos. Este comportamiento puede cambiar, sin embargo, dependiendo de las amplitudes de probabilidad iniciales.

3.5.2. Entrelazamiento entre el átomo y el oscilador

Con la finalidad de medir el entrelazamiento entre ambos átomos y el oscilador uno puede usar la pureza de cualquiera de las dos matrices de densidad. Como ya ha sido evaluado en el caso del sistema atómico en la ecuación (3.43), la usaremos para evaluar la pureza del estado atómico reducido como

$$P(t) = \text{Tr}\{\rho_{\text{at}}^2(t)\}. \quad (3.48)$$

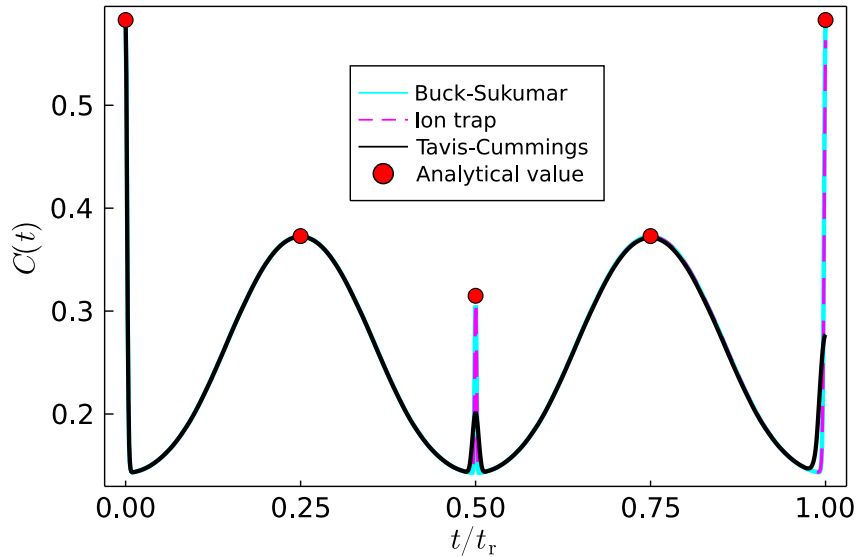


Figura 3.6: Concurrencia promedio como una función del tiempo para los tres modelos como se indican en las etiquetas para $N = 2000$, el promedio fue tomado sobre 1000 condiciones aleatorias iniciales. Los puntos rojos indican el valor analítico promedio evaluados en los tiempos fijos dados en las ecuaciones (3.46) y (3.47)

Si la pureza toma el valor de uno corresponde a un estado puro reducido y por tanto no hay entrelazamiento entre los átomos y el oscilador. El valor mínimo de la pureza es $1/4$ y corresponde a un estado mixto máximo de los átomos y el entrelazamiento máximo correspondiente en la bipartición oscilador-átomos.

Usando la ecuación (3.43), podemos calcular la pureza atómica, para múltiplos impares de un cuarto del tiempo de resurgimiento, dando como resultado lo siguiente

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{kt_t}{4}\right) &= p^2 + (1-p)(1-|c_-|^2). \\
 p &= |c_-|^2 + |d_-|^2.
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

En el caso de múltiplos impares de la mitad del tiempo de resurgimiento, uno llega al siguiente resultado

$$P\left(\frac{kt_t}{2}\right) = p^2 + (1-p)^2 \leq P\left(\frac{kt_t}{4}\right).
 \tag{3.50}$$

Es importante notar que el entrelazamiento entre los modos y los átomos en múltiplos impares de $t_r/4$ y $t_r/2$ depende completamente de las probabilidades iniciales de los estados $|\Psi^-\rangle$ y $|\Phi^-\rangle$. Si inicialmente ninguno de estos estados está poblado, la puresa de la matriz de densidad reducida atómica es uno y por tanto no se presenta entrelazamiento en la partición átomo-oscilador en estos tiempos específicos.

3.6. Operaciones entrelazadoras

En esta sección introduciremos las operaciones entrelazadoras que pueden ser implementadas con el sistema antes mencionado y que puede ser usada en protocolos de información cuántica. Los resultados recaen en la solución aproximada del vector de estado de la ecuación (3.17) para un tiempo de interacción $t_r/2$, donde la parte dependiente del tiempo toma la forma simple de la ecuación (3.28). Puesto que estamos interesados en este tiempo de interacción, es conveniente introducir la siguiente forma corta del operador de evolución que será utilizado en esta sección

$$U = e^{-iVt_r/2\hbar}, \quad \theta = \delta_N t_r/2. \quad (3.51)$$

Algunas de las operaciones de dos qubits no serán unitarias, sin embargo estas pueden ser importantes en tareas de información cuántica. Por ejemplo, se ha mostrado que una de ellas puede reemplazar la compuerta CNOT en protocolos de purificación de entrelazamiento de recurrencia [23, 26].

3.6.1. Operaciones de dos qubits

Consideremos un esquema para implementar operaciones cuánticas basadas en proyectores de estados de Bell. Inspeccionando las ecuaciones (3.17) y (3.28) uno puede reescribir la solución aproximada del vector de estado al tiempo $t_r/2$ en la siguiente forma conveniente

$$U |\psi\rangle |\alpha\rangle \simeq (c_- |\Psi^-\rangle + d_- |\Phi^-\rangle) |\alpha\rangle + (c_+ |\Psi_\theta\rangle + d_+ |\Phi_\theta\rangle) |-\alpha\rangle, \quad (3.52)$$

con los siguientes estados máximamente entrelazados y ortogonales

$$\begin{aligned} |\Psi_\theta\rangle &= \cos\theta |\Psi^+\rangle + i \sin\theta |\Phi^+\rangle, \\ |\Phi_\theta\rangle &= -i \sin\theta |\Psi^+\rangle - \cos\theta |\Phi^+\rangle. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Los coeficientes c_1 y d_1 en la ecuación (3.29) representan respectivamente las amplitudes de probabilidad inicial de estos dos estados. Es importante notar que al medir el estado del oscilador $|\alpha\rangle$ o $|\alpha\rangle$ selecciona posteriormente a los átomos en un estado que depende de los parámetros del sistema y no meramente del estado atómico inicial. Esto puede evitarse aplicando inicialmente una compuerta cuántica que transforme los estados de Bell simétricamente. Para este propósito introducimos la siguiente compuerta unitaria

$$G_\theta = |\Psi_\theta\rangle |\Psi^+\rangle - |\Phi_\theta\rangle |\Phi^+\rangle + |\Psi^-\rangle |\Psi^-\rangle + |\Phi^-\rangle |\Phi^-\rangle. \quad (3.54)$$

