



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

POLINOMIOS ORTONORMALES SOBRE TESELADOS
HEXAGONALES

Tesis presentada al
Colegio de física

como requisito parcial para la obtención del grado de
LICENCIADO EN FÍSICA

por

Carlos Eduardo López Cesáreo

Asesorado por
Dr. Alberto Cordero Dávila
Dr. Jorge González García

Puebla,
27 de agosto de 2025



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

POLINOMIOS ORTONORMALES SOBRE TESELADOS
HEXAGONALES

Tesis presentada al
Colegio de física

como requisito parcial para la obtención del grado de
LICENCIADO EN FÍSICA

por

Carlos Eduardo López Cesáreo

Asesorado por
Dr. Alberto Cordero Dávila
Dr. Jorge González García

Puebla,
27 de agosto de 2025

Título: Polinomios ortonormales sobre teselados hexagonales

Estudiante: Carlos Eduardo López Cesáreo

COMITÉ

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez
Presidente

Dr. Miguel Ángel Olvera Santamaría
Secretario

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez
Vocal

Dra. Rosibel Carrada Legaria
Vocal

Dr. Jorge González García
Coasesor

Dr. Alberto Cordero Dávila
Asesor

Agradecimientos

A mis padres y mi hermana, por su apoyo durante toda mi carrera.

A mis profesores, especialmente a mi asesor de tesis, quien no solo me guió académicamente, sino que también me brindó su respaldo económico a través de una beca de ayudante de investigador SNI, lo cual fue fundamental para el desarrollo de este trabajo.

A mis compañeros, por su colaboración y amistad.

Al Dr. Jorge González, por su contribución al obtener los diagramas de manchas.

Índice general

Resumen	VII
Introducción	VIII
1. Preliminares	1
1.1. Sistemas ópticos	1
1.2. Funciones ortonormales	2
1.3. Polinomios de Zernike	3
1.4. Polinomios de Chebyshev	6
1.5. Método de Ortogonalización de Gram Schmidt	8
2. Polinomios ortonormales	11
2.1. Polinomios ortonormales sobre una pupila hexagonal	11
2.2. Automatización de la ortonormalización	13
2.2.1. Polinomios de Zernike	13
2.2.2. Integral sobre M	14
2.2.3. Ortonormalización	15
2.3. Polinomios ortonormales sobre otras pupilas	15
2.3.1. Teselado hexagonal con un anillo	17
2.3.2. Teselado anular hexagonal compuesto por dos anillos	19
2.3.3. Teselado anular hexagonal compuesto por tres anillos	21
3. Los bordes de un diagrama de manchas	24
3.1. La cáustica	24
3.2. La frontera de un diagrama de manchas está compuesta por los rayos marginales y la cáustica	26
3.3. El borde del diagrama de manchas está compuesto por los rayos marginales y la cáustica	28
3.3.1. Teselado hexagonal con un anillo	28
3.3.2. Teselado hexagonal anular compuesto de dos anillos	31
3.3.3. Teselado hexagonal anular compuesto de tres anillos	34
4. Conclusiones	38
A. Programa	39
B. Conceptos de \mathbb{R}^n	44

Resumen

En este trabajo se demuestra que para una pupila segmentada en hexágonos los bordes de cualquier diagrama de manchas en un plano de observación cuya normal esté en dirección del rayo principal son los rayos marginales y/o la intersección de la superficie cáustica con el plano mencionado. Para lograr lo anterior fueron generados polinomios ortonormales a partir de los polinomios de Zernike en las pupilas segmentadas con el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt.

Introducción

Necesitamos funciones de aberración para probar que el diagrama de manchas está compuesto por la cáustica o los rayos marginales, podemos usar los polinomios de Zernike pues estos forman un conjunto ortonormal completo para las funciones de aberración, estos son de utilidad en pruebas ópticas para estudiar sistemas con pupilas circulares, por ejemplo son útiles en oftalmología. Para probar superficies cuya forma está compuesta por hexagonos se pueden utilizar los polinomios de Zernike pues son una base sin embargo no podemos aprovechar las propiedades de la ortonormalidad en un dominio distinto del disco unitario. El método para obtener polinomios en una nueva pupila será siguiendo el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt y éste será aplicado a formas de espejos principales de telescopios astronómicos. En el presente trabajo mostramos un algoritmo para generar tales polinomios ortonormales y que puede ser aplicado a distintos lenguajes de programación, compartimos el código hecho en Python en el Anexo A.

Nuestra investigación de partida sobre la generación de polinomios ortonormales la encontramos cuando se ortonormalizan los polinomios de Zernike sobre un hexagono unitario [1]. Existe otro método para hallar polinomios ortonormales utilizando la simetría rotacional [2], sin embargo, la ventaja de este trabajo es que el proceso se reduce a deducir las ecuaciones que describen la forma de la pupila sobre la cual se desean polinomios ortonormales.

En el primer capítulo se presenta información de consulta rápida sobre las definiciones y también se muestra teoría usada en la creación del programa. En el segundo capítulo presentamos el funcionamiento del programa y su aplicación a cuatro dominios para obtener nuevos polinomios ortonormales que nos sirven para describir funciones de aberración. En el tercer capítulo se encuentra la comprobación de la teoría de la composición del diagrama de manchas para distintos teselados hexagonales utilizando como función de aberración los polinomios generados y se presenta una nueva demostración sobre la composición de los bordes del diagrama de manchas. Finalmente en el cuarto capítulo se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presenta qué es la aberración en un frente de onda y la función de aberración W , la construcción de los polinomios de Zernike y ortonormalidad de funciones, los polinomios de Chebyshev utilizados para transformar los polinomios de Zernike a coordenadas cartesianas y el proceso de ortonormalización de funciones de aberración.

1.1. Sistemas ópticos

Un sistema óptico está compuesto por un conjunto de lentes o espejos que ayudan a ver un objeto, esperaríamos que la imagen observada en la pupila de salida sea igual al objeto sin embargo lo más probable es que exista una deformación. Por ejemplo, ver Fig. 1.1, si tenemos una fuente de luz puntual P como nuestro objeto, de ésta saldrá un frente de onda esférico que entra a la pupila de entrada, y si tuvieramos un sistema óptico ideal de la pupila de salida saldría otro frente de onda esférico de radio R y todos los rayos provenientes de dicha pupila convergerían en el punto P' . En la realidad los sistemas ópticos ideales no existen y lo más probable es que de la pupila de salida salga un frente de onda no esférico, le llamamos un frente de onda aberrado y la manera en que lo describimos es respecto al frente de onda ideal, es decir, la diferencia entre el frente de onda real y el frente de onda ideal será la función de aberración W .

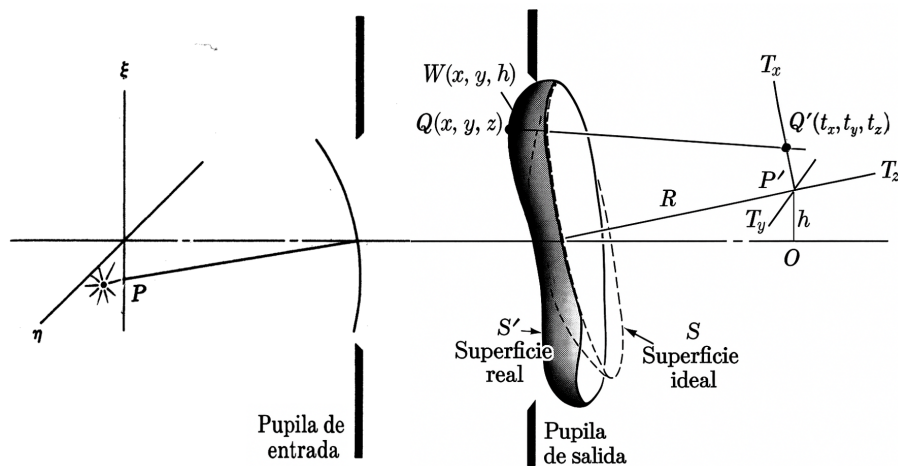


Fig. 1.1 Representación de un frente de onda aberrado. Fuente: Adaptado de [3] (p. 47).

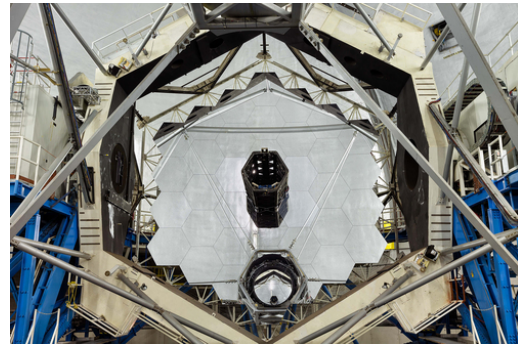
El rayo principal de nuestro sistema es el que sale del centro de nuestra pupila de salida y pasa por el punto P' , y sobre este eje se encuentra T_z donde su origen se encuentra en el punto P' , los ejes T_x y T_y perpendiculares a T_z formarán el plano de observación, entonces los rayos provenientes de la pupila de salida, que son perpendiculares a la superficie del frente de onda real serán intersectados con algún plano de observación y ésta será la imagen formada a un t_z fijo, a

esta imagen le llamamos diagrama de manchas.

Cada sistema tendrá su forma particular, existen telescopios compuestos por hexágonos, por ejemplo ver Fig 1.2, además de telescopios en construcción tales como el Thirty Meter Telescope (TMT) y el Extremely Large Telescope (ELT) de 30 y 39 metros de diametro de su espejo principal respectivamente compuestos por hexágonos y por lo tanto existen artículos donde se generan polinomios a través de ortogonalización de Gram Schmidt a partir de polinomios circulares [1] [4] pues estos son útiles para describir su función de aberración. La ventaja de usar polinomios ortonormales sobre cada superficie es que al momento de describir la aberración en función de dichos polinomios la varianza estará dada por cada uno de los coeficientes al cuadrado que describen dicha función de aberración, salvo la primera aberración que siempre será "1" y su coeficiente nos dará el valor medio de la aberración W [5] (p. 518).



(a) Espejo principal del telescopio James Webb.



(b) Uno de los espejos principales del observatorio W.M. Keck.

Fig. 1.2 (a) Espejo principal del telescopio James Webb. Fuente: NASA/Chris Gunn (Dominio Público). (b) Uno de los espejos principales del observatorio W.M. Keck. Fuente: Ethan Tweedie (CC-BY-SA 4.0).

1.2. Funciones ortonormales

El producto punto de dos vectores es un número real que cuando es cero decimos que dichos vectores son ortogonales entre sí. Un conjunto de vectores unitarios que son perpendiculares uno a uno es un conjunto de **vectores ortonormales** en \mathbb{R}^n .

Las funciones, a diferencia de los vectores en \mathbb{R}^n , se pueden pensar como listas no numerables. Podemos imaginar una función definida en un conjunto finito, consideremos un caso de la función identidad $id : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$, aquí podemos imaginar una lista para describir el dominio: 0, 1 y una lista para describir la imagen de la función, que sería: 0, 1.

La función $f : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow A$, donde A es un conjunto no vacío de los reales tiene una estructura similar a la de un vector pues su dominio tiene forma 0, 1, ..., n y su imagen $f(0), f(1), \dots, f(n)$, supongamos otra función $g : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow A$, su imagen tendrá forma $g(0), g(1), \dots, g(n)$ y a partir de aquí podríamos hacer la analogía con el producto punto de un vector:

$$f \cdot g = f(0)g(0) + f(1)g(1) + \dots + f(n)g(n) = \sum_{i=0}^n f(i)g(i) \quad (1.1)$$

De aquí podemos definir que dos funciones serán perpendiculares si su producto punto calculado como antes es cero, sin embargo, una función puede tener una imagen que tenga una cantidad de elementos continuo y no será posible definir un producto punto como se muestra en la ecuación 1.1.

Definición 1.2.1: Funciones ortogonales

Dos funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ serán ortogonales sobre un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ si $f \neq g$ implica que:

$$\int_A fg = 0$$

En forma general, dos funciones f, g son ortogonales si existe una función $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\int_A fgw = 0$ donde a w se le llama función peso, sin embargo para nuestro interés $w = 1$.

Los polinomios son funciones, así, si tenemos un conjunto de polinomios podemos pensar en su ortogonalidad: un conjunto de polinomios serán ortonormales si entre cada par de polinomios del conjunto se cumple la definición de ortonormalidad de una función. La ortonormalidad de las funciones la podemos ver como la generalización del concepto de ortonormalidad de dos vectores en \mathbb{R}^n .

En física hay polinomios ortonormales importantes, en la siguiente sección presentaremos polinomios utilizados en óptica.

1.3. Polinomios de Zernike

La definición 1.2.1 de funciones ortonormales se puede extender a funciones definidas sobre algún subconjunto de \mathbb{R}^n .

Definición 1.3.1: Funciones ortonormales en \mathbb{R}^n

Dos funciones $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ serán ortonormales sobre un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ si:

$$\frac{1}{\int_M} \int_M fg = \delta_{f,g}$$

Donde $\delta_{f,g}$ es una delta de Kronecker para las funciones f y g .

Los polinomios de Zernike son polinomios que tienen la propiedad de ser ortonormales sobre un disco unitario, entonces nos interesa la definición 1.3.1 cuando $n = 2$ y cuando $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Los polinomios de Zernike con simetría angular tienen dos índices $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, estos índices deben cumplir que $n - m$ es par y mayor igual que cero, y estarán definidos sobre el disco unitario perteneciente a \mathbb{R}^2 , ver Fig. 1.3:

$$Z_n^m : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Z_n^m(\rho, \theta) = \sqrt{2 \frac{n+1}{1+\delta_{m0}}} R_n^m(\rho) \cos m\theta \quad (1.2)$$

donde $R_n^m(\rho)$ se llama polinomio radial circular y se define como:

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! (\frac{n+m}{2} - s)! (\frac{n-m}{2} - s)!} \rho^{n-2s} \quad (1.3)$$

En la definición de los polinomios de Zernike anterior los polinomios son útiles para estudiar funciones de aberración que tienen un eje de simetría rotacional, a nosotros nos interesa prescindir de dicho eje, entonces ahora definimos unos nuevos polinomios que contendrán un factor $\sin m\theta$:

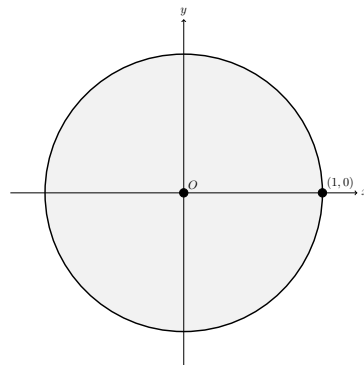


Fig. 1.3 Círculo unitario.

Definición 1.3.2: Polinomios de Zernike

$$Z_j(\rho, \theta) = \begin{cases} \sqrt{n+1} R_n^0(\rho) & \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) \cos m\theta & \text{si } m \neq 0 \text{ y } j \text{ par} \\ \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) \sen m\theta & \text{si } m \neq 0 \text{ y } j \text{ impar} \end{cases} \quad (1.4)$$

Estos polinomios de Zernike se representan con un sólo índice y no necesitan de la simetría angular, estos son convenientes para un proceso recursivo debido al orden natural que tienen, entonces si queremos el j -ésimo polinomio de Zernike seguimos las siguientes formulas para obtener n y m :

$$n = \lfloor \sqrt{2j-1} + 0,5 \rfloor - 1 \quad (1.5)$$

$$m = \begin{cases} 2\lfloor (2j+1 - n[n+1])/4 \rfloor & \text{si } n \text{ es par} \\ 2\lfloor (2(j+1) - n[n+1])/4 \rfloor - 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (1.6)$$

Recordando que $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función parte entera.

En la tabla 1.1 aparecen los primeros 25 polinomios de Zernike con un sólo índice. Notemos que el polinomio radial circular es un polinomio de grado n que contiene $\rho^n, \rho^{n-2}, \dots, \rho^m$, esto debido a la condición que deben cumplir los índices m y n . Enseguida probaremos algunas propiedades sencillas enunciadas en [5] (p. 505):

Proposición 1.3.1. $R_n^n(\rho) = \rho^n$

Demostración.

$$R_n^n(\rho) = \sum_{s=0}^0 \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \binom{n+m}{2-s}! \binom{n-m}{2-s}!} \rho^{n-2s} = \frac{n!}{n!} \rho^n = \rho^n.$$

□

Proposición 1.3.2. $R_n^n(1) = 1$

Demostración. Aplicando la proposición 1.3.1 para $\rho = 1$ inmediatamente se ve que $R_n^n(1) = 1$. □

Proposición 1.3.3. $R_n^m(0) = \delta_{m0}$

Demostración. Supongamos $m \neq 0$, entonces

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \binom{n+m}{2-s}! \binom{n-m}{2-s}!} \underbrace{0^{n-2s}}_0 = 0$$

Supongamos $m = 0$

$$\begin{aligned} R_n^0(\rho) &= \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \binom{n}{2-s}! \binom{n}{2-s}!} 0^{n-2s} \\ &= \sum_{s=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \binom{n}{2-s}! \binom{n}{2-s}!} \underbrace{0^{n-2s}}_0 + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} (n-\frac{n}{2})!}{\frac{n}{2}! \binom{n}{2-\frac{n}{2}}! \binom{n}{2-\frac{n}{2}}!} \underbrace{0^{n-2\frac{n}{2}}}_1 \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}} = 1 \end{aligned}$$

Así, concluimos que $R_n^m(0) = \delta_{m0}$.

□

La proposición 1.3.4 exhibe la ortogonalidad de los polinomios de Zernike para un caso particular cuando están presentes dos cosenos, la demostración para los demás casos es analoga. La integral de los polinomios radiales y de los cosenos presentes en la demostración de dicha proposición ya son conocidas [5] (p. 506, 518).

