



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ESTRECHEZ DE GRUPOS TOPOLÓGICOS LIBRES

T E S I S

Que para obtener el Grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

DANIEL JIMÉNEZ JIMÉNEZ

Director de Tesis:

DR. OLEG OKUNEV

Puebla, Pue.

Diciembre 2014



DR. JOSÉ ENRIQUE BARRADAS GUEVARA
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

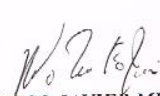
DANIEL JIMÉNEZ JIMÉNEZ

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 4 de DICIEMBRE de 2014, con la tesis titulada:

"Estrechez de grupos topológicos libres"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E
H. Puebla de Z. a 5 de diciembre de 2014


DR. FRANCISCO JAVIER MENDOZA TORRES
COORDINADOR DEL POSTGRADO
EN MATEMÁTICAS.



Ccp. Archivo
DR. JEBG/may

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7500 y 7552

Dedicatoria

A mis padres Héctor Jiménez García
y Elvira Jiménez Jiménez
quienes son mi ejemplo de vida.

Y a mi novia
Itzel Andrea Salmoran Oyosa
la mujer que amo.

Agradecimientos

A Dios...

Porque él es quien sustenta mi vida. Que en momentos cuando las teorías parecen muy complejas derrama sobre mí de su Conocimiento y Sabiduría para entender y comprender, y de esta forma poder contemplar cuán complejo es el mundo en que vivimos pero que hoy ha dado esta oportunidad a hombres comunes como nosotros de ver y contribuir en las maravillas de la naturaleza.

”Tuya es, oh Jehová, la magnificencia y el poder, la gloria, la victoria y el honor; porque todas las cosas que están en los cielos y en la tierra son tuyas. Tuyo, oh Jehová, es el reino, y tú eres excelso sobre todos. Las riquezas y la gloria proceden de ti, y tú dominas sobre todo; en tu mano esta la fuerza y el poder, y en tu mano el hacer grande y dar poder a todos.

1 Crónicas 29:11-12”

A mis Padres y Hermanos...

A ustedes, papá Héctor Jiménez García y mamá Elvira Jiménez Jiménez, que continuamente me ayudaron a crecer y a ser lo que hoy soy, y que nunca me dejaron sin un consejo para educarme. A ustedes que compartieron desvelos, luchas, logros, fracasos y nunca me dejaron caer. A ustedes, papá y mamá, porque me enseñaron que en la vida siempre se debe luchar; que empezar desde cero y llegar tan alto es de valientes, de quienes están dispuestos no sólo a dar una parte sino a no tener nada. A ustedes, mis hermanos, que siempre estuvieron a mi lado para fortalecerme. A ustedes, mis más sinceros agradecimiento

A Itzel Andi...

A ti, Itzel Andrea Salmoran Oyosa, por ser mi ayuda idónea,

la mujer que amo. Que siempre estuviste pendiente de mi, y te preocupabas por verme bien, gracias por tus cuidados. A ti, que estuviste en los momentos más difíciles escuchandome, desvelandote, enojandote, riendo y llorando, gracias por todo tu apoyo. Que en los momentos más desalentadores tus consejos nunca me hacían falta. A ti, mi Itzel Andi, gracias por hacerme muy feliz, por un día haber llegado a mi vida, te amo.

A mis Amigos...

Por el apoyo recibido durante la carrera, la confianza brindada en los momentos difíciles y especiales. Mis sinceros y profundos agradecimientos.

A mi Asesor...

A usted que con dedicación me brindó sus conocimientos en aquellos momentos que fui afortunado en tenerlo como profesor. A usted que me dio la oportunidad de trabajar a su lado en el desarrollo de este proyecto. Por su ejemplo de ética y profesionalismo con el cual he logrado terminar esta carrera profesional. Gracias.

A Conacyt...

Por haberme aceptado como miembro para ser apoyado económicamente durante el período de dos años que sin duda fueron de gran ayuda para mi sustento. Mis sinceros agradecimientos.

Introducción

La Topología de Conjuntos, como su nombre lo indica, se encuentra en estrecha relación con la Teoría de Conjuntos. Así, la definición de topología y de los conceptos que de ella se derivan se establecen en términos de uniones, intersecciones, diferencias y complementos de conjuntos.

La relación es más profunda. Conceptos conjuntistas, tales como la propiedad de la intersección finita proporcionan una forma equivalente del Teorema de Teichmüller-Tukey (ver Lema 3.3.25), el cual se establece en términos de las llamadas familias de carácter finito (Definición 3.3.24), sirve de base para una demostración del famoso Teorema de Tychonoff.

La aritmética cardinal de la Teoría de Conjuntos tiene presencia en topología. La cardinalidad de un conjunto, es quizá la fuente de cardinales más comunmente estudiada, obteniendo conceptos sobre conjuntos en topología. Por ejemplo:

Una función cardinal es una función f definida sobre la clase de los espacios topológicos a la clase de los números cardinales, que tiene la propiedad que si X es homeomorfo a Y , entonces $f(X) = f(Y)$. Algunas de estas funciones cardinales a estudiar son *el peso*, *el peso red*, *la densidad*, y *la estrechez* (ver Definición 1.1.26). Cuando se amplía el estudio de las funciones cardinales a los llamados Grupos Topológicos se encuentran resultados interesantes.

Continuando con esta línea, A. Markov en [6] introdujo un nuevo concepto que primero fue estudiado sistemáticamente por M. Grave en [2]:

Un Grupo Topológico Libre de un espacio de Tychonoff es una triada (G, X, σ) que consiste de un grupo de Hausdorff G , un espacio de Tychonoff X , y un mapeo continuo σ de X en G que satisface las siguientes dos condiciones:

- 1) la imagen $\sigma(X)$ genera topológicamente al grupo G ;

-
- 2) para cada mapeo continuo $f : X \longrightarrow H$, donde H es un grupo topológico, existe un homomorfismo continuo $\tilde{f} : G \longrightarrow H$ tal que $\tilde{f} \circ \sigma = f$.

Denotamos a la triada (G, X, σ) por $F(X)$. Los elementos del grupo $F(X)$ son llamado *palabras irreducibles* (ver Definición 2.1.3). Como el grupo topológico libre $F(X)$ es generado por su subconjunto X , es de preguntarse qué propiedades de $F(X)$ corresponden a las de X , por ejemplo, si el espacio X es métrizable, compacto, o es un K_ω -espacio (ver Definición 3.2.1) qué podemos decir de su grupo topológico libre. Estas propiedades son conocidas también como propiedades inductivas.

El **objetivo general** de este trabajo es estudiar el valor de la estrechez de los grupos topológicos libres sobre espacios que son K_ω -espacio, K -espacios, y metrizable. Para esto nos enfocaremos en tres objetivos particulares:

1. El primer objetivo es mostrar que si X es un K_ω -espacio (en particular un espacio compacto) entonces $F(X)$ es un K_ω -espacio.
2. Como segundo objetivo estudiaremos la estrechez de $F(X)$ cuando el espacio X es un K_ω -espacio (en particular compacto), dando como resultado que $t(F(X)) = t(X)$.
3. Por último, nuestro objetivo será demostrar que si X es un espacio métrico entonces la estrechez de $F(X)$ no excede al cardinal numerable ω .

Por esto, el trabajo esta dividido en tres capítulos.

En el capítulo I de preliminares se proporciona conceptos y resultados que serán empleados a lo largo del trabajo. Por ejemplo los *axiomas de separación*, el *espacio cociente* y la *suma topológica* (Definición 1.1.11) son fundamentales en este

trabajo.

En el capítulo II enunciamos la definición de grupo libre y grupo topológico libre de un espacio X , así como algunas propiedades de mayor relevancia. La estructura algebraica del grupo topológico libre es la del grupo libre, sin embargo la topología de $F(X)$ es más complicada de visualizar. Por lo que en este capítulo se enuncia un resultado que nos permita relacionar la topología de grupo topológico con la de grupo topológico libre (Proposición 2.1.8). Así como también se incluye el Teorema (2.2.3) de Arhangel'skii en el que se muestra que los subconjuntos X y $F_n(X)$ son cerrados en el grupo topológico libre. Concluyendo este capítulo con una proposición que nos proporciona una base de vecindades de un punto $g \in F(X)$ (Proposición 2.2.6).

Finalmente, en el capítulo III nos interesamos en primera instancia en las propiedades de los espacios K_ω , así como algunos resultados interesantes del grupo topológico libre cuando este espacio es K_ω . En segundo lugar nos interesamos en el estudio de la estrechez del grupo topológico libre de un K_ω -espacio (en particular de un espacio compacto), resultando en ambos casos que $t(F(X)) = t(X)$ (Teoremas 3.3.10 y 3.3.12). Y por último, nuestro interés será en el estudio de resultados sobre la estrechez cuando el espacio de sus generadores es metrizable separable o discreto, obteniendo que en cualquiera de estos casos la estrechez del grupo topológico libre no excede al cardinal \aleph_0 (Teorema 3.3.33).

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares	1
1.1. Topología General	1
1.1.1. La Topología Cociente	6
1.1.2. Axiomas de Separación	6
1.1.3. Espacios Compactos	8
1.1.4. Funciones Cardinales	9
2. Grupos Topológicos Libres	13
2.1. Definición y Propiedades Básicas	13
2.2. Conjuntos Abiertos en $F(X)$	20
3. Estrechez en Grupos Topológicos Libres	28
3.1. Cubiertas Generadoras	28
3.2. Espacios K_ω y K -espacios	32
3.3. Estrechez en Grupos Topológicos Libres . . .	46
3.3.1. Estrechez en Espacios Métricos	55
Conclusión	69
Bibliografía	71
Simbología	73

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo enunciaremos, sin demostración, aquellos resultados que necesitaremos en los capítulos posteriores. Las demostraciones de tales resultados podremos encontrarlas en las referencias que allí daremos. Mencionaremos algunos resultados de Topología General, entre ellos el Teorema de Wallace que usaremos en la demostración de propiedades de K_ω -espacio.

1.1. Topología General

Esta sección tendrá como objetivo mostrar resultados de Topología General sobre espacios con ciertas propiedades (axiomas de separación, compacidad, funciones cardinales). Iniciamos este primer apartado con la definición de una topología sobre un conjunto X .

Definición 1.1.1 (Topología). *Un espacio topológico es un par (X, τ) que consiste de un conjunto X y una familia τ de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. Los conjuntos \emptyset, X son elementos de la familia τ .
2. Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V$ pertenece a τ .
3. Si $\mathcal{A} \subset \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

El conjunto X es llamado *espacio*, los conjuntos que pertenecen a τ son llamados *conjuntos abiertos*, y τ es llamado la *topología* de X .

Enseguida generamos topologías a través de unas familias de subconjuntos con ciertas características. A saber.

Definición 1.1.2 (Base). Una familia \mathcal{B} de subconjuntos de X que satisfacen:

1. Para cada $x \in X$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.
2. Para cada pareja $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, y cada $x \in B_1 \cap B_2$ existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

es llamada *base* en el conjunto X . Los elementos de \mathcal{B} son llamado conjuntos básicos.

Si consideramos los subconjuntos de X los cuales son uniones arbitrarias de elementos de la base, entonces la familia de estos conjuntos resulta ser una topología de X llamada la *topología generada por la base*.

Por otra parte, diremos que una base en un espacio topológico X genera la topología del espacio, si cada elemento de la topología es unión arbitraria de elementos de la base.

Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$. Un punto $x \in X$ es llamado *punto cerradura* del conjunto A , si para cada $U \in \tau, U \cap A \neq \emptyset$. Denotaremos por \overline{A} al conjunto de todos los puntos cerradura del conjunto A . Un punto $x \in X$ es llamado un *punto límite* o un *punto de acumulación* del conjunto A si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. El conjunto de todos los puntos de acumulación del conjunto A es denotado por A^d . Los puntos en $A \setminus A^d$ son llamados *puntos aislados* del conjunto A . Un punto x es un *punto aislado en el espacio X* si, y sólo si, los conjuntos unipuntuales $\{x\}$ son abiertos. Se ve que $\overline{A} = A \cup A^d$ para cada $A \subset X$.

Un subconjunto $A \subset X$ de un espacio topológico X se dirá que es *denso* en X si para cada abierto no vacío U en X , $U \cap A \neq \emptyset$, o equivalentemente, $\overline{A} = X$. Si el conjunto

denso A es numerable, entonces decimos que X es un espacio *separable*.

Observación 1.1.3. Sean $A \subset B \subset X$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$ y $A^d \subset B^d$. Además, si $A \subset X$ y $B \subset X$ son subconjuntos de X , entonces $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Definición 1.1.4 (Subespacio). Sea X un espacio topológico, $Y \subset X$. Definimos una familia de subconjuntos de Y mediante:

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\},$$

donde τ es la topología de X . Esta familia es una topología en el conjunto Y , llamada la *topología de subespacio* de Y en el espacio X , y diremos que Y con esta topología es un *subespacio del espacio* del espacio X .

Haremos algunas notaciones. Si tenemos un subespacio Y de un espacio topológico X , y un subconjunto $A \subset Y$, el conjunto \overline{A}^Y significará la cerradura del conjunto A en el subespacio Y . Para que no haya confusiones, cuando estemos considerando la cerradura en el subespacio y en el espacio, escribiremos \overline{A}^Y , y \overline{A}^X , respectivamente. Existe una relación entre la cerradura de un conjunto A en un subespacio Y , y la cerradura del conjunto A en el espacio X . La demostración de la siguiente Proposición lo encontramos en [13] Proposición 2.2.1

Proposición 1.1.5. Sea X un espacio topológico y Y un subespacio de X . El conjunto $A \subset Y$ es cerrado en Y si, y sólo si, $A = Y \cap F$, donde F es un subconjunto cerrado en X . Además, $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.

Sea X un espacio topológico. Diremos que una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de elementos del espacio *converge* a un punto $x_0 \in X$, si para cada conjunto abierto U que contenga a x_0 existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ los puntos x_n pertenecen a U .

Existe una relación interesante entre la cerradura de conjuntos y conjuntos abiertos como lo muestra el siguiente ejemplo cuya demostración es solo cuestión de conjuntos.

Ejemplo 1.1.6. Sea X un espacio topológico. Para cada conjunto abierto U y cada subconjunto $A \subset X$ se tiene $\overline{U \cap A} = \overline{U} \cap \overline{A}$.

Ahora, mencionamos algunas de las propiedades de los mapeos sobre espacios topológicos.

Sean (X, τ) y (Y, τ_1) dos espacios topológicos. Un mapeo f de X en Y es llamado *continuo*, si la imagen inversa de cualquier conjunto abierto en el espacio Y bajo el mapeo f es un conjunto abierto en el espacio X . El siguiente criterio sobre continuidad podemos encontrarlo en [13] Proposición 1.4.1.

Proposición 1.1.7. Sea f un mapeo de un espacio topológico X en un espacio topológico Y . Entonces, f es continuo si y sólo si para cada $A \subset X$ se cumple $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Podemos generar funciones continuas a través de funciones continuas.

Proposición 1.1.8. Sea $f : X \rightarrow Z$ un mapeo continuo de un espacio X en un espacio Z . Si $Y = f(X)$ es un subespacio de Z , entonces el mapeo $f : X \rightarrow Y$ es también continuo.

Ahora introducimos dos conceptos importantes sobre mapeos continuos. Un mapeo continuo $f : X \rightarrow Y$ es llamado *cerrado (abierto)* si para todo conjunto $A \subset X$ cerrado (abierto) la imagen $f(A)$ es cerrada (abierto) en Y .

Definición 1.1.9 (Homeomorfismo). Un mapeo continuo $f : X \rightarrow Y$, de un espacio X a un espacio Y , es llamado *homeomorfismo* si f es biyectivo y el mapeo inverso $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es también continuo. En tal caso diremos que X es homeomorfo a Y y lo denotaremos por $X \cong Y$.

Si existe un homeomorfismo entre espacios topológicos diremos que los espacios son homeomorfos. Si un mapeo $f : X \rightarrow Y$ es inyectivo también nos referiremos a él como un mapeo *uno a uno*, y si el mapeo es suprayectivo a veces diremos también que f mapea X *sobre* Y . El siguiente resultado sobre homeomorfismos se encuentra demostrado en [13] Proposición 1.4.18.

Proposición 1.1.10. Para un mapeo uno a uno f de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) El mapeo f es un homeomorfismo.
- ii) El mapeo f es cerrado.
- iii) El mapeo f es abierto.
- iv) El conjunto $f(A)$ es cerrado en Y si y sólo si A es cerrado en X .
- v) El conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X si y sólo si B es cerrado en Y .
- vi) El conjunto $f(A)$ es abierto en Y si y sólo si A es abierto en X .
- vii) El conjunto f^{-1} es abierto en X si y sólo si B es abierto en Y .

Terminamos esta parte enunciando la definición de la topología suma.

Supongamos que tenemos una familia disjunta dos a dos $\{X_s\}_{s \in S}$ de espacios topológicos. Consideremos el conjunto $X = \bigcup_{s \in S} X_s$ y la familia τ de todos los subconjuntos $U \subset X$ tales que $U \cap X_s$ es abierto en X_s para cada $s \in S$. Esta familia es una topología en el conjunto X .

Definición 1.1.11. (Topología Suma) Sean X y τ como se definieron en el párrafo anterior. El conjunto X dotado con la topología τ es llamado la *suma de los espacios* $\{X_s\}_{s \in S}$ y lo denotamos por $\bigoplus_{s \in S} X_s$ o por $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ en caso de que S sea un conjunto finito.

La demostración del siguiente resultado sobre la topología suma podemos encontrarlo en [13], Capítulo 2.

Corolario 1.1.12. Los conjuntos X_s son abiertos y cerrados en $\bigoplus_{s \in S} X_s$.

1.1.1. La Topología Cociente

Supongamos que tenemos un espacio topológico y una relación de equivalencia E en X . Denotemos por X/E el conjunto de todas las clases de equivalencia, y sea $q : X \rightarrow X/E$ el mapeo natural dado por $q(x) = [x]$ ($[x]$ denota la clase de equivalencia de x). Definimos una familia τ en X/E como sigue: un conjunto $U \subset X/E$ pertenece a τ si el conjunto $q^{-1}(U)$ es abierto en X . La familia τ es una topología en el conjunto cociente X/E que hace continua al mapeo q . El conjunto X/E equipado con esta topología es llamada el *espacio cociente* y q es llamado el *mapeo cociente natural*.

Definición 1.1.13 (Mapeo Cociente). Un mapeo continuo $f : X \rightarrow Y$ de X sobre Y es llamado un *mapeo cociente* si, el conjunto $f^{-1}(U)$ es abierto en X si y sólo si U es abierto en Y .

Proposición 1.1.14. Todo mapeo cerrado suprayectivo es un mapeo cociente.

1.1.2. Axiomas de Separación

Los axiomas de separación juegan un papel muy importante en topología general.

Definición 1.1.15. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un espacio

- 1) T_0 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un conjunto abierto que contiene exactamente a uno de los dos puntos.
- 2) T_1 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$.
- 3) T_2 , o un *espacio de Hausdorff*, si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen conjuntos abiertos U, V tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.
- 4) *Regular* si X es T_1 , y para cada punto $x \in X$ y cada conjunto cerrado $A \subset X$ que no contiene al punto, existen conjuntos abiertos U que contiene a x , y V que contiene al conjunto A tales que $U \cap V = \emptyset$.
- 5) *Tychonoff*, o un *espacio completamente regular*, o un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, si X es un espacio T_1 y para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado $F \subset X$ con $x \notin F$ existe un mapeo continuo $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(A) \subset \{1\}$.
- 6) *Normal* si X es T_1 , y para cada par de subconjuntos cerrados disjuntos A, B de X , existen conjuntos abiertos U, V en X tales que, $A \subset U, B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Se verifica que todo espacio de Tychonoff es un espacio regular; todo espacio regular es de Hausdorff; todo espacio de Hausdorff es T_1 ; y todo espacio T_1 es un espacio T_0 .

Las demostraciones del siguiente criterio podemos encontrar en [13] Proposición 1.5.5.

Proposición 1.1.16. Un espacio X T_1 es regular si, y sólo si, para cada $x \in X$ y cada conjunto abierto V de x existe un conjunto abierto U , tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset V$.

Para los espacios normales tenemos un resultado análogo.

Proposición 1.1.17. Un espacio X T_1 es normal si, y sólo si, para cada conjunto cerrado F y cada conjunto abierto V con $F \subset V$, existe un conjunto abierto U que contiene a F tal que $\overline{U} \subset V$

1.1.3. Espacios Compactos

Definición 1.1.18. (Espacio Compacto) Un espacio topológico X es un *espacio compacto* si X es un espacio de Hausdorff y toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Los siguientes resultados se encuentran demostrado en [13] en la Sección 3.1.

Proposición 1.1.19. Todo subespacio cerrado de un espacio X compacto es un espacio compacto. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces todo subespacio de X compacto es un subespacio cerrado de X .

Teorema 1.1.20. Todo espacio compacto es un espacio normal.

El siguiente resultado sobre espacios compactos tiene que ver con mapeos continuos y su demostración lo encontramos en [13] Sección 3.1.