Es importante resaltar que el signo menos es crucial, ya que de esta forma la compuerta cuántica requerida es separable y puede ser expresada en términos de compuertas separable (de un solo átomo), como

$$G_\theta = g_\theta \otimes g_\theta, \quad g_\theta = \cos\frac{\theta}{2} \mathbb{I} + i \sin\frac{\theta}{2} \sigma_x. \quad (3.55)$$

Usando esta compuerta antes de la interacción, uno puede obtener los estados a la mitad del tiempo de resurgimiento dados por

$$\begin{aligned} UG_\theta |\psi\rangle |\alpha\rangle &\simeq (c_- |\Psi^-\rangle + d_- |\Phi^-\rangle) |\alpha\rangle \\ &+ (c_+ |\Psi^+\rangle - d_+ |\Phi^+\rangle) |\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Con este resultado, midiendo el estado del oscilador en $|\alpha\rangle$ o $|\alpha\rangle$ corresponde respectivamente a las siguientes operaciones cuánticas

$$\begin{aligned} M &= |\Psi^-\rangle \langle \Psi^-| + |\Phi^-\rangle \langle \Phi^-|, \\ L &= |\Psi^+\rangle \langle \Psi^+| - |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|. \end{aligned} \quad (3.57)$$

La compuerta M ya ha sido utilizada en lugar de la compuerta CNOT en protocolos

de purificación [26]. La operación L también puede ser considerada en una configuración de este tipo con la finalidad de mejorar la eficiencia de estos protocolos de purificación de entrelazamiento.

Es importante comentar que para la medición del campo fotónico una proyección sobre los estados coherentes no es estrictamente necesaria. Una proyección sobre los estados propios de la posición o una suma ponderada de estados propios de posición cercanos al estado coherente conducirían a la misma postselección atómica. En el caso de la trampa de iones, uno podría requerir la medición de un modo de oscilación de los iones, tal como el movimiento del centro de masa. Una desventaja en este caso es que una medición de la posición del ion destruye su estado interno. Para solucionar este problema, uno podría incluir iones auxiliares en la cadena que no deberían estar en contacto con el láser que genera la interacción con el movimiento del centro de masa. Al final de la interacción, los iones auxiliares podrían ser redirigidos individualmente [33, 34, 35] con otros láseres a fin de medir su posición mediante su fluorescencia.

Se ha presentado un estudio analítico teórico de un modelo de Tavis-Cummings no lineal de dos átomos con una interacción dependiente de la intensidad. La resolución exacta del modelo ha sido mostrada identificando las dos constantes de movimiento. Introduciendo una imagen de interacción conveniente hemos sido capaces de resolver el problema dependiente del tiempo para estados coherentes arbitrarios iniciales. Además considerando un número promedio grande de cuantos en el oscilador, hemos derivado una expresión aproximada analítica dada en términos de estado atómicos de Bell y estados coherentes del oscilador que han sido probados numéricamente usando su fidelidad con respecto a la expresión exacta. Se probó que la solución aproximada del vector de estado dependiente del tiempo es muy útil en el análisis de las características dinámicas, más específicamente, en el entrelazamiento del sistema. El resultado más importante es que, con la forma aproximada del vector de estado es posible introducir operaciones entrelazadoras de dos qubits útiles en los protocolos de purificación.

Capítulo 4

Purificación de entrelazamiento incluyendo estados mixtos con entrelazamiento máximo

4.1. Proceso de purificación en una iteración

Como se observó en el capítulo anterior es posible obtener diversas compuertas cuánticas derivadas de los modelos de átomos en cavidades. En esta parte del trabajo consideramos una modificación del protocolo de purificación introducido en [23], el cual está basado en la operación cuántica de dos qubits M_{\pm} . En este caso utilizaremos las siguientes dos operaciones

$$M_{\pm} = |\Psi^{\pm}\rangle \langle \Psi^{\pm}| \pm |\Phi^{\pm}\rangle \langle \Phi^{\pm}|, \quad (4.1)$$

donde $|\Psi^{\pm}\rangle, |\Phi^{\pm}\rangle$ son los estados de Bell. Donde M_{+} es la compuerta cuántica obtenida en el capítulo anterior.

Cada iteración del protocolo de purificación puede ser resumida en tres partes, como sigue: (I) Una operación cuántica M_{\pm} es aplicada bilateralmente en cada laboratorio, transformando los cuatro qubits iniciales ρ en el estado

$$\rho^{\pm} = \Pi_{\pm} \rho \Pi_{\pm}^{\dagger}, \quad \Pi_{\pm} = M_{\pm}^{A_1, A_2} M_{\pm}^{B_1, B_2}. \quad (4.2)$$

Como la operación cuántica Π_{\pm} no es unitaria, ρ^{\pm} en general no está normalizada, una forma de implementar la compuerta M_{\pm} fue introducida en el capítulo anterior. (II) Los qubits A_2 y B_2 son medidos en la base computacional y descartados con la finalidad de obtener los qubits A_1 y B_1 en el estado

$$\tilde{\rho}^{\pm A_1, B_1} = q_{\pm}^{-1} \text{Tr}_{A_2, B_2} \left\{ \rho^{\pm} |jk\rangle \langle jk|^{A_1, B_1} \right\}, \quad (4.3)$$

donde $|jk\rangle^{A_2, B_2} \equiv |j\rangle^{A_2} |k\rangle^{B_2}$ con $j, k \in \{0, 1\}$ y donde hemos considerado la normalización del estado dada por

$$q_{\pm} = \text{Tr}_{A_2, B_2} \left\{ \Pi_{\pm} \rho \Pi_{\pm}^{\dagger} |jk\rangle \langle jk|^{A_1, B_1} \right\}. \quad (4.4)$$

Este factor de normalización es la probabilidad de éxito de que la implementación de Π_{\pm} y las mediciones de A_2 y B_2 se lleven a cabo. (III) Finalmente, y dependiendo del resultado de la medición, las compuertas de un sólo qubit son aplicadas a A_1 y B_1 en la siguiente forma

$$\rho^{\pm A_1, B_1} = (V_j^{A_1} V_{k+1}^{B_1}) \tilde{\rho}^{\pm A_1, B_1} (V_j^{A_1} V_{k+1}^{B_1})^{\dagger}, \quad (4.5)$$

con la compuerta de un solo qubit $V_j = |1\rangle \langle j \oplus 1| + i |0\rangle \langle j|$ expresada en términos de \oplus que denota la suma módulo 2. Este último tercer paso no afecta el entrelazamiento.