Proposición 1.3.4.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_n^m(\rho, \theta) Z_{n'}^{m'}(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \delta_{mm'} \delta_{nn'}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_n^m(\rho, \theta) Z_{n'}^{m'}(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \frac{n+1}{1+\delta_{m0}}} R_n^m(\rho) \cos m\theta \sqrt{2 \frac{n'+1}{1+\delta_{m'0}}} R_{n'}^{m'}(\rho) \cos m'\theta \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{n+1}{1+\delta_{m0}}} \sqrt{\frac{n'+1}{1+\delta_{m'0}}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} R_n^m(\rho) \cos m\theta R_{n'}^{m'}(\rho) \cos m'\theta \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{n+1}{1+\delta_{m0}}} \sqrt{\frac{n'+1}{1+\delta_{m'0}}} \underbrace{\int_0^1 R_n^m(\rho) R_{n'}^{m'}(\rho) \rho d\rho}_{\frac{1}{2(n+1)} \delta_{nn'}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos m'\theta d\theta}_{\pi(1+\delta_{m0}) \delta_{mm'}} \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{1+\delta_{m0}}} \sqrt{\frac{n'+1}{1+\delta_{m'0}}} \frac{1}{(n+1)} \delta_{nn'} (1+\delta_{m0}) \delta_{mm'} = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \end{aligned}$$

□

j	Z_j
1	1
2	$2x$
3	$2y$
4	$\sqrt{3}(2x^2 + 2y^2 - 1)$
5	$2\sqrt{6}xy$
6	$\sqrt{6}(x^2 - y^2)$
7	$2\sqrt{2}y(3x^2 + 3y^2 - 2)$
8	$2\sqrt{2}x(3x^2 + 3y^2 - 2)$
9	$2\sqrt{2}y(3x^2 - y^2)$
10	$2\sqrt{2}x(x^2 - 3y^2)$
11	$\sqrt{5}(-6x^2 - 6y^2 + 6(x^2 + y^2)^2 + 1)$
12	$\sqrt{10}(4x^4 - 3x^2 - 4y^4 + 3y^2)$
13	$2\sqrt{10}xy(4x^2 + 4y^2 - 3)$
14	$\sqrt{10}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$
15	$4\sqrt{10}xy(x^2 - y^2)$
16	$2\sqrt{3}x(-12x^2 - 12y^2 + 10(x^2 + y^2)^2 + 3)$
17	$2\sqrt{3}y(-12x^2 - 12y^2 + 10(x^2 + y^2)^2 + 3)$
18	$2\sqrt{3}x(5x^4 - 10x^2y^2 - 4x^2 - 15y^4 + 12y^2)$
19	$2\sqrt{3}y(15x^4 + 10x^2y^2 - 12x^2 - 5y^4 + 4y^2)$
20	$2\sqrt{3}x(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4)$
21	$2\sqrt{3}y(5x^4 - 10x^2y^2 + y^4)$
22	$\sqrt{7}(12x^2 + 12y^2 + 20(x^2 + y^2)^3 - 30(x^2 + y^2)^2 - 1)$
23	$2\sqrt{14}xy(-20x^2 - 20y^2 + 15(x^2 + y^2)^2 + 6)$
24	$\sqrt{14}(15x^6 + 15x^4y^2 - 20x^4 - 15x^2y^4 + 6x^2 - 15y^6 + 20y^4 - 6y^2)$
25	$4\sqrt{14}xy(6x^4 - 5x^2 - 6y^4 + 5y^2)$

Tabla 1.1: Polinomios de Zernike con un índice

En la proposición 1.3.4 aparece el factor de $\frac{1}{\pi}$ para que los únicos valores que obtengamos sean 0 y 1, el valor de $\frac{1}{\pi}$ viene de normalizar las funciones.

Podemos usar los polinomios de Zernike para describir una función de aberración, esto debido a que estos polinomios forman una base para funciones sobre el disco unitario, así mismo podemos usar los monomios o los polinomios de Seidel, sin embargo, los polinomios de Zernike nos convienen por su ortonormalidad, usando coordenadas polares $W(\rho, \theta)$ representará la función de aberración y será expandida como:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j Z_j(\rho, \theta) \quad (1.7)$$

De aquí podemos obtener, aprovechando la ortogonalidad de los polinomios, los coeficientes a_j . Multiplicamos la función de aberración por otro polinomio de Zernike $Z_{j'}$ y después integramos sobre el disco unitario:

$$\begin{aligned} W Z_{j'} &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j Z_j Z_{j'} \\ \int \int W Z_{j'} &= \int \int \sum_{j=0}^{\infty} a_j Z_j Z_{j'} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int \int Z_j Z_{j'} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \delta_{j j'} \pi \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{j'} \delta_{j j'} \pi = a_{j'} \pi \end{aligned}$$

Reentiquetando los subíndices y dividiendo sobre π en el lado derecho obtenemos:

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 W(\rho, \theta) Z_j(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad (1.8)$$

En la definición de los polinomios de Zernike aparece una parte angular siempre que $m \neq 0$, nos interesa poder descomponer esta parte angular para que sea expresada en términos de cosenos y senos únicamente con argumento θ y esto lo hacemos con los polinomios de Chebyshev.

1.4. Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev son un conjunto de vectores ortogonales para el espacio de polinomios, se definen de una manera sencilla y pueden construir de forma recursiva [6] (p. 899 - 904) a continuación los presentamos.

Definición 1.4.1: Polinomios de Chebyshev

Los **polinomios de Chebyshev de primer tipo**, denotados por T_n se definen con la siguiente formula de recurrencia:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Los **polinomios de Chebyshev de segundo tipo**, denotados por U_n se definen con la siguiente formula de recurrencia:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \end{aligned}$$

en ambos casos $x = \cos \theta$

Su ortogonalidad queda definida si integramos sobre el intervalo $[-1, 1]$, cada uno respecto a su propio peso, ver Proposición 1.4.1, sin embargo dicha propiedad no nos será de utilidad, en este trabajo los polinomios de Chevyshev son de relevancia pues con ayuda de ellos podemos expandir expresiones de la forma $\cos n\theta$ y $\sin n\theta$ en términos de $\cos \theta$ y $\sin \theta$.

j	T_j
1	1
2	x
3	$2x^2 - 1$
4	$x(4x^2 - 3)$
5	$8x^4 - 8x^2 + 1$
6	$x(16x^4 - 20x^2 + 5)$
7	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
8	$x(64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7)$
9	$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$
10	$x(256x^8 - 576x^6 + 432x^4 - 120x^2 + 9)$
11	$512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$
12	$x(1024x^{10} - 2816x^8 + 2816x^6 - 1232x^4 + 220x^2 - 11)$
13	$2048x^{12} - 6144x^{10} + 6912x^8 - 3584x^6 + 840x^4 - 72x^2 + 1$
14	$x(4096x^{12} - 13312x^{10} + 16640x^8 - 9984x^6 + 2912x^4 - 364x^2 + 13)$
15	$8192x^{14} - 28672x^{12} + 39424x^{10} - 26880x^8 + 9408x^6 - 1568x^4 + 98x^2 - 1$

Tabla 1.2: Polinomios de Chebyshev de primer tipo T_j .

j	U_j
1	1
2	$2x$
3	$4x^2 - 1$
4	$8x^3 - 4x$
5	$16x^4 - 12x^2 + 1$
6	$32x^5 - 32x^3 + 6x$
7	$64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
8	$128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$
9	$256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$
10	$512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x$
11	$1024x^{10} - 2304x^8 + 1792x^6 - 560x^4 + 60x^2 - 1$
12	$2048x^{11} - 5120x^9 + 4608x^7 - 1792x^5 + 280x^3 - 12x$
13	$4096x^{12} - 11264x^{10} + 11520x^8 - 5376x^6 + 1120x^4 - 84x^2 + 1$
14	$8192x^{13} - 24576x^{11} + 28160x^9 - 15360x^7 + 4032x^5 - 448x^3 + 14x$
15	$16384x^{14} - 53248x^{12} + 67584x^{10} - 42240x^8 + 13440x^6 - 2016x^4 + 112x^2 - 1$

Tabla 1.3: Polinomios de Chebyshev de segundo tipo U_j .

Proposición 1.4.1. *Los polinomios de Chebyshev de primer y segundo tipo son ortogonales respecto a su propio peso:*

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & n = m \end{cases}$$

En las Tablas 1.2 y 1.3 podemos ver los primeros 15 polinomios de Chebyshev de primer y segundo tipo respectivamente.

Los polinomios de Chebyshev de primer tipo satisfacen:

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \tag{1.9}$$

Mientras que los polinomios de Chebyshev de segundo tipo satisfacen

$$U_{n-1}(\cos \theta) \sin \theta = \sin(n\theta) \tag{1.10}$$

Estas dos últimas expresiones nos servirán en el proceso del siguiente capítulo debido a que no se pueden transformar las expresiones $\cos(n\theta)$ y $\sin(n\theta)$ a coordenadas cartesianas de manera sencilla, a diferencia de transformar los senos y cosenos cuando $n = 1$ pues podemos sustituir directamente por su definición $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

En la siguiente sección se presenta una motivación para el proceso Gram Schmidt y posteriormente se muestra el método de ortonormalización de los polinomios de Zernike.

1.5. Método de Ortogonalización de Gram Schmidt

A partir de un conjunto de vectores que generan un espacio se puede crear una base ortogonal para dicho espacio, el método de ortogonalización de Gram Schmidt nos dice cómo crearlo de manera sistemática. Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$, como se muestra en la Figura 1.4, podemos generar un conjunto de vectores normales entre sí, de dicha figura

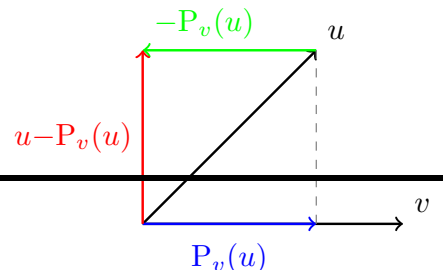


Fig. 1.4 Generación de vector normal

vemos que a partir de proyectar u sobre v y luego restarle al vector u a dicha proyección obtenemos $u - P_v(u)$ que es ortogonal con v , donde $P_v(u)$ se define como:

$$P_v(u) = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v$$

El proceso de ortogonalización de Gram Schmidt se basa en esa idea de la generación de vectores ortogonales, a nosotros nos interesa la idea de generar vectores unitarios y esto lo haremos multiplicando por el inverso multiplicativo de la norma del vector. A continuación describimos en método:

Sea v_1, \dots, v_n una base para \mathbb{R}^n , generaremos una base ortonormal a partir de esta, primero:

$$u_1^* = v_1 \implies u_1 = \frac{u_1^*}{\|u_1^*\|}$$

Almacenamos u_1 , seguimos el proceso con los siguientes vectores u_2 y u_3

$$u_2^* = v_2 - P_{v_1}(v_2) \implies u_2 = \frac{u_2^*}{\|u_2^*\|}$$

$$u_3^* = v_3 - P_{v_1}(v_3) - P_{v_2}(v_3) \implies u_3 = \frac{u_3^*}{\|u_3^*\|}$$

y para el n -ésimo vector u_n tendríamos que:

$$u_n^* = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} P_{v_i}(v_n) \implies u_n = \frac{u_n^*}{\|u_n^*\|}$$

Como se mencionó, los vectores u_1, \dots, u_n son ortonormales entre sí pues por el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt nos asegura formar un conjunto de vectores ortogonales y la normalización viene un paso después, estos vectores formarán una base ortonormal para \mathbb{R}^n . Para nuestro propósito nos interesa generar una base para el espacio de funciones $\{f \mid f : M \rightarrow \mathbb{R}\}$, particularmente $M \subset \mathbb{R}^2$.

Recordando que cuando hablamos de funciones, la métrica que se usará es la integral:

Definición 1.5.1: Norma de una función

Sea $f : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\|f\|$ será la norma de f y se define como:

$$\|f\| = \left(\frac{\int_M |f|^2 dx dy}{\int_M dx dy} \right)^{\frac{1}{2}}$$

La constante $\int_M dx dy$ conviene pues al obtener la norma de la función 1, el resultado será $1 \in \mathbb{R}$. Entonces para **funciones** pertenecientes a $\{f \mid f : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ utilizaremos el método de ortogonalización de **Gram Schmidt** para obtener polinomios ortonormales sobre M a partir de los polinomios de Zernike, y el proceso será el siguiente:

Teorema 1.5.2: Método de ortonormalización de Gram Schmidt aplicado a polinomios de Zernike

Si Z_1, \dots, Z_j son los primeros j -ésimos polinomios de Zernike con un índice, sea $n \in \{2, \dots, j\}$, definimos:

$$\begin{aligned} G_1 &= Z_1 \\ G_n &= Z_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n,k} H_k \\ H_n &= \frac{G_n}{\|G_n\|} \end{aligned}$$

Donde los coeficientes $c_{n,k}$ se calculan como

$$c_{n,k} = -\frac{1}{\int_M dx dy} \int_M Z_n H_k dx dy$$

Entonces el conjunto de los polinomios $\{H_1, \dots, H_j\}$ serán ortonormales sobre $M \subset \mathbb{R}^2$.

Demostración. Queremos probar que cada elemento de $\{H_1, \dots, H_j\}$ es ortonormal, lo que será demostrado por inducción.

Caso $j = 1$,

$$\int_M H_1 H_1 = \int_M 1 = 1$$

Así el caso base se cumple. Supongamos que las funciones $\{H_1, \dots, H_{j-1}\}$ son ortonormales, probemos que H_j cumple ser ortonormal.

Sea $i \in \{1, \dots, j-1\}$

$$\begin{aligned} \int_M H_j H_i &= \int_M \frac{(Z_j + \sum_{k=1}^{j-1} c_{j,k} H_k)}{\|(Z_j + \sum_{k=1}^{j-1} c_{j,k} H_k)\|} H_i \\ &= \frac{1}{\|(Z_j + \sum_{k=1}^{j-1} c_{j,k} H_k)\|} \left(\int_M (Z_j + \sum_{k=1}^{j-1} c_{j,k} H_k) H_i \right) \\ &= \frac{1}{\|(Z_j + \sum_{k=1}^{j-1} c_{j,k} H_k)\|} \left(\int_M Z_j H_i + \sum_{k=1}^{j-1} c_{j,k} \underbrace{\int_M H_k H_i}_{\delta_{k,i} \int_M} \right) \\ &= \frac{1}{\|(Z_j + \sum_{k=1}^{j-1} c_{j,k} H_k) H_i\|} \left(\int_M Z_j H_i + c_{j,i} \int_M \right) \\ &= \frac{1}{\|(Z_j + \sum_{k=1}^{j-1} c_{j,k} H_k)\|} \underbrace{\left(\int_M Z_j H_i - \int_M Z_j H_i \right)}_0 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los elementos de $\{H_1, \dots, H_j\}$ son ortonormales. \square

La demostración anterior puede ser más general utilizando productos internos [7] (p. 183). Notemos que la fórmula para obtener los coeficientes $c_{n,k}$ viene de aplicar la ortonormalidad del conjunto $\{H_k\}$ a la expresión para G_n , similar a la forma de obtener los coeficientes en la función de aberración.

Se presentó la función de aberración, los polinomios de Zernike y una manera de ortonormalizar polinomios con el método de Gram Schmidt. En el siguiente capítulo utilizaremos el método de ortonormalización para obtener polinomios ortonormales para otras pupilas compuestas por hexágonos.

Capítulo 2

Polinomios ortonormales

En el capítulo anterior presentaron los polinomios de Zernike y una manera de generar polinomios ortonormales. En la Sección 2.1 tomando como base los polinomios de Zernike, se muestra el método de Gram Schmidt seguido para obtener polinomios ortonormales sobre un hexágono, posteriormente se muestra un programa que realiza todo el proceso de ortonormalización y finalmente se presentan nuevos polinomios ortonormales sobre teselados hexagonales.

2.1. Polinomios ortonormales sobre una pupila hexagonal

El método para obtener polinomios ortonormales $\{H_1, \dots, H_n\}$ sobre el hexágono regular [1] que sale de inscribirlo en una circunferencia unitaria, ver Figura 2.1, será el siguiente:

Siendo $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ los primeros n polinomios de Zernike con un sólo índice, iniciamos el proceso de ortonormalización sobre el hexágono unitario.

$$G_1 = Z_1 = 1 \quad (2.1)$$

$$G_2 = Z_2 + c_{2,1}H_1 \quad (2.2)$$

$$\text{donde } c_{2,1} = -\frac{1}{\int_M dx dy} \int_M Z_2 H_1 dx dy \quad (2.3)$$

$$H_2 = \frac{G_2}{\|G_2\|} \quad (2.4)$$

La región M es el hexágono en cuestión, al ser polinomios y regiones simétricas podemos aprovechar algunas propiedades para hacer más sencillo el trabajo, primero vamos a obtener la integral sobre la superficie.

$$\begin{aligned} \int_M dx dy &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{3}(x+1)}^{\sqrt{3}(x+1)} dy dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{-\sqrt{3}(-x+1)}^{\sqrt{3}(-x+1)} dy dx \\ &= 2 \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{3}(x+1) dx + 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} dx + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{3}(-x+1) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

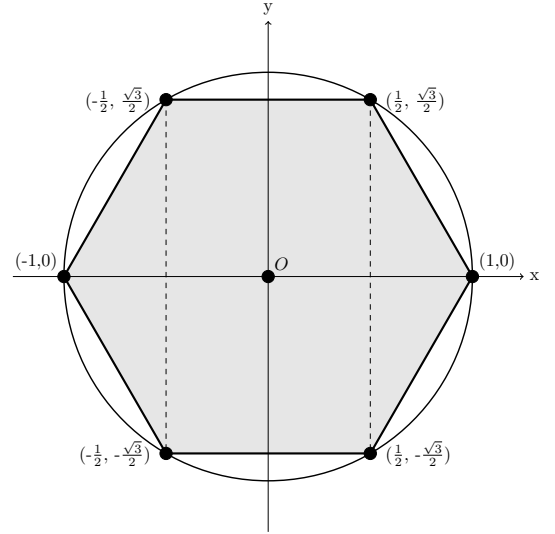


Fig. 2.1 Hexágono regular inscrito en un círculo unitario.

Para el coeficiente $c_{2,1}$

$$c_{2,1} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{3}(x+1)}^{\sqrt{3}(x+1)} Z_2 H_1 dx dy + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} Z_2 H_1 dx dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{-\sqrt{3}(-x+1)}^{\sqrt{3}(-x+1)} Z_2 H_1 dx dy \right) \quad (2.6)$$

Podemos aprovechar que $Z_2 H_1 = 2x$ es impar para simplificar usando la simetría del hexágono y deducir que este primer término es 0.

$$c_{2,1} = 0 \quad (2.7)$$

Entonces $G_2 = Z_2 = 2x$, el siguiente paso es normalizar

$$\begin{aligned} \|G_2\| &= \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{3}(x+1)}^{\sqrt{3}(x+1)} 4x^2 dx dy + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 4x^2 dx dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{-\sqrt{3}(-x+1)}^{\sqrt{3}(-x+1)} 4x^2 dx dy \right)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{11}{8\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{11}{8\sqrt{3}} \right)} = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{30}{8\sqrt{3}} \right)} = \sqrt{\frac{10}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{6}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Así finalmente obtenemos el segundo polinomio.

$$H_2 = \sqrt{\frac{6}{5}} 2x \quad (2.9)$$

j	H_j
1	1
2	$\frac{2\sqrt{30}x}{5}$
3	$\frac{2\sqrt{30}y}{5}$
4	$\frac{\sqrt{215}(12x^2+12y^2-5)}{43}$
5	$\frac{4\sqrt{105}xy}{7}$
6	$\frac{2\sqrt{105}(x^2-y^2)}{7}$
7	$\frac{4\sqrt{154770}y(25x^2+25y^2-14)}{3685}$
8	$\frac{4\sqrt{154770}x(25x^2+25y^2-14)}{3685}$
9	$\frac{4\sqrt{10}y(3x^2-y^2)}{3}$
10	$\frac{4\sqrt{7210}x(x^2-3y^2)}{103}$
11	$\frac{3\sqrt{1072205}(-5140x^2-5140y^2+6020(x^2+y^2)^2+737)}{1072205}$
12	$\frac{30\sqrt{492583}(392x^4-249x^2-392y^4+249y^2)}{492583}$
13	$\frac{60\sqrt{492583}xy(392x^2+392y^2-249)}{492583}$
14	$\frac{10\sqrt{694807267}(-567x^4-32478x^2y^2+2970x^2+11393y^4-2970y^2)}{297774543}$
15	$\frac{40\sqrt{694807267}xy(8403x^2-2423y^2-1485)}{297774543}$

Tabla 2.1: Polinomios ortonormales sobre un hexágono inscrito en un círculo unitario.