Teorema 1.1.21. Todo mapeo continuo de un espacio compacto X sobre un espacio de Hausdorff Y es un mapeo cerrado.

La demostración del siguiente resultado lo encontramos en [13] Sección 2.2.

Teorema 1.1.22. La suma $\bigoplus_{s \in S} X_s$ es compacta si y sólo si los subespacios X_s lo son y el conjunto S es finito.

En los siguientes resultados consideramos en el conjunto producto la topología de Tychonoff o la topología producto generada por los mapeos proyección (ver [13] Sección 2.3)

Teorema 1.1.23 (Teorema de Kuratowski). Para cada espacio de Hausdorff las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) El espacio X es compacto.
- (ii) Para cada espacio topológico Y el mapeo proyección sobre el segundo factor $p : X \times Y \rightarrow Y$ es cerrado.
- (iii) Para todo espacio normal Y el mapeo $p : X \times Y \rightarrow Y$ es cerrado.

Teorema 1.1.24 (Teorema de Wallace). Si A_s son subespacios compactos de espacios topológicos X_s con $s \in S$, entonces para cada conjunto abierto W en el producto cartesiano $\prod_{s \in S} X_s$ que contenga al producto $\prod_{s \in S} A_s$ existen conjuntos abiertos $U_s \subset X_s$ tales que $U_s \neq X_s$ solo para un número finito de $s \in S$ y $\prod_{s \in S} A_s \subset \prod_{s \in S} U_s \subset W$.

Un espacio topológico es llamado *localmente compacto* si para cada punto $x \in X$ existe un conjunto abierto U que contiene al punto x tal que \bar{U} es un subespacio compacto de X .

1.1.4. Funciones Cardinales

Un espacio topológico X es *metrizable* si existe una métrica d en X tal que la topología inducida por la métrica coincide con la topología de X . Cuando la topología del espacio X es inducida por una métrica llamamos a X un espacio métrico.

Las funciones cardinales desempeñan un papel muy importante.

Definición 1.1.25. Una función cardinal es una función definida en la clase de los espacios topológicos que asigna a todo espacio topológico X un número cardinal $f(X)$ tal que $f(X) = f(Y)$ para cualquier par X, Y de espacios homeomorfos.

Algunas funciones cardinales de nuestro interés son las siguientes.

Definición 1.1.26. 1. Sea \mathcal{B} la colección de todas las bases sobre un espacio X . El **peso** de X se define por

$$\omega(X) = \text{mín}\{|B| : B \in \mathcal{B}\} + \aleph_0$$

2. Si \mathcal{D} es la colección de todos los subconjuntos densos del espacio X , definimos la **densidad** de X mediante

$$d(X) = \text{mín}\{|D| : D \in \mathcal{D}\} + \aleph_0$$

3. Una *red* N en un espacio X es una familia de subconjuntos de X tal que todo subconjunto abierto de X es unión de elementos de N . Sea \mathcal{N} la colección de todas las red en X . Definimos el **peso red** mediante

$$n\omega(X) = \text{mín}\{|N| : N \in \mathcal{N}\} + \aleph_0$$

.

4. La **estrechez** de un punto x en un espacio topológico X es el cardinal infinito mas pequeño κ con la propiedad de que si $x \in \overline{C}$, $C \subset X$, entonces existe $F \subset C$ tal que $x \in \overline{F}$ y $|F| \leq \kappa$. Este número cardinal se denota como $t(x, X)$. La **estrechez** de un espacio X es el supremo de todos los números $t(x, Y)$ para $x \in X$. Este número cardinal se denota como $t(X)$.

5. Sea $x \in X$ y \mathcal{A} la colección de todas las bases locales de x sobre un espacio X . El **carácter** del punto x se define por

$$\chi(x, X) = \text{mín}\{|A| : A \in \mathcal{A}\} + \aleph_0$$

El **carácter** del espacio X es el supremo de todos los $t(x, X)$ para toda $x \in X$.

El siguiente resultado sobre funciones cardinales podemos encontrarlo en [13].

Proposición 1.1.27. Sean, X un espacio topológico y $Y \subset X$ un subespacio de X .

1. $n\omega(Y) \leq n\omega(X)$
2. $d(X) \leq n\omega(X)$
3. $t(X) \leq n\omega(X)$
4. Si $X = \bigcup_{n \in \omega} X_n$, entonces $n\omega(X) \leq \max\{n\omega(X_n) : n \in \omega\}$
5. $n\omega(X \times Z) \leq n\omega(X)n\omega(Z)$, donde X, Z son espacios topológicos.

Proposición 1.1.28. Si $Y \subset X$ es un subespacio del espacio X , entonces $t(Y) \leq t(X)$.

Para un espacio métrico tenemos el siguiente resultado que podemos encontrar en [13] Teorema 4.1.15.

Teorema 1.1.29. Para cada espacio métrico X y cualquier cardinal m las siguientes son equivalentes:

- (i) El peso de X es $\leq m$.
- (ii) El peso de red de X es $\leq m$.
- (iii) Toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta de cardinalidad $\leq m$.
- (iv) Todo subespacio discreto cerrado de X tiene cardinalidad $\leq m$.
- (v) Todo subespacio discreto de X tiene cardinalidad $\leq m$.
- (vi) Toda familia de conjuntos abiertos no vacíos ajenos dos a dos en X tiene cardinalidad $\leq m$.
- (vii) La densidad de X tiene cardinalidad $\leq m$.

Otro resultado sobre las funciones cardinales es el siguiente.

Proposición 1.1.30. Si $f : X \rightarrow Y$ es un mapeo continuo de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y , entonces $n\omega(Y) \leq n\omega(X)$.

Capítulo 2

Grupos Topológicos Libres

Este capítulo comprende el estudio a grande rasgos de los grupo libres y grupos topológicos libres, así como propiedades y algunos resultados útiles para el capítulo 3, además, enunciaremos la relación, tanto algebraicamente como topológicamente, que existe entre ellos. Los espacios a considerar serán de Tychonoff.

2.1. Definición y Propiedades Básicas

Esta sección la dedicaremos, como bien dice el título, para dar a conocer algunas de las definiciones y propiedades sobre los grupos libres y grupos topológicos (Abelianos) libres. Iniciamos este segundo capítulo con la definición de grupo topológico.

Definición 2.1.1. Sea G un conjunto no vacío equipado con una operación binaria \cdot , y sea τ una topología en el conjunto G . Diremos que G es un *grupo topológico* si satisface las siguientes condiciones

1. G con esta operación binaria es un grupo
2. El mapeo producto $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ dado por $\cdot(x, y) = xy$, y el mapeo inverso $^{-1} : G \longrightarrow G$ dado por $^{-1}(x) = x^{-1}$, son ambos continuos. En $G \times G$ consideramos la topología producto.

Definición 2.1.2 (Homomorfismo e Isomorfismo). Sea G y H dos grupos, y $f : G \longrightarrow H$ un mapeo. Se dirá que el mapeo f es un *homomorfismo* de grupos si $f(ab) = f(a)f(b)$ para toda $a, b \in G$. Se dirá que f es un *Isomorfismo* si el mapeo $f^{-1} : H \longrightarrow G$ es un homomorfismo también. En tal caso se dirá que G y H son Isomorfos y lo denotaremos por $G \simeq H$.

Para cada conjunto no vacío X existe un grupo G y un mapeo $\sigma : X \longrightarrow G$ tal que $\sigma(X)$ genera algebraicamente al grupo G , y la triada (G, X, σ) satisfacen la siguiente condición

(FG) Para cada mapeo $f : X \longrightarrow H$ del conjunto X a un grupo arbitrario H , existe un homomorfismo $\tilde{f} : G \longrightarrow H$ tal que $\tilde{f} \circ \sigma = f$

La triada (G, X, σ) es llamada el *grupo libre* de X , y lo denotamos por $F_a(X)$. Este grupo es único en el sentido de que si (G', X, σ') es un grupo libre de X , entonces existe un isomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ tal que $\sigma' = \varphi \circ \sigma$. Podemos así identificar a X con $\sigma(X) \subset G$, y diremos entonces que el grupo libre $F_a(X)$ de un conjunto X es un grupo abstracto G generado algebraicamente por su subconjunto X ($\langle X \rangle = G$) tal que cada mapeo $f : X \longrightarrow H$, donde H es un grupo arbitrario H admite una extensión a un homomorfismo $\tilde{f} : G \longrightarrow H$, es decir, $\tilde{f}|_X = f$. Este grupo es único excepto isomorfismos que fijan los puntos de X . Bajo estas condiciones, X es llamado una *base libre* de G .

Cambiando la palabra grupo por grupo Abeliano en (FG) obtenemos la definición del *grupo Abeliano libre* de X , y lo denotamos por $A_a(X)$.

Veamos ahora la estructura algebraica del grupo libre de un conjunto X .

Una prueba de la existencia del grupo libre para un conjunto no vacío X podemos encontrarla en [12] capítulo 5, en donde se construye el grupo libre de un conjunto no vacío X a través de clases de equivalencia mediante una relación de equivalencia en el conjunto de todas las palabras (Definición 2.1.3) generadas por el conjunto X y su copia X^{-1} , pero que además en cada clase de equivalencia existe un representante que es una palabra irreducible (Definición 2.1.3) formada por elementos de X , y entonces el grupo libre $F_a(X)$ para un conjunto X consiste de todas estas palabras irreducibles.

Definición 2.1.3. Sea X un conjunto no vacío, X^{-1} una copia disjunta de X . Para cada entero $n \geq 0$, definimos una *palabra* x de longitud n como $x = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$, donde $x_i \in X$ y $\epsilon_i = \pm 1$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. La longitud de la palabra vacía e es 0. Diremos que una la palabra x es *irreducible* si no tiene pares consecutivos de símbolos de la forma xx^{-1} o $x^{-1}x$.

Dos palabras irreducibles $x = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ y $y = y_1^{\delta_1} \cdots y_m^{\delta_m}$ son iguales si, y sólo si, $m = n$, $x_i = y_i$, y $\epsilon_i = \delta_i$ para toda i . El producto \mathbf{xy} de dos palabras irreducibles se define como sigue: Consideremos la expresión $x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n} y_1^{\delta_1} \cdots y_m^{\delta_m}$. Si esta palabra es irreducible, éste será xy . Sino, cancelamos los símbolos de la forma xx^{-1} o $x^{-1}x$. Aplicamos este procedimiento un número finito de veces hasta encontrar una palabra irreducible que definirá xy .

Como $X \subset F_a(X)$ genera algebraicamente al grupo $F_a(X)$, entonces cada elemento $g \in F_a(X)$ es de la forma $g = x_1^{\epsilon_1} \cdot x_2^{\epsilon_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\epsilon_n}$ donde $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ y $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n = \pm 1$. Notemos que la palabra vacía es el elemento identidad tanto en $F_a(X)$ como en $A_a(X)$.

Existe una profunda analogía entre los grupos abstractos y los grupos topológicos. En lo siguiente diremos que un subconjunto Y de un grupo topológico G *genera topológicamente*

a G si el subgrupo $\langle Y \rangle$ de G generado por Y es denso en G .

Sea $\sigma : X \longrightarrow G$ un mapeo continuo de un espacio topológico X a un grupo topológico de Hausdorff G que satisface las siguientes condiciones:

- 1) la imagen $\sigma(X)$ genera topológicamente al grupo G ,
- 2) para cada mapeo continuo $f : X \longrightarrow H$, donde H es un grupo topológico arbitrario H , existe un homomorfismo continuo $\tilde{f} : G \longrightarrow H$ tal que $\tilde{f} \circ \sigma = f$.

La triada (G, X, σ) es denotada por $F(X)$ y es llamada el *grupo topológico libre* de X . Si los grupos en la definición anterior son Abelianos, la triada (G, X, σ) es llamada el *grupo topológico Abeliano libre* de X y lo denotamos por $A(X)$.

Cabe mencionar que el grupo topológico (Abeliano) libre de X es único en el sentido siguiente: si (G, X, σ) y (G', X, σ') son grupos topológicos (Abelianos) libres de X , entonces existe un isomorfismo topológico $\varphi : G \longrightarrow G'$ tal que $\varphi \circ \sigma = \sigma'$. Como se muestra en seguida, la existencia del grupo topológico libre para un espacio discreto es algo claro, no así para un espacio de Tychonoff no discreto el cual podemos encontrar en [11] Teorema 7.1.2, dando como consecuencia que la topología de grupo topológico libre en $F(X)$ induce (genera) en X su topología original.

Ejemplo 2.1.4. Si X es un espacio discreto, entonces el grupo libre $F_a(X)$ y el grupo Abeliano libre $A_a(X)$ del conjunto X , dotados con la topología discreta, son el grupo topológico libre y el grupo topológico Abeliano libre de X , respectivamente.

Demostración. Sea $F_a(X)$ el grupo libre con la topología discreta. Luego, este grupo es un grupo topológico. Por definición de grupo libre existe $\sigma : X \longrightarrow F_a(X)$ tal que $\sigma(X)$ genera algebraicamente a $F_a(X)$, en consecuencia lo genera topológicamente. Por otro lado, sea H un grupo topológico arbitrario y $f : X \longrightarrow H$ un mapeo continuo. Como H en particular

es un grupo y $F_a(X)$ es el grupo libre de X , entonces existe un homomorfismo $\tilde{f} : F_a(X) \rightarrow H$ tal que $\tilde{f} \circ \sigma = f$. Del hecho que tanto X como $F_a(X)$ son discretos se sigue que los mapeos σ y \tilde{f} son continuos. Por lo tanto, $(F_a(X), X, \sigma)$ es un grupo topológico libre de X .

Procediendo de manera análoga se prueba para el caso $A_a(X)$. \square

Extendemos el ejemplo anterior.

Proposición 2.1.5. Sea X un espacio de Tychonoff. El grupo topológico (Abeliano) libre $F(X)$ ($A(X)$) es discreto si y sólo si X es discreto.

Observación 2.1.6. En [11] Teorema 7.1.5 se demuestra que para cada espacio de Tychonoff X el grupo topológico libre $F(X)$ es isomorfo algebraicamente a $F_a(X)$, es decir, X es una base libre algebraica de $F(X)$. Con este hecho diremos entonces que el grupo $F(X)$ sin topología es el grupo libre de X , esto es, X como subconjunto del grupo $F(X)$ genera algebraicamente a este grupo. Un argumento similar se aplica para $A(X)$.

Existe una relación entre la topología de grupo libre de $F(X)$ y las topologías de grupo topológico en el grupo libre $F_a(X)$ como veremos más adelante, pero antes enunciaremos un resultado para su prueba.

Proposición 2.1.7. Existe una topología en $F_a(X)$ que hace de éste grupo un grupo topológico y que genera la topología original del espacio X , es decir, la topología de X como subespacio de $F_a(X)$ coincide con la topología original de X .

Demostración. Sea τ_F la topología de grupo topológico libre de $F(X)$. Como $F(X) \simeq F_a(X)$, sea $f : F(X) \rightarrow F_a(X)$ el isomorfismo identico en X . Hagamos $\tau_{F_a} = \{f(U) : U \in \tau_F\}$. Como la función f es biyectiva, se sigue τ_{F_a} es una topología en $F_a(X)$. Por otra parte, si $V \in \tau_{F_a}$ entonces existe $U \in \tau_F$

tal que $V = f(U)$. Aplicando la imagen inversa al conjunto V , se tiene que $f^{-1}(V) = U$ es abierto en $F(X)$. Si U es abierto en $F(X)$, entonces $f(U)$ es abierto en $F_a(X)$. Hemos demostrado entonces que f es un isomorfismo topológico. Por lo tanto, dado que τ_F genera la topología de X , entonces τ_{F_a} también genera la topología de X .

Probemos ahora que el mapeo producto $\cdot : F_a(X) \times F_a(X) \rightarrow F_a(X)$ es continuo. Sea $V \in \tau_{F_a}$. Entonces existe U abierto en $F(X)$ tal que $f(U) = V$. Como $F(X)$ es un grupo topológico, el conjunto

$$\cdot^{-1}(U) = \{(x, y) \in F(X) \times F(X) : xy \in U\}$$

es abierto en $F(X) \times F(X)$. Entonces

$$\cdot^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \times V_\alpha),$$

donde U_α, V_α son elementos de τ_F . Por otro lado

$$\cdot^{-1}(V) = \{(f(x), f(y)) \in F_a(X) \times F_a(X) : f(x)f(y) \in V\}.$$

Se sigue que

$$\cdot^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in I} (f(U_\alpha) \times f(V_\alpha)),$$

el cual es abierto en $F_a(X) \times F_a(X)$. Por lo tanto, el producto \cdot es continuo.

De la misma manera se procede para probar la continuidad de la función inversa. \square

El resultado anterior nos dice entonces que si τ_F es la topología de grupo topológico libre en $F(X)$, entonces $(F_a(X), \tau_F)$ es un grupo topológico. Ahora podemos dar la prueba del siguiente resultado.

Proposición 2.1.8. La topología del grupo $F(X)$ es la topología más fina de grupo topológico en $F_a(X)$ que genera en X la topología original. Lo mismo es cierto para $A(X)$.

Demostración. En la prueba de la existencia del grupo topológico libre se tiene que la topología τ_F de $F(X)$ genera en X su topología original τ_X . Por la Observación 2.1.6, X es una base libre algebraica de $F(X) \cong F_a(X)$, es decir, X genera algebraicamente a $F(X)$. Sea τ' una topología de grupo topológico en $F_a(X)$ tal que $\tau'|_X = \tau_X$ (la existencia de una tal topología se tiene de la Proposición 2.1.7). Como el mapeo inclusión $i : X \hookrightarrow F_a(X)$ es continuo y $F(X)$ es el grupo libre de X , entonces i se extiende a un homomorfismo continuo $\tilde{i} : F(X) \rightarrow F_a(X)$ tal que $\tilde{i}|_X = i$. Como el conjunto X es generador tanto de $F(X)$ como de $F_a(X)$ se tiene que \tilde{i} es un isomorfismo. Por otra parte, dado que \tilde{i} es continua, si U es abierto en el espacio $(F_a(X), \tau')$ entonces $\tilde{i}^{-1}(U)$ es abierto en $F(X)$, y por la biyectividad de \tilde{i} podemos concluir que U es abierto en $F(X)$. Esto es, $\tau' \subset \tau_F$. Por lo tanto, τ_F es la topología más fina de grupo topológico en $F_a(X)$ que genera en X su topología original. \square

El siguiente resultado (cuya demostración podemos ver en [11] Teorema 7.1.9) nos permite extender mapeos continuos sobre espacios de Tychonoff a homomorfismos continuos sobre sus grupos topológicos libres, a saber:

Proposición 2.1.9. Sean X, Y espacios de Tychonoff, y $f : X \rightarrow Y$ un mapeo continuo. Entonces f admite extensiones a homomorfismos continuos $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ y $A(f) : A(X) \rightarrow A(Y)$. Además, si f es cociente y $f(X) = Y$, entonces los homomorfismos $F(f)$ y $A(f)$ son abiertos.

Ahora mostraremos una relación entre los grupos topológicos libres y los grupos topológicos Abelianos libres. Antes daremos una definición muy conocida en la teoría de grupos.

Definición 2.1.10. Sea G un grupo. El *conmutador* de G , denotado por $[G]$, es el subgrupo de G generado por el conjunto $A = \{a^{-1}b^{-1}ab : a, b \in G\}$, es decir, $[G] = \langle A \rangle$.

Notemos que el subgrupo conmutador $[G]$ es un subgrupo normal en el grupo G . Por lo tanto, el grupo cociente $G/[G]$

es un grupo que además es Abeliano. La demostración del siguiente resultado podemos encontrarlo en [11] Teorema 7.1.11.

Teorema 2.1.11. El subgrupo conmutador $[F(X)]$ del grupo topológico libre $F(X)$ para un espacio de Tychonoff X es cerrado en $F(X)$ y $A(X) \cong F(X)/[F(X)]$. En otras palabras, $A(X)$ es cociente de $F(X)$.

2.2. Conjuntos Abiertos en $F(X)$

Hasta ahora no tenemos herramientas suficientes para el estudio de las propiedades topológicas de los grupos topológicos libres. Así que estableceremos algunos resultados para visualizar con mas claridad la estructura de los grupos topológicos (Abelianos) libres. Introducimos algunas notaciones.

Para cada entero no negativo n , denotamos por $F_n(X)$ el subespacio del grupo topológico libre $F(X)$ que consiste de todas las palabras irreducibles de longitud $\leq n$ con respecto a la base libre X . Se tiene que $F_0(X) = \{e\}$ donde e es la identidad de $F(X)$. Hagamos $C_n(X) = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ para $n \geq 1$, es decir, $C_n(X)$ es el subconjunto de $F(X)$ que consiste de todas las palabras irreducibles de longitud n . En nuestro contexto X^n significará el producto cartesiano de X n -veces. Denotemos por \tilde{X} la suma topológica de X , su copia homeomorfa X^{-1} , y $\{e\}$, esto es, $\tilde{X} = X \oplus X^{-1} \oplus \{e\}$. Para cada $n \geq 1$, sea $i_n : \tilde{X}^n \rightarrow F(X)$ el mapeo producto dado por $i_n(y_1, \dots, y_n) = y_1 \cdot \dots \cdot y_n$ para cada punto (y_1, \dots, y_n) . Finalmente, denotemos $C_n^*(X) = i_n^{-1}(C_n(X))$, la preimagen de $C_n(X)$ bajo el mapeo i_n .

