Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Dinámica de la Familia Cuadrática
(El Teorema de Jakobson)

Tesis
que para obtener el grado de
licenciado en matemáticas
presenta
Gustavo Octavio Merino Raymundo

Director de tesis:
M.C. Julio Erasto Poisot Macías

Puebla, Pue. Junio del 2025

A mi hermanito pepe que siempre está conmigo, y que algún día lo veré de nuevo... en la Eternidad.

Agradecimientos

A mi mamá, mi papá, mis hermanas, y familiares cercanos que siempre me han apoyado a pesar del tiempo y la distancia.

A mis amigos; Brisseyda, Denisse, Edgar, Roman.

A mis amigos de la Facultad; Amélie, Xavi, Yeimi, Jean, Vicente, Samuel y Alejandra.

A todos mis profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

A mi asesor de tesis, el maestro Julio Poisot, por brindarme su apoyo, su amistad, sus enseñanzas y así poder terminar este proyecto.

A mis Sinodales; la Dra. Patricia Domínguez Soto, M.C. Juan Francisco Estrada García y el Dr. Francisco Javier Mendoza Torres.

A la maestra Mónica Macías, por todo su apoyo incondicional y por tener la fortuna de ser un amigo para ella.

A mis compañeros de trabajo, mis supervisoras; Ana Gutiérrez, Ana Ramirez, Fatima, Gina, Yola. A mis Jefes; Rodrigo y José Luis.

A la Jefa Vero por apoyarme de todas la formas y maneras que existen.

Y a Lupita por todo.

And the Raven, never flitting, still is sitting, *still* is sitting
On the pallid bust of Pallas just above my chamber door;
And his eyes have all the seeming of a demon's that is dreaming,
And the lamp-light o'er him streaming throws his shadow on the floor;
And my soul from out that shadow that lies floating on the floor
Shall be lifted - nevermore!

-The Raven. Edgar Allan Poe.

Mein Körper taucht ins Leben
Und mein Geist schwimmt hinterher
Das Herz ist mir mein Kompass
Und die Liebe mein Horizont
Jene Worte sind wie Stürme
Jene Blicke eine raue See
Oft verschlucken mich die Wellen
Doch besiegen sie mich nie!

-Kelch der Liebe. Lacrimosa.

Hoffnung ist die Kraft
Die das erschafft
Was deine Seele will!
Hoffnung ist die Macht
Die Licht entfacht
Wenn es zu dunkel wird!
Hoffnung ist das Schwert
Das dich befreit
Von Angst und Herzensleid!

-Der Kelch der Hoffnung. Lacrimosa.

Es ist der Traum der mich gefuhrt
Und folgen werde ich bis in die Glut

-Der Kelch des Lebens. Lacrimosa.

Zeit ist nur ein Geschenk
Schau dich an - Schau nicht zurück
Zeit erfüllt den Zweck - den Zweck, den wir ihr geben

-Apeiron - Der Freie Fall, Part 2. Lacrimosa.

Índice General

Introducción **I**

1. Sistemas Dinámicos **1**
1.1. Preeliminares . . . 1
1.1.1. Definición de un Sistema Dinámico . . . 1
1.1.2. Sistemas Dinámicos Discretos . . . 2
1.1.3. Órbitas, Puntos Fijos, Órbitas Periódicas y su Estabilidad. . . . 3
1.2. Análisis gráfico de las órbitas . . . 9

2. La Familia Cuadrática F_λ **12**
2.1. El Modelo Poblacional . . . 12
2.2. Dinámica de la Familia Cuadrática F_λ . . . 13
2.2.1. Puntos Fijos y Estabilidad de la Familia Cuadrática . . . 14
2.3. Bifurcación de Duplicación de Período. Ruta al Caos . . . 19
2.3.1. $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$ . . . 21
2.3.2. $1 + \sqrt{6} < \lambda < \lambda_\infty \approx 3.5699456$ . . . 25
2.3.3. $\lambda > \lambda_\infty \approx 3.5699456 \ldots$ . . . 27
2.4. Ventanas Periódicas . . . 28
2.4.1. $\lambda = 1 + \sqrt{8}$ . . . 29
2.4.2. $\lambda > 1 + \sqrt{8}$ . . . 31
2.4.3. $\lambda = 4$ . . . 33
2.5. El Conjunto de Cantor para $\lambda > 4$ . . . 34
2.6. Dinámica Simbólica para la Familia Cuadrática F_λ . . . 37
2.6.1. El Espacio de Sucesiones . . . 38
2.6.2. La función Shift . . . 39
2.7. Conjugación Topológica . . . 40
2.7.1. La función Itinerario . . . 40
2.7.2. Conjugación . . . 43

3. Hacia el Teorema de Jakobson **46**
3.1. Espacios Medibles . . . 46
3.1.1. Álgebras y σ - álgebras de Conjuntos . . . 46
3.1.2. σ - álgebra de Bórel . . . 48
3.2. Medidas . . . 48
3.2.1. Funciones Aditivas y σ - aditivas . . . 48
3.2.2. Espacios de Medida . . . 49
3.2.3. Medida de Lebesgue . . . 50
3.3. El Teorema de Jakobson . . . 52
3.3.1. El conjunto de buenos parámetros. . . . 54

3.3.2. Construcción de la Medida 56
3.3.3. Estimación de Densidad 60

A. Lemas Auxiliares **69**

B. Nociones Matemáticas Básicas **84**
B.1. Nociones Básicas del Cálculo 84
B.2. Nociones Básicas del Ánalisis Matemático y Topología 86

Bibliografía **89**

Introducción

Como disciplina matemática, el estudio de los sistemas dinámicos probablemente se originó a finales del siglo XIX a través de la obra de Henri Poincaré en su estudio de la mecánica celeste [18]. Una vez que se formulan las ecuaciones que describen el movimiento y velocidades de los planetas alrededor del sol y construido el modelo matemático, el siguiente paso es buscar soluciones para describir los movimientos de los planetas y hacer predicciones de posiciones en el tiempo. Pero cuando se trata de encontrar soluciones explícitas en ocaciones resulta demasiado complicado o inlcuso imposible, lo que queda es estudiar la estructura geométrica de las soluciones del modelo para, de algún modo y de forma creativa, deducir las propiedades significativas de las posibles funciones de solución. Poincaré introdujo un nuevo punto de vista que hacía hincapié en cuestiones cualitativas más que cuantitativas. Por ejemplo, en lugar de preguntar por las posiciones exactas de los planetas en todo momento, preguntó: "¿Es el sistema solar estable para siempre o algunos planetas eventualmente volarán hasta el infinito?". Poincaré desarrolló un poderoso enfoque geométrico para analizar estas cuestiones. Ese enfoque ha florecido en el tema moderno de la dinámica, con aplicaciones que van mucho más allá de la mecánica celeste.

En 1963, E. N. Lorenz [14], propuso el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned}$$

como un modelo simplificado de la convección atmosférica.

Lorenz notó que cambios muy pequeños en las condiciones iniciales podían producir resultados significativamente diferentes.

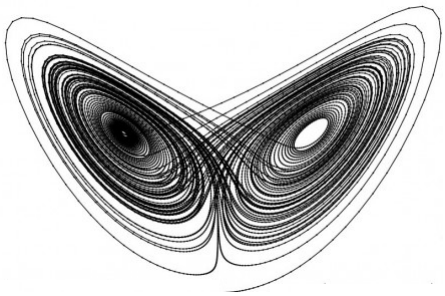

Figura 1: Atractor de Lorenz

En 1975, los matemáticos T. Li y J. A. Yorke [13] publicaron un artículo en el que demostraron un sorprendente teorema. La existencia de una órbita periódica de período 3 en un sistema dinámico

por iteración definida por una función continua f de un intervalo I dentro de sí mismo implica la presencia de órbitas periódicas de periodo n para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$. El título de su artículo es *Period Three Implies Chaos*. La palabra caos apareció en este artículo por primera vez, como sugestiva de la complejidad dinámica del sistema estudiado por Li-Yorke.

En 1976, justo un año después del artículo de Li-Yorke, el biólogo R. M. May [16] en el artículo *Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics* ilustró la sorprendente complejidad de la estructura de las órbitas de un sistema dinámico unidimensional gobernada por una función cuadrática. Por esta época, el interés por sistemas dinámicos que tuvieran características similares al propuesto por Lorenz y a los analizados por Li-Yorke y May comenzó a aumentar considerablemente. Surgió la teoría de los sistemas caóticos. Como señala R. Devaney [8]: el campo de los sistemas dinámicos y especialmente el estudio de los sistemas caóticos ha sido aclamado como uno de los avances científicos más importantes del siglo XX, y sigue teniendo un impacto muy importante en las matemáticas puras como en sus aplicaciones.

Capítulo 1

Sistemas Dinámicos

En este capítulo presentamos cierta terminología básica. Definimos un sistema dinámico. Luego intoducimos las nociones de órbitas, puntos fijos, órbitas periodicas y su estabilidad.

1.1. Preeliminares

La noción de **sistema dinámico** es la formalización matemática del concepto científico general de proceso **determinista**, lo que significa que podemos determinar el estado actual (la población de una especie, por ejemplo) únicamente a partir de los estados pasados. Los estados pasados y futuros de muchos sistemas físicos, químicos, biológicos, ecológicos, económicos e incluso sociales pueden predecirse hasta cierto punto conociendo su estado actual y las leyes que rigen su evolución. Siempre que estas leyes no cambien con el tiempo, el comportamiento de dicho sistema podría considerarse completamente definido por su estado inicial. Así, la noción de un sistema dinámico es una forma de describir el paso en el tiempo de todos los puntos de un espacio dado X.

1.1.1. Definición de un Sistema Dinámico

Definición 1.1

Un sistema dinámico es una terna $\{T, X, f^t\}$, donde T es un conjunto que representa el tiempo, X es un espacio de estados y $f : T \times X \to X$ es una función, donde $f(t, x) = f^t(x)$ y $f^t : X \to X$ es una familia de operadores parametrizada por $t \in T$ que satisface las siguientes propiedades:

1. *$f^0 = id$, donde id es la función identidad en X, $id(x) = x$ para todo $x \in X$.*
2. *$f^{t+s} = f^t \circ f^s$. Esto significa que $f^{t+s}(x) = f^t(f^s(x))$ para todo $x \in X$ y t, $s \in T$.*

Observación 1.2

1 La función f^t a menudo se denomina operador de evolución del sistema dinámico.

2 Si f^t es invertible, entonces el estado inicial x_0 define completamente no sólo los estados futuros del sistema, sino también su comportamiento pasado.

A continuación, hacemos una breve explicación de los elementos que conforman un sistema dinámico.

- **Espacio de estados**

  Todos los estados posibles de un sistema se caracterizan por los puntos de algún conjunto X. Este conjunto se denomina espacio de estados del sistema. En realidad, la especificación de un punto $x \in X$ debe ser suficiente no sólo para describir la "posición" actual del sistema sino también para determinar su evolución. A menudo, el espacio de estados se denomina **espacio de fases**.

- **Tiempo**

  La evolución de un sistema dinámico significa un cambio en el estado del sistema con el tiempo $t \in T$, donde T es un conjunto que representa el tiempo. Consideraremos dos tipos de sistemas dinámicos: aquellos con tiempo continuo $T = \mathbb{R}$, y aquellos con tiempo discreto $T = \mathbb{Z}$ o también $T = \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Los sistemas del primer tipo se denominan **sistemas dinámicos continuos**, mientras que los del segundo se denominan **sistemas dinámicos discretos**.

- **Operador de evolución**

  El componente principal de un sistema dinámico es una ley de evolución que determina el estado x_t del sistema en el instante t, siempre que se conozca el estado inicial x_0. La forma más general de especificar la evolución es suponer que para $t \in T$ dado se define una función f^t en el espacio de estados X,

  $$f^t : X \to X,$$

  que transforma un estado inicial $x_0 \in X$ cuando t = 0, en algún estado $x_t \in X$ en el momento t:

  $$x_t = f^t(x_0).$$

  En general, la "trayectoria" de x viene dada por x_t. La función que lleva t a x_t produce una sucesión de puntos (caso discreto) $\{x_t\}_{t \in T}$ o una curva (caso continuo) que representa la historia de vida de x cuando t recorre al conjunto T.

1.1.2. Sistemas Dinámicos Discretos

A lo largo de esta tésis, trataremos solamente *Sistemas Dinámicos Discretos*. Asumamos que $X = \mathbb{R}$ o $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to I$ una función de clase C^r, $r \geq 0$.

La composición de funciones es el corazón de la dinámica de iteración de funciones. La idea principal es comprender cómo es la órbita de un punto cuando la misma función se itera repetidamente.

Definición 1.3

Sea $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Denotemos la $n-ésima$ composición de una función f consigo misma aplicada a x por $f^n(x)$ (no confundir con elevar $f(x)$ a la $n-ésima$ potencia ni con la $n-ésima$ derivada de f).

Un **sistema dinámico discreto** está completamente especificado definiendo solamente la función f e inductivamente definimos $f^0 = x$ para toda $x \in X$, $f^1 = f$ y para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x) \\ f^n(x) &= f \circ f^{n-1}(x). \end{aligned}$$

El estado x_0, se llama **estado inicial**. Puede ser cualquier x en el dominio de f. La evolución del sistema a partir de x_0 viene dada por la sucesión $\{x_t\}_{t\in\mathbb{N}}$, donde

$$x_0,\, x_1 = f(x_0),\, x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)),\, x3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))),\, \ldots$$

Generalmente escribimos $f^2(x), f^3(x), \ldots$ en lugar de $f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$. Por lo tanto, tenemos

$$x_1 = f(x_0) \quad \text{y} \quad x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0) \quad \text{para } n \geq 1.$$

1.1.3. Órbitas, Puntos Fijos, Órbitas Periódicas y su Estabilidad.

Utilizamos un punto de vista geométrico sobre los sistemas dinámicos. Los objetos geométricos básicos asociados con un sistema dinámico son sus **órbitas** en el espacio de estados y el **retrato de fase** compuesto por estas órbitas.

Definición 1.4

*La **órbita hacia adelante** (o simplemente **órbita**) de un punto x es el conjunto $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\} = \{x,\ f(x),\ f^2(x),\ f^3(x), \ldots\}$.. Si f es invertible, entonces la **órbita hacia atrás** se define usando iteraciones negativas: $\mathcal{O}^-(x) = \{f^n(x) : n \leq 0\}$ y la **órbita completa** de un punto x es el conjunto $\mathcal{O}(x) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{Z}\}$. Si f no es invertible, entonces hacemos elecciones y construimos $x_{-1}, x_{-2}, \ldots$ donde $f(x_{-n}) = x_{-n+1}$ o también $x_{-n} \in f^{-1}(x_{-n+1})$. (Para una función no invertible, $f^{-1}(y) = \{x : f(x) = y\}$.)*

Definición 1.5

*El punto x es un **punto fijo** (**estado estacionario o equilibrio**) para f si $f(x) = x$. El punto x es un **punto periódico de período** k si $f^k(x) = x$ y $f^j(x) \neq x$ para $0 < j < k$. Observe que k es el período **mínimo** y que x es k-periódico si es un punto fijo de la función f^k. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos con $\mathbf{Per(f)}$ y el conjunto de puntos periódicos de período k por $\mathbf{Per_k(f)}$, y el conjunto de puntos fijos por $\mathbf{Fix(f)}$. El conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico de período k forman una **órbita periódica** o **ciclo**. La órbita de un punto k-periódico es el conjunto $\mathcal{O}^+(x) = \{x,\ f(x),\ f^2(x), \ldots,\ f^{k-1}(x)\}$.*

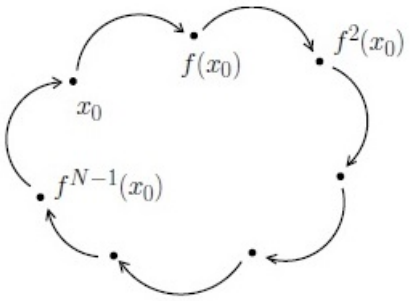

Figura 2: Órbita periódica de un sistema discreto

Observación 1.6

- *Si x_0 es un punto fijo de f, entonces $f(x_0) = x_0$, y la órbita de x_0 es muy sencilla,*

$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_0,\ x_0,\ x_0,\ x_0, \ldots\} = \{x_0\}.$$

Proposición 1.7

*Sea $f : X \to X$ una función continua y sean x_0 y y_0 dos puntos en X tales que la órbita de x_0 converge a y_0, es decir, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = y_0$. Entonces y_0 es un **punto fijo** de f.*

Demostración. Como f es una función continua, entonces

$$f(y_0) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = y_0.$$

La última igualdad se sigue del hecho de que $\{f^{n+1}(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de la sucesión $\{f^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Encontrar puntos fijos de funciones no es una tarea sencilla. Sin embargo, las funciones que tienen como dominio y contradominio un intervalo forman un buen lugar donde iniciar para el estudio de puntos fijos.

Teorema 1.8

***Teorema del Punto Fijo**. Sea f una función continua de la recta real y sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado tal que $f(I) \subseteq I$. Entonces f tiene un punto fijo en I.*

Demostración. Definamos $g(x) = f(x) - x$. Entonces, $g(x)$ también es una función continua. Si $f(a) = a$ o $f(b) = b$, hemos terminado. De lo contrario, supongamos que $f(a) \neq a$ y $f(b) \neq b$. Luego, $f(a) > a$ y $f(b) < b$. En consecuencia, $g(a) > 0$ y $g(b) < 0$. Por el Teorema del Valor Intermedio, existe un punto $c \in (a, b)$ con $g(c) = 0$. Esto implica que $f(c) = c$ y por lo tanto, c es un punto fijo de f. ■

Ejemplo 1.9

La función $g(x) = x^2 - 1$ tiene puntos fijos en $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$, mientras que los puntos 0 y -1 se encuentran en una órbita periódica de período 2. En efecto, las soluciones de la ecuación $g(x) = x$ son

$$x^2 - 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

y las soluciones de la ecuación $g^2(x) = (g \circ g)(x) = x$ son

$$(x^2 - 1)^2 - 1 = x \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = x \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x - 1) = 0.$$

El problema de resolver $g^2(x) = x(x^3 - 2x - 1) = 0$ se puede reducir tomando en cuenta que los puntos fijos de g también son raíces de esta ecuación y que, por lo tanto, $g(x) = x$ divide a $g^2(x) - x$.

Efectuando la división, obtenemos

$$g^2(x) - x = (g(x) = x)h(x),$$

donde $h(x)$ es el polinomio de grado 2

$$h(x) = x(x+1).$$

Los puntos buscados de periodo 2 son las raíces de $h(x)$, que son $x = 0$ y $x = -1$.

Observe que tanto $x = 0$ y $x = -1$ no son puntos fijos de g y forman una órbita de período 2.

Definición 1.10

*Se dice que un punto x es **eventualmente fijo** de una función f si existe un entero positivo r y un punto fijo x_0 de f tal que $f^r(x) = x_0$, pero $f^{r-1}(x) \neq x_0$.*

Ejemplo 1.11

Sea $f(x) = x^2$. Entonces $f(1) = 1$ es un punto fijo, mientras que $f(-1) = 1$ es eventualmente fijo. En efecto, las soluciones de la ecuación $f(x) = x$ son

$$x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ 1.$$

Observe que $x = -1$ no es un punto fijo, pero para $r = 2$ tenemos que

$$f^2(-1) = f(f(-1)) = f(1) = 1.$$

Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de números enteros no negativos.

Definición 1.12

*Se dice que x es **eventualmente periódico** con periodo k si $f^{k+m}(x) = f^m(x)$ para algún entero positivo k y $m \in \mathbb{Z}^+$ (véase la figura 1.21).*
Observe que si $k = 1$, entonces $f(f^m(x)) = f^m(x)$ y x es entonces eventualmente fijo, y si $m = 0$, entonces $f^k(x) = x$ y x es k - periódico. En otras palabras, x es eventualmente periódico si $f^k(x)$ es periódico, para algún entero positivo k.

Uno de los principales objetivos de la teoría de sistemas dinámicos es el estudio del comportamiento de las órbitas cerca de puntos fijos. Introducimos las nociones básicas de estabilidad.

Definición 1.13

Sea $f : I \to I$ una función y x_0 un punto fijo de f, donde I es un intervalo en el conjunto de números reales $\mathbb{R}$. Entonces

1. *x_0 se dice que es **estable** si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta$ tenemos $|f^n(x) - x_0| < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.*
2. *x_0 se dice que es **inestable** si existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe $x \in |x - x_0| < \delta$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $|f^n(x) - x_0| \geq \epsilon_0$.*
3. *x_0 se dice un **atractor** (o un **sumidero**) si existe un abierto $U \subset I$ de x_0 tal que, si $x \in U$, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.*
4. *x_0 se dice un **repulsor** (o una **fuente**) si existe un abierto $U \subset I$ de x_0 tal que, si $x \in U$, $x \neq x_0$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}^+$, n depende de x, tal que $f^n(x) \notin U$.*
5. *Sea x_0 un punto fijo **atractor**. El siguiente conjunto es conocido como la **cuenca de atracción de** (o el **conjunto estable de**) x_0:*

$$W^s(x_0) =: \{x \in I : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0\}.$$

Las funciones con puntos periódicos hiperbólicos son los que ocurren típicamente en muchos sistemas dinámicos y, además, proporcionan los tipos de comportamiento periódico más simples para analizar.

Definición 1.14

*Sea p un punto periódico de período n. El punto p es **hiperbólico** si $|(f^n)'(p)| \neq 1$.*

Ejemplo 1.15

*Considere la función $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$. Existen 3 puntos fijos: $x = 0, 1$ y -1. Observe que $f'(0) = 1/2$ y $f'(\pm 1) = 2$. Luego, cada punto fijo es hiperbólico (**Figura 3**).*

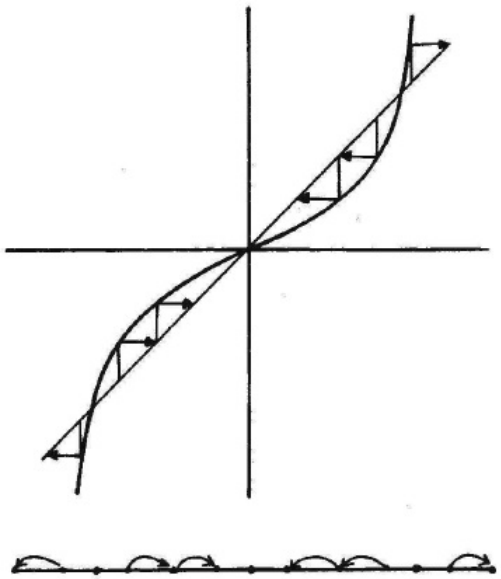

Figura 3: Gráfica y el retrato de fase de $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$

Proposición 1.16

Sea p un punto fijo hiperbólico con $|f'(p)| < 1$. Entonces existe un intervalo abierto U de p tal que si $x \in U$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p.$$

Demostración. Como f es C^1, existe un $\epsilon > 0$ tal que $|f'(x)| < A < 1$ para algún $x \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$. Por el **Teorema del Valor Medio** tenemos

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq A|x - p| < |x - p| \leq \epsilon.$$

Por lo tanto, $f(x)$ está más cerca de p que de x, por lo que $f(x) \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$, y podemos repetir el argumento. Por inducción

$$|f^n(x) - p| \leq A^n|x - p|$$

así que $f^n(x) \to p$ cuando $n \to \infty$. Esto completa la prueba. ■

Definición 1.17

Sea p un punto periódico hiperbólico de período n (o punto fijo cuando $n = 1$) con $|(f^n)'(p)| < 1$. El punto p es ***asintóticamente estable*** *y se llama* ***atractor*** *o* ***sumidero****.*

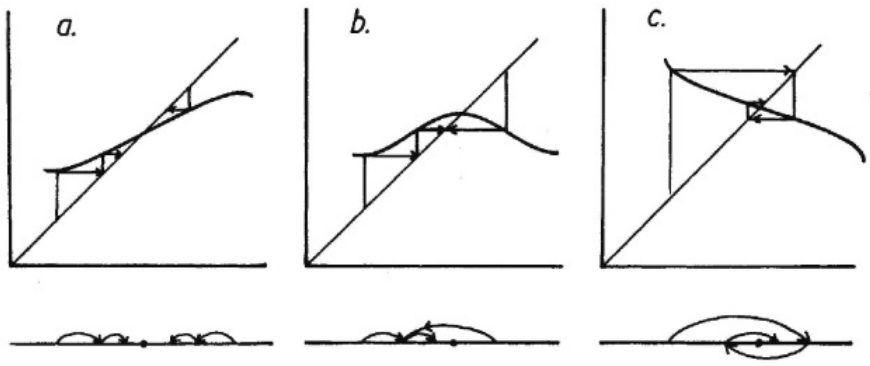

Figura 4: Retrato de fase cerca de un punto fijo atractor p en **a.** $0 < f'(p) < 1$, **b.** $f'(p) = 0$ y **c.** $-1 < f'(p) < 0$

Definición 1.18

Sea p un punto periódico hiperbólico de período n (o punto fijo cuando $n = 1$) con $|(f^n)'(p)| > 1$. El punto p es ***inestable*** *y se llama* ***repulsor*** *o* ***fuente****.*

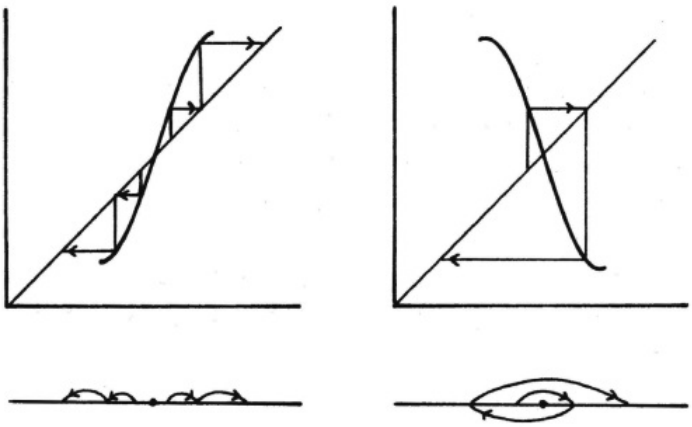

Figura 5: Retrato de fase cerca de un punto fijo repulsor p

Definición 1.19

Un punto fijo atractor p con $f'(p) = 0$ se llama ***superatractor****.*

1.2. Análisis gráfico de las órbitas

Existe una técnica útil para visualizar las órbitas de **sistemas dinámicos discretos** que son los diagramas de escalera/telaraña, a veces llamados diagramas de *Lemeray* (**Figura 6**). Considere la gráfica de f en el plano (x, y) junto con la recta $y = x$. Tome un punto (a, a) en esta línea y luego produzca la sucesión de puntos

$$(a, a),\ (a, f(a)),\ (f(a), f(a)),\ (f(a), f^2(a)),\ (f^2(a), f^2(a)),\ \ldots$$

"saltando" vertical y horizontalmente entre la gráfica de f y la recta $y = x$. Ahora observe que la sucesión obtenida al tomar la primera coordenada de todos los puntos impares compone la parte hacia adelante

$$a,\ f(a),\ f^2(a),\ \ldots$$

de la órbita que comienza en $a \in I$. Si f es invertible, la parte hacia atrás se puede construir de manera similar saltando entre la recta $y = x$ y la gráfica de f, es decir, en el orden opuesto. Observe que las órbitas constantes (puntos fijos)

$$\ldots,\ a,\ a,\ a,\ \ldots$$

corresponden a los puntos, donde la gráfica de f intersecta la recta $y = x$, $f(a) = a$.