Los coeficientes de H_3 son $c_{3,1}$ y $c_{3,2}$ y la normalización de G_3 implica 3 integrales sobre el hexágono, para H_n serán $n - 1$ coeficientes que junto con la integral de la norma G sumarán n integrales sobre el hexágono, entonces si se quiere obtener H_{15} durante el proceso se necesitarán 117 integrales sobre el hexágono unitario que significan 351 integrales dobles.

En la Tabla 2.1 presentamos los polinomios ortonormales obtenidos siguiendo este proceso, esta tabla fue obtenida con el programa presentado en la Sección 2.2, inicialmente estos fueron presentados en el 2006 [1] hasta el decimoprimer polinomio y posteriormente esta lista fue extendida en el 2007 [8] a 45 polinomios, 22 de ellos expresiones exactas.

2.2. Automatización de la ortonormalización

Para el proceso de ortonormalización es necesario tener los polinomios de Zernike que se pueden encontrar en la literatura [5] (p. 519) pero para asegurarnos de tener expresiones precisas a un grado de libertad arbitrario lo correcto es realizar un programa que genere dichos polinomios, el siguiente algoritmo nos muestra cómo.

2.2.1. Polinomios de Zernike

La función `zernike_cartesiano(k)` nos dará el k -ésimo Zernike con un subíndice, así su única variable es k .

Primero obtenemos n y m a partir de k :

$$\begin{aligned} n &= \lfloor \sqrt{2k-1} + 0,5 \rfloor - 1 ; \\ m &= \begin{cases} 2\lfloor (2k+1-n[n+1])/4 \rfloor & \text{si } n \text{ par} \\ 2\lfloor (2(k+1)-n[n+1])/4 \rfloor - 1 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} ; \end{aligned}$$

Ahora calcularemos los polinomios radiales, para eso vamos a construir los coeficientes y los almacenaremos en una lista llamada B.

`B = [] ;` ▷ Lista con los coeficientes de los polinomios radiales

Con la instrucción `for` creamos los coeficientes

`for s ∈ [0, ..., $\frac{n-m}{2}$]:`
`coeficiente = $(-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \binom{\frac{n+m}{2}-s}! \binom{\frac{n-m}{2}-s}!};$`
`Agregar coeficiente a B;`

Ahora podemos calcular el polinomio radial, `polinomio`, aquí `B[i]` representa el i -ésimo elemento de la lista B.

`polinomio = 0 ;`

`for i ∈ [0, ..., $\frac{n-m}{2}$]:`
`polinomio = polinomio + B[i] · p^{n-2i} ;`

Tenemos $R_n^m(\rho) = \text{polinomio}$. Vamos a crear Z_j en coordenadas polares, recordemos que m tiene tres casos en la definición de los polinomios con un sólo índice $m = 0$, par e impar, así:

`if m = 0:` ▷ Obtenemos Z_j cuando $m = 0$

`$Z_c \leftarrow \sqrt{n+1} \cdot \text{polinomio};$`

`En Z_c se sustituye $x^2 + y^2$ en el lugar de p^2 ;`

`return Z ;`

`else if k es par:`

`$Z = \sqrt{2(n+1)} \cdot \text{polinomio} \cdot \cos(m \cdot O);$`

`else :`

`$Z = \sqrt{2(n+1)} \cdot \text{polinomio} \cdot \text{sen}(m \cdot O);$`

Tenemos el polinomio Z_j para cuando $m = 0$ en cartesianas y los casos cuando $k = \text{par}$, impar en polares, los transformamos a cartesianas con los polinomios de Chebyshev.

Entonces en la siguiente parte identifica si a Z le corresponde los polinomios de Chebyshev de primer o segundo tipo, lo calcula, y dicho polinomio es sustituido en la expresión para Z .

```

if  $k$  es par:
     $T_0 = 1$ ;
     $T_1 = x$ ;
     $\text{cbsv1} = [T_0 \ T_1]$  ;           ▷ Lista con los polinomios de Chebyshev de primer tipo

    if  $m < 2$ :
         $T = \text{cbsv1}[m+1]$ 
        Se sustituye  $T$  donde esté  $\cos m \cdot O$  en  $Z$ .
    else:
        for  $q \in [2, \dots, m]$ :
             $T = 2 \cdot \cos O \cdot \text{cbsv1}[q] - \text{cbsv1}[q-1]$ 
            Agrega  $T$  a  $\text{cbsv1}$ 
            Sustituye  $T$  en lugar de  $\cos m \cdot O$  en  $Z$ 

    else:
         $U_0 = 1$ ;
         $U_1 = 2x$ ;
         $\text{cbsv2} = [U_0 \ U_1]$  ;           ▷ Lista con los polinomios de Chebyshev de segundo tipo

        if  $m < 3$ :
             $\text{nuevoseno} = \text{cbsv2}[m] \cdot \text{sen}(O)$ 
            Se sustituye  $\text{nuevoseno}$  donde esté  $\text{sen } m \cdot O$  en  $Z$ .
        else:
            for  $q \in [2, \dots, m-1]$ :
                 $U = 2 \cdot \cos O \cdot \text{cbsv2}[q] - \text{cbsv2}[q-1]$ 
                Agrega  $U$  a  $\text{cbsv2}$ 
             $\text{nuevoseno} = U \cdot \text{sen}(O)$ 
            Sustituye  $\text{nuevoseno}$  en lugar de  $\text{sen } m \cdot O$  en  $Z$ 

    Falta sustituir el seno y los cosenos en función de  $x$  y  $y$ , luego donde exista  $p^2$  sustituyamos por  $x^2 + y^2$ .
    Sustituir  $\frac{x}{p}$  donde esté  $\cos O$  en  $Z$ ;
    Sustituir  $\frac{y}{p}$  donde esté  $\text{sen } O$  en  $Z$ ;
    Sustituir  $x^2 + y^2$  donde esté  $\rho^2$  en  $Z$ ;

    return  $Z$ ;           ▷  $k$ -ésimo polinomio de Zernike en coordenadas cartesianas

```

2.2.2. Integral sobre M

Conviene definir una función `integral_dominio(f)` que integre la función f sobre M , como estamos integrando en coordenadas cartesianas, esta función está compuesta de la instrucción de realizar integrales dobles sobre un segmento de M y posteriormente serán sumadas. Supongamos que M lo dividimos en m segmentos

```

 $a \leftarrow$  factor de escala;
 $c_1 = \iint_1 f$ ;
     $\vdots$ 
 $c_m = \iint_m f$ ;
 $c = \sum_{i=1}^m c_i$ ;
return  $c$ ;           ▷ Integral de  $f$  sobre la superficie  $M$ 

```

2.2.3. Ortonormalización

El proceso de ortonormalización tendrá como parámetro el número de polinomios ortonormales que necesitemos, este número será q y el algoritmo nos dará una lista H que tendrá los q polinomios ortonormales sobre M

```

 $q \leftarrow$  Número de polinomios deseados;
 $A = \text{integral\_dominio}(1)$ ; ▷ Área de  $M$ 
 $H = [1]$ ; ▷ Lista de polinomios ortnormales sobre  $M$ 
for  $i \in [1, \dots, q-1]$ :
     $C = [ ]$ ;

    for  $k \in [1, \dots, i]$ :
         $c = -\frac{1}{A} \cdot (\text{integral\_dominio}(\text{zernike\_cartesiano}(i+1) \cdot H[k]))$ ;
        Agregar  $c$  a  $C$ 

     $cH = 0$ 
    for  $k \in [1, \dots, i]$ :
         $cH = cH + H[k] \cdot C[k]$ ;

     $g = cH + \text{zernike\_cartesiano}(i+1)$ ;
     $\text{mod\_g} = \sqrt{\frac{1}{A} \cdot \text{integral\_dominio}(g^2)}$ ;

     $h = \frac{g}{\text{mod\_g}}$ ;
    Agregar  $h$  a  $H$ ;

```

Describimos el proceso para generar un programa que realice la ortonormalización sobre un dominio descrito en coordenadas cartesianas. En la siguiente sección aplicamos el programa a tres distintos casos.

2.3. Polinomios ortonormales sobre otras pupilas

Existen lenguajes de programación que permiten el uso de variables simbólicas así como de operaciones simbólicas con algebra y cálculo. Entonces aplicando el algoritmo anterior a un hexagono inscrito en un círculo unitario, ver Fig. 2.1, obtenemos la Tabla 2.1. Podemos comparar estos resultados con el trabajo realizado en [1], los resultados no son idénticos pues el método en que se realizan las simplificaciones son distintos pero los resultados son equivalentes y se comprobó que fueran iguales hasta el decimoprimer término que fue calculado.

La ventaja de tener este programa es que el problema de obtener polinomios ortornormales se reduce simplemente a obtener las ecuaciones del dominio para el cual queremos polinomios ortonormales, debido a que el caso de partida fue obtener polinomios para un hexágono es natural que el siguiente paso sea aplicar el programa a figuras de telescopios astronómicos compuestos por hexagonos, ver Fig. 1.2. Es relevante notar que generar polinomios ortonormales a mano sería un trabajo arduo debido a la extensión de las integrales involucradas en el proceso. Así en las siguientes tres secciones mostramos los resultados obtenidos de ortonormalizar los polinomios de Zernike a distintos teselados hexagonales, el primer caso es un teselado de hexagonos con un anillo, los siguientes dos son teselados anulares con la forma de la pupila de los telescopios James Webb y los del observatorio Keck.

De los resultados presentados a continuación no se ha encontrado artículos relacionados a excepción del caso de la Figura 2.6 donde existe un artículo donde se obtienen polinomios ortonormales sobre una geometría similar [4], la diferencia es que en el caso del presente trabajo la figura es un teselado, es decir, no hay separación entre los segmentos y en el artículo mencionado se considera separación entre cada segmento de la pupila.

Para ilustrar las integrales con las cuales está trabajando el programa a continuación mostramos la integral sobre la región de integración, así también es una manera de presentar las ecuaciones que se deben introducir en la función `integral_dominio(f)`.

Para la primera región, ver Figura 2.2:

$$\begin{aligned} \int_T dx dy = & \int_{-\frac{2}{\sqrt{7}}}^{-\frac{5}{2\sqrt{7}}} \int_{-\sqrt{3}(x+\frac{2}{\sqrt{7}})}^{\sqrt{3}(x+\frac{2}{\sqrt{7}})} dy dx + \int_{-\frac{2}{\sqrt{7}}}^{-\frac{5}{2\sqrt{7}}} \int_{-\sqrt{3}(x+\frac{3}{\sqrt{7}})}^{\sqrt{3}(x+\frac{3}{\sqrt{7}})} dy dx + \int_{-\frac{1}{\sqrt{7}}}^{-\frac{2}{\sqrt{7}}} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}} dy dx \\ & + \int_{-\frac{1}{\sqrt{7}}}^{-\frac{2}{\sqrt{7}}} \int_{-\sqrt{3}(x+\frac{2}{\sqrt{7}})}^{\sqrt{3}(x+\frac{2}{\sqrt{7}})} dy dx + \int_{-\frac{1}{2\sqrt{7}}}^{\frac{1}{2\sqrt{7}}} \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}} dy dx + \int_{\frac{1}{2\sqrt{7}}}^{\frac{1}{\sqrt{7}}} \int_{-\sqrt{3}(-x+\frac{2}{\sqrt{7}})}^{\sqrt{3}(-x+\frac{2}{\sqrt{7}})} dy dx \\ & + \int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\frac{2}{\sqrt{7}}} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}} dy dx + \int_{\frac{2}{\sqrt{7}}}^{\frac{5}{2\sqrt{7}}} \int_{\sqrt{3}(x-\frac{2}{\sqrt{7}})}^{\sqrt{3}(-x+\frac{3}{\sqrt{7}})} dy dx + \int_{\frac{2}{\sqrt{7}}}^{\frac{5}{2\sqrt{7}}} \int_{\sqrt{3}(x-\frac{3}{\sqrt{7}})}^{\sqrt{3}(-x+\frac{2}{\sqrt{7}})} dy dx \end{aligned}$$

Para la segunda región, ver Figura 2.4, $a = \frac{1}{\sqrt{19}}$:

$$\begin{aligned} \int_W dx dy = & \int_{-4a}^{-7/2a} \int_{\sqrt{3}(-x-3a)}^{\sqrt{3}(x+5a)} dy dx + \int_{-4a}^{-7/2a} \int_{\sqrt{3}(-x-4a)}^{\sqrt{3}(x+4a)} dy dx + \int_{-4a}^{-7/2a} \int_{\sqrt{3}(-x-5a)}^{\sqrt{3}(x+3a)} dy dx \\ & + \int_{-7/2a}^{-5/2a} \int_{-3\sqrt{3}/2a}^{3\sqrt{3}/2a} dy dx + \int_{-5/2a}^{-4/2a} \int_{\sqrt{3}(-x-4a)}^{\sqrt{3}(x+4a)} dy dx + \int_{-4/2a}^{-2/2a} \int_{-4\sqrt{3}/2a}^{4\sqrt{3}/2a} dy dx \\ & + \int_{-2/2a}^{-1/2a} \int_{\sqrt{3}(x+a)}^{\sqrt{3}(x+3a)} dy dx + \int_{-2/2a}^{-1/2a} \int_{-\sqrt{3}(x+3a)}^{-\sqrt{3}(x+a)} dy dx + \int_{-1/2a}^{1/2a} \int_{\sqrt{3}/2a}^{5\sqrt{3}/2a} dy dx \\ & + \int_{-1/2a}^{1/2a} \int_{-5\sqrt{3}/2a}^{-\sqrt{3}/2a} dy dx + \int_{1/2a}^{2/2a} \int_{\sqrt{3}(-x+a)}^{\sqrt{3}(-x+3a)} dy dx + \int_{1/2a}^{2/2a} \int_{\sqrt{3}(x-3a)}^{\sqrt{3}(x-a)} dy dx \\ & + \int_{2/2a}^{4/2a} \int_{-4\sqrt{3}/2a}^{4\sqrt{3}/2a} dy dx + \int_{4/2a}^{5/2a} \int_{\sqrt{3}(x-4a)}^{\sqrt{3}(-x+4a)} dy dx + \int_{5/2a}^{7/2a} \int_{-3\sqrt{3}/2a}^{3\sqrt{3}/2a} dy dx \\ & + \int_{7/2a}^{8/2a} \int_{\sqrt{3}(x-3a)}^{\sqrt{3}(-x+5a)} dy dx + \int_{7/2a}^{8/2a} \int_{\sqrt{3}(x-4a)}^{\sqrt{3}(-x+4a)} dy dx + \int_{7/2a}^{8/2a} \int_{\sqrt{3}(x-5a)}^{\sqrt{3}(-x+3a)} dy dx \end{aligned}$$

Finalmente para la tercera región, ver Figura 2.6, $a = \frac{1}{\sqrt{37}}$:

$$\begin{aligned} \int_K dx dy = & \int_{-11/2a}^{-5a} \int_{\sqrt{3}(-x-4a)}^{\sqrt{3}(x+7a)} dy dx + \int_{-11/2a}^{-5a} \int_{\sqrt{3}(-x-5a)}^{\sqrt{3}(x+6a)} dy dx + \int_{-11/2a}^{-5a} \int_{\sqrt{3}(-x-6a)}^{\sqrt{3}(x+5a)} dy dx \\ & + \int_{-11/2a}^{-5a} \int_{\sqrt{3}(-x-7a)}^{\sqrt{3}(x+4a)} dy dx + \int_{-5a}^{-4a} \int_{-2\sqrt{3}a}^{2\sqrt{3}a} dy dx + \int_{-4a}^{-7/2a} \int_{\sqrt{3}(-x-6a)}^{\sqrt{3}(x+6a)} dy dx \\ & + \int_{-7/2a}^{-5/2a} \int_{-5/2\sqrt{3}a}^{5/2\sqrt{3}a} dy dx + \int_{-5/2a}^{-2a} \int_{\sqrt{3}(-x-5a)}^{\sqrt{3}(x+5a)} dy dx + \int_{-2a}^{-a} \int_{-3\sqrt{3}a}^{3\sqrt{3}a} dy dx \\ & + \int_{-a}^{-a/2} \int_{\sqrt{3}(x+a)}^{\sqrt{3}(x+4a)} dy dx + \int_{-a}^{-a/2} \int_{-\sqrt{3}(x+4a)}^{-\sqrt{3}(x+a)} dy dx + \int_{-a/2}^{a/2} \int_{\sqrt{3}/2a}^{7/2\sqrt{3}a} dy dx \\ & + \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-7/2\sqrt{3}a}^{-\sqrt{3}/2a} dy dx + \int_{a/2}^{2/2a} \int_{\sqrt{3}(-x+a)}^{\sqrt{3}(-x+4a)} dy dx + \int_{a/2}^{2/2a} \int_{\sqrt{3}(x-4a)}^{\sqrt{3}(x-a)} dy dx \\ & + \int_{2/2a}^{4/2a} \int_{-3\sqrt{3}a}^{3\sqrt{3}a} dy dx + \int_{4/2a}^{5/2a} \int_{\sqrt{3}(x-5a)}^{\sqrt{3}(-x+5a)} dy dx + \int_{5/2a}^{7/2a} \int_{-5/2\sqrt{3}a}^{5/2\sqrt{3}a} dy dx \\ & + \int_{7/2a}^{4a} \int_{\sqrt{3}(x-6a)}^{\sqrt{3}(-x+6a)} dy dx + \int_{4a}^{5a} \int_{-2\sqrt{3}a}^{2\sqrt{3}a} dy dx + \int_{5a}^{11/2a} \int_{\sqrt{3}(x-4a)}^{\sqrt{3}(-x+7a)} dy dx \\ & + \int_{5a}^{11/2a} \int_{\sqrt{3}(x-5a)}^{\sqrt{3}(-x+6a)} dy dx + \int_{5a}^{11/2a} \int_{\sqrt{3}(x-6a)}^{\sqrt{3}(-x+5a)} dy dx + \int_{5a}^{11/2a} \int_{\sqrt{3}(x-7a)}^{\sqrt{3}(-x+4a)} dy dx \end{aligned}$$

2.3.1. Teselado hexagonal con un anillo

Aplicando el algoritmo descrito en la Sección 2.2 a las ecuaciones que describen la Figura 2.2 obtenemos los polinomios ortonormales sobre el teselado hexagonal con un anillo, ver Tabla 2.2.