Antes de dar algunos resultados correspondientes a los conjuntos definidos anteriormente, haremos unas observaciones.

Observación 2.2.1. 1. La topología de grupo libre también induce en X^{-1} su topología original, es decir, la

topología de X^{-1} como subespacio del grupo libre coincide con la topología original de X^{-1} .

2. De la observación anterior, si τ_F es la topología de grupo topológico libre de $F(X)$ y $\tau_{\tilde{X}}$ es la topología suma de \tilde{X} , entonces $\tau_F|_{\tilde{X}} \subset \tau_{\tilde{X}}$, es decir, cada abierto en \tilde{X} como subespacio de $F(X)$ es un abierto en \tilde{X} .
3. Si el espacio X es compacto, entonces también lo es \tilde{X} . Esto se sigue del Teorema 1.1.22.

Proposición 2.2.2. Para cada entero $n \geq 1$, el mapeo producto i_n es continuo, e $i_n(\tilde{X}^n) = F_n(X)$. Además, si X es compacto, entonces $F_n(X)$ es cerrado en $F(X)$

Demostración. Apliquemos inducción. Para $n = 2$. El mapeo $i_2 : \tilde{X}^2 \rightarrow F(X)$, es en efecto la restricción del mapeo producto $\cdot : F(X) \times F(X) \rightarrow F(X)$ sobre $\tilde{X} \times \tilde{X}$ que es continuo, ya que $F(X)$ es un grupo topológico. Supongamos que el mapeo $i_{n-1} : \tilde{X}^{n-1} \rightarrow F(X)$ es continuo. Veamos que también lo es $i_n : \tilde{X}^n \rightarrow F(X)$. Para esto definamos un mapeo $g_n : \tilde{X}^n \rightarrow F(X) \times F(X)$ por $g_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \cdots x_{n-1}, x_n)$ y probemos que es continuo. Basta probar que los mapeos coordenadas de g_n son continuos. Un mapeo coordenada es $f_n : \tilde{X}^n \rightarrow F(X)$ dada por $f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = x_1 \cdots x_{n-1}$. Si $h_n : \tilde{X}^n \rightarrow \tilde{X}^{n-1}$ es de la forma $h_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1})$, entonces es continuo. Ahora notemos que $f_n = i_{n-1} \circ h_n$. Entonces f_n es continuo porque i_{n-1} es continuo. Por otro lado, el mapeo coordenada $g : \tilde{X}^n \rightarrow F(X)$ de g_n dada por $g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = x_n$ es continuo. Por lo tanto, g_n es continuo. Por último, notemos que $i_n = \cdot \circ g_n$ es composición de dos mapeos continuos, así que, i_n es continuo.

Para ver que $i_n(\tilde{X}^n) = F_n(X)$, notemos que i_n se define en la operación producto del grupo $F(X)$, es decir, la imagen de cada elemento bajo el mapeo i_n resulta ser una palabra irreducible en $F(X)$, pero $F_n(X)$ consiste exactamente de estas

palabras.

Si X es un espacio compacto, entonces como el mapeo i_n es continuo, se cumple que $F_n(X)$ es compacto en $F(X)$, como este último es Hausdorff, entonces $F_n(X)$ es cerrado en $F(X)$. \square

A continuación enunciamos algunos resultados sobre los subespacios $F_n(X)$ y X de $F(X)$.

Teorema 2.2.3. (A.V. Arhangel'skii) Los siguientes dos enunciados son ciertos para cualquier espacio de Tychonoff X y cada entero $n \geq 1$.

- a) Los conjuntos $F_n(X)$ e $i_n(X^n)$ son cerrados en $F(X)$.
En particular, X es cerrado en $F(X)$.
- b) Los espacios $C_n^*(X)$ y $C_n(X)$ son homeomorfos. Además, $i_n(X^n)$ es una copia cerrada homeomorfa de X^n en $F(X)$.

Demostración. Sea βX la compactificación de Čech-Stone del espacio X , y consideremos el grupo topológico libre $F(\beta X)$. Como βX es la compactificación de X , existe un encaje homeomorfo $i : X \rightarrow \beta X$, esto es, $i : X \rightarrow i(X)$ es un homeomorfismo. En particular, $i : X \rightarrow \beta X$ es continuo. Como $F(X)$ es el grupo topológico libre de X , i se extiende a un homomorfismo continuo $\hat{i} : F(X) \rightarrow F(\beta X)$. Como la restricción de \hat{i} sobre X es uno a uno y βX es una base libre de $F(\beta X)$, se tiene que \hat{i} es también inyectivo. En efecto, cada palabra en $F(X)$ es una palabra irreducible por elementos de X . Sean $x = x_1^{\epsilon_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\epsilon_n}$ y $y = y_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot y_m^{\delta_m}$ dos palabras irreducibles en $F(X)$ con $x \neq y$. Luego

$$\hat{i}(x) = \hat{i}(x_1^{\epsilon_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\epsilon_n}) = \hat{i}(x_1)^{\epsilon_1} \cdot \dots \cdot \hat{i}(x_n)^{\epsilon_n} = i(x_1)^{\epsilon_1} \cdot \dots \cdot i(x_n)^{\epsilon_n}$$

y

$$\hat{i}(y) = \hat{i}(y_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot y_m^{\delta_m}) = \hat{i}(y_1)^{\delta_1} \cdot \dots \cdot \hat{i}(y_m)^{\delta_m} = i(y_1)^{\delta_1} \cdot \dots \cdot i(y_m)^{\delta_m}$$

Del hecho que i es un mapeo inyectivo y x, y son palabras irreducibles se tiene que $\hat{i}(x), \hat{i}(y)$ son palabras irreducibles en

$F(\beta X)$ de la misma longitud que x e y , respectivamente. Como $x \neq y$, entonces, bien $n \neq m$ en cual caso $\hat{i}(x) \neq \hat{i}(y)$, bien existe j con $\epsilon_j \neq \delta_j$ en cual caso $\hat{i}(x) \neq \hat{i}(y)$, o bien existe j tal que $x_j \neq y_j$ en cual caso también se tendrá que $\hat{i}(x) \neq \hat{i}(y)$. Así que, en cualquier caso, $\hat{i}(x) \neq \hat{i}(y)$, es decir, \hat{i} es inyectivo. Observamos de esto también que la imagen de $F(X)$ bajo el mapeo \hat{i} es generada por el subconjunto $i(X)$ de $F(\beta X)$, es decir, $\hat{i}(F(X)) = \langle i(X) \rangle$. Por lo tanto, $\hat{i} : F(X) \rightarrow \langle i(X) \rangle$ es un isomorfismo continuo.

a) Denotemos por K la suma topológica de βX , su copia homeomorfa $(\beta X)^{-1}$, y la identidad e de $F(X)$, esto es, $K = \beta X \oplus \{e\} \oplus (\beta X)^{-1}$. Para cada entero $n \geq 1$, consideremos el mapeo $i_n^* : K^n \rightarrow F(\beta X)$ definida por la fórmula $i_n^*(y_1, \dots, y_n) = y_1 \cdot \dots \cdot y_n$, para todo $y_1, \dots, y_n \in K$. Por la Proposición 2.2.2, el mapeo i_n^* es continuo. Notemos que $i(X) \subset \beta X$, entonces $\widetilde{i(X)} \subset K$. Sean $y_1, \dots, y_n \in \widetilde{X}$ y $i(y_1), \dots, i(y_n) \in \widetilde{i(X)}$ sus respectivas copias. Tenemos que

$$i_n^*(i(y_1), \dots, i(y_n)) = i(y_1) \cdot \dots \cdot i(y_n)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{i} \circ i_n(y_1, \dots, y_n) &= \hat{i}(i_n(y_1, \dots, y_n)) = \hat{i}(y_1 \cdot \dots \cdot y_n) \\ &= \hat{i}(y_1) \cdot \dots \cdot \hat{i}(y_n) = i(y_1) \cdot \dots \cdot i(y_n) \end{aligned}$$

Es decir, la restricción de i_n^* a \widetilde{X}^n coincide con $\hat{i} \circ i_n$ para cada $n \geq 1$, donde $\widetilde{X} = X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$. De esto se tiene que $\hat{i} \circ i_n(\widetilde{X}^n) = i_n^*(\widetilde{X}^n) \subset i_n^*((\beta X)^n)$. Como para el caso de \widetilde{X} , se tiene también que $F_n(\beta X) = i_n^*(K^n)$. En vista de que K^n es compacto e i_n^* es continua, concluimos que $F_n(\beta X)$ es compacto. Como el grupo topológico libre $F(\beta X)$ es Hausdorff, tenemos entonces que $F_n(\beta X)$ es un subconjunto cerrado en $F(\beta X)$. Ahora, \hat{i} mapea cada palabra irreducible de longitud n en $F(X)$ en una palabra irreducible de la misma longitud en $F(\beta X)$. Es claro notar que el rango de \hat{i} sobre $F(X)$ es el

subgrupo generado por $i(X)$ de $F(\beta X)$. Se sigue de esto que $\hat{i}(F_n(X)) = \hat{i}(F(X)) \cap F_n(\beta X)$.

La compactificación βX del espacio X , por definición es un espacio compacto, se sigue de la Proposición 2.2.2 que $F_n(\beta X)$ es un subconjunto cerrado de $F(\beta X)$. Por lo tanto, el conjunto $\hat{i}(F_n(X))$ es un conjunto cerrado en $\hat{i}(F(X))$. Como \hat{i} es un mapeo continuo uno a uno de $F(X)$ sobre $\langle i(X) \rangle = \hat{i}(F(X))$, y $F_n(X) = \hat{i}^{-1}(\hat{i}(F_n(X)))$, concluimos que $F_n(X)$ es un subconjunto cerrado de $F(X)$.

Nos queda demostrar que el conjunto $i_n(X^n)$ es cerrado en $F(X)$. Para esto notemos primero que $\hat{i}(i_n(X^n)) \subset \hat{i}(F(X)) \cap i_n^*((\beta X)^n)$. Por otra parte, si $y \in \hat{i}(F(X)) \cap i_n^*((\beta X)^n)$, entonces existe una única palabra irreducible $z = y_1 \cdots y_n$ en $F(X)$ tal que $\hat{i}(z) = y$. Si $x = (y_1, \dots, y_n) \in X^n$, entonces, $\hat{i} \circ i_n(y_1, \dots, y_n) = \hat{i}(y_1 \cdots y_n) = y$. Por lo tanto, $\hat{i}(i_n(X^n)) = \hat{i}(F(X)) \cap i_n^*((\beta X)^n)$, entonces el conjunto $\hat{i}(i_n(X^n))$ es cerrado en $\hat{i}(F(X))$. De nuevo, como \hat{i} es un mapeo continuo uno a uno sobre $\hat{i}(F(X))$, e $i_n(X^n) = \hat{i}^{-1}(\hat{i}(i_n(X^n)))$, se concluye que el conjunto $i_n(X^n)$ es un subconjunto cerrado de $F(X)$. En particular, para $n = 1$, $X \cong i_1(X)$ es cerrado en $F(X)$.

b) Cada elemento en $C_n(X)$ es una palabra irreducible de longitud igual a n . Sean, $y = (y_1, \dots, y_n)$ y $x = (x_1, \dots, x_n)$ elementos en $C_n^*(X)$ con $x \neq y$, entonces existe $j = 1, \dots, n$ tal que $x_j \neq y_j$. Si $i_n(x) = i_n(y)$, entonces $x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_n$, luego $x_j = y_j$ para todo $j = 1, \dots, n$, lo cual no es posible. Por lo tanto, el mapeo producto $i_n : \tilde{X}^n \rightarrow F(X)$ restringido al conjunto $C_n^*(X)$ es inyectivo. Si $f_n = i_n|_{C_n^*(X)} : C_n^*(X) \rightarrow C_n(X)$, entonces este mapeo es biyectivo y continuo. Para verificar que f_n es un homomorfismo, basta demostrar que es un mapeo abierto. Como βX es compacto, entonces K^n también lo es. Ahora, el grupo topológico libre $F(\beta X)$ de βX es Hausdorff y el mapeo $i_n^* : K^n \rightarrow F(\beta X)$ es continuo, por la Proposición 1.1.21 concluimos que este mapeo es cerrado. Como anteriormente, la restricción i_n^* sobre $C_n^*(\beta X) = (i_n^*)^{-1}(C_n(\beta X))$

es inyectivo. Más aún, $i_n^*|_{C_n^*(\beta X)} : C_n^*(\beta X) \longrightarrow C_n(\beta X)$ es biyectivo. Como el mapeo $i_n^* : K^n \longrightarrow F(\beta X)$ continuo, se tiene que el mapeo $i_n^*|_{C_n^*(\beta X)} : C_n^*(\beta X) \longrightarrow C_n(\beta X)$ es también continuo. Ahora, si G es un subconjunto cerrado en $C_n^*(\beta X)$, existe un subconjunto D cerrado en K^n tal que $G = C_n^*(\beta X) \cap D$. Luego, tenemos que $i_n^*(C_n^*(\beta X) \cap D) = C_n(\beta X) \cap i_n^*(D)$, y el conjunto de la igualdad derecha es cerrado en $C_n(\beta X)$ ya que $i_n^*(D)$ es cerrado en $F(\beta X)$. Por lo tanto el mapeo $i_n^*|_{C_n^*(\beta X)} : C_n^*(\beta X) \longrightarrow C_n(\beta X)$ es un homeomorfismo.

Tomemos U un subconjunto abierto en $C_n^*(X)$. Elijamos un subconjunto abierto W de \tilde{X}^n tal que $U = C_n^*(X) \cap W$. Por la Proposición 2.2.4 existe un subconjunto abierto V_1 en K^n tal que $W = \tilde{X}^n \cap V_1$. Entonces el conjunto abierto U resulta $U = C_n^*(X) \cap \tilde{X}^n \cap V_1 = C_n^*(X) \cap V_1$, ya que $C_n^*(X) \subset \tilde{X}^n$. Observemos que $X \subset \beta X$, entonces $C_n(X) \subset C_n(\beta X)$. Por lo tanto, $C_n^*(X) \subset C_n^*(\beta X)$. Tenemos así que, $U = C_n^*(X) \cap C_n^*(\beta X) \cap V_1$. Si $V = C_n^*(\beta X) \cap V_1$, entonces éste conjunto es abierto en $C_n^*(\beta X)$. Así, $U = C_n^*(X) \cap V$. Como el mapeo $i_n^*|_{C_n^*(\beta X)} : C_n^*(\beta X) \longrightarrow C_n(\beta X)$ es un homeomorfismo, y $\hat{i} \circ i_n = i_n^*|_{\tilde{X}^n}$, el conjunto

$$\begin{aligned} \hat{i} \circ i_n(U) &= i_n^*(U) = i_n^*(V) \cap i_n^*(C_n^*(X)) \\ &= i_n^*(V) \cap i_n^*(i_n^{-1}(C_n(X))) = i_n^*(V) \cap \hat{i}(C_n(X)) \end{aligned}$$

es abierto en $\hat{i}(C_n(X))$. Pero \hat{i} es un monomorfismo continuo, por lo tanto, $i_n(U)$ es abierto en $C_n(X)$. Esto es, $f_n = i_n|_{C_n^*(X)} : C_n^*(X) \longrightarrow C_n(X)$ es un mapeo abierto. Por lo tanto, f_n es un homeomorfismo. Observemos que si $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, entonces al evaluar éste elemento por i_n nos da como resulta la palabra irreducible $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ de longitud igual a n . Entonces, $X^n \subset C_n^*(X)$. Se sigue del inciso a) que, $i_n(X^n)$ es un subconjunto cerrado en $F(X)$. Pero $i_n(X^n) \subset C_n(X)$, es decir, $i_n(X^n)$ es una copia homeomorfa cerrada de X^n en $F(X)$. \square

El siguiente resultado se uso en la demostración del Teorema anterior.

Proposición 2.2.4. Sea $i : X \rightarrow \beta X$ el encaje homeomorfo originado por la compactificación βX de X . Entonces, la topología original de \tilde{X}^n coincide con la topología de subespacio de \tilde{X}^n en K^n , donde K es el conjunto definido en el teorema anterior.

Demostración. El mapeo $i : X \rightarrow i(X)$ es un homeomorfismo. Notemos que $X \subset i(X) \subset \beta X$. Entonces, podemos decir que la topología de X es igual a la topología de subespacio de $i(X)$ en βX . De esto se sigue que la topología original de \tilde{X} es igual a la topología de \tilde{X} que se obtiene como subespacio de K . Por lo tanto, la topología original de \tilde{X}^n coincide con la topología de subespacio de \tilde{X}^n en K^n . \square

Tenemos un resultado análogo al teorema anterior pero para los grupos topológico Abelianos libres como lo enuncia la siguiente proposición el cual podemos encontrar su demostración en [11] Teorema 7.1.14.

Proposición 2.2.5. Para el caso de $A(X)$, $i_n : C_n^*(X) \rightarrow C_n(X)$ e $i_n : X^n \rightarrow i_n(X^n)$ son mapeos abiertos y perfectos, para cada espacio de Tychonoff X y cada entero $n \geq 1$.

Terminamos esta sección con un resultado interesante que describe una base de abiertos para cada palabra g de longitud n en el subespacio $F_n(X)$ en los grupos $F(X)$ y $A(X)$. De manera mas concisa:

Proposición 2.2.6. Sea X un espacio de Tychonoff y $g = x_1^{\epsilon_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\epsilon_n}$ una palabra irreducible en $F(X)$ de longitud n . Supongamos que U_i es un conjunto abierto en X que contiene a x_i , y que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $x_i \neq x_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Entonces, el conjunto $W = U_1^{\epsilon_1} \cdot \dots \cdot U_n^{\epsilon_n}$ es un abierto en $F_n(X)$ que contiene a la palabra g . Más aún, la familia de conjuntos W forman una base local de g en $F_n(X)$.

Demostración. Por el inciso a) del Teorema 2.2.3, el conjunto $C_n(X) = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ es abierto en $F_n(X)$. Consideremos

el punto $(x_1^{\epsilon_1}, \dots, x_n^{\epsilon_n}) \in \tilde{X}^n$. Entonces el conjunto $U = U_1^{\epsilon_1} \times \dots \times U_n^{\epsilon_n}$ es abierto en \tilde{X}^n , $x \in U$, y $i_n(U) = U_1^{\epsilon_1} \cdot \dots \cdot U_n^{\epsilon_n}$. Como cada U_i es subconjunto de X , entonces W consiste meramente de palabras irreducibles de longitud igual a n . Por lo tanto, $i_n(U) \subset C_n(X)$. Entonces, $U \subset C_n^*(X)$. Como el mapeo $i_n : C_n^*(X) \rightarrow C_n(X)$ es abierto (ver inciso b) del Teorema 2.2.3, y Proposición 2.2.5), el conjunto $W = i_n(U)$ es un abierto de $g = i_n(x)$ en $C_n(X)$, y por lo tanto abierto en $F_n(X)$.

Por otra parte, sea τ_X la topología original de X , y hagamos $\mathcal{V}_i = \{U_i \in \tau_X : x_i \in U_i\}$ la familia de todos los abiertos de x_i en X . Entonces, la familia de abiertos en \tilde{X}^n dada por $\mathfrak{B} = \{U = U_1^{\epsilon_1} \times \dots \times U_n^{\epsilon_n} : U_i \in \mathcal{V}_i\}$ es una base del punto x en $C_n^*(X)$. La familia $\mathfrak{U} = \{i_n(U) : U \in \mathfrak{B}\}$ constituye una base local del punto g en $C_n(X)$. Como $C_n(X)$ es abierto en $F_n(X)$, entonces \mathfrak{U} es una familia de abiertos en $F_n(X)$ que además es una base local de g en $F_n(X)$. \square

Capítulo 3

Estrechez en Grupos Topológicos Libres

Este capítulo será desarrollado para el estudio de la función cardinal estrechez sobre los grupos topológicos (Abelianos) libres. Además de estudiar algunos conceptos sobre cubiertas para un espacio X los cuales serán de gran utilidad para el cálculo de la estrechez en grupos topológicos libres. Los espacios considerados en este capítulo serán de Tychonoff.

3.1. Cubiertas Generadoras

Esta sección la dedicaremos al estudio de las cubiertas de un espacio topológico que generan su topología. Enunciaremos algunos resultados que nos darán un criterio para calcular la estrechez de un espacio topológico.

Sea X un espacio topológico, $\mathcal{C} = \{C_\alpha \subset X\}_{\alpha \in I}$ una cubierta de X . Definimos una colección τ de subconjuntos de X como sigue. Un subconjunto $U \subset X$ es un elemento de τ , si para todo $C \in \mathcal{C}$ se tiene que $U \cap C$ es abierto en C , o equivalentemente, $F^c \subset X$ pertenece a τ , si para todo $C \in \mathcal{C}$, $F \cap C$ es cerrado en C . En ambos casos C se toma como subespacio

de X .