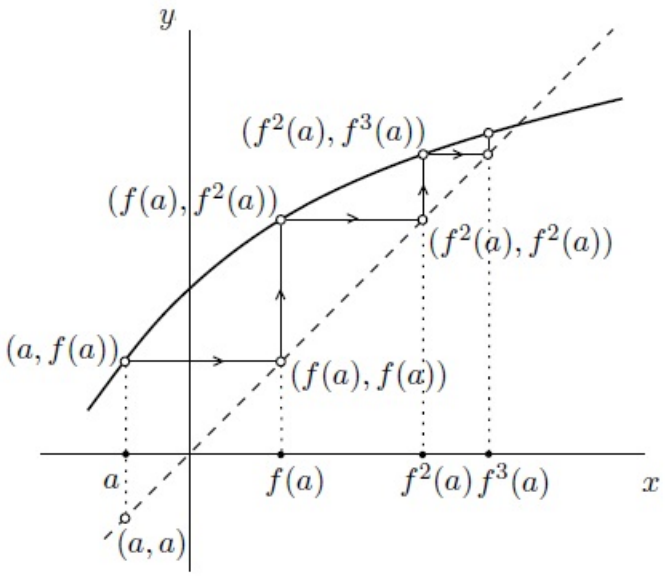

Figura 6: Diagrama de escalera o telaraña

Ejemplo 1.20

Sea $f(x) = x^3$. Los puntos fijos satisfacen la ecuación $f(x) = x^3 = x$, entonces

$$x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ 1,\ -1.$$

*Observe que los puntos fijos corresponden a puntos donde la gráfica de f, $\{(x, f(x))\}$, corta la diagonal $\{(x, x)\}$ (ver Figura 1.2.) La gráfica de f es monótona. En $(0, 1)$ la gráfica de f se encuentra debajo de la diagonal y $f(x) < x$. Así, para $x \in (0, 1)$, $x > f(x) > f^2(x) > \cdots f^n(x) > 0$. Como esta sucesión es monótona, por la **Proposición 1.16**, debe converger a un punto fijo y por tanto a 0. Por lo tanto, $(0, 1) \subset W^s(0)$. Un análisis similar muestra que $(-1, 0) \subset W^s(0)$ ya que para $x \in (-1, 0)$,*

$$x < f(x) < f^2(x) < \cdots < f^n(x) < 0$$

*Como $W^s(0)$ contiene una vecindad de 0, el punto fijo 0 es un **punto atractor**. Para $x > 1$, $f^j(x)$ crece monótonamente. Si esta órbita hacia adelante estuviera acotada, tendría que converger a un punto fijo. Como no hay ningún punto fijo mayor que 1, la órbita debe ir al infinito cuando j tiende a infinito. Nuevamente, para $x < -1$, $f^j(x)$ decrece monótonamente a menos infinito cuando j tiende a infinito. Entonces*

$$\begin{aligned} W^s(0) &= (-1, 1) \\ W^s(\pm 1) &= \{\pm 1\}. \end{aligned}$$

*Observe que para $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$ y $f'(\pm 1) = 3$. Por las **Definiciones 1.17** y **1.18**, el punto fijo $x = 0$ es un atractor y el punto fijo $x = \pm 1$ un repulsor. Esta conclusión es la misma que obtuvimos analizando directamente las órbitas de los puntos. Observe que es mucho más rápido entender el hecho de que estos puntos se atraen y se repelen usando las definiciones, es decir, usando el criterio de la derivada.*

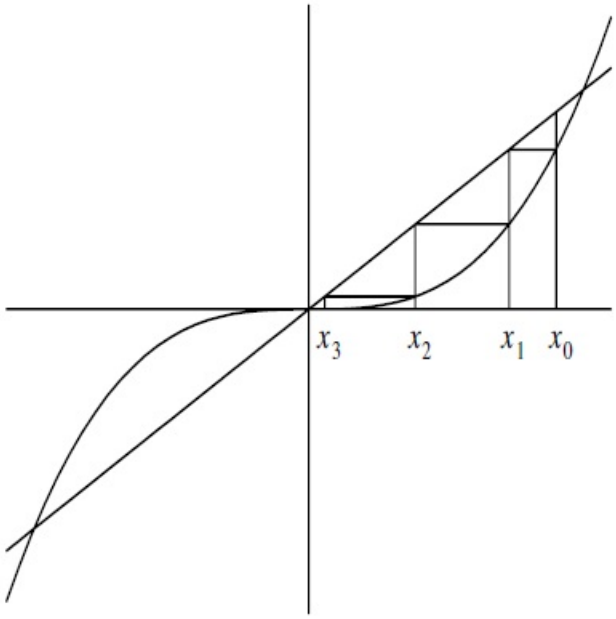

Figura 7: Análisis gráfico para $f(x) = x^3$

Capítulo 2

La Familia Cuadrática F_λ

Consideremos el crecimiento de una población en períodos de tiempo discretos n donde hay hacinamiento o competencia por recursos. En comparación con las ecuaciones diferenciales continuas, obtenemos las ecuaciones en diferencias discretas

$$F_\lambda(x) = \lambda x(1-x).$$

Robert May [16] observó que este modelo simple para intervalos de tiempo discretos no necesariamente conduce a un sistema que tiende hacia una población en estado estacionario.

2.1. El Modelo Poblacional

Los sistemas dinámicos ocurren en todas las ramas de la ciencia, desde las ecuaciones diferenciales de la mecánica clásica en la física hasta las ecuaciones en diferencias en la economía y la biología. Los biólogos de poblaciones están interesados en el comportamiento a largo plazo de la población de una determinada especie o colección de especies. Dados ciertos parámetros observados o determinados experimentalmente (número de depredadores, severidad del clima, disponibilidad de alimentos, etc.), el biólogo desea predecir el comportamiento de la población de una determinada especie que crece o disminuye a medida que pasan las generaciones. Denotemos la población viva en la generación n por P_n. Entonces nuestra pregunta es: ¿podemos predecir qué sucederá con P_n cuando n aumente? ¿P_n tenderá a cero para que la especie se extinga? ¿O P_n crecerá sin límites hasta el punto de experimentar una explosión demográfica?

Existen muchos modelos matemáticos para predecir el comportamiento de las poblaciones. El más simple (y el más ingenuo) es el modelo de crecimiento exponencial. En este modelo asumimos que la población de la generación siguiente es directamente proporcional a la población de la generación actual. Esto se traduce como la ecuación en diferencias

$$P_{n+1} = rP_n$$

donde r es una constante determinada por las condiciones ecológicas. Así, dada la población inicial P_0, podemos determinar recursivamente la población en las generaciones siguientes:

$$\begin{array}{lllll} P_1 & = & rP_0 & & \\ P_2 & = & rP_1 & = & r^2P_0 \\ P_3 & = & rP_2 & = & r^3P_0 \\ & \vdots & & & \\ P_n & = & rP_{n-1} & = & r^nP_0. \end{array}$$

determinamos el comportamiento de la población mediante iteración, en este caso, la función que iteramos es $F(x) = rx$. Entonces

$$P_n = \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n \text{ veces}}(P_0) = r^n P_0.$$

Tenga en cuenta que el destino final de la población depende de r. Si $r > 1$, entonces r^n tiende al infinito, por lo que tenemos un crecimiento poblacional descontrolado. Si $r < 1$, r^n tiende a cero, por lo que la especie se extingue. Finalmente, si $r = 1$, $P_n = P_0$, así no existe cambio en la población. Por lo tanto, podemos lograr nuestro objetivo de determinar el destino de la especie para cualquier r. Por supuesto, este modelo simplificado es muy poco realista en el sentido de que las poblaciones de la vida real se comportan de una manera mucho más complicada. Por ejemplo, las poblaciones nunca pueden tender al infinito. Para remediar esto, agregaremos un supuesto a nuestro modelo que tendrá en cuenta la posibilidad de hacinamiento, lo que los ecologistas llaman el *modelo logístico de crecimiento demográfico*.

En este modelo, suponemos desde el principio que existe una población máxima absoluta que el medio ambiente puede sustentar. Si la población alguna vez alcanza este número, entonces tendremos un hacinamiento desastroso, el suministro de alimentos se volverá críticamente escaso y la especie se extinguirá inmediatamente. Para mantener los números manejables, supongamos que P_n ahora representa la fracción de esta población máxima viva en la generación n, de modo que $0 \leq P_n \leq 1$. El modelo logístico es entonces

$$P_{n+1} = \lambda P_n(1 - P_n)$$

donde λ es una constante que depende de las condiciones ecológicas. Si $P_n = 0$ (no hay individuos presentes), entonces $P_{n+1} = 0$. Si $P_n = 1$, entonces $P_{n+1} = 0$ como hemos supuesto. Por lo tanto, para comprender el crecimiento y la disminución de la población según este modelo, debemos iterar la **función logística** $F_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$.

2.2. Dinámica de la Familia Cuadrática F_λ

Sea $\lambda > 0$ y $F_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definimos la familia uniparametrizada $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, a esta familia se le conoce como la **familia cuadrática real** o como la **famila logística**.

La mayoría de las funciones sólo tienen puntos periódicos hiperbólicos. Sin embargo, los puntos periódicos no hiperbólicos suelen aparecer en familias de funciones. Cuando esto sucede, la estructura periódica de puntos a menudo sufre una **bifurcación**, es decir, un cambio dramático en el comportamiento de las órbitas.

Las gráficas de las funciones $F_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \in [1, 4]$, son parábolas que abren hacia abajo y cruzan al eje X en los puntos $x = 0$ y $x = 1$. Ver Figura 8.

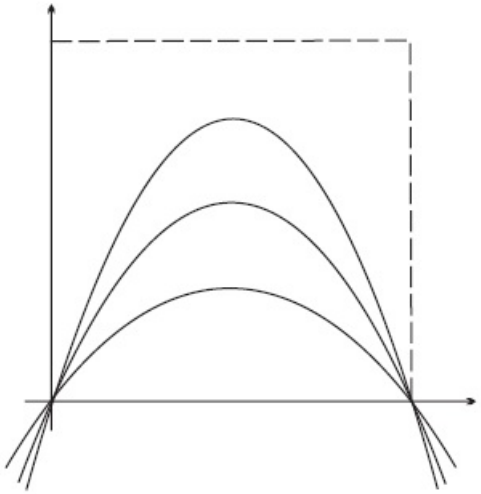

Figura 8: Algunas gráficas de la Familia Logística

2.2.1. Puntos Fijos y Estabilidad de la Familia Cuadrática

Proposición 2.1

1. *Los Puntos fijos de la Familia Cuadrática* F_λ *son* $x = 0$ *y* $p_\lambda = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$.
2. *El punto fijo* $x = 0$ *es un atractor para* $0 < \lambda < 1$ *y un repulsor para* $\lambda > 1$.
3. *El punto fijo* p_λ *es un atractor para* $1 < \lambda < 3$ *y un repulsor para* $0 < \lambda < 1$ *y* $3 < \lambda$.
4. *El único punto crítico es* $x = \dfrac{1}{2}$ *el cual es no degenerado (la segunda derivada de* F_λ *evaluada en* $x = 1/2$ *es diferente de cero) y el valor máximo es* $\dfrac{\lambda}{4}$.

Demostración. Por definición, los puntos fijos deben satisfacer la ecuación

$$\begin{aligned} x &= \lambda x - \lambda x^2 \\ &\Leftrightarrow \lambda x - \lambda x^2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(\lambda - \lambda x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{\lambda - 1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Para determinar su estabilidad, observe que $F'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x$. Por lo tanto, $|F_\lambda(0)| = |\lambda|$, por lo que el punto fijo $x = 0$ es un atractor para $0 < \lambda < 1$ y un repulsor para $\lambda > 1$. Por otro lado, $|F'_\lambda(p_\lambda)| = |\lambda - 2(\lambda - 1)| = |2 - \lambda|$. Así, el punto fijo p_λ es un atractor para $1 < \lambda < 3$ y un repulsor para $0 < \lambda < 1$ y $3 < \lambda$.

Los puntos críticos deben satisfacer $F'_\lambda(x) = \lambda(1-2x) = \lambda - 2\lambda x = 0$, por lo que el único punto crítico es $x = \frac{1}{2}$, luego $F''_\lambda(x) = -2\lambda$ entonces $x = \frac{1}{2}$ es un punto crítico no degenerado. Finalmente

$$F_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{4}.$$

■

Observación 2.2

- *$F_\lambda(x) > 0$ cuando $\lambda > 0$ y $0 \leq x \leq 1$. Entonces, para cualquier valor de λ con $0 \leq \lambda \leq 4$, la función $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ mapea el intervalo unitario en sí mismo. Por supuesto, $F_\lambda(0) = F_\lambda(1) = 0$. El intervalo $[0,1]$ es invariante para todo $\lambda \in [1,4]$ y, por lo tanto, las órbitas de todos los puntos $x \in [0,1]$, bajo F_λ, permanecen en dicho intervalo.*
- *Para $\lambda = 1$ tenemos*

  $$F_1(x) = x(1-x) < x, \quad \forall x > 0.$$

  Cada aplicación sucesiva de F_1 a un $x \in (0,1]$ disminuye su valor. El límite de las iteraciones sucesivas no puede ser negativo ya que $x = 0$ es el único punto fijo. Por lo tanto todos los puntos en $(0,1]$ tienden a cero bajo iteración, pero muy lentamente, ya que $F'_1(0) = 1$. De hecho, para $x < 0$, las iteraciones derivan a valores más negativos y luego tienden a $-\infty$.
- *Como $F_\lambda(1) = 0$, el punto $x = 1$ es eventualmente fijo para todos los valores de λ.*

Proposición 2.3

Para $x \notin [0,1]$ la órbita $o(x, F_\lambda)$ converge a menos infinito para $\lambda > 1$.

Demostración. Si $x < 0$, entonces tenemos $\lambda x(1-x) < x$ ya que $\lambda > 1$, así $F_\lambda(x) < x$. Luego

$$0 > x > F_\lambda(x) > F^2_\lambda(x) > \cdots > F^j_\lambda(x)$$

es una sucesión decreciente. Si esta órbita fuera acotada, tendría que converger a un punto fijo que sería un punto negativo. Como no existe tal punto fijo, la órbita $o(x, F_\lambda)$ tiende a menos infinito.

Si $x > 1$, entonces $F_\lambda(x) < 0$ por lo que la órbita $o(x, F_\lambda)$ converge a menos infinito. ■

El análisis gráfico produce fácilmente los resultados anteriores, como se muestra en la **Figura 9**.

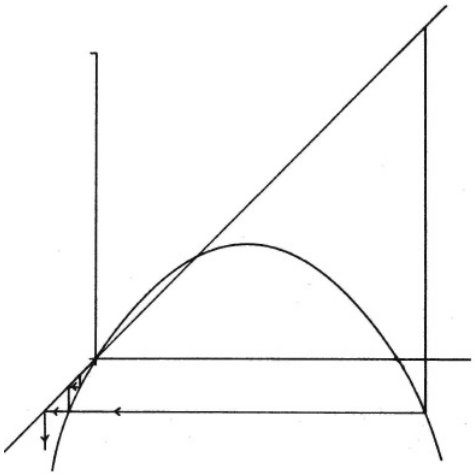

Figura 9: Análisis gráfico de $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ para $x \notin [0,1]$

Inspeccionando las gráficas es evidente que el punto fijo p_λ es un atractor con $0 < F'_\lambda(p_\lambda) < 1$ para $\lambda > 1$ pero cercano a 1. En $\lambda = 2$ este punto fijo coincide con el punto crítico de F_λ, $p_\lambda = \dfrac{1}{2}$, por lo que se vuelve superatractor, es decir, $F'_\lambda(p_\lambda) = 0$. Y para λ ligeramente mayor que 2, p_λ se mantiene como atractor aunque su derivada es negativa, es decir, $-1 < F'_\lambda(p_\lambda) < 0$.

Para $\lambda \in (1,2]$ la convergencia a p_λ es monótona, mientras que para λ ligeramente mayor que 2 la convergencia es en *espiral* (ver Figura 10). Este cambio en la forma de la convergencia se produce justamente en $\lambda = 2$.

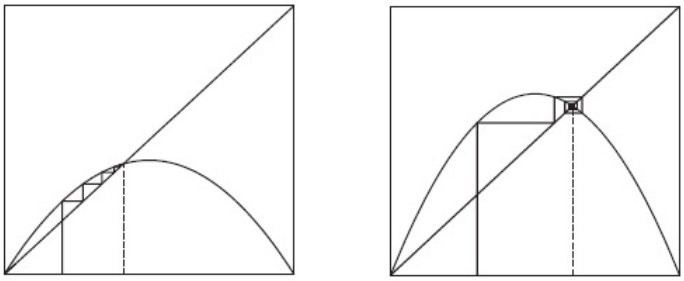

Figura 10: Dos tipos de convergencia a p_λ

Observe también que si seguimos aumentando ligeramente el valor de λ, la derivada $F'_\lambda(p_\lambda)$ sigue decreciendo hasta ser menor que -1. Luego, debe existir un cierto valor del parámetro, digamos λ_1, para el cual $F'_\lambda(p_\lambda) = -1$, si $\lambda = \lambda_1$, y $F'_\lambda(p_\lambda) < -1$, si $\lambda_1 < \lambda$.

Podríamos concluír que existe $\lambda_1 > 1$ de modo que p_λ es atractor si λ varía en el intervalo $(1, \lambda_1)$ y es repulsor si $\lambda > \lambda_1$. Ha ocurrido un cambio importante en la dinámica, una bifurcación, al cruzar el parámetro el valor λ_1. En este caso es fácil determinar el valor de λ_1. Como $F'_\lambda(p_\lambda) = 2 - \lambda$, se sigue que $|F'_\lambda(p_\lambda)| < 1$ si y sólo si $1 < \lambda < 3$. Por lo tanto, $\lambda_1 = 3$.

Del análisis gráfico se desprende que si $1 < \lambda < 3$, las órbitas de todos los puntos en el intervalo

$[0,1]$, a excepción de las de 0 y de 1, convergen al punto fijo atractor.

Proposición 2.4

Si $1 < \lambda < 3$ y $x \in (0,1)$, entonces la órbita $o(x, F_\lambda)$ converge al punto fijo p_λ.

Demostración. Ya que según el análisis gráfico la convergencia de las órbitas a p_λ es de una forma si $1 < \lambda \leq 2$, y de otra diferente si $2 < \lambda < 3$, analizamos estas dos situaciones por separado.

$1 < \lambda \leq 2$
En este caso se cumplen las siguientes condiciones:

- El punto fijo $p_\lambda = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$ está en el intervalo $(0, \frac{1}{2}]$.
- Se tiene que $0 \leq F'_\lambda(p_\lambda) < 1$. Además $F'_\lambda(p_\lambda) = 0$ si $\lambda = 2$.
- La función F_λ es creciente en $(0, \frac{1}{2}]$. Como $F_\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{4} \leq \frac{1}{2}$, entonces $F_\lambda([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$.
- Para toda $x \in (0, \frac{1}{2}]$, la órbita $o(x, F_\lambda)$ es monótona y acotada, por lo tanto convergente.
- Como F_λ sólo tiene dos puntos fijos, $x = 0$ y p_λ, y $F'_\lambda(0) = \lambda > 1$, entonces si $x \in (0, p_\lambda)$, entonces $x < F_\lambda(x) < p_\lambda$, y si $p_\lambda < \frac{1}{2}$ y $x \in (p_\lambda, \frac{1}{2}]$, entonces $p_\lambda < F_\lambda(x) < x$.
  Por lo tanto para toda $x \in (0, \frac{1}{2}]$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} (F_\lambda)^n(x) = p_\lambda$.
- Si $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, $F_\lambda(x)$ está $(0, \frac{1}{2})$, y su órbita converge también a p_λ.

$2 < \lambda < 3$
Ahora se cumplen las siguientes condiciones:

- El punto fijo $p_\lambda = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$ está en el intervalo $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$.
- Se tiene que $-1 < F'_\lambda(p_\lambda) < 0$. Este hecho es el responsable de la forma en la cual las órbitas convergen en forma de espiral al punto p_λ.
- Como la función F_λ es creciente en $[0, \frac{1}{2}]$ y decreciente en $[\frac{1}{2}, 1]$, y $F_\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{4} > F_\lambda(p_\lambda) = p_\lambda$, entonces existe un único punto en $[0, \frac{1}{2}]$, que llamamos q_λ, tal que $F_\lambda(q_\lambda) = p_\lambda$. De hecho, $q_\lambda = \frac{1}{\lambda}$. Así tenemos que $q_\lambda < \frac{1}{2} < p_\lambda$ y $F_\lambda(q_\lambda) = F_\lambda(p_\lambda) = p_\lambda$.
- Al aplicar la función F_λ obtenemos el siguiente *movimiento* de intervalos cerrados:

$$\left[\frac{1}{\lambda}, p_\lambda\right] \to \left[p_\lambda, \frac{\lambda}{4}\right] \to \left[F_\lambda\left(\frac{\lambda}{4}\right), p_\lambda\right].$$

- Sea $F_\lambda^2 = F_\lambda \circ F_\lambda$. Para el rango de los valores de λ que estamos considerando se tiene que

$$F_\lambda\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\lambda^2}{16}(4 - \lambda) > \frac{1}{2}.$$

  Se sigue que $F_\lambda^2([q_\lambda, p_\lambda]) \subset [\frac{1}{2}, p_\lambda]$. Y en particular, obtenemos que

$$F_\lambda^2\left(\left[\frac{1}{2}, p_\lambda\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, p_\lambda\right].$$

- Como F_λ^2 es creciente en el intervalo $[\frac{1}{2}, p_\lambda]$ y $\frac{1}{2} < F_\lambda^2(\frac{1}{2}) < p_\lambda$, entonces la órbita $o(\frac{1}{2}, F_\lambda^2)$ es monótona creciente. Sea x_0 el siguiente punto

$$\lim_{n\to\infty} (F_\lambda^2)^n \left(\frac{1}{2}\right) = x_0 \leq p_\lambda.$$

- Como F_λ es continua, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (F_\lambda)^{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right) = F_\lambda(p_\lambda) = p_\lambda.$$

  Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} (F_\lambda)^n(\frac{1}{2}) = p_\lambda$.

- Si $x \in [q_\lambda, p_\lambda]$, entonces $F_\lambda(x) \in [\frac{1}{2}, p_\lambda]$. Por lo tanto, la órbita $o(x, F_\lambda)$ converge también a p_λ.

- Para cada punto $x \in (0, p_\lambda) \cup (p_\lambda, 1)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(F_\lambda)^n(x) \in [\frac{1}{2}, p_\lambda]$. Todos estos puntos tienen órbitas convergentes al punto p_λ.

Así concluimos que, también en este caso, la cuenca de atracción de p_λ es todo el intervalo abierto $(0, 1)$. ■

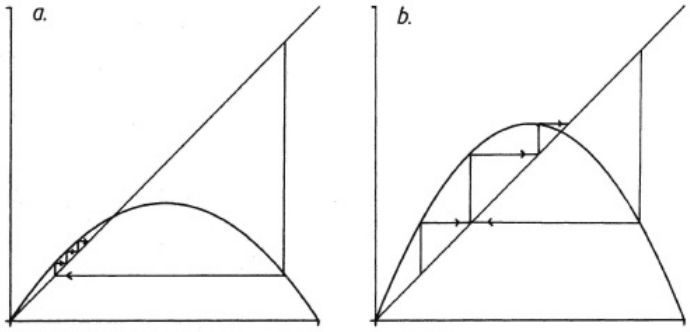

Figura 11: Análisis gráfico de $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ cuando **a.** $1 < \lambda \leq 2$ y **b.** $2 < \lambda < 3$ para $x \in (0, 1)$

Observación 2.5

- *Para $\lambda = 2$ el punto fijo es un* ***superatractor****.*

  Cuando $\lambda = 2$, los puntos $\frac{1}{\lambda}$ y $1 - \frac{1}{\lambda}$ coinciden y son iguales a $\frac{1}{2}$ con $F_2'(\frac{1}{2}) = 0$. No existe una región "decreciente constantemente" y el punto fijo, $x = \frac{1}{2}$, es un superatractor: las iteraciones se acercan al punto fijo más rápido que cualquier tasa geométrica.

- *Para $\lambda = 3$ el punto fijo $x = 0$ es inestable, pero el tipo de estabilidad del punto p_λ no se puede determinar de las* ***Definiciones 1.17*** *y* ***1.18****, ya que $F_3'(p_\lambda) = -1$. Esto sugiere que $\lambda = 3$ es un* ***valor de bifurcación****.*

2.3. Bifurcación de Duplicación de Período. Ruta al Caos

Tarataremos una importante bifurcación que sufre un punto no hiperbólico x_p cuando F_λ se somete a perturbaciones.

Como hemos visto anteriormente, si el punto fijo x_p se vuelve inestable, una órbita no puede aproximarse a x_p. Sin embargo, si las iteraciones permanecen acotadas, es posible que las iteraciones impares converjan a un punto límite, digamos x^*, y las iteraciones pares converjan a $F_\lambda(x^*)$. Si este es el caso, entonces $F_\lambda^2(x^*) = x^*$ con $F_\lambda(x^*) \neq x^*$, esto es x^* es un punto períodico de período 2. Esta bifurcación se llama **duplicación de período**. Un diagrama de bifurcación típico de esta importante bifurcación se muestra en la **Figura 12**.

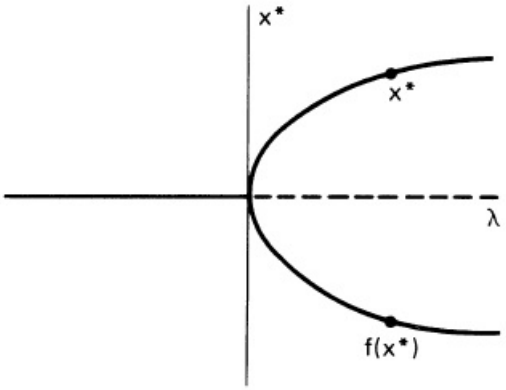

Figura 12: Diagrama de Bifurcación de Duplicación de Período

¿Qué pasa con la estabilidad de las órbitas periódicas? Como en el caso de los puntos fijos, los puntos cercanos a la órbita periódica pueden quedar atrapados o repelidos por la órbita. El hecho clave es que un punto periódico para F_λ es un punto fijo para F_λ^k.

Es útil repasar la regla de la cadena del cálculo, que muestra cómo expandir la derivada de una composición de funciones:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Nuestro interés actual en la regla de la cadena es para $f = g = F$, en cuyo caso tenemos

$$(F^2\lambda)'(x) = F'_\lambda(F_\lambda(x))F'_\lambda(x)$$

Si x resulta ser un punto de período dos para F_λ, la regla de la cadena dice algo bastante simple: la derivada de F_λ^2 en un punto de una órbita de período dos es simplemente el producto de las derivadas de F_λ en los dos puntos de la órbita. En particular, la derivada de F_λ^2 es la misma cuando se evalúa en cualquier punto de la órbita. Este acuerdo significa que tiene sentido hablar de la estabilidad de una órbita del período dos.

Ahora el comportamiento de la órbita de período dos de $F_\lambda = \lambda x(1-x)$ con $\lambda = 3.3$ como muestra la siguiente tabla puede explicarse completamente.

n	$F_\lambda^n(x)$	$F_\lambda^n(x)$	$F_\lambda^n(x)$
0	0.2000	0.5000	0.9500
1	0.5280	0.8250	0.1568
2	0.8224	0.4764	0.4362
3	0.4820	0.8232	0.8116
4	0.8239	0.4804	0.5047
5	0.4787	0.8237	0.8249
6	0.8235	0.4792	0.4766
7	0.4796	0.8236	0.8232
8	0.8236	0.4795	0.4803
9	0.4794	0.8236	0.8237
10	0.8236	0.4794	0.4792
11	0.4794	0.8236	0.8236
12	0.8236	0.4794	0.4795
13	0.4794	0.8236	0.8236
14	0.8236	0.4794	0.4794

Tres diferentes órbitas de $F_{3.3} = 3.3x(1-x)$. Cada uno se acerca a una órbita de período 2

La órbita periódica $\{0.4794, 0.8236\}$ será un atractor siempre que la derivada $(F_\lambda^2)'(p_1) = F'_\lambda(p_1)F'_\lambda(p_2) = (F_\lambda^2)'(p_2)$ sea menor que 1 en valor absoluto. Un cálculo sencillo muestra que este número es $F'_\lambda(0.4794)F'_\lambda(0.8236) = -0.2904$.

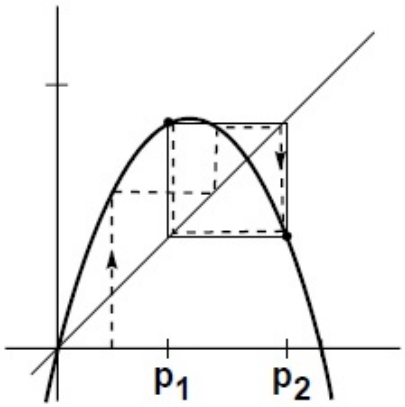

Figura 13: Órbita que converge a un atractor de período 2

2.3.1. $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$

En este caso, los puntos fijos $x = 0$ y $p_\lambda = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$ son repulsores, por lo tanto, si $0 < x_0 < 1$ entonces las iteradas $F_\lambda^n(x_0)$ no pueden acercarse a ninguno de los dos puntos fijos. Sin embargo, permanecen en el intervalo $(0, 1)$. Es plausible que a medida que λ aumenta hasta 3, el punto fijo p_λ sufre una bifurcación que duplica el período dando lugar a una órbita periódica asintóticamente estable de período 2; ver **Figura 14**.

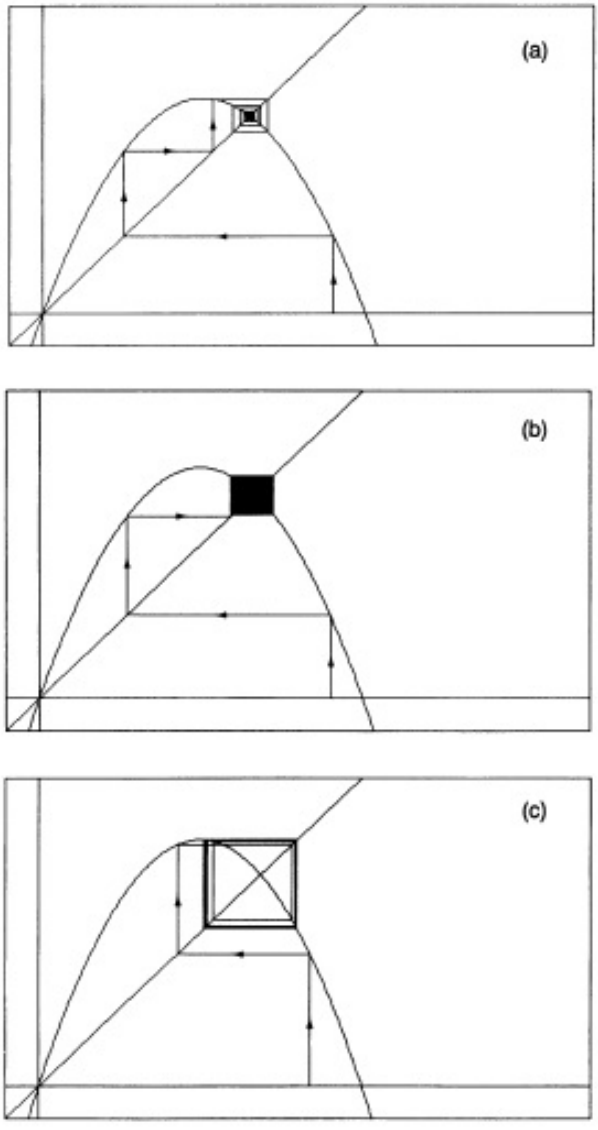

Figura 14: La función logística cerca de la primera bifurcación de duplicación de período: **(a)** $\lambda = 2.8$, **(b)** $\lambda = 3$, **(c)** $\lambda = 3.2$

Analizando la segunda iteración de F_λ, es decir, F_λ^2 para valores de $\lambda < 3$, podemos observar que los únicos puntos fijos siguen siendo $x = 0$ y $p_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$ (ver **Figura 15 (a)**) y esta situación se conserva hasta el valor $\lambda = 3$. Ya que $F_3'(p_\lambda) = -1$ como vimos anteriormente, entonces

$$(F_3^2)'(p_\lambda) = F_3'(F_3(p_\lambda))F_3'(p_\lambda) = F_3'(p_\lambda)F_3'(p_\lambda) = (-1)(-1) = 1$$

por lo que la función identidad es tangente a la gráfica de F_3^2 (ver **Figura 15 (b)**). Sin embargo, para valorres de $\lambda > 3$ se produce un cambio importante en el comportamiento en la dinámica de F_λ el cual consiste en la aparición de dos nuevos puntos fijos para F_λ^2 (ver **Figura 15 (c)**).

