



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Decaimientos de neutrinos de Majorana en teorías efectivas

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA

Javier Eduardo Ricaño Paz

ASESOR

Dr. Héctor Novales Sánchez

Puebla Pue.
Noviembre de 2023



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Decaimientos de neutrinos de Majorana en teorías efectivas

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

por

Javier Eduardo Ricaño Paz

ASESOR

Dr. Héctor Novales Sánchez

Puebla Pue.
Noviembre de 2023

Título: Decaimientos de neutrinos de Majorana en teorías efectivas
Estudiante: JAVIER EDUARDO RICAÑO PAZ

COMITÉ

Dr. J. Jesús Toscano Chavez
Presidente

Dra. Iraís Bautista Guzmán
Secretario

Dra. Azucena Bolaños Carrera
Vocal

Mario Rodriguez Cahuantzi
Vocal

Dr. Héctor Novales Sánchez
Asesor

A mi abuela Olimpia Miranda, quien partió de este mundo mientras escribía esta tesis.

Agradecimientos

A la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por aceptarme en sus instalaciones y darme la oportunidad desarrollarme en el ámbito académico.

Al Doctor Héctor Novales Sánchez, por aceptar dirigir mi trabajo de tesis. Agradezco el empeño que da a su trabajo como investigador y especialmente como docente, ya que gracias a la dedicación que tiene hacia sus alumnos y vocación es que he tenido la oportunidad de crecer como físico y como estudiante. Lo considero un ejemplo a seguir y un amigo.

A los profesores de la facultad los cuales tuve la dicha de ser alumno, ya que fueron ellos quienes me introdujeron al mundo de la ciencia y me ayudaron a dar mis primeros pasos. Atesoro todas sus enseñanzas y lecciones.

Finalmente a mis padres y a mis hermanos, que siempre estuvo a mi lado apoyándome durante todos estos años, ayudándome a crecer como persona y dándome las lecciones de vida más importantes.

Resumen

En esta tesis a partir de cuatro términos Lagrangianos efectivos relevantes para producir masas de neutrinos de Majorana pequeñas se extraen las expresiones correspondientes a acoplamientos de tipo Ann y Wln en donde intervienen neutrinos descritos en el eigenspacio de masas, a partir de estas se construyen diagramas de Feynman que representan corrientes cargadas a orden de un lazo con campos leptónicos y un campo fotónico externos. A partir de las expresiones encontradas se encontraron sus contribuciones a los momentos anómalo magnético $\mu_{\alpha\beta}$ y dipolar eléctrico $d_{\alpha\beta}$ de los campos leptónicos, donde α y β etiquetan el sabor leptónico $\alpha, \beta = e, \mu, \tau$, los cuales resultaron ser cero, debido a que los mismos diagramas de Feynman de las corrientes cargadas se eliminaron.

Palabras clave

Neutrinos de Majorana · Lagrangiano Efectivo · Interacción electrodébil

Introducción

Los descubrimientos emanados, en los últimos años, de las investigaciones enmarcadas en la física de los neutrinos son evidencias experimentalmente respaldadas de fenómenos naturales que no pueden ser explicados por el Modelo Estándar de las interacciones fundamentales [1, 2, 3], que es la mejor descripción fundamental de la naturaleza con que contamos en este momento. Así que la actividad científica dirigida al estudio de los neutrinos constituye una de las áreas principales dentro de la física de altas energías. Las preguntas más notables planteadas por la física de los neutrinos se vinculan con las masas de estas partículas. Las oscilaciones de neutrinos, teorizadas hace más de seis décadas por Bruno Pontecorvo [4], medidas por primera vez hace poco más de veinte años por la Colaboración Super-Kamiokande [5], y confirmadas en 2002 por la Colaboración SNO [6], se han interpretado como evidencia definitiva de que los neutrinos son partículas masivas. Esto contrasta con la descripción provista por el Modelo Estándar, en el cual los campos neutrinos no tienen masas asociadas. Tal conclusión conlleva algunas preguntas interesantes: (1) ¿cuál es el mecanismo de generación de las masas de los neutrinos?; (2) siendo partículas eléctricamente neutras, ¿los neutrinos son descritos por campos espinores de Dirac [7] o de Majorana [8]? Actualmente estos problemas siguen abiertos.

El mecanismo seesaw [9], de generación de masas de neutrinos, es una alternativa que ha gozado de mucha atención y de la que se han desarrollado diversas variantes [10]. Permite explicar, en forma natural, la pequeñez de las masas de los neutrinos, de lo cual sería responsable la escala de alta energía característica de alguna teoría más allá del Modelo Estándar, proporcionando así una descripción de las masas de estos fermiones menos ambigua que aquella propia de parametrizaciones vía constantes de Yukawa [11]. Desde la perspectiva de las teorías efectivas, que parametrizan nueva física independientemente de modelos, el operador de Weinberg [12], con unidades de (masa)⁵ y que viola el número leptónico en dos unidades, favorece la idea de que el mecanismo seesaw es el que origina a las masas de los neutrinos.

En el presente trabajo de tesis se plantea el estudio, vía el uso de Lagrangianos efectivos, de decaimientos de neutrinos de Majorana. Se consideran los términos Lagrangianos $\mathcal{L}_{\text{ef}} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_W + \hat{\mathcal{L}}_W$, con [13]

$$\mathcal{L}_B = \frac{\xi_{\alpha\beta}^B}{\Lambda^3} (\overline{L_{\alpha,L}^c} \tilde{\phi}^*) \sigma_{\mu\nu} (\tilde{\phi}^\dagger L_{\beta,L}) B^{\mu\nu} + \text{H.c.}, \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_W = \frac{\xi_{\alpha\beta}^W}{\Lambda^3} (\overline{L_{\alpha,L}^c} \tilde{\phi}^*) \sigma_{\mu\nu} (\tilde{\phi}^\dagger W^{\mu\nu} L_{\beta,L}) + \text{H.c.}, \quad (2)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_W = \frac{\hat{\xi}_{\alpha\beta}^W}{\Lambda^3} (\overline{L_{\alpha,L}^c} W^{\mu\nu*} \tilde{\phi}^*) \sigma_{\mu\nu} (\tilde{\phi}^\dagger L_{\beta,L}) + \text{H.c.}, \quad (3)$$

Aquí, Λ es una escala de alta energía, más allá de la cual la expansión de Lagrangiano efectivo deja de ser válida, abriendo paso a la teoría fundamental que la produce mediante la integración funcional de variables dinámicas pesadas [17]. Todos estos términos de Lagrangiano efectivo tienen unidades (masa)⁷, consistentemente ajustadas por potencias inversas de Λ . Los términos

de Lagrangiano efectivo dados en las Ecs. (1)-(3) violan el número leptónico en dos unidades, de manera que los neutrinos involucrados son descritos por campos de Majorana. Más aún, $\mathcal{L}_B$, $\mathcal{L}_W$ y $\hat{\mathcal{L}}_W$ generan acoplamientos efectivos $\nu_\alpha \nu_\beta A_\mu$, siendo A_μ el campo electromagnético, los cuales pueden ser incluidos en aportaciones al vértice electromagnético $\gamma l_\alpha l_\beta$ a nivel de un loop.

De la misma manera se estudiará un término efectivo adicional $\mathcal{L}_E$

$$\mathcal{L}_E = \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\xi_{\alpha\beta}^D}{\Lambda^3} \overline{L_{\alpha,L}^C} \bar{\phi}^* \bar{\phi}^\dagger C D_\mu D^\mu L_{\beta,L} + \text{H.c.} \quad (4)$$

en el cual, al igual que los términos efectivos anteriores Λ es la escala de alta energía. De la misma manera, este término efectivo tiene unidades (masa)⁷, consistentemente ajustadas por potencias inversas de Λ y viola el número leptónico en dos unidades, involucrando así neutrinos expresados por campos de Majorana. $\mathcal{L}_E$ genera acoplamientos $\nu_\alpha l_j W$ que de igual manera pueden ser incluidos en aportaciones al vértice electromagnético $\gamma l_\alpha l_\beta$ a nivel de un loop.

Así pues se explorarán en el marco de teorías efectivas, las contribuciones generadas por física pesada al vértice electromagnético mencionado, específicamente a las propiedades de momento anómalo magnético y momento dipolar eléctrico de los leptones.

La suma total de los diagramas de Feynman obtenidos, los cuales representan las contribuciones al vértice electromagnético resultó ser cero en todos los casos. En el caso de las expresiones que surgieron a partir de las ecuaciones (1)-(3), a pesar de que de manera individual cada uno de los diagramas pertinentes eran consistente de manera individual, al sumarse entre si, los diagramas que consideraban a los neutrinos campos de Dirac se eliminaban con sus contrapartes los que consideraban campos de Majorana, como se verá a más detalle. En el caso del diagrama de Feynman obtenido a partir de la expresión (4), la presencia de la matriz de conjugación de carga C en su estructura provocó que fuese incompatible con la estructura general del vértice electromagnético, de manera que debe eliminarse en algún punto dentro del cálculo del mismo. De esta forma se concluye que los diagramas estudiados en el presente trabajo no contribuyen a los momentos anómalo magnético y dipolar eléctrico de los leptones.

En el primer capítulo de esta tesis se hará un breve resumen del Modelo Estandar electrodébil, se hablará brevemente de las partículas involucradas y de los sectores que lo conforman. En el segundo capítulo se verán las teorías de nueva física en las cuales este trabajo está basado; los neutrinos de Majorana y las teorías efectivas. En el tercer capítulo se desarrollará el lagrangiano efectivo $\mathcal{L}_B$, se extraerá la expresión del vértice pertinente y se construirán los vértices electromagnéticos a tratar con base a éste, posteriormente se hará un análisis de los resultados. En el cuarto capítulo se aplicará un procedimiento análogo al utilizado en el capítulo anterior para el término efectivo $\mathcal{L}_E$.

Para la lectura de esta tesis se recomienda poseer conocimientos de Teoría Cuántica de Campos con énfasis en fenomenología y conocimientos básicos de teorías efectivas.

Índice general

Resumen	v
Introducción	vii
1. El Modelo Estándar Electrodébil	1
1.1. Introducción al Modelo Estándar	1
1.2. Modelo Estándar Electrodébil	2
1.2.1. Grupos de Simetrías	2
1.2.2. El sector escalar $\mathcal{L}_S$	3
1.2.3. El sector de Yang-Mills $\mathcal{L}_{YM}$	5
1.2.4. El sector de Yukawa $\mathcal{L}_Y$	6
1.2.5. Sector de Corrientes $\mathcal{L}_C$	9
2. Nueva Física	13
2.1. Neutrinos de Dirac y Majorana	13
2.1.1. Conjugación de carga	13
2.1.2. Neutrinos de Majorana	14
2.2. Lagrangianos efectivos	15
2.2.1. Los fundamentos del Lagrangiano efectivo	15
2.2.2. Integración de modos pesados	15
2.2.3. Regularización dimensional	19
3. Contribuciones a propiedades electromagnéticas de leptones del término Lagrangiano $\mathcal{L}_B$	23
3.1. Parametrización del vértice electromagnético	23
3.2. Contribuciones efectivas al acoplamiento $A^\mu nn$	24
3.3. Corrientes cargadas derivadas del acoplamiento $A^\mu nn$	27
3.4. Implementación de la identidad de Gordon	31
3.5. Diagramas adicionales de Majorana	32
4. Contribuciones a propiedades electromagnéticas de leptones del término Lagrangiano $\mathcal{L}_E$	35
4.1. Contribuciones efectivas a los acoplamientos Wnl	35
4.2. Corrientes derivadas de los acoplamientos Wnl donde intervienen neutrinos	38
Conclusiones	43
Bibliografía	45

Índice de figuras

3.1. Corriente cargada que involucra el campo W	28
3.2. Corriente cargada que involucra al bosón de Goldstone	28
3.3. Corriente cargada que involucra el campo W considerando neutrinos de Dirac . . .	33
3.4. Corriente cargada que involucra el campo W considerando neutrinos de Majorana	33
3.5. Corriente cargada que involucra el bosón G considerando neutrinos de Dirac	33
3.6. Corriente cargada que involucra el bosón G considerando neutrinos de Majorana .	33
4.1. Corriente cargada con vértice efectivo a la izquierda	38
4.2. Corriente cargada con vértice efectivo a la derecha	38
4.3. Corriente cargada con vértice efectivo a la derecha e izquierda	39

Índice de tablas

1.1. Partículas del Modelo Estándar	2
---	---

Capítulo 1

El Modelo Estándar Electrodébil

1.1. Introducción al Modelo Estándar

El descubrimiento de una teoría última, capaz de explicar de manera precisa todos los fenómenos que ocurren en el universo es sin lugar a dudas el objetivo más ambicioso que la comunidad de la física teórica intenta alcanzar, se busca una formulación capaz de unificar y describir satisfactoriamente las interacciones fundamentales de nuestro universo: la interacción electromagnética la interacción débil, la interacción fuerte y la gravedad. A raíz de diversos descubrimientos, experimentos y contribuciones de numerosos científicos alrededor del mundo es que ha surgido una teoría ampliamente aceptada por la comunidad científica y considerada hasta el momento como la más exitosa, el *Modelo Estándar de las interacciones fundamentales*, una teoría de campos que describe a las interacciones electromagnética, débil y fuerte y que es gobernada por el grupo de norma $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Sin embargo, existen motivaciones, tanto teóricas como experimentales, para afirmar que el Modelo Estándar no es una teoría última.

El Modelo Estándar afirma que la materia está formada por partículas elementales llamadas fermiones (caracterizados por tener espín semientero) que interactúan entre sí a través de campos. A su vez, las partículas asociadas a la interacción con los campos son denominados bosones (caracterizados por tener espín entero). De esta manera el fotón γ , una partícula sin masa y sin carga es asociada con la interacción electromagnética; los bosones cargados y masivos W^+ y W^- , y el bosón neutro y masivo Z para la interacción débil; finalmente los gluones, partículas no masivas, son asociados con la interacción fuerte. A su vez contempla también el bosón de Higgs, el cuál juega un papel fundamental dentro del Modelo Estándar, pues es el responsable de dotar de masa a las partículas elementales mediante el llamado mecanismo de Higgs [14, 15, 16].

Por otro lado, el Modelo Estándar clasifica a los fermiones en dos tipos, leptones y quarks. Los leptones se dividen en tres tipos de sabores (e , μ , τ). Se componen de las partículas cargadas: electrón e^- ; muón μ^- y tauón τ^- , las cuales se diferencian entre sí por sus masas y tiempo de decaimiento (siendo el electrón la única partícula estable entre ellas) y sus respectivas antipartículas e^+ , μ^+ y τ^+ , las cuales difieren respecto a sus contrapartes únicamente por tener carga opuesta, finalmente, dentro de la clasificación de los leptones se encuentran también los neutrinos que a su vez se dividen por cada tipo de sabor ν_e , ν_μ y ν_τ . Las cuales son partículas neutras que según la evidencia experimental encontrada poseen masas muy pequeñas que son distintas para cada sabor. Finalmente los quarks son partículas elementales que se encuentran en combinaciones entre ellas, formando de esta manera los hadrones, los cuales a su vez se clasifican en dos tipos, los mesones formados por la combinación de dos quarks y los bariones formados por la combinación de tres quarks. A su vez los quarks se clasifican en seis sabores distintos: Up, Down, Top, Bottom, Charm

y Strange, que a su vez tienen un antiquark cada uno.

Partícula	Fermiones			
	Leptones		Quarks	
	Tipo electrón	Tipo neutrino	Tipo Up	Tipo Down
Familia 1	Electrón (e)	Neutrino Electrón (ν_e)	Quark Up (u)	Quark Down (d)
Carga	-1	0	+2/3	-1/3
Familia 2	Muón (μ)	Neutrino Muón (ν_μ)	Quark Charm (c)	Quark Strange (s)
Carga	-1	0	+2/3	-1/3
Familia 3	tauón (τ)	Neutrino Tauón (ν_τ)	Quark Top (t)	Quark Bottom (b)
Carga	-1	0	+2/3	-1/3
Bosones				
Campo	Electromagnético	Fuerte	Débil	Higgs
Nombre	fotón (γ)	gluón (g)	W^+, W^-, Z	Higgs (H)

Tabla 1.1: Partículas del Modelo Estándar

1.2. Modelo Estándar Electrodebil

El marco teórico preferido para desarrollar las teorías de Física de altas energías modernas es la Teoría Cuántica de Campos, en dicho marco los dos elementos principales que definen una teoría son las variables dinámicas y sus simetrías [21]. En este ámbito, las variables dinámicas son comprendidas como campos dependientes del espaciotiempo, asociados a las partículas elementales que son interpretadas como los cuantos de dichos campos. Mientras que las simetrías fundamentales para la Teoría Cuántica de Campos son la simetría de Lorentz y la simetría de norma [23].