Después de estos tres pasos y dependiendo de qué tipo de compuertas M_{\pm} haya sido usada, uno puede obtener los elementos de matriz ρ^{\pm} describiendo solo a los qubits A_1 y B_1 , los cuales están dados por

$$\begin{aligned} \rho_{11}^{\pm} &= \frac{\rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 \pm \rho_{12}^2 \pm \rho_{21}^2}{2q_{\pm}}, & \rho_{22}^{\pm} &= \frac{\rho_{33}\rho_{44} \pm |\rho_{34}|^2}{q_{\pm}}, \\ \rho_{44}^{\pm} &= \frac{\rho_{33}^2 + \rho_{44}^2 \pm \rho_{34}^2 \pm \rho_{43}^2}{2q_{\pm}}, & \rho_{33}^{\pm} &= \frac{\rho_{11}\rho_{22} \pm |\rho_{12}|^2}{q_{\pm}}, \\ \rho_{14}^{\pm} &= \frac{\rho_{14}^2 + \rho_{23}^2 \pm \rho_{13}^2 \pm \rho_{24}^2}{2q_{\pm}}, & \rho_{23}^{\pm} &= \frac{\rho_{23}^* \rho_{14}^* \pm \rho_{13}^* \rho_{24}^*}{q_{\pm}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Junto con sus elementos transpuestos que pueden ser obtenidos con $\rho_{41}^{\pm} = (\rho_{14}^{\pm})^*$. Cuando la compuerta M_- es aplicada el sistema de dos qubits cae en un estado X , donde $\rho_{12}^- = \rho_{13}^- = \rho_{41}^- = \rho_{42}^- = 0$. En el caso de la compuerta M_+ , uno encuentra los

siguientes elementos diferentes de cero

$$\begin{aligned}\rho_{12}^+ &= \frac{\rho_{13}\rho_{14} + \rho_{23}\rho_{24}}{iq_{\pm}}, & \rho_{13}^+ &= \frac{\rho_{11}\rho_{12} + \rho_{22}\rho_{21}}{iq_{\pm}}, \\ \rho_{42}^+ &= \frac{\rho_{44}\rho_{43} + \rho_{33}\rho_{34}}{iq_{\pm}}, & \rho_{43}^+ &= \frac{\rho_{31}\rho_{32} + \rho_{41}\rho_{42}}{iq_{\pm}}.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Notemos que si ρ ya está en un estado X entonces todas las contribuciones en Eq. (4.7) desaparecen y los elementos en Eq. (4.9) son iguales en ambos casos (\pm). La probabilidad de éxito puede ser evaluada para el caso general y está dada por

$$q_{\pm}(\rho) = \frac{(\rho_{11} + \rho_{22})^2 + (\rho_{33} + \rho_{44})^2}{2} \pm 2\text{Re}[\rho_{12}]^2 \pm 2\text{Re}[\rho_{34}]^2. \quad (4.8)$$

Note que $q_- + q_+ < 1$, esto es debido al hecho que todavía hay dos eventos faltantes del proceso, que vienen dadas cuando M_{\mp} es aplicada en laboratorio A o en el laboratorio B . En este caso uno obtiene una matriz completamente llena, con muchos elementos diferentes y no susceptible de ser purificada.

4.1.1. Iteraciones posteriores y probabilidad total de éxito

Después de una primera iteración con la compuerta M_- , los estados se convierten en estados X , por tanto de la ecuación (4.9) uno puede notar que es posible usar ambas compuertas M_{\pm} , donde los elementos diferentes de cero estarán dados por

$$\begin{aligned}\rho''_{11} &= \frac{\rho'^2_{11} + \rho'^2_{22}}{p(\rho')}, & \rho''_{44} &= \frac{\rho'^2_{33} + \rho'^2_{44}}{p(\rho')}, & \rho''_{14} &= \frac{\rho'^2_{14} + \rho'^2_{23}}{p(\rho')}, \\ \rho''_{22} &= 2\frac{\rho'_{33}\rho'_{44}}{p(\rho')}, & \rho''_{33} &= 2\frac{\rho'_{11}\rho'_{22}}{p(\rho')}, & \rho''_{23} &= 2\frac{\rho'^*_{23}\rho'^*_{14}}{p(\rho')},\end{aligned}\quad (4.9)$$

donde hemos identificado $\rho' = \rho^-$ y la probabilidad de éxito $p(\rho')$ como una función de los elementos de matriz, definida como

$$p(\rho) = (\rho_{11} + \rho_{22})^2 + (\rho_{33} + \rho_{44})^2. \quad (4.10)$$

Las iteraciones del proceso de purificación pueden ser bosquejadas de la siguiente

forma

$$\rho \xrightarrow{M_-} \rho^- = \rho' \xrightarrow{M_\pm} \rho'' \xrightarrow{M_\pm} \rho''' \dots \rho^{(l)} \xrightarrow{M_\pm} \rho^{(l+1)}$$

con el estado inicial ρ un estado mixto de dos qubits arbitrario. Las aplicaciones posteriores del mapeo son representados usando ρ'' , que representa la segunda iteración, que también puede ser representada como $\rho^{(2)}$. Es importante notar que en la primera iteración solo la compuerta M_- es considerada. Si sabe que el estado inicial ya está en un estado X entonces la compuerta M_+ puede ser aplicada. De esta forma uno puede obtener la probabilidad de éxito del proceso completo, dada por

$$P = q_-(\rho)p(\rho')p(\rho'') \dots = q_-(\rho) \prod_{l=1}^{\infty} p(\rho^{(l)}). \quad (4.11)$$

Si el estado ya está en un estado X , la probabilidad de éxito total toma la siguiente forma

$$P_X = p(\rho)p(\rho')p(\rho'') \dots = \prod_{l=0}^{\infty} p(\rho^{(l)}). \quad (4.12)$$

Con esto mostramos que implementar una compuerta adicional al protocolo de purificación ya estudiado, se mejora la eficiencia de purificación, puesto que la probabilidad de éxito es mayor en cada iteración.