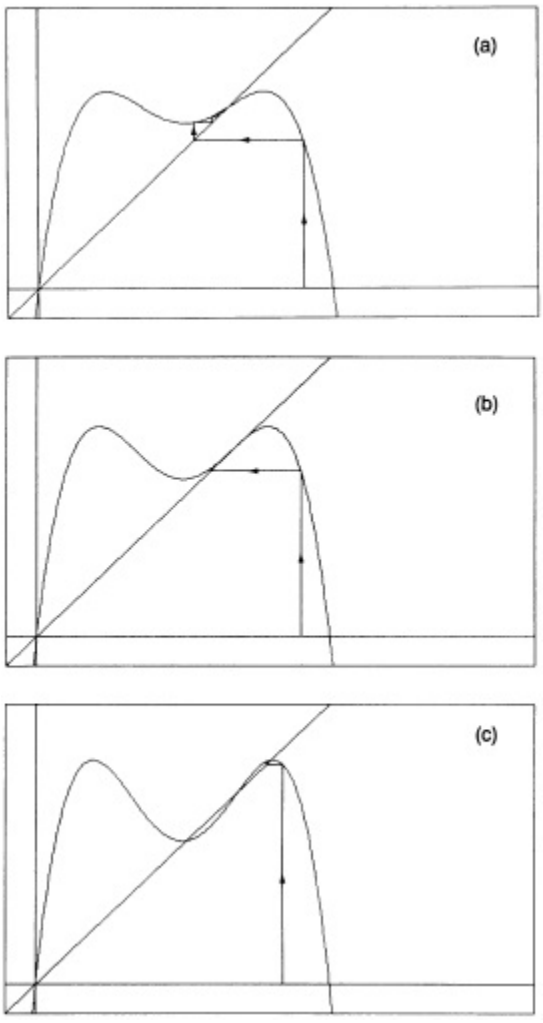

Figura 15: F_λ^2 para valores: **(a)** $\lambda = 2.8$, **(b)** $\lambda = 3$, **(c)** $\lambda = 3.2$

Proposición 2.6

Para $\lambda > 3$ existes dos nuevos puntos periódicos de período dos.

Demostración. Los puntos fijos deben resolver la ecuación $F_\lambda^2(x) - x = 0$. Usando el hecho de que $x = 0$ y $x = p_\lambda$ son raíces de $F_\lambda(x) - x$ entonces también lo son de $F_\lambda^2(x) - x$. Luego, $F_\lambda(x) - x$ divide a $F_\lambda^2(x) - x$, por lo tanto

$$F_\lambda^2(x) - x = (F_\lambda(x) - x)P(x),$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado 2. Ahora, realizando la división tenemos

$$\begin{aligned} \frac{F_\lambda^2(x) - x}{F_\lambda(x) - x} &= \frac{\lambda[\lambda x(1-x)][1 - \lambda x(1-x)] - x}{\lambda x(1-x) - x} \\ &= \lambda^2 x^2 - (\lambda^2 + \lambda)x + (\lambda + 1). \end{aligned}$$

En consecuencia, los puntos buscados de periodo 2 son las raíces del polinomio $P(x) = \lambda^2 x^2 - (\lambda^2 + \lambda)x + (\lambda + 1)$. Así, resolviendo la ecuación $P(x) = 0$, obtenemos que las raíces son:

$$x^+ = \frac{(\lambda+1) + \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda} \quad \text{y} \quad x^- = \frac{(\lambda+1) - \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda}$$

Por lo tanto, existen raíces reales cuando $(\lambda+1)(\lambda-3) \geq 0$, es decir, cuando $\lambda \leq -1$ o se tiene $\lambda \geq 3$. Observamos que cuando $\lambda = 3$, $P(x)$ sólo tiene una raíz en $p_\lambda = \frac{2}{3}$ y en consecuencia no existen nuevos puntos fijos para F_λ^2. Sin embargo, para $\lambda > 3$ existen dos raíces reales y distintas para $P(x)$ y por lo tanto dos nuevos puntos periódicos de período dos para F_λ^2. ■

Ahora, anallizamos la estabilidad de la nueva órbita $\{x^+, x^-\}$ de período dos que hemos encontrado para F_λ^2 con $\lambda > 3$.

Como lo hicimos anteriormente para el valor $\lambda = 3$ y usando la regla de la cadena, tenemos que

$$(F_\lambda^2)'(x^+) = F_\lambda'(F_\lambda(x^+))F_\lambda'(x^+) = F_\lambda'(x^-)F_\lambda'(x^+) = F_\lambda'(x^-)F_\lambda'(F_\lambda(x^-)) = (F_\lambda^2)'(x^-).$$

Ya que $F_\lambda'(x) = \lambda - 2\lambda x$, entonces

$$F_\lambda'(x^+) = \lambda - 2\lambda\left(\frac{(\lambda+1) + \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda}\right) = -1 - \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}$$

y

$$F_\lambda'(x^-) = \lambda - 2\lambda\left(\frac{(\lambda+1) - \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda}\right) = -1 + \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (F_\lambda^2)'(x^+) &= (F_\lambda^2)'(x^-) \\ &= F_\lambda'(x^+))F_\lambda'(x^-) \\ &= 1 - (\lambda+1)(\lambda-3) \\ &= -\lambda^2 + 2\lambda + 4. \end{aligned}$$

Para terminar, resolvemos la desigualdad $|(F_\lambda^2)'(x^+)| = |(F_\lambda^2)'(x^+)| = |-\lambda^2 + 2\lambda + 4| < 1$, esto es cuando $-1 < -\lambda^2 + 2\lambda + 4 < 1$, . Sabemos que $(F_\lambda^2)'(x^+) = 1$ cuando $\lambda = 3$. Entonces

$$(F_\lambda^2)'(x^+) = -1 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{6}.$$

Ya que solo consideramos valores positivos para λ, el valor que nos interesa es $1 + \sqrt{6}$. Por lo tanto para $\lambda \in (3, 1 + \sqrt{6})$ la órbita $\{x^+, x^-\}$ de período dos es un atractor y un repulsor si $\lambda > 1 + \sqrt{6}$. Observe además que para $\lambda = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449499\ldots$ tenemos nuevamente una bifurcación de duplicación de periodo.

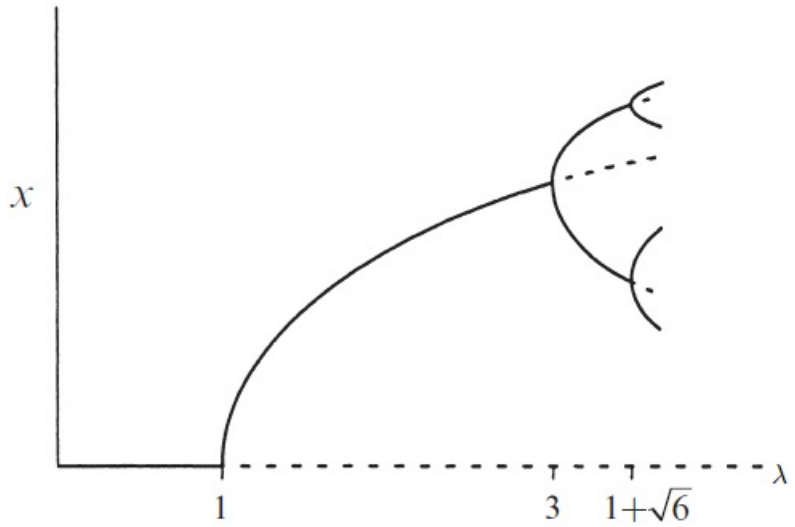

Figura 16: Diagrama de bifurcación de duplicación de período de la función logística

Observación 2.7

La raíz positiva de $-\lambda^2+2\lambda+4 = (F_\lambda^2)'(x^+)$ *es* $\lambda_1 = 1+\sqrt{5}$. *Por lo tanto* $(F_\lambda^2)'(\lambda_1) = 0$. *Entonces para* $\lambda_1 = 1 + \sqrt{5}$ *tenemos* $x^+ = \dfrac{1}{2}$. *Es decir, los puntos de período* 2 *son superatractores, ya que uno de ellos coincide con* $\frac{1}{2}$ *que es el máximo de* F_{λ_1}.

2.3.2. $1 + \sqrt{6} < \lambda < \lambda_\infty \approx 3.5699456\ldots$

La aparición de la órbita del período dos a medida que λ aumenta hasta 3 es sólo el comienzo de una fascinante sucesión de bifurcaciones que conducen a una dinámica muy complicada. Por ejemplo, en $\lambda = 3.449$ (aproximadamente) la órbita del período dos pierde su estabilidad y da lugar a una órbita del período cuatro asintóticamente estable, como se ve en la Figura 17. De hecho, hay una sucesión creciente de valores de parámetros $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ en el que la función logística sufre repetidamente una bifurcación que duplica el período: a medida que λ aumenta hasta λ^k, la órbita periódica asintóticamente estable del período 2^k se vuelve inestable y una órbita periódica estable del doble del período se bifurca de la órbita del período inferior (ver **Figura 17.**). Los primeros valores de bifurcación aproximadamente son:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = 3 && 2\\
&\lambda_2 = 3.449\ldots && 4\\
&\lambda_3 = 3.54409\ldots && 8\\
&\lambda_4 = 3.5644\ldots && 16\\
&\lambda_5 = 3.568759\ldots && 32\\
&\vdots\\
&\lambda_\infty = 3.5699456\ldots && \infty
\end{aligned}$$

Esta sucesión converge a un número λ_∞ cuando $k \to \infty$ y λ_∞ es 3.5699456 (aproximadamente). Además, la relación de las distancias de los valores de los parámetros entre bifurcaciones sucesivas que duplican el período se aproxima a una constante

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = 4.6692\ldots .$$

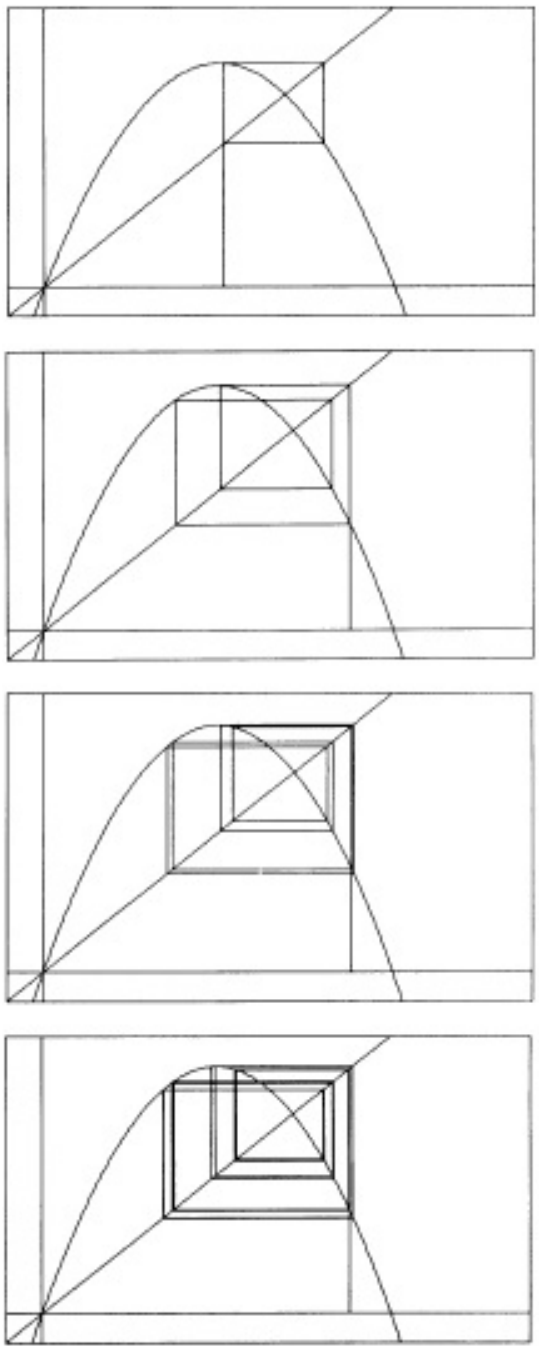

Figura 17: Sucesión de duplicación de período de la función logística: órbitas periódicas de período 2, 4, 8 y 16 para valores de $\lambda = 3.2$, 3.52, 3.55 y 3.567, respectivamente

2.3.3. $\lambda > \lambda_\infty \approx 3.5699456\ldots$

En este rango de parámetros la dinámica de la función logística se vuleve bastante complicada. Para algunos valores de λ, las iteradas se mueven de manera muy errática, un comportamiento a menudo llamado **caos** (ver **Figura 18**).

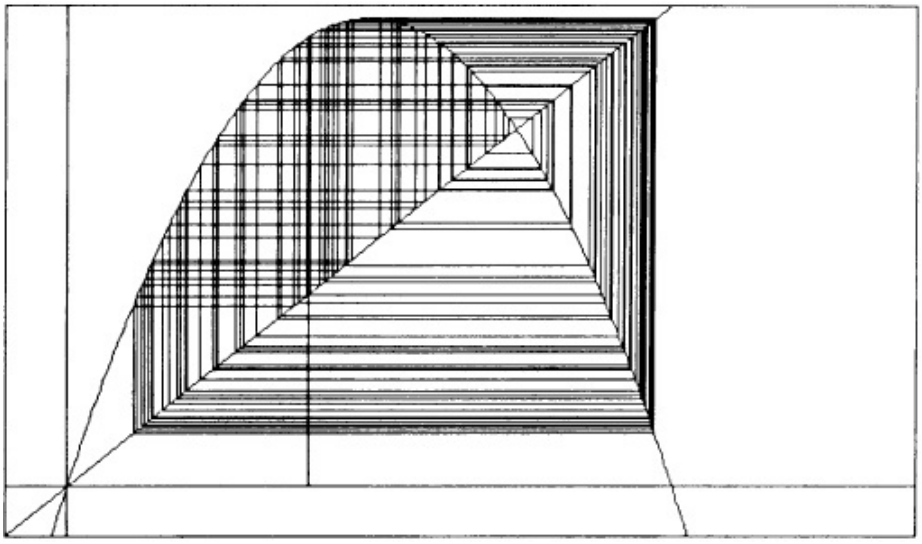

Figura 18: Caos aparente, o una órbita periódica con un período muy largo, en la función logística para $\lambda = 3.891$

De hecho, mucho antes de que se desentrañara la dinámica de la función logística, los analistas numéricos lo utilizaban como una forma de generar números aleatorios. Para otros valores de λ, hay puntos periódicos que sufren sucesioness de bifurcaciones que duplican el período a medida que varía el parámetro. Toda esta notable dinámica se resume en el diagrama de bifurcación calculado numéricamente en la figura 19.

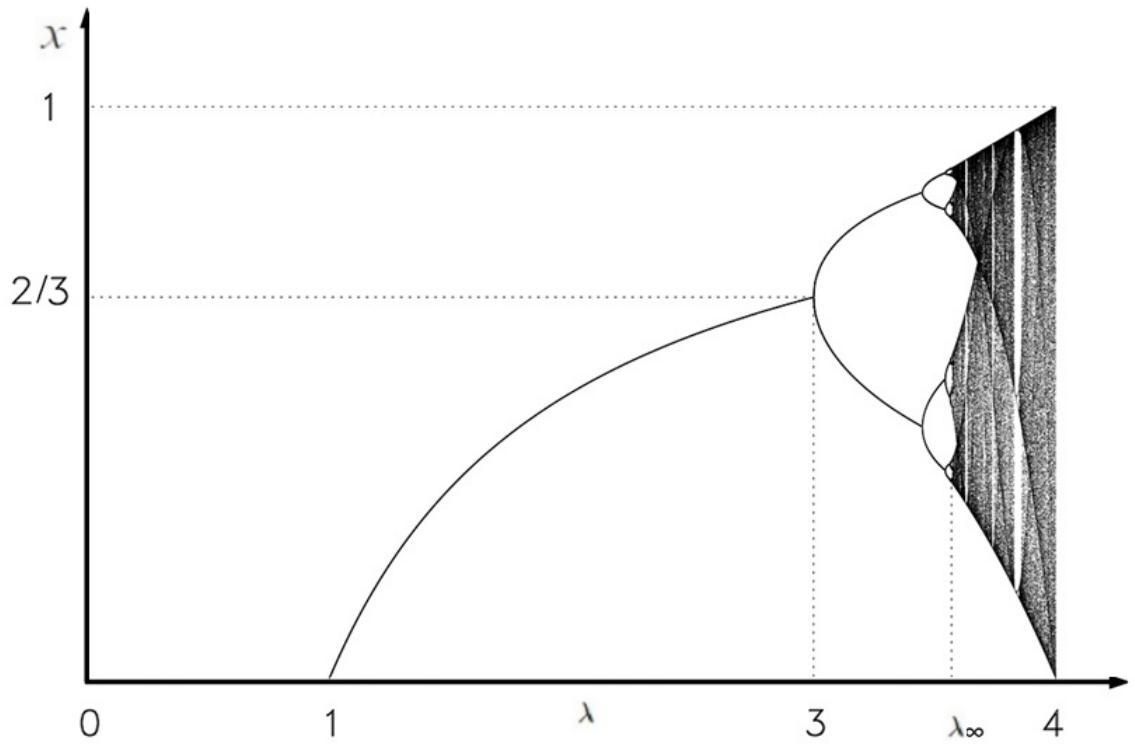

Figura 19: Diagrama de bifurcación completa generada por computadora para la función logística

2.4. Ventanas Periódicas

Una de las características más intrigantes del diagrama de órbitas (**Figura 19**) es la aparición de ventanas periódicas para $\lambda > \lambda_\infty$. La ventana del período 3 que ocurre cerca de $3.8284\ldots \leq \lambda \leq 3.8415\ldots$ es el más llamativo (ver **Figura 20**).

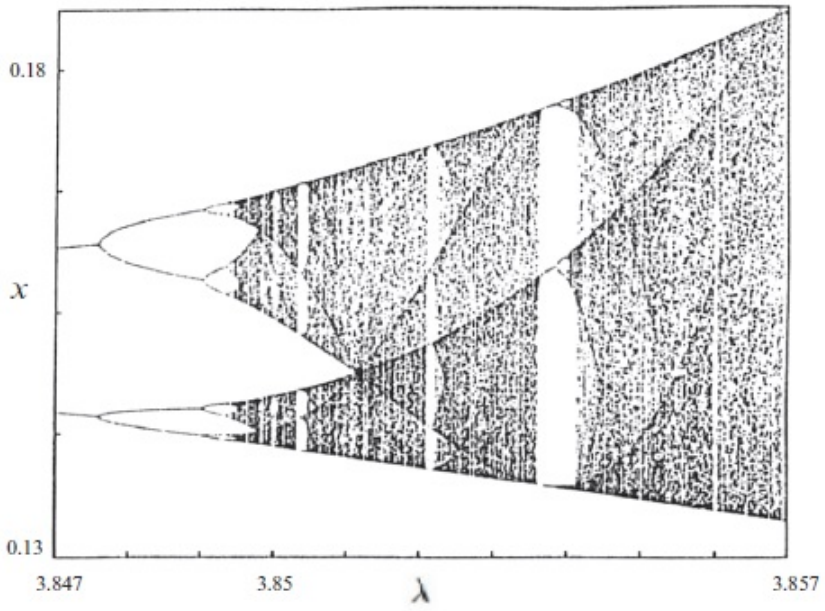

Figura 20: Aumento del diagrama de bifurcación de la función logística

De repente, en un contexto de caos, aparece de la nada una órbita estable de período 3. Vamos a comprender cómo se crea esta órbita de período 3. (El mismo mecanismo explica la creación de todas las demás ventanas, por lo que basta con considerar este caso más simple).

2.4.1. $\lambda = 1 + \sqrt{8}$

Primero, algo de notación. Sea $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ de modo que la función logística es $x_{n+1} = F_\lambda(x_n)$.

Entonces $x_{n+2} = F_\lambda(F_\lambda(x_n))$ o simplemente, $x_{n+2} = F_\lambda^2(x_n)$. Similarmente, $x_{n+3} = F_\lambda^3(x_n)$. La función de la tercera iteración $F_\lambda^3(x)$ es la clave para comprender el nacimiento de la órbita de período 3. Cualquier punto p en una órbita de período 3 se repite cada tres iteraciones, por definición, por lo que dichos puntos satisfacen $p = F_\lambda^3(p)$ y, por lo tanto, son puntos fijos de la función de la tercera iteración. Desafortunadamente, dado que $F_\lambda^3(x)$ es un polinomio de octavo grado, no podemos resolver explícitamente los puntos fijos. Pero un gráfico proporciona información suficiente. La figura 21 representa $F_\lambda^3(x)$ para $\lambda = 3.835$.

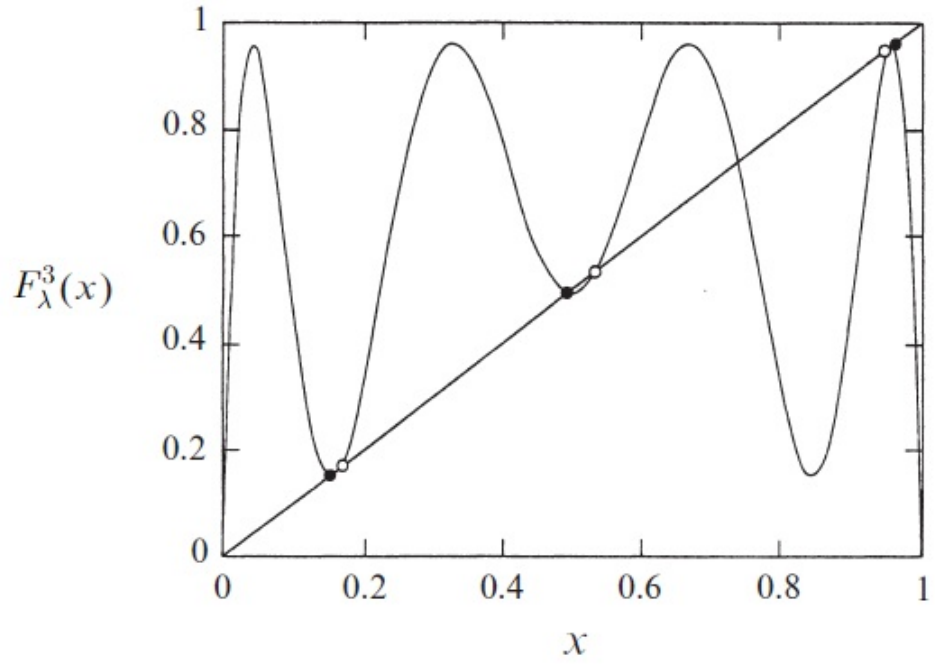

Figura 21: Aumento del diagrama de bifurcación de la función logística

Las intersecciones entre la gráfica y la línea diagonal corresponden a soluciones de $F_\lambda^3(x) = x$. Existen ocho soluciones, seis que nos interesan y marcadas con puntos, y dos impostores que no son genuinos del período 3; en realidad son puntos fijos, o puntos del período 1 para los cuales $F_\lambda(x^* = x^*)$. Los puntos negros en la Figura 21 corresponden a una órbita de período 3. Observe que la pendiente de $F_\lambda^3(x)$ es poco profunda en estos puntos, lo que es consistente con la estabilidad de la órbita. En cambio, la pendiente supera 1 en el órbita marcada por los puntos abiertos. Por lo tanto, esta órbita de período 3 es inestable.

Ahora supongamos que disminuimos λ hacia el régimen caótico. Luego, la gráfica de la Figura 21 cambia de forma: las colinas bajan y los valles suben. Por tanto, la curva se aleja de la diagonal. La figura 22 muestra que cuando $\lambda = 3.8$ las seis intersecciones marcadas han desaparecido. Por lo tanto, para algún valor intermedio entre $\lambda = 3.8$ y $\lambda = 3.835$, la gráfica de $F_\lambda^3(x)$ debe haberse vuelto tangente a la diagonal. En este valor crítico de λ, las órbitas estable e inestable del período 3 se fusionan y aniquilan en una bifurcación tangente. Esta transición define el comienzo de la ventana periódica.

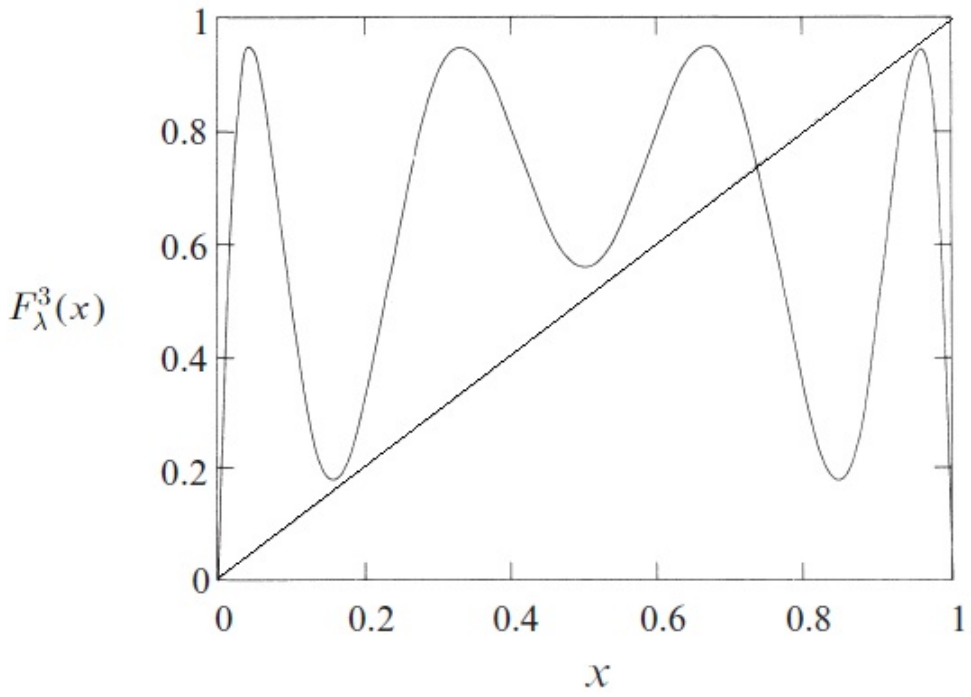

Figura 22: Aumento del diagrama de bifurcación de la función logística

Se puede demostrar analíticamente que el valor de λ en la cual la gráfia de la tercera iteración es tangente a la función identidad es $1 + \sqrt{8} \approx 3.8284$.

2.4.2. $\lambda > 1 + \sqrt{8}$

A medida que aumenta el parámetro λ, la órbita de período 3 sufre una bifurcación que duplica el período y cede su estabilidad a una órbita del período 6 asintóticamente estable; ver Figura 23. Si λ aumenta aún más, hay una sucesión de bifurcaciones que duplican el período.

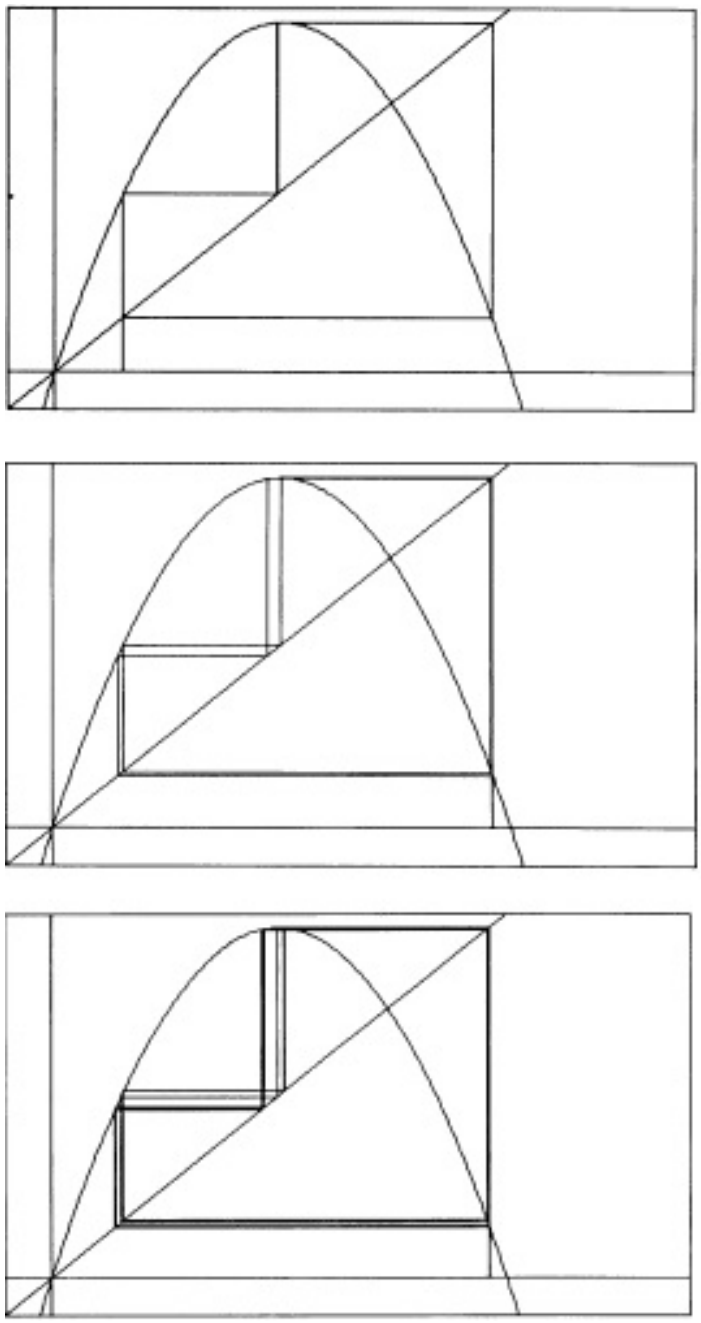

Figura 23: Sucesión de duplicación de período de una órbita de período 3 en la función logística: órbitas periódicas de período 3, 6 y 12 para valores de $\lambda = 3.8284$, 3.845, y 3.849 respectivamente

2.4.3. $\lambda = 4$

En las secciones anteriores estudiamos funciones de la familia logística $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$. Para valores de $\lambda = 3.2$, 3.52, 3.55 y 3.567 encontramos órbitas periódicas de período 2, 4, 8 y 16 respectivamente. A continuación, nos centraremos en el caso $\lambda = 4$, que es tan interesante. La razón por la que es tan interesante es que no tiene sumideros, lo que lleva a preguntar dónde terminan las órbitas. La gráfica de $F_4(x) = 4(1-x)$ se muestra en la Figura 24(a). Aunque la gráfica es una parábola del tipo que se estudia a menudo en los cursos de cálculo elemental, la función definida por F_4 tiene un comportamiento dinámico muy rico. Para empezar, la recta diagonal $y = x$ intersecta a $F_4(x) = 4(1-x)$ en los puntos $x = 0$ y $x = 3/4$, por lo que hay dos puntos fijos, ambos inestables. ¿Tiene F_4 otras órbitas periódicas?