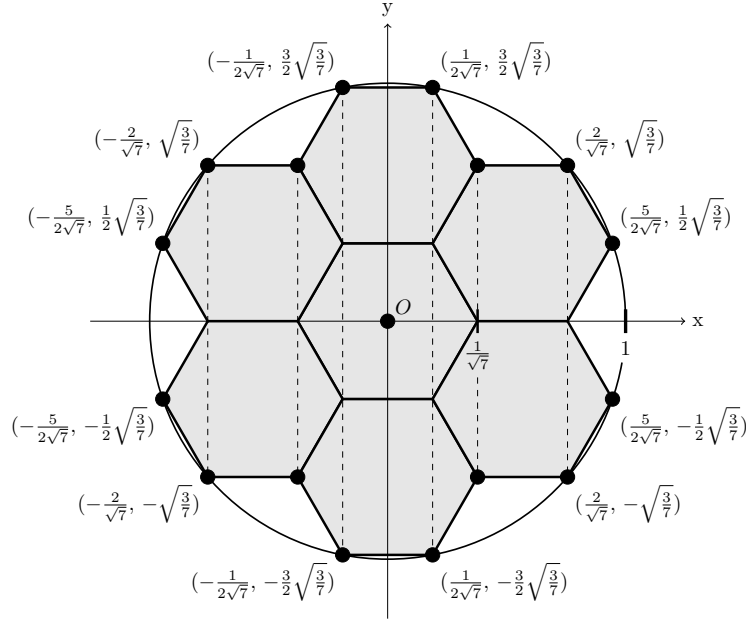


Fig. 2.2 Teselado hexagonal con un anillo.

j	T_j
1	1
2	$\frac{14\sqrt{1506}}{251}x$
3	$\frac{14\sqrt{1506}}{251}y$
4	$\frac{\sqrt{582935}}{116587}(588x^2 + 588y^2 - 251)$
5	$\frac{28\sqrt{5505}}{367}xy$
6	$\frac{14\sqrt{5505}}{367}(x^2 - y^2)$
7	$\frac{196\sqrt{23928952974}}{3988158829}y(1255x^2 + 1255y^2 - 734)$
8	$\frac{196\sqrt{23928952974}}{3988158829}x(1255x^2 + 1255y^2 - 734)$
9	$\frac{196\sqrt{50230}}{15069}y(3x^2 - y^2)$
10	$\frac{28\sqrt{193270}}{2761}x(x^2 - 3y^2)$
11	$\frac{21\sqrt{25844104370630765}}{25844104370630765}(-104045620x^2 - 104045620y^2 + 114255260(x^2 + y^2)^2 + 15889079)$
12	$\frac{210\sqrt{4432879336063}}{4432879336063}(143864x^4 - 96801x^2 - 143864y^4 + 96801y^2)$
13	$\frac{420\sqrt{4432879336063}}{4432879336063}xy(143864x^2 + 143864y^2 - 96801)$
14	$\frac{70\sqrt{8691035844043404257792803}}{26073107532130212773378409}(1287692155701x^4 - 3551134944966x^2y^2 - 308498370930x^2 - 103980507379y^4 + 308498370930y^2)$
15	$\frac{280\sqrt{8691035844043404257792803}}{26073107532130212773378409}xy(243937658391x^2 - 939773989931y^2 + 154249185465)$

Tabla 2.2: Lista de polinomios ortonormales sobre un teselado hexagonal con un anillo.

En la Figura 2.3 se muestran los mapas de calor de los polinomios de la Tabla 2.2 restringidos sobre la Figura 2.2.

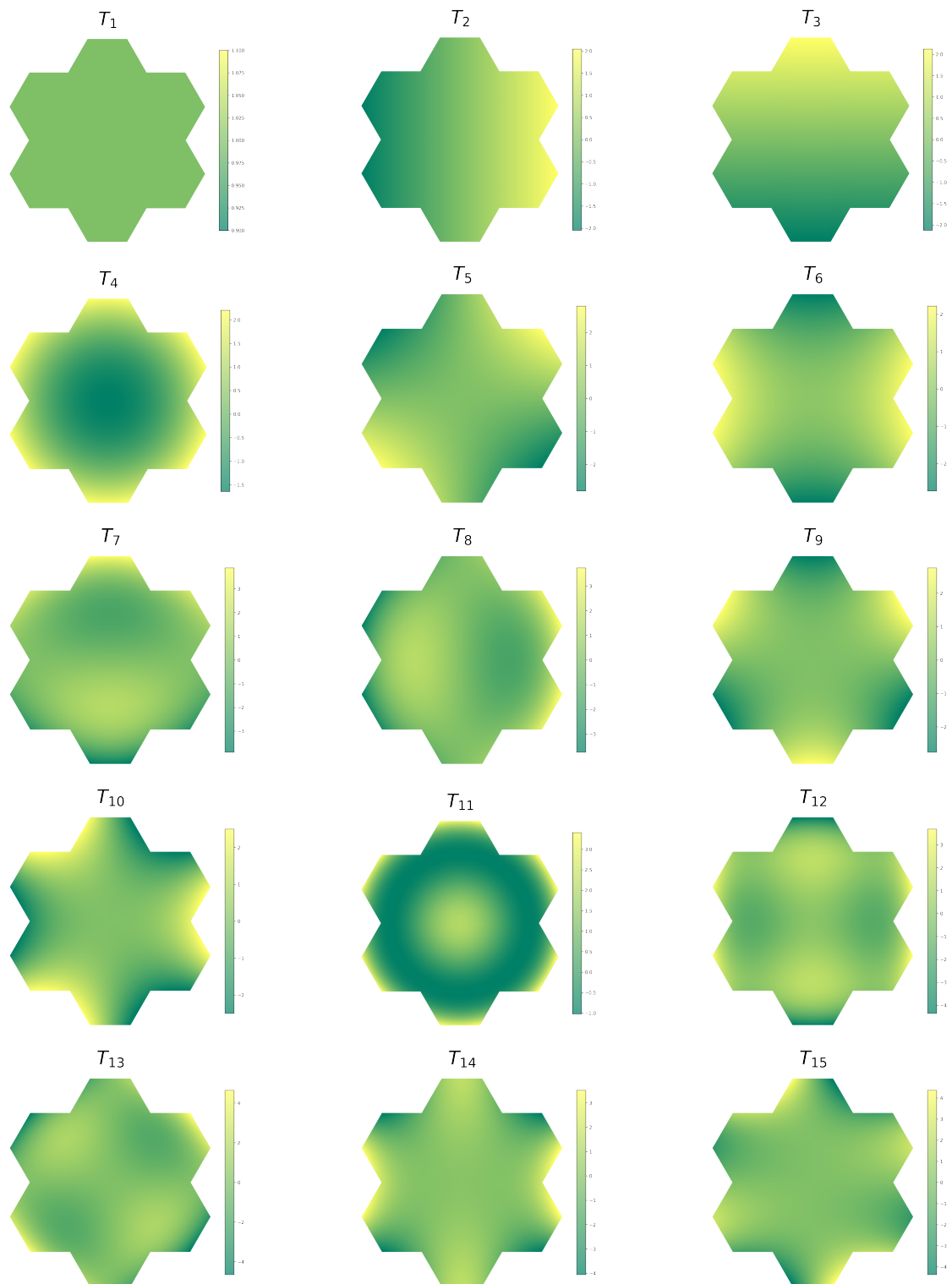


Fig. 2.3 Gráficas de los polinomios T_j .

2.3.2. Teselado anular hexagonal compuesto por dos anillos

Aplicando el algoritmo descrito en la Sección 2.2 a las ecuaciones que describen la Figura 2.4 obtenemos los polinomios ortonormales sobre el teselado hexagonal anular con dos anillos, ver Tabla 2.3.

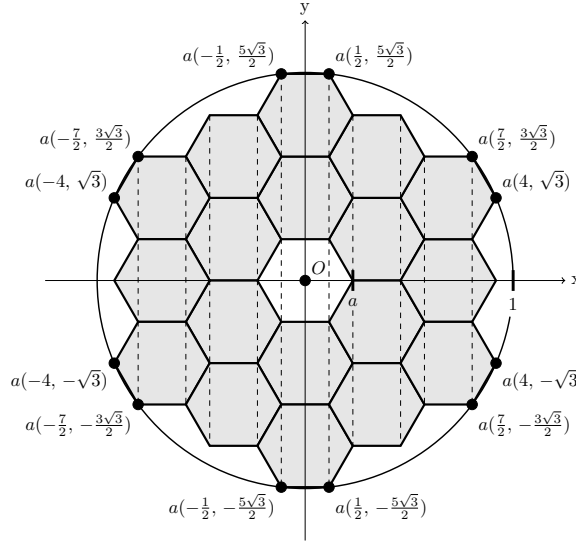


Fig. 2.4 Teselado hexagonal anular compuesto de dos anillos, $a = \frac{1}{\sqrt{19}}$.

j	W_j
1	1
2	$\frac{2\sqrt{11514}}{101}x$
3	$\frac{2\sqrt{11514}}{101}y$
4	$\frac{\sqrt{74615}}{14923}(228x^2 + 228y^2 - 101)$
5	$\frac{76\sqrt{41205}}{2747}xy$
6	$\frac{38\sqrt{41205}}{2747}(x^2 - y^2)$
7	$\frac{4\sqrt{9660319678086}}{12105663757}y(9595x^2 + 9595y^2 - 5494)$
8	$\frac{4\sqrt{9660319678086}}{12105663757}x(9595x^2 + 9595y^2 - 5494)$
9	$\frac{76\sqrt{22487070}}{118353}y(3x^2 - y^2)$
10	$\frac{76\sqrt{592476430}}{445471}x(x^2 - 3y^2)$
11	$\frac{3\sqrt{17512994558436845}}{17512994558436845}(-702422780x^2 - 702422780y^2 + 754208420(x^2 + y^2)^2 + 119858057)$
12	$\frac{570\sqrt{12680775508480843}}{12680775508480843}(2922808x^4 - 1910913x^2 - 2922808y^4 + 1910913y^2)$
13	$\frac{1140\sqrt{12680775508480843}}{12680775508480843}xy(2922808x^2 + 2922808y^2 - 1910913)$
14	$\frac{190\sqrt{634582439047209310768069394223327}}{90654634149601330109724199174761}(198158241542751x^4 - 526249875488466x^2y^2 - 54971718813990x^2 - 22741616379929y^4 + 54971718813990y^2)$
15	$\frac{760\sqrt{634582439047209310768069394223327}}{90654634149601330109724199174761}xy(32483348100741x^2 - 142933277062081y^2 + 27485859406995)$

Tabla 2.3: Lista polinomios ortonormales sobre teselado hexagonal en forma del telescopio James Webb.

En la Figura 2.5 se muestran los mapas de calor de los polinomios de la Tabla 2.3 restringidos sobre la Figura 2.4.

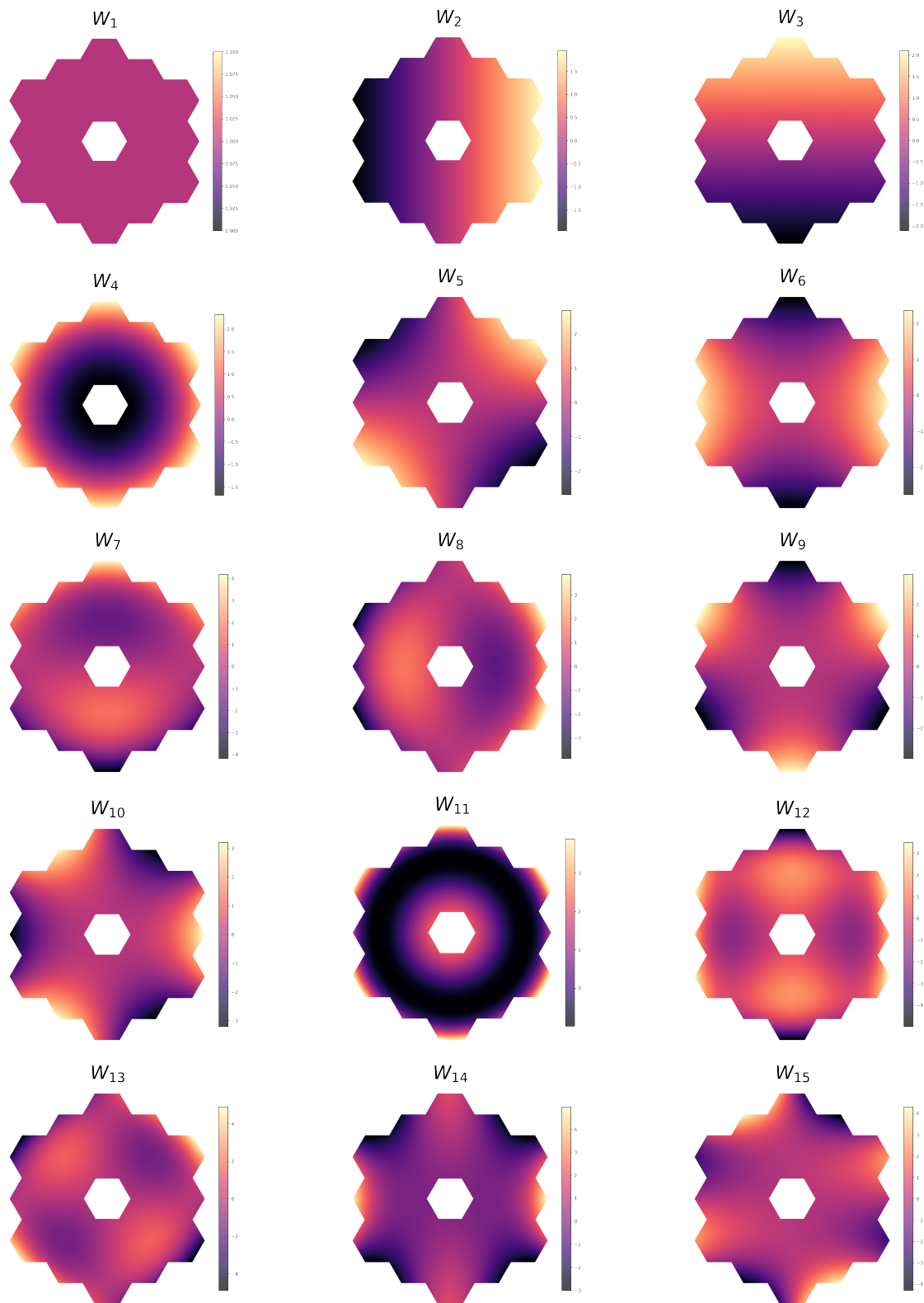


Fig. 2.5 Gráficas de los polinomios W_j .

2.3.3. Teselado anular hexagonal compuesto por tres anillos

Aplicando el algoritmo descrito en la Sección 2.2 a las ecuaciones que describen la Figura 2.6 obtenemos los polinomios ortonormales sobre el teselado hexagonal anular con tres anillos, ver Tabla 2.4.

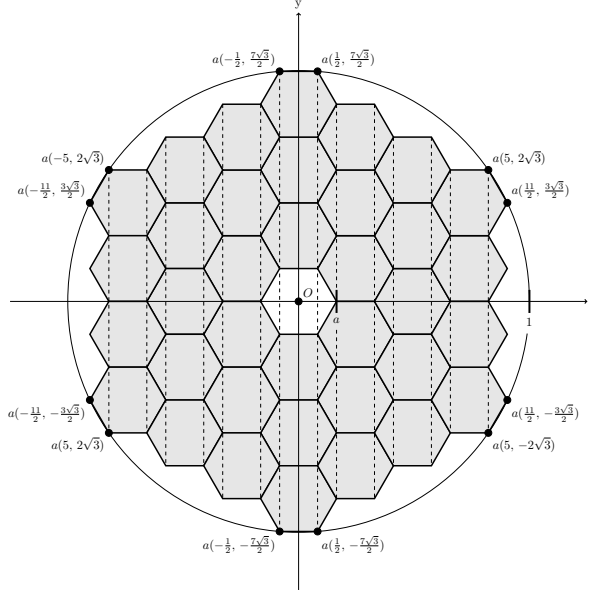


Fig. 2.6 Teselado hexagonal anular compuesto de tres anillos, $a = \frac{1}{\sqrt{37}}$.

j	K_j
1	1
2	$\frac{2\sqrt{42402}}{191}x$
3	$\frac{2\sqrt{42402}}{191}y$
4	$\frac{\sqrt{288815}}{57763}(-444x^2 - 444y^2 + 191)$
5	$\frac{148\sqrt{150105}}{10007}xy$
6	$\frac{74\sqrt{150105}}{10007}(x^2 - y^2)$
7	$\frac{4\sqrt{465133621123878}}{299313784507}y(-35335x^2 - 35335y^2 + 20014)$
8	$\frac{4\sqrt{465133621123878}}{299313784507}x(-35335x^2 - 35335y^2 + 20014)$
9	$\frac{148\sqrt{299900910}}{810543}y(3x^2 - y^2)$
10	$\frac{148\sqrt{8416466590}}{3249601}x(x^2 - 3y^2)$
11	$\frac{3\sqrt{3802297027422508565}}{3802297027422508565}(-9913477340x^2 - 9913477340y^2 + 11070856580(x^2 + y^2)^2 + 1567087877)$
12	$\frac{1110\sqrt{2189271900563648263}}{2189271900563648263}(x^2 - y^2)(-20734504x^2 - 20734504y^2 + 13385103)$
13	$\frac{2220\sqrt{2189271900563648263}}{2189271900563648263}xy(-20734504x^2 - 20734504y^2 + 13385103)$
14	$\frac{370\sqrt{19885009003729665762261957928987001127}}{2840715571961380823180279704141000161}(17778281679889353x^4 - 48567838705419198x^2y^2 - 4831656717759390x^2 - 1589002111416287y^4 + 4831656717759390y^2)$
15	$\frac{1480\sqrt{19885009003729665762261957928987001127}}{2840715571961380823180279704141000161}xy(3252818836410123x^2 - 12936460732062943y^2 + 2415828358879695)$

Tabla 2.4: Lista polinomios ortonormales sobre teselado hexagonal en forma de las pupilas del observatorio W.M. Keck.