4.2. Estados diagonales en la base Bell

4.2.1. Estados diagonales sin usar operaciones twirling

Una característica del protocolo presentado en esta sección es la capacidad de obtener estados diagonales en la base de Bell sin usar las típicas operaciones twirling, logrando además que en este proceso los estados incrementen su grado de entrelazamiento. Para esto es requerido que el estado sea llevado a su forma X y posteriormente compuertas Hadamard son aplicadas en cada qubit llevando el estado a una

forma diagonal de Bell, $\tilde{\rho}' = H^{\otimes 2} \rho' H^{\otimes 2}$

$$\begin{pmatrix} \rho'_{11} & 0 & 0 & \rho'_{14} \\ 0 & \rho'_{22} & \rho'_{23} & 0 \\ 0 & \rho'_{32} & \rho'_{33} & 0 \\ \rho'_{11} & 0 & 0 & \rho'_{14} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho'_{11} & -\rho'_{14} & 0 & 0 \\ -\rho'_{41} & \rho'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho'_{33} & \rho'_{32} \\ 0 & 0 & \rho'_{23} & \rho'_{22} \end{pmatrix},$$

una segunda iteración con este estado nos lleva al estado diagonal con los siguientes elementos de matriz

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}''_{11} &= (\rho'^2_{11} + \rho'^2_{44} - \rho'^2_{14} - \rho'^2_{41})/2\tilde{p}(\rho') \\ \tilde{\rho}''_{22} &= (\rho'_{22}\rho'_{33} - \rho'_{23}\rho'_{32})/\tilde{p}(\rho') \\ \tilde{\rho}''_{33} &= (\rho'_{11}\rho'_{44} - \rho'_{14}\rho'_{41})/\tilde{p}(\rho') \\ \tilde{\rho}''_{44} &= (\rho'^2_{22} + \rho'^2_{33} - \rho'^2_{23} - \rho'^2_{32})/2\tilde{p}(\rho'), \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\rho) &= q_-(H^{\otimes 2} \rho H^{\otimes 2}) \\ &= \frac{(\rho_{11} + \rho_{44})^2 + (\rho_{22} + \rho_{33})^2}{2} - \frac{(\rho_{14} + \rho_{41})^2 - (\rho_{23} + \rho_{32})^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Esto se puede considerar como una modificación de nuestro protocolo que puede ser resumida como

$$H^{\otimes 2} \rho' H^{\otimes 2} \xrightarrow{M_-} \tilde{\rho}'' \xrightarrow{M_{\pm}} \tilde{\rho}''' \dots \tilde{\rho}^{(l)} \xrightarrow{M_{\pm}} \tilde{\rho}^{(l+1)}.$$

En este caso la probabilidad de éxito total toma la forma

$$\tilde{P} = q_-(\rho) \tilde{p}(\rho') p(\tilde{\rho}'') \dots = q_-(\rho) \tilde{p}(\rho') \prod_{l=2}^{\infty} p(\tilde{\rho}^{(l)}). \quad (4.15)$$

4.2.2. Probabilidad total de éxito para estados de rango 2

Los estados de rango dos en la base de Bell, es decir, una superposición incoherente de dos estados de Bell, permiten un cálculo analítico de la probabilidad de éxito

total. Hay 6 posibles formas de combinar dos estados de Bell para formar una matriz de densidad diagonal con solo dos valores propios distintos de cero. Restringimos el análisis al estado que retiene su forma después de iteraciones sucesivas del protocolo, es decir

$$\rho^{(n)} = a_n |\Psi^\mp\rangle \langle \Psi^\mp| + (1 - a_n) |\Psi^\pm\rangle \langle \Psi^\pm|. \quad (4.16)$$

Por razones de simetría y sin pérdida de generalidad, uno puede tomar $1/2 < a_0 \leq 1$, donde a_0 es la condición inicial. La expresión exacta para a_n después de n iteraciones del mapeo (4.9) puede ser evaluada en una forma analítica. Se puede encontrar una relación de recurrencia entre valores en iteraciones sucesivas

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2 + (1 - a_{n-1})^2} = \frac{a_0^{2^n}}{a_0^{2^n} + (1 - a_0)^{2^n}}. \quad (4.17)$$

Esta relación de recurrencia de orden uno puede ser resuelta introduciendo la variable auxiliar

$$b_n = a_n^{-1} - 1 = b_{n-1}^2 = b_0^{2^n}. \quad (4.18)$$

La probabilidad de éxito para la n -ésima iteración puede ser evaluada de los coeficientes de las iteraciones previas como $p_n = a_{n-1}^2 + (1 - a_{n-1})^2 = (1 + b_n)/(1 + b_{n-1})^2$. La probabilidad de éxito total después de n iteraciones está dada por

$$P_n = \prod_{k=1}^n p_k = \prod_{k=1}^n \frac{1 + b_0^{2^k}}{(1 + b_0^{2^{k-1}})^2} = \frac{1 + b_0^{2^n}}{1 - b_0^{2^n}} \frac{1 - b_0}{1 + b_0}. \quad (4.19)$$

Este resultado puede ser obtenido utilizando la siguiente relación con una suma geométrica

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + x^{2^k}) = \sum_{k=0}^{2^n-1} x^k = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}.$$

Por tanto la probabilidad de éxito total para purificar estados diagonales de Bell, nos lleva al siguiente resultado

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1 - b_0}{1 + b_0} = 2a_0 - 1 = C_0, \quad (4.20)$$

donde $C_0 = 2a_0 - 1$ es la concurrencia del estado inicial. La situación es diferente

para la superposición incoherente de estados $|\Psi^\pm\rangle$ y $|\Phi^\pm\rangle$, en este caso dos iteraciones son necesarias para alcanzar un estado de la forma (4.16). La primera iteración nos da $a_1 = a_0^2 + (1 - a_0)^2$. Sin embargo esto pasa con probabilidad de éxito $p_1 = 1$. El mapeo dado en la ecuación (4.17) se mantiene para $n \geq 2$, por tanto la probabilidad de éxito total está dada por $P = 2a_1 - 1 = C_1$, con la que se puede demostrar que $P = (2a_0 - 1)^2 = C_0^2$.