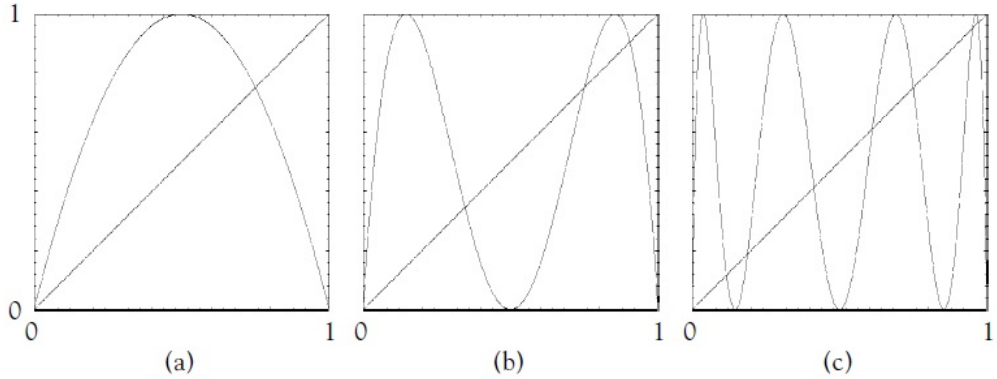

Figura 24: (a) La función logística $F_4(x) = 4(1-x)$, (b) F_4^2, (c) F_4^3

Una forma de buscar órbitas periódicas es trazar la gráfica de F_4^n. Cualquier punto de período dos, por ejemplo, será un punto fijo de F_4^2. Por lo tanto podemos encontrar puntos periódicos gráficamente.

La gráfica de F_4^2 se muestra en la Figura 24(b). No es difícil verificar la forma general del gráfico. Primero, observe que la imagen de $[0,1]$ bajo F_4 es todo $[0,1]$, por lo que la gráfica permanece completamente dentro del cuadrado unitario. En segundo lugar, observe que $F_4(1/2) = 1$ y $F_4(1) = 0$ implica que $F_4^2(1/2) = 0$. Además, dado que $F_4(x_1) = 1/2$ para algún x_1 entre 0 y $\frac{1}{2}$, se sigue que $F_4^2(x_1) = 1$. De manera similar, existe otro número x_2 tal que $F_4^2(x_2) = 1$. De la Figura 24(b) se desprende claramente que F_4^2 tiene cuatro puntos fijos y, por lo tanto, F_4 tiene cuatro puntos que tienen período uno o dos. Ya conocemos dos de estos puntos: son puntos fijos para F_4. El nuevo par de puntos, p_1 y p_2, forman una órbita de período dos: es decir, $F_4(p_1) = p_2$ y $F_4(p_2) = p_1$.

¿Tiene F_4 alguna órbita de periodo tres? Existe un punto x_3 entre 0 y x_1 para el cual $F4(x_3) = x_1$. Esto implica que $F_4^3(x_3) = 1$. Lo mismo se aplica a otros tres puntos en $[0,1]$, por lo que y $F_4^3(x)$ tiene cuatro máximos relativos de altura 1 en $[0,1]$. Como $F_4(1) = 0$, F^3 tiene raíces en $x = 0$, x_1. $\frac{1}{2}$ x_2 y 1, que separan los máximos. La gráfica de F^3 se muestra en la Figura 24(c). La función F^3 tiene ocho puntos fijos, dos de los cuales se sabe que son los puntos fijos $x = 0$ y $p_4 = \frac{3}{4}$ de F_4. Quedan seis puntos más por tener en cuenta, que deben formar dos órbitas de período tres. De manera similar que F_4^4 tiene $16 = 2^4$ puntos fijos, todos en $[0,1]$. Con cada iteración sucesiva de F_4, el número de puntos fijos de la iteración se duplica. En general vemos que F_4^k tiene 2^k puntos fijos, todos en $[0,1]$.

2.5. El Conjunto de Cantor para $\lambda > 4$

Veremos ahora el caso para $\lambda > 4$ en el intervalo unitario $I = [0, 1]$. Dado que $\lambda > 4$, el valor máximo $\frac{\lambda}{4}$ de F_λ es mayor que uno. Por lo tanto, ciertos puntos salen de $I = [0, 1]$ después de una iteración de F_λ. Denotaremos el conjunto de dichos puntos por A_0. Claramente, A_0 es un intervalo abierto centrado en $\frac{1}{2}$ y tiene la propiedad de que, si $x \in A_0$, entonces $F_\lambda(x) > 1$, luego $F_\lambda^2(x) < 0$ y $F_\lambda^n(x) \to -\infty$. A_0 es el conjunto de puntos que escapan inmediatamente de I. Todos los demás puntos en I permanecen en I después de una iteración de F_λ.

Sea $A_1 = \{x \in I | F_\lambda(x) \in A_0\}$. Si $x \in A_1$, entonces $F_\lambda^2(x) > 1$, $F_\lambda^3(x) < 0$, y así, como antes, $F_\lambda^n(x) \to -\infty$. Inductivamente, sea $A_n = \{x \in I | F_\lambda^n(x) \in A_0\}$. Es decir, $A_n = \{x \in I | F_\lambda^i(x) \in A_0$ para $i \leq n$ pero $F_\lambda^{n+1}(x) \notin I\}$, así que A_n consta de todos los puntos que escapan de I en las primeras $(n + 1)$ iteraciones. Como anteriormente, si x se encuentra en A_n, se deduce que la órbita de x tiende eventualmente a menos infinito. Por lo tanto, dado que conocemos el destino final de cualquier punto que se encuentra en A_n, sólo queda analizar el comportamiento de aquellos puntos que nunca escapan de I, es decir, el conjunto de puntos que se encuentran en

$$I - \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right).$$

Denotemos este conjunto por Λ. Nuestra primera pregunta es: ¿qué es exactamente este conjunto de puntos? Para entender Λ, describimos más cuidadosamente su construcción recursiva.

Como A_0 es un intervalo abierto centrado en $\frac{1}{2}$, $I - A_0$ consta de dos intervalos cerrados, I_0 a la izquierda e I_1 a la derecha (ver Figura 25).

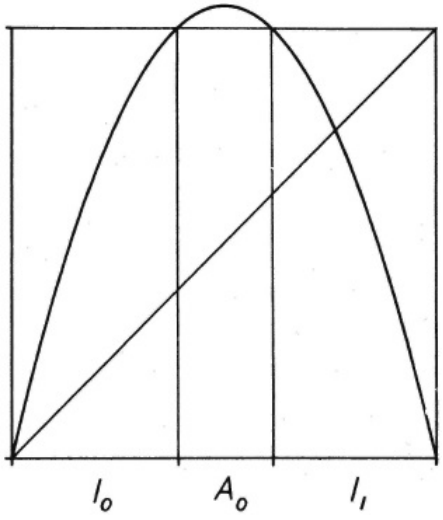

Figura 25: Los intervalos I_0, I_1 y A_0

Observe que F_λ mapea I_0 e I_1 *uno a uno* en I; F_λ crece en I_0 y decrece en I_1. Como $F_\lambda(I_0) = F_\lambda(I_1) = I$, existe un par de subintervalos abiertos, uno en I_0 y otro en I_1, que son mapeados en A_0 por F_λ. Por lo tanto, este par de subintervalos es precisamente el conjunto A_1.

Ahora considere $I-(A_0\cup A_1)$. Este conjunto consiste de 4 intervalos cerrados y F_λ mapea cada uno de ellos *uno a uno* en I_0 o en I_1. En consecuencia, F_λ^2 mapea cada uno de estos intervalos en I. Por lo tanto, vemos que cada uno de los cuatro intervalos en $I-(A_0\cup A_1)$ contiene un subintervalo abierto que F_λ^2 mapea en A_0. Por lo tanto, los puntos en estos intervalos escapan de I en la tercera iteración de F_λ. Este es el conjunto que llamaremos A_2. Observamos que F_λ^2 crece y decrece alternativamente en estos cuatro intervalos. De ello se deduce que la gráfica de F_λ^2 debe tener dos jorobas, como se muestra en la Figura 26.

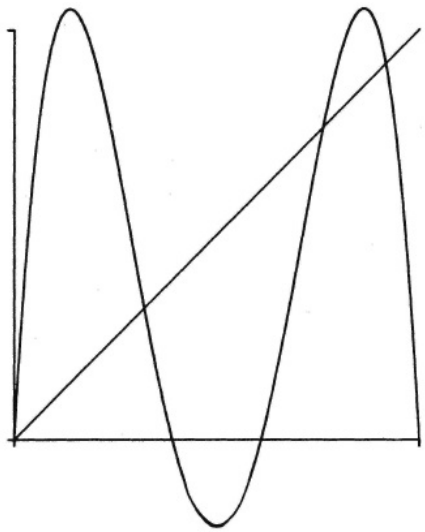

Figura 26: La gráfica de F_λ^2

Continuando de esta manera observamos dos hechos. Primero, A_n consta de 2^n intervalos abiertos disjuntos. Por lo tanto $I-(A_0\cup\cdots\cup A_n)$ consta de 2^{n+1} intervalos cerrados ya que

$$1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1.$$

En segundo lugar, F_λ^{n+1} mapea cada uno de estos intervalos cerrados monótonamente en I. De hecho, la gráfica de F_λ^{n+1} crece y decrece alternativamente en estos intervalos. Así, la gráfica de F_λ^{n+1} tiene exactamente 2^n jorobas en I, y se deduce que la gráfica de F_λ^n intersecta la recta $y=x$ al menos 2^n veces. Esto implica que F_λ^n tiene al menos 2^n puntos fijos en I. Claramente, la estructura de Λ es mucho más complicada cuando $\lambda>4$ que en el caso cuando $\lambda<3$.

La construcción de Λ nos recuerda a la construcción del conjunto de *Cantor* de tercio medio que se describe a continuación: Λ se obtiene eliminando sucesivamente intervalos abiertos de los "medios" de un conjunto de intervalos cerrados.

Definición 2.8

Un conjunto Λ es un conjunto de Cantor si es un subconjunto cerrado, totalmente disconexo y perfecto de I. Un subconjunto de la recta real es totalmente desconectado si no contiene intervalos. Un conjunto es perfecto si cada punto de él es un punto de acumulación o punto límite de otros puntos del conjunto.

Ejemplo 2.9

El conjunto de Cantor de tercio medio. *Este es el ejemplo clásico de un conjunto de Cantor. Comience con* $I = [0, 1]$ *pero elimine el "tercio medio" abierto, es decir, el intervalo* $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. *A continuación, elimine nuevamente de lo que queda los dos tercios medios, es decir, el par de intervalos* $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ *y* $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. *Continúe eliminando los tercios medios de esta manera; observe que* 2^n *intervalos abiertos se eliminan en la enésima etapa de este proceso (ver Figura 27).*

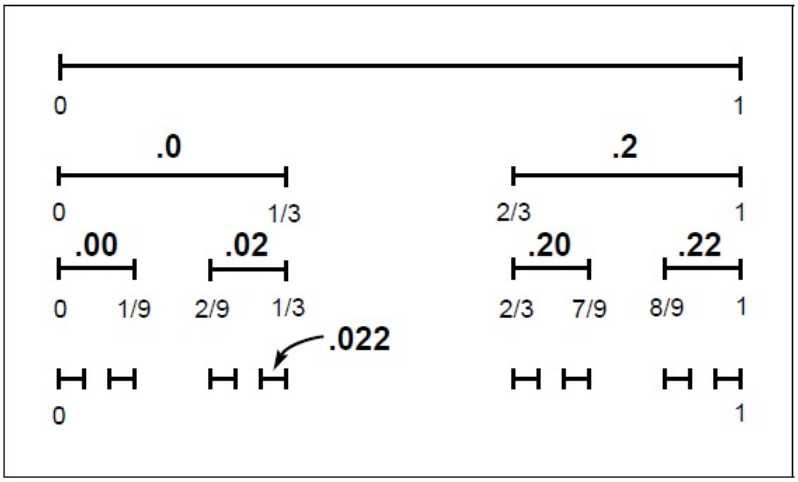

Figura 27: Construcción del conjunto de *Cantor* de tercio medio

Proposición 2.10

$|F'_\lambda(x)| > 1$ *para todo* $x \in I_0 \cup I_1$, *si y sólo si* $\lambda > 2 + \sqrt{5}$.

Demostración. La derivada de F_λ está dada por $F'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x$. Además, $F''_\lambda(x) = -2\lambda < 0$, entonces el menor valor de $|F'_\lambda(x)|$ en I_j con $j = 1, 2$, ocurre en $F_\lambda(x) = 1$. Resolviendo

$$1 = F_\lambda(x) = \lambda x - \lambda x^2,$$

obtenemos

$$x = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}.$$

Pero para estos puntos,

$$|F'_\lambda(x)| = \left|\lambda - 2\lambda\left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}\right)\right| = |\pm\sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}| = \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}.$$

Por lo tanto

$$|F'_\lambda(x)| = \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda} > 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2 + \sqrt{5},$$

y esta última desigualdad se cumple tomando la raíz positiva de $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$. ■

Teorema 2.11

Si $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, entonces Λ es un conjunto de Cantor.

Demostración. Para $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, existe $\mu > 1$ tal que $|F'_\lambda(x)| > \mu$ para todo $x \in \Lambda$. Por la regla de la cadena, se tiene que $|(F^n_\lambda)'(x)| > \mu^n$ también. Afirmamos que Λ no contiene intervalos. En efecto, si así fuera, podríamos elegir $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$, con el intervalo cerrado $[x, y] \subset \Lambda$. Pero entonces, $|(F^n_\lambda)'(\alpha)| > \mu^n$ para todo $\alpha \in [x, y]$. Elijamos n de modo que $\mu^n |y - x| > 1$. Por el Teorema del Valor Medio, se sigue que

$$|F^n_\lambda(y) - F^n_\lambda(x)| \geq \mu^n |y - x| > 1,$$

lo cual implica que al menos uno de $F^n_\lambda(y)$ o quizás $F^n_\lambda(x)$ está fuera de I. Esto es una contradicción, por lo tanto Λ es totalmente disconexo.

Dado que Λ es una intersección anidada de intervalos cerrados, Λ es cerrado.

Ahora demostramos que Λ es perfecto. En primer lugar, observe que cualquier punto final de un A_k está en Λ: en efecto, dichos puntos son eventualmente mapeados al punto fijo $x = 0$, por lo que permanecen en I bajo iteración. Ahora bien, si $p \in \Lambda$ estuviera aislado, cada punto cercano debe salir de I bajo la iteración de F_λ. Dichos puntos deben pertenecer a algún A_k. O existe una sucesión de puntos finales de A_k que convergen a p, o bien todos los puntos en una vecindad eliminada de p se mapean fuera de I mediante alguna potencia de F_λ. En el primer caso, terminamos cuando los puntos finales de A_k se mapean a $x = 0$ y luego están en Λ. En el último caso, podemos suponer que F^n_λ asigna p a 0 y todos los demás puntos en una vecindad de p al eje real negativo. Pero entonces F^n_λ tiene un máximo en p de modo que $(F^n_\lambda)'(p) = 0$. Por la regla de la cadena, debemos tener $F'_\lambda(F^i_\lambda)(p) = 0$ para algún $i < n$. Por lo tanto $F^i_\lambda(p) = \frac{1}{2}$. Pero entonces $F^{i+1}_\lambda(p) \notin I$ y entonces $F^n_\lambda(p) \to -\infty$, contradiciendo el hecho de que $F^n_\lambda(p) = 0$. Por lo tanto hemos terminado. ■

Hemos logrado comprender el comportamiento de las órbitas de F_λ cuando $\lambda > 4$. O un punto tiende a $-\infty$ bajo la iteración de F_λ, o toda su órbita se encuentra en Λ. Por lo tanto, entendemos perfectamente la órbita de un punto bajo F_λ siempre que el punto no se encuentre en Λ. En la siguiente sección, veremos el análisis de la dinámica de F_λ analizando la dinámica de F_λ en Λ.

Cuando $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, hemos probado que $|F'_\lambda(x)| > 1$ en $I_0 \cup I_1$. Esto implica que $|F'_\lambda(x)| > 1$ en Λ. Esta es una condición similar a la condición de hiperbolicidad discutida anteriormente, excepto que requerimos $|F'_\lambda(x)| \neq 1$ en todo un conjunto, no sólo en un punto periódico. Esto motiva la definición de un conjunto hiperbólico:

Definición 2.12

Un conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}$ es un conjunto hiperbólico repulsor (o atractor) para f si Γ es cerrado, acotado e invariante bajo f y existe un $N > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| > 1$ (respectivamente < 1) para todo $n \geq N$ y toda $x \in \Gamma$.

El conjunto de *Cantor* Λ para la función logística cuando $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ es, por supuesto, un conjunto hiperbólico repulsor con $N = 1$.

2.6. Dinámica Simbólica para la Familia Cuadrática F_λ

Nuestro objetivo en esta sección es dar un modelo para la rica estructura dinámica de la función logística en el conjunto de *Cantor* Λ, discutido en la sección anterior. Para ello configuraremos una función de modelo que sea completamente equivalente a F_λ.

2.6.1. El Espacio de Sucesiones

Necesitamos un "espacio" sobre el cual actuará nuestra función modelo. Los puntos en este espacio serán sucesiones infinitas de *ceros* y *unos*. No nos preocupamos por la convergencia de estas sucesiones; más bien, la noción difícil es imaginar una sucesión infinita como si representara un único "punto" en el espacio.

Definición 2.13

$\Sigma_2 = \{\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \ldots) | s_j = 0 \text{ } \textbf{\textit{o}} \text{ } 1\}$.

Σ_2 *se llama el* ***espacio de sucesiones*** *en los dos símbolos* 0 *y* 1. *De manera más general, podemos considerar el espacio* Σ_n *que consiste de sucesiones infinitas de números enteros de* 0 *a* $n-1$.

Los elementos de Σ_2 son cadenas infinitas de números enteros, como $(000\ldots)$ o $(0101\ldots)$. Podemos convertir Σ_2 en un espacio métrico de la siguiente manera. Para dos sucesiones $\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$ y $\mathbf{t} = (t_0 t_1 t_2 \ldots)$, definimos la distancia entre ellas por

$$d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

Ya que $|s_i - t_i|$ es 0 o 1, esta serie infinita está dominada por la series geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

y por lo tanto converge.

Ejemplo 2.14

Si $\mathbf{s} = (000\ldots)$ *y* $\mathbf{t} = (111\ldots)$ *entonces*

$$d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = 2.$$

Si $\mathbf{r} = (1010\ldots)$, *entonces*

$$d[\mathbf{s}, \mathbf{r}] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Proposición 2.15

d es una métrica en Σ_2.

Demostración. Claramente, $d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] \geq 0$ para cualquier $\mathbf{s}$, $\mathbf{t} \in \Sigma_2$, y $d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = 0$ si y solo $s_i = t_i$ para todo i. Dado que $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$, se sigue que $d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = d[\mathbf{t}, \mathbf{s}]$. Finalmente, si $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{t} \in \Sigma_2$, entonces $|r_i - s_i| + |s_i - t_i| \geq |r_i - t_i|$ de lo cual se deduce que $d[\mathbf{r}, \mathbf{s}] + d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] \geq d[\mathbf{r}, \mathbf{t}]$. ■

La métrica d nos permite decidir qué subconjuntos de Σ_2 son abiertos y cuáles son cerrados, así como qué sucesiones están cercanas entre sí.

Teorema 2.16

El Teorema de Proximidad: *Sean* $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$ *y supongamos que* $s_i = t_i$ *para* $i = 0, 1, \ldots, n$. *Entonces*

$$d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] \leq \frac{1}{2^n}$$

Inversamente,

$$d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] \leq \frac{1}{2^n}$$

entonces $s_i = t_i$ *para* $i \leq n$.

Demostración. Si $s_i = t_i$ para $i \leq n$, entonces

$$\begin{aligned} d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] &= \sum_{i=0}^{n} \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $s_j \neq t_j$ para algún $j \leq n$, entonces debemos tener

$$d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}.$$

En consecuencia, si

$$d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] < \frac{1}{2^n},$$

entonces $s_i = t_i$ para todo $i \leq n$. Esto completa la prueba. ■

La importancia de este resultado es que podemos decidir rápidamente si dos sucesiones están cercanas entre sí. Intuitivamente, este resultado dice que dos sucesiones en Σ_2 son cercanas siempre que sus primeras entradas coincidan; cuantas más entradas concuerden, más cercanas estarán las dos sucesiones.

2.6.2. La función Shift

Definimos el ingrediente más importante en la dinámica simbólica, la **función Shift** en Σ_2.

Definición 2.17

La función Shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ *viene dada por*

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \ldots) = (s_1 s_2 s_3 \ldots).$$

La función Shift simplemente omite la primera entrada de una sucesión y desplaza todas las demás entradas un lugar hacia la izquierda. Claramente, σ es una aplicación de Σ_2 dos a uno, ya que s_0 puede ser 0 o 1. Además, en la métrica definida anteriormente, σ es una aplicación continua.

Proposición 2.18

$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es continua.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $\mathbf{s} = s_0 s_1 s_2 \ldots$. Elija n tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Sea $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Si $\mathbf{t} = s_0 s_1 s_2 \ldots$ satisface $d[\mathbf{s}, \mathbf{t}] < \delta$, entonces, por el Teorema de Proximidad, tenemos $s_i = t_i$ para $i \leq n+1$. Por lo tanto, las entradas i-ésimas de $\sigma(\mathbf{s})$ y $\sigma(\mathbf{t})$ concuerdan para $i \leq n$. Por lo tanto $d[\sigma(\mathbf{s}), \sigma(\mathbf{t})] \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$. ■

Más adelante veremos que la función Shift es un modelo exacto para la función logística F_λ cuando $\lambda > 4$. Mientras mostraremos simplemente que la dinámica de σ se puede entender completamente. Por ejemplo, los puntos periódicos corresponden exactamente a sucesiones repetidas, es decir, sucesiones de la forma

$$\mathbf{s} = (s_0 \ldots s_{n-1},\ s_0 \ldots s_{n-1},\ s_0 \ldots s_{n-1} \ldots).$$

Por lo tanto, hay exactamente 2^n puntos periódicos de período n para σ, cada uno generado por una de las 2^n sucesiones finitas de *ceros* y *unos* de longitud n.

Con el tiempo, los puntos periódicos son igualmente abundantes y fáciles de reconocer. Por ejemplo, cualquier sucesión de la forma $(s_0 \ldots s_n 1111 \ldots)$ es eventualmente fija, mientras que cualquier sucesión que eventualmente se repite es eventualmente periódico para σ.

Otro hecho interesante sobre σ es que los puntos periódicos forman un subconjunto denso de Σ_2. Recordemos que un subconjunto es denso en Σ_2 siempre que su clausura sea todo el espacio Σ_2. Para demostrar que $Per(\sigma)$ es denso, debemos producir una sucesión de puntos periódicos τ_n que convergen a un punto arbitrario $\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$ en Σ_2. Definimos la sucesión

$$\tau_n = (s_0 \ldots sn,\ s0 \ldots s_n, \ldots),$$

es decir, τ_n es la sucesión repetida cuyas entradas concuerdan con $\mathbf{s}$ hasta la enésima entrada. Por el Teorema de Proximidad, $d[\tau_n, \mathbf{s}] \leq \frac{1}{2^n}$, así que tenemos $\tau_n \to \mathbf{s}$.

Con esto, tenemos las siguientes propiedades en σ:

Proposición 2.19

1. *La cardinalidad de $Per_n(\sigma)$ es 2^n.*
2. *$Per(\sigma)$ es denso en Σ_2.*

2.7. Conjugación Topológica

Ahora veremos como se relacionan la función Shift con la función logística $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ cuando $\lambda > 2+\sqrt{5}$. Recordemos que todos los puntos en $\mathbb{R}$ tienden a menos infinito bajo la iteración de F_λ con la excepción de aquellos puntos en el conjunto de *Cantor* Λ. Para completar la descripción de la dinámica de F_λ, debemos comprender la restricción de F_λ a Λ.

2.7.1. La función Itinerario

La función Itinerario será una función desde el conjunto de *Cantor* Λ hasta el espacio de sucesiones Σ. Para definir esta función, recordemos que $\Lambda \subset I_0 \cup I_1$. Si $x \in \Lambda$, entonces todos los puntos

de la órbita de x se encuentran en Λ y, por lo tanto, en uno de estos dos intervalos. Así, podemos tener una idea aproximada del comportamiento de la órbita observando en cuál de estos intervalos caen las diversas iteraciones de x. En consecuencia, hacemos la siguiente definición.

Definición 2.20

*El **itinerario** de x es una sucesión $S(x) = s_0 s_1 s_2 \ldots$ donde $s_j = 0$ si $F_\lambda^j(x) \in I_0$, $s_j = 1$ si $F_\lambda^j(x) \in I_1$.*

Así, el itinerario de x es una sucesión infinita de *ceros* y *unos*. Es decir, $S(x)$ es un punto en el espacio de sucesiones Σ_2. Pensamos en S como una función de Λ a Σ_2. Esta función tiene varias propiedades interesantes.

Teorema 2.21

*Si $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, entonces la **función Itinerario** $S : \Lambda \to \Sigma_2$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Primero demostramos que S es *uno a uno*. Sean $x, y \in \Lambda$ y supongamos $S(x) = S(y)$. Entonces, para cada n, $F_\lambda^n(x)$ y $F_\lambda^n(y)$ se encuentran en el mismo lado de $\frac{1}{2}$. De ello se sigue que F_λ es *uno a uno* en el intervalo entre $F_\lambda^n(x)$ y $F_\lambda^n(y)$ para cada n. En consecuencia, todos los puntos de este intervalo permanecen en $I_0 \cup I_1$. Esto contradice el hecho de que Λ es totalmente disconexo.

Para ver que S es sobre, primero introducimos la siguiente notación. Sea $J \subset I$ un intervalo cerrado. Sea

$$F_\lambda^{-n}(J) = \{x \in I | F_\lambda^n(x) \in J\}.$$

En particular, $F_\lambda^{-1}(J)$ denota la preimagen de J. Observe que, si $J \subset I$ es un intervalo cerrado, entonces $F_\lambda^{-n}(J)$ consta de dos subintervalos, uno en I_0 y otro en I_1. Ver Figura 28.

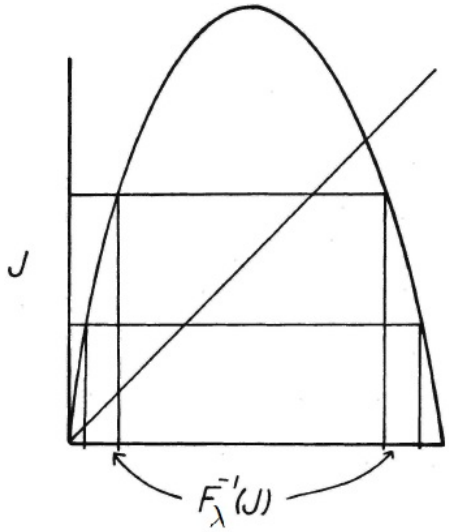

Figura 28: La preimagen de un intervalo cerrado J es un par de intervalos cerrados, uno en I_0 y otro en I_1.

Ahora sea $\mathbf{s} = s_0 s_1 s_2 \ldots$. Debemos producir $x \in \Lambda$ con $S(x) = \mathbf{s}$. Para ello definimos

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \ldots s_n} &= \{x \in I | x \in I_{s_0}, F_\lambda(x) \in I_{s_1}, \ldots, F_\lambda^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap F_\lambda^{-1}(I_{s_1}) \cap \ldots \cap F_\lambda^{-n}(I_{s_n}). \end{aligned}$$

Afirmamos que $I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ forma una sucesión anidada de intervalos cerrados no vacíos cuando $n \to \infty$. Observe que

$$I_{s_0 s_1 \ldots s_n} = I_{s_0} \cap F_\lambda^{-1}(I_{s_1 \ldots s_n}).$$

Por inducción, podemos suponer que $I_{s_1 \ldots s_n}$ es un subintervalo no vacío, de modo que, según la observación anterior, $F_\lambda^{-1}(I_{s_1 \ldots s_n})$ consta de dos intervalos cerrados, uno en I_0 y otro en I_1. Por lo tanto $I_{s_0} \cap F_\lambda^{-1}(I_{s_1 \ldots s_n})$ es un único intervalo cerrado.