Puede probarse, sin mayor dificultad, que τ es una topología sobre el conjunto X , llamada la *topología generada* por la cubierta.

Observación 3.1.1. Observemos de esta definición que si τ_X es la topología original de X y τ es la topología generada por alguna cubierta \mathcal{C} de X , y si $U \in \tau_X$, entonces $U \cap C$ es abierto en C para toda $C \in \mathcal{C}$; por lo tanto $\tau_X \subset \tau$ para cualquier cubierta \mathcal{C} de X .

Entonces, qué visualización nos proporcionará el hecho de saber que la topología original de un espacio X coincide con la topología generada por una cubierta, si esto último llegará a suceder.

Definición 3.1.2. Sea τ_X la topología original de un espacio topológico X y τ la topología generada por alguna cubierta \mathcal{C} de X . Si estas dos topologías sobre el conjunto X coinciden, entonces diremos que la cubierta \mathcal{C} *genera la topología* de X o que \mathcal{C} es una *cubierta generadora* del espacio X .

De la Observación 3.1.1, basta demostrar que, si τ es la topología generada por alguna cubierta de X entonces, todo elemento en τ es un conjunto abierto en X con su topología original.

Ahora, clasificamos algunos espacios respecto a cubiertas generadoras en un espacio X . Sean \mathcal{U} y \mathcal{V} dos cubiertas de un espacio topológico X . Diremos que \mathcal{V} es un refinamiento de \mathcal{U} , denotado $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, si para cada elemento $U \in \mathcal{U}$ existe un elemento $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subset V$.

El siguiente resultado referente a cubiertas generadoras será útil para la prueba de los resultados en la Sección 3 de este capítulo. Su demostración podemos encontrarlo en [1].

Proposición 3.1.3. Sea X un espacio topológico.

- (i) Si \mathcal{V} es una cubierta generadora del espacio X , y si Y es un subespacio cerrado de X , entonces la colección $\mathcal{V}_Y = \{Y \cap P : P \in \mathcal{V}\}$ es una cubierta generadora del subespacio Y .
- (ii) Si la cubierta \mathcal{V} de X es un refinamiento de la cubierta generadora \mathcal{U} de X , entonces \mathcal{V} es también una cubierta generadora del espacio X .
- (iii) Sea \mathcal{U} una cubierta de X . Si \mathcal{V} es una cubierta generadora de X y $\mathcal{V}_P = \{P \cap A : A \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta generadora del subespacio P para cada $P \in \mathcal{V}$, entonces \mathcal{U} es una cubierta generadora del espacio X .

Enunciamos enseguida una definición de Topología General.

Definición 3.1.4. Sean X un espacio topológico y κ un cardinal. Diremos que un subconjunto $A \subset X$ es κ -cerrado, si todo subconjunto $B \subset A$ con $|B| \leq \kappa$ cumple que $\overline{B} \subset X$, donde la cerradura de B es en el espacio X .

Tenemos el siguiente criterio sobre la estrechez de un espacio topológico X cuando el cardinal $\kappa = \omega$.

Proposición 3.1.5. Sea X un espacio topológico. La estrechez de X no excede al cardinal ω si y sólo si todo conjunto ω -cerrado en X es cerrado en X .

Demostración. Supongamos primero que la estrechez del espacio no excede al cardinal ω . Sea $A \subset X$ un conjunto ω -cerrado y $x_0 \in \overline{A}$. Como $t(X) \leq \omega$, entonces se tiene que $t(x_0, X) \leq \omega$. Luego, existe $B \subset A$ con $|B| \leq \omega$ tal que $x_0 \in \overline{B}$. Como el conjunto A es ω -cerrado, tenemos que $\overline{B} \subset A$. Entonces, $x_0 \in A$. Por lo tanto, el conjunto A es cerrado.

Para la otra parte, sea $x_0 \in X$ y supongamos que $x_0 \in \overline{A}$ para un conjunto $A \subset X$. Demostraremos que existe un subconjunto $C \subset A$ con $|C| \leq \omega$ tal que $x_0 \in \overline{C}$. Para esto,

consideremos \mathcal{A} la colección de todos los subconjuntos numerables del conjunto A y sea $B = \bigcup_{C \in \mathcal{A}} \overline{C}$. Sea $F \subset B$ tal que $|F| \leq \omega$. Para cada $x \in F$ existe un $C_x \in \mathcal{A}$ tal que $x \in \overline{C_x}$. Como el conjunto F es numerable, se tiene que el conjunto $D = \bigcup_{x \in F} C_x$ es numerable. El conjunto F es un subconjunto del conjunto $\bigcup_{x \in F} \overline{C_x}$, entonces $\overline{F} \subset \overline{D}$. Por otra parte, como $D \subset A$ y $|D| \leq \omega$, entonces $D \in \mathcal{A}$. Luego, $\overline{D} \subset B$. Se sigue que $\overline{F} \subset B$, es decir, B es un conjunto ω -cerrado. Por lo tanto, el conjunto B es cerrado en X .

Notemos que el conjunto A es un subconjunto del conjunto B . Como $x_0 \in \overline{A}$, entonces $x_0 \in \overline{B} = B$. Por lo tanto, existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $x_0 \in \overline{C}$. Así, $t(x_0, X) \leq \omega$. Como el x_0 fue arbitrario se tiene que $t(X) \leq \omega$. \square

Otro criterio que usaremos referente a la estrechez y cubierta generadora es el siguiente.

Proposición 3.1.6. Sea X un espacio topológico. Entonces, $t(X) \leq \omega$ si y sólo si la cubierta $\mathcal{U} = \{C \subset X\}$ de subconjuntos numerables del espacio X genera la topología de X .

Demostración. Supongamos primero que $t(X) \leq \omega$. Sean, τ_X la topología original de X y τ la topología generada por la cubierta \mathcal{U} . Sea $A \subset X$ tal que $A \cap C$ es cerrado en C para toda $C \in \mathcal{U}$. Demostraremos que A es un conjunto cerrado en X . Por la Proposición 3.1.5 basta probar que el conjunto A es ω -cerrado en X . Sea $B \subset A$ tal que $|B| \leq \omega$, y sea $b \in \overline{B}$. Consideremos el conjunto $D = B \cup \{b\}$. Se ve que $|D| \leq \omega$. Entonces $D \in \mathcal{U}$. Luego, $A \cap D$ es un subconjunto cerrado en D . Sea $F \subset X$ un conjunto cerrado tal que $A \cap D = D \cap F$. Como el conjunto B es un subconjunto de D , se tiene que $b \in \overline{B}^D$. Si $H = A \cap D$, entonces $\overline{H}^D = H$. El conjunto B es un subconjunto de H , entonces $\overline{B}^D \subset \overline{H}^D = H$. Luego, $b \in H$, en particular $b \in A$. Por lo tanto, $\overline{B} \subset A$. Esto prueba que A es un conjunto ω -cerrado. Como $t(X) \leq \omega$, entonces el conjunto A es cerrado en X . Así, $\tau = \tau_X$, es decir, la cubierta

\mathcal{U} genera la topología del espacio X .

Para la segunda parte, demostraremos que todo conjunto ω -cerrado en X es cerrado en X . Sea $A \subset X$ un conjunto ω -cerrado en X . Basta probar que el conjunto A es cerrado en (X, τ) . Sea $D \subset X$ un subconjunto numerable. Probaremos que $A \cap D$ es cerrado en D . Sea $d \in \overline{A \cap D}^D$. Como $(A \cap D) \subset D$ se tiene que el conjunto $A \cap D$ es numerable. Además, como $(A \cap D) \subset A$ y el conjunto A es ω -cerrado, se tiene que $\overline{A \cap D} \subset A$. Notemos que $\overline{A \cap D}^D \subset \overline{A \cap D} \subset A$, entonces $d \in A$. Luego, $d \in A \cap D$. Por lo tanto, el conjunto $A \cap D$ es cerrado en D . Como \mathcal{U} genera la topología del espacio X , entonces A es cerrado en X . Hemos demostrado que todo conjunto ω -cerrado en X es cerrado en X . Por la Proposición 3.1.5 concluimos que $t(X) \leq \omega$. \square

3.2. Espacios K_ω y K -espacios

En esta sección enunciaremos la definición de los K -espacios y K_ω -espacios, así como algunos resultados referentes a estos espacios que nos proporcionará una manera de saber la estrechez de un grupo topológico libre.

Definición 3.2.1. (K_ω -espacios y K -espacios) Un espacio X es llamado un K -espacio si la cubierta \mathcal{C} de todos los subconjuntos compactos de X genera la topología de X . Se dirá que el espacio es un K_ω -espacio si existe una cubierta numerable de subconjuntos compactos de X que genera la topología de X .

Sin perder generalidad, cuando tengamos una cubierta numerable por subconjuntos compactos de un espacio de Hausdorff, supondremos que los elementos de la cubierta son creciente. Más explícitamente lo enunciamos en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.2. Sea X un espacio de Hausdorff. Consideremos $\mathcal{V} = \{K_n : n \in \omega\}$ una cubierta numerable por subconjuntos compactos de X , y hagamos $\mathcal{U} = \{B_n \subset X : B_n = \bigcup_{i=1}^n K_i\}$. Entonces las topologías generadas por ambas cubiertas coinciden.

Demostración. Sean, τ_1 la topología generada por la cubierta \mathcal{V} y τ_2 la topología generada por la cubierta \mathcal{U} . Consideremos $F \subset X$ un subconjunto cerrado en (X, τ_1) . Entonces, $F \cap K_n$ es cerrado en K_n para todo $n \in \omega$. Como K_n es compacto y X es de Hausdorff, entonces K_n es cerrado en X para todo n . Entonces el conjunto $F \cap K_n$ es un subconjunto cerrado en X . Sea $B_n \in \mathcal{U}$. Por definición, $B_n = \bigcup_{i=1}^n K_i$. Luego, $F \cap B_n = \bigcup_{i=1}^n (F \cap K_i)$. Así, $F \cap B_n$ es cerrado en X . Dado que B_n es unión finita de compactos, se sigue que B_n es compacto y en consecuencia un subconjunto cerrado en X . Como se verifica la igualdad $F \cap B_n = B_n \cap (F \cap B_n)$, se concluye que $F \cap B_n$ es cerrado en B_n . Por lo tanto, F es cerrado en X con la topología τ_2 .

Por otra parte, si F es cerrado en X con la topología τ_2 , entonces para todo $n \in \omega$, el conjunto $F \cap B_n$ es cerrado en B_n . Como B_n es un conjunto cerrado de X , entonces $F \cap B_n$ es cerrado en X para toda n . Sea $n \in \omega$ fijo. Notemos que $F \cap K_n \subset F \cap B_n \subset B_n$. Pero $F \cap K_n = (F \cap K_n) \cap B_n = K_n \cap (F \cap B_n)$, es decir, $F \cap K_n$ es un subconjunto cerrado de K_n para todo $n \in \omega$. Por lo tanto, el conjunto F es cerrado en X con la topología τ_1 .

Así, las topologías generadas por ambas cubiertas coinciden. \square

En adelante cuando consideremos una cubierta numerable por subconjuntos compactos, diremos que sus elementos son creciente, en el sentido de que si $n \in \omega$ entonces $K_n \subset K_{n+1}$, donde K_n es un elemento de la cubierta. Antes de enunciar algunos resultados sobre los espacios K_ω , hagamos algunas observaciones.

Observación 3.2.3. 1) Si \mathcal{V} es una cubierta abierta de un espacio X , entonces \mathcal{V} genera la topología τ_X de X . Sea τ la topología generada por la cubierta \mathcal{V} , y sea $V \in \tau$. Entonces $V \cap W$ es abierto en W para todo $W \in \mathcal{V}$. Entonces, para cada W existe un conjunto abierto $U_W \in \tau_X$ tal que $V \cap W = W \cap U_W$. El conjunto $W \cap U_W$ es abierto en (X, τ_X) para cada $W \in \mathcal{V}$. Como el conjunto $V = \bigcup W \cap U_W$, se sigue que V es un conjunto abierto en X .

2) Un resultado análogo se tiene para cubiertas finitas por subconjuntos cerrados. A saber: Toda cubierta finita de X que consta de subconjuntos cerrados genera la topología de X .

Enunciamos en seguida dos resultados que necesitaremos en la Subsección 3.1.

Proposición 3.2.4. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{C \subset X\}$ una cubierta generadora de X tal que cada elemento de la cubierta es un K -espacio. Entonces, X es un K -espacio.

Demostración. Sea $\mathcal{V} = \{K \subset X\}$ la colección de todos los subespacios compactos de X , y sea $F \subset X$ tal que $F \cap K$ es cerrado en K para toda $K \in \mathcal{V}$. Demostraremos que F es cerrado en X . Para esto, demostraremos que $F \cap C$ es cerrado en C para toda $C \in \mathcal{U}$. Sea $\mathcal{V}_C = \{K_C \subset C\}$ la cubierta de todos los subespacios compactos de C , que genera la topología de C , para cada $C \in \mathcal{U}$. Entonces, basta probar que para cada $C \in \mathcal{U}$ el conjunto $(F \cap C) \cap K_C$ es cerrado en K_C para toda $K_C \in \mathcal{V}_C$. Fijemos un elemento $C \in \mathcal{U}$. Notemos que $\mathcal{V}_C \subset \mathcal{V}$. Entonces, el conjunto $F \cap K_C$ es cerrado en K_C como subespacio de X . De esta manera $F \cap K_C = K_C \cap B$, donde el conjunto B es cerrado en X . Tenemos que, $(F \cap C) \cap K_C = K_C \cap (C \cap B)$. Pero, el conjunto $C \cap B$ es cerrado en C . Entonces, el conjunto $(F \cap C) \cap K_C$ es cerrado en K_C como subespacio de C , y esto para todo $K_C \in \mathcal{V}_C$. Por ser la cubierta \mathcal{V}_C generadora de C , concluimos que $F \cap C$ es un

subconjunto cerrado en C como subespacio de X . Como la cubierta \mathcal{U} de X es generadora, se tiene que el conjunto F es cerrado en X .

Por lo tanto, X es un K -espacio. \square

Proposición 3.2.5. Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo abierto de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y . Si X es un K -espacio, entonces Y es también un K -espacio.

Demostración. Sea $\mathcal{V} = \{K \subset X\}$ la cubierta generadora de X que consiste de todos sus subespacios compactos. La colección $\mathcal{U} = \{f(K) : K \in \mathcal{V}\}$ es una cubierta de subespacios compactos de Y que genera su topología. En efecto, sea $F \subset Y$ tal que $F \cap f(K)$ es abierto en $f(K)$ para toda $K \in \mathcal{V}$. Entonces, existe un conjunto abierto V en Y tal que $F \cap f(K) = f(K) \cap V$. Notemos que el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto en X , y $f^{-1}(F) \cap K = K \cap f^{-1}(V)$. Esto dice que el conjunto $f^{-1}(F)$ es abierto en K para toda $K \in \mathcal{V}$. Entonces, el conjunto $f^{-1}(F)$ es abierto en X . Como f es un mapeo abierto y sobre, se tiene que el conjunto $f(f^{-1}(F)) = F$ es abierto en Y . Así, se ha demostrado que la cubierta $\mathcal{U} = \{f(K) : K \in \mathcal{V}\}$ de Y es generadora.

Si γ es la cubierta de Y que consiste de todos sus subespacios compactos, entonces γ es un refinamiento de la cubierta \mathcal{U} \square

Ejemplo 3.2.6. Sea \mathbb{R} el conjunto de los números reales con su topología usual generada por todos los intervalos abiertos. La cubierta $\mathcal{V} = \{[n, n + 1) : n \in \mathbb{Z}\}$ de \mathbb{R} que consiste de intervalos semiabiertos no genera la topología usual de \mathbb{R} .

Demostración. Denotemos por τ la topología generada por la cubierta \mathcal{V} . Sea $m \in \mathbb{Z}$ fijo. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, la intersección del conjunto $[m, m + 1)$ con el intervalo $[n, n + 1)$ es, o bien el conjunto vacío si $m \neq n$, o bien el conjunto $[n, n + 1)$ si $m = n$. Esto es, para cada $m \in \mathbb{Z}$ el conjunto $[m, m + 1) \in \tau$, pero este conjunto no es abierto ni tampoco cerrado en \mathbb{R} . Por lo tanto, la cubierta \mathcal{V} no genera la topología de \mathbb{R} . \square

Veamos ahora un resultado más concreto de una cubierta que genera la topología de un espacio. Consideremos nuevamente al conjunto de los números reales \mathbb{R} con su topología usual τ_u .

Proposición 3.2.7. El conjunto \mathbb{R} de los números reales con su topología usual es un K_ω -espacio.

Demostración. Consideremos la cubierta de \mathbb{R} dada por $\mathcal{V} = \{[-n, n] : n \in \mathbb{Z}\}$. Sea τ la topología en \mathbb{R} generada por esta cubierta. Sea $A \in \tau$ y $x \in \bar{A}$ donde la cerradura de A se toma en \mathbb{R} con su topología usual. Como $A \in \tau$ entonces para toda $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $A_n = A \cap [-n, n]$ es cerrado en $[-n, n]$. Pero este último conjunto es cerrado en \mathbb{R} , entonces A_n es cerrado en \mathbb{R} para toda n . Probaremos a continuación que existe un $n \in \mathbb{Z}$, tal que $x \in \bar{A}_n$. Del hecho que \mathcal{V} es una cubierta de \mathbb{R} existe un k tal que $x \in [-k, k]$. Elijamos un n de tal manera que $x \in [-n, n]$ pero que $x \neq -n$ y $x \neq n$, y sea $A_n = A \cap [-n, n]$. Afirmamos que $x \in \bar{A}_n$. En efecto, sea U un conjunto abierto en \mathbb{R} tal que $x \in U$. Definamos $\gamma = \min\{|n - x|, |x - (-n)|\}$ y hagamos $\epsilon = \frac{\gamma}{2} > 0$. Se ve que la bola abierta $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ con centro en x y radio ϵ esta contenida en el conjunto $[-n, n]$. Por la definición de conjunto abierto, existe un $\delta > 0$ tal que la bola abierta $(x - \delta, x + \delta)$ esta totalmente contenido en U . Elijamos un $r > 0$ de tal forma que el intervalo $(x - r, x + r) \subset (U \cap (x - \epsilon, x + \epsilon))$. Como $x \in \bar{A}$, y $x \in (x - r, x + r)$, entonces $A \cap (x - r, x + r) \neq \emptyset$. Luego, $U \cap (A \cap [-n, n]) \neq \emptyset$, es decir, $x \in \bar{A}_n$. Como el conjunto A_n es cerrado en \mathbb{R} , se sigue que $x \in A_n = A \cap [-n, n]$. Por lo tanto, $x \in A$, es decir el conjunto A es cerrado en \mathbb{R} .

Así, la cubierta \mathcal{V} que consiste de una colección numerable de subconjuntos compactos genera la topología de \mathbb{R} . Por lo tanto, el conjunto \mathbb{R} es un K_ω -espacio. \square

Enseguida formulamos un resultado referente a los espacios K_ω y la compacidad local. Este criterio nos servirá para saber cuándo un espacio no puede ser un K_ω -espacio. Pero

antes proporcionaremos un resultado que nos ayudará en el desarrollo de esta prueba.

Proposición 3.2.8. Si X es un K_ω espacio y $C \subset X$ es un subconjunto compacto, entonces existe un elemento de la cubierta que genera la topología de X que contiene al conjunto compacto C .

Demostración. Sea $\mathcal{V} = \{K_n : n \in \omega\}$ la cubierta creciente de elementos compactos que genera la topología de X . Si C es un conjunto compacto finito, entonces existe n tal que $C \subset K_n$. Supongamos ahora que C es un subconjunto compacto infinito de X . Haremos la prueba por contradicción. Supongamos que para toda n , el conjunto C no es un subconjunto de K_n . Elijamos para cada $n \in \omega$ un $x_n \in (C \setminus K_n)$, y sea $A = \{x_n : n \in \omega\}$ la colección de estos elementos. Como los elementos de la cubierta son creciente, se verifica que si $n \neq m$ entonces $x_n \neq x_m$. Esto nos dice que A es un conjunto infinito. Sea $N \in \omega$ fijo. Por la elección de los x_n , y del hecho que la cubierta \mathcal{V} es creciente, se tiene que para toda $n \geq N$, $x_n \notin K_N$. Entonces, el conjunto $A \cap K_N$ es un subconjunto del conjunto $\{x_i : i \leq N\}$, y por lo tanto es un conjunto finito. Luego, $A \cap K_n$ es cerrado en X para toda n . Como X es un K_ω -espacio, se tiene que A es cerrado en X . Al intersectar cualquier subconjunto de A con cada elemento de la cubierta, cada intersección resulta un conjunto finito; como consecuencia todo subconjunto de A es también cerrado en X . Esto muestra que el conjunto A es un subespacio discreto de X , y por lo tanto no es compacto. Como además el conjunto A es un subconjunto del conjunto compacto C , entonces C no puede ser un conjunto compacto. Esta contradicción se originó de suponer que para toda n el conjunto C no es subconjunto de K_n . Concluimos entonces, que existe $n \in \omega$ tal que $C \subset K_n$. \square

Observación 3.2.9. Si $\mathcal{U} = \{C_n : n \in \omega\}$ es una base local numerable de un punto $y \in X$, entonces la familia $\beta = \{B_n : B_n = \bigcap_{i=1}^n C_i, n \in \omega\}$ es también una base local numerable

del punto y : sea U un abierto en X que contiene al punto y . Entonces, existe un $n \in \omega$ tal que $y \in C_n \subset U$. Como $y \in B_n$ y $B_n \subset C_n$, entonces $y \in B_n \subset U$, es decir, β es una base local del punto y . Observemos que para toda n , $B_n \supset B_{n+1}$. Dirémos en este caso que β es una familia decreciente. Por lo tanto, si tenemos una base local numerable de un punto, podemos decir sin perder generalidad que esta familia consiste de elementos decreciente.