4.3. Estados mixtos con entrelazamiento máximo

Con los resultados de arriba, podemos también hacer un análisis para estados mixtos con entrelazamiento máximo (MEMS) por sus siglas en inglés. Ishizaka e Hiroshima estudiaron cómo la mezcla de los estados limita la cantidad de entrelazamiento que sería generado por la aplicación de transformaciones unitarias. Por esta razón ellos proponen una clase de estados mixtos de dos qubits. Los estado en esta clase tienen la propiedad, para un valor dado de la pureza ellos alcanzan un valor máximo de de entrelazamiento [36].

Hasta transformaciones locales unitarias, que no cambian la pureza ni el entrelazamiento, ellos pueden ser parametrizados por una sola variable y separados en dos categorías. De acuerdo [37], los estados tipo I, pueden ser expresados como

$$\varrho_I = \alpha |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+| + (1 - \alpha) |01\rangle \langle 01|, \quad (4.21)$$

para $\alpha \in [2/3, 1]$, y definiendo $\alpha_\pm = (2 \pm 3\alpha)/6$, los estados II pueden ser escritos como

$$\varrho_{II} = \alpha_+ |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+| + \alpha_- |\Phi^-\rangle \langle \Phi^-| + \frac{1}{3} |01\rangle \langle 01| \quad (4.22)$$

para $\alpha \in [0, 2/3]$, con $\alpha_\pm = (\alpha \pm 1/3)$. La concurrencia para los dos tipos de estados está dada por α . Estos estados delimitan la región físicamente posible en el diagrama Concurrencia-Pureza.

4.3.1. Proceso de purificación

Para el caso del protocolo de Deutsch el primer paso es llevar los MEMS a una forma diagonal en la base de Bell

$$|01\rangle\langle 01| \rightarrow \frac{1}{2}|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + \frac{1}{2}|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|,$$

donde la concurrencia es disminuida a $2\alpha - 1$ para el primer caso y $\alpha - \frac{1}{3}$ para el segundo. La relación entre la concurrencia y la pureza para cada tipo de MEMS está dada por las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2P - 1} \right), \\ C_2 &= \sqrt{2 \left(P - \frac{1}{3} \right)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dichas relaciones son plasmada en el diagrama CP de la figura 4.1.

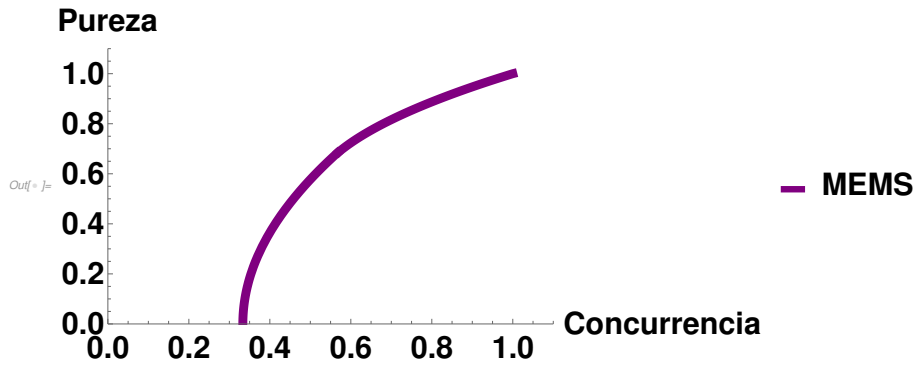


Figura 4.1: Diagrama Concurrencia-Pureza para Estados mixtos con entrelazamiento máximo.

4.3.2. Purificación con nuestro protocolo

Los MEMS escritos como (4.21) y (4.22) están ya en su forma X , en esta parte del trabajo presentamos una forma eficiente para purificar este tipo de estados, aplicando

las compuertas Hadamard para obtener

$$H^{\otimes 2} \varrho_I H^{\otimes 2} = \alpha |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+| + (1 - \alpha) |\varphi\rangle \langle \varphi| \quad (4.24)$$

$$|\varphi\rangle = \frac{|\Phi^-\rangle - |\Psi^-\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Una sola iteración del protocolo es requerida para llevar este estado al estado de Bell $|\Psi^-\rangle$ con una probabilidad de éxito $\alpha/2$.

En el caso de MEMS tipo II también pueden ser purificados con una probabilidad de éxito $\alpha/2$, aunque esto no suceda en una iteración. Los estados ϱ_{II} ya poseen una forma X . Notando que aquí $\rho' = \varrho_{II}$, encontramos que los elementos diferentes de cero están dados por $\rho'_{11} = \rho'_{14} = \rho'_{41} = \rho'_{44} = 1/2$, mientras $\rho'_{22} = \alpha_-$, y $\rho'_{33} = \alpha_+$. La probabilidad de éxito está dada por $\tilde{p}(\varrho_{II}) = (\alpha_+ + \alpha_-)^2/2 = 2/9$ y el estado resultante es el estado de rango 2

$$\rho = \frac{9}{2} \alpha_+ \alpha_- |\Phi^-\rangle \langle \Phi^-| + 9 \frac{\alpha_-^2 + \alpha_+^2}{4} |\Psi^+\rangle \langle \Psi^+|, \quad (4.25)$$

que tiene una concurrencia $9/4(\alpha_+ - \alpha_-)^2 = 9\alpha^2/4$, este estado puede ser purificado con una probabilidad de éxito igual a su concurrencia $9\alpha^2/2$, y dado el hecho de que fue llevado a este estado desde ϱ_{II} con probabilidad $2/9$, la probabilidad de éxito total está dada por $\alpha^2/2$.