Estos intervalos están anidados ya que

$$I_{s_0 s_1 \ldots s_n} = I_{s_0 s_1 \ldots s_{n-1}} \cap F_\lambda^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 s_1 \ldots s_{n-1}}.$$

Por lo tanto concluimos que

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$$

es no vacío. Observe también que si $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$, entonces $x \in I_{s_0}$, $F_\lambda(x) \in I_{s_1}$, etc. Por lo tanto $S(x) = (s_0 s_1 \ldots)$. Esto prueba que S es sobreyectiva.

Observe además que $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ consta de un punto único. Esto se desprende inmediatamente del hecho de que S es *uno a uno*. En particular, tenemos que la distancia $I_{s_0 s_1 \ldots s_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Finalmente, para probar la continuidad de S, elegimos $x \in \Lambda$ y suponemos que $S(x) = s_0 s_1 s_2 \ldots$. Sea $\epsilon > 0$. Elejimos n de modo que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Considere los subintervalos cerrados $I_{t_0 t_1 \ldots t_n}$ definidos anteriormente para todas las combinaciones posibles $t_0 t_1 \ldots t_n$. Todos estos subintervalos son disjuntos y Λ está contenida en su unión. Existen 2^{n+1} de estos subintervalos, e $I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$ es uno de ellos. Por lo tanto, podemos elegir δ tal que $|x - y| < \delta$ e $y \in \Lambda$ implica que $y \in I_{s_0 s_1 \ldots s_n}$. Luego, $S(y)$ concuerda con $S(x)$ en los primeros $n + 1$ términos. Por lo tanto, por el Teorema de Proximidad,

$$d[S(x), S(y)] < \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Esto demuestra la continuidad de S. Es fácil comprobar que S^{-1} también es continua. Por lo tanto, S es un homeomorfismo. ■

2.7.2. Conjugación

El teorema anterior muestra que, como conjuntos, Λ y Σ_2 son "iguales". Entonces la pregunta es: ¿cuál es la relación entre las funciones F_λ y σ en estos conjuntos? La respuesta es: son topológicamente conjugados.

Definición 2.22

*Sean $f : A \to A$ y $g : B \to B$ dos funciones. Se dice que f y g son **topológicamente conjugadas** si existe un homeomorfismo $h : A \to B$ tal que $h \circ f = g \circ h$. La ecuación $h \circ f = g \circ h$ se llama ecuación de conjugación y el homeomorfismo h se llama conjugación topológica.*

Las funciones topológicamente conjugadas son completamente equivalentes en términos de su dinámica. Por ejemplo, si f está topológicamente conjugado con g vía h, y p es un punto fijo para f, entonces $h(p)$ es fijo para g. En efecto,

$$h(p) = hf(p) = gh(p).$$

De manera similar, h proporciona una correspondencia *uno a uno* entre $Per_n(f)$ y $Per_n(g)$. Ahora veremos que la función Shift σ en Σ y F_λ en Λ están topológicamente conjugados entre sí y, por lo tanto, son esencialmente "iguales" desde el punto de vista de los sistemas dinámicos.

Teorema 2.23

$S \circ F_\lambda = \sigma \circ S$

Demostración. Un punto $x \in \Lambda$ puede definirse únicamente mediante la sucesión anidada de intervalos

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \ldots s_n \ldots}$$

determinado por el itinerario $S(x)$. Ahora

$$I_{s_0 s_1 \ldots s_n} = I_{s_0} \cap F_\lambda^{-1}(I_{s_1}) \cap \ldots \cap F_\lambda^{-n}(I_{s_n})$$

así que $F_\lambda(I_{s_0 s_1 \ldots s_n})$ pueda escribirse

$$II_{s_1} \cap F_\lambda^{-1}(I_{s_2}) \cap \ldots F_\lambda^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_1 \ldots s_n} \quad ,$$

ya que $F_\lambda(I_{s_0}) = I$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} SF_\lambda(x) &= SF_\lambda\left(\textstyle\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}\right) \\ &= S\left(\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \ldots s_n}\right) \\ &= s_1 s_2 \ldots \\ &= \sigma S(x). \end{aligned}$$

■

En particular, ya que F_λ en Λ está topológicamente conjugada con la función Shift σ en Σ, hemos demostrado que la función logística disfruta de las mismas propiedades interesantes para σ revisadas anteriormente. Esto se puede resumir de la siguiente manera.

Proposición 2.24

1. *La cardinalidad de* $Per_n(F_\lambda)$ *es* 2^n.
2. $Per(F_\lambda)$ *es denso en* Λ.

Estas proposición muestra el poder de la dinámica simbólica y la conjugación topológica. En realidad, calcular los 2^n puntos periódicos de período n para F_λ es una tarea algebraicamente innecesaria. Pero la conjugación topológica garantiza que estas órbitas están ahí y, además, la dinámica simbólica da una descripción aproximada de cómo se comportan estas órbitas. Así, estas dos nociones justifican nuestra afirmación de que la función Shift es un modelo preciso para la función logística.

Ahora, un ejemplo importante de dos aplicaciones que son topológicamente conjugadas.

Proposición 2.25

La familia lógistica $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ *es conjugada a la familia cuadrática, la cual se define de la siguiente manera*

$$Q_c(x) = 1 - cx^2,$$

a través de un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de la forma* $h(x) = ax + b$, *con* $a \neq 0$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces por definición se tiene que

$$h(F_\lambda(x)) = a\lambda x(1-x) + b = -a\lambda x^2 + a\lambda x + b,$$

y

$$Q_c(h(x)) = 1 - c(ax+b)^2 = -a^2cx^2 - 2abcx - b^2c + 1.$$

En consecuencia, se deben de cumplir las siguientes igualdades:

$$-a\lambda = -a^2c, \quad a\lambda = -2abc, \quad b = -b^2c + 1.$$

Como $a \neq 0$, entonces

$$\lambda = ac, \quad \lambda = -2bc, \quad cb^2 + b - 1 = 0.$$

Resolviendo para b en la última igualdad, tenemos que

$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c}}{2c}.$$

Por lo tanto, las raíces existen y son reales si y sólo si,

$$1 + 4c \geq 0 \Leftrightarrow 4c \geq -1 \Leftrightarrow c \geq -\frac{1}{4} \quad \text{y} \quad c > 0$$

Así, $c > 0$. Luego,

$$\lambda = -2cb = -2c\frac{-(1 \pm \sqrt{1+4c})}{2c} = 1 \pm \sqrt{1+4c}.$$

y

$$1 \pm \sqrt{1+4c} = \lambda \Leftrightarrow 1 + 4c = (\lambda - 1)^2 \Leftrightarrow c = \frac{\lambda^2 - 2\lambda}{4}$$

En consecuencia, tenemos para $\lambda \neq 2$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\lambda}{c} &&= \frac{4}{\lambda - 2} \\ b &= -\frac{\lambda}{2c} &&= \frac{2}{2 - \lambda} \\ c &= \frac{\lambda(\lambda - 2)}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F_\lambda(x) = \lambda x(1-x) \quad \text{y} \quad Q_c(x) = 1 - \frac{\lambda(\lambda-2)}{4}x^2$$

son conjugadas a través del homeomorfismo $h(x) = \frac{4}{\lambda - 2}x + \frac{2}{2-\lambda}$.

■

Ejemplo 2.26

Considere la función logística $F_4(x) = 4x(1-x)$ y la función cuadrática $Q_2(x) = 1 - cx^2$. Sea $h(x) = ax + b$. Entonces, $a = 2$, $b = -1$ y $c = 2$. Por lo tanto el homeomorfismo buscado es $h(x) = 2x - 1$.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{F_4} & 4x(1-x) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ 2x-1 & \xrightarrow{1-2x^2} & 2[4x(1-x)] - 1 \end{array}$$

entonces $h(F_4(x)) = -8x^2 + 8x - 1 = Q_2(h(x))$, por lo que estas aplicaciones son efectivamente conjugadas.

Capítulo 3

Hacia el Teorema de Jakobson

3.1. Espacios Medibles

El concepto de medida de un conjunto tiene su origen en la noción clásica de volumen de un intervalo en $\mathbb{R}^n$. Partiendo de una idea tan intuitiva, mediante un proceso de cobertura se puede asignar a cualquier conjunto un número no negativo que "cuantifique su extensión".

Comenzamos introduciendo las nociones de álgebra y σ - álgebra de subconjuntos de un conjunto, que conducen al concepto de espacio medible. A continuación, presentamos la noción de medida en un sigma álgebra y analizamos algunas de sus propiedades. En particular, mencionamos algunos resultados sobre la construcción de medidas, incluida la medida de Lebesgue en espacios euclidianos.

3.1.1. Álgebras y σ - álgebras de Conjuntos

Denotemos por X un conjunto no vacío, por $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de todas las partes (es decir, subconjuntos) de X y por $\emptyset$ el conjunto vacío.

Para cualquier subconjunto $A \subset X$ denotaremos por A^c su complemento, es decir,

$$A^c = \{x \in X : x \notin A\}.$$

Para cualquier $A,\ B \in \mathcal{P}(X)$ establecemos $A \setminus B = A \cap B^c$.

Sea $(A_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{P}(X)$. Se mantiene la siguiente identidad de **De Morgan**:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

Definición 3.1

Un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ se llama un ***álgebra*** *en X si*

(a) $\emptyset,\ X \in \mathcal{A}$.

(b) $A,\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

(c) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

Observación 3.2

- *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra y $A,\ B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B$ y $A \setminus B$ pertenecen a $\mathcal{A}$.*
- *La diferencia simétrica $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ también pertenece a $\mathcal{A}$.*
- *$\mathcal{A}$ es estable bajo uniones e intersecciones finitas,*

$$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \begin{cases} A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}. \\ A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Definición 3.3

*Un álgebra $\mathcal{A}$ en X se llama una σ - **álgebra** si, para toda sucesión $(A_n)_n$ de elementos de $\mathcal{A}$, tenemos*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

*Si $\mathcal{A}$ es una σ - álgebra en X, los elementos de $\mathcal{A}$ se llaman **conjuntos medibles** y el par $(X, \mathcal{A})$ se llama **espacio medible**.*

Ejemplo 3.4

Para cualquier conjunto X, las siguientes familias de subconjuntos son σ - álgebras:

$$\{\emptyset, X\} \quad y \quad \mathcal{P}(X) = 2^X = \{\text{todos los subconjuntos de } X\}.$$

Además, claramente, si $\mathcal{B}$ es cualquier álgebra de subconjuntos de X, entonces $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces, $\{\emptyset, X\}$ es la más pequeña y $\mathcal{P}(X)$ es la más grande de todas las álgebras de subconjuntos de X.

Proposición 3.5

Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$. La intersección de todas las σ - álgebras en X, que contienen a $\mathcal{K}$, es una σ - álgebra en X (la mínima σ - álgebra que contiene a $\mathcal{K}$).

Definición 3.6

*Dado un subconjunto $\mathcal{K}$ de $\mathcal{P}(X)$, la intersección de todas las σ - álgebras en X, que contienen a $\mathcal{K}$, se denomina σ - **álgebra generada por** $\mathcal{K}$ y se denotará por $\sigma(\mathcal{K})$.*

3.1.2. σ - álgebra de Bórel

Definición 3.7

Sea X un espacio métrico. La σ - álgebra generada por todos los conjuntos abiertos de X se llama σ - álgebra de ***Bórel*** *y se denota por $\mathcal{B}(X)$. Obviamente, $\mathcal{B}(X)$ coincide con la σ - álgebra generada por todos los conjuntos cerrados de X. Los elementos de $\mathcal{B}(X)$ se denominan* ***conjuntos de Bórel*** *o* ***borelianos****.*

Observación 3.8

Sea $X = \mathbb{R}$, y sea $\mathcal{I} = \{(a, b) : a,\ b \in \mathbb{R}, a < b\}$ la clase de todos los intervalos abiertos. Entonces $\sigma(\mathcal{I})$ coincide con $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3.2. Medidas

3.2.1. Funciones Aditivas y σ - aditivas

Definición 3.9

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra en X y sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ una función tal que $\mu(\emptyset) = 0$.

- *Decimos que μ es* ***aditiva*** *si, para cualquier familia finita $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ de conjuntos mutuamente disjuntos, tenemos*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

- *Decimos que μ es σ -* ***aditiva*** *o* ***numerablemente aditiva*** *si, para cualquier sucesión $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ de conjuntos mutuamente disjuntos, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, tales que*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A},$$

(esto es automático si $\mathcal{A}$ es σ - álgebra) tenemos

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

3.2.2. Espacios de Medida

Definición 3.10

Sea $\mathcal{A}$ un σ - álgebra en X.

- *Una función σ - aditiva $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ se llama una* ***medida*** *(positiva) en $\mathcal{A}$.*
- *La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$, donde μ es una medida en $\mathcal{A}$, se llama un* ***espacio de medida****.*
- *Una medida μ en $\mathcal{A}$, se llama una* ***medida de probabilidad*** *si $\mu(X) = 1$. En este caso, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se llama* ***espacio de probabilidad****.*

  Podemos convertir fácilmente μ en una probabilidad ν. Simplemente defina

$$\nu(E) = \frac{\mu(E)}{\mu(X)}$$

  para cada conjunto medible $E \subset X$.

Definición 3.11

Una medida μ en una σ - álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es:

- ***finita*** *si $\mu(X) < \infty$.*
- *σ -* ***finita*** *si existe una sucesión $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ tal que*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$$

  y $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- ***completa*** *si*

$$A \in \mathcal{A},\ B \subset A.\ \mu(A) = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{A}$$

  (y entonces $\mu(B) = 0$).

- ***concentrada en un conjunto*** *$A \in \mathcal{A}$ si $\mu(A^c) = 0$.*

Ejemplo 3.12

Sea $x \in X$. Definamos para todo $A \in \mathcal{P}(X)$,

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A, \\ 0 & si \quad x \notin A, \end{cases}$$

Entonces δ_x es una medida de $\mathcal{P}(X)$, llamada ***medida de Dirac en*** *x. Esta medida se concentra en el singulete $\{x\}$.*

Teorema 3.13

*(**Extensión**). Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de X y sea $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una función σ - aditiva con $\mu_0(X) < \infty$. Entonces existe una medida única μ definida en la σ - álgebra $\mathcal{B}$ generada por $\mathcal{A}$ que es una extensión de μ_0, lo que significa que satisface $\mu(A) = \mu_0(A)$ para cada $A \in \mathcal{A}$.*

3.2.3. Medida de Lebesgue

Sea $X = [0, 1]$ y $\mathcal{A}$ la familia de todos los subconjuntos de la forma

$$A = I_1 \cup \cdots \cup I_n$$

donde $I_1, \ldots, I_n$ son intervalos disjuntos por pares. Entonces $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de X. Sea $m_0 : \mathcal{A} \to [0, 1]$ la función definida en este álgebra por

$$m_0(I_1 \cup \cdots \cup I_n) = |I_1| + \cdots + |I_n|,$$

donde $|I_j|$ representa la longitud de cada intervalo I_j. Observe que m_0 es σ - aditiva y $m_0(X) = 1$.

Observe que el σ - álgebra $\mathcal{B}$ generada por $\mathcal{A}$ coincide con la σ - álgebra de *Borel* en X, ya que cada subconjunto abierto es una unión numerable de intervalos por pares. Entonces, según el Teorema 3.13, existe una medida de probabilidad única m definida en $\mathcal{B}$ que es una extensión de m_0. Se llama la **medida de Lebesgue** en $[0, 1]$.

Para definir la **medida de Lebesgue** en todo $\mathbb{R}$, descomponemos el espacio en intervalos de tamaño unidad:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [k, k + 1).$$

Cada intervalo $[k, k + 1)$ puede identificarse con $[0, 1)$ mediante la traslación $T_k(x) = x - k$ que asigna k al origen. Eso nos permite definir una medida m_k en C, estableciendo

$$m_k(B) = m_0(T_k(B))$$

para todo conjunto medible $B \subset C$. Finalmente, dado cualquier conjunto medible $B \subset \mathbb{R}$, definimos:

$$m(B) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k(B \cap [k, k + 1)).$$

Definición 3.14

*Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Decimos que un conjunto $A \subset X$ **es de medida cero** si existe $A_1 \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset A_1$ y $\mu(A_1) = 0$.*

Definición 3.15

*Decimos que una propiedad se cumple en μ - **casi todos los puntos** o μ - **casi en todas partes** (abreviadamente **c.t.p.**) si el subconjunto de puntos de X para los cuales no se cumple está contenido en algún conjunto de medida cero.*

Definición 3.16

Una medida μ en $(X, \mathcal{B})$ se dirá ***regular exteriormente*** *si para cada $A \in \mathcal{B}$ se tiene*

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(G) : A \subset G,\ G \text{ conjunto abierto}\}.$$

La medida μ se llama ***regular interiormente*** *si*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ conjunto compacto}\}.$$

Si μ es regular exteriormente e interiormente diremos que μ es ***regular****.*

Definición 3.17

Sean μ y ν dos medidas en el mismo espacio medible $(X, \mathcal{B})$. Decimos que ν es ***absolutamente continua*** *con respecto a μ si todo conjunto medible E que satisface $\mu(E) = 0$ también satisface $\nu(E) = 0$; entonces escribimos $\nu \ll \mu$. Decimos que μ y ν son equivalentes si cada uno de ellos es absolutamente continuo respecto del otro; entonces escribimos $\mu \sim \nu$. En otras palabras, dos medidas son equivalentes si tienen exactamente los mismos conjuntos de medidas cero.*

Definición 3.18

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Decimos que $T : X \to X$ es ***medible*** *si, para todo $A \in \mathcal{A}$, $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.*

Definición 3.19

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Decimos que μ es ***invariante*** *bajo $T : X \to X$ si $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

Definición 3.20

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Decimos que μ es ***ergódica*** *si $f^{-1}(A) = A$ implica $\mu(A) = 0$ o que $\mu(A) = 1$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

Teorema 3.21

(Teorema de Radon - Nikodym): Si μ y ν son medidas finitas tales que $\nu \ll \mu$, entonces existe una función medible $\rho : X \to [0, \infty]$ tal que $\nu = \rho\mu$, lo que significa

$$\int \phi \, d\nu = \int \phi\rho \, d\mu \quad \text{para cualquier función medible acotada} \quad \phi : X \to \mathbb{R}. \tag{1}$$

en particular, $\nu(E) = \int_E \rho \, d\mu$ para todo conjunto medible $E \subset X$. Además, ρ es esencialmente única: dos funciones cualesquiera que satisfagan (1) coinciden en μ - casi todos los puntos.

Llamamos ρ la densidad, o la derivada de Radon - Nikodym, de ν relativa a μ y escribimos

$$\rho = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

3.3. El Teorema de Jakobson

Un tema principal en Sistemas Dinámicos es el estudio de las iteraciones de transformaciones $T : X \to X$, donde X tiene alguna estructura especial, por ejemplo, X es un espacio topológico y T conserva esta estructura, por ejemplo, T es un homeomorfismo, un difeomorfismo. Estamos interesados en describir el **comportamiento asintótico de las órbitas** $\{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ para un **conjunto lo más grande posible** de puntos $x \in X$. El concepto de conjunto grande depende de la **estructura** adicional de X: puede entenderse ya sea en el **sentido topológico** (denso o abierto) o en el sentido de la **teoría de la medida** (medida positiva o medida completa). En este último caso se trata de una **medida** m o una **probabilidad** si $m(X) = 1$ que es **invariante** bajo T.

La existencia de **medidas invariantes** proporciona información importante sobre el **comportamiento dinámico** de la transformación. En este contexto mencionamos los siguientes teoremas

Teorema 3.22

*(Teorema de Recurrencia de Poincaré): Sea $T : X \to X$ una transformación que preserva la medida en un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, m)$. Sea $E \in \mathcal{B}$ con $m(E) > 0$. Entonces casi todos los puntos de E (es decir, todos los puntos de E excepto para un **conjunto de medida cero**) regresan infinitamente a E bajo **iteraciones positivas** de T.*

Teorema 3.23

Teorema Ergódico de Birkhoff *Sea X un espacio de medida, $f : X \to \mathbb{R}$ integrable, $T : X \to X$ una función medible, y μ una medida de probabilidad $T-$invariante. Entonces existe una función $f^* \in L^1(\mu)$ tal que*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \longrightarrow f^*, \quad \mu - \text{casi en todas partes.}$$

También, $f^* \circ T = f^*$ μ - casi todos los puntos y $\int f^* d\mu = \int f d\mu$.

*Si, además, la medida μ es **ergódica** y para cualquier conjunto medible de Borel A, siendo $f = \mathcal{X}_A$ la función característica de A, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{X}_A(T^i(x)) = \int \mathcal{X}_A \, d\mu = \mu(A).$$

Esto significa que casi todos los puntos tienen la misma frecuencia asintótica de visitas al conjunto A y esta frecuencia es exactamente la probabilidad de A.

Como una aplicación del **Teorema Ergódico** tenemos lo siguiente: supongamos que m es una **probabilidad ergódica invariante** para la transformación T y queremos saber cuál es la **frecuencia asintótica** de las visitas de la órbita de $x \in X$ en $A \in \mathcal{B}$. El número relativo de elementos de

$$\{x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)\}$$

en A es exactamente

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i(x)).$$

Por el **Teorema de Birkhoff** tenemos que $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_A(T^i(x))$ converge a $\int \chi_A dm = m(A)$.
Así, la órbita de casi todos los puntos de X se encuentra en A con probabilidad $m(A)$.
El estudio de la familia cuadrática $f_a : [-1,1] \to [-1,1]$ definida por

$$f_a(x) = 1 - ax^2 \quad \text{con} \quad a \in [1,2],$$

ha merecido una atención especial por el comportamiento dinámico que exhiben los elementos de esta familia. Denotamos λ la medida de **Lebesgue** en $[-1,1]$ y cuando nos referimos a la continuidad absoluta de alguna medida, nos referimos a la continuidad absoluta con respecto a la medida de **Lebesgue** λ.

Probaremos la abundancia de parámetros para los cuales existe una medida de probabilidad invariante absolutamente continua. Más precisamente, demostramos el

Teorema 3.24

*(**Teorema de Jakobson**): Existe un conjunto de parámetros de medida de Lebesgue positiva $a \in [1,2]$, para el cual f_a tiene una medida de probabilidad invariante ergódica absolutamente continua.*

En [3] se demostró que, bajo algunas suposiciones sobre el conjunto de parámetros, se puede tener un conjunto de parámetros con **medida de Lebesgue positiva** para el cual la órbita del valor crítico tiene un crecimiento exponencial de la derivada, es decir,

$$|(f_a^n)'(1)| \geq e^{\sqrt{n}}.$$

De esto se dedujo la existencia de una medida invariante absolutamente continua.

La demostración del **Teorema de Jakobson** se basa en la construcción de una función de **Bernoulli** asociada a f y a una partición cuidadosamente definida de $[-1,1]$ en intervalos. Más precisamente, muestra que hasta supuestos sobre los parámetros (que satisfacen un conjunto de valores de medida de *Lebesgue* positiva $a \in [1,2]$) se puede construir, de forma inductiva, una partición $\mathcal{P}$ de $[-1,1]$ y una función $\bar{f}$ tal que para cada $I \in \mathcal{P}$, $\bar{f}_{|I} = f_{|I}^{n(I)}$ para algún $n(I) \geq 1$. Además, para cada $I \in \mathcal{P}$, $\bar{f}_{|I}$ es una función que se expande sobre $[-1,1]$ y tiene una distorsión acotada. Un resultado estándar bien conocido es que $\bar{f}$ tiene una medida invariante absolutamente continua, que puede verse fácilmente que es invariante para f. De este argumento también se deduce que la medida es ergódica.

Por lo general, las medidas invariantes para una función continua definida en un conjunto compacto se toman como un punto de acumulación débil para alguna sucesión adecuada de medidas. Mediante una elección conveniente de la sucesión vamos a demostrar que dicho punto de acumulación también es absolutamente continuo. Nuestro plan, siguiendo [5], es demostrar que existe alguna función $\lambda - integrable\ \phi$, tal que la densidad de todos los elementos de nuestra sucesión esté dominada por ϕ. A partir de esto se puede comprobar fácilmente que el punto límite también es absolutamente continuo. Nuestra exposición difiere de [5] en que utilizamos los supuestos de [4] que conducen a un crecimiento exponencial de la derivada. Más precisamente, bajo una ligera modificación de los supuestos de [3], se demostró en [4] que para $c > 0$ existe un conjunto de parámetros de **medida de Lebesgue positiva** $E(c) \subset [1,2]$ tal que para $a \in E(c)$ la órbita crítica de f_a tiene un crecimiento exponencial de la derivada, es decir,

$$|(f_a^n)'(1)| \geq e^{cn}.$$

Este conjunto $E(c)$ será exactamente nuestro conjunto de parámetros que satisfacen el enunciado del teorema anterior.

En [6] se muestra que para una función unimodal (es decir, una función con un solo punto crítico que es no degenerado) con derivada Schwarziana negativa (que es el caso de nuestra familia de funciones) existe a lo más una medida de probabilidad invariante absolutamente continua. Entonces, en nuestro caso, la probabilidad invariante absolutamente continua que obtenemos es en efecto, única. De la unicidad se deduce que la medida también es **ergódica**. En efecto, si la medida μ no fuera ergódica, habría algún conjunto $f_a - invariante\ K$ para el cual $0 < \mu(K) < 1$. Sea ν la probabilidad definida por

$$\nu(A) = \mu(A \cap K)/\mu(K)$$

.

Del hecho de que μ es una probabilidad invariante absolutamente continua, deducimos fácilmente que ν también es una probabilidad invariante absolutamente continua. Pero $\nu \neq \mu$, ya que $\nu([-1,1] \setminus K) = 0$ y $\mu([-1,1] \setminus K) \neq 0$ (recordemos que $\mu(K) < 1$). Esto da una contradicción con la unicidad de μ. Entonces μ es en efecto ergódico.

3.3.1. El conjunto de buenos parámetros.

En esta sección damos un breve esbozo de los argumentos de **Benedicks - Carleson** para demostrar el crecimiento exponencial de la derivada en la órbita crítica de f_a, para un conjunto de valores de parámetros de medida de **Lebesgue** positiva, [3], [4]. Estos son los valores de los parámetros para los cuales demostraremos, en las siguientes secciones, que f_a admite una medida invariante absolutamente continua.

Fijemos $0 < c < c_0 < \log 2$, sean α, β, $\Delta > 0$ y $\delta = e^{-\Delta}$ números pequeños elegidos en este orden, y Δ un número entero suficientemente grande. En [4] se muestra que para un subconjunto de medida positiva $E = E(c)$ de $[1,2]$ tenemos

$$|(f_a^n)'(1)| \geq e^{cn}.$$

para cada $a \in E$. Una primera aproximación al conjunto E viene dado por el Lema 3.25, que también juega un papel importante en nuestra prueba de la existencia de la medida invariante absolutamente continua. Para cada entero m, sean U_m, I_m, I_m^+ los intervalos

$$\begin{aligned}
U_m &= (-e^{-m}, e^{-m}) = \left(-\frac{1}{e^m}, \frac{1}{e^m}\right) \quad \text{para} \quad m > 0, \\
I_m &= \left(e^{-m-1}, e^{-m}\right) \quad \text{para} \quad m > 0, \\
I_m &= -I_{-m} \quad \text{para} \quad m < 0, \\
I_m^+ &= I_{m-1} \bigcup I_m \bigcup I_{m+1} \quad \text{para} \quad |m| \geq \Delta.
\end{aligned}$$

Más adelante, para probar que f tiene distorsión acotada, consideramos para cada I_m, la colección de m^2 intervalos de igual longitud $I_{m,1}, I_{m,2}, \ldots, I_{m,m^2}$ cuya unión es I_m. Es conveniente considerar estos $I_{m,i}$ ordenados de la siguiente manera: si $i > j$, entonces $dist(I_{m,i}, 0) < dist(I_{m,j}, 0)$, esto es

$$I_m = I_{m,m^2} \bigcup \ldots \bigcup I_{m,1}.$$

Por $I^+_{m,i}$ denotamos la unión de $I_{m,i}$ con los dos intervalos adyacentes del mismo tipo, esto es

$$I^+_{m,i} = I_{m_1,i_1} \bigcup I_{m,i} \bigcup I_{m_2,i_2}.$$

Haremos uso también de los intervalos

$$U^+_m = I_{m-1,(m-1)^2} \bigcup U_m \bigcup I_{-m+1,(m-1)^2}.$$

Lema 3.25

Dado Δ suficientemente grande y $0 < c_0 < \log 2$, existen $\gamma = \gamma(\Delta) > 0$ y $a_0 = a_0(\Delta, c_0) < 2$ tales que para $x \in [-1, 1]$, $a \in (a_0, 2]$ y $k \geq 1$ se cumple lo siguiente:

(a) Si $x, f_a(x), \ldots, f_a^{k-1}(x) \notin U_{\Delta+1}$ entonces $|(f_a^k)'(x)| \geq \gamma e^{c_0 k}$.

(b) Si $x, f_a(x), \ldots, f_a^{k-1}(x) \notin U_{\Delta+1}$ y $f_a^k(x) \in U_{\Delta-1}$ entonces $|(f_a^k)'(x)| \geq e^{c_0 k}$.