Con estos resultado podemos demostrar la siguiente proposición.

Proposición 3.2.10. Sea X un K_ω -espacio de carácter numerable. Entonces X es localmente compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{V} = \{K_n : n \in \omega\}$ la cubierta de subconjuntos compactos que genera la topología de X . Sea $x_0 \in X$. Como X es de carácter numerable, tomemos la familia $\beta = \{B_n : n \in \omega\}$ una base local numerable de vecindades de y_0 , y supongamos que es decreciente. Sea B_m un elemento de β fijo. En seguida demostraremos que existe un $n \in \omega$ tal que $B_m \subset K_n$. Supongamos lo contrario. Elijamos para cada $n \in \omega$, un $x_n \in B_m \setminus K_n$, y sea $A = \{x_n : n \in \omega\} \cup \{y_0\}$ la colección de estos elementos. Entonces, y_0 es un punto limite del conjunto A . En efecto, sea U un conjunto abierto que contiene a y_0 . Existe un $N \in \omega$ tal que $y_0 \in B_N \subset U$. Como la familia β es decreciente, se tiene que para toda $n \geq N$, $x_n \in B_N \subset U$. Por lo tanto, y_0 es punto limite del conjunto A . Como una consecuencia de esto, tenemos que cualquier cubierta abierta del conjunto A tiene una subcubierta finita. Entonces, A es un subespacio compacto de X . Por la Proposición 3.2.8 existe un $N \in \omega$ tal que $A \subset K_N$, pero esto no es posible, ya que para toda $n \in \omega$, $x_n \in A \setminus K_n$. Esta contradicción se produjo de suponer que no existe n tal que $B_m \subset K_n$. Por lo tanto existe un $n \in \omega$ tal que $B_m \subset K_n$. Ahora, el conjunto K_n es un subespacio compacto en un espacio de Hausdorff, entonces es cerrado. De esto se tiene que $\bar{B}_m \subset K_n$. Como la cerradura de

B_m es un subconjunto cerrado en el subespacio compacto K_n , se tiene que $\overline{B_m}$ es un subespacio compacto; además $y_0 \in B_m$. Por lo tanto el espacio X es localmente compacto. \square

Tenemos una aplicación de este resultado sobre el conjunto de los número racionales.

Ejemplo 3.2.11. El conjunto de los numero racionales \mathbb{Q} con la topología de subespacio de \mathbb{R} no es un K_ω -espacio.

Demostración. Como el carácter de \mathbb{Q} es numerable, y \mathbb{Q} no es localmente compacto, se tiene de la Proposición 3.2.10 que \mathbb{Q} no puede ser un K_ω -espacio. \square

Ahora, estaremos enfocados en dar una relación respecto a las cubiertas generadoras entre un espacio X y su grupo topológico libre $F(X)$. Para esto consideramos unos resultado previos.

Observación 3.2.12. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{V}' = \{K_n \subset X : K_n \text{ es compacto y } n \in \omega\}$ una cubierta creciente de subconjuntos compactos de X que genera su topología. Si $\mathcal{V} = \{K_n : n \geq N\}$, entonces \mathcal{V} es una cubierta generadora de X .

Teorema 3.2.13. (Milnor) Sea $\mathcal{V}' = \{K_n : n \in \omega\}$ una cubierta creciente de subconjuntos compactos que genera la topología de un espacio X . Entonces, la cubierta $\mathcal{U} = \{K_n \times K_n : n \in \omega\}$ genera la topología producto de $X \times X$.

Demostración. Sea τ la topología generada por la cubierta \mathcal{U} , y sea $W \in \tau$. Demostraremos que W es abierto en $X \times X$. Sea $(a, b) \in W$. Existe un $N \in \omega$ mínimo tal que la pareja $(a, b) \in K_N \times K_N$. Consideremos la cubierta $\mathcal{V} = \{K_n : n \geq N\}$. Por la observación anterior, la cubierta \mathcal{V} es generadora del espacio X . Como $W \in \tau$, se tiene que $W \cap (K_N \times K_N)$ es abierto en $K_N \times K_N$. Entonces, existen conjuntos abiertos H_N, L_N en X tal que $(a, b) \in (K_N \cap H_N) \times (K_N \cap L_N) \subset W \cap (K_N \times K_N)$.

Notemos que los conjuntos $K_N \cap H_N$ y $K_N \cap L_N$ son subconjuntos abiertos en K_N y contienen a a, b , respectivamente. Por la normalidad de K_N (los K_n son compactos), existen conjuntos abiertos U_N, V_N en K_N tal que $a \in U_N \subset \overline{U_N} \subset K_N \cap H_N$ y $b \in V_N \subset \overline{V_N} \subset K_N \cap L_N$, es decir, existen conjuntos abiertos en K_N tal que $(a, b) \in \overline{U_N} \times \overline{V_N} \subset W \cap (K_N \times K_N)$.

Apliquemos, ahora, inducción. Supongamos que para $n \geq N$, existen conjuntos abiertos U_n, V_n en K_n que satisfacen:

- 1) $\overline{U_{n-1}} \subset U_n, \overline{V_{n-1}} \subset V_n$.
- 2) $(a, b) \in \overline{U_n} \times \overline{V_n} \subset W \cap (K_n \times K_n)$.

Del inciso 2) se tiene que $W \cap (K_{n+1} \times K_{n+1})$ es un conjunto abierto en $K_{n+1} \times K_{n+1}$ que contiene al conjunto $\overline{U_n} \times \overline{V_n}$. Por otra parte, como los conjuntos $\overline{U_n}$ y $\overline{V_n}$ son subconjuntos cerrados en el subespacio compacto K_{n+1} , tenemos que $\overline{U_n}, \overline{V_n}$ son subconjuntos compactos en K_{n+1} . Dado que el conjunto $W \cap (K_{n+1} \times K_{n+1})$ es abierto en $K_{n+1} \times K_{n+1}$, se tiene del Teorema 1.1.24 que existen conjuntos abiertos H_{n+1}, L_{n+1} en K_{n+1} que cumplen

$$\overline{U_n} \times \overline{V_n} \subset H_{n+1} \times L_{n+1} \subset W \cap (K_{n+1} \times K_{n+1}).$$

Además, como $\overline{U_n} \subset H_{n+1}$ y $\overline{V_n} \subset L_{n+1}$, podemos aplicar nuevamente el criterio de la normalidad de K_{n+1} , para elegir U_{n+1}, V_{n+1} conjuntos abiertos en K_{n+1} que satisfagan

$$\overline{U_n} \subset U_{n+1} \subset \overline{U_{n+1}} \subset H_{n+1}$$

y

$$\overline{V_n} \subset V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset L_{n+1}.$$

Concluimos que existen conjuntos abiertos U_{n+1}, V_{n+1} en K_{n+1} de a, b , respectivamente, que cumplen la condición:

$$\overline{U_n} \subset U_{n+1}, \quad \overline{V_n} \subset V_{n+1}$$

y

$$\overline{U_{n+1}} \times \overline{V_{n+1}} \subset W \cap (K_{n+1} \times K_{n+1}).$$

Hagamos, $U = \bigcup_{n \geq N} U_n$ y $V = \bigcup_{n \geq N} V_n$. Si $(x, y) \in U \times V$, existen $n, m \in \omega$ tal que $x \in U_n$ y $y \in V_m$. Supongamos que $n < m$, entonces por construcción, $x \in U_m$. Por lo tanto, $(x, y) \in U_m \times V_m \subset W$. Para terminar la prueba, fijemos un $n \geq N$. El conjunto

$$U \cap K_n = \bigcup_{i=N}^{\infty} (U_i \cap K_n) = \bigcup_{i=N}^n (U_i \cap K_n) \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} (U_i \cap K_n).$$

Pero, $\bigcup_{i=N}^n (U_i \cap K_n) = U_n \cap K_n$, esto ya que para $N \leq i \leq n$ los conjuntos $U_i \subset U_n$. Ahora, para cada i los conjuntos U_i son abiertos en K_i , entonces existen conjuntos abiertos H_i en X tal que $U_i = K_i \cap H_i$. Además, si $i \geq n$ se tiene que $K_n \subset K_i$. Por lo tanto,

$$U \cap K_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} (K_n \cap H_i).$$

Los conjuntos $K_n \cap H_i$ son abiertos en K_n . Por lo tanto, $U \cap K_n$ es abierto en K_n . Como la cubierta $\mathcal{V} = \{K_n : n \geq N\}$ es generadora del espacio X , el conjunto U es abierto en X . De la misma manera procedemos para demostrar que V es un conjunto abierto en X . Por lo tanto, como $(a, b) \in U \times V \subset W$, el conjunto W es abierto en $X \times X$. \square

La siguiente proposición nos muestra otra manera de ver la continuidad de una función cuando la topología de su dominio es generada por una cubierta.

Proposición 3.2.14. Sea $\mathcal{V} = \{K_n : n \in \omega\}$ una cubierta en el espacio X que genera su topología, sea $f : X \rightarrow Y$ un mapeo a un espacio Y . Entonces, f es continua si, y sólo si, el mapeo $f|_{K_n} : K_n \rightarrow Y$ es continua para cada n .

Demostración. Sea $V \subset Y$ un subconjunto abierto. Notemos que $f^{-1}(V) \cap K_n = (f|_{K_n})^{-1}(V)$ es abierto en K_n para toda n . Como la cubierta \mathcal{V} genera la topología de X , entonces el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto en X . Por otra parte, la restricción de una función continua sobre un subespacio de su

dominio sigue siendo continua. Por lo tanto, para cada n , $f|_{K_n} : K_n \rightarrow Y$. \square

Antes de continuar haremos una observación y enunciaremos un resultado referente a esta observación.

Observación 3.2.15. Sea $K \subset X$ un subespacio compacto. Si $F_n(K, X) \subset F(X)$ consiste de todas las palabras irreducibles de longitud $\leq n$ por elementos de K en X , entonces $F_n(K, X)$ es un subespacio compacto para toda $n \geq 1$. Esto se tiene al observar que $F_n(K, X) = i_n(K)$. En particular, como los grupos libres sobre espacios de Tychonoff son espacios de Hausdorff, $F_n(K, X)$ es un subconjunto cerrado de X .

Proposición 3.2.16. Sean, X un espacio topológico, y $\mathcal{V} = \{K_n : n \in \omega\}$ una cubierta de subconjuntos compactos en X . Si τ es una topología en $F(X)$ generada por la cubierta $\mathcal{U} = \{F_n(K_n, X) : n \in \omega\}$, y τ_F es la topología de grupo libre en $F(X)$ entonces, las topologías de subespacio de $F_n(K_n, X)$ en $(F(X), \tau)$ y en $(F(X), \tau_F)$ coinciden.

Demostración. Sea W un subconjunto cerrado en $F_n(K_n, X)$ como subespacio de $(F(X), \tau)$. Entonces, existe un subconjunto cerrado F en $(F(X), \tau)$ tal que $W = F_n(K_n, X) \cap F$. Como el conjunto F es cerrado en $(F(X), \tau)$ se cumple que $F_n(K_n, X) \cap F$ es cerrado en $F_n(K_n, X)$ como subespacio de $(F(X), \tau_F)$. Entonces, existe G subconjunto cerrado en $(F(X), \tau_F)$ tal que $W = F_n(K_n, X) \cap F = F_n(K_n, X) \cap G$. Como los dos conjuntos de la última igualdad son cerrados en $(F(X), \tau_F)$ se tiene entonces que W es un subconjunto cerrado de $(F(X), \tau_F)$. Pero, $W = F_n(K_n, X) \cap W$, es decir, W es un subconjunto cerrado en $F_n(K_n, X)$ como subespacio de $(F(X), \tau_F)$.

Por otra parte, si W es un subconjunto cerrado en $F_n(K_n, X)$ como subespacio de $(F(X), \tau_F)$, entonces existe un subconjunto cerrado F en $(F(X), \tau_F)$ tal que $W = F_n(K_n, X) \cap F$. Pero todo subconjunto cerrado en $(F(X), \tau_F)$ es un subconjunto cerrado en $(F(X), \tau)$, por lo tanto W es un subconjunto

cerrado en $F_n(K_n, X)$ como subespacio de $(F(X), \tau)$.

De esta manera hemos demostrado lo requerido. \square

Haremos al conjunto $F(X)$ un grupo topológico mediante la topología de una cubierta de subconjuntos compactos del grupo topológico libre, como lo enuncia el siguiente Teorema.

Teorema 3.2.17. Sean X un espacio topológico, y $\mathcal{V} = \{K_n : n \in \omega\}$ una cubierta de subconjuntos compactos que genera la topología de X . Sea τ la topología generada por la cubierta $\mathcal{U} = \{F_n(K_n, X) : n \in \omega\}$. Entonces, $(F(X), \tau, \cdot)$ es un grupo topológico.

Demostración. Denotemos por τ_F la topología de grupo topológico libre de $F(X)$. Demostraremos que:

a) el mapeo producto

$$\begin{aligned} \cdot : (F(X), \tau) \times (F(X), \tau) &\longrightarrow (F(X), \tau) \text{ dado por} \\ \cdot(x, y) &= xy, y \end{aligned}$$

b) el mapeo inverso $^{-1} : (F(X), \tau) \longrightarrow (F(X), \tau)$ dado por $^{-1}(x) = x^{-1}$,

son continuos.

a) Aplicando el Teorema 3.2.13 a la cubierta $\mathcal{U} = \{K_n : n \in \omega\}$ en $(F(X), \tau)$, tenemos que la cubierta $\mathcal{V} = \{F_n(K_n, X) \times F_n(K_n, X) : n \in \omega\}$ genera la topología de $(F(X), \tau) \times (F(X), \tau)$. Por la Proposición 3.2.14, basta demostrar que para cada $n \in \omega$ el mapeo producto $\cdot : F_n(K_n, X) \times F_n(K_n, X) \longrightarrow (F(X), \tau)$ es continuo.

Como $(F(X), \tau_F)$ es un grupo topológico, entonces el mapeo producto $\cdot : (F(X), \tau_F) \times (F(X), \tau_F) \longrightarrow (F(X), \tau_F)$ es continuo. Así, es continuo sobre el subespacio $F_n(K_n, X) \times F_n(K_n, X)$ de $(F(X), \tau_F) \times (F(X), \tau_F)$ para cada n . Por la Proposición 3.2.16 esta topología de subespacio coincide con la topología de subespacio de $F_n(K_n, X) \times F_n(K_n, X)$ en $(F(X), \tau) \times (F(X), \tau)$. Por lo tanto, $\cdot : F_n(K_n, X) \times F_n(K_n, X) \longrightarrow (F(X), \tau_F)$ es continuo, considerando al conjunto

$F_n(K_n, X) \times F_n(K_n, X)$ como subespacio de $(F(X), \tau) \times (F(X), \tau)$.

La continuidad de este mapeo es casi la que buscamos, excepto que la topología del rango del mapeo \cdot es la del grupo topológico libre y no la topología generada por la cubierta. Pero solucionamos este inconveniente como sigue.

Sea U un subconjunto abierto en $(F(X), \tau)$. Mostraremos que el conjunto $\cdot^{-1}(U)$ es abierto en $F_n(K_n, X) \times F_n(K_n, X)$ para cada $n \in \omega$. Como $U \in \tau$, entonces el conjunto $W_{2n} = U \cap F_{2n}(K_{2n}, X)$ es abierto en $F_{2n}(K_{2n}, X)$ como subespacio de $(F(X), \tau_F)$. Entonces existe un abierto V_{2n} en $(F(X), \tau_F)$ que satisface $W_{2n} = V_{2n} \cap F_{2n}(K_{2n}, X)$. Notemos que la imagen directa del conjunto $F_n(K_n, X) \times F_n(K_n, X)$ bajo el mapeo producto es exactamente el conjunto $F_{2n}(K_{2n}, X)$. Entonces, $\cdot^{-1}(U) = (F_n(K_n, X) \times F_n(K_n, X)) \cap \cdot^{-1}(V_{2n})$. Como V_{2n} es abierto en $(F(X), \tau_F)$ y el mapeo producto \cdot es continuo sobre el espacio $(F(X), \tau_F) \times (F(X), \tau_F)$, entonces el conjunto $\cdot^{-1}(V_{2n})$ es abierto en $(F(X), \tau_F) \times (F(X), \tau_F)$. Por lo tanto, el conjunto $\cdot^{-1}(U)$ es abierto en $(F_n(K_n, X) \times F_n(K_n, X))$. Así, el mapeo $\cdot : F_n(K_n, X) \times F_n(K_n, X) \rightarrow (F(X), \tau)$ es continuo. Por lo tanto, el mapeo producto $\cdot : (F(X), \tau) \times (F(X), \tau) \rightarrow (F(X), \tau)$ es continuo.

b) Para este caso procedemos de la misma manera. Tenemos que demostrar que $\cdot^{-1} : (F(X), \tau) \rightarrow (F(X), \tau)$ es continuo. Por la Proposición 3.2.14 basta demostrar que es continuo sobre cada elemento de la cubierta, es decir, que $\cdot^{-1} : F_n(K_n, X) \rightarrow (F(X), \tau)$ es continuo para toda $n \in \omega$. Como $(F(X), \tau_F)$ es un grupo topológico, entonces el mapeo inverso $\cdot^{-1} : (F(X), \tau_F) \rightarrow (F(X), \tau_F)$ es continuo. Luego, es continuo sobre cada subconjunto $F_n(K_n, X)$ como subespacio de $(F(X), \tau_F)$; nuevamente por la Proposición 3.2.16 esta topología de subespacio coincide con la topología de subespacio de $F_n(K_n, X)$ en $(F(X), \tau)$. Por lo tanto, el mapeo inverso de $\cdot^{-1} : F_n(K_n, X) \rightarrow (F(X), \tau_F)$ es continuo. Tenemos el mismo problema como en el caso del producto, en-

tonces el desarrollo de la prueba de la continuidad de $\tau^{-1} : F_n(K_n, X) \rightarrow (F(X), \tau)$ es la misma. Por lo tanto, el mapeo $\tau^{-1} : (F(X), \tau) \rightarrow (F(X), \tau)$ es continuo.

Hemos demostrado que $(F(X), \tau)$ es un grupo topológico. \square

Hay una observación bastante interesante del Teorema anterior respecto al espacio X .

Observación 3.2.18. Notemos que la topología τ del Teorema 3.2.17 sobre el grupo $F(X)$ induce en X su topología original. Esto es porque como $\tau_F \subset \tau$ y $\tau_X = \tau_F|_X$, entonces $\tau_X \subset \tau|_X$. Por otra parte, si F es un subconjunto cerrado en X como subespacio de $(F(X), \tau)$ entonces, para cada $n \in \omega$ el conjunto $F \cap K_n$ es cerrado en K_n como subespacio de X . En efecto, como F es cerrado en el espacio $(X, \tau|_X)$, entonces $F = X \cap B$, donde B es un subconjunto cerrado en $(F(X), \tau)$. Luego, como τ es la topología generada por la cubierta \mathcal{U} , entonces para todo $n \in \omega$, el conjunto $B \cap F_n(K_n, X)$ es cerrado en $F_n(K_n, X)$ como subespacio de $(F(X), \tau_F)$. Entonces, existe C subconjunto cerrado en $(F(X), \tau_F)$ de tal forma que $B \cap F_n(K_n, X) = C \cap F_n(K_n, X)$. Tenemos que,

$$F \cap K_n = X \cap B \cap K_n = B \cap K_n.$$

Como $K_n \subset F_n(K_n, X)$, entonces

$$\begin{aligned} F \cap K_n &= K_n \cap B \cap F_n(K_n, X) = K_n \cap C \cap F_n(K_n, X) \\ &= K_n \cap C = K_n \cap (X \cap C) \end{aligned}$$

Como el conjunto C es cerrado en $(F(X), \tau_F)$ y la topología de X coincide con la topología de subespacio en $(F(X), \tau_F)$, entonces el conjunto $X \cap C$ es cerrado en X . Luego, el conjunto $K_n \cap (X \cap C)$ es cerrado en K_n como subespacio de X . Por lo tanto, $F \cap K_n$ es un subconjunto cerrado en K_n como subespacio de X para toda $n \in \omega$. Como la cubierta $\mathcal{V} = \{K_n : n \in \omega\}$ genera la topología de X , concluimos que el conjunto F es cerrado en X .