En la figura (4.2) graficamos el número de qubits requerido para purificar a los MEMS, estados diagonales en la base de Bell y estados de rango 2 en función de su concurrencia. Donde el número de qubits se calcula como el inverso de la probabilidad de éxito del protocolo elevado a la n , con n el número de iteraciones necesarias para purificar el estado. Es importante notar que este tipo de estados pueden ser ajustados perfectamente por potencias inversas de la concurrencia. Estos resultados fueron obtenidos con la modificación al protocolo de compuertas unitarias y añadiendo las compuertas M_{\pm} , y H .

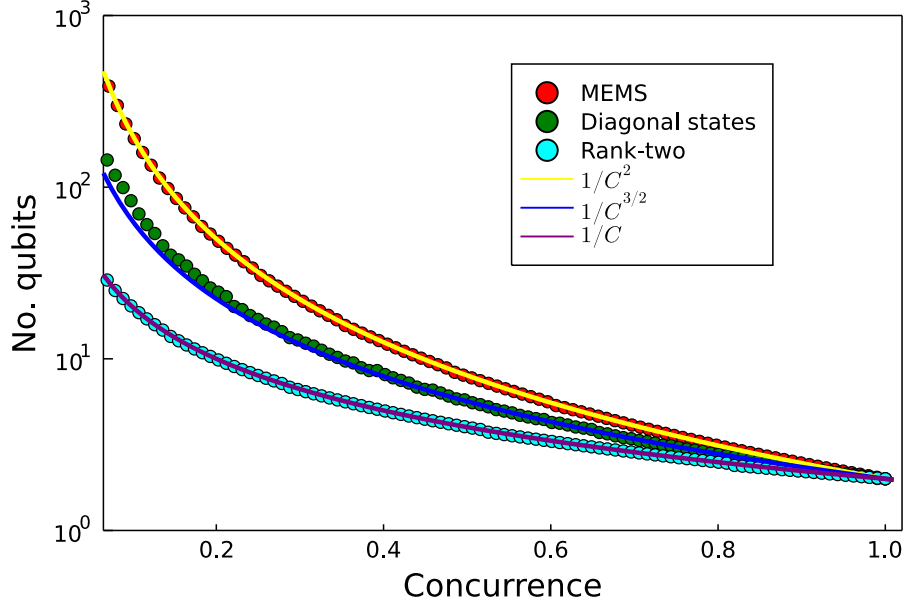


Figura 4.2: Número de qubits requeridos para purificar MEMS, estados diagonales y estados de rango dos en función de la concurrencia.

4.4. Estados de rango tres

En esta sección proponemos una clase de estados que son parametrizados de la siguiente forma,

$$\rho = x |\Phi_\theta^+\rangle \langle \Phi_\theta^+| + y |\Phi_\theta^-\rangle \langle \Phi_\theta^-| + (1 - x - y) |01\rangle \langle 01|, \quad (4.26)$$

donde, $x, y \in \mathbb{R}$, $|\Phi_\theta^+\rangle = \cos \theta/2 |00\rangle + e^{i\phi} \sin \theta/2 |11\rangle$ y $|\Phi_\theta^-\rangle = e^{-i\phi} \sin \theta/2 |00\rangle - \cos \theta/2 |11\rangle$, con $\theta \in (0, 2\pi)$. Utilizando la fórmula (3.44), podemos obtener que la concurrencia para este tipo de estados está dada por la siguiente expresión

$$C = \sin \theta |x - y|, \quad (4.27)$$

y su pureza es $P = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2$.

Por conveniencia podemos obtener los parámetros x y y , que parametrizan a los

estados de rango tres, en términos de la concurrencia, pureza y el ángulo θ ,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{6} \left(2 - 3\tilde{C} \pm \sqrt{6P - 3\tilde{C} - 2} \right), \\ x &= \tilde{C} + y. \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde $\tilde{C} = C/\sin\theta$, con $C \in [0, 1]$. Es importante notar que además los parámetros x, y , deben cumplir las siguientes condiciones, $x+y \leq 1$, condición de normalización y $\tilde{C} = x - y \leq x + y$. Con estas dos restricciones es posible generar una familia de estados que cubren todo el diagrama CP en la región que es físicamente posible, únicamente variando los parámetros x y y y θ .

En la figura (4.3) graficamos el diagrama CP para un valor fijo del ángulo θ , $\theta = \pi/2$, variando los parámetros x y y , además del lado derecho hemos colado el número de iteraciones necesarias para poder purificar a dichos estados. Podemos darnos cuenta que para este valor del ángulo se cubre gran parte del diagrama con estados físicamente aceptables, sin embargo al variar θ se logra cubrir totalmente el diagrama. Una propiedad importante de estos estados es que, al igual que los MEMS, ellos pueden ser purificados de una manera bastante eficiente usando el protocolo de compuertas no unitarias y las compuertas adicionales L y H , tal como en la subsección anterior. Podemos notar en el diagrama que el número de iteraciones requeridas para purificar es bastante pequeño. Esto se debe también a que estos estados después de aplicar H y una iteración del protocolo, se convierten en estados diagonales con sólo dos entradas distintas de cero, finalmente, recordemos que la adición de la compuerta L aumenta por dos la probabilidad de éxito en cada iteración del protocolo, por lo que el proceso de purificación es aún más rápido.

Cerramos este capítulo haciendo énfasis en la importancia de la implementación de compuertas cuánticas de dos qubits en los protocolos de purificación. Puesto que gracias a ellas la eficiencia en cada iteración del proceso puede ser mejorada aumentando la probabilidad de éxito, como fue en el caso de la compuerta M_{\pm} . Además es importante señalar cómo estas compuertas surgen de modelos de átomos en cavidades, como los estudiados en el capítulo 3.