El lema anterior significa que para los parámetros en $[a_0, 2]$, tenemos un comportamiento expansivo para las órbitas que permanecen fuera de la vecindad del punto crítico, $(-\delta, \delta)$. Sin embargo, en [3] se demostró que para casi todos los puntos $a \in [a_0, 2]$, la órbita del punto crítico no puede mantenerse alejada de $(-\delta, \delta)$. Dado que

$$|(f_a^n)'(1)| = \prod_{j=1}^{n} \left|2a f_a^j(0)\right|, \tag{1}$$

introducimos algunos factores pequeños en la derivada de la órbita en los **retornos**, es decir, las iteraciones r para las cuales $f_a^r(0) \in (-\delta, \delta)$, y, en consecuencia, tenemos una pérdida en la expansión de la derivada. Por lo tanto, debemos compensar esa pérdida en la expansión. Para esto, hacemos algunas exclusiones en el conjunto de parámetros y retenemos solo los parámetros a que satisfacen el supuesto básico

$$|f_a^n(0)| \geq e^{-[\alpha n]}. \tag{SB}$$

En este punto se introduce la noción de **período límite** asociado al retorno r, que consiste en las p iteraciones después del retorno r para las cuales las órbitas de *cero* y $f_a^r(0)$ se comportan de manera similar. Dado que para las primeras iteraciones del valor crítico hay un gran crecimiento de la derivada, se espera que lo mismo se cumpla para la órbita de $f_a^r(0)$ durante el período límite. De hecho, utilizando (SB) se puede demostrar que

$$\left|(f_a^{p+1})'(f_a^r(0))\right| > 1 \tag{2}$$

y, por lo tanto, los pequeños factores introducidos en (1) en los retornos, se pueden compensar.

Después del periodo límite asociado a un retorno, la órbita crítica pasa su tiempo en un **período libre** hasta el siguiente retorno. Del Lema 3.25 tenemos crecimiento exponencial de la derivada durante esos periodos libres.

Basándonos en un argumento de grandes desviaciones, se hacen nuevas exclusiones en el conjunto de parámetros, para garantizar que sólo una pequeña fracción ϵn de las iteraciones hasta n pertenezcan a un período límite. Durante las iteraciones complementarias $(1-\epsilon)n$ la derivada de la órbita del valor crítico aumenta con la constante exponencial c_0. De esto, y teniendo en cuenta (2), se sigue que

$$|(f_a^n)'(1)| \geq e^{(1-\epsilon)c_0 n} \geq e^{cn},$$

si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño.

De ahora en adelante, consideramos $f = f_a$ donde $a \in E(c)$, y por lo tanto, tenemos que f verifica el supuesto básico (SB), y la órbita del valor crítico tiene crecimiento exponencial de la derivada.

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ sea $\xi_n = f^n(0)$. En la siguiente definición usamos un número pequeño $\beta > \alpha$; para nuestros cálculos este puede tomarse igual a 2α.

Definición 3.26

Sea $p(m)$ el mayor p tal que

$$|f^j(x) - \xi_j| \leq e^{-\beta j}$$

*para toda $j = 1, \ldots, p-1$ y $x \in I_m^+$. El intervalo de tiempo $1, \ldots, p(m)-1$ se denomina **periodo límite** para I_m^+.*

Definición 3.27

*Para un punto $x \in U_\Delta$ definimos los **tiempos de retorno** a U_Δ, $t_0(x) < t_1(x) < t_2(x) < \cdots$, de la siguiente manera: primero fijamos $t_0(x) = 0$; suponiendo que t_k está definido y $f^{t_k}(x) \in I_{m_k,i_k}$, tomamos t_{k+1} como el $j \geq t_k + p(m_k)$ más pequeño tal que $f^j(x) \in U_\Delta$.*

3.3.2. Construcción de la Medida

Sea (μ_n) la sucesión de medidas finitas definida por

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j \lambda | U_\Delta,$$

donde $f_*^j \lambda | U_\Delta$ denota la *push-forward*, bajo f^j, de la restricción de la medida de Lebesgue a U_Δ : $f_*^j \lambda | U_\Delta(A) = \lambda(f^{-j}(A) \cap U_\Delta)$, para cada boreliano A. Del hecho de que el espacio de medidas de probabilidad en $[-1,1]$ es compacto (con respecto a la topología débil estrella), se sigue que la sucesión (μ_n) debe tener puntos de acumulación μ. De la definición de μ_n se deduce fácilmente que cualquier μ de este tipo es una medida invariante para f.

Para probar la continuidad absoluta de μ consideraremos sucesiones de medidas $(\mathcal{X}_n)$, $(\mathcal{Y}_n)$, $(\mathcal{Z}_n)$ y $(\mathcal{W}_n)$ tales que

$$\mu_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\mathcal{X}_k + \mathcal{Y}_k + \mathcal{Z}_k + \mathcal{W}_k)$$

y probaremos que existe $\phi \in L^1([-1,1],\lambda)$ tal que

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathcal{X}_k + \mathcal{Y}_k + \mathcal{Z}_k + \mathcal{W}_k) \leq \phi \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+,$$

lo que implica que

$$\frac{d\mu_n}{d\lambda} \leq \phi \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}^+. \tag{1}$$

El hecho de que cualquier punto de acumulación μ sea absolutamente continuo con respecto a la medida de Lebesgue se sigue del siguiente resultado:

$$\mu_n \text{ converge débilmente a } \mu \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \text{ínf}\, \mu_n(B) \geq \mu(B) \quad \forall\ B \text{ abierto}. \tag{2}$$

En efecto, consideremos A tal que $\lambda(A) = 0$. Como λ es una medida regular, tenemos que

$$\lambda(A) = \text{ínf}\{\lambda(B) : A \subset B,\ B \text{ abierto}\},$$

y, por lo tanto, existe una sucesión decreciente (B_n) de conjuntos abiertos que contienen a A tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda(B_n) = \lambda(A) = 0$. De (1) y (2) se sigue que

$$\mu(B_k) \leq \lim_{n\to\infty} \text{ínf}\, \mu_n(B_k) \leq \int_{B_k} \phi d\lambda.$$

Como $\lim_{k\to\infty} \int_{B_k} \phi d\lambda = 0$, tenemos que $\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$, y, por lo tanto, $\mu(A) = 0$, lo que demuestra la continuidad absoluta de μ con respecto a λ.

Antes de dar las definiciones de las medidas $\mathcal{X}_n$, $\mathcal{Y}_n$, $\mathcal{Z}_n$ y $\mathcal{W}_n$ construimos, inductivamente, una sucesión de particiones $\mathcal{P}_0 \prec \mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \cdots$ de U_Δ (módulo un conjunto de medida de Lebesgue cero) en intervalos. Para cada n también definimos una función

$$r_n : \bigcup_{\omega\in\mathcal{P}_n} \omega \longrightarrow \mathbb{Z}^+$$

que es constante en los elementos de $\mathcal{P}_n$. La función r_n se llama el *n-ésimo* tiempo de retorno. Para toda $n \geq 0$, $\mathcal{P}_n$ y r_n tendrán las siguientes dos propiedades:

(a) Para toda $\omega \in \mathcal{P}_n$, $f^{r_n}_{|\omega}$ es un difeomorfismo,

(b) Para toda $\omega \in \mathcal{P}_n$, $I_{m,i} \subset f^{r_n}(\omega) \subset I^+_{m,i}$ para algún $|m| \geq \Delta$.

Para $n = 0$ definimos $\mathcal{P}_0 = \{I_{m,i} : |m| \geq \Delta,\ 1 \leq i \leq m^2\}$ y $r_0 \equiv 0$. Es obvio a partir de las definiciones de $\mathcal{P}_0$ y r_0 que (a) y (b) se verifican para $n = 0$.

Suponiendo que $\mathcal{P}_{n-1}$ y r_{n-1} están definidas y verifican las propiedades (a) y (b), mostramos cómo funciona el paso inductivo para definir $\mathcal{P}_n$ y r_n. Considere $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$ y sea k la primera

iteración después de r_{n-1} para la cual $f^k(\omega)$ contiene algún intervalo $I_{m,i}$ con $|m| \geq \Delta$. Nótese que para cada $j \in \mathbb{Z}^+$ y cada intervalo J,

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ f^j_{|J} \text{ difeomorfismo} \\ \bullet \ 0 \notin f^j(J) \end{array}\right\} \Rightarrow f^{j+1}_{|J} \quad \text{difeomorfismo.} \qquad (\star)$$

Dado que la propiedad (b) se verifica para $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$ tenemos que $0 \notin f^{r_{n-1}}(\omega)$. Para $r_{n-1}+1 \leq j < k$ también tenemos que $0 \notin f^j(w)$; de lo contrario $f^j(\omega)$ contendría algún $I_{m,i}$ con $|m| \geq \Delta$ en contradicción con la definición de k. Utilizando el hecho de que $f^{r_{n-1}}_{|\omega}$ es un difeomorfismo y aplicando $(\star)$ repetidamente concluimos que $f^k_{|\omega}$ también es un difeomorfismo. Ahora distinguimos los dos casos siguientes:

1 $f^k(\omega) \subset U^+_\Delta$.
Escribimos $\omega = \bigcup \omega_{m,i}$ $(mod\ 0)$ con $\omega_{m,i}$ satisfaciendo

$$I_{m,i} \subset f^k(\omega_{m,i}) \subset I^+_{m,i}.$$

Esto se puede hacer tomando $\omega_{m,i} = \omega \cap f^{-k}(I_{m,i})$ excepto para cada uno de los dos intervalos extremos que, si es necesario, se unen al adyacente. Por definición, estos $\omega_{m,i}$ son los intervalos de la partición $\mathcal{P}_n$ contenidos en ω y $r_n(\omega_{m,i}) = k$.

2 $f^k(\omega) \not\subset U^+_\Delta$.
Consideremos $\omega' = f^{-k}_{|\omega}(U_\Delta) : \omega \backslash \omega'$ tiene uno o dos componentes conexos, que denotamos por ω_1 y ω_2. Si la imagen bajo f^k de uno de los componentes, digamos ω_1, está contenida en U^+_Δ, procedemos como en el caso anterior para $\omega' \bigcup \omega_1$ en lugar de ω. Para un componente ω_l ($l = 1$ o 2) cuya imagen bajo f^k no está contenida en U^+_Δ, consideramos que k_l es el primer entero después de k para el cual $f^{k_l}(\omega_l)$ contiene algún $I_{m,i}$ con $|m| \geq \Delta$, y repetimos para ω_l y k_l lo que hemos hecho para ω y k.

Definición 3.28

Para cada $k \geq 0$ y $\omega \in \mathcal{P}_k$ definimos

$$q_k(\omega) = \inf_{x \in \omega} \{r_{k+1}(x)\}.$$

Observación 3.29

Sea $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$ y supongamos que $f^{q_{n-1}}(\omega) \not\subset U^+_\Delta$. Tome ω_1 como un componente conexo de $\omega \setminus f^{-q_{n-1}}_{|\omega}(U_\Delta)$ cuya imagen bajo $f^{q_{n-1}}$ no está contenida en U^+_Δ. Obviamente tenemos que

$$\lambda(f^{q_{n-1}}(\omega_1)) \geq \frac{e^{-\Delta+1} - e^{-\Delta}}{(\Delta-1)^2}.$$

Sea k la primera vez después de q_{n-1} para la cual $f^k(\omega_1) \cap U^+_{\Delta+1} \neq \emptyset$.

(i) Si $f^k(\omega_1) \not\subset U^+_\Delta$, entonces debe contener algún $I_{m,i}$ con $|m| \geq \Delta$ y entonces, por definición, $r_n(x) \leq k$ para los puntos $x \in \omega_1$ tales que $f^k(x) \in U_\Delta$.

(ii) Si $f^k(\omega_1) \subset U_\Delta^+$, entonces por el Lema A.2

$$\lambda(f^k(\omega_1)) = \lambda(f^{k-q_{n-1}}(f^{q_{n-1}}(\omega_1))) \geq \lambda(f^{q_{n-1}}(\omega_1)) \geq 2\frac{e^{-\Delta} - e^{-\Delta-1}}{\Delta^2}.$$

Por lo tanto, se sigue una vez más que $f^k(\omega_1)$ debe contener al menos un $I_{m,i}$ con $|m| \geq \Delta$, y por lo tanto $r_n(x) \leq k$ para $x \in \omega_1$.

De (i) y (ii) concluimos que para los puntos $x \in \omega$ tales que $r_n(x) > q_{n-1}(\omega)$ se tiene que $f^j(x) \notin U_{\Delta+1}^+$, para $q_{n-1}(\omega) \leq j < r_n(x)$.

Observación 3.30

Se sigue del Lema A.5 y la Observación 3.29 que r_n está definido para todos los puntos en $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}$, excepto, posiblemente, para un conjunto de medida cero.

Observación 3.31

Para un intervalo $\omega \in \mathcal{P}_n$ tal que $f^{r_n}(\omega) \subset I_{m_0,i_0}^+$ tenemos

$$q_n(\omega) \geq r_n(x) + p(m_0).$$

Para la definición de las medidas $\mathcal{X}_n$, $\mathcal{Y}_n$, $\mathcal{Z}_n$ y $\mathcal{W}_n$ es conveniente distinguir los siguientes tipos de iteraciones para cada $\omega \in \mathcal{P}_n$:

1. 1. El *n-ésimo* tiempo de retorno r_n.
2. El *periodo límite* después del *n-ésimo* retorno, que consiste en las iteraciones j con $r_n + 1 \leq j < r_n + p_n$, donde $p_n(\omega) = p(m)$ y $|m| \geq \Delta$ es el entero tal que $f^{r_n}(\omega)$ contiene algún intervalo $I_{m,i}$.
3. El *periodo libre* después del *n-ésimo* retorno, es decir, el conjunto de iteraciones j con $r_n + p_n \leq j < q_n$.

Las medidas $\mathcal{X}_n$, $\mathcal{Y}_n$, $\mathcal{Z}_n$ y $\mathcal{W}_n$ se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_n &= \sum_{\omega \in \mathcal{P}_n} f_*^{r_n}(\lambda|\omega) \\
\mathcal{Y}_n &= \sum_{\omega \in \mathcal{P}_n} \sum_{j=r_n+1}^{r_n+p_n-1} f_*^j(\lambda|\omega) \\
\mathcal{Z}_n &= \sum_{\omega \in \mathcal{P}_n} \sum_{j=r_n+p_n}^{q_n-1} f_*^j(\lambda|\omega) \\
\mathcal{W}_n &= \sum_{\omega \in \mathcal{P}_{n+1}} \sum_{j=q_n}^{r_{n+1}-1} f_*^j(\lambda|\omega)
\end{aligned}$$

Las dos primeras medidas corresponden, respectivamente, a las contribuciones del *n-ésimo* tiempo de retorno r_n y del periodo límite que le sigue. La medida $\mathcal{Z}_n$ tiene en cuenta la contribución de las iteraciones libres que siguen a este periodo límite, hasta la siguiente situación de retorno q_n. Finalmente, para los elementos de $\mathcal{P}_{n+1}$ que en el instante q_n no tienen su $(n+1)^\circ$ retorno, debemos considerar también la contribución de las iteraciones posteriores, hasta el $(n+1)^\circ$ retorno, y esto se hace en $\mathcal{W}_n$. Con las definiciones anteriores tenemos

$$\mu_n \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\infty} f_*^j\big(\lambda|\{x \in U_\Delta : r_n(x) > j\}\big) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\mathcal{X}_k + \mathcal{Y}_k + \mathcal{Z}_k + \mathcal{W}_k)$$

como queríamos.

3.3.3. Estimación de Densidad

Proposición 3.32

Existe una constante $E_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que para toda $n \geq 0$

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{X}_n \leq E_0$$

Demostración. Probaremos que si E_0 es suficientemente grande, entonces

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{X}_{n-1} \leq E_0 \Rightarrow \frac{d}{d\lambda}\mathcal{X}_n \leq E_0.$$

Esto implica la afirmación, ya que la densidad de $\mathcal{X}_0$ está, obviamente, acotada por una constante. Vamos a definir $\mathcal{P}_{n-1}^*$, un refinamiento de $\mathcal{P}_{n-1}$, que se escribirá como la unión disjunta de tres colecciones de intervalos: $\mathcal{P}_{n-1}^0$, $\mathcal{P}_{n-1}^1$ y $\mathcal{P}_{n-1}^2$. Este refinamiento se hace de tal manera que todo intervalo en $\mathcal{P}_{n-1}^*$ es el subintervalo máximo del intervalo en $\mathcal{P}_{n-1}$ que lo contiene, en el que r_n es constante. Sea ω un intervalo de $\mathcal{P}_{n-1}$. Definimos los elementos de $\mathcal{P}_{n-1}^0$, $\mathcal{P}_{n-1}^1$ y $\mathcal{P}_{n-1}^2$ contenidos en ω según las siguientes reglas:

- Si $f^{q_{n-1}}(\omega) \subset U_\Delta^+$ decimos que $\omega \in \mathcal{P}_{n-1}^0$.
- Si $f^{q_{n-1}}(\omega) \not\subset U_\Delta^+$ tomamos $\omega_1 = f^{-q_{n-1}}(U_\Delta) \cap \omega$ como un elemento de $\mathcal{P}_{n-1}^1$.

Para los demás puntos, decimos que $x, y \in \omega$ están en el mismo $\omega_2 \in \mathcal{P}_{n-1}^2$ si y sólo si $r_n(x) = r_n(y)$ (que obviamente es mayor que $q_{n-1}(\omega)$).

De las definiciones de $\mathcal{P}_{n-1}^0$, $\mathcal{P}_{n-1}^1$ y $\mathcal{P}_{n-1}^2$ se sigue que:

(a) Si ω_0 es un elemento de $\mathcal{P}_{n-1}^0$, entonces ω_0 es también un elemento de $\mathcal{P}_{n-1}$. Sea $I_{m,i}$ el intervalo tal que $f^{r_{n-1}}(\omega_0) \supset I_{m,i}$. De los Lemas A.2 y A.3 se sigue que

$$\lambda(f^{r_n}(\omega_0)) = \lambda(f^{q_{n-1}}(\omega_0)) \geq e^{\left(1-\frac{4\beta}{c}\right)|m|}\lambda(I_{m,i}) \geq \frac{e^{-\frac{4\beta}{c}|m|}}{2m^2}.$$

(b) Para los intervalos $\omega_1 \in \mathcal{P}_{n-1}^1$

$$\lambda(f^{r_n}(\omega_1)) = \lambda(f^{q_{n-1}}(\omega_1)) \geq \frac{e^{-\Delta} - e^{-\Delta-1}}{\Delta^2} \geq \frac{e^{-\Delta}}{2\Delta^2}.$$

ya que $f^{q_{n-1}}(\omega_1)$ contiene al menos un $I_{\Delta,i}$.

(c) Para un intervalo $\omega_2 \in \mathcal{P}_{n-1}^2$ sea k la última vez antes de $r_n = r_n(\omega_2)$ tal que ω dio origen a otro elemento de $\mathcal{P}_{n-1}^*$. Por lo tanto, debe haber un intervalo ω', $\omega_2 \subset \omega' \subset \omega$, tal que

$$f^k(\omega') \cap U_\Delta = \emptyset \quad \text{y} \quad \lambda(f^k(\omega')) \geq \frac{e^{-\Delta+1} - e^{-\Delta}}{(\Delta-1)^2}.$$

(i) Si $f^{r_n}(\omega') \subset U_\Delta^+$, entonces $\omega' = \omega_2 \in \mathcal{P}_{n-1}^2$ y del Lema A.2 y la Observación 3.29 tenemos

$$\lambda(f^{r_n}(\omega')) \geq \lambda(f^k(\omega')) \geq \frac{e^{-\Delta+1}}{2(\Delta-1)^2}.$$

(ii) Si $f^{r_n}(\omega') \not\subset U_\Delta^+$, entonces

$$\lambda(f^{r_n}(\omega_2)) \geq \frac{e^{-\Delta} - e^{-\Delta-1}}{\Delta^2},$$

ya que $f^{r_n}(\omega')$ debe contener al menos un $I_{\Delta,i}$ y ω_2 es precisamente la parte de ω' que cae en U_Δ.

En ambos casos tenemos que $\lambda(f^{r_n}(\omega_2)) \geq \dfrac{e^{-\Delta}}{2\Delta^2}$.

Ahora, sea J un intervalo en $[-1,1]$ y supongamos $\dfrac{d\mathcal{X}_{n-1}}{d\lambda} \leq E_0$. Escribimos

$$\mathcal{X}_n(J) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{\omega_i \in \mathcal{P}_{n-1}^i} \lambda\big(f^{-r_n}(J) \cap \omega_i\big).$$

Para $i = 0, 1, 2$ tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda\big(f^{-r_n}(J) \cap \omega_i\big) &= \lambda\big(f^{-r_n}(J \cap f^{r_n}(\omega_i))\big) \\
&= \frac{1}{|(f^{r_n})'(x)|} \cdot \lambda\big(J \cap f^{r_n}(\omega_i)\big), \quad \text{para algún } x \in \omega_i \\
&\leq \frac{1}{|(f^{r_n})'(x)|} \cdot \frac{\lambda\big(f^{r_n}(\omega_i)\big)}{\lambda\big(f^{r_n}(\omega_i)\big)} \cdot \lambda(J) \\
&\leq \frac{|(f^{r_n})'(y)|}{|(f^{r_n})'(x)|} \cdot \frac{\lambda(\omega_i)}{\lambda\big(f^{r_n}(\omega_i)\big)} \cdot \lambda(J), \quad \text{para algún } y \in \omega_i \\
&\leq C_2 \cdot \frac{\lambda(\omega_i)}{\lambda\big(f^{r_n}(\omega_i)\big)} \cdot \lambda(J), \quad \text{por el Lema A.4.}
\end{aligned}$$

En consecuencia tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\sum_{\omega_i\in\mathcal{P}_{n-1}^{i}}\lambda\big(f^{-r_n}(J)\cap\omega_i\big) &\leq \sum_{i=1}^{2}\sum_{\omega_i\in\mathcal{P}_{n-1}^{i}} C_2\cdot\frac{\lambda(\omega_i)}{\lambda\big(f^{r_n}(\omega_i)\big)}\cdot\lambda(J)\\ &\leq C_2\sum_{i=1}^{2}\sum_{\omega_i\in\mathcal{P}_{n-1}^{i}}\lambda(\omega_i)\cdot 2\Delta^2 e^{\Delta}\cdot\lambda(J)\\ &\leq 2C_2\Delta^2 e^{\Delta}\lambda(J)\\ &= K(\Delta)\lambda(J)\end{aligned}$$

donde $K(\Delta)=2C_2\Delta^2e^{\Delta}$. Para $i=0$ tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{\omega_0\in\mathcal{P}_{n-1}^{0}}\lambda\big(f^{-r_n}(J)\cap\omega_0\big) &= \sum_{\substack{|m|\geq\Delta\\1\leq i\leq m^2}}\sum_{\substack{\omega_0\in\mathcal{P}_{n-1}^{0}\\ f^{r_{n-1}}(\omega_0)\subset I_{m,i}^{+}}}\lambda\big(f^{-r_n}(J)\cap\omega_0\big)\\ &= \sum_{\substack{|m|>q\\1\leq i\leq m^2}}\sum_{\substack{\omega_0\in\mathcal{P}_{n-1}^{0}\\ f^{r_{n-1}}(\omega_0)\subset I_{m,i}^{+}}}\lambda\big(f^{-r_n}(J)\cap\omega_0\big)+\\ &\quad+\sum_{\substack{|m|\leq q\\1\leq i\leq m^2}}\sum_{\substack{\omega_0\in\mathcal{P}_{n-1}^{0}\\ f^{r_{n-1}}(\omega_0)\subset I_{m,i}^{+}}}\lambda\big(f^{-r_n}(J)\cap\omega_0\big)\end{aligned}$$

donde q se debe determinar de tal manera que

$$S_1=\sum_{\substack{|m|>q\\1\leq i\leq m^2}}\sum_{\substack{\omega_0\in\mathcal{P}_{n-1}^{0}\\ f^{r_{n-1}}(\omega_0)\subset I_{m,i}^{+}}}\lambda\big(f^{-r_n}(J)\cap\omega_0\big)\leq\frac{1}{2}E_0\lambda(J)\tag{1}$$

y

$$S_2=\sum_{\substack{|m|\leq q\\1\leq i\leq m^2}}\sum_{\substack{\omega_0\in\mathcal{P}_{n-1}^{0}\\ f^{r_{n-1}}(\omega_0)\subset I_{m,i}^{+}}}\lambda\big(f^{-r_n}(J)\cap\omega_0\big)\leq\bar{K}(q)\lambda(J)\tag{2}$$

donde $\bar{K}(q)$ es una constante que no depende de n ni de J. Si esto sucede, tenemos

$$\mathcal{X}_n(J)\leq\left(K(\Delta)+\bar{K}(q)+\frac{1}{2}E_0\right)\cdot\lambda(J),$$

y entonces, eligiendo E_0 tal que

$$\frac{1}{2}E_0\geq K(\Delta)+\bar{K}(q),$$

tenemos

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{X}_n \leq E_0.$$

Ahora, sólo nos queda demostrar que es posible elegir q de modo que S_1 y S_2 satisfagan (1) y (2). Para S_1 tenemos

$$\begin{aligned}
S_1 &\leq \sum_{\substack{|m|>q \\ 1\leq i\leq m^2}} \sum_{\substack{\omega_0\in\mathcal{P}^0_{n-1} \\ f^{r_{n-1}}(\omega_0)\subset I^+_{m,i}}} C_2 \cdot \frac{\lambda(\omega_0)}{\lambda(f^{r_n}(\omega_0))} \cdot \lambda(J) \\
&\leq \sum_{\substack{|m|>q \\ 1\leq i\leq m^2}} \sum_{\substack{\omega_0\in\mathcal{P}^0_{n-1} \\ f^{r_{n-1}}(\omega_0)\subset I^+_{m,i}}} C_2 \cdot 2m^2 e^{\frac{4\beta}{c}|m|} \cdot \lambda(\omega_0) \cdot \lambda(J) \\
&\leq \sum_{\substack{|m|>q \\ 1\leq i\leq m^2}} C_2 \cdot 2m^2 e^{\frac{4\beta}{c}|m|} \cdot \lambda(J) \sum_{\omega_0\in\mathcal{P}^0_{n-1}} \lambda\big(f^{-r_{n-1}}(I^+_{m,i})\cap\omega_0\big) \\
&\leq \sum_{\substack{|m|>q \\ 1\leq i\leq m^2}} C_2 \cdot 2m^2 e^{\frac{4\beta}{c}|m|} \cdot \lambda(J) \cdot \mathcal{X}_{n-1}(I^+_{m,i}) \\
&\leq \sum_{\substack{|m|>q \\ 1\leq i\leq m^2}} C_2 \cdot 2m^2 e^{\frac{4\beta}{c}|m|} \cdot \lambda(J) \cdot E_0\lambda(I^+_{m,i}), \quad \text{por inducción.}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\lambda(I^+_{m,i}) \leq 10\frac{e^{-|m|}}{m^2},$$

y sumando en $1 \leq i \leq m^2$, tenemos

$$\begin{aligned}
S_1 &\leq 2E_0C_2 \sum_{\substack{|m|>q \\ 1\leq i\leq m^2}} m^2 e^{\frac{4\beta}{c}|m|} \cdot 10\frac{e^{-|m|}}{m^2} \cdot \lambda(J) \\
&\leq 2E_0C_2 \sum_{|m|>q} 10m^2 e^{\left(-1+\frac{4\beta}{c}\right)|m|} \cdot \lambda(J).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, sólo tenemos que elegir q tal que

$$2C_2 \sum_{|m|>q} 10m^2 e^{\left(-1+\frac{4\beta}{c}\right)|m|} \leq \frac{1}{2}.$$

Para S_2 tenemos

$$
\begin{aligned}
S_2 &\leq \sum_{\substack{|m|\leq q \\ 1\leq i\leq m^2}} \sum_{\substack{\omega_0\in\mathcal{P}^0_{n-1} \\ f^{r_{n-1}}(\omega_0)\subset I^+_{m,i}}} C_2\cdot\frac{\lambda(\omega_0)}{\lambda(f^{r_n}(\omega_0))}\cdot\lambda(J) \\
&\leq \sum_{\substack{|m|\leq q \\ 1\leq i\leq m^2}} \sum_{\substack{\omega_0\in\mathcal{P}^0_{n-1} \\ f^{r_{n-1}}(\omega_0)\subset I^+_{m,i}}} C_2\cdot 2m^2 e^{\frac{4\beta}{c}|m|}\cdot\lambda(\omega_0)\cdot\lambda(J) \\
&\leq \sum_{|m|\leq q} 2C_2 m^4 e^{\frac{4\beta}{c}|m|}\cdot\lambda(J) \\
&\leq 2q\cdot 2C_2 q^4 e^{\frac{4\beta}{c}|q|}\cdot\lambda(J)
\end{aligned}
$$

Entonces, sólo tenemos que tomar $\bar{K}(q) = 4C_2 q^5 e^{\frac{4\beta}{c}|q|}$. ■

Proposición 3.33

Existe $\phi_0 \in L^1(\lambda)$ tal que para toda $n \geq 1$

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{Y}_n \leq \phi_0$$

Demostración. Para cada intervalo J en $[-1,1]$ tenemos

$$\mathcal{Y}_n(J) = \sum_{\omega\in\mathcal{P}_n}\sum_{j=1}^{p_n-1}\lambda\big(f^{-r_n}\big(f^{-j}(J)\big)\cap\omega\big).$$

Ya que $f^{r_n}(\omega)\subset I^+_{m,i}\subset I^+_m$ y $p_n(\omega)=p(m)$ para alguna $|m|\geq\Delta$, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Y}_n(J) &\leq \sum_{\omega\in\mathcal{P}_n}\sum_{|m|\geq\Delta}\sum_{j=1}^{p(m)-1}\lambda\big(f^{-r_n}\big(f^{-j}(J)\cap I^+_m\big)\cap\omega\big) \\
&= \sum_{|m|\geq\Delta}\sum_{j=1}^{p(m)-1}\sum_{\omega\in\mathcal{P}_n}\lambda\big(f^{-r_n}\big(f^{-j}(J)\cap I^+_m\big)\cap\omega\big) \\
&= \sum_{|m|\geq\Delta}\sum_{j=1}^{p(m)-1}\mathcal{X}_n\big(f^{-j}(J)\cap I^+_m\big) \\
&\leq \sum_{|m|\geq\Delta}\sum_{j=1}^{p(m)-1}E_0\lambda\big(f^{-j}(J)\cap I^+_m\big), \quad \text{por la Proposición 3.32.}
\end{aligned}
$$

Considerando la medida

$$\mathcal{Y} = E_0 \sum_{|m|\geq\Delta} \sum_{j=1}^{p(m)-1} f_*^j\big(\lambda|I_m^+\big)$$

obtenemos de los cálculos anteriores que $\mathcal{Y}_n \leq \mathcal{Y}$ para toda $n \geq 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}([-1,1]) &= E_0 \sum_{|m|\geq\Delta} \sum_{j=1}^{p(m)-1} \lambda\big(f^{-j}([-1,1]) \cap I_m^+\big) \\
&\leq E_0 \sum_{|m|\geq\Delta} \sum_{j=1}^{p(m)-1} \lambda\big(I_m^+\big) \\
&\leq E_0 \sum_{|m|\geq\Delta} \sum_{j=1}^{p(m)-1} \big(e - e^{-2}\big) \cdot e^{-|m|} \\
&\leq \big(e - e^{-2}\big) \cdot E_0 \sum_{|m|\geq\Delta} \frac{3}{c}|m| \cdot e^{-|m|}, \quad \text{por el Lema A.3.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{Y}$ es una medida finita. Como también es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, tomamos

$$\phi_0 = \frac{d}{d\lambda}\mathcal{Y}$$

y el resultado queda demostrado, atendiendo al hecho de que $\mathcal{Y}_n \leq \mathcal{Y}$ para toda $n \geq 1$. ■

Definición 3.34

Para cada $|m| \geq \Delta$ y $1 \leq i \leq m^2$ sea $q(m,i)$ el $j > 0$ más pequeño para el cual $f^j(I_{m,i})$ contiene algún intervalo I_{m_0,i_0} con $|m_0| \geq \Delta$.