El foco de interés de esta tesis se encuentra en la sección del Modelo Estándar que se encarga de describir las interacciones electrodébiles, ésta es invariante ante transformaciones del grupo de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

A nivel de la Teoría Clásica de Campos, el modelo electrodébil es caracterizado por la acción S_{EW} definida como $S_{EW} = \int d^4x \mathcal{L}_{EW}$ donde $\mathcal{L}_{EW}$ es la densidad lagrangiana característica de la acción. Por otra parte, $\mathcal{L}_{EW}$ puede ser caracterizada como la suma de cuatro términos de densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{EW} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_Y, \quad (1.1)$$

donde los términos $\mathcal{L}_{YM}$, $\mathcal{L}_S$, $\mathcal{L}_C$ y $\mathcal{L}_Y$ son denominados respectivamente como el sector de Yang-Mills, el sector escalar, el sector de las corrientes y el sector de Yukawa. Más adelante dentro de este capítulo se hablará a detalle algunas de las generalidades de cada sector.

1.2.1. Grupos de Simetrías

En el contexto de la Física se define a un grupo de simetría como un grupo de transformación que deja invariante a una acción. Las simetrías pueden ser clasificadas en simetrías discretas y simetrías continuas. A su vez, éstas últimas se clasifican en simetrías globales y locales. Las simetrías continuas globales se denominan de tal manera debido a que éstas son independientes de las coordenadas del espacio-tiempo, por tanto la regla de transformación se mantiene invariante en todo punto de éste; mientras que las simetrías continuas locales son dependientes de las coordenadas, y por tanto varía de un punto a otro del espacio-tiempo, dentro de esta última

clasificación se encuentran las simetrías de norma.

Los grupos de simetría juegan un papel fundamental en la física teórica, este hecho puede verse manifestado en la Teorema de Noether, el cual dicta que si una acción es invariante bajo un grupo de transformaciones globales y continuas, es decir, existe una simetría debe existir al menos una cantidad conservativa asociada [22]. A continuación se hablará del grupo de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ que caracteriza a la teoría electrodébil, y que está conformado por el producto cartesiano de los grupos $SU(2)_L$ que caracteriza la interacción débil, y $U(1)_Y$ que caracteriza a la interacción electromagnética.

Grupo $U(1)$

Se trata de el grupo de matrices U unitarias de norma 1. Los elementos de este grupo satisfacen

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \quad (1.2)$$

y suelen ser representadas como

$$U = e^{i\alpha(x)}, \quad (1.3)$$

donde $\alpha(x)$ es un número real que parametriza a las coordenadas de espacio-tiempo. Geométricamente puede interpretarse como un círculo unitario en el plano complejo.

Grupo $SU(2)$

Se trata del grupo de matrices unitarias de tamaño 2×2 al ser matrices unitarias, cumplen la propiedad (1.2), todo elemento de $SU(2)$ puede ser representado como

$$U = \exp\{i\alpha^j(x) \frac{\sigma^j}{2}\}, \quad (1.4)$$

donde $\alpha(x)^j$ son al igual que en el grupo anterior parámetros reales dependiente de las coordenadas x y las matrices σ^j son las matrices de Pauli σ^1, σ^2 y σ^3 que cumplen con el álgebra de Lie

$$[\sigma^j, \sigma^k] = 2i\epsilon^{jkl} \sigma^l, \quad (1.5)$$

las matrices $\frac{\sigma^j}{2}$ son las matrices generadoras del grupo $SU(2)$.

1.2.2. El sector escalar $\mathcal{L}_S$

El Lagrangiano del sector escalar está dado de manera explícita por la siguiente expresión.

$$\mathcal{L}_S = - (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi, \Phi^\dagger), \quad (1.6)$$

donde se introduce el doblete complejo de $SU(2)_L$ con hipercarga Y_Φ , denotado por $\Phi(x)$ y definido como

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

que a su vez se transforma bajo el grupo de norma como

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = \exp \left\{ i \left(\alpha^j(x) \frac{\sigma^j}{2} + \alpha(x) \frac{Y_\Phi}{2} \right) \right\} \Phi(x) \quad (1.8)$$

Además debido a la necesidad de invariancia bajo el grupo de norma, es necesario usar una derivada covariante del grupo D_μ definida por la expresión

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} - ig_1 B_\mu \frac{Y}{2}, \quad (1.9)$$

donde g_1 y g_2 son las constantes de acoplamiento de los grupos $U(1)$ y $SU(2)$ respectivamente, Y la hipercarga asociado al elemento sobre el cual actúa la derivada covariante. La expresión (1.9) introduce también cuatro conexiones, tres de ellas son los campos vectoriales W_μ^j con $j = 1, 2, 3$ para $SU(2)_L$ y un campo vectorial B_μ para $U(1)$. Las leyes de transformación respecto al grupo de norma para B_μ , W_μ^j y $D_\mu \Phi$ son

$$B_\mu(x) \longrightarrow B'_\mu = B_\mu(x) + \frac{1}{g_1} \partial_\mu \alpha(x), \quad (1.10)$$

$$W_\mu^j(x) \frac{\sigma^j}{2} \longrightarrow W'^j_\mu(x) \frac{\sigma^j}{2} = U(x) \left[W_\mu^j \frac{\sigma^j}{2} = \frac{i}{g_2} \partial_\mu \right] U^\dagger(x), \quad (1.11)$$

$$D_\mu \Phi(x) \longrightarrow (D_\mu \Phi)'(x) = \exp \left\{ i \left(\alpha^j(x) \frac{\sigma^j}{2} + \alpha(x) \frac{Y_\Phi}{2} \right) \right\} \Phi(x) \quad (1.12)$$

Del Lagrangiano del sector escalar (1.6) podemos identificar los términos cinético y el potencial de Higgs respectivamente, este último tiene la forma

$$V(\Phi, \Phi^\dagger) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (1.13)$$

donde μ posee unidades de masa y λ es una constante de acoplamiento positiva y adimensional. Al imponer que $\mu > 0$ el campo escalar adquiere un valor de expectación de vacío (VEV) provocando que la simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ se rompa espontáneamente en la simetría $U(1)_e$. Debido a que Φ es definido complejo, el potencial $V(\Phi, \Phi^\dagger)$ puede ser visto como una función dependiente de las componentes real e imaginaria de los campos $\Phi_k = \text{Re}\{\Phi_k\} + i \text{Im}\{\Phi_k\}$ con $k = 1, 2$ de esta manera se encuentra que dicho potencial tiene asociado un conjunto degenerado infinito de puntos Φ_0 que lo minimizan y que satisfacen la ecuación $|\Phi|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}$. Se elige entonces una configuración de mínimo potencial dada por el doblete $\Phi_0^T = (0, \frac{v}{\sqrt{2}})$ que es implementada en la transformación $\Phi = \Phi_0 + \xi(x)$ donde $\xi(x)$ es una matriz compleja dada por

$$\xi(x) = \begin{pmatrix} G_W^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(h(x) + iG_Z(x)) \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

dada en términos de los campos escalares G_W^+ (cuyo hermitiano adjunto $(G_W^+)^\dagger \equiv G_W^-$), G_Z y h , los campos G_W^+ , G_W^- y G_Z son identificados como bosones de Nambu-Goldstone mientras que el campo h se identifica como el campo escalar de Higgs.

Aplicando un cambio de base de la forma

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 - iW_\mu^2), \quad (1.15)$$

$$W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 + iW_\mu^2), \quad (1.16)$$

el sector escalar se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S = & \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} W^{3\mu} & B^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2(Y_\Phi g_1) \\ -g_2(Y_\Phi g_1) & (Y_\Phi g_1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) h^2 + \partial_\mu G_W^- \partial^\mu G_W^+ + \frac{1}{2} \partial_\mu G_Z \partial^\mu G_Z \\ & + ig_2 v/2 (W^{-\mu} \partial_\mu G_W^+ - W^{+\mu} \partial_\mu G_W^-) \\ & + v \sqrt{g_2^2 + (Y_\Phi g_1)^2} \left[\frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + (Y_\Phi g_1)^2}} W^{3\mu} - \frac{(Y_\Phi g_1)}{\sqrt{g_2^2 + (Y_\Phi g_1)^2}} B^\mu \right] \partial_\mu G_Z + \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$

En donde se muestran explícitos únicamente aquellos términos cuadráticos en los campos. Analizando la matriz 2×2 involucrada en la ecuación anterior

$$\begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2(Y_\Phi g_1) \\ -g_2(Y_\Phi g_1) & (Y_\Phi g_1)^2 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

notamos que se trata de una matriz hermitiana con eigenvalores reales m_Z^2 y 0. Por tanto, debe existir una matriz ortogonal de diagonalización P , que la diagonaliza.

$$P^T \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2(Y_\Phi g_1) \\ -g_2(Y_\Phi g_1) & (Y_\Phi g_1)^2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} m_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

La matriz ortogonal P es parametrizada mediante un ángulo de rotación conocido como el ángulo de mezcla débil θ_W , de modo que la matriz P es representada por

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

Donde se identifican los valores

$$\sin \theta_W = \frac{Y_\Phi g_1}{\sqrt{g_2^2 + (Y_\Phi g_1)^2}}, \quad (1.21)$$

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + (Y_\Phi g_1)^2}}. \quad (1.22)$$

De manera que el cambio de base que conlleva la diagonalización define los eigencampos de masa

$$Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad (1.23)$$

$$A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu. \quad (1.24)$$

Donde a el campo Z_μ le corresponde la masa m_Z definida anteriormente y al campo A_μ asociado con el campo fotónico le corresponde congruentemente una masa igual a cero.

1.2.3. El sector de Yang-Mills $\mathcal{L}_{\text{YM}}$

El Lagrangiano del sector de Yang-Mills está dado por la siguiente expresión

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{4} W^{j\mu\nu} W_{\mu\nu}^j - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad (1.25)$$

Aplicando la transformación de cambio de base mostrada en las ecuaciones (1.15) y (1.16) el Lagrangiano toma la forma

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} W^{+\mu\nu} W_{\mu\nu}^- + m_W^2 W_\mu^- W^{+\mu} - \frac{1}{4} \hat{W}^{3\mu\nu} \hat{W}_{\mu\nu}^3 - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \dots, \quad (1.26)$$

en donde se muestran de manera explícitamente únicamente los términos cuadráticos, y donde se han definido los tensores $W_{\mu\nu}^+ = \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+$, $W_{\mu\nu}^- = \partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-$ y $\hat{W}_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu \hat{W}_\nu^3 - \partial_\nu \hat{W}_\mu^3$.

Finalmente aplicando el cambio de base necesario para la diagonalización de la matriz (1.19) se obtiene que el Lagrangiano del sector escalar y el del sector de Yang-Mills en conjunto toman la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{S}} = & -\frac{1}{2}W^{+\mu\nu}W_{\mu\nu}^- + m_W^2 W_\mu^- W^{+\mu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2}m_h^2 h^2 + \partial_\mu G_W^- \partial^\mu G_W^+ + \frac{1}{2}\partial_\mu G_Z \partial^\mu G_Z \\ & + im_W(W^{-\mu}\partial_\mu G_W^+ - W^{+\mu}\partial_\mu G_W^-) + m_Z Z^\mu \partial_\mu G_Z + \dots, \end{aligned} \quad (1.27)$$

donde se definen de manera análoga $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Además se identifican las masas $m_W = g_2 v/2$, para los campos vectoriales complejos W_μ^+ y W_μ^- , $m_h = \sqrt{2\lambda v^2}$ para el campo escalar de Higgs h y $m_Z = v\sqrt{g_2^2 + (Y_\Phi g_1)^2}/2$. A este proceso se le conoce como el mecanismo de Brout-Englert-Higgs. Notemos que anterior a la aplicación de este procedimiento se contaba con un campo no masivo B con dos grados de libertad, tres campos no masivos W^i con dos grados de libertad cada uno y un doblete complejo Φ con cuatro grados de libertad, que tras imponer un VEV se implementa una transformación que deja expresado a este campo y su hermitiano adjunto en términos de los campos escalares G_W^+ , G_W^- , G_Z y h , teniendo un total de 12 grados de libertad. Posterior a la implementación del mecanismo de Brout-Englert-Higgs se tiene un campo escalar masivo de Higgs h con un grado de libertad, tres bosones masivos débiles, W^+ , W^- y Z con tres grados de libertad cada uno y un campo fotónico no masivo A que aporta un grado de libertad más. Por otra parte los pseudo-bosones de Goldstone G_W^+ , G_W^- y G_Z son campos no físicos, en el sentido de que existe una configuración de norma llamada norma unitaria [26], que lo erradica de la teoría, de manera que dichos campos no pueden ser asociados a partículas medibles en experimentos y por tanto no aportan grados de libertad, teniendo en total 12 grados de libertad como era de esperarse. En este sentido se dice que los bosones W^+ , W^- y Z se “comen” a los pseudo-bosones de Goldstone para adquirir masa.

1.2.4. El sector de Yukawa $\mathcal{L}_Y$

Este sector describe los campos fermiónicos mediante espinores de Dirac los cuales a su vez también pueden ser expresados mediante la suma de dos espinores de quiralidades definidas izquierda y derecha: $\psi = \psi_L + \psi_R$, dichas componentes pueden ser proyectadas por medio de operadores de proyección quiral de modo que

$$P_L \psi = \psi_L, \quad (1.28)$$

$$P_R \psi = \psi_R, \quad (1.29)$$

donde los proyectores de quiralidad derecho e izquierdo se definen respectivamente como

$$P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad (1.30)$$

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad (1.31)$$

donde γ^5 es la matriz gama 5 de Dirac $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

En el Modelo Estándar Electrodébil, los campos quirales izquierdos se definen como parte de dobletes del grupo $SU(2)_L$, con hipercarga Y_L mientras que los campos quirales derechos son definidos como un doblete de $SU(2)_L$ con hipercarga Y_R . En este contexto los dobletes de quiralidad izquierda se expresan como

$$L_\alpha = \begin{pmatrix} \nu_{\alpha,L} \\ l_{\alpha,L} \end{pmatrix}, \quad Q_\beta = \begin{pmatrix} u_{\beta,L} \\ d_{\beta,L} \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

donde el subíndice α hace referencia al sabor del lepton, es decir puede tomar los valores $\alpha = e, \mu, \tau$ y el subíndice β hace referencia a los sabores de quark $\beta = u, c, t$, de esta manera se diferencia entre leptones y quarks. De la misma manera en los dobletes leptónicos se diferencia entre los campos leptónicos y sus respectivos neutrinos, por ejemplo, el campo $l_{e,L}$ representa un electrón mientras que el campo $\nu_{e,L}$ representa un neutrino tipo electrón. De manera análoga, los dobletes de quarks distinguen quarks tipo *up* de quarks tipo *down*, de esta manera un campo $u_{u,L}$ representa un quark up, mientras que un campo $d_{u,L}$ representa un quark down. Por otra parte, tenemos los singuletes derechos

$$l_{\alpha,R}, \quad u_{\beta,R}, \quad d_{\beta,R}, \quad (1.33)$$

donde los subíndices hacen referencia a lo mismo que en el caso de los fermiones de quiralidad izquierda. Cabe resaltar el hecho de que no existen neutrinos de quiralidad derecha, motivo por el cual no aparecen singuletes de neutrinos derechos en la teoría.