De esto se tiene que la topología τ del Teorema 3.2.17 genera la topología de X , esto es, $\tau_X = \tau|_X$.

El siguiente resultado es consecuencia de la Observación 3.2.18 y el Teorema 3.2.17.

Teorema 3.2.19. Si X es un K_ω -espacio, entonces $(F(X), \tau_F)$ es también un K_ω -espacio.

Demostración. Sea $\mathcal{V} = \{K_n : n \in \omega\}$ la cubierta de subconjuntos compactos que genera la topología de X . Por el Teorema 3.2.17, la cubierta $\mathcal{U} = \{F_n(K_n, X) : n \in \omega\}$ genera en $F(X)$ una topología de grupo topológico. Por definición de cubierta generadora, se tiene que la topología de grupo libre τ_F en $F(X)$ esta contenida en la topología τ generada por la cubierta \mathcal{U} . De la Observación 3.2.18 tenemos que la topología τ induce en X su topología original. Por la Proposición 2.1.8, la topología de grupo libre τ_F es la topología mas fina que induce en X su topología original. Entonces, $\tau \subset \tau_F$. Por lo tanto, la topología de grupo libre en $F(X)$ coincide con la topología generada por la cubierta \mathcal{U} . Pero el Teorema 3.2.17 nos dice además que el grupo $F(X)$ con la topología τ es un K_ω -espacio. Por lo tanto, $(F(X), \tau_F)$ es un K_ω -espacio. \square

Tenemos de inmediato el siguiente resultado sobre espacios compactos.

Corolario 3.2.20. Si X es un espacio compacto, entonces $F(X)$ es un K_ω -espacio.

Demostración. Hagamos $K_n = X$ para toda $n \in \omega$. Por la Observación 3.2.3 inciso 1), la cubierta $\mathcal{U} = \{K_n : n \in \omega\}$, genera la topología de X . Entonces X es un K_ω -espacio. Por el Teorema 3.2.19, $F(X)$ es también un K_ω -espacio. \square

3.3. Estrechez en Grupos Topológicos Libres

En esta sección daremos algunos resultados sobre la estrechez de un espacio X y su grupo topológico libre $F(X)$.

El resultado, que a continuación damos, sobre mapeos cocientes nos será de gran utilidad en el desarrollo de esta sección.

Proposición 3.3.1. Sean X, Y dos espacios topológicos, y $f : X \rightarrow Y$ un mapeo cociente. Entonces, $t(Y) \leq t(X)$.

Demostración. Sea $t(X) = \kappa$. Por la Proposición ??, basta demostrar que todo conjunto κ -cerrado en Y es cerrado en Y . Sea $A \subset Y$ un conjunto κ -cerrado en Y . Hagamos $C = f^{-1}(A)$. Demostremos por el momento que C es un conjunto κ -cerrado en X . Sea $B \subset C$ tal que $|B| \leq \kappa$. El mapeo $f : B \rightarrow f(B)$ es sobre, entonces $|f(B)| \leq |B| \leq \kappa$. Como $B \subset C$, se tiene que $f(B) \subset A$ con $|f(B)| \leq \kappa$. Dado que A es κ -cerrado, tenemos que $\overline{f(B)} \subset A$. Además, se cumple que $B \subset f^{-1}(\overline{f(B)}) \subset C$. Como el mapeo f es continuo, se tiene que el conjunto $f^{-1}(\overline{f(B)})$ es cerrado en X . Entonces, $\overline{B} \subset f^{-1}(\overline{f(B)})$. Por lo tanto, $\overline{B} \subset C$. Así, el conjunto C es κ -cerrado en X , entonces es cerrado en X , ya que $t(X) \leq \kappa$. Como el mapeo f es cociente y el conjunto $f^{-1}(A)$ es cerrado en X , entonces el conjunto A es cerrado en Y . Por lo tanto, todo conjunto κ -cerrado en Y es un conjunto cerrado en Y . Así, nuevamente por la Proposición ??, $t(Y) \leq \kappa = t(X)$. \square

La siguiente proposición muestra como obtener la estrechez de un espacio X a través de sus subconjuntos que cumplen ciertas propiedades.

Proposición 3.3.2. Sean X un espacio topológico, y $\mathcal{U} = \{X_n : n \in \omega\}$ una cubierta de X que genera su topología. Si para todo $n \in \omega$ se cumple que $t(X_n) \leq \kappa$, entonces $t(X) \leq \kappa$

Demostración. Sea $A \subset X$ un conjunto κ -cerrado, y demostremos que A es cerrado en X . Como la cubierta \mathcal{U} genera la topología de X , basta demostrar entonces que para todo n el conjunto $A \cap X_n$ es cerrado en X_n como subespacio de X . Esto se reduce a demostrar que para cada n el conjunto $A \cap X_n$ es κ -cerrado en X_n . Sea $B \subset A \cap X_n$ con la cardinalidad de

B no excediendo a κ . Como $B \subset A$, y A es κ -cerrado en X , entonces $\overline{B}^X \subset A$. Ahora, como X_n es un subespacio de X , se cumple que $\overline{B}^{X_n} \subset \overline{B}^X$. Así, $\overline{B}^{X_n} \subset A \cap X_n$. Por lo tanto, $A \cap X_n$ es κ -cerrado en X_n , y entonces es cerrado en X_n para cada n . Así, A es un subconjunto cerrado en X . Por lo tanto, $t(X) \leq \kappa$. \square

Nuestro objetivo de ahora en adelante es mostrar dos importantes resultados sobre la estrechez del grupo topológico libre cuando el espacio de sus generadores es un K_ω -espacio o es un espacio compacto. Para esto enunciaremos unos resultados que necesitaremos para la demostración.

Teorema 3.3.3. (A.V. Arhangel'skii) Sean X, Y dos espacios topológicos, κ un cardinal infinito, y $f : X \rightarrow Y$ un mapeo cerrado. Si $t(Y) \leq \kappa$ y para cada $y \in Y$, $t(f^{-1}(\{y\})) \leq \kappa$, entonces $t(X) \leq \kappa$.

Demostración. Sea $A \subset X$ un subconjunto κ -cerrado, y demostremos que este conjunto es cerrado en X . Hagamos esta prueba por contradicción. Sea $x_0 \in \overline{A}^X \setminus A$. Para cada $y \in Y$, consideremos el conjunto $f^{-1}(\{y\})$ de X como un subespacio. Pongamos $D = A \cap f^{-1}(\{y\})$, y sea $B \subset D$ que satisfaga $|B| \leq \kappa$. Consideremos la cerradura del conjunto B en el subespacio $f^{-1}(\{y\})$, y denotemos esta cerradura por \overline{B}^y . El conjunto B es un subconjunto de A , y $|B| \leq \kappa$. Como el conjunto A es κ -cerrado, entonces $\overline{B}^X \subset A$. El conjunto cerrado $f^{-1}(\{y\})$ tiene como subconjunto al conjunto B , entonces $\overline{B}^X \subset f^{-1}(\{y\})$. Además $\overline{B}^y \subset \overline{B}^X$. Por lo tanto, $\overline{B}^y \subset D$. Hemos demostrado que para cada $y \in Y$, el conjunto $A \cap f^{-1}(\{y\})$ es un conjunto κ -cerrado en X . Por hipótesis $t(f^{-1}(\{y\})) \leq \kappa$, entonces D es un subconjunto cerrado en $f^{-1}(\{y\})$. Como este último conjunto es cerrado en X , entonces el conjunto D es un subconjunto cerrado en X .

Por otra parte, demostremos que el conjunto $f(A)$ es un conjunto κ -cerrado en Y . Sea $B \subset f(A)$ un subconjunto de $f(A)$ cuya cardinalidad no excede al cardinal κ . El mapeo

restringido $f : A \rightarrow f(A)$ es sobre. Para cada $b \in B$ elijamos un $a_b \in A$ de tal forma que $f(a_b) = b$. Si el conjunto $C \subset X$ consta de todos los a_b tal que $b \in B$, se ve que $f(C) = B$, y $|f(C)| = |B| \leq \kappa$. Entonces, $|C| \leq \kappa$. Como $C \subset A$ y A es κ -cerrado, se tiene que $\overline{C}^X \subset A$. Luego, $B = f(C) \subset f(\overline{C}^X) \subset f(A)$. Por hipótesis el mapeo f es cerrado, entonces $f(\overline{C}^X)$ es un subconjunto cerrado en Y que contiene al conjunto \overline{B}^Y , esto implica $\overline{B}^Y \subset f(A)$. Por lo tanto $f(A)$ es κ -cerrado en Y , y como la estrechez de Y no excede al cardinal κ , concluimos que $f(A)$ es cerrado en Y .

El punto $x_0 \in \overline{A}^X \setminus A$, entonces $f(x_0) \in \overline{f(A)}^Y = f(A)$. Así, existe $a \in A$ tal que $f(a) = f(x_0)$. Hagamos $y_0 = f(x_0)$. Se tiene que el conjunto $D_{y_0} = f^{-1}(\{y_0\}) \cap A \neq \emptyset$. Por la primera parte de esta demostración el conjunto D_{y_0} es cerrado en X . Como $x_0 \notin A$, se sigue que $x_0 \notin D_{y_0}$. Por lo tanto, debe existir W un subconjunto abierto en X que contiene a x_0 y que no interseca al conjunto D_{y_0} . De la regularidad de X , podemos elegir un abierto U en X que contenga al punto x_0 y que satisfaga $x_0 \in U \subset \overline{U} \subset W$. Por lo tanto, $\overline{U} \cap D_{y_0} = \emptyset$. Como $x_0 \in \overline{A}$, se sigue $x_0 \in \overline{A} \cap \overline{U}$. Notemos que $y_0 \notin f(\overline{U} \cap A)$, de lo contrario $\overline{U} \cap D_{y_0} \neq \emptyset$ lo cual no es posible. Por otra parte, el conjunto $\overline{U} \cap A$ es un conjunto κ -cerrado en X : sea $B \subset (\overline{U} \cap A)$ con $|B| \leq \kappa$. Entonces $\overline{B} \subset \overline{U}$. Como A es un conjunto κ -cerrado, entonces $\overline{B} \subset A$. Así, $\overline{B} \subset (\overline{U} \cap A)$, es decir, el conjunto $\overline{U} \cap A$ es κ -cerrado. Como se demostró anteriormente, el conjunto $f(\overline{U} \cap A)$ es un conjunto κ -cerrado en Y . Dado que la estrechez de Y no excede al cardinal κ , tenemos que $f(\overline{U} \cap A)$ es un subconjunto cerrado en Y .

El punto x_0 pertenece al conjunto $\overline{\overline{U} \cap A}$, pero $y_0 = f(x_0) \notin \overline{f(\overline{U} \cap A)} = f(\overline{U} \cap A)$. En otras palabras, $f(\overline{\overline{U} \cap A}) \not\subset \overline{f(\overline{U} \cap A)}$, lo cual contradice la continuidad de f . Esta anomalía surgió del hecho de suponer que $A \subset X$ es un conjunto κ -cerrado pero no es un conjunto cerrado en X . Por lo tanto, todo conjunto κ cerrado en X es cerrado en X . Entonces la estrechez del espacio X no excede al cardinal κ . \square

Desprendemos un corolario de este resultado respecto a la relación de la estrechez de un espacio y su producto cartesiano.

Corolario 3.3.4. Si X es un espacio compacto, entonces $t(X \times X) = t(X)$.

Demostración. Sea $t(X) = \kappa$. Como X es un espacio compacto, por el Teorema 1.1.23, el mapeo $\rho : X \times X \rightarrow X$ dado por $\rho(x, y) = y$ es cerrado. Sea $y \in X$. Notemos que $\rho^{-1}(\{y\}) = X \times \{y\}$. Los espacios X y $X \times \{y\}$ son isomorfos. Entonces $t(X \times \{y\}) = t(X) = \kappa$. Por lo tanto, para cada $y \in Y$ la estrechez del conjunto $\rho^{-1}(\{y\})$ no excede al cardinal κ . Por el Teorema 3.3.3, se tiene que $t(X \times X) \leq t(X)$.

Por otra parte, como el conjunto $X \times \{y\}$ es un subespacio de $X \times X$, se tiene que $t(X \times \{y\}) \leq t(X \times X)$. Pero la estrechez de X coincide con la estrechez de $X \times \{y\}$. Así, $t(X) \leq t(X \times X)$.

Por lo tanto, $t(X \times X) = t(X)$. \square

Existe una relación entre la estrechez de la suma topológica de dos espacios compactos y la estrechez de cada uno de ellos. A saber.

Proposición 3.3.5. Sean X, Y espacios compactos. Entonces $t(X \oplus Y) = t(X)t(Y)$

Demostración. Sin perder generalidad podemos suponer que los conjuntos dados son disjuntos. Sea $Z = X \oplus Y$ la suma topológica. Como X y Y son compactos, se tiene que Z también lo es. Sean, $\kappa_1 = t(X)$, $\kappa_2 = t(Y)$ y $\kappa = t(X)t(Y)$. Demostraremos que todo subconjunto $A \subset Z$ κ -cerrado en Z es cerrado en Z . Pero esto se reduce a demostrar que los conjuntos $A_1 = A \cap X$ y $A_2 = A \cap Y$ son κ_1 -cerrados y κ_2 -cerrados en X e Y , respectivamente. Probemos que el conjunto A_1 es κ_1 -cerrado en X . Sea $B \subset A_1 \subset A$ satisfaciendo que $|B| \leq \kappa$. Como A es κ -cerrado en Z , entonces $\overline{B}^Z \subset A$. Además, $\overline{B}^X = \overline{B}^Z \cap X$. El conjunto de la igualdad derecha es un subconjunto de A_1 . Entonces $\overline{B}^X \subset A_1$. Esto es, A_1

es un conjunto κ_1 -cerrado en X . Como $t(X) = \kappa_1$, entonces A_1 es cerrado en X . Análogamente se demuestra que A_2 es κ_2 -cerrado en Y , y entonces cerrado en Y .

Notemos que $A = A_1 \cup A_2$ es unión de dos conjuntos cerrado en Z , entonces A es un conjunto cerrado en Z . Por lo tanto, $t(Z) \leq \kappa = t(X)t(Y)$.

Por otra parte, $t(X) \leq \kappa$ y $t(Y) \leq \kappa$, entonces $t(X)t(Y) \leq \kappa\kappa$. Como κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa\kappa = \kappa$. Luego, $t(X)t(Y) \leq \kappa$. Por lo tanto, $t(X \oplus Y) = t(X)t(Y)$. \square

Antes de seguir con la prueba de otros resultados, haremos una observación.

Observación 3.3.6. Sea $Z = X \oplus Y$ como en la prueba anterior, y τ la topología suma en Z . Sea $T = (Z \times X) \oplus (Z \times Y)$. Entonces $Z \times Z = T$. En efecto, se verifica sin mayor dificultad que como conjuntos $Z \times Z$ es igual a T . Sea τ_1 la topología producto en $Z \times Z$, y sea τ_2 la topología suma de T . Nos interesa demostrar que estas topologías coinciden.

Para verificar que todo conjunto abierto en la topología producto de Z es abierto en la topología suma de T , basta demostrar que todos los abiertos formados por el producto cruz de dos abierto en la topología suma de Z es abierto en la topología suma de T . Con mas detalle, sea $W = U \times V$ un abierto básico en la topología τ_1 , es decir, $U, V \in \tau$. Demostremos en primera instancia que $W \cap (Z \times X)$ es abierto en $(Z \times X)$, donde el conjunto $(Z \times X)$ se considera con la topología producto. Como $V \in \tau$, entonces $V \cap X$ es abierto en X . Notemos que U es un conjunto abierto en Z . Observemos que

$$(U \times V) \cap (Z \times X) = (U \cap Z) \times (V \cap X) = U \times (V \cap X)$$

Se sigue que el conjunto $(U \times V) \cap (Z \times X)$ es abierto en $(Z \times X)$ ya que es igual al producto cruz de un abierto en Z con un abierto en X . De la misma manera $(U \times V) \cap (Z \times Y)$ es una abierto en $(Z \times Y)$. Por lo tanto, la topología producto de $Z \times Z$ está contenida en la topología suma de T .

Para la otra parte, sea W un abierto en la topología suma

de T . Entonces, por definición de topología suma, el conjunto $W \cap (Z \times X)$ es abierto en $(Z \times X)$ y el conjunto $W \cap (Z \times Y)$ es abierto en $(Z \times Y)$. Estos conjuntos podemos verlo como la unión de subconjuntos abiertos en $Z \times Z$ con su topología producto. Como $W = (W \cap (Z \times X)) \cup (W \cap (Z \times Y))$ es la unión de dos conjuntos abiertos en $Z \times Z$, se tiene que W es abierto en $Z \times Z$ con su topología producto.

Hemos probado entonces que la topología producto de $Z \times Z$ coincide con la topología suma de T . Por lo tanto, $Z \times Z = (Z \times X) \oplus (Z \times Y)$.

Tenemos en seguida el siguiente resultado que es un corolario de la Proposición 3.3.5.

Corolario 3.3.7. Sean X, Y dos espacios compactos. Entonces $t(X \times Y) = t(X)t(Y)$

Demostración. Sin perder generalidad, supongamos que $X \cap Y = \emptyset$. Sea $Z = X \oplus Y$. Por la observación anterior, $Z \times Z = (Z \times X) \oplus (Z \times Y)$. Aplicando nuevamente la observación anterior pero ahora a los subconjuntos $Z \times X$ y $Z \times Y$, obtenemos que

$$\begin{aligned} Z \times Z &= [(X \times X) \oplus (Y \times X)] \oplus [(X \times Y) \oplus (Y \times Y)] \\ &= (X \times X) \oplus (Y \times X) \oplus (X \times Y) \oplus (Y \times Y). \end{aligned}$$

Los espacios $X \times Y$ y $Y \times X$ son homeomorfos. Entonces $t(X \times Y) = t(Y \times X)$. Como X es un espacio compacto, entonces el mapeo factor en la segunda coordenada $\rho : X \times Y \rightarrow Y$ dado por $\rho(x, y) = y$ es cerrado. Como además el mapeo ρ es suprayectivo, entonces resulta ser un mapeo cociente. Por el Teorema 1.1.23 se tiene que $t(Y) \leq t(X \times Y)$. Como Y también es un espacio compacto, al aplicar el procedimiento anterior obtenemos que $t(X) \leq t(Y \times X)$.

De estas últimas dos desigualdades se tiene que

$$t(X)t(Y) \leq t(Y \times X)t(X \times Y) = t(X \times Y)t(X \times Y) = t(X \times Y).$$

Así, $t(X)t(Y) \leq t(X \times Y)$.

Para la otra parte de la desigualdad, notemos primero que el espacio $X \times Y$ es un subespacio de $Z \times Z$, es decir, la topología producto de $X \times Y$ coincide con la topología de subespacio en $Z \times Z$. Entonces, se tiene que $t(X \times Y) \leq t(Z \times Z)$.

Ahora, calculamos la estrechez del conjunto $Z \times Z$. Aplicando la Proposición 3.3.5 seguidamente el Corolario 3.3.4 a los conjuntos $[(X \times X) \oplus (Y \times X)]$ y $[(Y \times X) \oplus (Y \times Y)]$, obtenemos las siguientes igualdades

$$t([(X \times X) \oplus (Y \times X)]) = t(X \times X)t(Y \times X) = t(X)t(Y \times X)$$

y

$$t([(Y \times X) \oplus (Y \times Y)]) = t(X \times Y)t(Y \times Y) = t(X \times Y)t(Y).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} t(Z \times Z) &= t(X)t(Y \times Y)t(Y \times X)t(Y) = t(X)t(Y)t(X \times Y) \\ &\leq t(X \times Y)t(X \times Y) = t(X \times Y). \end{aligned}$$

Esto es, $t(Z \times Z) \leq t(X \times Y)$.

Por lo tanto, $t(X \times Y) = t(Z \times Z)$. Aplicando nuevamente el Corolario 3.3.4 y la Proposición 3.3.5 al espacio $Z \times Z$, resulta que

$$t(X \times Y) = t(Z \times Z) = t(Z) = t(X)t(Y).$$

Hemos obtenido que, $t(X \times Y) = t(X)t(Y)$, y el teorema queda demostrado. \square

Enunciamos a continuación un Teorema que generaliza el Corolario 3.3.7, conocido como el Teorema de Mal'ychin, no sin antes hacer una pequeña observación que nos ayudará en su prueba.

Observación 3.3.8. Sea $n \geq 1$. El espacio producto $X^n = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n\text{-veces}}$ es homeomorfo al espacio $Y \times X$ donde $Y = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{(n-1)\text{-veces}}$. Entonces, $t(X^n) = t(Y \times X)$.

Teorema 3.3.9. (Malyhin) Sea X un espacio compacto. Entonces $t(X^n) = t(X)$ para toda $n \geq 1$

Demostración. Para el caso $n = 2$ es el Corolario 3.3.7. Apliquemos inducción sobre n . Sea $Y = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{(n-1)\text{-veces}}$, y supon-

gamos que $t(X^{n-1}) = t(X)$. Como el espacio X es compacto, entonces Y también lo es. Nuevamente, aplicando el Corolario 3.3.7 a los espacios Y y X , resulta que $t(Y \times X) = t(Y)t(X) = t(X)t(X) = t(X)$. De la Observación anterior, concluimos que $t(X^n) = t(X)$. \square

Enunciamos los en seguida los resultados prometidos.