En la Figura 2.7 se muestran los mapas de calor de los polinomios de la Tabla 2.4 restringidos sobre la Figura 2.6.

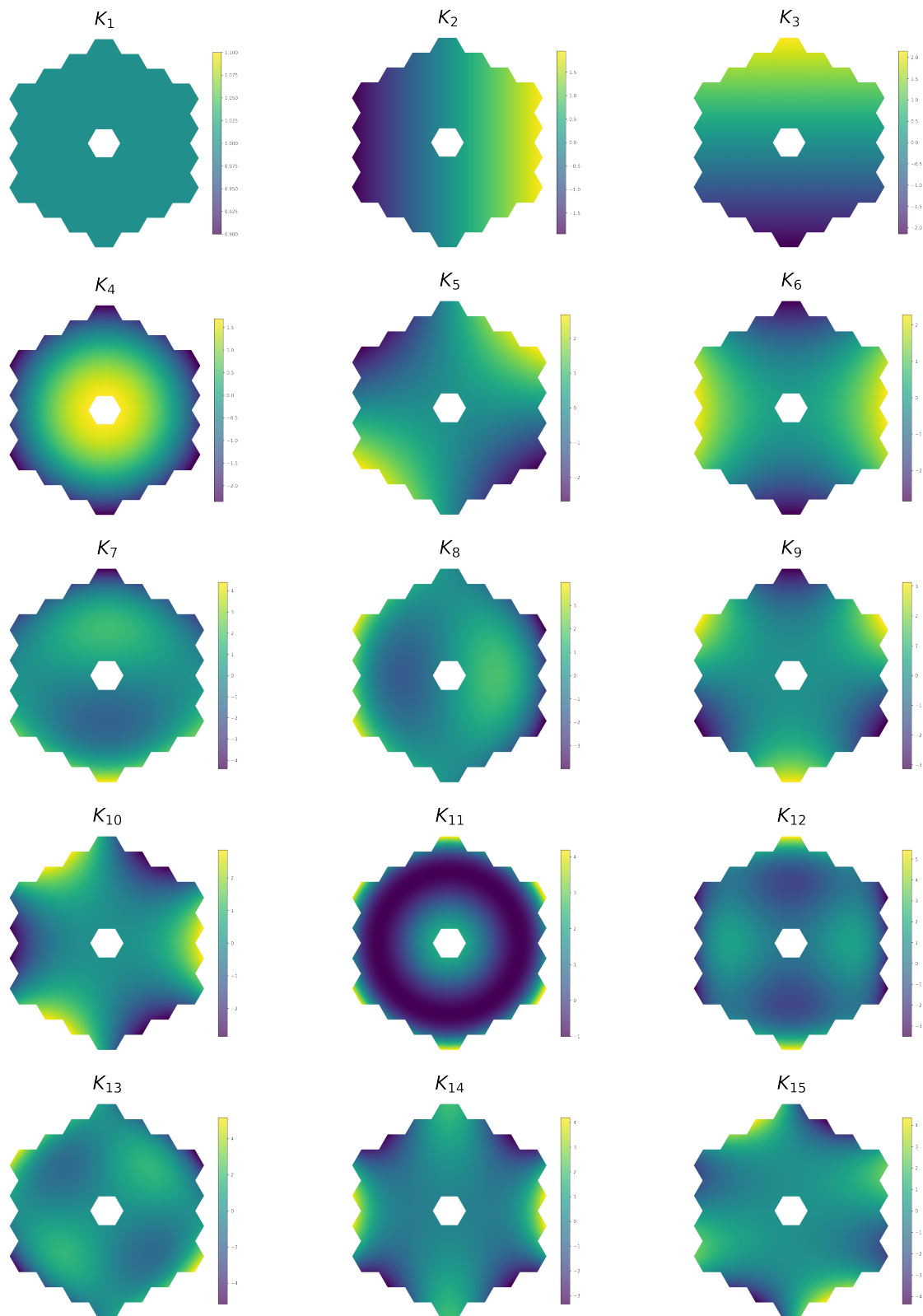


Fig. 2.7 Gráficas de los polinomios K_j .

Se ha presentado el procedimiento que se sigue para ortonormalizar polinomios y lo hemos aplicado para generar polinomios ortonormales sobre tres nuevos dominios, recordando que ya existe investigación sobre un caso similar de la Figura 2.6 considerando una pupila segmentada con separación entre cada segmento [4], en el caso presentado en este trabajo es un teselado.

El objetivo principal es verificar que el borde de los diagramas de manchas son los rayos marginales y/o los rayos de la cáustica. En el siguiente capítulo se prueba la proposición en general y posteriormente se presentan ejemplos con los teselados de este capítulo.

Capítulo 3

Los bordes de un diagrama de manchas

Los bordes de un diagrama de manchas están compuestos por los rayos marginales y la cáustica [9]. Esto ha sido probado utilizando el teorema del valor extremo de Weierstrass. En otras palabras, la forma de un diagrama de manchas está encerrada por los rayos de la frontera de la pupila y los rayos de la superficie cáustica.

3.1. La cáustica

La superficie cáustica es el lugar del espacio donde se concentran los rayos de mayor intensidad provenientes de la pupila de salida, estos los calculamos con el jacobiano de la transformación que nos lleva de la pupila de salida al plano imagen.

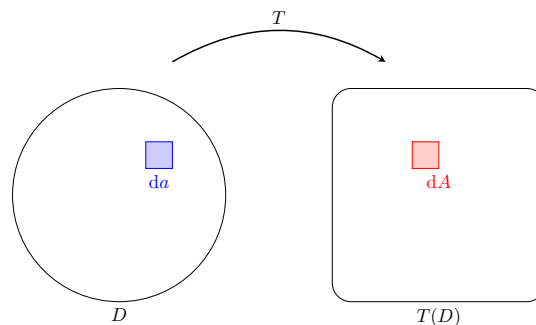


Fig. 3.1 Diferenciales de una transformación T de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 .

Podemos relacionar los diferenciales de área de una transformación con el jacobiano, ver Fig. 3.1, de la siguiente manera:

$$dA = |J(T)|da$$

Cuando tenemos un punto crítico en nuestra función T tenemos que $|J(T)| = 0$, así

$$dA = 0$$

Es decir, el diferencial de área dA colapsa a una región sin área, un punto o una línea, ver Fig. 3.2 .

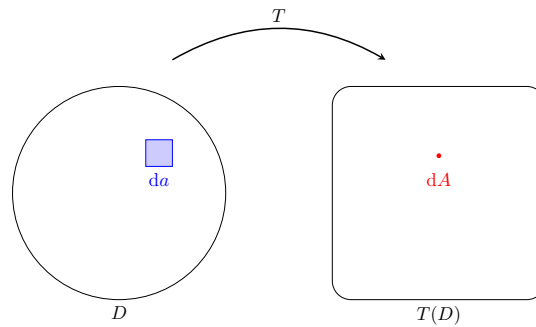


Fig. 3.2 Caso particular de diferenciales de una transformación T de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 cuando $|J(T)| = 0$.

El caso de interés es una transformación que mande los rayos provenientes de salida a un diagrama de manchas, esta será la transformación T y la interpretación de un punto de la cáustica será que cuando tengamos un punto crítico en la pupila de salida todos los rayos cercanos a ese punto serán mapeados a un mismo lugar que será un punto en el diagrama de manchas.

Para obtener las expresiones de la cáustica [10], antes obtenidas en [11], suponemos un rayo saliente de la pupila de salida (x, y) , éste será proyectado en el plano imagen, definido a un valor fijo t_z , y tendrá coordenadas (t_x, t_y) . Sea D la región en \mathbb{R}^2 que identificamos como la forma de nuestra pupila de salida, definimos T a la transformación $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (t_x, t_y)$ con

$$t_x = -\frac{t_z}{R}x + R\frac{\partial W}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$t_y = -\frac{t_z}{R}y + R\frac{\partial W}{\partial y} \quad (3.2)$$

Donde W es la función de aberración, R es el radio del frente de onda ideal y la imagen de D bajo T será el diagrama de manchas a una distancia t_z , ver Fig. 1.1. Las condiciones para que funcione la transformación T son dos: $W \approx -R$ y $\frac{t_z}{|W|} \approx \frac{t_z}{R} \ll 1$, esta transformación T la podemos encontrar en la literatura [3]. Para identificar los rayos de máxima intensidad utilizamos el determinante de la derivada de T igualado a cero, y de la expresión resultante podremos despejar t_z .

$$|J(T)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial x} & \frac{\partial t_x}{\partial y} \\ \frac{\partial t_y}{\partial x} & \frac{\partial t_y}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

Entonces resolviendo la ecuación 3.3 para t_z obtenemos:

$$t_z = \frac{R^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2} \right\} \quad (3.4)$$

Si tenemos un punto sobre la pupila de salida (x, y) y lo evaluamos en la ecuación 3.4 entonces t_z será el valor para el cual (x, y) tendrá su cáustica, así si evaluamos sobre todos los puntos de la pupila obtendremos un intervalo en t_z y en este intervalo tendremos la cáustica.

Sustituyendo la ecuación 3.4 en las ecuaciones 3.1 y 3.2 obtendremos las ecuaciones para la caustica de una función de aberración W . Las ecuaciones son las siguientes:

$$t_x = -\frac{xR}{2} \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2} - \frac{2}{x} \frac{\partial W}{\partial x} \right\} \quad (3.5)$$

$$t_y = -\frac{yR}{2} \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2} - \frac{2}{y} \frac{\partial W}{\partial y} \right\} \quad (3.6)$$

El argumento de la raíz cuadrada de las ecuaciones anteriores para la cáustica es siempre no negativo, entonces si dicho argumento es distinto de cero tendremos dos soluciones y las llamaremos por su signo correspondiente: cáustica positiva y negativa.

Ahora el conjunto de todas la triadas (t_x, t_y, t_z) definidas por las ecuaciones 3.4, 3.5 y 3.6 son la superficie cáustica y tenemos las ecuaciones que definen los diagramas de manchas entonces en la siguiente sección nos interesa probar un resultado sobre la composición de los bordes de dichos diagramas.

3.2. La frontera de un diagrama de manchas está compuesta por los rayos marginales y la cáustica

Podemos pensar en un diagrama de manchas como la imagen de la función $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ver Figura 3.3, tal que $T(x, y) = (t_x, t_y)$ con t_x, t_y definidas en las ecuaciones 3.1 y 3.2 con T restringida a D , esta función es continua.

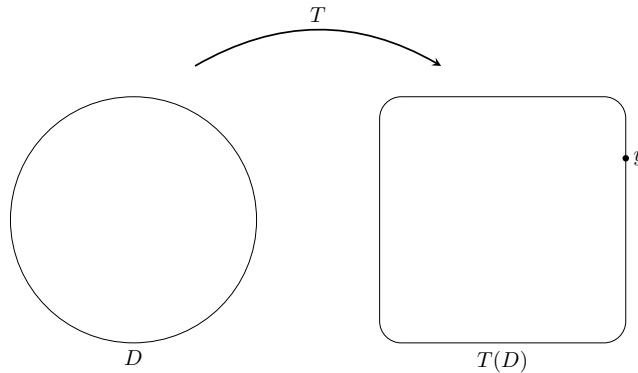


Fig. 3.3 Diagrama de la transformación T .

La forma de los espejos de los telescopios son figuras geométricas o composiciones de éstas, así la forma de los telescopios son conjuntos compactos (cerrados y acotados), entonces T estará definida sobre un conjunto compacto y las funciones continuas mapean conjuntos compactos a conjuntos compactos [12] (p. 166), por lo tanto el diagrama de manchas será un conjunto compacto. En el Anexo B presentamos definiciones y damos una discusión más profunda sobre los conceptos de esta sección.

Dado t_z arbitrario y fijo, definimos

$$T(D) = \{ (t_x(x, y), t_y(x, y)) \mid (x, y) \in D \}$$

Este conjunto será nuestro diagrama de manchas a una distancia t_z , como se mencionó este conjunto es compacto en \mathbb{R}^2 , caso particular de \mathbb{R}^n entonces la frontera de $T(D)$ denotada por $\partial T(D)$ será un conjunto que tiene frontera.

$$\partial T(D) = \overline{T(D)} \setminus \text{int}(T(D))$$

donde $\overline{T(D)}$ es la cerradura de $T(D)$, ahora al ser $T(D)$ un conjunto compacto $\overline{T(D)} = T(D)$ y $\text{int}(T(D))$ denota los puntos interiores de $T(D)$, entonces

$$\partial T(D) = T(D) \setminus \text{int}(T(D))$$

Así definimos $T(\partial D)$ que denota la imagen de los rayos marginales provenientes de la pupila de salida en el diagrama de manchas y $T(C)$ con $C = \{(x, y) \in D \mid |J(T)| = 0\}$, es decir, C es el conjunto de los puntos críticos de T y $T(C)$ es la cáustica.

Queremos probar que la frontera del diagrama de manchas está formado por los rayos provenientes de la frontera de la pupila de salida o de los puntos críticos, es decir, basta probar la siguiente proposición:

Proposición 3.2.1.

$$\partial T(D) \subset T(\partial D) \cup T(C) \tag{3.7}$$

Demostración. Suponemos que D es no vacío entonces $T(D)$ es no vacío y entonces tiene frontera, entonces sea $y \in \partial T(D)$ existe $x \in D$ tal que $T(x) = y$, ver Fig. 3.3.

Dado $x \in D$, x pertenece a ∂D o bien pertenece a $int(D)$.

Supongamos $x \in \partial D$, en este caso $y = T(x) \in T(\partial D)$, ver Fig 3.4.

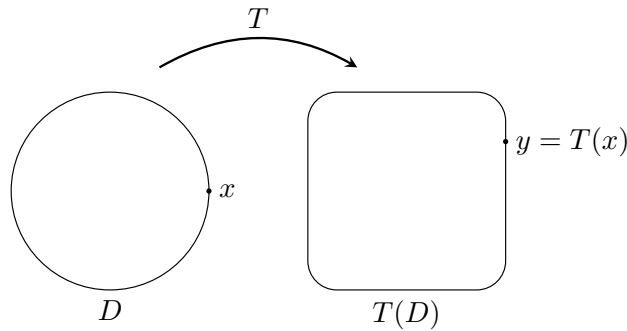


Fig. 3.4 Caso cuando $x \in \partial D$.

Supongamos $x \in int(D)$ probemos que x debe pertenecer a C . Probamos por contradicción entonces sea $x \notin C$, luego $|J(T(x))| \neq 0$ y la función T es invertible. Por el teorema de la función inversa existe U abierto subconjunto de D con $x \in U$ y existe V abierto subconjunto de $T(D)$ tal que $y = T(x) \in V$, entonces y es un punto interno de $T(D)$ por definición, pero $y \in \partial T(D)$. Por lo tanto x es punto crítico, así $y = T(x) \in T(C)$, ver Fig. 3.5.

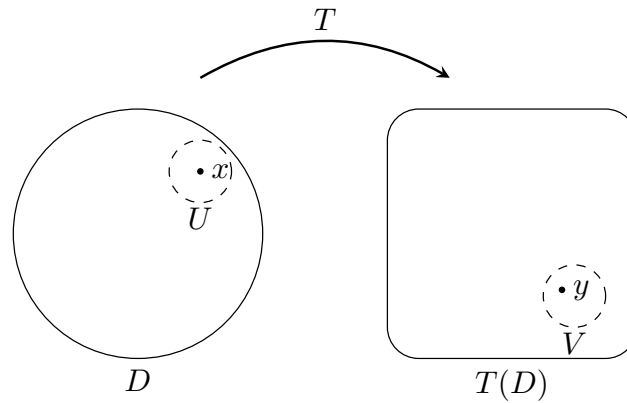


Fig. 3.5 Caso cuando $x \in int(D)$.

Finalmente $y \in T(\partial D)$ en caso que $x \in \partial D$ y $y \in T(C)$ en caso que $x \in int(D)$, por lo tanto $\partial T(D) \subset T(\partial D) \cup T(C)$. \square

Hemos probado la demostración, este es un enfoque nuevo a lo original probado en [9]. Ahora con esta teoría podemos asegurar que funciona para los teselados presentados en las Figuras 3.6, 3.7 y 3.8 pues las uniones finitas de conjuntos compactos son conjuntos compactos y los hexágonos son conjuntos compactos [13].

3.3. El borde del diagrama de manchas está compuesto por los rayos marginales y la cáustica

El objetivo es comprobar que se cumple la teoría presentada sobre la frontera del diagrama de manchas, entonces simularemos diagramas de manchas. Con los dominios presentados en las Figuras 2.2, 2.4 y 2.6 generamos un conjunto de puntos, sobre su interior de la figura y sobre su frontera, así aplicando las ecuaciones 3.1 y 3.2 podemos simular un diagrama de manchas, y con las ecuaciones 3.5 y 3.6 podemos obtener la cáustica.

De este modo considerando $R = 1$ se graficaron los diagramas de manchas y su cáustica utilizando los polinomios generados como función de aberración W con coeficiente 1, el polinomio graficado aparece en el nombre del cuadro. Los puntos provenientes del interior de las figuras se muestran con color negro, los puntos de los rayos marginales son azul oscuro y en el caso de las pupilas anulares los rayos marginales internos son de color azul claro, la cáustica negativa es de color verde y la cáustica positiva de color rojo. Finalmente, como es de esperarse la frontera del diagrama de manchas está compuesta por los rayos marginales y la cáustica.

En [14] se estudia la cáustica de un teselado similar al de la Fig. 3.8, en dicho artículo se muestra la coma, el astigmatismo y la aberración esférica. En el presente trabajo también se muestran dichas aberraciones la diferencia es que en el artículo se utiliza un trazado de rayos sobre un espejo y aquí se generan polinomios ortonormales que se grafican con las expresiones para el diagrama de manchas y la cáustica.

3.3.1. Teselado hexagonal con un anillo

Utilizando los polinomios de la Tabla 2.2 como funciones de aberración con dominio descrito en la Figura 2.2 en las Tablas 3.1 - 3.9 se muestra que los bordes del diagrama de manchas están compuestos por los rayos marginales y la cáustica.

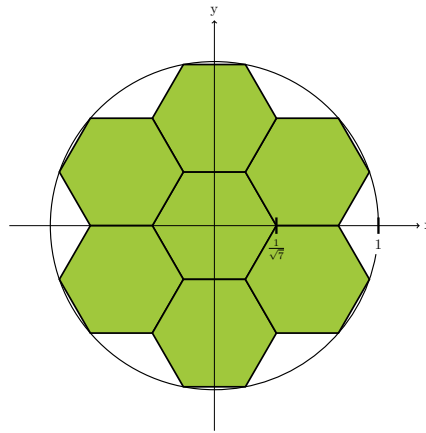


Fig. 3.6 Teselado hexagonal con un anillo.