Las leyes de transformación de los dobletes respecto al grupo de norma $SU(2)_L \times U(1)_Y$ son

$$L_\alpha \longrightarrow L'_\alpha = e^{i\frac{Y_L^l}{2}\alpha(x)}U(x)L_\alpha, \quad (1.34)$$

$$Q_\beta \longrightarrow Q'_\beta = e^{i\frac{Y_L^q}{2}\alpha(x)}U(x)Q_\beta, \quad (1.35)$$

Mientras que los singuletes se transforman como

$$l_{\alpha,R} \longrightarrow l'_{\alpha,R} = e^{i\frac{Y_R^l}{2}\alpha(x)}l_{\alpha,R}, \quad (1.36)$$

$$u_{\beta,R} \longrightarrow u'_{\beta,R} = e^{i\frac{Y_R^q}{2}\alpha(x)}u_{\beta,R}, \quad (1.37)$$

$$d_{\beta,R} \longrightarrow d'_{\beta,R} = e^{i\frac{Y_R^q}{2}\alpha(x)}d_{\beta,R}, \quad (1.38)$$

Los cuales permanecen invariantes bajo transformaciones del grupo $SU(2)$. En base a lo establecido anteriormente, el Lagrangiano del sector de Yukawa se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & \sum_{\alpha,\alpha'} [-y_{\alpha,\alpha'}^l \overline{L_{\alpha,L}} \Phi l_{\alpha,R} - y_{\alpha,\alpha'}^{l*} \overline{l_{\alpha,R}} \Phi^\dagger L_{\alpha,L}] \\ & + \sum_{\beta,\beta'} [-y_{\beta,\beta'}^u \overline{Q_{\beta,L}} \tilde{\Phi} u_{\beta,R} - y_{\beta,\beta'}^{u*} \overline{u_{\beta,R}} \tilde{\Phi}^\dagger Q_{\beta,L} - y_{\beta,\beta'}^d \overline{Q_{\beta,L}} \Phi d_{\beta,R} - y_{\beta,\beta'}^{d*} \overline{d_{\beta,R}} \Phi^\dagger Q_{\beta,L}], \end{aligned} \quad (1.39)$$

donde $\alpha, \alpha' = e, \mu, \tau$ y $\beta, \beta' = u, c, t$, además se definió $\tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi^*$, donde σ^2 es la matriz sigma 2 de Pauli. $\tilde{\Phi}$ es un doblete de $SU(2)_L$ con hipercarga $-Y_\Psi$. A su vez se introducen las constantes de Yukawa $y_{\alpha,\alpha'}^l$, $y_{\beta,\beta'}^u$ y $y_{\beta,\beta'}^d$ las cuales son las componentes de matrices y^l , y^u y y^d respectivamente, las cuales son matrices de tamaño 3×3 conocidas como matrices de Yukawa, además se utiliza la notación $\overline{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ para denotar espinores adjuntos de Dirac. Un requisito para que este Lagrangiano sea invariante bajo las transformaciones del grupo de norma dadas en las ecuaciones (1.35) es que se cumplan las siguientes ecuaciones con las hipercargas involucradas

$$Y_\Phi - Y_L^l + Y_R^l = 0, \quad (1.40)$$

$$Y_\Phi + Y_L^q - Y_R^u = 0, \quad (1.41)$$

$$Y_\Phi - Y_L^q + Y_R^d = 0, \quad (1.42)$$

Dado que el Lagrangiano del sector de Yukawa está definido en función del potencial Φ , también es afectado por el mecanismo de Brout-Englert-Higgs, generando de esta manera, masas de campos

fermiónicos mediante la transformación $\Phi = \Phi_0 + \xi(x)$, de este modo, el Lagrangiano se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & -\frac{v}{\sqrt{2}} \bar{l}_L y^l l_R - \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{l}_R y^{l\dagger} l_L - \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{u}_L y^u u_R - \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{u}_R y^{u\dagger} u_L \\ & - \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{d}_L y^d d_R - \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{d}_R y^{d\dagger} d_L + \dots \end{aligned} \quad (1.43)$$

donde se omiten de manera explícita los términos con productos de tres campos. Además, se introducen las matrices columna

$$l_L = \begin{pmatrix} l_{e,L} \\ l_{\mu,L} \\ l_{\tau,L} \end{pmatrix}, \quad u_L = \begin{pmatrix} u_{u,L} \\ u_{c,L} \\ u_{t,L} \end{pmatrix}, \quad d_L = \begin{pmatrix} d_{u,L} \\ d_{c,L} \\ d_{t,L} \end{pmatrix}, \quad (1.44)$$

$$l_R = \begin{pmatrix} l_{e,R} \\ l_{\mu,R} \\ l_{\tau,R} \end{pmatrix}, \quad u_R = \begin{pmatrix} u_{u,R} \\ u_{c,R} \\ u_{t,R} \end{pmatrix}, \quad d_R = \begin{pmatrix} d_{u,R} \\ d_{c,R} \\ d_{t,R} \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

con la finalidad de expresar los términos de una manera más compacta. Además se utiliza la notación de la barra encima de la matriz para denotar al hermitiano conjugado, definido como $\bar{l}_L \equiv l_L^\dagger \gamma^0$, $\bar{u}_L \equiv u_L^\dagger \gamma^0$, $\bar{d}_L \equiv d_L^\dagger \gamma^0$, $\bar{l}_R \equiv l_R^\dagger \gamma^0$, $\bar{u}_R \equiv u_R^\dagger \gamma^0$, $\bar{d}_R \equiv d_R^\dagger \gamma^0$. Las matrices de Yukawa son diagonalizadas a través de transformaciones biunitarias, caracterizadas por pares de matrices unitarias de tamaño 3×3 : V_L^l y V_R^l , V_L^u y V_R^u , V_L^d y V_R^d de modo que

$$V_L^{l\dagger} y^l V_R^l = y_D^l, \quad V_L^{u\dagger} y^u V_R^u = y_D^u, \quad V_L^{d\dagger} y^d V_R^d = y_D^d, \quad (1.46)$$

siendo y_D^l , y_D^u , y_D^d matrices 3×3 diagonales y reales con elementos de diagonal estrictamente positivos. Tales diagonalizaciones implican un cambio de base, cuyas transformaciones están dadas por

$$l'_L = V_L^{l\dagger} l_L, \quad u'_L = V_L^{u\dagger} u_L, \quad d'_L = V_L^{d\dagger} d_L, \quad (1.47)$$

$$l'_R = V_R^{l\dagger} l_R, \quad u'_R = V_R^{u\dagger} u_R, \quad d'_R = V_R^{d\dagger} d_R, \quad (1.48)$$

De este modo, se tienen a los vectores en el espacio de sabor

$$l'_L = \begin{pmatrix} l'_{e,L} \\ l'_{\mu,L} \\ l'_{\tau,L} \end{pmatrix}, \quad u'_L = \begin{pmatrix} u'_{u,L} \\ u'_{c,L} \\ u'_{t,L} \end{pmatrix}, \quad d'_L = \begin{pmatrix} d'_{d,L} \\ d'_{s,L} \\ d'_{b,L} \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

$$l'_R = \begin{pmatrix} l'_{e,R} \\ l'_{\mu,R} \\ l'_{\tau,R} \end{pmatrix}, \quad u'_R = \begin{pmatrix} u'_{u,R} \\ u'_{c,R} \\ u'_{t,R} \end{pmatrix}, \quad d'_R = \begin{pmatrix} d'_{d,R} \\ d'_{s,R} \\ d'_{b,R} \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

nótese que los índices que denotan el sabor en los vectores de quark tipo down pasaron a ser d , s y c , que representan los sabores down, strange y bottom respectivamente. Se definen entonces los campos espinores de Dirac de quiralidad indefinida

$$l_e \equiv l'_{e,L} + l'_{e,R}, \quad l_\mu \equiv l'_{\mu,L} + l'_{\mu,R}, \quad l_\tau \equiv l'_{\tau,L} + l'_{\tau,R}, \quad (1.51)$$

$$u_u \equiv u'_{u,L} + u'_{u,R}, \quad u_c \equiv u'_{c,L} + u'_{c,R}, \quad u_t \equiv u'_{t,L} + u'_{t,R}, \quad (1.52)$$

$$d_d \equiv d'_{d,L} + d'_{d,R}, \quad d_s \equiv d'_{s,L} + d'_{s,R}, \quad d_b \equiv d'_{b,L} + d'_{b,R}, \quad (1.53)$$

Tras este proceso la ecuación (1.43) toma la forma

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \bar{l}_{\alpha} l_{\alpha} - \sum_{\beta} m_{\beta} \bar{u}_{\beta} u_{\beta} - \sum_{\gamma} m_{\gamma} \bar{d}_{\gamma} d_{\gamma} + \dots, \quad (1.54)$$

con los índices $\alpha = e, \mu, \tau$, $\beta = u, c, t$ y $\gamma = d, s, b$, donde se han definido a su vez las masas

$$m_{\alpha} = \frac{v}{\sqrt{2}} (y_D^l)_{\alpha\alpha}, \quad (1.55)$$

$$m_{\beta} = \frac{v}{\sqrt{2}} (y_D^u)_{\beta\beta}, \quad (1.56)$$

$$m_{\gamma} = \frac{v}{\sqrt{2}} (y_D^d)_{\gamma\gamma}, \quad (1.57)$$

De esta manera se dice que los campos espinoriales han adquirido masa mediante el mecanismo de Brout-Englert-Higgs. Por otra parte cabe mencionar que los campos neutrinos permanecen sin masa.

1.2.5. Sector de Corrientes $\mathcal{L}_C$

El Lagrangiano del sector de las Corrientes puede ser representado como la suma de dos términos Lagrangianos $\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_C^l + \mathcal{L}_C^q$, donde se diferencia a aquel término que involucra campos leptónicos, etiquetado con el super índice l , de aquel que involucra campos de quarks, etiquetado con el superíndice q . Dichos términos son definidos como

$$\mathcal{L}_C^l = \sum_{\alpha} [\bar{L}_{\alpha,L} i \gamma^{\mu} D_{\mu} L_{\alpha,L} + \bar{l}_{\alpha,R} i \gamma^{\mu} D_{\mu} l_{\alpha,R}], \quad (1.58)$$

$$\mathcal{L}_C^q = \sum_{\beta} [\bar{Q}_{\beta,L} i \gamma^{\mu} D_{\mu} Q_{\beta,L} + \bar{u}_{\beta,R} i \gamma^{\mu} D_{\mu} u_{\beta,R} + \bar{d}_{\beta,R} i \gamma^{\mu} D_{\mu} d_{\beta,R}], \quad (1.59)$$

Implementando los mismos cambios de base de las ecuaciones (1.47) y (1.48) y utilizando las relaciones entre hipercargas dadas en las ecuaciones (1.40)-(1.42) obtenemos las expresiones

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C^l = & \bar{\nu}'_L i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \nu'_L + \frac{1 + Y_L^l}{2} e A_{\mu} \bar{\nu}'_L \gamma^{\mu} \nu'_L + \frac{c_W^2 - Y_L^l s_W^2}{2c_W} g_2 Z_{\mu} \bar{\nu}'_L \gamma^{\mu} \nu'_L \\ & + \bar{l}'_L i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} l'_L + \bar{l}'_R i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} l'_R + \frac{-1 + Y_L^l}{2} e A_{\mu} \bar{l}'_L \gamma^{\mu} l'_L + \frac{-Y_{\Phi}}{2} e A_{\mu} \bar{l}'_R \gamma^{\mu} l'_R \\ & + \frac{-c_W^2 - Y_L^l s_W^2}{2c_W} g_2 Z_{\mu} \bar{l}'_L \gamma^{\mu} l'_L + \frac{(Y_{\Phi} - Y_L^l) s_W^2}{2c_W} g_2 Z_{\mu} \bar{l}'_R \gamma^{\mu} l'_R \\ & + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{+} \bar{\nu}'_L \gamma^{\mu} l'_L + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{-} \bar{l}'_L \gamma^{\mu} \nu'_L, \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C^q = & \bar{u}'_L i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} u'_L + \bar{u}'_R i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} u'_R + \frac{1 + Y_L^q}{2} e A_{\mu} \bar{u}'_L \gamma^{\mu} u'_L + \frac{-Y_{\Phi} + Y_L^l}{2} e A_{\mu} \bar{u}'_R \gamma^{\mu} u'_R \\ & + \frac{c_W^2 - Y_L^q s_W^2}{2c_W} g_2 Z_{\mu} \bar{u}'_L \gamma^{\mu} u'_L + \frac{-(Y_{\Phi} + Y_L^q) s_W^2}{2c_W} g_2 Z_{\mu} \bar{u}'_R \gamma^{\mu} u'_R \\ & + \bar{d}'_L i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} d'_L + \bar{d}'_R i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} d'_R + \frac{-1 + Y_L^q}{2} e A_{\mu} \bar{d}'_L \gamma^{\mu} d'_L + \frac{-Y_{\Phi} + Y_L^l}{2} e A_{\mu} \bar{d}'_R \gamma^{\mu} d'_R \\ & + \frac{-c_W^2 - Y_L^q s_W^2}{2c_W} g_2 Z_{\mu} \bar{d}'_L \gamma^{\mu} d'_L + \frac{(Y_{\Phi} - Y_L^q) s_W^2}{2c_W} g_2 Z_{\mu} \bar{d}'_R \gamma^{\mu} d'_R \\ & + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{+} \bar{u}'_L \gamma^{\mu} (V_L^{u\dagger} V_L^d) d'_L + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_{\mu}^{-} \bar{d}'_L \gamma^{\mu} (V_L^{u\dagger} V_L^d)^{\dagger} u'_L, \end{aligned} \quad (1.61)$$

donde se emplean las abreviaturas $S_W = \sin \theta_W$ y $C_W = \cos \theta_W$, además se define el factor e como

$$e = g_2 s_W, \quad (1.62)$$

que se identificará como la carga eléctrica elemental, es decir, la carga eléctrica de un protón, por tanto $e > 0$. Adicionalmente se definió el vector ν_L como

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ \nu_{\mu,L} \\ \nu_{\tau,L} \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

de manera análoga se definió como $\bar{\nu} \equiv \nu_L^\dagger \gamma^0$, en base a esto, se define la transformación de cambio de base $\nu'_L = V_L^{l\dagger} \nu_L$. esta es la misma transformación de cambio de base que se lleva a cabo con los leptones izquierdos como se muestra en la ecuación (1.47). A la hipercarga del doblete leptónico se le asigna el valor $Y_L^l = -1$, de esta manera, el segundo término de la ecuación (1.60) es cancelado, dicho término representa las interacciones entre campos de neutrinos con el campo electromagnético, lo cual no ha sido medido experimentalmente, de esta manera la teoría se mantiene consistente a las mediciones experimentales. También es necesario que la hipercarga del doblete escalar $Y_\Phi = 1$ para que la expresión sea consistente con el electromagnetismo. Bajo esta elección de hipercargas es posible hacer uso de la definición de campos espinoriales de quiralidad indefinida dada en las ecuaciones (1.51) para escribir los términos sexto y séptimo de la ecuación (1.60) así como los términos, tercero, cuarto, noveno y décimo de la ecuación (1.61) como corrientes de Noether [22] de la forma $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$. La matriz 3×3 que aparece en los dos últimos términos de la ecuación (1.60) y expresada como $\kappa = V_L^{u\dagger} V_L^d$ recibe el nombre de matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, la cual es la fuente de la única violación de la simetría CP que posee la teoría del modelo estándar. Esto es relevante debido a que la violación de la simetría CP durante etapas tempranas del universo podría proporcionar una explicación a la asimetría bariónica existente [25]. Además resulta relevante para explicar la ocurrencia de procesos físicos en donde se lleva a cabo un cambio de sabor fermiónico. De este modo, utilizando las mismas transformaciones de cambio de base utilizadas en el sector de Yukawa y la definición de campos espinores de quiralidad indefinida llegamos a las expresiones

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C^l = \sum_\alpha \left[\bar{\nu}_{\alpha,L} i \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{\alpha,L} + \frac{g_2}{2c_W} Z_\mu \bar{\nu}_{\alpha,L} \gamma^\mu \nu_{\alpha,L} + \bar{l}_\alpha i \gamma^\mu \partial_\mu l_\alpha + N_l e A_\mu \bar{l}_\alpha \gamma^\mu l_\alpha \right. \\ \left. - \frac{g_2}{4c_W} Z_\mu \bar{l}_\alpha \gamma^\mu (-1 - 4N_l s_W^2 + \gamma_5) l_\alpha + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{\nu}_\alpha \gamma^\mu P_L l_\alpha + \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{l}_\alpha \gamma^\mu P_L \nu_\alpha \right], \quad (1.64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C^l = \sum_\beta \left[\bar{u}_\beta i \gamma^\mu \partial_\mu u_\beta + N_u e A_\mu \bar{u}_\beta \gamma^\mu u_\beta + \frac{g_2}{4c_W} Z_\mu \bar{u}_\beta \gamma^\mu (1 - 4N_u s_W^2 - \gamma_5) u_\beta \right] \\ + \sum_\gamma \left[\bar{d}_\gamma i \gamma^\mu \partial_\mu d_\gamma + N_d e A_\mu \bar{d}_\gamma \gamma^\mu d_\gamma + \frac{g_2}{4c_W} Z_\mu \bar{d}_\gamma \gamma^\mu (-1 - 4N_d s_W^2 - \gamma_5) d_\gamma \right] \\ + \sum_\beta \sum_\gamma \left[\frac{g_2}{\sqrt{2}} \kappa_{\beta\gamma} W_\mu^+ \bar{u}_\beta \gamma^\mu P_L d_\gamma + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \kappa_{\beta\gamma}^* W_\mu^- \bar{d}_\gamma \gamma^\mu P_L u_\beta \right], \quad (1.65) \end{aligned}$$

donde $\alpha = e, \mu, \tau$, $\beta = u, c, t$ y $\gamma = d, s, b$. Puede apreciarse que en las ecuaciones (1.64) y (1.65) existen términos que representan corrientes del tipo $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, en específico, el segundo y quinto término de la ecuación (1.64) y el tercero y sexto término de la ecuación (1.60) son términos de corrientes que involucran al campo vectorial Z_μ , el cuarto término de la ecuación (1.60) y los términos segundo y quinto de la ecuación (1.61) involucran al campo vectorial A_μ . Ambos campos