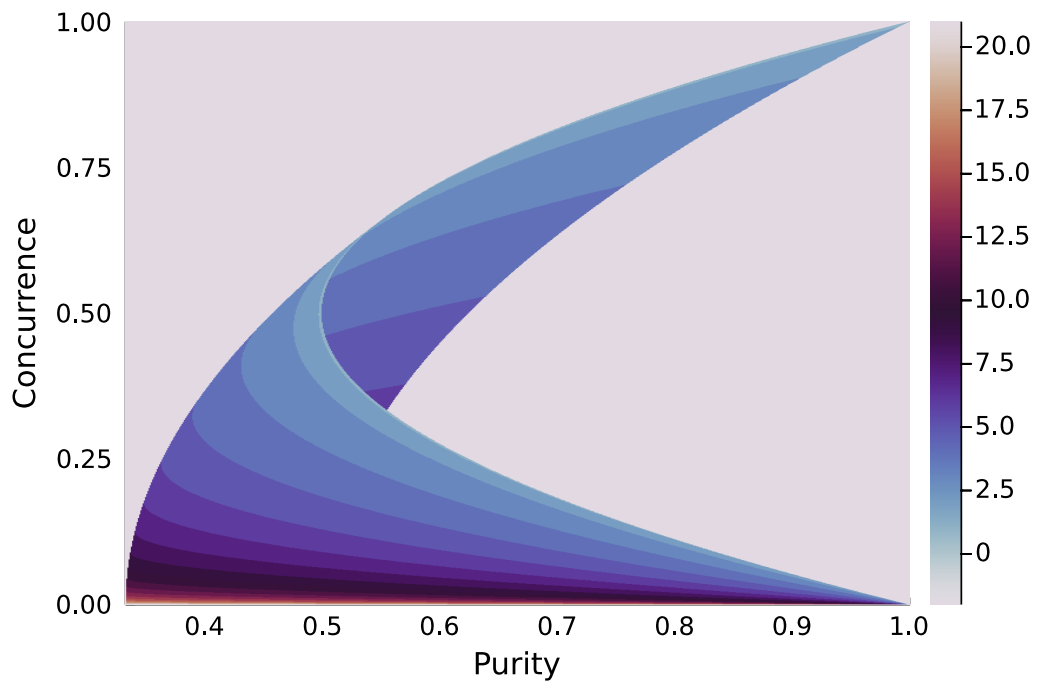


Figura 4.3: Diagrama CP, en el cual son graficados los estados parametrizados por (4.26), para un valor fijo de θ , $\theta = \pi/2$, así mismo en la parte derecha colocamos el número de iteraciones necesarias para purificar dichos estados.

Capítulo 5

Conclusiones

La purificación de estados cuánticos entrelazados es crucial para el desarrollo de las tecnologías cuánticas, ya que el entrelazamiento cuántico es el recurso necesario para poder llevarlas a cabo. Sin embargo ya que esta propiedad se ve afectada por el entorno, los procesos de purificación son requeridos para así obtener estados con entrelazamiento máximo. Con este trabajo hemos logrado mejorar la eficiencia de protocolos de purificación ya existentes, a través del uso de compuertas cuánticas adicionales. Como primer resultado encontramos que al aplicar la compuerta cuántica Hadamard, después de la primera iteración del protocolo de compuertas no unitarias [23], obtenemos estados diagonales de manera directa, lo que evita el uso de operaciones cuánticas adicionales, twirling, las cuales son difíciles de implementar y además generan pérdida de entrelazamiento. Por lo que este resultado simplifica la generación de estados diagonales en la base de Bell.

Posteriormente en el capítulo de 3 hemos hecho un estudio de un modelo de dos átomos no lineal con una interacción dependiente de la intensidad. Se ha resuelto el problema dependiente del tiempo para estados coherentes arbitrarios iniciales. Considerando un número grande promedio de cuantos en el oscilador, hemos derivado una expresión analítica dada en términos de estados de Bell y estados coherentes del oscilador. La solución aproximada del vector de estado dependiente del tiempo es muy útil para analizar el entrelazamiento del sistema. El resultado más importante, es que con la forma aproximada del vector de estado es posible introducir operaciones cuánticas de dos qubits, que son utilizadas en protocolos de purificación y que

mejoran la eficiencia de dichos procesos. Ya que esta compuerta incrementa por 2 la probabilidad de éxito en cada iteración del protocolo de compuertas no unitarias [23].

Finalmente en el capítulo 4, con ayuda de las compuertas adicionales H y L logramos purificar de manera eficiente a los MEMS. Encontramos que dichos estados después de la aplicación de la compuerta H y la primera iteración del protocolo, obtenemos estados diagonales con sólo dos entradas distintas de cero, lo que facilita el procesos de purificación. Posteriormente se estudió el caso más general de estados de rango 3, parametrizados por (4.26), los cuales tienen la característica de llenar toda la región del diagrama CP, en la cual se encuentran todos los estados físicamente posibles. De igual forma con ayuda de las compuertas H , M y L es posible purificar toda esta familia de estados en una forma muy eficiente. De acuerdo a los resultados obtenidos, hemos logrado purificar una gran cantidad de estados con la ayuda de nuevas compuertas cuánticas que surgen de manera natural en sistemas cuánticos de átomos en cavidades y que optimizan el proceso de purificación. Este resultado es relevante, puesto que la obtención de estados con entrelazamiento máximo son cruciales para el desarrollo de tecnologías cuánticas.

Bibliografía

- [1] Claude E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, 1948. doi: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x.
- [2] Claude E. Shannon. Communication theory of secrecy systems. *The Bell System Technical Journal*, 28(4):656–715, 1949. doi: 10.1002/j.1538-7305.1949.tb00928.x.
- [3] Claude E. Shannon. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, 37(1):10–21, 1949. doi: 10.1109/JRPROC.1949.232969.
- [4] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1895–1899, Mar 1993. doi: 10.1103/PhysRevLett.70.1895.
- [5] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Sandu Popescu, Benjamin Schumacher, John A. Smolin, and William K. Wootters. Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels. *Phys. Rev. Lett.*, 76:722–725, Jan 1996. doi: 10.1103/PhysRevLett.76.722.
- [6] Peter W. Shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. pages 124–134, 1994. doi: 10.1109/SFCS.1994.365700.
- [7] Charles H. Bennett, Francois Bessette, Gilles Brassard, Louis Salvail, and John Smolin. Experimental quantum cryptography. *Journal of Cryptology*, 5(1):3–28, 1992. doi: 10.1007/BF00191318.