Proposición 3.35

Existe $\phi_1 \in L^1(\lambda)$ tal que para toda $n \geq 0$

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{Z}_n \leq \phi_1$$

Demostración. Para cada intervalo J en $[-1,1]$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_n(J) &= \sum_{\omega\in\mathcal{P}_n} \sum_{j=p_n}^{q_n-r_n-1} \lambda\big(f^{-r_n-j}(J) \cap \omega\big) \\
&\leq \sum_{\substack{|m|\geq\Delta \\ 1\leq i\leq m^2}} \sum_{\omega\in\mathcal{P}_n} \sum_{j=p_n}^{q_n-r_n-1} \lambda\big(f^{-r_n}\big(f^{-j}(J) \cap I_{m,i}^+\big) \cap \omega\big).
\end{aligned}$$

Para $\omega \in \mathcal{P}_n$ sea $I_{m,i}$ el intervalo tal que $f^{r_n}(\omega) \supset I_{m,i}$. Se sigue fácilmente de las definiciones que $q_n(\omega) - r_n(\omega) \leq q(m,i)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_n(J) &= \sum_{\substack{|m|\geq\Delta \\ 1\leq i\leq m^2}} \sum_{j=p(m)}^{q(m,i)-1} \sum_{\omega\in\mathcal{P}_n} \lambda\big(f^{-r_n}\big(f^{-j}(J)\cap I^+_{m,i}\big)\cap\omega\big) \\
&\leq E_0 \sum_{\substack{|m|\geq\Delta \\ 1\leq i\leq m^2}} \sum_{j=p(m)}^{q(m,i)-1} \lambda\big(f^{-j}(J)\cap I^+_{m,i}\big), \quad \text{por la Proposición 3.32.}
\end{aligned}$$

definiendo la medida

$$\mathcal{Z} = \sum_{\substack{|m|\geq\Delta \\ 1\leq i\leq m^2}} \sum_{j=p(m)}^{q(m,i)-1} f^j_*\big(\lambda|I^+_{m,i}\big)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}([-1,1]) &= \sum_{\substack{|m|\geq\Delta \\ 1\leq i\leq m^2}} \sum_{j=p(m)}^{q(m,i)-1} \lambda\big(f^{-j}([-1,1])\cap I^+_{m,i}\big) \\
&\leq \sum_{\substack{|m|\geq\Delta \\ 1\leq i\leq m^2}} \sum_{j=p(m)}^{q(m,i)-1} \lambda\big(I^+_{m,i}\big) \\
&\leq \sum_{\substack{|m|\geq\Delta \\ 1\leq i\leq m^2}} C_4|m|\lambda\big(I^+_{m,i}\big), \quad \text{por el Lema A.6} \\
&\leq \sum_{\substack{|m|\geq\Delta \\ 1\leq i\leq m^2}} C_4|m|10\frac{e^{-|m|}}{m^2} \\
&\leq \sum_{|m|\geq\Delta} 10C_4|m|e^{-|m|}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{Z}$ es una medida finita. Como $\mathcal{Z}$ también es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y $\mathcal{Z}_n \leq E_0\mathcal{Z}$ para toda $n \geq 0$, tomando

$$\phi_1 = E_0\frac{d}{d\lambda}\mathcal{Z}$$

hemos demostrado el resultado. ■

Proposición 3.36

Existe $\phi_2 \in L^1(\lambda)$ tal que para toda $n \geq 1$

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{W}_n \leq \phi_2$$

Demostración. Para cada intervalo J en $[-1,1]$ tenemos

$$\mathcal{W}_n(J) = \sum_{\omega\in\mathcal{P}_{n+1}} \sum_{j=q_n}^{r_{n+1}-1} \lambda\big(f^{-j}(J)\cap\omega\big).$$

Entonces, podemos escribir

$$\mathcal{W}_n(J) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{\omega\in\mathcal{P}_{n+1}\\ r_{n+1}=q_n+k}} \lambda\big(f^{-q_n-j}(J)\cap\omega\big).$$

Sea $\omega\in\mathcal{P}_{n+1}$ tal que $r_{n+1}=q_n+k$ y considere $x\in\omega$. Se sigue de la Observación 3.29 que

$$f^j(x)\notin U^+_{\Delta+1} \text{ para } q_n\leq j<r_{n+1}=q_n+k,$$

y por lo tanto

$$f^{q_n}(x)\in R_k.$$

En consecuencia tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_n(J) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{\omega\in\mathcal{P}_{n+1}\\ r_{n+1}=q_n+k}} \lambda\big(f^{-q_n}\big(f^{-j}(J)\cap R_k\big)\cap\omega\big)\\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{\omega\in\mathcal{P}_{n}\\ f^{q_n}(\omega)\not\subset U_\Delta}} \lambda\big(f^{-q_n}\big(f^{-j}(J)\cap R_k\big)\cap\omega\big)\\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{\omega\in\mathcal{P}_{n}\\ f^{q_n}(\omega)\not\subset U_\Delta}} \frac{1}{|(f^{q_n})'(x)|}\cdot\lambda\big(f^{-j}(J)\cap R_k\big), \quad \text{para alguna } x\in\omega\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{\omega\in\mathcal{P}_{n}\\ f^{q_n}(\omega)\not\subset U_\Delta}} \frac{1}{|(f^{q_n})'(x)|}\cdot\frac{\lambda\big(f^{q_n}(\omega)\big)}{\lambda\big(f^{q_n}(\omega)\big)}\cdot\lambda\big(f^{-j}(J)\cap R_k\big)\\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{\omega\in\mathcal{P}_{n}\\ f^{q_n}(\omega)\not\subset U_\Delta}} \frac{|(f^{q_n})'(y)|}{|(f^{q_n})'(x)|}\cdot\frac{\lambda(\omega)}{\lambda\big(f^{q_n}(\omega)\big)}\cdot\lambda\big(f^{-j}(J)\cap R_k\big).
\end{aligned}$$

Para los intervalos $\omega\in\mathcal{P}_n$ tales que $f^{q_n}(\omega)\not\subset U_\Delta$, tenemos

$$\lambda\big(f^{q_n}(\omega)\big) \geq \frac{e^{-\Delta}}{2\Delta^2},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_n(J) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{\omega\in\mathcal{P}_n}\left|\frac{(f^{q_n-1})'(y)}{(f^{q_n-1})'(x)}\right|\cdot\left|\frac{f'\big(f^{q_n-1}(y)\big)}{f'\big(f^{q_n-1}(x)\big)}\right|\cdot 2e^{\Delta}\Delta^2\cdot\lambda(\omega)\cdot\lambda\big(f^{-j}(J)\cap R_k\big)\\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} C_2\cdot\left|\frac{f^{q_n-1}(y)}{f^{q_n-1}(x)}\right|\cdot 2e^{\Delta}\Delta^2\cdot\lambda\big(f^{-j}(J)\cap R_k\big), \quad \text{por el Lema A.4.}
\end{aligned}$$

Observamos que para $\omega\in\mathcal{P}_n$ tenemos $f^{q_n-1}(\omega)\cap U_{\Delta+1}=\emptyset$. En efecto, si $f^{q_n-1}(\omega)$ interseca a $U_{\Delta+1}$, y como $f^{q_n-1}(\omega)$ no contiene intervalos $I_{m,i}$ con $|m|\geq\Delta$, entonces, $f^{q_n-1}(\omega)$ estaría contenido en U_{Δ}. Por lo tanto, tendríamos $f\big(f^{q_n-1}(\omega)\big)=f^{q_n}(\omega)$ que no interseca a U_{Δ}, en contradicción con la definición de q_n. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_n(J) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} C_2\cdot\frac{1}{e^{-\Delta-1}}\cdot 2e^{\Delta}\Delta^2\cdot\lambda\big(f^{-j}(J)\cap R_k\big)\\
&\leq E_1\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\lambda\big(f^{-j}(J)\cap R_k\big)
\end{aligned}$$

donde $E_1=2C_2e^{2\Delta+1}\Delta^2$. Definamos la medida

$$\mathcal{W}=E_1\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} f_*^j\big(\lambda|R_k\big).$$

Hemos demostrado anteriormente que $\mathcal{W}_n\leq\mathcal{W}$ para toda $n\geq 1$. La medida $\mathcal{W}$ satisface

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}([-1,1]) &= E_1\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\lambda\big(f^{-j}([-1,1])\cap R_k\big)\\
&\leq E_1\sum_{k=1}^{\infty} kC_3\eta^k, \quad \text{por el Lema A.5.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{W}$ es una medida finita. Como $\mathcal{W}$ también es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, tomamos

$$\phi_2=\frac{d}{d\lambda}\mathcal{W}$$

y se demuestra la afirmación. ■

Apéndice A

Lemas Auxiliares

En este apéndice vamos a dar algunas definiciones y resultados que serán importantes tanto en la construcción de la medida como en las estimaciones de la densidad. Primero, introducimos una notación útil:

Para cada entero positivo m, sea U_m el intervalo

$$U_m = (-e^{-m}, e^{-m}) = \left(-\frac{1}{e^m}, \frac{1}{e^m}\right).$$

Lema A.1

Para todo $a \in [1,2]$ tenemos que $|f_a(x)| \leq 1 - \frac{\delta^2}{9}$, siempre que $x \notin U_{\Delta+1}$ y $|x| \leq 1 - \frac{\delta^2}{9}$.

Demostración. Como $x \notin U_{\Delta+1}$, se sigue que para $a \geq 1$

$$x^2 \geq e^{-2\Delta-2} = \frac{\delta^2}{e^2} \geq \frac{\delta^2}{9a},$$

lo que implica que

$$1 - ax^2 \leq 1 - \frac{\delta^2}{9}. \tag{1}$$

Verificamos fácilmente que para $\delta < 1$

$$\begin{aligned} |x| \leq 1 - \frac{\delta^2}{9} \quad &\Rightarrow \quad x^2 \leq \frac{2 - \frac{\delta^2}{9}}{2} \\ &\Rightarrow \quad x^2 \leq \frac{2 - \frac{\delta^2}{9}}{a}, \quad \text{ya que } a \leq 2 \\ &\Rightarrow \quad 1 - ax^2 \geq -1 + \frac{\delta^2}{9}, \end{aligned}$$

y de (1) arriba, se sigue que

$$|f_a(x)| = |1 - ax^2| \leq 1 - \frac{\delta^2}{9}$$

como queríamos. ■

Lema A.2

Dado Δ suficientemente grande y $0 < c_0 < \log 2$, existen $\gamma = \gamma(\Delta) > 0$ y $a_0 = a_0(\Delta, c_0) < 2$ tales que para $x \in [-1, 1]$, $a \in (a_0, 2]$ y $k \geq 1$ se cumple lo siguiente:

(a) Si $x, f_a(x), \ldots, f_a^{k-1}(x) \notin U_{\Delta+1}$ entonces $|(f_a^k)'(x)| \geq \gamma e^{c_0 k}$.

(b) Si $x, f_a(x), \ldots, f_a^{k-1}(x) \notin U_{\Delta+1}$ y $f_a^k(x) \in U_{\Delta-1}$ entonces $|(f_a^k)'(x)| \geq e^{c_0 k}$.

Demostración. Los argumentos de la demostración dependen de si la órbita del punto x es cercana a 1 o no. Por lo tanto, antes de dar la demostración en el caso general, consideremos los dos casos particulares siguientes:

(i) Supongamos primero que

$$\forall i \in \{0, \ldots, k-1\} \ |f_a^i(x)| > 1 - \frac{\delta^2}{9}$$

En este caso tenemos

$$|(f_a^k)'(x)| = \prod_{i=0}^{k-1} \left|f_a'\big(f_a^i(x)\big)\right| = \prod_{i=0}^{k-1} 2a|f_a^i(x)| > \left[2a\left(1 - \frac{\delta^2}{9}\right)\right]^k.$$

Si elegimos $a_0 \geq \left(1 - \dfrac{\delta^2}{9}\right)^{-1}$ (que es menor que 2, siempre que $\dfrac{\delta^2}{9} < 1/2$) tenemos que $2a_0\left(1 - \dfrac{\delta^2}{9}\right) \geq 2$. Por lo tanto, para $a > a_0$, se sigue que

$$|(f_a^k)'(x)| \geq \left[2a_0\left(1 - \frac{\delta^2}{9}\right)\right]^k \geq 2^k \geq e^{c_0 k},$$

y el Lema A.2 queda demostrado en este caso.

(ii) Supongamos ahora que

$$\forall i \in \{0, \ldots, k\} \ |f_a^i(x)| \leq 1 - \frac{\delta^2}{9}$$

Consideremos el homeomorfismo

$$\begin{array}{rccc} h: & [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} y\right) \end{array}$$

y definamos $g_a = h^{-1} \circ f_a \circ h$. Tenemos que

$$\begin{aligned} g_2(y) &= \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}\left(1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right) &= \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}(\cos(\pi y)) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\pi|y|\right) &= 1-2|y| \end{aligned}$$

y así $|g_2'(y)| = 2$ para todo $y \neq 0$. Sea $y = h^{-1}(x)$. Como $g_a = h^{-1} \circ f_a \circ h$ tenemos

$$\begin{aligned} |g_a'(y) - g_2'(y)| &= \left|(h^{-1})'(f_a(x)) \cdot f_a'(x) \cdot h'(y) - (h^{-1})'(f_2(x)) \cdot f_2'(x) \cdot h'(y)\right| \\ &= \left|(h^{-1})'(f_a(x)) \cdot f_a'(x) - (h^{-1})'(f_2(x)) \cdot f_a'(x) + \right. \\ &\quad \left. + (h^{-1})'(f_2(x)) \cdot f_a'(x) - (h^{-1})'(f_2(x)) \cdot f_2'(x)\right| \cdot |h'(y)| \\ &\leq \left(|f_a'(x)| \cdot \left|(h^{-1})'(f_a(x)) - (h^{-1})'(f_2(x))\right| + \right. \\ &\quad \left. + \left|(h^{-1})'(f_2(x))\right| \cdot |f_a'(x) - f_2'(x)|\right) \cdot |h'(y)|. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $|f_a'(x)| \leq 4$, $|h'(y)| \leq \dfrac{\pi}{2}$ y $|f_a'(x) - f_2'(x)| \leq 2|a-2|$, tenemos

$$|g_a'(y) - g_2'(y)| \leq 2\pi\left|(h^{-1})'(f_a(x)) - (h^{-1})'(f_2(x))\right| + \pi\left|(h^{-1})'(f_2(x))\right| \cdot |a-2|.$$

Como $|f_a(x)| \leq 1 - \dfrac{\delta^2}{9}$ y $|f_2(x)| \leq 1 - \dfrac{\delta^2}{9}$ por el Lema A.1, existen constantes C_δ' y C_δ'' para las cuales

$$\left|(h^{-1})'(f_2(x))\right| \leq C_\delta'$$

y

$$\left|(h^{-1})'(f_a(x)) - (h^{-1})'(f_2(x))\right| \leq C_\delta''|f_a(x) - f_2(x)|.$$

Esto, junto con $|f_a(x) - f_2(x)| \leq |a-2|x^2$, conduce a

$$\begin{aligned} |g_a'(y) - g_2'(y)| &\leq 2\pi C_\delta''|f_a(x) - f_2(x)| + \pi C_\delta'|a-2| \\ &\leq 2\pi C_\delta''|a-2|x^2 + \pi C_\delta'|a-2| \\ &\leq C_\delta|a-2| \end{aligned}$$

para alguna constante C_δ. De la última desigualdad se sigue que, dado un número pequeño ϵ, $0 < \epsilon < \log 2 - c_0$, y como $e^{c_0+\epsilon} < 2 = |g_2'(y)|$, existe $a_0 < 2$ tal que para $a \in (a_0, 2]$

$$|g_a'(y)| \geq e^{c_0+\epsilon}.$$

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
|(f_a^k)'(x)| &= \left|h'\big(g_a^k\big(h^{-1}(x)\big)\right| \cdot \left|(g_a^k)'(h^{-1}(x))\right| \cdot \left|(h^{-1})'(x)\right| \\
&= \left|h'\big(h^{-1}(f_a^k(x))\big)\right| \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left|g_a'\big(g_a^i(h^{-1}(x))\big)\right| \cdot \left|(h^{-1})'(x)\right| \\
&= \frac{|(h^{-1})'(x)|}{|(h^{-1})'(f_a^k(x))|} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \left|g_a'\big(h^{-1}(f_a^i(x))\big)\right|.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que $(h^{-1})'\big(f_a^i(x)\big) \neq 0$ para $i = 0, \ldots, k-1$ y $|g_a'(y)| \geq e^{c_0+\epsilon}$, obtenemos fácilmente

$$
|(f_a^k)'(x)| \geq \left|\frac{(h^{-1})'(x)}{(h^{-1})'(f_a^k(x))}\right| \cdot e^{(c_0+\epsilon)k} \geq \left|\frac{(h^{-1})'(x)}{(h^{-1})'(f_a^k(x))}\right| \cdot e^{c_0 k+\epsilon}
$$

Ahora, sólo necesitamos estudiar el cociente involucrado en la última desigualdad, lo que se hará por separado para (a) y (b) respectivamente.

(a) Como $x \notin U_{\Delta+1}$ tenemos que

$$
x^2 \geq e^{-2\Delta-2} = \frac{\delta^2}{e^2} \geq \frac{\delta^2}{9}.
$$

En este caso también tenemos

$$
|f_a^k(x)| \leq 1 - \frac{\delta^2}{9}.
$$

Por lo tanto

$$
\left|\frac{(h^{-1})'(x)}{(h^{-1})'(f_a^k(x))}\right| = \sqrt{\frac{1-(f_a^k(x))^2}{1-x^2}} \geq \sqrt{\frac{1-(1-\frac{\delta^2}{9})^2}{1-\frac{\delta^2}{9}}} = \gamma(\Delta) > 0.
$$

Finalmente, tenemos

$$
|(f_a^k)'(x)| \geq \gamma \cdot e^{c_0 k+\epsilon}.
$$

(Aquí no necesitamos el factor extra e^ϵ, que será útil en la parte (b)).

(b) Esta vez, tenemos que $x \notin U_{\Delta+1}$ y $f_a^k(x) \in U_{\Delta-1}$, lo que implica que

$$
|x| \geq e^{-\Delta-1}
$$

y

$$
|f_a^k(x)| \leq e^{-\Delta+1},
$$

lo que lleva a

$$\left|\frac{(h^{-1})'(x)}{(h^{-1})'(f_a^k(x))}\right| = \sqrt{\frac{1-(f_a^k(x))^2}{1-x^2}} \geq \sqrt{\frac{1-(e^{-\Delta+1})^2}{1-(e^{-\Delta-1})^2}} = A(\Delta).$$

Como $A(\Delta)$ tiende a 1 cuando Δ tiende a infinito, podemos hacer que $A(\Delta) > e^{-\epsilon}$ si elegimos Δ suficientemente grande. Por lo tanto,

$$|(f_a^k)'(x)| \geq A(\Delta) \cdot e^{c_0 k+\epsilon} \geq e^{c_0 k},$$

y el Lema A.2 también se demuestra en este caso.

En el caso general, sea $1 \leq p \leq k$ el mínimo tal que

$$|f_a^p(x)| \leq 1 - \frac{\delta^2}{9}.$$

Bajo la hipótesis del lema, y teniendo en cuenta el Lema A.1, tenemos que $|f_a^i(x)| \leq 1 - \frac{\delta^2}{9}$ para $i = p+1, \ldots, k$. Ya que

$$(f_a^k)'(x) = (f_a^{k-p})'(f_a^p(x)) \cdot (f_a^p)'(x),$$

y de los casos particulares anteriores obtenemos

$$\left|(f_a^{k-p})'(f_a^p(x))\right| \cdot |(f_a^p)'(x)| \geq \begin{cases} \gamma e^{c_0(k-p)} \cdot e^{c_0 p} & \text{para } (a) \\ e^{c_0(k-p)} \cdot e^{c_0 p} & \text{para } (b) \end{cases}$$

lo que da el resultado.

■

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ sea $\xi_n = f^n(0)$ y $\beta > \alpha$ un número pequeño.

Lema A.3

Para cada $|m| \geq \Delta$, $p(m)$ tiene las siguientes propiedades:

(a) Existe una constante $C_1 = C_1(\alpha - \beta)$ (que no depende de δ) tal que para toda $y \in f(U_{|m|-1})$,

$$\frac{1}{C_1} \leq \left|\frac{(f^j)'(y)}{(f^j)'(\xi_1)}\right| \leq C_1$$

para $j = 0, \ldots, p(m)-1$.

(b) $p(m) \leq \frac{3}{c}|m|$.

(c) $|(f^p)'(x)| \geq e^{(1-\frac{4\beta}{c})|m|}$ para $x \in I_m^+$ y $p = p(m)$.

Demostración.

(a) Esta parte se demostrará inductivamente. El resultado es obvio para $j = 0$. Suponiendo que es válido para $0 \leq k \leq j-1$, tenemos en particular que $f^k_{|f(U_{|m|-1})}$ es un difeomorfismo. Primero verificamos que

$$\left|\frac{(f^j)'(y)}{(f^j)'(\xi_1)}\right| = \prod_{k=1}^{j}\left|\frac{f'\big(f^{k-1}(y)\big)}{f'(\xi_k)}\right| = \prod_{k=1}^{j}\left|1+\frac{f^{k-1}(y)-\xi_k}{\xi_k}\right|.$$

Ya que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f^{k-1}(y)-\xi_k}{\xi_k}\right| &= \left|\frac{f^{k-1}(y)-f^{k-1}(\xi_1)}{\xi_k}\right| \\
&\leq \left|\frac{f^{k-1}\big(f(e^{-|m|+1}\big)-f^{k-1}(\xi_1)}{\xi_k}\right|, \text{ por la monotonía de } f^{k-1}_{|f(U_{|m|-1})} \\
&= \left|\frac{f^k(e^{-|m|+1})-\xi_k}{\xi_k}\right| \\
&\leq \frac{e^{-\beta k}}{e^{-\alpha k}}
\end{aligned}$$

se sigue que

$$C_- \leq \left|\frac{(f^j)'(y)}{(f^j)'(\xi_1)}\right| \leq C_+,$$

donde

$$C_\pm = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 \pm e^{(\alpha-\beta)k}\right).$$

El resultado se obtiene eligiendo $C_1 = \text{máx}\left\{C_+, \dfrac{1}{C_-}\right\}$.

(b) Tenemos que

$$2 \geq \left|f^p(e^{-|m|}) - \xi_p\right| = \left|f^{p-1}\big(f(e^{-|m|})\big) - f^{p-1}(\xi_1)\right|.$$

Sea, por otra parte, $y \in f(U_{|m|-1})$ tal que

$$\begin{aligned}
\left|f^{p-1}\big(f(e^{-|m|})\big) - f^{p-1}(\xi_1)\right| &= \left|(f^{p-1})'(y)\right| \cdot \left|f(e^{-|m|}) - \xi_1\right| \\
&\geq \left|(f^{p-1})'(y)\right| \cdot e^{-2|m|}.
\end{aligned}$$

Se sigue de (a) que

$$\begin{aligned}\left|(f^{p-1})'(y)\right| \cdot e^{-2|m|}. &\geq \frac{1}{C_1} \cdot (f^{p-1})'(\xi_1) \cdot e^{-2|m|} \\ &\geq \frac{1}{C_1} \cdot e^{c(p-1)} \cdot e^{-2|m|}.\end{aligned}$$

Luego

$$\log 2 \geq \log\left(\frac{1}{C_1}\right) + c(p-1) - 2|m|$$

y por lo tanto

$$p \leq \frac{c + 2|m| - \log\left(\frac{1}{C_1}\right) + \log 2}{c} \leq \frac{3|m|}{c}$$

(siempre que Δ sea suficientemente grande).

(c) De la definición de $p(m)$ y del *Teorema del Valor Medio* se deduce que para algunos $z \in I_m^+$ e $y \in f(U_{|m|-1})$

$$e^{-\beta p} \leq |f^p(z) - \xi_p| = \left|(f^{p-1})'(y)\right| \cdot |f(z) - \xi_1|.$$

Luego

$$e^{-\beta p} \leq \left|(f^{p-1})'(y)\right| \cdot 2z^2 \leq \left|(f^{p-1})'(y)\right| \cdot 2e^{-2|m|+2}$$

y por lo tanto

$$\left|(f^{p-1})'(y)\right| \geq \frac{1}{2} e^{2|m|-2} \cdot e^{-\beta p}. \tag{1}$$

Para $x \in I_m^+$ tenemos

$$\begin{aligned}|(f^p)'(x)| &= |f'(x)| \cdot \left|(f^{p-1})'(x)\right| \\ &= |2ax| \cdot \left|\frac{(f^{p-1})'(f(x))}{(f^{p-1})'(y)}\right| \cdot \left|(f^{p-1})'(y)\right| \\ &\geq 2ae^{-|m|-2} \cdot \left|\frac{(f^{p-1})'(f(x))}{(f^{p-1})'(y)}\right| \cdot \left|(f^{p-1})'(y)\right|.\end{aligned}$$

Por (a) y (1) anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned} |(f^p)'(x)| &\geq 2ae^{-|m|-2} \cdot \frac{1}{C_1^2} \cdot \frac{1}{2} e^{2|m|-2-\beta p} \\ &\geq \frac{a}{C_1^2} \cdot e^{|m|-\beta\frac{3}{c}|m|-4} \\ &\geq e^{\left(1-\frac{4\beta}{c}\right)|m|} \end{aligned}$$

si Δ es suficientemente grande.

■

Para probar que f tiene distorsión acotada, consideramos para cada I_m, la colección de m^2 intervalos de igual longitud $I_{m,1}, I_{m,2}, \ldots, I_{m,m^2}$ cuya unión es I_m. Es conveniente considerar estos $I_{m,i}$ ordenados de la siguiente manera: si $i > j$, entonces $dist(I_{m,i}, 0) < dist(I_{m,j}, 0)$. Por $I^+_{m,i}$ denotamos la unión de $I_{m,i}$ con los dos intervalos adyacentes del mismo tipo. En las siguientes secciones haremos uso también de los intervalos U^+_m que son, por definición, la unión de U_m con $I_{m-1,(m-1)^2}$ e $I_{-m+1,(m-1)^2}$.