Tabla 3.1: $W = T_5$, astigmatismo primario a 45° .

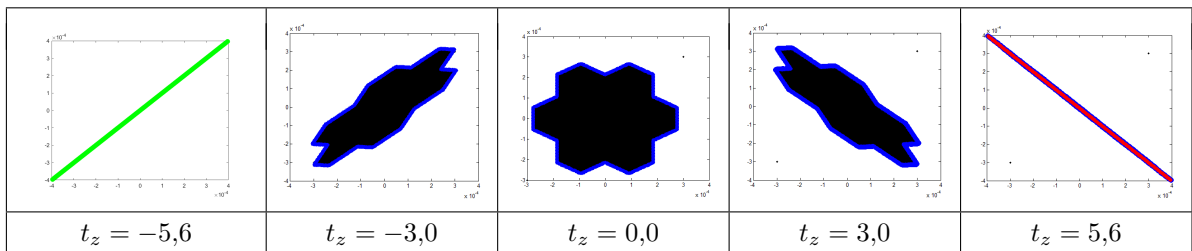


Tabla 3.2: $W = T_6$, astigmatismo primario a 0° .

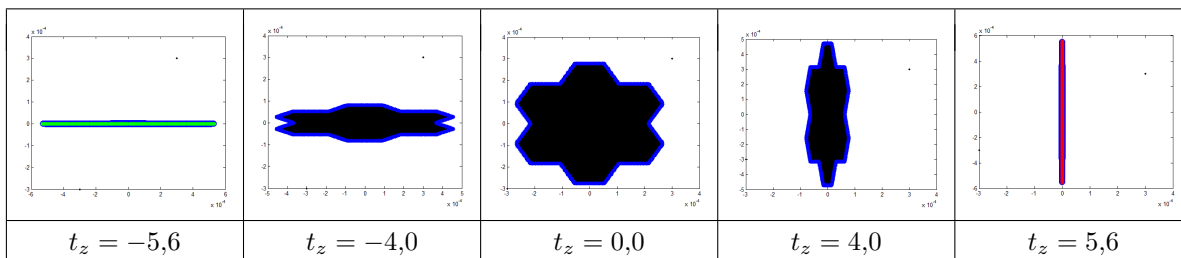


Tabla 3.3: $W = T_7$, coma vertical.

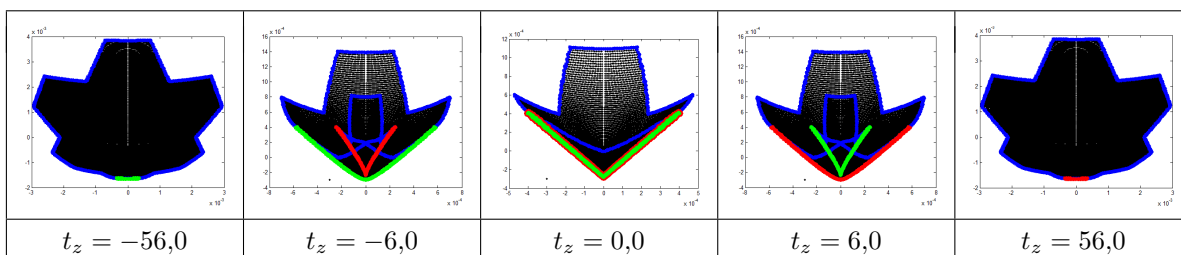


Tabla 3.4: $W = T_8$, coma horizontal.

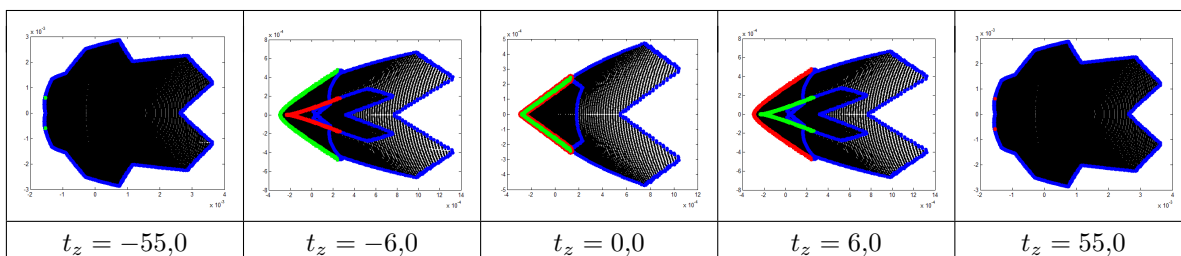


Tabla 3.5: $W = T_9$, trébol vertical.

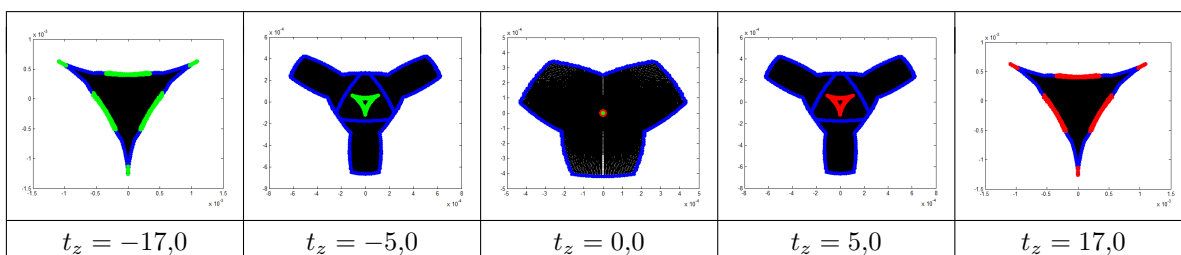


Tabla 3.6: $W = T_{10}$, trébol horizontal.

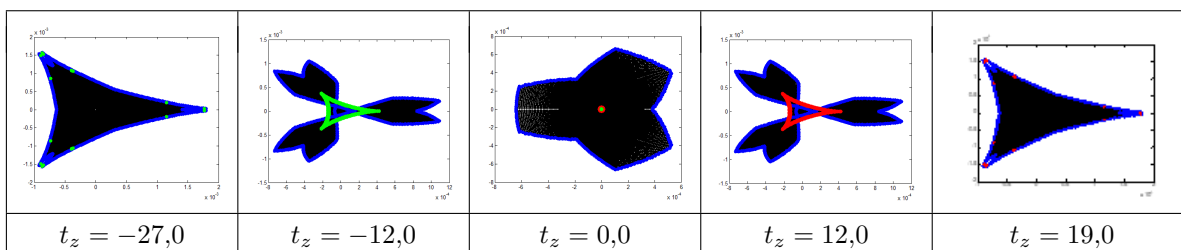


Tabla 3.7: $W = T_{11}$, esférica primaria.

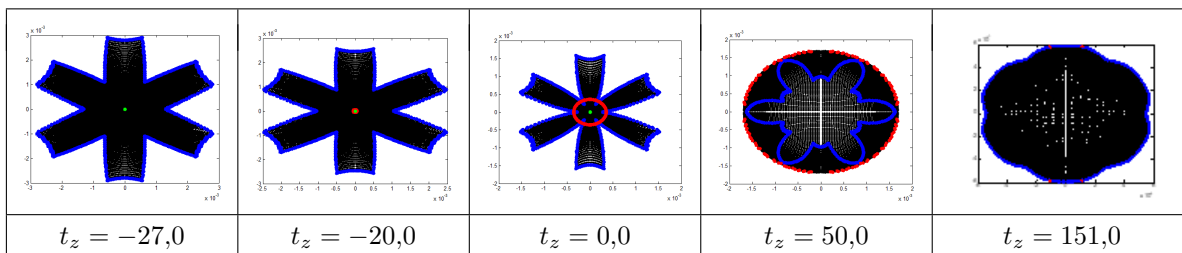


Tabla 3.8: $W = T_{12}$, astigmatismo secundario a 0° .

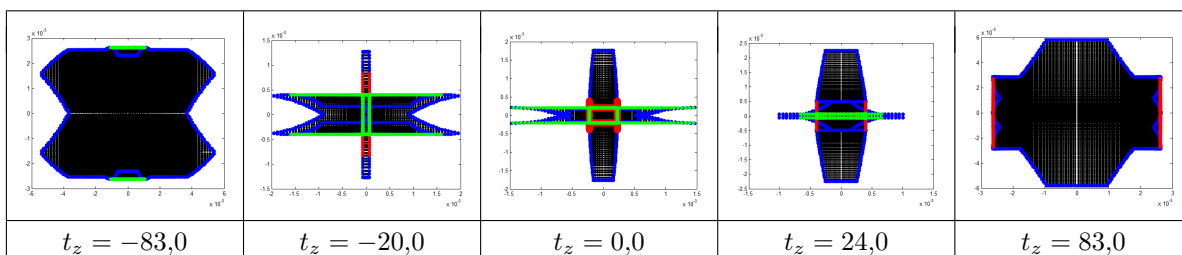
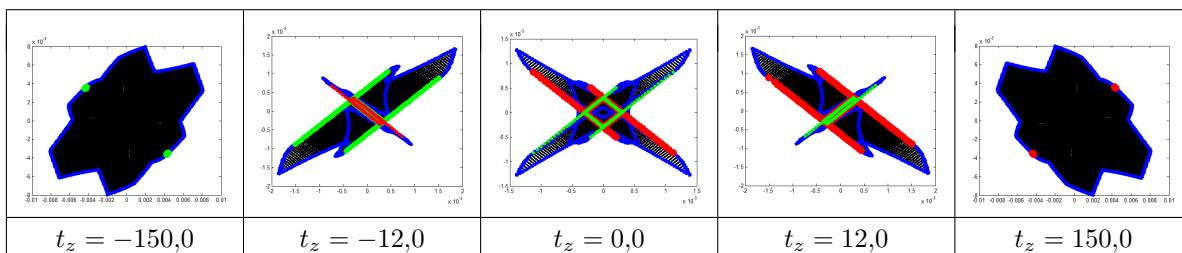


Tabla 3.9: $W = T_{13}$, astigmatismo secundario a 45° .



3.3.2. Teselado hexagonal anular compuesto de dos anillos

Utilizando los polinomios de la Tabla 2.3 como funciones de aberración con dominio descrito en la Figura 3.7 en las Tablas 3.10 - 3.20 se muestra que los bordes del diagrama de manchas están compuestos por los rayos marginales y la cáustica.

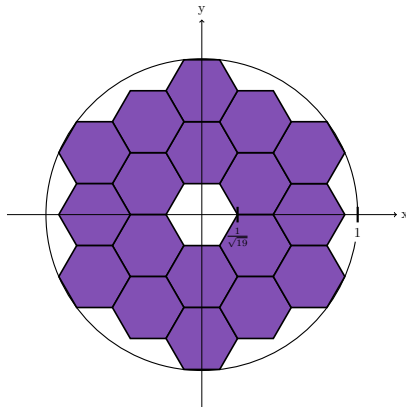


Fig. 3.7 Teselado hexagonal anular con dos anillos.

Tabla 3.10: $W = W_5$, astigmatismo primario a 45° .

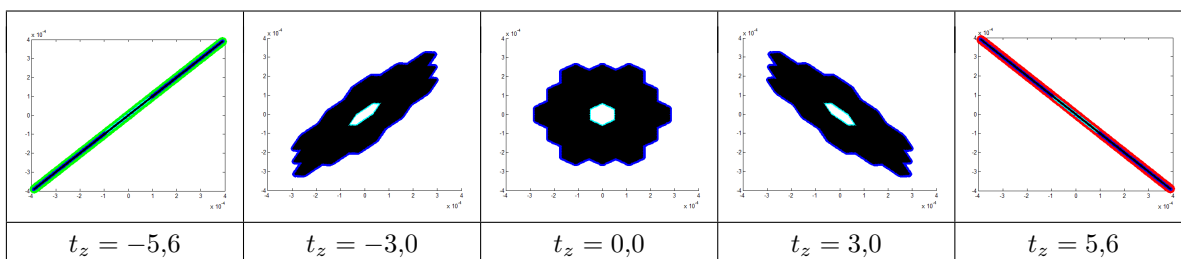


Tabla 3.11: $W = W_6$, astigmatismo primario a 0° .

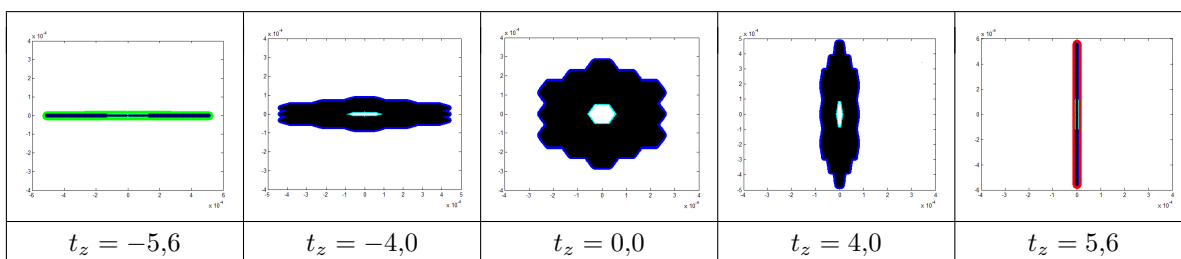


Tabla 3.12: $W = W_7$, coma primaria vertical.

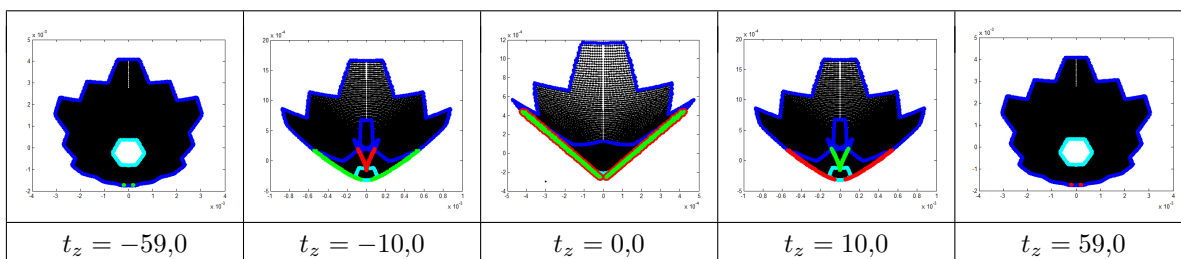


Tabla 3.13: $W = W_8$, coma primaria horizontal.

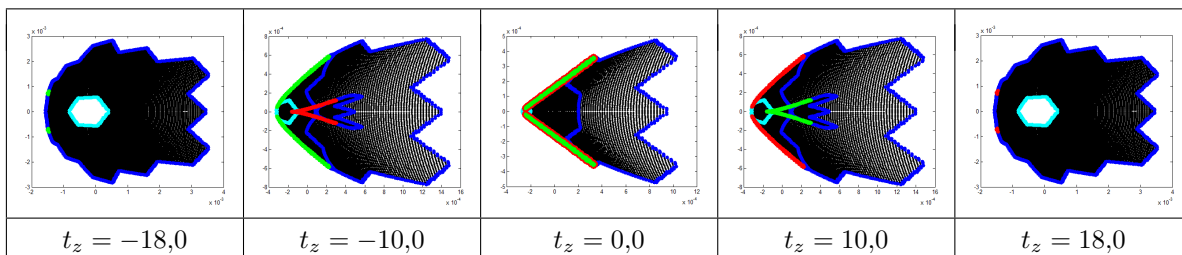


Tabla 3.14: $W = W_9$, trébol vertical.

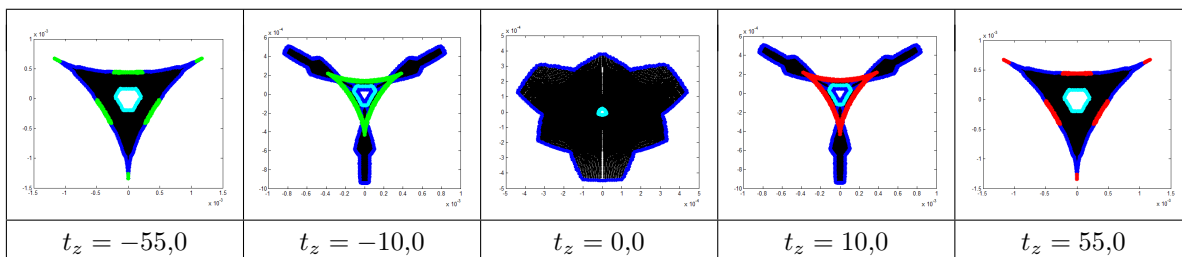


Tabla 3.15: $W = W_{10}$, trébol horizontal.

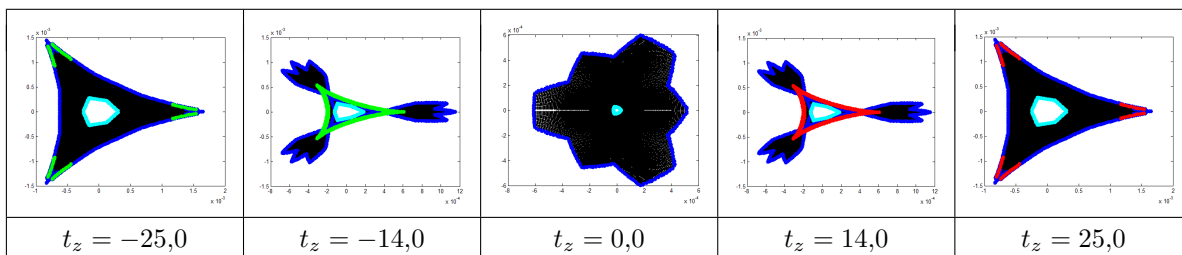


Tabla 3.16: $W = W_{11}$, esférica primaria.

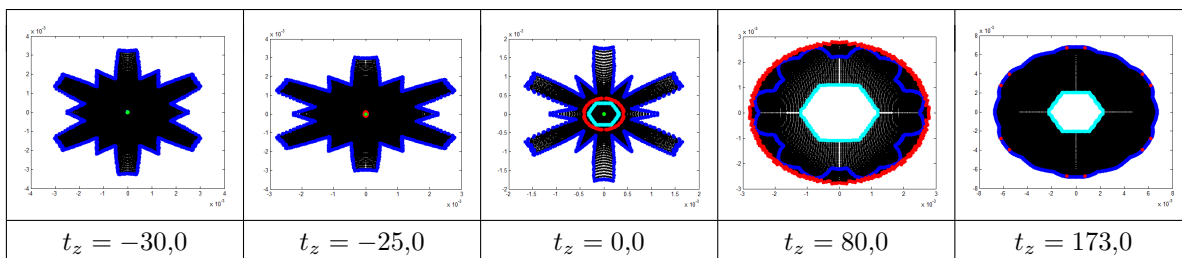


Tabla 3.17: $W = W_{12}$, astigmatismo secundario a 0° .