A_μ y Z_μ son campos eléctricamente neutros, de modo que los términos anteriormente mencionados reciben el nombre de corrientes neutras, mientras que los términos quinto y sexto de la ecuación (1.64) y séptimo y octavo de la ecuación (1.65) involucran a los campos complejos W^- y W^+ , los cuales son eléctricamente cargados, motivo por el cual reciben el nombre de corrientes cargadas. Además se emplea la matriz de proyección izquierda P_L , dado que ésta aparece en las corrientes cargadas, se dice que estas son corrientes izquierdas. A su vez se definieron las cantidades

$$N_l = \frac{1}{2}(-1 + Y_L^l) = -1, \quad (1.66)$$

$$N_u = \frac{1}{2}(1 + Y_L^q) = \frac{2}{3}, \quad (1.67)$$

$$N_d = \frac{1}{2}(-1 + Y_L^q) = -\frac{1}{3}, \quad (1.68)$$

las cuales determinan las cargas eléctricas de los leptones cargados y quarks, de manera que $q_l = eN_l = -e$, $q_u = eN_u = \frac{2}{3}e$ y $q_d = eN_d = -\frac{1}{3}e$. Implementando dichos valores, las expresiones (1.60) y (1.61) toman la forma

$$\mathcal{L}_C^l = \sum_{\alpha} [\overline{\nu_{\alpha}} i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \nu_{\alpha,L} + \overline{l_{\alpha}} i \gamma^{\mu} D_{\mu} l_{\alpha}] + \cdots, \quad (1.69)$$

$$\mathcal{L}_C^q = \sum_{\beta} \overline{u_{\beta}} i \gamma^{\mu} D_{\mu} u_{\beta} + \sum_{\gamma} \overline{d_{\gamma}} i \gamma^{\mu} D_{\mu} d_{\gamma} + \cdots, \quad (1.70)$$

donde se definieron las derivadas covariantes electromagnéticas dependientes del campo A_μ

$$D_{\mu} l_{\alpha} = (\partial_{\mu} - ieN_l A_{\mu}) l_{\alpha}, \quad (1.71)$$

$$D_{\mu} u_{\beta} = (\partial_{\mu} - ieN_u A_{\mu}) u_{\beta}, \quad (1.72)$$

$$D_{\mu} d_{\gamma} = (\partial_{\mu} - ieN_d A_{\mu}) d_{\gamma}. \quad (1.73)$$

Capítulo 2

Nueva Física

2.1. Neutrinos de Dirac y Majorana

A pesar de su capacidad de describir satisfactoriamente gran cantidad de fenómenos físicos, el Modelo Estándar no es una teoría infalible, pues existen diversos aspectos que se observan de manera experimental que dicho modelo no puede explicar, tal es el caso de la evidencia experimental existente la cual implica que los neutrinos son partículas masivas. Lo anterior ha motivado a la comunidad científica a postular diversos modelos más allá del Modelo Estándar que asociarían masas a dichas partículas. Entre varios de los mecanismos de generación de masas de neutrinos existentes se encuentra el mecanismo seesaw el cual considera los campos neutrinos como campos de Majorana, en lugar de neutrinos de Weyl, como se contempla en el ME.

2.1.1. Conjugación de carga

Consideremos a la operación de conjugación de carga, cuya aplicación en un campo de materia provoca que éste sea intercambiado por su equivalente en antimateria. De esta manera bajo conjugación de carga, objetos como la cuadricorriente j o el cuadripotencial A se transforman como

$$j(x) \longrightarrow j^c(x) = -j(x), \quad (2.1)$$

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^{c\mu} = -A^\mu(x), \quad (2.2)$$

Notemos que en estos casos se produce un cambio de signo debido al cambio en el signo de la carga eléctrica producido al intercambiar materia por antimateria. De esta manera se define un campo fermiónico de carga conjugada como

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T, \quad (2.3)$$

donde se considera a la matriz de conjugación de carga C , en las representaciones de Weyl y Dirac definida como $C = -i\gamma^0\gamma^2$, donde γ^2 y γ^0 son matrices gamma de Dirac. En general, dicha matriz es definida por sus propiedades [11]

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu, \quad C^{-1} = C^\dagger, \quad C^T = -C. \quad (2.4)$$

Definidos de esta manera, los campos fermiónicos producen un cambio en el signo de su carga eléctrica dentro de la ecuación de Dirac, consistente con el intercambio de materia por antimateria.

2.1.2. Neutrinos de Majorana

Consideremos la ecuación de Dirac $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$, realizando un producto por alguna de las matrices de proyección quirál, como se definieron en las ecuaciones (1.30) y (1.31), se obtiene el siguiente par de ecuaciones que corresponden al producto por la matriz P_L y P_R respectivamente.

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\psi_L, \quad (2.5)$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R. \quad (2.6)$$

Notemos que las partes quirales izquierda y derecha del campo espinorial se encuentran acopladas entre sí. Sin embargo, en el caso en donde $m = 0$ ambas partes quirales se encontratán desacopladas la una de la otra. A dicha condición se le conoce como condición de Weyl, la cual produce, a partir de las ecuaciones anteriores, las ecuaciones de Weyl

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R &= 0, \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dado que en el Modelo Estándar, los campos neutrinos son tomados como no masivos, cumplen la condición de Weyl, y por tanto son considerados como campos espinoriales de Weyl. Más específicamente, el ME considera a los neutrinos únicamente como campos espinoriales izquierdos de Weyl, omitiendo por completo la componente derecha. Este hecho provoca que para describir un neutrino sea únicamente necesarios dos componentes en lugar de las cuatro necesarias para describir un espinor de Dirac.

A partir de la ecuación (2.5) se puede derivar la siguiente expresión análoga para campos de carga conjugada

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R^c = m\psi_L^c. \quad (2.8)$$

Consideremos la siguiente condición, conocida como la condición de Majorana

$$\psi_R = \varsigma C \bar{\psi}_L^T, \quad (2.9)$$

donde ς es alguna fase compleja arbitraria. Suponiendo que el campo ψ cumple dicha condición, puede demostrarse que la ecuación (2.8) es equivalente a la expresión (2.6). Implicando de esta manera que las ecuaciones (2.5) y (2.6) son equivalentes. Esto nos dice que el campo quirál derecho ψ_R se encuentra completamente determinado por su contraparte quirál ψ_L . Reduciendo así el número de componentes independientes necesarios para describir a ψ de cuatro a únicamente dos. De esta manera se considera que un campo es de Majorana si cumple con la condición (2.9). Eligiendo $\varsigma = 1$ es posible expresar la condición de Majorana como $\psi = \psi^C$. De manera que un campo espinor de Majorana, su partícula coincide con su antipartícula, implicando que se tratan de partículas eléctricamente neutras. Algunas de las implicaciones que existen al considerar campos de Majorana respecto a sus quiralidades son.

$$P_L \psi_L^c = 0, \quad P_R \psi_L^c = \psi_L^c, \quad P_R \psi_R^c = 0, \quad P_L \psi_R^c = \psi_R^c. \quad (2.10)$$

Esto es, el campo de carga conjugado de un campo quirál izquierdo de Majorana es un campo quirál derecho y viceversa, el campo de carga conjugado de un campo quirál derecho de Majorana es un campo quirál izquierdo y viceversa.

De esta manera se postula el Lagrangiano de Majorana como

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \left[\bar{\psi}_L i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L + \bar{\psi}_L^c i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L^c - m (\bar{\psi}_L^c \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_L^c) \right]. \quad (2.11)$$

donde $\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \frac{\overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu}{2}$. Esta notación indica sobre cual campo se encuentra aplicada la derivada parcial, de modo que $\overline{\psi}_L i\gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu \psi_L = \overline{\psi}_L i\gamma^\mu (\partial_\mu \psi_L)$ y $\overline{\psi}_L i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu \psi_L = (\partial_\mu \overline{\psi}_L) i\gamma^\mu \psi_L$.

Considerando la definición de un campo conjugado de carga dada por la ecuación (2.3) y las propiedades descritas en (2.4) la ecuación (2.11) toma la forma

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} [\overline{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \overline{\psi}_L^c i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L^c - m (\overline{\psi}_L^c \psi_L + \overline{\psi}_L \psi_L^c)]. \quad (2.12)$$

Finalmente, dado que para un campo de Majorana $\psi = \psi_L + \psi_R = \psi_L + \psi_L^c$ debido a las propiedades dadas en la ecuación (2.10), el Lagrangiano de Majorana se escribe como

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} (\overline{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} \psi). \quad (2.13)$$

2.2. Lagrangianos efectivos

2.2.1. Los fundamentos del Lagrangiano efectivo

Podría resultar paradójico pensar en ser capaces de predecir el comportamiento de un fenómeno el cual no comprendemos en su totalidad. No obstante, precisamente es así como funcionan la totalidad de teorías y modelos físicos. En realidad, toda teoría física tiene un poder predictivo restringido al cumplimiento de circunstancias específicas. Tomemos como ejemplo el caso de la mecánica clásica, ésta es capaz de describir con gran precisión los fenómenos que ocurren a escalas mayores a la escala subatómica, sin embargo, si se desea modelar algún fenómeno a escalas menores, la mayoría de preceptos de la mecánica clásica resultan inútiles [34]. De modo que toda teoría física está sujeta a un rango de aplicabilidad, en general los límites de éstas se encuentran dadas por escalas de energía [29, 30].

A pesar de que aquellas teorías que gozan de un rango aplicativo más amplio suelen ser consideradas más exitosas, por lo general implican la introducción de un mayor número de variables y parámetros. En varias circunstancias no se precisa de una descripción tan extensa, sino que se busca una aproximación más cuantitativa y simple de algún fenómeno, por lo que resulta más práctico derivar alguna teoría que se adecúe a nuestros propósitos a partir de una teoría más fundamental. Supongamos que se tiene una teoría fundamental que opera a una alta escala de energía Λ , la cual se encontrará descrita tanto por campos apreciables a escalas energéticas menores a Λ (modos ligeros) como campos que se manifiestan únicamente a escalas energéticas igual o mayores que Λ (modos pesados). Los Lagrangianos efectivos nos permiten derivar a partir de alguna teoría de alguna escala energética alta Λ , expresiones que describen dinámica de baja energía, es decir fenómenos que ocurren debajo de dicha escala [33].

Formalmente, dicha teoría efectiva se obtiene tras integrar las variables dinámicas con energías $\geq \Lambda$ de alguna teoría más fundamental, de manera que la expresión resultante es dependiente únicamente de los modos ligeros de nuestro sistema. No obstante, a pesar de no depender explícitamente de modos pesados, nuestro Lagrangiano efectivo contendrá todos sus efectos físicos, los cuales son incluidos de manera indirecta mediante parámetros dependientes de Λ . Dotando así a nuestra teoría de un considerable poder predictivo, bajo la restricción de permanecer dentro de su rango de aplicabilidad, esto es, el Lagrangiano efectivo puede racionalizarse como un límite de bajas energías de alguna teoría más fundamental [21, 35].

2.2.2. Integración de modos pesados

A continuación supongamos que conocemos la teoría subyacente de la cual deseamos derivar una teoría efectiva. La acción efectiva Γ_{eff} puede ser expresada como la siguiente integral funcional:

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\Phi_l]} = \int \mathcal{D}\Phi_h e^{iS[\Phi_l, \Phi_h]}, \quad (2.14)$$

donde Φ_l y Φ_h hacen referencia a los campos ligeros y pesados respectivamente y $S[\Phi_l, \Phi_h]$ es la acción clásica de nuestra teoría subyacente. De manera que la acción efectiva se define como sigue

$$\Gamma_{\text{eff}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}[\Phi_l]. \quad (2.15)$$

Seguido de esto es conveniente expandir el campo pesado Φ_h alrededor de una configuración de campo $\bar{\Phi}_h$

$$\begin{aligned} S[\Phi_l, \Phi_h] = & S[\Phi_l, \bar{\Phi}_h] + \int d^4x \frac{\partial S}{\partial \Phi_h(x)} \Big|_{\Phi_h = \bar{\Phi}_h} (\Phi_h(x) - \bar{\Phi}_h(x)) \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \frac{\partial^2 S}{\partial \Phi_h(x) \partial \Phi_h(y)} \Big|_{\Phi_h = \bar{\Phi}_h} (\Phi_h(x) - \bar{\Phi}_h(x)) (\Phi_h(y) - \bar{\Phi}_h(y)) + \dots, \end{aligned} \quad (2.16)$$

elegimos $\bar{\Phi}_h$ convenientemente de manera que

$$\frac{\partial S[\Phi_l, \Phi_h]}{\partial \Phi_h(x)} \Big|_{\Phi_h = \bar{\Phi}_h} = 0. \quad (2.17)$$

Tras establecer esta condición, es posible expresar $\bar{\Phi}_h$ como una funcional de Φ_l y x , esto es $\bar{\Phi}_h[\Phi_l, x]$. Con esto a consideración, la ecuación (2.14) puede ser expresada

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\Phi_l]} = e^{iS[\Phi_l, \bar{\Phi}_h]} \int \mathcal{D}\Phi_h e^{\int d^4x d^4y \left\{ -\frac{1}{2} (\Phi_h(x) - \bar{\Phi}_h(x)) A(x, y) (\Phi_h(y) - \bar{\Phi}_h(y)) + \dots \right\}}, \quad (2.18)$$

donde se definió

$$A(x, y) = -i \frac{\partial^2 S}{\partial \Phi_h(x) \partial \Phi_h(y)} \Big|_{\Phi_h = \bar{\Phi}_h}, \quad (2.19)$$

por lo que podemos representar el coeficiente de la exponencial de la ecuación (2.18) como el producto de matrices infinitas continuas

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\Phi_l]} = e^{iS[\Phi_l, \bar{\Phi}_h]} \int \mathcal{D}\Phi_h e^{\left\{ \frac{1}{2} (\Phi_h - \bar{\Phi}_h)^\top A (\Phi_h - \bar{\Phi}_h) + \dots \right\}}, \quad (2.20)$$

en donde $(\Phi_h - \bar{\Phi}_h)$ representa una matriz columna infinita, de valores reales caracterizada por el parámetro continuo x , A es una matriz cuadrada de valores reales, infinita, de parámetros continuos x y y . Dado que la matriz A es diagonalizable podemos llegar a la siguiente expresión mediante integraciones Gaussianas, llegamos a

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\Phi_l]} = e^{iS[\Phi_l, \bar{\Phi}_h]} \det \{A\}^{1/2} + \dots. \quad (2.21)$$

Haciendo uso de la formula de Jacobi [36]

$$\log \det \{A\} = \text{tr} \log \{A\}, \quad (2.22)$$

obtenemos

$$\Gamma[\Phi_l] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^{(k)}[\Phi_l] = S[\Phi_l, \bar{\Phi}_h[\Phi_l]] + \frac{i}{2} \text{tr} \log A[\Phi_l] + \dots. \quad (2.23)$$

La expresión anterior es en realidad una expansión en el número de lazos, de esta forma el primer término corresponde a una integración a nivel de árbol y los siguientes corresponden a aproximaciones de lazos. Notar que el término correspondiente a un lazo se encuentra escrito en función del operador A dependiente de los campos Φ_l .

A continuación se muestra un método general por el cual en muchas ocasiones es posible encontrar $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ como una expansión en el número de derivadas de los modos ligeros sobre algún parámetro dimensional M basado en el libro *Effective Lagrangians for the Standard Model* [35].