Lema A.4

*(**Distorsión acotada**): Existe una constante C_2 que satisface:*

Sea $\sigma_0 = [x, y]$ un intervalo en U_Δ tal que todos los puntos de σ_0 tienen los mismos tiempos de retorno $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_q \leq N$ antes de N. Supongamos, además, que para toda k, $0 \leq k \leq q$, $\sigma_k = f^{t_k}(\sigma_0) \subset I^+_{m_k,i_k}$ para algún $m_k \geq \Delta$ y $1 \leq i_k \leq m_k^2$. Entonces tenemos:

$$\left|\frac{(f^N)'(x)}{(f^N)'(y)}\right| \leq C_2.$$

Demostración. Sea $x_j = f^j(x)$ e $y_j = f^j(y)$.

$$\left|\frac{(f^N)'(x)}{(f^N)'(y)}\right| = \prod_{j=0}^{N-1} \left|\frac{f'(x_j)}{f'(y_j)}\right| = \prod_{j=0}^{N-1} \left|\frac{x_j}{y_j}\right| \leq \prod_{j=0}^{N-1} \left(1 + \left|\frac{x_j - y_j}{y_j}\right|\right)$$

Es suficiente mostrar que

$$S = \sum_{j=0}^{N-1} \left|\frac{x_j - y_j}{y_j}\right|$$

está uniformemente acotada. Primero estimamos la contribución del período libre $[t_{k-1}, t_k - 1]$ para la suma S

$$F_k = \sum_{j=t_{k-1}+p_{k-1}}^{t_k-1} \left|\frac{x_j - y_j}{y_j}\right| \leq \sum_{j=t_{k-1}+p_{k-1}}^{t_k-1} \left|\frac{x_j - y_j}{\delta}\right|$$

Para $j = t_{k-1} + p_{k-1}, \ldots, t_k - 1$ tenemos

$$\begin{aligned}\lambda(\sigma_k) &\geq |f^{t_k-j}(x_j) - f^{t_k-j}(y_j)| \\ &= \left|(f^{t_k-j})'(z)\right| \cdot |x_j - y_j|, \text{ para algún } z \text{ entre } x_j \text{ e } y_j \\ &\geq e^{c_0(t_k-j)} \cdot |x_j - y_j|, \text{ por el Lema A.2}\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}F_k &\leq \sum_{j=t_{k-1}+p_{k-1}}^{t_k-1} e^{-c_0(t_k-j)} \cdot \frac{\lambda(\sigma_k)}{\delta} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} e^{-c_0 j} \cdot \frac{\lambda(I_{m_k})}{\delta} \cdot \frac{\lambda(\sigma_k)}{\lambda(I_{m_k})} \\ &\leq a_1 \cdot \frac{\lambda(\sigma_k)}{\lambda(I_{m_k})}, \text{ para alguna constante } a_1 = a_1(c_0).\end{aligned}$$

La contribución del retorno t_k es

$$\left|\frac{x_{t_k} - y_{t_k}}{y_{t_k}}\right| \leq \frac{\lambda(\sigma_k)}{e^{-|m_k|-2}} \leq a_2 \cdot \frac{\lambda(\sigma_k)}{\lambda(I_{m_k})}, \text{ donde } a_2 \text{ es una constante.}$$

Por último, calculemos la contribución de los períodos límite

$$B_k = \sum_{j=1}^{p_k-1} \left|\frac{x_{t_k+j} - y_{t_k+j}}{y_{t_k+j}}\right|$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}|x_{t_k+j} - y_{t_k+j}| &= |(f^j)'(z)| \cdot |x_{t_k} - y_{t_k}|, \text{ para algún } z \text{ entre } x_{t_k} \text{ e } y_{t_k} \\ &= \left|(f^{j-1})'(f(z))\right| \cdot |f'(z)| \cdot |x_{t_k} - y_{t_k}| \\ &= \left|(f^{j-1})'(f(z))\right| \cdot 2a|z| \cdot |x_{t_k} - y_{t_k}| \\ &\leq C_1|(f^{j-1})'(\xi_1)| \cdot 2ae^{-|m_k|+1} \cdot \lambda(\sigma_k).\end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos

$$|y_{t_k+j} - \xi_j| = |(f^{j-1})'(\theta)| \cdot |y_{t_k+1} - \xi_1|$$

para algún $\theta \in [y_{t_k+1}, \xi_1]$. Observando que $[y_{t_k+1}, \xi_1] \subset f(f^{t_k}(\sigma_0)) \subset f(I^+_{m_k,i})$, aplicamos el Lema A.3 y obtenemos

$$\begin{aligned} |y_{t_k+j} - \xi_j| &\geq \frac{1}{C_1}|(f^{j-1})'(\xi_1)| \cdot |y_{t_k+1} - \xi_1| \\ &= \frac{1}{C_1}|(f^{j-1})'(\xi_1)| \cdot 2ay_{t_k}^2 \\ &\geq \frac{1}{C_1}|(f^{j-1})'(\xi_1)| \cdot 2ae^{-2|m_k|-4}. \end{aligned}$$

Combinando lo que sabemos sobre $|x_{t_k+j} - y_{t_k+j}|$ y $|y_{t_k+j} - \xi_j|$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{|x_{t_k+j} - y_{t_k+j}|}{|y_{t_k+j}|} &= \frac{|x_{t_k+j} - y_{t_k+j}|}{|y_{t_k+j} - \xi_j|} \cdot \frac{|y_{t_k+j} - \xi_j|}{|y_{t_k+j}|} \\ &\leq C_1^2 \frac{e^5}{e^{-|m_k|}} \cdot \lambda(\sigma_k) \cdot \frac{|y_{t_k+j} - \xi_j|}{|y_{t_k+j}|} \\ &\leq C_1^2 \cdot e^5 \cdot \frac{\lambda(\sigma_k)}{\lambda(I_{m_k})} \cdot \frac{e^{-\beta j}}{e^{-\alpha j} - e^{-\beta j}} \end{aligned}$$

ya que

$$|y_{t_k+j}| \geq |\xi_j| - |y_{t_k+j} - \xi_j| \geq e^{-\alpha j} - e^{-\beta j}.$$

Claramente

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta j}}{e^{-\alpha j} - e^{-\beta j}} < \infty$$

y por lo tanto

$$B_k \leq a_3 \cdot \frac{\lambda(\sigma_k)}{\lambda(I_{m_k})}$$

para alguna constante $a_3 = a_3(\alpha - \beta)$.
Si $t_q + p_q \leq N$ tenemos que considerar un último trozo del periodo libre

$$F_{q+1} = \sum_{j=t_q+p_q}^{N} \left| \frac{x_j - y_j}{y_j} \right|.$$

Claramente, para $j = t_q + p_q, \ldots, N$

$$|f^N(x) - f^N(y)| = |(f^{N-j})'(z)| \cdot |x_j - y_j|$$

para algún z entre x_j e y_j. Ya que $z, f(z), \ldots, f^{N-j-1}(z) \notin U_\Delta$, se sigue del Lema A.2 que

$$|(f^{N-j})'(z)| \geq \gamma e^{c_0(N-j)}.$$

Por lo tanto

$$|x_j - y_j| \leq \gamma^{-1} e^{-c_0(N-j)} \cdot |f^N(x) - f^N(y)| \leq 2\gamma^{-1} e^{-c_0(N-j)},$$

lo que lleva a

$$\begin{aligned} F_{q+1} &\leq \sum_{j=t_q+p_q}^{N} \frac{2\gamma^{-1} e^{-c_0(N-j)}}{e^{-\Delta}} \\ &\leq 2\gamma^{-1} e^{\Delta} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-c_0 k} \\ &\leq a_4, \text{ para alguna constante } a_4 = a_4(\Delta, c_0). \end{aligned}$$

De las estimaciones obtenidas anteriormente, obtenemos

$$S \leq a_4 + a_5 \cdot \sum_{k=0}^{q} \frac{\lambda(\sigma_k)}{\lambda(I_{m_k})}, \quad \text{donde } a_5 = a_1 + a_2 + a_3.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda(\sigma_{k+1}) &= (f^{t_{k+1}-t_k})'(z) \cdot \lambda(\sigma_k), \quad \text{para algún } z \in \sigma_k \\ &= (f^{p_k})'(z) \cdot (f^{t_{k+1}-t_k-p_k})'(f^{p_k}(z)) \cdot \lambda(\sigma_k) \\ &\geq e^{\left(1-\frac{3\beta}{c}|m_k|\right)} \cdot e^{c_0(t_{k+1}-t_k-p_k)} \cdot \lambda(\sigma_k), \quad \text{por los Lemas A.2 y A.3} \\ &\geq 2\lambda(\sigma_k), \quad \text{para } \beta \text{ pequeño.} \end{aligned}$$

Si definimos $k(m) = \text{máx}\{k : m_k = m\}$ y usando el hecho de que $\lambda(\sigma_{k+1}) \geq 2\lambda(\sigma_k)$, podemos ver fácilmente que

$$\sum_{\{k:m_k=m\}} \lambda(\sigma_k) \leq 2\lambda(\sigma_{k(m)}),$$

Y por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{\lambda(\sigma_k)}{\lambda(I_{m_k})} \leq \sum_{m\geq\Delta} \frac{1}{\lambda(I_m)} \sum_{\{k:m_k=m\}} \lambda(\sigma_k) \leq \sum_{m\geq\Delta} \frac{2\lambda(\sigma_{k(m)})}{\lambda(I_m)}.$$

Ya que

$$\frac{\lambda(\sigma_{k(m)})}{\lambda(I_m)} \leq \frac{10}{m^2},$$

se sigue que

$$\sum_{m\geq\Delta} \frac{2\lambda(\sigma_{k(m)})}{\lambda(I_m)} \leq 20 \sum_{m\geq\Delta} \frac{1}{m^2},$$

lo que demuestra que S está uniformemente acotada. ■

Lema A.5

Existe $\epsilon \in I_{\Delta,\Delta^2}$ y constantes $\eta = \eta(\epsilon) < 1$, $C_3 = C_3(\epsilon) > 0$ tales que para toda $n \geq 1$

$$\lambda(\{x : \ x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x) \notin (-\epsilon, \epsilon)\}) \leq C_3 \eta^n.$$

Demostración. La estrategia es elegir $\epsilon \in I_{\Delta,\Delta^2}$ tal que $f^r(\epsilon) \in (-\epsilon, \epsilon)$ para algún $r \geq 1$. Se sigue del crecimiento exponencial de la derivada para los puntos cuya órbita no interseca $U_{\Delta+1}$ (dado por el Lema A.2), que existe $j > 0$ tal que $f^j(I_{\Delta,\Delta^2}) \cap U_{\Delta+1} \neq \emptyset$. Eligiendo un punto ϵ en I_{Δ,Δ^2} tal que $f^j(\epsilon) \in U_{\Delta+1}$ garantizamos que $f^j(\epsilon) \in (-\epsilon, \epsilon)$. Ahora, sea r el entero positivo más pequeño para el cual $f^r(\epsilon) \in (-\epsilon, \epsilon)$ y sea

$$\rho = \text{mín}\{|\epsilon - f^r(\epsilon)|, | - \epsilon - f^r(\epsilon)|\}.$$

Definimos

$$R_n = \{x : \ x, f(x), \ldots, f^{n-1}(\epsilon) \notin (-\epsilon, \epsilon)\}.$$

Para cualquier $j \leq n$ y $x \in f^j(R_n) \subset R_{n-j}$, tenemos del Lema A.2 que

$$\left|(f^{n-j})'(x)\right| \geq \gamma e^{c_0(n-j)}.$$

Por lo tanto, si K es un componente conexo de R_n

$$2 \geq \lambda(f^n(K)) \geq \gamma e^{c_0(n-j)} \lambda(f^j(K)) \tag{1}$$

y entonces

$$\lambda(f^j(K)) \leq 2\gamma^{-1} e^{-c_0(n-j)}.$$

Sea L una constante de *Lipschitz* para $\log|f'|$ en $[-1, 1] \setminus (-\epsilon, \epsilon)$. Para cada $x, y \in K$ tenemos

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|}\right) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\log|f'(f^j(x))| - \log|f'(f^j(y))|\right) \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} L|f^j(x) - f^j(y)| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} L\lambda\big(f^j(K)\big) \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} 2L\gamma^{-1} e^{-c_0(n-j)}, \quad \text{de acuerdo a (1)} \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2L\gamma^{-1} e^{-c_0 j} \\
&\equiv \log M.
\end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que existe una constante M, independiente de n, tal que para cada componente conexo K de R_n

$$\frac{\sup_{x\in K}|(f^n)'(x)|}{\inf_{x\in K}|(f^n)'(x)|}\leq M.$$

Por otra parte, se puede ver fácilmente que si u y v son los puntos extremos de K, entonces existen $i,j<n$ tales que $f^j(u)=\pm\epsilon$ y $f^j(v)=\pm\epsilon$. Por lo tanto, existe p, $n\leq p<r+n$, para el cual $f^p(K)$ coincide primero con $(-\epsilon,\epsilon)$. El objetivo ahora es demostrar que $\lambda(f^p(K\setminus R_{p+1}))\geq\rho$. De la elección de p tenemos que

$$K\setminus R_{p+1}=\{x\in[u,v]:f^p(x)\in(-\epsilon,\epsilon)\}.$$

Distinguimos los dos casos siguientes:

(i) $f^p(u),f^p(v)\notin(-\epsilon,\epsilon)$.

Dado que $f^p_{|K}$ es un difeomorfismo y $f^p(K)$ coincide con $(-\epsilon,\epsilon)$, $f^p(K)$ debe contener a $(-\epsilon,\epsilon)$ y, por lo tanto, $\lambda(f^p(K\setminus R_{p+1}))\geq 2\epsilon\geq\rho$.

(ii) $f^p(u)\in(-\epsilon,\epsilon)$ o bien, $f^p(v)\in(-\epsilon,\epsilon)$.

Supongamos $f^p(u)\in(-\epsilon,\epsilon)$. Observamos que en este caso $p=i+r$. Si $p<i+r$, y como $f^{p-i}(\epsilon)=f^{p-i}(f^i(u))=f^p(u)$, tendríamos $f^{p-i}(\epsilon)\in(-\epsilon,\epsilon)$ con $p-i<r$, en contradicción con la definición de r. Con este argumento demostramos también que $f^p(v)\notin(-\epsilon,\epsilon)$: de lo contrario tendríamos $p=j+r$, dando $i=j$ y entonces $f^i(u)=\pm\epsilon$, $f^i(v)=\pm\epsilon$, lo cual es imposible ya que $f^i_{|K}$ es un difeomorfismo y $f^i(K)$ no interseca a $(-\epsilon,\epsilon)$ para $i<n$. De $f^p(u)=f^r(\epsilon)$ y $f^p(v)\notin(-\epsilon,\epsilon)$ se sigue que $\lambda(f^p(K\setminus R_{p+1}))\geq\rho$.

Ahora de $R_{r+n}\subset R_{p+1}$ tenemos

$$\lambda(K\setminus R_{r+n})\geq\lambda(K\setminus R_{p+1})\geq\rho\left(\sup_{x\in K}|(f^p)'(x)|\right)^{-1}.$$

Como $f^p_{|K}$ es un difeomorfismo y $\lambda(f^p(K))\leq 2$ también tenemos

$$\lambda(K)\leq 2\left(\inf_{x\in K}|(f^p)'(x)|\right)^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda(K\cap R_{r+n})}{\lambda(K)} &\leq 1-\frac{\lambda(K\setminus R_{r+n})}{\lambda(K)}\\ &\leq 1-\frac{\rho\inf_{x\in K}|(f^p)'(x)|}{2\sup_{x\in K}|(f^p)'(x)|}\\ &\leq 1-\frac{\rho}{2M}.\end{aligned}$$

Definiendo $\eta^r=1-\dfrac{\rho}{2M}$ y sumando sobre todos los K obtenemos

$$\lambda(R_{r+n}) \leq \eta^r \lambda(R_n).$$

Para simplificar la notación tomamos $a_j = \lambda(R_j)$ para $j \geq 1$ y $a_0 = 1$. Escribiendo $n = qr + s$ para algún entero positivo q y $0 \leq s < r$ obtenemos

$$a_n = \frac{a_{qr+s}}{a_{(q-1)r+s}} \cdot \frac{a_{(q-1)r+s}}{a_{(q-2)r+s}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{r+s}}{a_s} \leq \eta^{qr} \cdot a_s.$$

Tomando

$$C_3 = \max_{0 \leq i \leq r-1} \left\{ \frac{a_i}{\eta^i} \right\}$$

tenemos que $a_s \leq C_3 \eta^s$ para toda $s = 0, \ldots, r-1$. Por lo tanto

$$\lambda(R_n) = a_n \leq \eta^{qr} \cdot C_3 \eta^s = C_3 \eta^n$$

y la afirmación se cumple. ■

Lema A.6

Existe una constante C_4 tal que $q(m,i) \leq C_4|m|$ para toda $|m| \geq \Delta$ y $1 \leq i \leq m^2$.

Demostración. Para cada intervalo $I_{m,i}$ definamos $p_0 = p(m)$ y sea t_1 el primer $j \geq p_0$ tal que $f^j(I_{m,i}) \cap U_\Delta \neq \emptyset$. Si $t_1 < q(m,i)$ y $f^{t_1}(I_{m,i}) \subset I^+_{m_1,i_1}$ definamos $p_1 = p(m_1)$ y sea t_2 el menor $j \geq p_1 + t_1$ tal que $f^j(I_{m,i}) \cap U_\Delta \neq \emptyset$. Procedemos de esta manera hasta que $t_s = q(m,i)$. Para $k = 0, \ldots, s-1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda\big(f^{t_{k+1}}(I_{m,i})\big) &= \lambda\big(f^{t_{k+1}-t_k}\big(f^{t_k}(I_{m,i})\big)\big) \\
&= \big|\big(f^{t_{k+1}-t_k}\big)'(x)\big| \cdot \lambda\big(f^{t_k}(I_{m,i})\big), \quad \text{para alguna } x \in f^{t_k}(I_{m,i}) \\
&= \big|\big(f^{t_{k+1}-t_k-p_k}\big)'\big(f^{p_k}(x)\big)\big| \cdot \big|\big(f^{p_k}\big)'(x)\big| \cdot \lambda\big(f^{t_k}(I_{m,i})\big).
\end{aligned}$$

Del Lema A.2, Lema A.3, y ya que $x \in f^{t_k}(I_{m,i}) \subset I^+_{m_k,i_k}$, obtenemos

$$\lambda\big(f^{t_{k+1}}(I_{m,i})\big) \geq e^{c_0(t_{k+1}-t_k-p_k)} \cdot e^{\left(1-\frac{4\beta}{c}\right)|m_k|} \cdot \lambda\big(f^{t_k}(I_{m,i})\big).$$

También tenemos del Lema A.3 que $p_k \leq \dfrac{3|m_k|}{c}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lambda\big(f^{t_{k+1}}(I_{m,i})\big) &\geq e^{c_0(t_{k+1}-t_k-p_k)} \cdot e^{\left(\frac{c-4\beta}{3}\right)|p_k|} \cdot \lambda\big(f^{t_k}(I_{m,i})\big) \\
&\geq e^{\left(\frac{c-4\beta}{3}\right)(t_{k+1}-t_k)} \cdot \lambda\big(f^{t_k}(I_{m,i})\big).
\end{aligned}$$

Repitiendo el argumento obtenemos

$$\lambda\big(f^{t_s}(I_{m,i})\big) \geq e^{\left(\frac{c-4\beta}{3}\right)(t_s-t_0)} \cdot \lambda\big(f^{t_0}(I_{m,i})\big).$$

Teniendo en cuenta que $t_s = q(m,i)$, $t_0 = 0$ y $\lambda\big(f^{t_s}(I_{m,i})\big) \leq 2$, tenemos

$$\begin{aligned} 2 &\geq e^{\left(\frac{c-4\beta}{3}\right)q(m,i)} \cdot \lambda(I_{m,i}) \\ &\geq e^{\left(\frac{c-4\beta}{3}\right)q(m,i)} \cdot \frac{1-e^{-1}}{m^2} e^{-|m|} \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} q(m,i) &\leq \frac{3}{c-4\beta} \cdot \left(|m| + \log m^2 - \log(1-e^{-1}) + \log 2\right) \\ &\leq \frac{6|m|}{c-4\beta}. \end{aligned}$$

El resultado se obtiene eligiendo $C_4 = \dfrac{6}{c-4\beta}$. ■

Apéndice B

Nociones Matemáticas Básicas

En este apéndice, recordamos algunas nociones elementales del cálculo, análisis matemático y topología general.

B.1. Nociones Básicas del Cálculo

- **Terminología sobre tipos de funciones**

  Sea I un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ (posiblemente todo $\mathbb{R}$), y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Denotamos la (primera) derivada de f en x con $f'(x)$, la segunda derivada con $f''(x)$ y las derivadas superiores con $f^{(r)}(x)$. Si f es continua, decimos que f es C^0. Si f es diferenciable en cada punto de I y tanto f como f' son continuas, entonces se dice que f es **continuamente diferenciable** o una **función** C^1. Dado $r \geq 1$, si f junto con $f^{(k)}$ son funciones continuas para $1 \leq k \leq r$, entonces se dice que f es r veces **continuamente diferenciable** o una **función** C^r.

  Una función $f : X \to Y$ entre espacios métricos X e Y se llama **homeomorfismo** siempre que sea (i) uno a uno, (ii) sobre, (iii) continua y (iv) su inversa $f^{-1} : Y \to X$ es continua. Finalmente, para I un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, una función $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ se llama un C^r **- difeomorfismo** de I a J siempre que f sea un C^r **- homeomorfismo** de I en J con una inversa $f^{-1} : J \to I$ que es además C^r.

  Se dice que una función f es **suave** si es de clase C^1. La función f es C^∞ si todas las derivadas existen y son continuas.

- **Funciones Inyectivas (uno a uno)**

  Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es *uno a uno* si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ implica $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

- **Funciones Sobreyectivas**

  Una función $f : I \subset \mathbb{R}^n \to J \subset \mathbb{R}^n$ es *sobre* si para cualquier y en J existe un $x \in I$ tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

- **Funciones Biyectivas**

  Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es *biyectiva* si es *intectiva* y *sobreyectiva.*

- **Funciones Crecientes**

  Sean I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función, f es *creciente* en I si para todo x, $y \in I$, $x < y$, se tiene que $f(x) \leq f(y)$.

- **Funciones Decrecientes**

  Sean I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función, f es *creciente* en I si para todo x, $y \in I$, $x < y$, se tiene que $f(x) \geq f(y)$.

- **Funciones Monótonas**

  Sean I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función, f es *monótona* en I si f es *creciente* en I, o f es *decreciente* en I.

- **Funciones Inversas**

  Si $f : I \subset \mathbb{R}^n \to J \subset \mathbb{R}^n$ es *uno a uno*, entonces podemos definir la inversa de f, escrita $f^{-1}(x)$, mediante la regla $f^{-1}(x) = y$ si y sólo si $f(y) = x$.

  si para cualquier y en J existe un $x \in I$ tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

- **Puntos Críticos**

  Los puntos donde una función alcanza su máximo y mínimo son importantes al estudiar gráficas. Por ello, revisamos la definición y terminología de puntos donde la derivada es cero.

  Supongamos que f es diferenciable. Un punto $a \in I$ se llama **punto crítico** de f siempre que $f'(a) = 0$. Se llama **punto crítico no degenerado** siempre que $f'(a) = 0$ y $f''(a) \neq 0$.

- **Teorema del Valor Intermedio**

  Asumamos que J es un intervalo y $f : J \to \mathbb{R}$ es una función continua. Supongamos además que a, $b \in J$ con $a < b$ y que z es un valor entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe (al menos uno) c con $a < c < b$ tal que $f(c) = z$. Esta propiedad nos dice que f alcanza todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Este es esencialmente el resultado de que $f([a, b])$ es conexo. Este resultado también se llama **Teorema de Darboux**.

- **Otra consecuencia de la continuidad**

  Supongamos que $f : J \to \mathbb{R}$ es una función continua y $c_1 < f(a) < c_2$ para $a \in J$. Entonces, existe un conjunto abierto U que contiene a a tal que $c_1 < f(x) < c_2$ para todo $x \in U$.

- **Teorema del Valor Medio**

  Asumamos que J es un intervalo y $f : J \to \mathbb{R}$ es una función continua. Supongamos además que a, $b \in J$ con $a < b$ y que f es diferenciable en (a, b). Entonces, existe un punto c con $a < c < b$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad = \quad f'(c).$$

  Esto nos dice que existe un punto c para el cual la pendiente de la recta tangente en c es igual a la pendiente de la recta secante de $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Este resultado también se llama **Teorema de Lagrange**.

- **Composición de Funciones**

  Denotamos la composición de dos funciones por $f \circ g(x) = f(g(x))$. La composición n veces de f consigo misma por

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ veces}}(x).$$

Observe que f^n no significa $f(x)$ elevado a la enésima potencia, ni significa la enésima derivada de $f(x)$, que denotamos por $f^{(n)}(x)$. Si $f^{-1}(x)$ existe, escribimos $f^{-n}(x) = f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}(x)$.

- **La Regla de la Cadena**

  La regla de la cadena se refiere a la derivada de una composición de funciones. Si f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son dos funciones, entonces escribimos $f \circ g(x)$ para $f(g(x))$, es decir, para la composición de f con g. Si tanto f como g son diferenciables, entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= f'(y)g'(x)\end{aligned}$$

  donde $y = g(x)$.

  En particular, si $h(x) = f^n(x)$, entonces

$$h'(x) = f'(f^{n-1}(x)) \cdot f'(f^{n-2}(x)) \cdot \ldots \cdot f'(x).$$

B.2. Nociones Básicas del Ánalisis Matemático y Topología

- **Producto Interno y Norma**

  Sean $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$. Definimos el **producto interno** o **producto escalar** como el número real

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

  Y la **norma** o **longitud** de $\mathbf{x}$ como el número real

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = (x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

  La norma $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ se llama *distancia* entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

- **Entornos Abiertos**

  Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y sea $r > 0$. Entonces el conjunto $B(x, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r\}$ se llama la **bola abierta** con **centro** en $\mathbf{x}$ y **radio** r.

- **Conjuntos Abiertos**

  Un conjunto $G \subset \mathbb{R}^n$ se dice **abierto** si, para cada punto $\mathbf{x}$ en G, existe un número real positivo r tal que para cada punto $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$ que satisface $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r$ también pertenece al conjunto G.

  El conjunto vacío $\emptyset$ y el espacio entero $\mathbb{R}^n$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$. La intersección de cualesquiera dos conjuntos abiertos es abierto en $\mathbb{R}^n$. La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es abierto en $\mathbb{R}^n$.

- **Conjuntos Cerrados**

  Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es **cerrado** si su complemento $\mathcal{C}(F) = \mathbb{R}^n - F$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

  El conjunto vacío $\emptyset$ y el espacio entero $\mathbb{R}^n$ son cerrados en $\mathbb{R}^n$. La unión de cualesquiera dos conjuntos cerrados es cerrado en $\mathbb{R}^n$. La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

- **Vecindades**

  Si **x** es un punto en $\mathbb{R}^n$, entonces cualquier conjunto que contiene a un conjunto abierto que contiene a **x** se llama una **vecindad** de **x** en $\mathbb{R}^n$.

- **Conjuntos Compactos**

  Un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ se llama **compacto** si, y sólo si, cada recubrimiento abierto de S contiene un subrecubrimiento finito; esto es, una subcolección finita que también recubra a S.

- **Puntos de Adherencia**

  Decimos que $x \in \mathbb{R}$ es un **punto de adherencia** de $A \subset \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$ se tiene que

  $$B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

- **Puntos de Acumulación (Puntos Límite)**

  Decimos que $x \in \mathbb{R}$ es un **punto de acumulación** de $A \subset \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$ se tiene que

  $$(B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

- **Clausura de un conjunto**

  Al conjunto de todos los puntos de adherencia de A le llamamos la **cerradura**, **clausura**, de A, y lo denotamos con $cl(A)$ o por $\bar{A}$.

  Si A es cerrado, entonces $\bar{A} = A$.

- **Conjuntos Densos**

  Un subconjunto U de S es **denso** en S si $\bar{U} = S$.

  En un sentido topológico, un subconjunto abierto y denso se considera "grande".

- **Conjuntos Conexos**

  Se dice que un conjunto C es **conexo** si no puede separarse mediante la unión de dos (o más) conjuntos abiertos disjuntos.

  Básicamente, un conjunto conexo consta de "una sola pieza".

- **Conjuntos Perfectos**

  Cuando todos los elementos de un conjunto cerrado son puntos de acumulación de éste, se dice que dicho conjunto es **perfecto**.

- **Conjuntos Totalmente Disconexos**

  Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es **totalmente disconexo** si y sólo si no existe un intervalo con más de un punto contenido en A.

- **Espacios Métricos**

  Un **espacio métrico** es un conjunto M, no vacío, de objetos (que llamaremos puntos) dotada de una función d de $M \times M$ en $\mathbb{R}$ (que llamaremos la métrica del espacio) que satisface las cuatro propiedades siguientes, cualesquiera que sean 1os puntos x, y, z de M:

1. $d(x, y) \geq O$.
2. $d(x, x) = O$ si, y sólo si, $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. d satisface la **desigualdad triangular**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un espacio métrico se designa, a menudo, por medio de (M, d) a fin de recalcar que en la definición de espacio métrico tanto el conjunto M como la métrica d juegan su papel.

Bibliografía

[1] Alves, José Ferreira. Absolutely continuous invariant measures for the quadratic family. IMPA, 1993.

[2] Apostol, Tom M. Análisis matemático. Reverté, 2020.

[3] Benedicks, Michael, and Lennart Carleson. "On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$." Annals of Mathematics 122.1 (1985): 1-25.

[4] Benedicks, Michael, and Lennart Carleson. "The dynamics of the Hénon map." Annals of Mathematics 133.1 (1991): 73-169.

[5] M. Benedicks, L.-S. Young - Absolutely continuous invariant measures and random perturbations for certain one-dimensional maps, Erg. Theor. and Dyn. Syst., 12 (1992), 13-37.

[6] A. M. Blokh, M. Yu. Lyubich, "Attractors of transformations of an interval", Funct. Anal. Appl., 21 (1987), 148-150.

[7] Cannarsa, Piermarco, and Teresa D'Aprile. Introduction to measure theory and functional analysis. Vol. 89. Springer, 2015.

[8] Devaney, Robert. An introduction to chaotic dynamical systems. CRC press, 2018.

[9] Elaydi, Saber N. Discrete chaos: with applications in science and engineering. Chapman and Hall/CRC, 2007.

[10] Hirsch, Morris W., Stephen Smale, and Robert L. Devaney. Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Academic press, 2012.

[11] Jakobson, Michael V. "Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps." Communications in Mathematical Physics 81 (1981): 39-88.

[12] King, Jefferson, and Héctor Méndez. "Sistemas dinámicos discretos." Publicaciones de la Facultad de Ciencias, UNAM (2014).

[13] Li, Tien-Yien, and James A. Yorke. "Period three implies chaos." The theory of chaotic attractors (2004): 77-84.

[14] Lorenz, Edward N. "Deterministic nonperiodic flow." Journal of atmospheric sciences 20.2 (1963): 130-141.

[15] Luzzatto, Stefano. "Introduction to smooth ergodic theory." Lecture note, ICTP-SISSA-Moscow (2013).

[16] May, Robert M. "Simple mathematical models with very complicated dynamics." Nature 261.5560 (1976): 459-467.

[17] Pajevic, Sinisa. "Nonlinear dynamics and chaos: Steven H. Strogatz, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994." (1995): 1635-1636.

[18] Poincaré, Henri. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Vol. 3. Gauthier-Villars et fils, 1899.

[19] Robinson, Clark. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. CRC press, 1998.

[20] Sternberg, Shlomo. Dynamical systems. Courier Corporation, 2010.

[21] Walters, Peter. An introduction to ergodic theory. Vol. 79. Springer Science & Business Media, 2000.