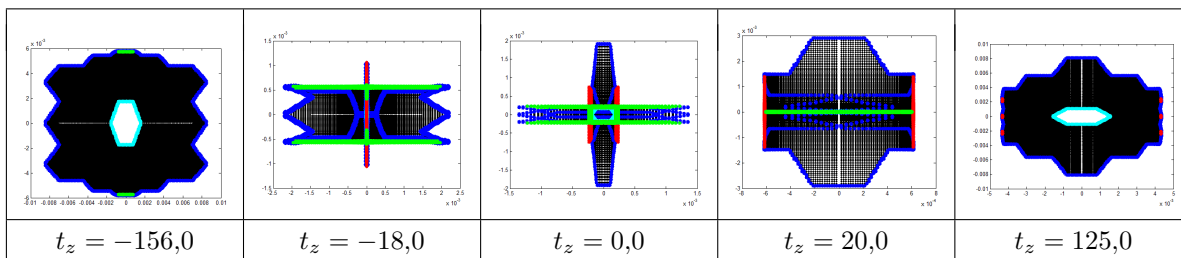


Tabla 3.18: $W = W_{13}$, astigmatismo secundario a 45° .

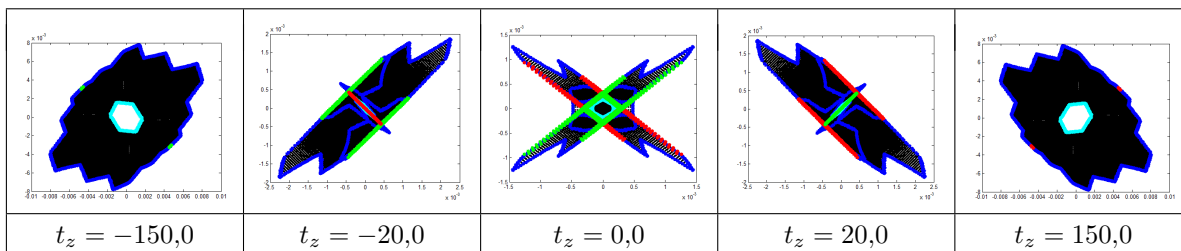


Tabla 3.19: $W = W_{14}$, trébol de 4 hojas vertical.

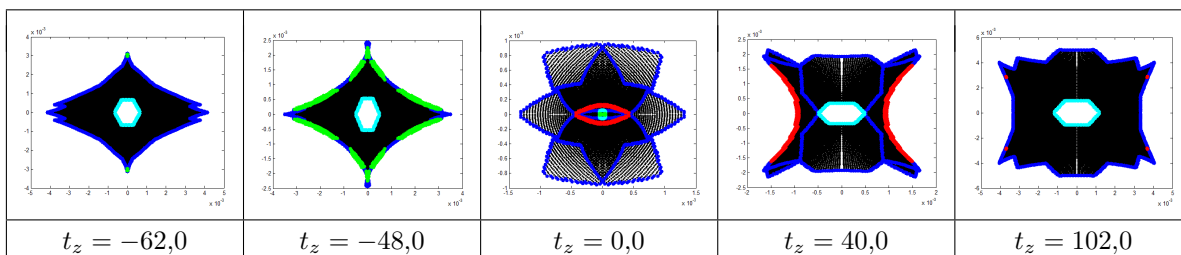
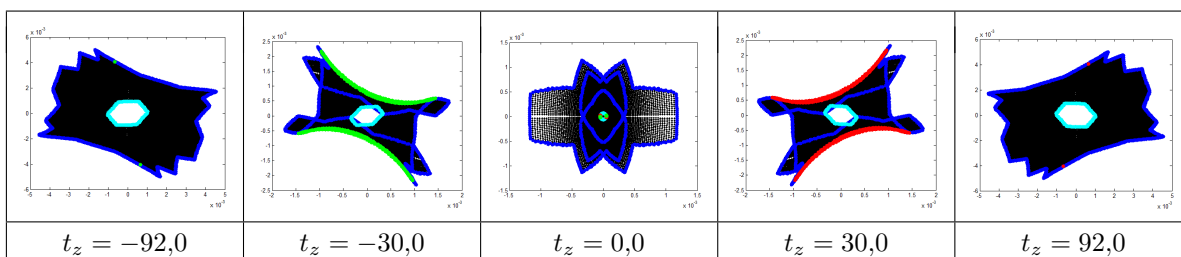


Tabla 3.20: $W = W_{15}$, trébol de 4 hojas oblicuo.



3.3.3. Teselado hexagonal anular compuesto de tres anillos

Utilizando los polinomios de la Tabla 2.4 como funciones de aberración con dominio descrito en la Figura 3.8 en las Tablas 3.21 - 3.31 se muestra que los bordes del diagrama de manchas están compuestos por los rayos marginales y la cáustica.

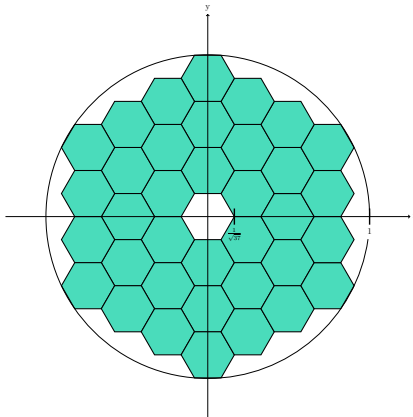


Fig. 3.8 Teselado hexagonal anular con tres anillos.

Tabla 3.21: $W = K_5$, astigmatismo primario a 45° .

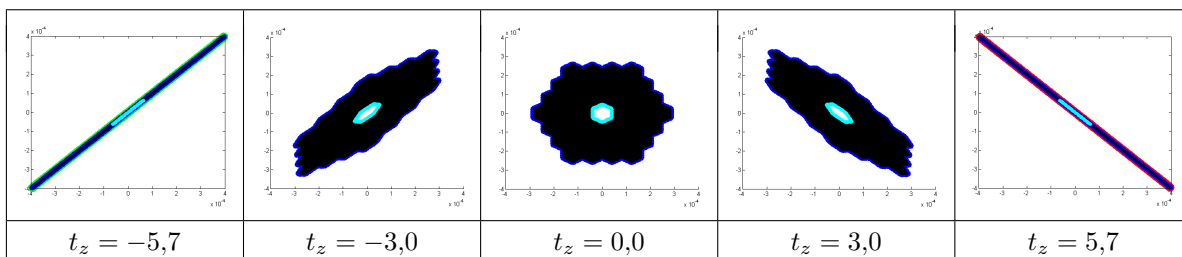


Tabla 3.22: $W = K_6$, astigmatismo primario a 0° .

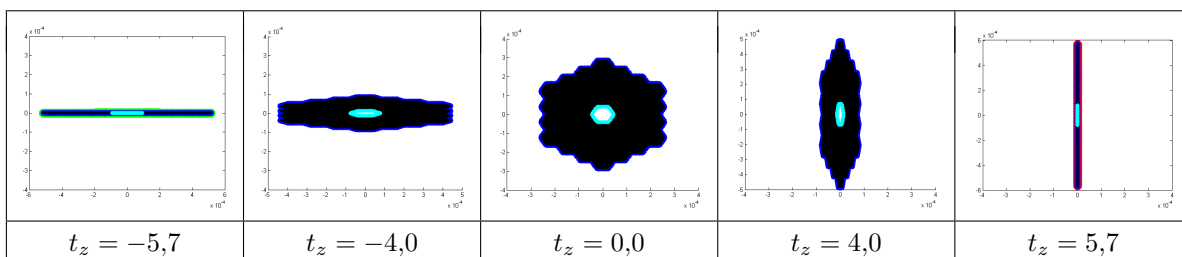


Tabla 3.23: $W = K_7$, coma vertical.

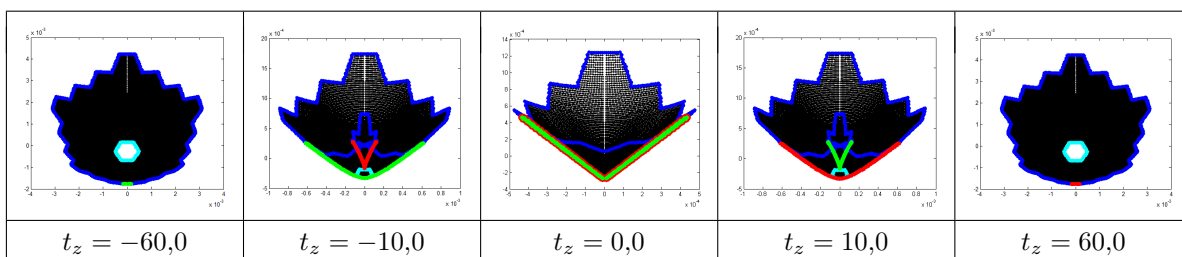


Tabla 3.24: $W = K_8$, coma horizontal.

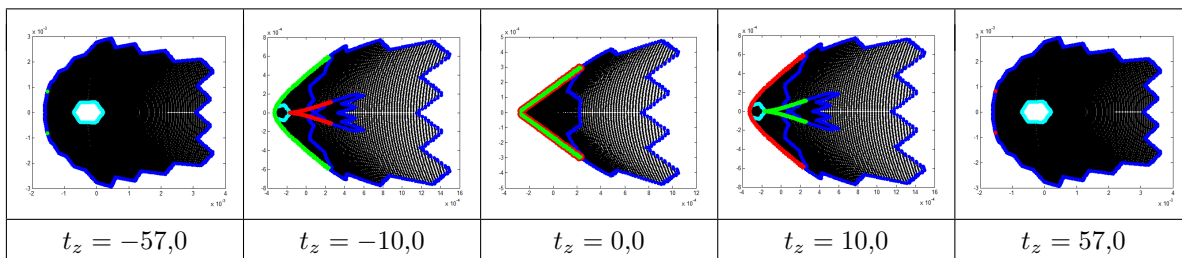


Tabla 3.25: $W = K_9$, trébol vertical.

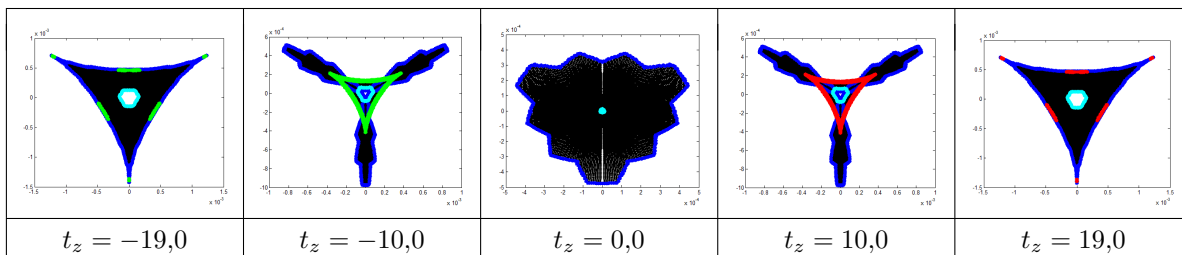


Tabla 3.26: $W = K_{10}$, trébol horizontal.

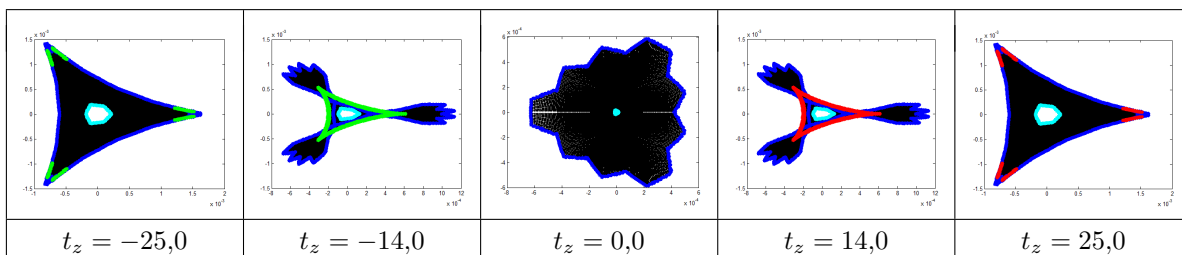


Tabla 3.27: $W = K_{11}$, esférica primaria.

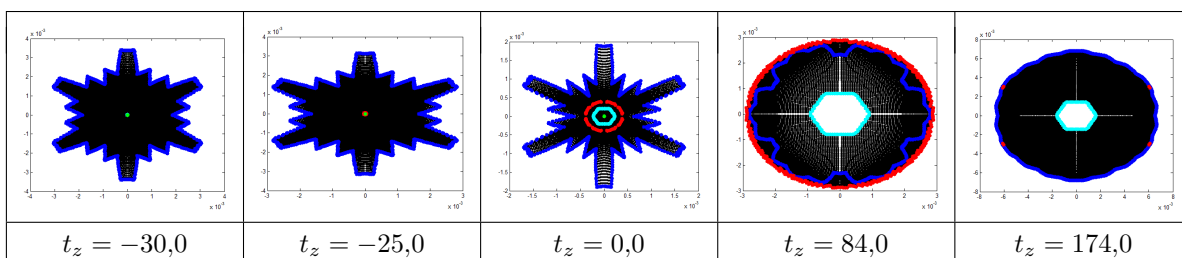


Tabla 3.28: $W = K_{12}$, astigmatismo secundario a 0° .

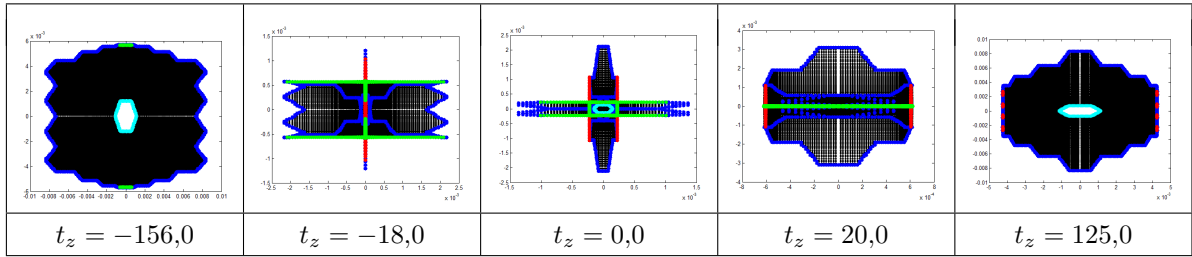


Tabla 3.29: $W = K_{13}$, astigmatismo secundario a 45° .

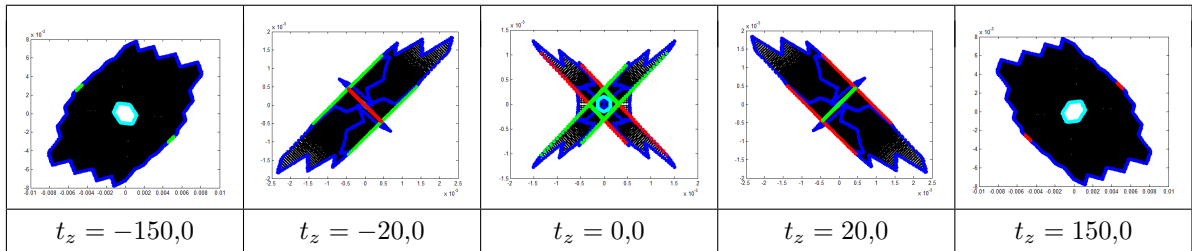


Tabla 3.30: $W = K_{14}$, trébol de 4 hojas vertical.

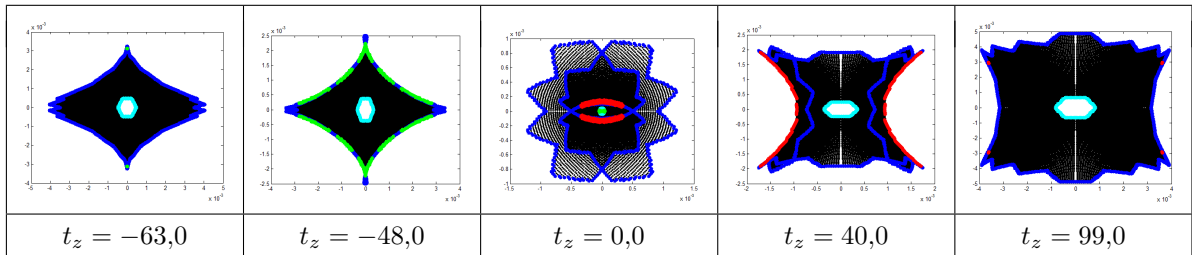
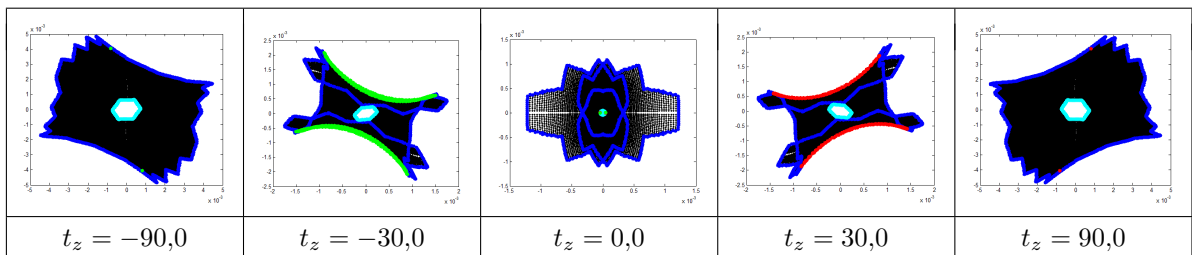


Tabla 3.31: $W = K_{15}$, trébol de 4 hojas oblicuo.



Notemos que los valores de t_z aparentan ser grandes suponiendo que $R = 1$ sin embargo esto es cuestión de cómo tomemos a nuestra función de aberración. La diferencia entre la esfera ideal y la función de aberración debe ser pequeña, así $W = \alpha Z_i$ debe cumplir que α debe ser muy pequeña y entonces siendo W definida de esta forma implica que la ecuación 3.4 es proporcional a α , entonces los valores de t_z están cerca del punto imagen Gaussiano y la aproximación es válida.

Hablando de los tres teselados, existen aberraciones rotadas, el astigmatismo a 45° y el astigmatismo a 0° primario y secundario, parecería que es la misma aberración rotada pero la forma no igual, esto debido a la forma del dominio pues no tiene simetría a 45° . Ocurre el mismo caso con la coma y el trébol a la falta de simetría a 90° . Así mismo si prestamos atención al astigmatismo, coma y trébol parecería que existe simetría respecto a t_z sin embargo esto no es cierto en general,

por ejemplo notemos la aberración esférica, el astigmatismo secundario a 0° y el trébol de 4 hojas vertical.