Consideremos un modelo caracterizado por un Lagrangiano descrito por modos ligeros ϕ y pesados Φ

$$\mathcal{L}(\phi, \Phi) = \mathcal{L}_l(\phi) + \mathcal{L}_{l,h}(\phi, \Phi) + \mathcal{L}_h(\Phi). \quad (2.24)$$

El Lagrangiano anterior ha sido dividido en tres términos, en los cuales se describen las interacciones únicamente entre modos ligeros; entre modos ligeros y pesados; y entre modos pesados únicamente, respectivamente. Por ejemplo la siguiente.

$$\mathcal{L}(\phi, \Phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) + \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}M^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\phi^2\Phi^2; \quad (2.25)$$

suponemos que $M \gg m$, donde M y m son las masas asociadas a las partículas pesada y ligera respectivamente, es decir, que el campo Φ es muy pesado en comparación con ϕ .

Expresemos su acción de la siguiente manera $S[\phi, \Phi] = S_\phi[\phi] + S_\Phi[\phi, \Phi]$, donde se diferencian los términos que dependen únicamente de los modos ligeros del resto, entonces;

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\phi]} = \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\phi, \Phi]} = e^{iS_\phi[\phi]} \int \mathcal{D}\Phi e^{iS_\Phi[\phi, \Phi]}. \quad (2.26)$$

Por el momento nos enfocamos exclusivamente en S_Φ , expresándolo de manera explícita:

$$\begin{aligned} S_\Phi &= \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{2}M^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\phi^2\Phi^2 \right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu(\Phi\partial^\mu\Phi) - \frac{1}{2}\Phi\Box\Phi - \frac{1}{2}M^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\phi^2\Phi^2 \right) \\ &= \int d^4x \frac{1}{2}\partial_\mu(\Phi\partial^\mu\Phi) + \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \right) \Phi (\Box + M^2 - \alpha\phi^2) \Phi. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Notemos que el primer término es un término de superficie, el cual es descartado a través del teorema de la divergencia, S_Φ se expresa como:

$$\begin{aligned} S_\Phi &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \right) \Phi (\Box + M^2 - \alpha\phi^2) \Phi \\ &= \int d^4x \int d^4y \left(-\frac{1}{2} \right) \Phi(x) \delta^4(x-y) [\Box_y + M^2 - \alpha\phi^2(y)] \Phi(y). \end{aligned} \quad (2.28)$$

De manera que,

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\phi]} = e^{iS_\phi} \int \mathcal{D}\Phi e^{-\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y \Phi(x) \delta^4(x-y) [\Box_y + M^2 - \alpha\phi^2(y)] \Phi^2(y)}. \quad (2.29)$$

Estableciendo así una analogía a la ecuación (2.18), de este modo la funcional integral puede realizarse por medio de una integración Gaussiana, obteniendo así

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\phi]} = e^{iS_\phi[\phi]} (\det A)^{-\frac{1}{2}}; \quad (2.30)$$

en donde A es un operador de la forma $A_{xy} = i(\Box_x + M^2 - \alpha\phi_x^2) \delta(x-y)$, donde $\phi_x = \phi(x)$. De manera que conseguimos la siguiente expresión:

$$\Gamma_{\text{eff}} = S_\phi + \frac{i}{2} \text{tr} \log \{A\}. \quad (2.31)$$

Considerando que

$$\log \{A\} = \log \{i(\Box + M^2 - \alpha\phi^2)\} = \log \left\{ i(\Box + M^2) \left(1 - \alpha(\Box + M^2)^{-1} \phi^2 \right) \right\}, \quad (2.32)$$

obtenemos

$$\text{tr} \log \{A\} = \text{tr} \log \{i (\square + M^2)\} + \text{tr} \log \left\{1 - \alpha (\square + M^2)^{-1} \phi^2\right\}. \quad (2.33)$$

A continuación consideramos la expansión en serie de potencias

$$\log(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}; \quad (2.34)$$

implementando esta expansión a la ecuación (2.33) conseguimos

$$\text{tr} \log \{A\} = \text{tr} \log \{i (\square + M^2)\} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{tr} \left\{ \left(\alpha (\square + M^2)^{-1} \phi^2 \right)^k \right\}, \quad (2.35)$$

de esta forma, la acción efectiva se expresa como:

$$\Gamma_{\text{eff}} = S_{\phi} + \frac{i}{2} \text{tr} \log \{i (\square + M^2)\} - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{tr} \left\{ \left(\alpha (\square + M^2)^{-1} \phi^2 \right)^k \right\}. \quad (2.36)$$

El segundo término de la expresión anterior es independiente de los campos, de modo que solo contribuye a la energía del punto cero, por lo que será ignorado.

Escribimos a la acción efectiva como

$$\Gamma_{\text{eff}} = S_{\phi} - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{tr} \left\{ \left(\alpha (\square + M^2)^{-1} \phi^2 \right)^k \right\} \equiv S_{\phi} + \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma^{(k)}[\phi]; \quad (2.37)$$

analicemos el término correspondiente a $k = 1$ en la expresión anterior.

$$\Gamma^{(1)}[\phi] = -\frac{i}{2} \text{tr} \left\{ \alpha (\square + M^2)^{-1} \phi^2 \right\} = -\frac{i\alpha}{2} \int d^4x (\square + M^2)^{-1}(x) \phi_x^2, \quad (2.38)$$

donde se expresó la traza de la matriz continua como una integral sobre los elementos de la diagonal parametrizados por x .

Consideremos ahora el propagador de Feynman de la teoría de Klein-Gordon, denotado como $\mathcal{D}_F(x - y)$, el cual satisface la condición

$$(\square_x + M^2)(x) i\mathcal{D}_F(x - y) = \delta^4(x - y), \quad (2.39)$$

esto es, $\mathcal{D}_F(x - y)^{-1}$ es una función de Green del operador de Klein-Gordon $(\square + M^2)$. Por lo tanto podemos escribir la ecuación (2.38) como

$$\Gamma^{(1)}[\phi] = -\frac{i\alpha}{2} \int d^4x (\square + M^2)^{-1}(x) \phi_x^2 = \frac{\alpha}{2} \int d^4x \mathcal{D}_F(x - x) \phi_x^2. \quad (2.40)$$

Es posible escribir el propagador de Feynman en el espacio de momentos mediante su transformada de Fourier de la siguiente forma

$$\mathcal{D}_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - y)}, \quad (2.41)$$

así que, en particular

$$\mathcal{D}_F(x - x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}; \quad (2.42)$$

con lo cual la ecuación (2.40) se escribe como

$$\Gamma^{(1)}[\phi] = \frac{i}{2} \alpha \int d^4x \phi_x^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (2.43)$$

sin embargo la integral de momentos es divergente debido a la dimensión a la que opera, por lo que se llevará a cabo una regularización dimensional.

2.2.3. Regularización dimensional

Consideremos la integral

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (2.44)$$

Debido a que esta integral es divergente cuando la dimensión $D = 4$; consideramos, en su lugar, un espaciotiempo con D dimensiones, de los cuales una dimensión es de tipo temporal y $D - 1$ son de tipo espacial. Con la particularidad de que D no es un número natural, sino un número complejo con la única restricción de que $D \neq 4$. De manera que la integral, en este espaciotiempo de D dimensiones toma la forma

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (2.45)$$

en donde $p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2$, y $\vec{p}^2$ es un producto escalar de tipo Euclidiano en un espacio de $D - 1$ dimensiones. Además es introducida la cantidad μ la cual tiene unidades de $[\mu] = \text{masa}$, con el propósito de ajustar las unidades de la integral.

Implementando a la ecuación (2.45) una rotación de Wick obtenemos

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} = -\frac{i}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d^D p_E \frac{1}{p_E^2 + M^2}, \quad (2.46)$$

donde p_E hace referencia al momento Euclidiano.

A continuación hacemos uso de las coordenadas hipersféricas en D dimensiones, de modo que la integral en la ecuación (2.46) se expresa

$$-\frac{i}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d^D p_E \frac{1}{p_E^2 + M^2} = -i \int \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d|p_E| \frac{|p_E|^{D-1}}{|p_E|^2 + M^2}, \quad (2.47)$$

donde Ω_D representa el ángulo sólido del espacio D dimensional. Por tanto $\int d\Omega_D$ representa el área de una esfera unitaria en D dimensiones, la cual puede ser expresada mediante funciones Gamma de la siguiente manera [24]

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})}. \quad (2.48)$$

Podemos entonces expresar la ecuación (2.47) como

$$\begin{aligned} -\frac{i}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d^D p_E \frac{1}{p_E^2 + M^2} &= -i \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \mu^{4-D} \int d|p_E| \frac{|p_E|^{D-1}}{|p_E|^2 + M^2} \frac{1}{(2\pi)^D} \\ &= -\frac{i}{2} \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})} \mu^{4-D} \int d|p_E| (2|p_E|) \frac{(|p_E|^2)^{\frac{D}{2}-1}}{|p_E|^2 + M^2}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

haciendo un cambio de variable de la forma $x = |p_E|^2$ la integral se expresa como

$$-\frac{i}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d^D p_E \frac{1}{p_E^2 + M^2} = -\frac{i}{2} \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})} \mu^{4-D} \int dx \frac{x^{\frac{D}{2}-1}}{x + M^2}; \quad (2.50)$$

ahora, aplicando el cambio de variable $y = \frac{M^2}{x+M^2}$ obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{i}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d^D p_E \frac{1}{p_E^2 + M^2} &= -\frac{i}{2} \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})} \mu^{4-D} \\ &\quad \times \int_0^1 dy (M^2)^{\frac{D}{2}-1} (1-y)^{\frac{D}{2}-1} y^{-\frac{D}{2}}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Notemos además que la integral puede expresarse en términos de una función Beta dada la siguiente propiedad

$$\beta(p, q) = \int_0^1 dt t^{p-1} (1-t)^{q-1}, \quad (2.52)$$

de modo que la ecuación (2.51) se escribe

$$-\frac{i}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d^D p_E \frac{1}{p_E^2 + M^2} = -\frac{i}{2} \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})} (M^2)^{\frac{D}{2}-1} \mu^{4-D} \beta\left(\frac{D}{2}, 1 - \frac{D}{2}\right), \quad (2.53)$$

y dado que

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}; \quad (2.54)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{i}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d^D p_E \frac{1}{p_E^2 + M^2} &= -\frac{i}{2} \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})} (M^2)^{\frac{D}{2}-1} \mu^{4-D} \frac{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(1)} \\ &= -\frac{i}{2} \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} (M^2)^{\frac{D}{2}-1} \mu^{4-D} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \\ &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)^{\frac{4-D}{2}} M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{4-D}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

A continuación se realiza una continuación analítica de la ecuación anterior, para lo cual suponemos que ésta es válida para D complejo en particular para $D \rightarrow 4$. Bajo tales circunstancias, definimos $\epsilon = 4 - D$, con $\epsilon \rightarrow 0$. Usando tal definición, la ecuación anterior se expresa como

$$-\frac{i}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d^D p_E \frac{1}{p_E^2 + M^2} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)^{\epsilon/2} M^2 \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right). \quad (2.56)$$

Consideramos las siguientes expansiones alrededor de $\epsilon = 0$

$$\Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) = -\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (2.57)$$

$$x^{\epsilon/2} = 1 + \frac{1}{2} \log(x)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.58)$$

donde γ_E es la constante de Euler y los términos $\mathcal{O}(x)$ representan los términos de orden x y mayor.

Puesto que la función $\Gamma(z)$ tiene polos en $z = 0, -1, -2, \dots$, la función $\Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2})$ tiene un polo en $\epsilon = 0$, lo cual es explícito en su expansión en serie. Con estos resultados escribimos

$$\begin{aligned} -\frac{i}{(2\pi)^D} \mu^{4-D} \int d^D p_E \frac{1}{p_E^2 + M^2} &= -\frac{i}{(4\pi)^2} M^2 \left(1 + \frac{1}{2} \log\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right) \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &\quad \times \left(-\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} M^2 \left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \gamma_E + \log(4\pi) + \log\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)\right) \\ &\quad + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &\simeq i \frac{M^2}{(4\pi)^2} \left(N_\epsilon + 1 - \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)\right), \end{aligned} \quad (2.59)$$

donde $N_\epsilon \equiv \frac{2}{\epsilon} + \log 4\pi - \gamma_E$, de modo que, sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (2.43) obtenemos finalmente

$$\Gamma^{(1)}[\phi] = -\frac{\alpha M^2}{2(4\pi)^2} \left(N_\epsilon + 1 - \log \frac{M^2}{\mu^2} \right) \int dx \phi_x^2. \quad (2.60)$$

La divergencia originada por nuestro número de dimensiones, y que se encuentra contenida en el término divergente N_ϵ podría ser eliminada mediante un proceso de renormalización.

A continuación desarrollemos el siguiente término en la ecuación (2.37).

$$\Gamma^{(2)}[\phi] = -\frac{i}{4} \alpha^2 \text{tr} \int dx dy d\tilde{q} d\tilde{k} \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2 - M^2} \phi_y^2 \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - M^2} \phi_x^2, \quad (2.61)$$

donde $d\tilde{q}$ hace referencia a la variable de integración necesaria para llevar a cabo una regularización dimensional, esto es $d\tilde{q} = \mu^{4-D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D}$.

Ahora introducimos el cambio de variable $k = p + q$,

$$\Gamma^{(2)}[\phi] = -\frac{i}{4} \alpha^2 \text{tr} \int dx dy \phi_x^2 \phi_y^2 \int d\tilde{p} e^{-ip(y-x)} I(p^2; M^2), \quad (2.62)$$

con

$$I(p^2; M^2) \equiv \int d\tilde{q} \frac{1}{[q^2 - M^2][(p+q)^2 - M^2]}. \quad (2.63)$$

A continuación analizaremos el integrando de la ecuación anterior, que mediante una parametrización de Feynman puede ser escrita como [23]

$$\int d\tilde{p} \frac{1}{[q^2 - M^2][(p+q)^2 - M^2]} = \int d\tilde{p} \int_0^1 dx \frac{1}{[(q + (1-x)p)^2 + x(x-1)p^2 - M^2]^2}. \quad (2.64)$$

Ahora realizamos el cambio de variable $k = q + p(1-x)$ que en componentes se escribe como $k^\mu = q^\mu + (1-x)p^\mu$. El Jacobiano de esta transformación es +1, de modo que la ecuación (2.64) se escribe como

$$\begin{aligned} \int d\tilde{p} \frac{1}{[q^2 - M^2][(p+q)^2 - M^2]} &= \int d\tilde{k} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - (M^2 - x(1-x)p^2)]^2} \\ &= \int_0^1 dx \int d\tilde{k} \frac{1}{(k^2 - R^2)^2}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

donde $R^2 = M^2 - x(1-x)p^2$. Enfoquémonos ahora en la integral $\int d\tilde{k} \frac{1}{(k^2 - R^2)^2}$, la cual es divergente en 4 dimensiones, motivo por el cual se le realizará una regularización dimensional de manera análoga a cómo se hizo con la ecuación (2.45). El resultado de dicho proceso puede encontrarse en tablas de integrales, siguiendo específicamente la tabla encontrada en el libro de *Peskin y Schroeder* A.44 [23]:

$$\begin{aligned} \int d\tilde{k} \frac{1}{(k^2 - R^2)^2} &= \mu^{4-D} \frac{(-1)^2 i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{R^2} \right)^{2 - \frac{D}{2}} \\ &= \mu^{4-D} \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{1}{R^2} \right)^{2 - \frac{D}{2}}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Nuevamente, usamos el parámetro $\epsilon = 4 - D$ de modo que si $D \rightarrow 4$ entonces $\epsilon \rightarrow 0$, entonces la ecuación (2.66) toma la forma

$$\begin{aligned} \int d\tilde{k} \frac{1}{(k^2 - R^2)^2} &= \mu^\epsilon \frac{i}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{1}{R^2} \right)^{\epsilon/2} \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{4\pi\mu^2}{R^2} \right)^{\epsilon/2}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

alrededor de $\epsilon = 0$ la función $\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ y $x^{-\epsilon}$ se expanden en series de potencias como

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (2.68)$$

$$x^{-\epsilon} = 1 - \log(x)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.69)$$

de modo que

$$I(p^2; M^2) = \int_0^1 dx \int d\tilde{k} \frac{1}{(k^2 - R^2(x))^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[N_\epsilon - \log \frac{R^2(x)}{\mu^2} \right]. \quad (2.70)$$

Recuperando que $R = M^2 - x(1-x)p^2$, la ecuación (2.61) se expresa como

$$\Gamma^{(2)}[\phi] = \frac{\alpha^2}{4(4\pi)^2} \int dx dy d\tilde{p} \phi_x^2 \phi_y^2 e^{-p(y-x)} \left(N_\epsilon - \log \frac{M^2}{\mu^2} - \int_0^1 dt \log \left[1 - t(1-t) \frac{p^2}{M^2} \right] \right). \quad (2.71)$$

Para el caso en que $p^2 \ll M^2$ es posible expandir el logaritmo en esta ecuación de manera que

$$\begin{aligned} I' \left(\frac{p^2}{M^2} \right) &\equiv - \int_0^1 dt \log \left[1 - t(1-t) \frac{p^2}{M^2} \right] \\ &= \int_0^1 dt \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{p^2}{M^2} \right)^2 [t(1-t)]^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{k(2k+1)!} \left(\frac{p^2}{M^2} \right)^k \\ &= \frac{1}{6} \frac{p^2}{M^2} + \frac{1}{60} \left(\frac{p^2}{M^2} \right)^2 + \frac{1}{420} \left(\frac{p^2}{M^2} \right)^3 + \mathcal{O} \left(\frac{p^2}{M^2} \right)^4, \end{aligned} \quad (2.72)$$

por lo que finalmente llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}[\phi] &= \frac{\alpha^2}{4(4\pi)^2} \left(N_\epsilon - \log \frac{M^2}{\mu^2} \right) \int dx \phi^4 \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{4(4\pi)^2} \int dx dy d\tilde{p} \phi_x^2 \phi_y^2 e^{-p(y-x)} I' \left(\frac{p^2}{M^2} \right) \\ &= \frac{\alpha^2}{4(4\pi)^2} \left(N_\epsilon - \log \frac{M^2}{\mu^2} \right) \int dx \phi^4 + \frac{\alpha^2}{4(4\pi)^2} \int dx \phi^2 I' \left(\frac{-\square}{M^2} \right) \phi^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{4(4\pi)^2} \left(N_\epsilon - \log \frac{M^2}{\mu^2} \right) \int dx \phi^4 - \frac{\alpha^2}{24(4\pi)^2 M^2} \int dx \phi^2 \square \phi^2 + \mathcal{O} \left(\frac{\square}{M^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.73)$$

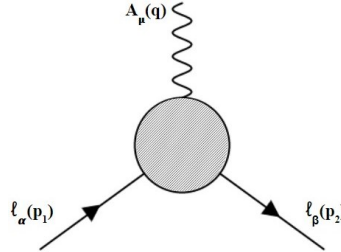
Podemos notar que el último término de la ecuación anterior no es renormalizable.