Teorema 3.3.10. Si X es un K_ω -espacio, entonces $t(F(X)) = t(X)$.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{K_m : m \in \omega\}$ una cubierta numerable de subconjuntos compactos que genera la topología del espacio X . La cubierta $\mathcal{V} = \{F_m(K_m, X) : m \in \omega\}$ es una cubierta de subconjuntos compactos del grupo topológico libre $F(X)$ que genera la topología de grupo libre. En el capítulo anterior mostramos que el mapeo multiplicación $i_n : \tilde{X} \rightarrow F(X)$ es continuo para toda $n \geq 1$. Para cada $m \in \omega$, sea $\tilde{K}_m = K_m \oplus K_m^{-1} \oplus \{e\}$ la suma topológica de K_m , su copia homeomorfa K_m^{-1} en X^{-1} , y la identidad e en $F(X)$. Como K_m es compacto, entonces \tilde{K}_m también lo es. Notemos que \tilde{K}_m es un subconjunto compacto de \tilde{X} . Si restringimos el dominio de i_n sobre el conjunto compacto \tilde{K}_m^n , y el contradominio al subconjunto de $F(X)$ el conjunto $F_m(K_m, X)$, resulta que el mapeo $i_n : \tilde{K}_m^n \rightarrow F_m(K_m, X)$ es cerrado (Proposición 1.1.21), entonces es un mapeo cociente (Proposición 1.1.14). Se sigue de la Proposición 3.3.1 que, $t(F_m(K_m, X)) \leq t(\tilde{K}_m^n)$. Pero, $t(\tilde{K}_m^n) \leq t(\tilde{X}^n)$. Por el Teorema 3.3.9, $t(\tilde{X}^n) = t(\tilde{X})$. Tenemos de la Proposición 3.3.5 que,

$$t(\tilde{X}) = t(X)t(X^{-1}) = t(X)t(X) = t(X)$$

Así, $t(F_m(K_m, X)) \leq t(X)$ para toda $m \in \omega$. Entonces por la Proposición 3.3.2 la estrechez del grupo topológico libre no excede al cardinal infinito $t(X)$, esto es, $t(F(X)) \leq t(X)$. Como X es un subespacio de $F(X)$, entonces, $t(X) \leq t(F(X))$. Por lo tanto, hemos demostrado que $t(F(X)) = t(X)$. \square

Tenemos de inmediato un corolario cuando la estrechez del espacio es numerable.

Corolario 3.3.11. Si X es un espacio K_ω de estrechez numerable, entonces la estrechez del grupo topológico libre sobre X es también numerable.

La prueba del siguiente Teorema es análoga a la del Teorema 3.3.9.

Teorema 3.3.12. Si X es un espacio compacto, entonces $t(F(X)) = t(X)$.

Demostración. Sea X un espacio compacto. Entonces $F(X)$ es un K_ω -espacio con $\mathcal{U} = \{F_n(X) : n \in \omega\}$ una cubierta de subconjuntos compactos que genera la topología de $F(X)$. De aquí, seguimos el procedimiento del Teorema 3.3.9 para concluir que $t(F(X)) = t(X)$. \square

3.3.1. Estrechez en Espacios Métricos

En esta subsección estaremos enfocados, en obtener la estrechez de los grupos topológicos libres sobre espacios topológicos metrizable. Enunciaremos una propiedad que caracterize a los subconjuntos de un espacio métrico (ver Definición 3.3.26).

Sea X un espacio topológico. Para cada subconjunto Φ de $F(X)$ definimos el *carrier* de Φ en X , denotado $\text{car } \Phi$, que consiste de todos los elementos de X que toman parte en alguna palabra irreducible que pertenece a Φ , en otras palabras, el $\text{car } \Phi$ es el conjunto minimal $B \subset X$ con la propiedad de

que $\Phi \subset F(B, X)$.

Un conjunto $B \subset X$ es acotado en X si todo mapeo continuo de valores reales sobre el espacio X es acotado en el conjunto B .

Tenemos unas observaciones respecto a la definición anterior.

Observación 3.3.13. 1. Observemos de la definición anterior que para cualquier subconjunto $B \subset F(X)$ se tiene que $B \subset F(\text{car} B, X)$.

2. Si $A \subset X$ es un conjunto acotado en X , entonces todo subconjunto B de A es acotado en X . Todo conjunto compacto de un espacio X es acotado en X .

La demostración del siguiente Teorema podemos encontrarlo en [1] Teorema 1.5.

Teorema 3.3.14. Si $\Phi \subset F(X)$ es un conjunto acotado en $F(X)$, entonces $\text{car} \Phi$ es acotado en X .

En lo que sigue enunciamos una definición del Abanico de Fréchet de cardinalidad \aleph_1 . El número ordinal ω_1 es el ordinal más 'pequeño' de cardinalidad \aleph_1 .

Definición 3.3.15. (El Abanico de Fréchet) El *Abanico de Fréchet* de cardinalidad ω_1 es el espacio $V(\omega_1) = \{a_{m\alpha} : m \in \omega, \alpha < \omega_1\} \cup \{\theta\}$ en el que los puntos $a_{m\alpha}, m \in \omega, \alpha < \omega_1$ son aislados, y un conjunto $U \subset V(\omega_1)$ es un abierto que contiene al punto θ si, y sólo si, para cada $\alpha < \omega_1$ el conjunto $\{m \in \omega : a_{m\alpha} \notin U\}$ es finito.

Asignamos a cada mapeo $\varphi : \omega_1 \rightarrow \omega$ el subconjunto

$$O(\varphi) = \{\theta\} \cup \{a_{m\alpha} : m \geq \varphi(\alpha)\}$$

en $V(\omega_1)$. La colección $\mathfrak{D} = \{O(\varphi) : \varphi \in \omega^{\omega_1}\}$ es una base local del punto θ .

La siguiente Proposición caracteriza a los espacios homeomorfos al Abanico de Fréchet.

Proposición 3.3.16. Sea X un espacio topológico de cardinalidad ω_1 . El espacio X es homeomorfo a $V(\omega_1)$ si y sólo si existe una cubierta $\mathcal{V} = \{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ del espacio X y un punto $x_0 \in X$ tal que

- a) $C_\alpha \cap C_\beta = \{x_0\}$ siempre que $\alpha \neq \beta$ y $\alpha, \beta < \omega_1$,
- b) cada C_α , con $\alpha < \omega_1$, es una sucesión convergente con punto límite x_0 ,
- c) la cubierta $\mathcal{U} = \{\bigcup \mathcal{V}' : \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}, |\mathcal{V}'| < \omega\}$ es generadora.

Los siguientes conceptos básicos son de Teoría de Conjunto, los enunciamos aquí porque los necesitaremos en la prueba del siguiente teorema.

Definición 3.3.17. Sean $\varphi : \omega \rightarrow \omega$ y $\psi : \omega \rightarrow \omega$ dos sucesiones. Diremos que ψ es **Eventualmente Mayor** que φ , denotado, $\varphi \leq^* \psi$, si existe un $m \in \omega$ tal que $\varphi(k) \leq \psi(k)$ para todo $k \geq m$.

Definición 3.3.18. Un conjunto $A \subset \omega^\omega$ se dirá que es **Acotado** si existe $\psi \in \omega^\omega$ tal que $\varphi \leq^* \psi$ para todo mapeo $\varphi \in A$. En este caso se dice que ψ es una cota superior de A .

Proposición 3.3.19. Todo subconjunto numerable de ω^ω es acotado.

Demostración. Sea $A = \{\varphi_i : i \in \omega\}$. Pongamos $\varphi(n) = \max\{\varphi_i(n) : i \leq n\}$. Fijemos $i \in \omega$. Sea $m = i$. Entonces $\varphi_i(k) \leq \varphi(k)$ para todo $k \geq m$. Entonces φ es una cota superior del conjunto A . \square

Un resultado fundamental sobre el Abanico de Fréchet es el siguiente cuya demostración se deduce del argumento en la demostración del Teorema 1.6 de [4].

Teorema 3.3.20. La estrechez del producto $V(\omega_1) \times V(\omega_1)$ es no numerable.

Demostración. Se demuestra en [5] y [8], que existen dos familias $\mathfrak{A} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ y $\mathfrak{B} = \{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de subconjuntos infinitos en ω tal que

- a) $A_\alpha \cap B_\alpha$ es finito para toda $\alpha, \beta < \omega_1$,
- b) no existe $A \subset \omega$ tal que los conjuntos $A_\alpha \setminus A, B_\alpha \cap A, \alpha < \omega_1$ son finito.

Elijamos un par $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ de estas familias, y denotemos

$$Y = \{(a_{n\alpha}, b_{n\beta}) \in V(\omega_1) \times V(\omega_1) : n \in A_\alpha \cap B_\beta\}$$

La pareja $(\theta, \theta) \in V(\omega_1) \times V(\omega_1)$ es un punto de acumulación del conjunto Y . Para tal afirmación, sea W un conjunto abierto de (θ, θ) en $V(\omega_1) \times V(\omega_1)$. Existen, $\phi, \psi \in \mathbb{N}^{\omega_1}$ tal que $(\theta, \theta) \in O(\phi) \times O(\psi) \subset W$. Como la colección \mathfrak{D} es base local de (θ, θ) , existe $\varphi \in \omega^{\omega_1}$ satisfaciendo $\theta \in O(\varphi) \subset O(\phi) \times O(\psi)$, esto es, $(\theta, \theta) \in O(\varphi) \times O(\varphi) \subset W$. Sean

$$A'_\alpha = \{n \in A_\alpha : n \geq \varphi(\alpha)\}$$

y

$$B'_\alpha = \{n \in B_\alpha : n \geq \varphi(\alpha)\}$$

Estos conjuntos son no vacíos para toda $\alpha < \omega_1$. Supongamos por el contrario que existe un $\beta < \omega_1$ tal que $A'_\beta = \emptyset$, entonces $|\{n \in \mathbb{N} : a_{n\beta} \notin O(\varphi)\}| = \omega$, contradiciendo el hecho que $O(\varphi)$ es un abierto de θ ; de la misma manera se demuestra que B'_α es no vacío. Por lo tanto, para toda $\alpha < \omega_1$, los conjuntos A'_α, B'_α son no vacíos.

Si para cada $\alpha < \omega_1$ y $\beta < \omega_1$ se tiene que $A'_\alpha \cap B'_\beta = \emptyset$, entonces se tendrá que

$$\left(\bigcup_{\alpha} \{A'_\alpha : \alpha < \omega_1\}\right) \cap \left(\bigcup_{\beta} \{B'_\beta : \beta < \omega_1\}\right) = \emptyset.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} & \left(\bigcup_{\alpha} \{A'_{\alpha} : \alpha < \omega_1\} \right) \cap \left(\bigcup_{\beta} \{B'_{\beta} : \beta < \omega_1\} \right) = \\ & = \bigcup_{\alpha} [A'_{\alpha} \cap \bigcup_{\beta} \{B'_{\beta} : \beta < \omega_1\}] \\ & = \bigcup_{\alpha} [\bigcup_{\beta} (A'_{\alpha} \cap B'_{\beta})] = \emptyset. \end{aligned}$$

Ahora, sea $A = \bigcup \{A'_{\alpha} : \alpha < \omega_1\}$ y $B = \bigcup_{\beta} \{B'_{\beta} : \beta < \omega_1\}$. Como $O(\varphi)$ es un conjunto abierto que contiene a θ , entonces para cada $\beta < \omega_1$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_{n\alpha} \notin O(\varphi)\}$ es finito. Si $n \in A_{\beta} \setminus A'_{\beta} = \{n \in \mathbb{N} : n < \varphi(\beta)\}$, entonces $a_{n\beta} \notin O(\varphi)$. Por lo tanto, $A_{\beta} \setminus A'_{\beta}$ debe ser finito para cada $\beta < \omega_1$. Así, $A_{\beta} \setminus A \subset A_{\beta} \setminus A'_{\beta}$ es finito. Por otra parte, para cada $\beta < \omega_1$ se tiene $B_{\beta} \cap A = \emptyset$. De lo contrario se tendrá que $A \cap B \neq \emptyset$, lo cual no es posible.

Hemos demostrado entonces que existe un subconjunto $A \subset \omega$ que satisface lo contrario a lo postulado en el inciso (b). Esta contradicción se originó de suponer que para cada $\alpha < \omega_1$ y $\beta < \omega_1$ los conjuntos $A'_{\alpha} \cap B'_{\beta}$ son vacíos. Por lo tanto, existen $\alpha < \omega_1$ y $\beta < \omega_1$ tal que $A'_{\alpha} \cap B'_{\beta} \neq \emptyset$.

Elijamos $n \in A'_{\alpha} \cap B'_{\beta}$. Entonces $a_{n\alpha} \in O(\varphi)$ y $a_{n\beta} \in O(\varphi)$; en otras palabras $(a_{n\alpha}, b_{n\beta}) \in O(\varphi) \times O(\varphi) \subset W$. Además, $n \in A_{\alpha} \cap B_{\beta}$. Es decir, el punto $(a_{n\alpha}, b_{n\beta}) \in Y$. Concluimos entonces que $Y \cap W \neq \emptyset$. Por lo tanto, la pareja (θ, θ) es punto límite de Y .

Para terminar, sea K un subconjunto arbitrario contable de Y . Como la cardinalidad del conjunto K no excede al cardinal ω_0 , y $\omega_0 < \omega_1$, entonces existe un ordinal $\gamma < \omega_1$ tal que

$$K \subset \{(a_{n\alpha}, b_{n\beta}) : \alpha, \beta < \gamma, n \in \omega\}$$

En este caso es conveniente reenumerar a las familias \mathfrak{A} y \mathfrak{B} de tal forma que tengamos $\gamma = \omega_0$. Notemos que bajo esta

reenumeración, las familias \mathfrak{A} y \mathfrak{B} no pierden las propiedades enunciadas en los incisos a) y b). Bajo estas condiciones el conjunto $\mathfrak{D} = \{O(\varphi) : \varphi \in \omega^\omega\}$. Para cada $k \in \omega$ definamos un mapeo $\varphi_k : \omega \rightarrow \omega$ por $\varphi_k(l) = B_k \cap A_l$, y sea $A = \{\varphi_k : k \in \omega\}$ la colección de estas funciones. Por la Proposición 3.3.19, para cada $k \in \omega$ existe un $r_k \in \omega$ tal que $\varphi(l) \geq \varphi_k(l)$ para toda $l \geq r_k$, donde φ es una cota superior de A . Ahora, definimos el mapeo $\psi : \omega \rightarrow \omega$ como sigue

$$\psi(l) = \max\{\varphi(l), \max\{\bigcup\{B_m : m < r_l\} \cap A_l\} + 1\}$$

y $U = O(\psi) \times O(\psi)$. Por construcción, U es un abierto del punto (θ, θ) . Demostremos, ahora, que $U \cap K = \emptyset$. Notemos que para cada par de elementos $k, l \in \omega$ el mapeo $\psi(l) \geq \max(B_k \cap A_l) + 1$. Por lo tanto, si $(a_{nl}, a_{nk}) \in K$, entonces $\psi(l) > n(n \in (A_l \cap B_k))$ por definición de X y $(a_{nl}, a_{nk}) \notin U$. Así, (θ, θ) no es punto limite de cualquier subconjunto numerable K en X . Entonces, la estrechez del producto $V(\omega_1) \times V(\omega_1)$ debe exceder al cardinal \aleph_0 . En otras palabras, el espacio $V(\omega_1) \times V(\omega_1)$ tiene estrechez no numerable. \square

Corolario 3.3.21. El producto $V(\omega_1) \times V(\omega_1)$ no es un K -espacio.

Demostración. Notemos primero que, si K es un subespacio compacto de $V(\omega_1)$ entonces, K es contable. Esto es fácil ver del hecho que los conjuntos unipuntuales $\{a_{m\alpha}\}$, donde $m \in \omega, \alpha < \omega_1$, son abiertos en $V(\omega_1)$. Por otra parte, los mapeos $f, g : V(\omega_1) \times V(\omega_1) \rightarrow V(\omega_1)$ dados por $f(x, y) = x$ y $g(x, y) = y$ son continuos. Si $B \subset V(\omega_1) \times V(\omega_1)$ es un subespacio compacto, entonces B debe ser también numerable. En efecto, supongamos por el contrario que $|B| = \omega_1$. Como $B \subset f(B) \times g(B)$, entonces, o bien $|f(B)| = \omega_1$ o bien $|g(B)| = \omega_1$. En cualquier caso, contradice el hecho que cualquier subconjunto compacto de $V(\omega_1)$ es numerable. Así, todo subespacio compacto de $V(\omega_1) \times V(\omega_1)$ es numerable.

Si el espacio $V(\omega_1) \times V(\omega_1)$ es un K -espacio, entonces la cubierta \mathcal{V} de todos los subespacios compactos de $V(\omega_1) \times V(\omega_1)$

genera la topología producto de $V(\omega_1) \times V(\omega_1)$. Luego, por la Proposición 3.1.6, la estrechez del espacio $V(\omega_1) \times V(\omega_1)$ dede de ser numerable, contradiciendo el Teorema 3.3.20.

Por lo tanto, el producto $V(\omega_1) \times V(\omega_1)$ no es un k -espacio. \square

Sea X un espacio. Los subespacios $Y \subset X$ proporcionan en $F(X)$ subespacios $F(Y, X)$ que consisten de todas las palabras irreducibles por elementos de Y en X . Sin embargo, tenemos también para cada espacio Y , con $Y \subset X$, su grupo topológico libre $F(Y)$. A simple vista podríamos decir que estos espacios son iguales, pero notemos que a $F(Y, X)$ lo estamos considerando como subespacio de $F(X)$, mientras que $F(Y)$ es el grupo libre generado por su subconjunto Y con su topología de grupo topológico libre. El siguiente Teorema demostrado en [25,23] nos dice que en realidad existe un isomorfismo topológico entre estos espacios cuando el espacio X es métrico.

Teorema 3.3.22. Sean, X un espacio metrizable y Y un subespacio cerrado en X . Entonces, $F(Y, X)$ es isomorfo topológicamente a $F(Y)$.

Sea Z un espacio métrico. Denotemos por $C = \{x_n \in Z : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ una sucesión convergente con punto limite x_0 , y por D un espacio discreto de cardinalidad ω_1 .

Proposición 3.3.23. Sean C y D los conjuntos definidos anteriormente, y consideremos su suma topológica $X = C \oplus D$. El grupo topológico libre $F(X)$ no es un K -espacio y la estrechez de $F(X)$ es no numerable.

Demostración. Antes de iniciar la demostración, notemos que ningún subconjunto infinito $A \subset D$ puede ser acotado en X . En efecto, sea $B \subset A$ un conjunto numerable, $B = \{b_n : n \in \omega\}$. El mapeo $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que a todo valor del conjunto $C \cup (D \setminus B)$ le asocia el valor $0 \in \mathbb{R}$, y a cada $b_{n \in B}$ le asocia el valor $n \in \mathbb{N}$, es continuo. Pero, $f(B) = \mathbb{N}$ no es un conjunto acotado en \mathbb{R} . Por lo tanto, si $A \subset D$ es infinito, entonces A

no es acotado en X .

Supongamos primero que $F(X)$ es un K -espacio. Por la observación anterior, si $A \subset X$ es un conjunto acotado en X , entonces el conjunto $A \cap D$ debe ser finito. Luego, cualquier subconjunto acotado en $X = C \oplus D$ está contenido en un conjunto de la forma $C \oplus A$, donde $A \subset D$ es un conjunto finito. Ahora, consideremos las cubiertas $\mathcal{V} = \{F \subset F(X) : F \text{ es subconjunto compacto}\}$ y $\mathcal{U} = \{B \subset F(X) : B \text{ es acotado en } F(X)\}$ de $F(X)$. Sea $\mathcal{U}_F = \{F \cap B : B \in \mathcal{U}\}$ la cubierta de F , para cada $F \in \mathcal{V}$. Entonces, \mathcal{U}_F es generadora de F . En efecto, como cada subespacio compacto es un K -espacio, entonces la cubierta $\mathcal{U}'_F = \{K \subset F : K \text{ es subespacio compacto de } F\}$ genera la topología de F . Notemos que todo subespacio compacto K de F es un subespacio compacto de $F(X)$. Luego, el conjunto K es acotado en $F(X)$. Como $K \subset F \cap K \in \mathcal{U}_F$, entonces \mathcal{U}_F es un refinamiento de \mathcal{U}'_F . Por lo tanto, de la Proposición 3.1.3 inciso (ii), la cubierta \mathcal{U}_F debe ser generadora de F . Ahora, usando la Proposición 3.1.3 inciso (iii), se tiene que la cubierta \mathcal{U} es generadora de $F(X)$.