Se presentó una nueva prueba de los bordes del diagrama de manchas y se comprobó la teoría para tres distintos teselados, en el siguiente capítulo finalizamos con las conclusiones del trabajo.

Capítulo 4

Conclusiones

El proceso de obtención de polinomios hasta un grado arbitrario se simplifica mediante la implementación computacional, bastando introducir las ecuaciones del dominio al código, esto permite eliminar errores comunes asociados a cálculos manuales. Este enfoque no solo optimiza la precisión, así se facilita el estudio de configuraciones geométricas más complejas.

Además, se presentó una nueva demostración que confirma la composición de los bordes de un diagrama de manchas, formado por los rayos marginales y la cáustica, probado con una contención de conjuntos.

Finalmente como parte de la validación, se analizaron con éxito los diagramas de manchas de teselados hexagonales, verificando la composición de su frontera. Entre los tres nuevos dominios estudiados, dos corresponden a configuraciones utilizadas en telescopios astronómicos donde se utilizó como función de aberración los polinomios ortonormales generados.

Apéndice A

Programa

Como se mencionó en el capítulo 2 el programa está dividido en tres secciones, a continuación presentamos el código hecho en Python.

La función `zernike_cartesiano` genera los polinomios de Zernike en coordenadas cartesianas, y su programación queda descrita de la siguiente manera:

```
1      from sympy import *
2      import numpy as np
3
4
5      def zernike_cartesiano(k):
6          # Definir variables simbólicas
7          x, y, p, 0 = symbols('x y p 0')
8          n, m, b, s, p, 0 = symbols('n m b s p 0')
9
10
11         # Calcular n
12         n = floor(sqrt(2 * k - 1) + 0.5) - 1
13
14
15         # Calcular m
16         if n % 2 == 0:
17             m = 2 * floor((2 * k + 1 - n * (n + 1)) / 4)
18         else:
19             m = 2 * floor((2 * (k + 1) - n * (n + 1)) / 4) - 1
20
21
22         # Calcular b
23         b = (n - m) / 2
24
25
26         # Inicializar B
27         B = []
28
29
30         # Coeficientes de los polinomios radiales
31         for s in range(0, int(b)+1):
32             coeficiente = (
33                 (-1)**s * factorial(n - s)
34                 / (factorial(s) * factorial((n + m)/2 - s)
35                 * factorial((n - m)/2 - s))
36             )
37         B.append(coeficiente)
```

```

38
39
40     # Construir el polinomio radial
41     polinomio = 0
42     for i in range(0,int(b)+1):
43         polinomio += B[i-1] * p**(n - 2 * (i))
44
45
46     # Calcular Z_j
47     if m == 0:
48         Z = sqrt(n + 1) * polinomio
49         Z = Z.subs(p**2, x**2 + y**2)
50         return Z
51     elif k % 2 == 0:
52         Z = sqrt(2 * (n + 1)) * polinomio * cos(m * 0)
53     else:
54         Z = sqrt(2 * (n + 1)) * polinomio * sin(m * 0)
55
56
57     # Reescribir el seno o coseno con argumento largo
58     if k % 2 == 0:
59         T_0 = 1
60         T_1 = cos(0)
61
62         cbsv1 = [T_0, T_1]
63         if m < 2:
64             T = cbsv1[int(m)]
65             Z = Z.subs(cos(m * 0), T)
66         else:
67             for q in range(2, int(m) + 1):
68                 T = 2 * cos(0) * cbsv1[q - 1] - cbsv1[q - 2]
69                 cbsv1.append(T)
70             Z = Z.subs(cos(m * 0), T)
71     else:
72         U_0 = 1
73         U_1 = 2 * cos(0)
74         cbsv2 = [U_0, U_1 ]
75         if m < 3:
76             nuevoseno = cbsv2[m-1] * sin(0)
77             Z = Z.subs(sin(m * 0), nuevoseno)
78
79         else:
80             for q in range(2, int(m)):
81                 U = 2 * cos(0) * cbsv2[q - 1] - cbsv2[q - 2]
82                 U = expand(U)
83                 cbsv2.append(U)
84                 nuevoseno = U * sin(0)
85                 Z = Z.subs(sin(m * 0), nuevoseno)
86
87
88     # Simplificar la expresión
89     Z_c = simplify(Z.subs(cos(0), x / p))
90     Z_c = simplify(Z_c.subs(sin(0), y / p))
91     Z_c = simplify(Z_c.subs(p**2, x**2 + y**2))
92

```

93

```
return Z_c
```

La función `integral_dominio` dependerá de cada caso, dicha función que realiza la integral para el caso particular del teselado anular con tres anillos, ver Fig. 2.6, su programación se describe a continuación:

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50

```
def integral_dominio(f):
    # Definir las variables simbólicas
    x, y, a = symbols('x y a')
    a = 1 / sqrt(37)

    c1 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(-x - 4*a),
        sqrt(3)*(x + 7*a))), (x, Rational(-11,2)*a, -5*a))

    c2 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(-x - 5*a),
        sqrt(3)*(x + 6*a))), (x, Rational(-11,2)*a, -5*a))

    c3 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(-x - 6*a),
        sqrt(3)*(x + 5*a))), (x, Rational(-11,2)*a, -5*a))

    c4 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(-x - 7*a),
        sqrt(3)*(x + 4*a))), (x, Rational(-11,2)*a, -5*a))

    c5 = integrate(integrate(f, (y, -2*sqrt(3)*a,
        2*sqrt(3)*a)), (x, -5*a, -4*a))

    c6 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(-x - 6*a),
        sqrt(3)*(x + 6*a))), (x, -4*a, Rational(-7,2)*a))

    c7 = integrate(integrate(f, (y, Rational(-5,2)*sqrt(3)*a,
        Rational(5,2)*sqrt(3)*a)), (x, Rational(-7,2)*a,
        Rational(-5,2)*a))

    c8 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(-x - 5*a),
        sqrt(3)*(x + 5*a))), (x, Rational(-5,2)*a, -2*a))

    c9 = integrate(integrate(f, (y, -3*sqrt(3)*a,
        3*sqrt(3)*a)), (x, -2*a, -a))

    c10_1 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(x + a),
        sqrt(3)*(x + 4*a))), (x, -a, Rational(-1,2)*a))
    c10_2 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(-x - 4*a),
        -sqrt(3)*(x + a))), (x, -a, Rational(-1,2)*a))

    c11_1 = integrate(integrate(f, (y, Rational(1,2)*sqrt(3)*a,
        Rational(7,2)*sqrt(3)*a)), (x, Rational(-1,2)*a,
        Rational(1,2)*a))
    c11_2 = integrate(integrate(f, (y, Rational(-7,2)*sqrt(3)*a,
        Rational(-1,2)*sqrt(3)*a)), (x, Rational(-1,2)*a,
        Rational(1,2)*a))

    c12_1 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(-x + a),
        sqrt(3)*(-x + 4*a))), (x, Rational(1,2)*a,
        Rational(2,2)*a))
```

```

51     c12_2 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(x - 4*a),
52                               sqrt(3)*(x - a))), (x, Rational(1,2)*a,
53                               Rational(2,2)*a))
54
55     c13 = integrate(integrate(f, (y, -3*sqrt(3)*a,
56                               3*sqrt(3)*a)), (x, Rational(2,2)*a, Rational(4,2)*a))
57
58     c14 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(x - 5*a),
59                               sqrt(3)*(-x + 5*a))), (x, Rational(4,2)*a,
60                               Rational(5,2)*a))
61
62     c15 = integrate(integrate(f, (y, Rational(-5,2)*sqrt(3)*a,
63                               Rational(5,2)*sqrt(3)*a)), (x, Rational(5,2)*a,
64                               Rational(7,2)*a))
65
66     c16 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(x - 6*a),
67                               sqrt(3)*(-x + 6*a))), (x, Rational(7,2)*a, 4*a))
68
69     c17 = integrate(integrate(f, (y, -2*sqrt(3)*a,
70                               2*sqrt(3)*a)), (x, 4*a, 5*a))
71
72     c18 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(x - 4*a),
73                               sqrt(3)*(-x + 7*a))), (x, 5*a, Rational(11,2)*a))
74
75     c19 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(x - 5*a),
76                               sqrt(3)*(-x + 6*a))), (x, 5*a, Rational(11,2)*a))
77
78     c20 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(x - 6*a),
79                               sqrt(3)*(-x + 5*a))), (x, 5*a, Rational(11,2)*a))
80
81     c21 = integrate(integrate(f, (y, sqrt(3)*(x - 7*a),
82                               sqrt(3)*(-x + 4*a))), (x, 5*a, Rational(11,2)*a))
83
84
85     # Sumar todas las integrales
86     c = (c1 + c2 + c3 + c4 + c5 + c6 + c7 + c8 + c9 + c10_1 + c10_2
87         + c11_1 + c11_2 + c12_1 + c12_2 + c13 + c14 + c15 + c16
88         + c17 + c18 + c19 + c20 + c21)
89
90
91     return c

```

Finalmente, se presenta el programa que realiza el proceso de ortonormalización:

```

1     q, A, y, x = symbols('q A y x')
2
3     # Inicializar variables
4     q = 15
5     A = integral_dominio(1)
6     H = [1]
7
8
9     for i in range(1, q):
10        # Coeficientes
11        C = []
12

```

```

13     for k in range(i-1):
14         c = -1 / A * (integral_dominio(zernike_cartesiano(i + 1) * H[k]))
15         C.append(simplify(c))
16
17         # Suma de los coeficientes y q-1 polinomios hexagonales
18         cH = 0
19         for k in range(i-1):
20             cH += H[k] * C[k]
21
22
23         g = cH + zernike_cartesiano(i + 1)
24
25         mod_g = sqrt((1 / A * (integral_dominio(g**2))))
26         h = simplify(g / mod_g)
27
28         # Agregar h a la lista H
29         H.append(h)

```

Apéndice B

Conceptos de \mathbb{R}^n

En este capítulo presentaremos conceptos necesarios para enunciar en la Proposición 3.2.1, estos son elementos presentados en un curso de cálculo vectorial. Comenzamos presentando definiciones.

Definición B.0.1: Bola abierta

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}^+$.

Una bola abierta en \mathbb{R}^n centrada en x de radio r , denotada por $B(x, r)$, es el conjunto de puntos tales que distan de x una distancia menor a r , es decir,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\}$$

donde $d(\cdot, \cdot)$ es una función distancia.

A partir de la bolas abiertas podemos definir un conjunto abierto, y con la definición de conjunto abierto podemos definir a los conjuntos cerrados.

Definición B.0.2: Conjunto abierto

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ si para todo $x \in A$ existe r tal que $B(x, r)$ esté totalmente contenida en A entonces decimos que A es un conjunto abierto.

Definición B.0.3: Conjunto cerrado

Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ será un conjunto cerrado si $\mathbb{R}^n \setminus B$ es abierto.

Ahora necesitamos distinguir entre puntos internos y puntos pertenecientes a la frontera de un conjunto, estos dos tipos de puntos nunca serán los mismos debido a su definición.

Definición B.0.4: Punto interior

Sea un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in U$. Decimos que x es un punto interior de U si existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x, r)$ está totalmente contenida en U .

Definición B.0.5: Frontera

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ será parte de la frontera de U , denotada por ∂U , si cualquier bola centrada en x tiene algún elemento de U y de $\mathbb{R}^n \setminus U$.

La cerradura de un conjunto la definimos como :

Definición B.0.6: Cerradura

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ la cerradura de U la definimos como:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall r \in \mathbb{R}^+ \quad B(x, r) \cap U \neq \emptyset\}$$

Entonces con lo anterior definido nos es posible probar la siguiente proposición.

Proposición B.0.1. *Sea U un conjunto, entonces $\partial U = \bar{U} \setminus \text{int}(U)$.*

Demostración. Probaremos con una doble contención de conjuntos, comenzamos probando:

$$\partial U \subset \bar{U} \setminus \text{int}(U) \tag{B.1}$$

Sea $x \in \partial U$ por definición cualquier bola centrada en x tiene elementos de U y su complemento, es decir, para toda $r \in \mathbb{R}^+$

$$B(x, r) \cap U \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B(x, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) \neq \emptyset$$

Así, para toda r se cumple $B(x, r) \cap U \neq \emptyset$, por lo tanto por definición x pertenece a \bar{U} .

Si x perteneciera a $\text{int}(U)$ tendríamos que existiría una r' tal que $B(x, r')$ estaría totalmente contenida en U y de esta forma $B(x, r') \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) = \emptyset$, pero esto es una contradicción a que x pertenezca a ∂U como supusimos.

Por lo tanto la contención B.1 se cumple.

Probemos la contención restante.

$$\bar{U} \setminus \text{int}(U) \subset \partial U \tag{B.2}$$

Sea $x \in \bar{U} \setminus \text{int}(U)$, entonces

$$x \in \bar{U} \quad \text{y} \quad x \notin \text{int}(U)$$

Como $x \in \bar{U}$ entonces para toda r positiva $B(x, r) \cap U \neq \emptyset$.

Así mismo como $x \notin \text{int}(U)$ entonces para toda r' se cumple $B(x, r') \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) \neq \emptyset$.

Entonces por las dos últimas líneas se cumple que $x \in \partial U$ y por lo tanto la contención B.2 se cumple. Finalmente concluimos que $\partial U = \bar{U} \setminus \text{int}(U)$ es cierta. \square

Es necesario definir un conjunto compacto, se pueden definir cubiertas para un conjunto y a partir de estas definir un conjunto compacto pero para nuestro caso requerimos menos profundidad y en el caso de \mathbb{R}^n se puede demostrar lo que tomaremos como definición en nuestro caso, este es el teorema de Heine-Borel-Lebesgue [15] (p. 217). A continuación definimos un conjunto acotado y posteriormente un conjunto compacto.

Definición B.0.7: Conjunto acotado

Sea U un conjunto de \mathbb{R}^n , lo llamaremos conjunto acotado si existe r tal que para un $x \in \mathbb{R}^n$ la bola centrada en x de radio r contiene totalmente a U .

Definición B.0.8: Conjunto compacto

Sea U un conjunto en \mathbb{R}^n , a U lo llamaremos compacto si es cerrado y acotado.

Proposición B.0.2. *Si U es compacto, entonces $\bar{U} = U$.*

Demostración. Es sencillo ver que todos los puntos de U pertenecen a su cerradura, entonces tenemos que

$$U \subset \bar{U} \tag{B.3}$$

Nos resta probar la siguiente contención

$$\overline{U} \subset U \tag{B.4}$$

Sea $x \in \overline{U}$, supongamos que $x \notin U$, entonces $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$. Como U es cerrado entonces su complemento es abierto, así x es un punto interior de $\mathbb{R}^n \setminus U$, entonces existe una r positiva tal que

$$B(x, r) \cap U \neq \emptyset \tag{B.5}$$

pero esto contradice que x pertenezca a \overline{U} , por lo tanto la contención B.4 es verdadera y concluimos que si U es compacto entonces $\overline{U} = U$. \square

Ahora enunciamos un teorema de [12] (p. 166).

Teorema B.0.1. *La imagen de un conjunto compacto bajo un mapeo continuo es un conjunto compacto.*

Ahora también hacemos mención del teorema de la función inversa, [16] (p. 33), utilizado en la demostración de la Proposición 3.2.1.

Teorema B.0.2. *Se supone que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable con continuidad en un conjunto abierto que contiene a , y $\det f'(a) \neq 0$. Entonces existe un conjunto abierto V que contiene a a y un conjunto abierto W que contiene $f(a)$ tales que $f : V \rightarrow W$ tiene una inversa continua $f^{-1} : W \rightarrow V$ que es diferenciable y para todo $y \in W$ satisface*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

Hemos presentado todos los elementos utilizados en la Sección 3.2 y podemos mencionar que la Proposición 3.2.1 es válida para cualquier transformación continua, con lo que T definida con las ecuaciones 3.1 y 3.2 es un caso válido.

Bibliografía

- [1] V. Mahajan and D. Guang-ming. Orthonormal polynomials for hexagonal pupils. OPTICS LETTERS, 31(16):2462–2464, 2006.
- [2] C. Ferreira, J. López, R. Navarro, and E. Pérez. Zernike-like systems in polygons and polygonal facets. Applied Optics, 54(21):6575–6583, 2015.
- [3] Edward O’Neill. Introduction to statistical optics. Dover publicarions, Inc., 1st edition, 1992.
- [4] Y. Zhang and A. Xian. Orthonormal polynomials in segmented optical pupils. Optik - International Journal for light and electron optics, 197(163003):2462–2464, 2019.
- [5] D. Malacara. Optical Shop Testing. John Wiley and Sons, Inc, 3rd edition, 2007.
- [6] G. Arfken, H. Weber, and F. Harris. MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS A Comprehensive Guide. Elsevier, 7th edition, 2013.
- [7] S. Axler. Linear Algebra Done Right. Springer, 3rd edition, 2015.
- [8] V. Mahajan and D. Guang-ming. Orthonormal polynomials in wavefront analysis: analytical solution. Journal of Optical Society of America, 24(9):2994–3016, 2007.
- [9] A. Cordero-Dávila, D. Reyes-Olguín, and J. Gonzalez-García. Borders of spot diagrams are always caustic surfaces and/or marginal rays. Applied Optics, 61(6):c20–c26, 2022.
- [10] G. Silva-Ortigoza, M. Marciano-Melchor, O. Carvente Muñoz, and R. Silva-Ortigoza. Exact computation of the caustic associated with the evolution of an aberrated wavefront. Journal of Optics: Pure and Applied Optics, 4:358–365, 2002.
- [11] P. S. Theocaris and J. G. Michopoulos. Generalization of the theory of far-field caustics by the catastrophe theory. Applied Optics, 21:1080–1091, 1982.
- [12] James R. Munkres. Topology. Massachusetts Institute of Technology, 2nd edition, 2000.
- [13] J. Gonzalez-García, A. Cordero-Dávila, and D. Reyes-Olguín. Proof that spot diagram borders are always caustic curves and/or marginal rays ii: annular (circular and elliptical) and single hexagonal exit pupils. Applied Optics, 61(8):1876–1884, 2022.
- [14] A. Cordero-Dávila, J. Gonzalez-García, and S. Carmona-Tomas. Proof that spot diagram borders are always caustic curves and/or marginal rays iii: segmented mirror in hexagons and trapezoids. Applied Optics, 63(20):5395–5402, 2024.
- [15] F. Casarrubias and A. Tamariz. Elementos de la topología general. Facultad de Ciencias UNAM, 1st edition, 2015.
- [16] M. Spivak. Calculo en variedades. Editorial Reverté, 1st edition, 1988.