Capítulo 3

Contribuciones a propiedades electromagnéticas de leptones del término Lagrangiano $\mathcal{L}_B$

3.1. Parametrización del vértice electromagnético

El acoplamiento entre leptones y un fotón puede ser expresado como [11]



$$\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu = \bar{u}_\beta(p_2) \Lambda_\mu^{\alpha\beta}(p_1, p_2) u_\alpha(p_1). \quad (3.1)$$

donde se utiliza la notación $u_\alpha(p_1) = u(p_1, m_\alpha)$, $\bar{u}_\beta(p_2) = \bar{u}(p_2, m_\beta)$ para compactar la expresión, y $\Lambda_\mu^{\alpha\beta}(p_1, p_2)$ es una matriz 4×4 en el espacio de los espinores la cual contiene información acerca de las propiedades electromagnéticas de los leptones, en donde se considera que puede darse o no un cambio en el sabor de estos (esto es $\alpha = \beta$ ó $\alpha \neq \beta$), y que puede ser descompuesta en términos linealmente independientes de productos de gammas de Dirac y los cuádrimomentos p_1 y p_2 , expresada de la manera más general posible [31]

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{\alpha\beta}(p_1, p_2) = & f_1^{\alpha\beta}(q^2) q_\mu + f_2^{\alpha\beta}(q^2) + f_3^{\alpha\beta}(q^2) \gamma_\mu \\ & + f_4^{\alpha\beta}(q^2) \gamma_\mu \gamma_5 + f_5^{\alpha\beta}(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu + f_6^{\alpha\beta}(q^2) \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \sigma^{\rho\lambda}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $f_j^{\alpha\beta}(q^2)$, $k = 1, \dots, 6$ son conocidos como factores de forma, q el cuádrimomento del campo fotónico, que como se estableció anteriormente, por conservación del momento lineal es equivalente a $q = p_2 - p_1$, $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ es el símbolo de Levi-Civita en cuatro dimensiones.

El número de factores de forma puede ser reducidos al imponer conservación de carga $\partial^\mu j_\mu^{\text{eff}}(x) = 0$, lo cual implica que

$$\langle u_\beta(p_2) | [D^\mu, j_\mu^{\text{eff}}(0)] | u_\alpha(p_1) \rangle = 0 \quad (3.3)$$

que es equivalente en el espacio de momentos a constricción

$$q^\mu \bar{u}_\beta(p_2) \Lambda_\mu^{\alpha\beta} u_\alpha(p_1) = 0, \quad (3.4)$$

considerando la ecuación de Dirac para los campos $u_\alpha(p_1)$ y $\bar{u}_\beta(p_2)$, esto es

$$\not{p}_1 u(p_1) = m_\alpha u(p_1) \quad (3.5)$$

$$\bar{u}(p_2) \not{p}_2 = m_\beta \bar{u}(p_2) \quad (3.6)$$

se obtiene la constricción

$$f_1^{\alpha\beta}(q^2)q^2 + f_2^{\alpha\beta}(q^2)q^2\gamma_5 + f_3^{\alpha\beta}(q^2)(m_\beta - m_\alpha) + f_4^{\alpha\beta}(q^2)(m_\beta + m_\alpha)\gamma_5 = 0 \quad (3.7)$$

debido a que la matriz de Dirac γ_5 y la matriz identidad $\mathbb{1}_4$ son linealmente independientes, la constricción anterior puede ser desintegrada en dos constricciones independientes [11]

$$f_1^{\alpha\beta}(q^2)q^2 + f_3^{\alpha\beta}(q^2)(m_\beta - m_\alpha) = 0, \quad (3.8)$$

$$f_2^{\alpha\beta}(q^2)q^2 + f_4^{\alpha\beta}(q^2)(m_\beta + m_\alpha) = 0. \quad (3.9)$$

bajo estas suposiciones el vértice $\hat{\Gamma}_\mu^{\alpha\beta}$ puede ser expresado de la siguiente manera [32]

$$\hat{\Gamma}_\mu^{\alpha\beta} = ie \left[\gamma_\mu (f_{\alpha\beta}^V - f_{\alpha\beta}^A \gamma_5) - \sigma_{\mu\nu} q^\nu \left(i \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta} - \frac{d_{\alpha\beta}}{e} \gamma_5 \right) \right], \quad (3.10)$$

la cual es la estructura de la parametrización del vértice electromagnético, donde e denota la carga eléctrica con valor positivo, los parámetros $f_{\alpha\beta}^V$ y $f_{\alpha\beta}^A$, $\mu_{\alpha\beta}$ y $d_{\alpha\beta}$ son respectivamente las contribuciones a nivel de un lazo a la carga eléctrica, corriente axial, momento anómalo magnético y momento dipolar eléctrico. Para los factores $\mu_{\alpha\beta}$ y $d_{\alpha\beta}$ en el caso en que $\alpha \neq \beta$ son llamados momentos magnéticos de transición y momentos dipolares eléctricos de transición respectivamente.

3.2. Contribuciones efectivas al acoplamiento $A^\mu nn$

A continuación se tomarán los Lagrangianos efectivos planteados al inicio de esta tesis y se desarrollarán con el propósito de encontrar su contribución al acoplamiento $n_l n_m A^\alpha$, en donde los campos de neutrinos están expresados como eigenestados de masa.

Primeramente se considerará el primer Lagrangiano efectivo propuesto dado en la expresión (1). Se utilizan las notaciones $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ para denotar el campo adjunto de Dirac de algún espinor de Dirac y Ψ^c como se encuentra definido como en la ecuación (2.3). Haciendo un análisis de las unidades del Lagrangiano, utilizando Unidades Naturales, en donde $c = 1$ y $\hbar = 1$ es posible verificar que se trata de una teoría no renormalizable donde el producto de los campos y derivadas tienen unidades de $[masa]^7$ en donde Λ es una constante de unidades $[\Lambda] = [masa]$ que se implementa para ajustar correctamente las unidades del Lagrangiano, A continuación se implementa el rompimiento espontáneo de simetría a través de el cambio de base $\phi(x) = \phi_0 + \xi(x)$ con

$$\xi(x) = \left(\frac{G_W^+(x)}{\frac{1}{\sqrt{2}}(h(x) + iG_Z(x))} \right) \text{ y } \phi_0 = \left(\frac{0}{\frac{v}{\sqrt{2}}} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & \frac{\xi_{\alpha\beta}^B}{\Lambda^3} \left(\frac{v^2}{2} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} \sigma_{\mu\nu} \nu_{\beta,L} - \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} \sigma_{\mu\nu} G_W^+ l_{\beta,L} + \frac{v}{2} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} \sigma_{\mu\nu} h \nu_{\beta,L} + \frac{iv}{2} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} \sigma_{\mu\nu} G_Z \nu_{\beta,L} \right. \\ & + \frac{v}{2} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} h \sigma_{\mu\nu} \nu_{\beta,L} - \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} h \sigma_{\mu\nu} G_W^+ l_{\beta,L} + \frac{1}{2} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} h^2 \sigma_{\mu\nu} \nu_{\beta,L} + \frac{i}{2} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} h \sigma_{\mu\nu} G_Z \nu_{\beta,L} \\ & \frac{iv}{2} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} G_Z \sigma_{\mu\nu} \nu_{\beta,L} - \frac{i}{\sqrt{2}} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} G_Z \sigma_{\mu\nu} G_W^+ l_{\beta,L} + \frac{i}{2} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} G_Z \sigma_{\mu\nu} h \nu_{\beta,L} - \frac{1}{2} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} G_Z^2 \sigma_{\mu\nu} \nu_{\beta,L} \\ & - \frac{v}{\sqrt{2}} \overline{l_{\alpha,L}^c} G_W^+ \sigma_{\mu\nu} \nu_{\beta,L} + \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{l_{\alpha,L}^c} G_W^+ \sigma_{\mu\nu} h \nu_{\beta,L} - \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{l_{\alpha,L}^c} G_W^+ \sigma_{\mu\nu} h \nu_{\beta,L} \\ & \left. - \frac{i}{\sqrt{2}} \overline{l_{\alpha,L}^c} G_W^+ \sigma_{\mu\nu} G_Z \nu_{\beta,L} \right) B^{\mu\nu} + h.c. \end{aligned} \quad (3.11)$$

De la expresión anterior tomaremos únicamente los términos que relacionan a dos campos de neutrinos con el campo $B^{\mu\nu}$ ya que estos nos darán las contribuciones deseadas.

$$\mathcal{L}_{B\nu\nu} = \frac{\xi_{\alpha\beta}^B}{\Lambda^3} \frac{v^2}{2} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} \sigma_{\mu\nu} \nu_{\beta,L} B^{\mu\nu} + h.c. \quad (3.12)$$

A continuación se elimina el neutrino quiral ν_L en función de un neutrino de quiralidad no definida ν .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{B\nu\nu} &= \frac{\xi_{\alpha\beta}^B}{\Lambda^3} \frac{v^2}{2} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} \sigma_{\mu\nu} \nu_{\beta,L} B^{\mu\nu} + h.c. \\ &= \frac{\xi_{\alpha\beta}^B}{\Lambda^3} \frac{v^2}{2} (P_R \nu_{\alpha}^c)^{\dagger} \gamma^0 \sigma_{\mu\nu} P_L \nu_{\beta} B^{\mu\nu} + h.c. \\ &= \frac{\xi_{\alpha\beta}^B}{\Lambda^3} \frac{v^2}{2} \overline{\nu_{\alpha}^c} \sigma_{\mu\nu} P_L \nu_{\beta} B^{\mu\nu} + h.c., \end{aligned} \quad (3.13)$$

Con la finalidad de obtener una expresión aún más compacta podemos caracterizar a las constantes $\xi_{\alpha\beta}^B$ como las entradas de una matriz ξ de tamaño 3×3 definida como

$$\xi^B = \begin{pmatrix} \xi_{ee}^B & \xi_{e\mu}^B & \xi_{e\tau}^B \\ \xi_{\mu e}^B & \xi_{\mu\mu}^B & \xi_{\mu\tau}^B \\ \xi_{\tau e}^B & \xi_{\tau\mu}^B & \xi_{\tau\tau}^B \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

esta matriz es simétrica, es decir $\xi = \xi^T$. Puede ser demostrado además que $\overline{\nu_{\alpha}^c} = -\nu_{\alpha}^T C^{\dagger}$, utilizando esto, la ecuación (3.13) puede escribirse como

$$\mathcal{L}_{B\nu\nu} = -\frac{v^2}{2\Lambda^3} \nu^T C^{\dagger} \xi^B \sigma_{\mu\nu} P_L \nu B^{\mu\nu} + h.c. \quad (3.15)$$

donde C es la matriz de conjugación de carga $C = -i\gamma^2\gamma^0$, y ν se define como el vector $\nu = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_{\mu} \\ \nu_{\tau} \end{pmatrix}$.

En la ecuación (3.15) los campos neutrinos se encuentran descritos en el espacio de sabores, sin embargo es necesario expresarlos en la descripción del espacio de masas, de modo que se realiza un cambio de base introduciendo una matriz unitaria U de tamaño 3×3 tal que

$$U^{\dagger}U = \mathbb{1}_3, \quad UU^{\dagger} = \mathbb{1}_3, \quad U^T U^* = \mathbb{1}_3, \quad U^* U^T = \mathbb{1}_3, \quad (3.16)$$

donde $\mathbb{1}_3$ es la matriz identidad de tamaño 3×3 . De este modo, la ecuación (3.15) puede tomar la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{B\nu\nu} &= -\frac{v^2}{2\Lambda^3} \nu^T C^\dagger U^* U^T \xi^B U U^\dagger \sigma_{\mu\nu} P_L \nu B^{\mu\nu} + h.c. \\ &= -\frac{v^2}{2\Lambda^3} (U^\dagger \nu)^T C^\dagger \zeta \sigma_{\mu\nu} P_L (U^\dagger \nu) B^{\mu\nu} + h.c.,\end{aligned}\quad (3.17)$$

donde se define $\zeta = U^T \xi U$. A continuación se define el cambio de base $n = U^\dagger \nu$ mediante el cual los neutrinos pasa a estar descrito de la base de neutrinos de sabores a la base de neutrinos masivos, de este modo

$$\mathcal{L}_{B\nu\nu} = -\frac{v^2}{2\Lambda^3} n^T C^\dagger \zeta \sigma_{\mu\nu} P_L n B^{\mu\nu} + h.c. \quad (3.18)$$

Ahora es necesario encontrar la expresión para el hermitiano conjugado, el cual se consigue mediante un procedimiento análogo. Comencemos encontrando el hermitiano conjugado de éste término

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{B\nu\nu}^\dagger &= \left[\frac{\xi_{\alpha\beta}^B}{\Lambda^3} \frac{v^2}{2} \overline{\nu_{\alpha,L}^c} \sigma_{\mu\nu} \nu_{\beta,L} B^{\mu\nu} \right]^\dagger = \frac{\xi_{\alpha\beta}^*}{\Lambda^3} B^{\mu\nu*} \frac{v^2}{2} \overline{\nu_{\beta,L}} \sigma_{\mu\nu} \nu_{\alpha,L}^c \\ &= \frac{v^2}{2\Lambda^3} B^{\mu\nu} \overline{\nu} \xi^{B\dagger} \sigma_{\mu\nu} P_R C \overline{V}^T = \frac{v^2}{2\Lambda^3} B^{\mu\nu} \overline{\nu} U U^\dagger \xi^{B\dagger} U^* U^T \sigma_{\mu\nu} P_R C \overline{V}^T \\ &= \frac{v^2}{2\Lambda^3} B^{\mu\nu} (\overline{\nu} U) (U^T \xi^B U)^\dagger \sigma_{\mu\nu} P_R C (\overline{\nu} U)^T = \frac{v^2}{2\Lambda^3} B^{\mu\nu} (\overline{U^\dagger \nu}) \zeta^\dagger \sigma_{\mu\nu} P_R C (\overline{U^\dagger \nu})^T \\ &= \frac{v^2}{2\Lambda^3} B^{\mu\nu} \overline{n} \zeta^* \sigma_{\mu\nu} P_R C \overline{n}^T\end{aligned}\quad (3.19)$$

De esta manera

$$\mathcal{L}_{B\nu\nu} = -\frac{v^2}{2\Lambda^3} n^T C^\dagger \zeta \sigma_{\mu\nu} P_L n B^{\mu\nu} + \frac{v^2}{2\Lambda^3} B^{\mu\nu} \overline{n} \zeta^* \sigma_{\mu\nu} P_R C \overline{n}^T. \quad (3.20)$$