-
- [8] Charles H. Bennett and David P. DiVincenzo. Quantum information and computation. *Nature*, 404:1476–4687, Mar 2000. doi: 10.1038/35005001.
- [9] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. Quantum computation and quantum information. 2000.
- [10] David P. DiVincenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte der Physik*, 48(9–11):771–783. doi: [https://doi.org/10.1002/1521-3978\(200009\)48:9/11<771::AID-PROP771>3.0.CO;2-E](https://doi.org/10.1002/1521-3978(200009)48:9/11<771::AID-PROP771>3.0.CO;2-E).
- [11] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935. doi: 10.1103/PhysRev.47.777.
- [12] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, John A. Smolin, and William K. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, 54:3824–3851, Nov 1996. doi: 10.1103/PhysRevA.54.3824.
- [13] Robert Prevedel, Markus Aspelmeyer, Caslav Brukner, Anton Zeilinger, and Thomas D. Jennewein. Photonic entanglement as a resource in quantum computation and quantum communication. *J. Opt. Soc. Am. B*, 24(2):241–248, Feb 2007.
- [14] C. S. Wu and I. Shakhov. The angular correlation of scattered annihilation radiation. *Phys. Rev.*, 77:136–136, Jan 1950. doi: 10.1103/PhysRev.77.136.
- [15] Carl A. Kocher and Eugene D. Commins. Polarization correlation of photons emitted in an atomic cascade. *Phys. Rev. Lett.*, 18:575–577, Apr 1967. doi: 10.1103/PhysRevLett.18.575.
- [16] John F. Clauser. Experimental limitations to the validity of semiclassical radiation theories. *Phys. Rev. A*, 6:49–54, Jul 1972. doi: 10.1103/PhysRevA.6.49.
- [17] J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1: 195–200, Nov 1964. doi: 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195.

-
- [18] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.1804.
- [19] Charles H. Bennett, Herbert J. Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53:2046–2052, Apr 1996. doi: 10.1103/PhysRevA.53.2046.
- [20] William K. Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245–2248, Mar 1998. doi: 10.1103/PhysRevLett.80.2245.
- [21] Scott Hill and William K. Wootters. Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.*, 78:5022–5025, Jun 1997. doi: 10.1103/PhysRevLett.78.5022.
- [22] S. Pirandola, J. Eisert, C. Weedbrook, A. Furusawa, and S. L. Braunstein. Advances in quantum teleportation. *Nature Photonics*, 9:641–652, Oct 2015. doi: 10.1038/nphoton.2015.154.
- [23] Juan Mauricio Torres and József Zsolt Bernád. Conditions for entanglement purification with general two-qubit states. *Phys. Rev. A*, 94:052329, Nov 2016. doi: 10.1103/PhysRevA.94.052329.
- [24] David Deutsch, Artur Ekert, Richard Jozsa, Chiara Macchiavello, Sandu Popescu, and Anna Sanpera. Quantum privacy amplification and the security of quantum cryptography over noisy channels. *Phys. Rev. Lett.*, 77:2818–2821, Sep 1996. doi: 10.1103/PhysRevLett.77.2818.
- [25] Chiara Macchiavello. On the analytical convergence of the qpa procedure. *Physics Letters A*, 246(5):385–388, 1998. ISSN 0375-9601. doi: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(98\)00550-7](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00550-7). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960198005507>.
- [26] József Zsolt Bernád, Juan Mauricio Torres, Ludwig Kunz, and Gernot Alber. Multiphoton-state-assisted entanglement purification of material qubits. *Phys. Rev. A*, 93:032317, 2016. ISSN 24699934. doi: 10.1103/PhysRevA.93.032317.

-
- [27] Xin Chen and Le-Man Kuang. Exact solution of the milburn equation for the jaynes-cummings model with an intensity-dependent interaction. *Physics Letters A*, 191(1):18–24, 1994. ISSN 0375-9601. doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(94\)90554-1](https://doi.org/10.1016/0375-9601(94)90554-1). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960194905541>.
- [28] C. E.A. Jarvis, D. A. Rodrigues, B. L. Györfy, T. P. Spiller, A. J. Short, and J. F. Annett. Dynamics of entanglement and attractor states in the tavis-cummings model. *New J. Phys.*, 11:103047, 10 2009. ISSN 13672630. doi: 10.1088/1367-2630/11/10/103047.
- [29] J. M. Torres, J. Z. Bernád, and G. Alber. Quantum teleportation and entanglement swapping of matter qubits with coherent multiphoton states. *Phys. Rev. A*, 90:012304, 7 2014. ISSN 10941622. doi: 10.1103/PhysRevA.90.012304. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.90.012304>.
- [30] K. G. Johnson, J. D. Wong-Campos, B. Neyenhuis, J. Mizrahi, and C. Monroe. Ultrafast creation of large schrödinger cat states of an atom. *Nat. Commun.*, 8: 1–7, 9 . ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/s41467-017-00682-6.
- [31] M. J. McDonnell, J. P. Home, D. M. Lucas, G. Imreh, B. C. Keitch, D. J. Szwer, N. R. Thomas, S. C. Webster, D. N. Stacey, and A. M. Steane. Long-lived mesoscopic entanglement outside the lamb-dicke regime. *Phys. Rev. Lett.*, 98:063603, 2 . doi: 10.1103/PhysRevLett.98.063603.
- [32] J. Alonso, F. M. Leupold, Z. U. Solèr, M. Fadel, M. Marinelli, B. C. Keitch, V. Negnevitsky, and J. P. Home. Generation of large coherent states by bang-bang control of a trapped-ion oscillator. *Nat. Commun.*, 7:11243, 4 2016. ISSN 20411723. doi: 10.1038/ncomms11243.
- [33] Heralded entanglement of two ions in an optical cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 111: 100505, 9 . doi: 10.1103/PhysRevLett.111.100505.
- [34] Quantum dynamics of single trapped ions. *Rev. Mod. Phys.*, 75:281–324, 2003. ISSN 00346861. doi: 10.1103/RevModPhys.75.281.

-
- [35] Quantum computing with trapped ions. *Phys. Rep.*, 469:155–203, 12 2008. ISSN 03701573. doi: 10.1016/j.physrep.2008.09.003.
- [36] Satoshi Ishizaka and Tohya Hiroshima. Maximally entangled mixed states under nonlocal unitary operations in two qubits. *Phys. Rev. A*, 62:022310, Jul 2000. doi: 10.1103/PhysRevA.62.022310.
- [37] Mário Ziman and Vladimír Bužek. Concurrence versus purity: Influence of local channels on bell states of two qubits. *Phys. Rev. A*, 72:052325, Nov 2005. doi: 10.1103/PhysRevA.72.052325.