Recordemos que para $B \subset F(X)$, se tiene que $B \subset F(\text{car } B, X)$. Si B es acotado entonces, $\text{car } B$ también es acotado (ver Teorema 3.3.14), entonces existe un $A \subset D$ finito tal que $\text{car } B \subset C \oplus A$. Se tiene que $B \subset F(C \oplus A)$, donde $A \subset D$ es un conjunto finito. Entonces la cubierta $\mathcal{A} = \{F(C \oplus A, X) : A \subset D \text{ es finito}\}$ es un refinamiento de \mathcal{U} , como esta última es generadora de $F(X)$, se sigue que \mathcal{A} también lo es.

Hagamos $C_a = \{a^{-1}x_0^{-1}xa : x \in C\}$ para cada $a \in D$ y $Y = \bigcup_{a \in C} C_a$. Probemos en seguida que para cada $a \in D$, los conjuntos C_a y C son homeomorfos. Fijemos $a \in D$. Consideremos el conjunto $M = \{a^{-1}\} \cup \{x_0^{-1}\} \cup C \cup \{a\}$. Si $\tilde{X} = X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$ es la suma topológica, entonces, si i_4 es el mapeo producto definido como en el capítulo anterior, se tiene que $i_4|_M : M \rightarrow F(X)$ es continuo. Como $i_4(M) = C_a$ y C_a es un espacio Hausdorff, entonces $i_4|_M : M \rightarrow C_a$ es

un homeomorfismo. Por otra parte, los conjuntos M y C son homeomorfos. Entonces, los conjuntos C y C_a son homeomorfos.

Notemos que para cada $a \in D$ el elemento identidad $e \in F(X)$ pertenece a C_a , ya que $x_0 \in C_a$. Además, si $a \neq b$ con $a, b \in D$, entonces $C_a \cap C_b = \{e\}$. Para cada conjunto finito $A \subset D$ el conjunto $Y_A = Y \cap F(C \oplus A, X) = \bigcup_{a \in A} C_a$ es compacto (el último conjunto de la igualdad es unión finita de conjuntos compactos), por lo tanto cerrado en $F(C \oplus A, X)$. Como la cubierta \mathcal{A} es generadora de $F(X)$, el conjunto Y es cerrado en $F(X)$. Por el inciso (i) de la Proposición 3.1.3, la cubierta $\mathcal{A}_Y = \{Y_A : A \subset D, A \text{ es finito}\}$ debe ser generadora del espacio Y . Se ve que la cardinalidad de Y es ω_1 . Para cada $a \in D$ el conjunto C_a es un asucesión en Y con punto limite la palabra vacía e . En efecto, sea $f : C \rightarrow C_a$ el homeomorfismo. Como la sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ converge al punto x_0 , entonces $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, es decir, la sucesión $\{a^{-1}x_0^{-1}x_n a : n \in \omega\}$ converge al punto $a^{-1}x_0^{-1}x_0 a = e$. Luego, la cubierta $\mathcal{A}' = \{C_a : a \in D\}$ del espacio Y satisface las condiciones (a), (b) y (c) de la Proposición 3.3.16. Entonces Y es homeomorfo al Abanico de Fréchet $V(\omega_1)$.

Del Corolario 3.3.21 se sigue que el espacio producto $Y \times Y$ no es un K -espacio, por lo tanto tampoco lo es $F(X) \times F(X)$. Pero $F(X)$ es homeomorfo a $F(X \oplus X)$ (es un corolario de los resultados de [3]). Además, existe un mapeo abierto de $F(X \oplus X)$ sobre $F(X) \times F(X)$ (ver [7]). Entonces, existe un mapeo abierto de $F(X)$ sobre $F(X) \times F(X)$. Por la Proposición 3.2.5, $F(X)$ no puede ser un K -espacio, contradiciendo la suposición inicial.

Por lo tanto, el grupo topológico libre $F(X)$ no es un K -espacio.

Supongamos ahora que la estrechez de $F(X)$ es numerable. Entonces, por la Proposición 3.1.6, la cubierta $\mathcal{U} = \{B \subset F(X) : B \text{ es numerable}\}$ de $F(X)$ es generadora. Sea $\mathcal{V} = \{F(\text{car} B, X) \subset F(X) : B \subset F(X) \text{ es numerable}\}$ la cubierta

de $F(X)$. Se sigue de la Observación 3.3.13 inciso (1) que \mathcal{V} es un refinamiento de \mathcal{U} , entonces la cubierta \mathcal{V} debe generar la topología de $F(X)$. Por otra parte, es fácil demostrar que si $B \subset F(X)$ es un conjunto numerable, entonces $\text{car} B$ es también un conjunto numerable. Entonces, la cubierta $\gamma = \{F(C \oplus A) : A \subset D, A \text{ es contable}\}$ debe ser generadora de $F(X)$. La cubierta numerable de subconjuntos compactos de $C \oplus A$ dada por $\{\{a\} : a \in A, A \subset D \text{ es numerable}\} \cup \{C\}$ es generadora. Entonces, $C \oplus A$ es un K_ω -espacio. Por el Teorema 3.2.19, se sigue que $F(C \oplus A)$ es un K_ω -espacio. Como el conjunto $C \oplus A$ es cerrado en $C \oplus D$, se sigue del Teorema 3.3.22 que el conjunto $F(C \oplus A, X)$ es un K_ω -espacio. Entonces, cada elemento en γ es un K -espacio. Usando ahora la Proposición 3.2.4 obtenemos que $F(X)$ es un K -espacio, contradiciendo la primera parte.

Por lo tanto, la estrechez del grupo topológico libre $F(X)$ del espacio X debe ser no numerable. \square

Daremos un resultado más general respecto a la estrechez del grupo topológico libre y el espacio X . Pero antes, daremos algunas definiciones necesarias y algunos resultados previos a nuestro objetivo.

Definición 3.3.24. (Propiedad sobre Conjuntos) Sea X un conjunto y P una propiedad sobre sus subconjuntos. Decimos que la propiedad P es de caracter finito si, el conjunto vacío tiene la propiedad P , y un subconjunto $A \subset X$ tiene la propiedad P si y sólo si los subconjuntos finitos de A tienen esta propiedad.

Enunciamos el siguiente lema de gran utilidad que es equivalente al Axioma de elección (ver [13]).

Lema 3.3.25. (Lema de Teichmüller-Tukey) Si P es una propiedad de caracter finito perteneciente a los subconjuntos del conjunto X , entonces todo subconjunto $A \subset X$ con la propiedad P está contenido en un subconjunto $B \subset X$ que

también tiene esta propiedad y es maximal en la familia de todos los suconjuntos de X que tienen la propiedad P ordenado por la relación \subset .

Enunciaremos una definición más en relación a los subconjuntos de un espacio métrico.

Definición 3.3.26. (ϵ -discreto) Sea X un espacio metrizable y denotemos por d su métrica. Sea $\epsilon > 0$. Un subconjunto $A \subset X$ es ϵ -discreto si para cada par de puntos $a, b \in A$ con $a \neq b$ se tiene que $d(a, b) \geq \epsilon$.

Observación 3.3.27. Denotemos por P_ϵ la propiedad: $A \subset X$ es ϵ -discreto. Se ve que esta propiedad P_ϵ sobre los conjuntos ϵ -discretos es de caracter finito. Por el Lema 3.3.25, para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto ϵ -discreto maximal.

Los conjuntos ϵ -discretos en un conjunto metrizable tienen ciertas propiedades.

Proposición 3.3.28. Si $B \subset X$ es un conjunto ϵ -discreto, entonces B es discreto y cerrado.

Demostración. Sea $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Tenemos que $\{b\} = B \cap V_\delta(b)$ para todo elemento $b \in B$, donde $V_\delta(b)$ es la bola abierta de radio δ y centro en b . Por lo tanto, el conjunto B es discreto. Por otra parte ninguna sucesión no-discreta en B puede ser de Cauchy. Entonces B no tiene puntos limites. Por lo tanto, B es cerrado. \square

Construimos un subconjunto denso en un espacio métrico a través de los conjuntos ϵ -discreto.

Proposición 3.3.29. Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \omega$ consideremos A_n conjuntos $\frac{1}{n+1}$ -discretos maximales. Entonces $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$ es un conjunto denso en X .

Demostración. Sea $x \in X \setminus A$ y $\epsilon > 0$. Existe un $n \in \omega$ tal que $0 < \frac{1}{n+1} < \epsilon$. Para toda $m \in \omega$, $x \notin A_m$, en particular $x \notin A_n$.

Entonces hay un $a \in A_n$ que debe cumplir $d(x, a) < \frac{1}{n+1}$. Es decir, $a \in V_{\frac{1}{n+1}}(x) \subset V_\epsilon(x)$. Por lo tanto, $V_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$, esto es, el conjunto $A \subset X$ es denso en X . \square

De estos resultados tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 3.3.30. Si X es un espacio metrizable no separable, entonces existe un subconjunto $D \subset X$ discreto, cerrado y no numerable.

Demostración. Sea el conjunto $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$ como en la proposición anterior, y sea $\kappa = d(X)$ con κ no numerable. De la proposición 3.3.29, A es un subconjunto denso en X . Entonces $|A| \geq \kappa$. Debe existir un $n \in \omega$ tal que A_n es no numerable (de lo contrario la unión sería numerable). Por la proposición 3.3.28 el conjunto A_n es discreto y cerrado. Sea $D = A_n$. Entonces D es discreto, cerrado, no numerable. \square

El siguiente resultado es un Corolario de la Proposición 3.3.23.

Corolario 3.3.31. Si X es un espacio métrico no discreto no separable, entonces $F(X)$ no es un K -espacio y la estrechez de $F(X)$ es no numerable.

Demostración. De la proposición anterior, sea D_1 el subconjunto discreto, cerrado, no numerable. Como X es no discreto, existe un punto $x_0 \in X$ tal que el conjunto $\{x_0\}$ no es abierto. Sea S_1 una sucesión que converge al punto $x_0 \in X$, y sea $S = S_1 \cup \{x_0\}$. Este último conjunto es compacto dentro de un Hausdorff, entonces cerrado. Si $T = D_1 \cap S \neq \emptyset$, entonces renombramos el conjunto discreto D_1 por $D = D_1 \setminus T$. Se ve que T es numerable. Como $D \subset D_1$, entonces D es discreto, no numerable, y cerrado en D_1 , luego cerrado en X . Además, $D \cap S = \emptyset$. Sea $Y_1 = S \cup D$ el subespacio de X , $Y = S \oplus D$ la suma topológica de la sucesión S con el discreto, cerrado, no numerable D . Se verifica que la topología suma de Y es igual a la topología de subespacio de Y_1 en X . Como Y es cerrado

en X , entonces $F(Y)$ es isomorfo topológicamente a $F(Y, X)$ (Teorema 3.3.22). Por otra parte, de la Proposición 3.3.23 se cumple que el grupo topológico libre $F(Y)$ generado por su subconjunto Y no es un K -espacio y tiene estrechez no numerable. Se sigue que $F(Y, X)$ no es K -espacio con estrechez no numerable; esto es, $F(X)$ tiene un subespacio que no es un K -espacio, de estrechez no numerable. Por lo tanto, el grupo topológico libre $F(X)$ no es un K -espacio y su estrechez es no numerable. \square

Cuando un espacio métrico es separable, entonces la estrechez de su grupo topológico libre no excede al cardinal \aleph_0 . De manera mas detallada lo enuncia el siguiente Teorema.

Teorema 3.3.32. Sea X un espacio métrico separable. Entonces, $t(F(X)) \leq \omega$.

Demostración. Sea $d(X) = \omega$. Consideremos el espacio suma $\tilde{X} = X \oplus X^{-1} \oplus \{e\}$. De la Proposición 1.1.27 inciso 4), se tiene que $n\omega(\tilde{X}) \leq \omega$. Por el inciso 5) de la misma Proposición, $n\omega(\tilde{X}^n) \leq \omega$. Por otra parte, el mapeo multiplicativo $i_n : \tilde{X}^n \rightarrow F(X)$ es continua. Al restringir el contradominio a su rango, este mapeo sigue siendo continua, es decir, $i_n : \tilde{X}^n \rightarrow F_n(X)$ es continua y suprayectiva. Entonces, por la Proposición 1.1.30 $n\omega(F_n(X)) \leq n\omega(\tilde{X}^n) \leq \omega$, es decir, para toda $n \in \omega$ el peso de red de $F_n(X)$ no excede al cardinal ω . Aplicando nuevamente el inciso 4) de la Proposición 1.1.27, $n\omega(F(X))$ no excede a ω . Por último, aplicando 3) de la Proposición 1.1.27, concluimos que la estrechez del grupo topológico libre $F(X)$ es a lo mas numerable. \square

Concluimos nuestro trabajo de tesis con un resultado que nos da condiciones para saber cuándo la estrechez del grupo topológico libre de un espacio topológico X es a lo mas numerable.

Teorema 3.3.33. La estrechez del grupo topológico libre no excede a ω si y sólo si X es un espacio métrico discreto o separable.

Demostración. De la Proposición 2.1.5 y el Teorema 3.3.32 se tiene que si X es discreto o métrico separable, entonces $t(F(X)) \leq \omega$.

Por otra parte, supongamos que X es métrico no separable ni discreto. Del Corolario 3.3.31, $F(X)$ no es un K -espacio, y su estrechez es no numerable. Esto es, $t(F(X)) > \omega$. Por lo tanto, si $t(F(X)) \leq \omega$, entonces X es discreto o métrico separable. Esto termina la demostración.

□

Conclusión

El estudio de los llamados grupos topológicos libres es de bastante interés, sobre todo saber qué propiedades del espacio de su generador se satisfacen aún en el grupo topológico libre. En este trabajo mostramos un amplio desarrollo de manera más detallada de algunos resultados que en otros trabajos son muy difícil de analizar y comprender. Ejemplos de esto fueron, la demostración del Teorema de Arhangel'skii referentes a subconjuntos cerrados en el grupo topológico libre (ver Teorema 2.2.3); la prueba del Teorema de Milnor respecto a una cubierta generadora en el espacio producto (ver Teorema 3.2.13); otro Teorema de Arhangel'skii respecto a mapeos cerrados y estrechez del espacio (ver Teorema 3.3.3); y por último una demostración bastante laboriosa de la no numerabilidad de la estrechez del Abanico de Fréchet (ver Teorema 3.3.20). Como bien, el lector podrá darse cuenta de la amplia variedad de conceptos, criterios y propiedades que se utilizaron en todo el trabajo, y sobre todo de la relación que hay entre ellos. El concepto de cubierta generadora en espacio topológico fue uno de los papeles principales en todo el trabajo.

Los objetivos planteados al principio se alcanzaron, por ejemplo demostramos que si el espacio X es un K_ω -espacio, entonces la estrechez del grupo topológico libre coincide con la estrechez del espacio de sus generadores (ver Teorema 3.3.10); y que si X es un espacio métrico, entonces la estrechez del grupo topológico libre no excede al cardinal ω si y sólo si el espacio es separable o discreto (ver Teorema 3.3.33). No hay

contribuciones nuevas, pero si muchas herramientas para lectores que no están familiarizados con esta teoría, que a mi criterio es muy interesante.

Estos son algunos resultados que se tienen sobre propiedades inductivas, tales como compacidad, estrechez numerable y K -espacios. Sin embargo, hay poco conocido para estas propiedades en el caso general, y no existen resultados no triviales sobre las propiedades inductivas de los grupos topológicos libres en otras categorías de grupos (tales como los grupos topológicos libres booleanos, grupos topológicos libres totalmente acotados). Quedan, pues, abiertos estos problemas para el caso general.

Bibliografía

- [1] A.V. Arhangel'skii, O.G. Okunev, V.G. Pestov, "Free Topological Groups over Metrizable Space". *Topology and its Applications*. Vol 33. pp 63-76. 1989.
- [2] M. I. Graev, "Free topological groups". *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* Vol 12. pp 279-324. 1949.
- [3] M.I. Graev, "Theory of topological groups 1". *Uspekhi Mat. Nauk.* Vol 5. pp 3-56. 1950.
- [4] G. Gruenhage, Y. Tanaka, "Products of K -Spaces and Spaces of countable tightness". *Trnas. Amer. Math. Soc.* Vol 273. pp 299-308. 1982.
- [5] N.N. Luzin, "On sets of natural numbers". *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* Vol 40. pp 195-199. 1943.
- [6] A.A.Markov, "On free topological groups", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* Vol 9. 1945.
- [7] E. Michael, " \aleph_0 -spaces". *J. Math. Mech.* Vol 15. pp 983-1002. 1966.
- [8] F. Rothberger, "On some Problems of Hausdorff and Sierpinski". *Fund. Math.* Vol 35. pp 29-46. 1948.
- [9] M.G. Tkačuk, "On completeness of free Abelian topological groups". *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* Vol 269. pp 299-303. 1983.

-
- [10] V.V. Uspenskij, “On subgroups of free topological groups”. Dokl. Akad. Nauk SSSR. Vol 285. pp 1070-1072. 1985.
- [11] A.V. Arhangel’skii, M. Tkanchenco, “Topological Groups and Related Structures”. Atlantis Press/World Scientific. 978-90-78677-06-2. 2008.
- [12] Rotman, Joseph J., “Advanced Modern Algebra”. Prentice Hall. Ilustrada, revisada 0130878685, 9780130878687. 2002.
- [13] Engelking, Ryszard , “General Topology”. Heldermann Verlag Berlin. Revisada 3885380064, 9783885380061. 1989.

Simbología

Símbolos Definición

\mathbb{R}	El conjunto de los números reales.
\mathbb{Q}	El conjunto de los números racionales.
$f^{-1}(U)$	Preimagen de un conjunto por un mapeo.
$f(B)$	Imagen directa de un conjunto por un mapeo.
$ A $	Cardinalidad de un conjunto A .
$X \setminus A$	Complemento del conjunto A respecto a X .
\emptyset	Conjunto vacío.
A^d	Conjunto de puntos de acumulación de A .
\overline{A}	Cerradura del conjunto A en el espacio topológico X .
\overline{Y}^X	La cerradura del conjunto Y con la topología de X .
$\langle A \rangle$	Subgrupo generado por el conjunto A .
$\bigoplus_{s \in S} X_s$	Suma topológica de una familia $\{X_s : s \in S\}$.
X/E	Conjunto cociente o espacio cociente.
\simeq	Grupos isomorfos.
\cong	Espacios homeomorfos.
$x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$	Palabra de longitud n .
$F_a(X)$	Grupo libre del conjunto X .

$F(X)$	Grupo topológico libre del espacio X .
$A_a(X)$	Grupo Abelian libre del conjunto X .
$A(X)$	Grupo topológico Abelian libre del espacio X .
e	Palabra vacía o identidad.
$F_n(X)$	Subespacio de las palabras de longitud $\leq n$.
$F(Y, X)$	Subespacio de las palabras por elementos de Y .
$\tau _Y$	Topología de subespacio.
$f _M$	Restricción de una función sobre un subespacio.
$V_r(p)$	Bola abierta de radio r con centro en p .
$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$	Producto cartesiano.
ω	Conjunto de los números naturales.
ω_1	Conjunto de cardinalidad \aleph_1 .
$V(\omega_1)$	El Abanico de Fréchet.

Índice alfabético

- K -espacios, 32
- K_ω -espacios, 32
- ϵ -discreto, 65

- Abanico de Fréchet, 56

- Base, 2
- Base libre, 14

- Car de un conjunto, 55
- Carácter de un espacio, 10
- Carácter de un punto, 10
- Conjunto κ -cerrado, 30
- Conjunto ω -cerrado, 30
- Conjunto acotado en ω^ω , 57
- Conjunto acotado en un espacio, 56
- Conjunto denso, 2
- Conmutador, 19
- Cubierta generadora, 29

- Espacio T_0 , 6
- Espacio T_1 , 6
- Espacio de Hausdorff, 6
- Espacio de Tychonoff, 6
- Espacio normal, 6
- Espacio regular, 6
- Espacios compactos, 8
- Estrechez de un espacio, 10
- Estrechez de un punto, 10

- Eventualmente mayor, 57

- Función cardinal, 9

- Genera topológicamente, 15
- Grupo Abelian libre, 14
- Grupo libre, 14
- Grupo topológico, 13
- Grupo topológico Abelian libre, 16
- Grupo topológico libre, 16

- Homeomorfismo, 4
- Homomorfismo, 14

- Isomorfismo, 14

- Lema de Teichmüller-Tukey, 64
- Localmente compacto, 9
- Longitud de una palabra, 15

- Mapeo abierto, 4
- Mapeo cerrado, 4
- Mapeo cociente, 6
- Mapeo continuo, 4

- Palabra irreducible, 15
- Palabra vacía, 15
- Peso, 10
- Peso red, 10
- Producto de palabras, 15

- Propiedad de caracter finito,
64
- Punto aislado, 2
- Punto cerradura, 2
- Punto de acumulación, 2
- Subespacio, 3
- Subespacio de las palabras de
longitud $\leq n$, 20
- Subespacio de las palabras por
elementos, 61
- Sucesión convergente, 3
- Suma de espacios, 6
- Teorema de Arhangel'skii, 22,
48
- Teorema de Kuratowski, 9
- Teorema de Malyhin, 54
- Teorema de Milnor, 39
- Teorema de Wallace, 9
- Topología, 1
- Topología cociente, 6
- Topología generado por una cu-
bierta, 29
- Topología suma, 6