Para conseguir la expresión pertinente a partir de la cual se deducirá la expresión analítica del vertice $n_l n_m A^\alpha$ es necesario expresar la expresión anterior en función del campo de norma A^α , para lo cual se hace uso de las ecuaciones (1.23) y (1.24) de las cuales se obtiene la relación

$$B^\mu = -\sin(\theta_W) Z^{\mu\nu} + \cos(\theta_W) F^{\mu\nu}, \quad (3.21)$$

utilizando las definiciones dadas en las ecuaciones (1.21)(1.22) con el valor de la hipercarga $Y_\phi = 1$ se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{B\nu\nu} &= \frac{v^2}{2\Lambda^3} n^T C^\dagger \zeta \sigma_{\mu\nu} P_L n \left(\frac{g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \right) Z^{\mu\nu} - \frac{v^2}{2\Lambda^3} n^T C^\dagger \zeta \sigma_{\mu\nu} P_L n \left(\frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \right) F^{\mu\nu} n \\ &\quad - \frac{v^2}{2\Lambda^3} \left(\frac{g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \right) Z^{\mu\nu} \overline{n} \zeta^* \sigma_{\mu\nu} P_R C \overline{n}^T + \frac{v^2}{2\Lambda^3} \left(\frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \right) F^{\mu\nu} \overline{n} \zeta^* \sigma_{\mu\nu} P_R C \overline{n}^T\end{aligned}\quad (3.22)$$

Finalmente considerando

$$n^T C^\dagger = \left(C \overline{n^{cT}} \right) C^\dagger = \overline{n^c} (C^T C^\dagger) = -\overline{n^c}, \quad (3.23)$$

Contribuciones a propiedades electromagnéticas de leptones del término Lagrangiano $\mathcal{L}_B$

3.3 Corrientes cargadas derivadas del acoplamiento $A^\mu nn$

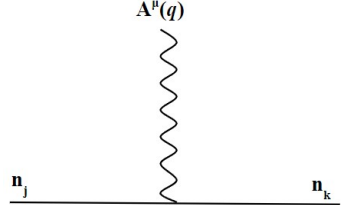
aplicando la ecuación (3.20) en la ecuación (3.19) y considerando que para el caso de neutrinos de Majorana, estos son eléctricamente neutros, lo cual implica que $n^c = n$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{B\nu\nu} = & -\frac{v^2}{2\Lambda^3} \bar{n} \zeta \sigma_{\mu\nu} P_L n \left(\frac{g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \right) Z^{\mu\nu} + \frac{v^2}{2\Lambda^3} \bar{n} \zeta \sigma_{\mu\nu} P_L \left(\frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \right) F_{\mu\nu} n \\ & - \frac{v^2}{2\Lambda^3} \left(\frac{g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \right) Z^{\mu\nu} \bar{n} \zeta^* \sigma_{\mu\nu} P_R n + \frac{v^2}{2\Lambda^3} \left(\frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \right) F^{\mu\nu} \bar{n} \zeta^* \sigma_{\mu\nu} P_R n. \end{aligned} \quad (3.24)$$

De la expresión anterior únicamente son pertinentes para nuestros objetivos aquellos términos en donde se ve involucrado el campo de norma A^μ , de modo que aquellos que son dependientes de Z^μ son prescindibles, tomando únicamente dichos términos obtenemos el Lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Ann} = & \frac{v^2}{2\Lambda^3} \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} F^{\mu\nu} \bar{n} (\zeta P_L + \zeta^* P_R) \sigma_{\mu\nu} n \\ = & \frac{v^2}{2\Lambda^3} \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \bar{n}_j \sigma_{\mu\nu} (\zeta_{jk} P_L + \zeta_{jk}^* P_R) n_k. \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde los índices $j, k = 1, 2, 3$ etiquetan la base de neutrinos masivos, y los índices $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ etiqueta las dimensiones espaciotemporales. En base a dicho Lagrangiano se encuentra la expresión analítica para el vértice. De este modo, la expresión del vértice derivada a partir del Lagrangiano de interacción anterior es



$$= -\frac{g_2 v^2}{\Lambda^3 \sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left(\zeta_{kj} P_L + \zeta_{kj}^* P_R \right) \sigma_{\mu\nu} q^\mu, \quad (3.26)$$

donde q^μ es una componente del cuadrimomento asociado al campo fotónico A^μ . Es pertinente mencionar que en el Modelo Estándar, acoplamientos de tipo $\gamma\nu\nu$ no están permitidos a nivel de árbol, puesto que los neutrinos son consideradas partículas que no interaccionan electromagnéticamente, sin embargo dichas interacciones pueden surgir por medio de interacciones cuánticas a ordenes de un lazo o superiores de la expansión perturbativa de la interacción. La regla de Feynman dada en la expresión (3.26) se deriva a partir de una teoría efectiva de manera que a escalas energéticas menores a Λ sus efectos físicos se ven sintetizados por ésta, por lo cual la ecuación (3.26) no sugiere necesariamente que una interacción a nivel de árbol entre neutrinos y el fotón ocurra.

3.3. Corrientes cargadas derivadas del acoplamiento $A^\mu nn$

Se decidió trabajar en la norma de Feynman-'t Hooft, en donde el parametro de fijación de norma $\xi = 1$. Con la utilización de esta norma los cálculos matemáticos se simplifican, sin embargo hay que tomar en consideración corrientes cargadas donde intervienen bosones de Goldstone. A continuación se utilizará la expresión encontrada, dada por la ecuación (3.26) para construir las expresiones analíticas de las siguientes corrientes cargadas.

En los diagramas de Feynman se muestran procesos en donde se tienen campos leptónicos descritos en el eigenspacio de sabores l_α, l_β y un campo fotónico A^μ en capa de masa mientras que fuera de la capa de masa se encuentran involucrados campos neutrinos descritos en eigenestados

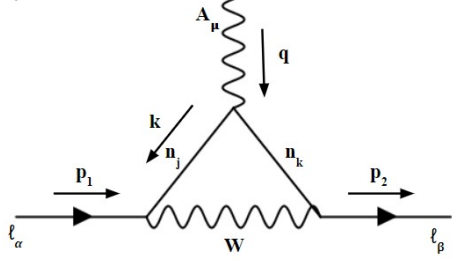
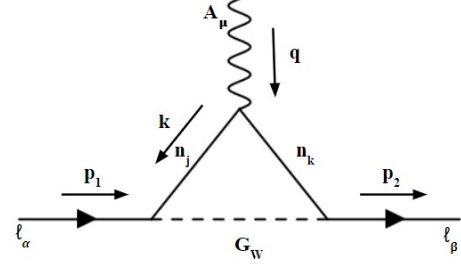

 Figura 3.1: Corriente cargada que involucra el campo W


Figura 3.2: Corriente cargada que involucra al bosón de Goldstone

de masa, para el diagrama mostrado en la Figura 3.1 está involucrado también el campo de norma W en cambio en la Figura 3.2 éste último es remplazado por un bosón de Goldstone G_W .

Para la construcción de los diagramas se utilizaron las siguientes expresiones para vértices y propagadores.

$$\mu \xrightarrow{p} \nu \quad = \quad \frac{-i}{p^2 - M_W^2} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2 - \xi M_W^2} \right) = \frac{-i}{p^2 - M_W^2} g^{\mu\nu}. \quad (3.27)$$

La ecuación (3.27) expresa la ecuación para el propagador del bosón de norma W con momento lineal p y masa M_W , en donde el tensor g hace referencia al tensor métrico.

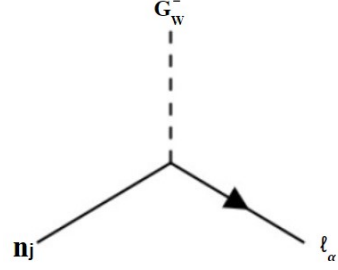
$$\mu \xrightarrow{p} \nu \quad = \quad \frac{i(\not{p} + m_j)}{p^2 - m_j^2 + i\epsilon}. \quad (3.28)$$

La ecuación (3.28) expresa la ecuación para el propagador de un leptón, en este caso particular, un neutrino masivo n_j con momento lineal p y masa m_j , donde se utiliza la notación de Dirac $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$.

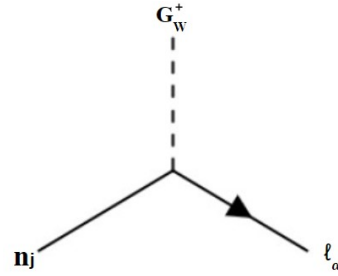
Además se utilizaron las expresiones de los vértices

$$\begin{array}{c} \text{Diagrama: } n_j \text{ y } \ell_\alpha \text{ interactúan a través de un } W_\mu^+ \\ \text{Ecuación: } = \frac{ig_2}{\sqrt{2}} \gamma_\mu P_L (U_{PMNS})_{\alpha j} \end{array} \quad (3.29)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagrama: } n_j \text{ y } \ell_\alpha \text{ interactúan a través de un } W_\mu^- \\ \text{Ecuación: } = \frac{ig_2}{\sqrt{2}} \gamma_\mu P_L (U_{PMNS})_{\alpha j}^* \end{array} \quad (3.30)$$



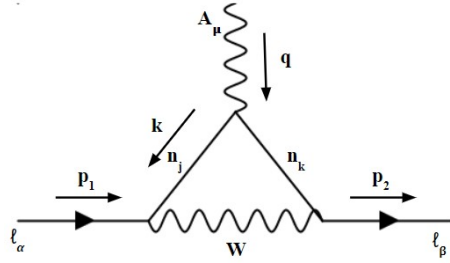
$$= \frac{-ig_2}{\sqrt{2}M_W} (m_\alpha P_L - m_j P_R) (U_{PMNS})_{\alpha j}. \quad (3.31)$$



$$= \frac{-ig_2}{\sqrt{2}M_W} (m_\alpha P_R - m_j P_L) (U_{PMNS})_{\alpha j}^*. \quad (3.32)$$

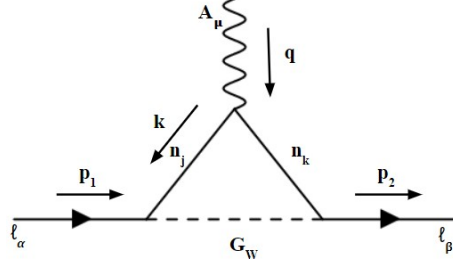
En las expresiones (3.29) - (3.32) aparece la matriz de mezclado de neutrinos U_{PMNS} conocida como la matriz de Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata necesaria para expresar a los neutrinos en su eigenspacio de masas, de manera que los vértices mencionados consideran neutrinos masivos [42].

De este modo utilizando las ecuaciones (3.27) y (3.28) se obtiene la expresión analítica de la corriente



$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{\alpha\beta,jk} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}_\beta(p_2) \frac{ig_2}{\sqrt{2}} \gamma_\sigma P_L (U_{PMNS})_{\beta k} \frac{i(\not{k} - \not{q} + m_{\nu k})}{(k - q)^2 - m_{\nu k}^2 + i\epsilon} \\ &\quad \frac{-g_2 v^2}{\Lambda^3 \sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (\zeta_{kj} P_L + \zeta_{kj}^* P_R) \sigma_{\mu\eta} q^\eta \frac{i(\not{k} + m_{\nu j})}{k^2 - m_{\nu j}^2 + i\epsilon} \frac{ig_2}{\sqrt{2}} \gamma_\rho P_L (U_{PMNS})_{l\alpha}^* \\ &\quad \frac{g^{\sigma\rho}}{(p_1 + k)^2 - M_W^2 + i\epsilon} u_\alpha(p_1) \\ &= i \frac{g_2^3 V^2}{2\Lambda^3 \sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (U_{PMNS})_{\beta k} (U_{PMNS})_{j\alpha}^* \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_1 + k)^2 - M_W^2 + i\epsilon} \\ &\quad \frac{1}{(k - p_2 + p_1)^2 - m_{\nu k}^2 + i\epsilon} \frac{1}{k^2 - m_{\nu j}^2 + i\epsilon} \bar{u}_\beta(p_2) \gamma^\rho P_L (\not{k} - \not{p}_2 + \not{p}_1 + m_{\nu k}) \\ &\quad (\zeta_{kj} P_L + \zeta_{kj}^* P_R) \sigma_{\mu\lambda} q^\lambda (\not{k} + m_{\nu j}) \gamma_\rho P_L u_\alpha(p_1). \end{aligned} \quad (3.33)$$

De manera análoga utilizando la expresión (3.31) se construye la expresión analítica del segundo diagrama.



$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_\mu^{\alpha\beta,jk} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}_\beta(p_2) \frac{-ig_2}{\sqrt{2}M_W} (m_\beta P_L - m_{\nu k} P_R) (U_{PMNS})_{\beta k} \frac{i(\not{k} - \not{q} + m_{\nu k})}{(k-q)^2 - m_{\nu k}^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \frac{-g_2 v^2}{\Lambda^3 \sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (\zeta_{kj} P_L + \zeta_{kj}^* P_R) \sigma_{\mu\eta} q^\eta \frac{i(\not{k} + m_{\nu j})}{k^2 - m_{\nu j}^2 + i\epsilon} \frac{-ig_2}{\sqrt{2}M_W} (m_\alpha P_R - m_{\nu j} P_L) (U_{PMNS})_{\alpha j}^* \\
 &\quad \frac{-i}{(p_1 + k)^2 - m_{\nu l}^2 + i\epsilon} u_\alpha(p_1) \\
 &= i \frac{g_2^2 V^2}{2M_W^2 \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \Lambda^3} (U_{PMNS})_{\beta k} (U_{PMNS})_{j\alpha}^* \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_1 + k)^2 - M_W^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \frac{1}{(k - p_2 + p_1)^2 - m_{\nu k} + i\epsilon} \frac{1}{k^2 - m_{\nu j} + i\epsilon} \bar{u}_\beta(p_2) (m_{l\beta} P_L - m_{\nu k} P_R) \\
 &\quad (\not{k} - \not{p}_2 + \not{p}_1 + m_{\nu k}) (\zeta_{kj} P_L + \zeta_{kj}^* P_R) \sigma_{\mu\lambda} q^\lambda (\not{k} + m_{\nu j}) \\
 &\quad (m_{l\alpha} P_R - m_{\nu j} P_L) u_\alpha(p_1),
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

en ambas expresiones (3.33) y (3.34) se consideró la conservación del momento lineal que satisfacen las partículas en capa de masa, esto es $p_1 + q = p_2 \rightarrow q = p_2 - p_1$, donde se expresó el momento q en función de p_1 y p_2 .

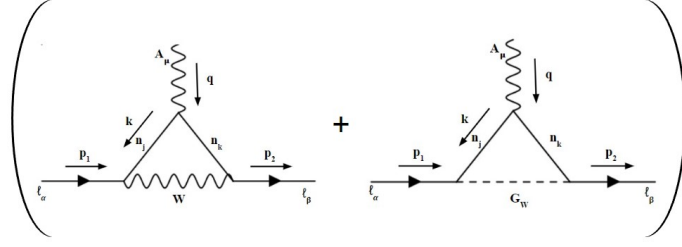
La suma de las expresiones en cuestión fueron introducidos en el software Mathematica, haciendo uso de la paquetería FeynCalc y Package X, para lo cual fue considerada una cinemática dada por

$$p_1^2 = m_\alpha^2, \quad p_2^2 = m_\beta^2, \quad \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = \left(\frac{1}{2} m_\alpha^2 + m_\beta^2 - s \right), \tag{3.35}$$

donde $s = q^2$ siendo q el cuadrimomento fotónico, el cual posteriormente se hizo tender a cero en el cálculo $s \rightarrow 0$. Se considera a su vez la condición de transversalidad que se manifiesta al imponer la condición de norma de Lorentz o Coulomb sobre el vector de polarización $\epsilon^\mu(q) = q^\mu$, que tomando en consideración la conservación de momento lineal para este caso

$$\epsilon^\mu(q)(p_{2\mu} - p_{1\mu}) = 0 \rightarrow \epsilon^\mu(q)p_{2\mu} = \epsilon^\mu(q)p_{1\mu}, \tag{3.36}$$

lo cual implica $p_{2\mu} = p_{1\mu}$. El resultado obtenido presenta una forma general



$$\begin{aligned}
 &= \Gamma_\mu^{\alpha\beta,jk} + \tilde{\Gamma}_\mu^{\alpha\beta,jk} = p_{1\mu} \bar{u}_\beta(p_2) u_\alpha(p_1) C_1 + p_{1\mu} \bar{u}_\beta(p_2) \gamma_5 u_\alpha(p_1) C_2 \\
 &\quad + \bar{u}_\beta(p_2) \gamma_\mu u_\alpha(p_1) C_3 + \bar{u}_\beta(p_2) \gamma_\mu \gamma_5 u_\alpha(p_1) C_4,
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

El cual es una suma de términos linealmente independientes de productos de gamas de Dirac y el cuadri-momento p_1 donde los coeficientes C_l con $l = 1, 2, 3, 4$ son coeficientes escalares expresados en términos de las masas de las partículas implicadas m_α , m_β , $m_{\nu j}$ y $m_{\nu k}$, los coeficientes ζ_{jk} y funciones de Passarino Veltman de uno, dos y tres puntos A_0 , B_0 y C_0 [47, 48]. Notemos que la expresión obtenida en la ecuación (3.37) representa la contribución efectiva al vértice electromagnético a nivel de un lazo, de manera que ésta debe de presentar una estructura similar, como será más evidente tras implementar identidades de Gordon.

3.4. Implementación de la identidad de Gordon

Se toma se y desarrolla la siguiente expresión

$$\bar{u}_\beta(p_2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu u_\alpha(p_1) = \frac{i}{2} \bar{u}_\beta(p_2) (\gamma_\mu \gamma_\nu p_2^\nu - \gamma_\mu \gamma_\nu p_1^\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu p_2^\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu p_1^\nu) u_\alpha(p_1). \tag{3.38}$$

Implementando la ecuación de Dirac para los campos $u_\alpha(p_1)$ y $\bar{u}_\beta(p_2)$, y la relación de anitconmutatividad de las gammas de Dirac $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \mathbb{1}_4$, considerando además por la condición de transversalidad que $p_{1\mu} = p_{2\mu}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 &\bar{u}_\beta(p_2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu u_\alpha(p_1) = -i(m_\beta + m_\alpha) \bar{u}_\beta(p_2) \gamma_\mu u_\alpha(p_1) + 2ip_{1\mu} \bar{u}_\beta(p_2) u_\alpha(p_1) \\
 \implies p_{1\mu} \bar{u}_\beta(p_2) u_\alpha(p_1) &= \frac{-i}{2} \bar{u}_\beta(p_2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu u_\alpha(p_1) + (m_\beta + m_\alpha) \bar{u}_\beta(p_2) \gamma_\mu u_\alpha(p_1).
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Implementando un procedimiento análogo con los siguientes factores, donde también se consideró la propiedad $\gamma_\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_\mu$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 &\bar{u}_\beta(p_2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 u_\alpha(p_1) = i(m_\alpha - m_\beta) \bar{u}_\beta(p_2) \gamma_\mu \gamma_5 u_\alpha(p_1) + 2ip_{2\mu} \bar{u}_\beta(p_2) \gamma_5 u_\alpha(p_1) \\
 \implies p_{2\mu} \bar{u}_\beta(p_2) \gamma_5 u_\alpha(p_1) &= \frac{-i}{2} \bar{u}_\beta(p_2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 u_\alpha(p_1) + \frac{1}{2} (m_\beta - m_\alpha) \bar{u}_\beta(p_2) \gamma_\mu \gamma_5 u_\alpha(p_1).
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Implementando las expresiones (3.39) y (3.40) en la ecuación (3.37) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\mu^{\alpha\beta,jk} + \tilde{\Gamma}_\mu^{\alpha\beta,jk} &= -\frac{i}{2} (\bar{u}_\beta(p_2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu u_\alpha(p_1) + i(m_\beta + m_\alpha) \bar{u}_\beta(p_2) \gamma_\mu u_\alpha(p_1)) C_1 \\
 &\quad -\frac{i}{2} (\bar{u}_\beta(p_2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu u_\alpha(p_1) + i(m_\beta - m_\alpha) \bar{u}_\beta(p_2) \gamma_\mu \gamma_5 u_\alpha(p_1)) C_2 \\
 &\quad + \bar{u}_\beta(p_2) \gamma_\mu u_\alpha(p_1) C_3 + \bar{u}_\beta(p_2) \gamma_\mu \gamma_5 u_\alpha(p_1) C_4 \\
 &= \bar{u}_\beta(p_2) \left[-\frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu (C_1 + \gamma_5 C_2) \right. \\
 &\quad \left. + \gamma_\mu \left(\frac{1}{2} (m_\beta + m_\alpha) C_1 + C_3 + \gamma_5 \left(\frac{1}{2} (m_\beta - m_\alpha) C_2 + C_4 \right) \right) \right] u_\alpha(p_1). \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

De este modo, comparando la ecuación (3.41) con la ecuación (3.10) puede expresarse los momentos anómalos magnéticos $\mu_{\alpha\beta}$ y dipolar eléctricos $d_{\alpha\beta}$ en función de las constantes calculadas anteriormente C_l con $l = 1, 2, 3, 4$ obteniendo así

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{-i}{2e} (m_\alpha + m_\beta) C_1 \quad (3.42)$$

$$d_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} C_2 \quad (3.43)$$

La presente tesis se enfocará únicamente en analizar los momentos anómalos magnéticos de transición y momentos dipolares eléctricos de transición, esto es, en el caso $\alpha \neq \beta$ lo cual implica un cambio en el sabor de los campos leptónicos l_α y l_β .

Es pertinente mencionar que para los resultados obtenidas mediante el empleamiento de *software* se cumple la identidad de Ward $q^\mu \bar{u}(p_2, m_\beta) (\Gamma_\mu^{\alpha\beta,jk} + \tilde{\Gamma}_\mu^{\alpha\beta,jk}) u(p_1, m_\alpha) = 0$ que para este caso específico es equivalente a

$$\frac{1}{2} (m_\beta + m_\alpha) C_1 + C_3 = 0 \quad (3.44)$$

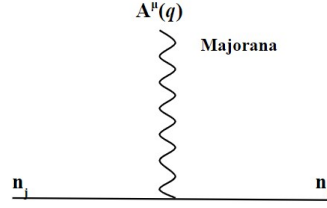
$$\frac{1}{2} (m_\beta - m_\alpha) C_2 + C_4 = 0. \quad (3.45)$$

Además las expresiones encontradas para $\mu_{\alpha\beta}$ y $d_{\alpha\beta}$ dadas por las ecuaciones (3.42) y (3.43) no presentan divergencias de ningún tipo y por lo tanto se trata de cantidades finitas, ambos hechos son consistentes con la teoría, lo que sugiere que los cálculos realizados son correctos.

3.5. Diagramas adicionales de Majorana

Hasta el momento, no existen diferencias entre los diagramas calculados y los diagramas que se obtendrían si los neutrinos se consideraran campos de Dirac, sin embargo, debido a que por definición, los neutrinos de Majorana son indistinguibles de sus antipartículas ($n^c = n$) implica la existencia de reglas de Feynman adicionales los cuales no se formarían si los neutrinos se consideraran como campos de Dirac, específicamente en el contexto de esta tesis, implica la existencia de dos diagramas de Feynman adicionales que contribuyen al vértice electromagnético a nivel de un lazo, particularmente la diferencia entre éstos y los diagramas calculados con anterioridad se encontrará en la expresión del vértice $n_j n_k A^\mu$ que involucra justamente a los neutrinos de Majorana [45].

De este modo, la expresión que corresponde al vértice exclusivo para neutrinos de Majorana es



$$= \frac{g_2 V^2}{\Lambda^3 \sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left(\zeta_{kj} P_L + \zeta_{kj}^* P_R \right) \sigma_{\mu\nu} q^\mu, \quad (3.46)$$

Como es posible apreciar, la única diferencia existente entre este vértice y el obtenido en la expresión (3.26) es un signo relativo. De este modo representamos ambos diagramas adicionales de la siguiente manera

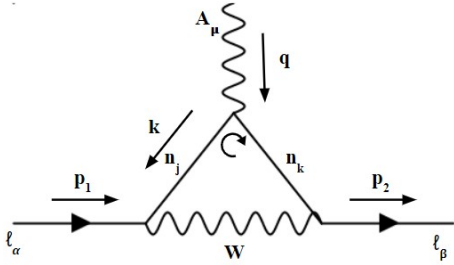


Figura 3.3: Corriente cargada que involucra el campo W considerando neutrinos de Dirac

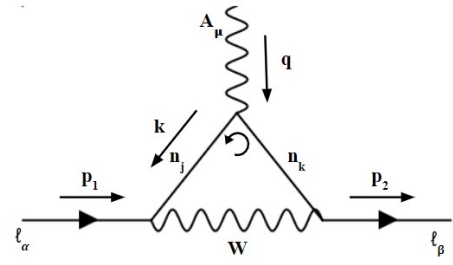


Figura 3.4: Corriente cargada que involucra el campo W considerando neutrinos de Majorana

Donde para diferenciarlas entre ellas se dibuja una flecha de giro con orientaciones distintas en el vértice $n_j n_k A^\mu$, en donde la flecha con orientación horaria hace representar el diagrama donde se consideran neutrinos de Dirac y la flecha con orientación antihoraria representa el diagrama donde se consideran neutrinos de Majorana. De manera análoga, la única diferencia entre los diagramas de Feynman de neutrinos de Dirac y Majorana en donde se involucra el bosón G_W consistirá en el signo relativo que se manifiesta en el vértice $n_j n_k A^\mu$. Motivo por el cuál y continuando con la misma lógica para los dos diagramas en donde se involucra el bosón W la representación de ambos diagramas se muestran enseguida

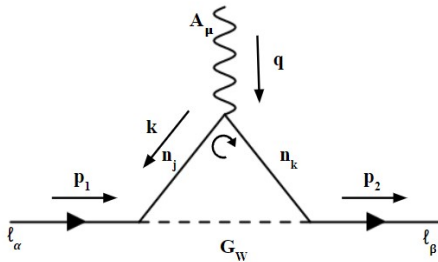


Figura 3.5: Corriente cargada que involucra el bosón G considerando neutrinos de Dirac

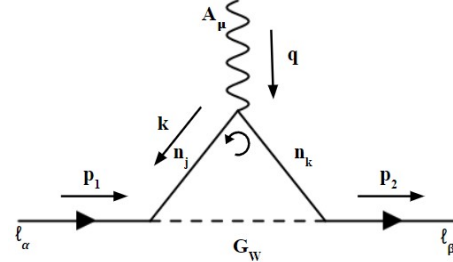
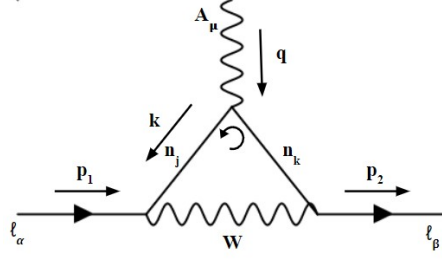
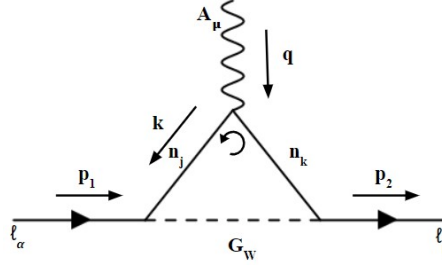


Figura 3.6: Corriente cargada que involucra el bosón G considerando neutrinos de Majorana

De este modo, los diagramas mostrados en las figuras (3.33) y (3.34) se expresan como



$$\begin{aligned}
 = \Gamma_{\mu}^{\prime\alpha\beta,jk} &= -i \frac{g_2^3 V^2}{2\Lambda^3 \sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (U_{PMNS})_{\beta k} (U_{PMNS})_{j\alpha}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_1 + k)^2 - M_W^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \frac{1}{(k - p_2 + p_1)^2 - m_{\nu k} + i\epsilon} \frac{1}{k^2 - m_{\nu j} + i\epsilon} \bar{u}_{\beta}(p_2) \gamma^{\rho} P_L (\not{k} - \not{p}_2 + \not{p}_1 + m_{\nu k}) \\
 &\quad (\zeta_{kj} P_L + \zeta_{kj}^* P_R) \sigma_{\mu\lambda} q^{\lambda} (\not{k} + m_{\nu j}) \gamma_{\rho} P_L u_{\alpha}(p_1).
 \end{aligned} \tag{3.47}$$



$$\begin{aligned}
 = \tilde{\Gamma}_{\mu}^{\prime\alpha\beta,jk} &= -i \frac{g_2^2 V^2}{2M_W^2 \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \Lambda^3} (U_{PMNS})_{\beta k} (U_{PMNS})_{j\alpha}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_1 + k)^2 - M_W^2 + i\epsilon} \\
 &\quad \frac{1}{(k - p_2 + p_1)^2 - m_{\nu k} + i\epsilon} \frac{1}{k^2 - m_{\nu j} + i\epsilon} \bar{u}_{\beta}(p_2) (m_{l\beta} P_L - m_{\nu k} P_R) \\
 &\quad (\not{k} - \not{p}_2 + \not{p}_1 + m_{\nu k}) (\zeta_{kj} P_L + \zeta_{kj}^* P_R) \sigma_{\mu\lambda} q^{\lambda} (\not{k} + m_{\nu j}) \\
 &\quad (m_{l\alpha} P_L - m_{\nu j} P_R) u_{\alpha}(p_1).
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

de este modo y debido a que como se ha mencionado antes los diagramas donde los neutrinos son campos de Majorana difieren de aquellos donde son campos de Dirac únicamente en un signo relativo la suma de los cuatro diagramas considerados es cero

$$\Gamma_{\mu}^{\alpha\beta,jk} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{\alpha\beta,jk} + \Gamma_{\mu}^{\prime\alpha\beta,jk} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{\prime\alpha\beta,jk} = 0. \tag{3.49}$$

Por tanto dichos diagramas no contribuyen en ningún modo a las propiedades electromagnéticas de los leptones, lo cual fue un resultado inesperado. Debido a la similitud en estructura que se obtendría de diagramas similares pero considerando los vértices $n_j n_k A^{\mu}$ que surgieron a partir de los términos efectivos originalmente planteados (2) y (3), se determina que de igual manera sus contribuciones cero, al eliminarse los términos de Dirac con los términos de Majorana en ambos casos, puesto que al igual que con el caso analizado en este capítulo, la diferencia entre estos sería un signo relativo.

Capítulo 4

Contribuciones a propiedades electromagnéticas de leptones del término Lagrangiano $\mathcal{L}_E$

4.1. Contribuciones efectivas a los acoplamientos Wnl

Debido a que los primeros términos efectivos propuestos no generan las contribuciones esperadas, se decidió ampliar el estudio a un término efectivo adicional, mediante el cual de manera similar al caso anterior se extraerá un par de acoplamientos que corresponden las expresiones de un par de vértices $W^\pm l\nu$. A partir de estos se obtendrán las expresiones para contribuciones a nivel de un orden a corrientes cargadas y encontrar sus contribuciones a los momentos anómalo magnético $\mu_{\alpha\beta}$ y dipolar eléctrico $d_{\alpha\beta}$ de transición de campos leptónicos. El Lagrangiano a considerar se muestra en la expresión (4)

$$\mathcal{L}_E = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\xi_{\alpha\beta}^D}{\Lambda^3} \overline{L_{\alpha,L}^C} \bar{\phi}^* \bar{\phi}^\dagger C D_{\mu} D^{\mu} L_{\beta,L} + \text{h.c.} \quad (4.1)$$

donde D_{μ} es la derivada covariante del grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ con hipercarga $Y_L^l = -1$, esto es

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - ig_2 W_{\mu}^j \frac{\sigma^j}{2} - ig_1 B_{\mu} \frac{Y_L^l}{2}, \quad (4.2)$$

con $j = 1, 2, 3$. Notemos que el término Lagrangiano propuesto viola el número leptónico en dos unidades y el producto de campos y derivadas en él posee unidades $[masa]^7$ ajustadas adecuadamente por la constante Λ con unidades $[\Lambda] = [masa]$. Para los fines de esta tesis no es de interés analizar los bosones G_W^+ , G_W^- y G_Z para este caso específico, de modo que se optó por hacer uso de la norma unitaria, dónde se fija la norma de manera que dichos campos se anulan, de manera que el cambio de base necesario para el doblete de Higgs Φ para llevar a cabo el rompimiento espontaneo de simetría se define como

$$\Phi(x) = \Phi_0 + \xi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Implementando rompimiento espontáneo de simetría la derivada covariante se escribe como

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W_{\mu}^+ \sigma^+ - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} W_{\mu}^- \sigma^- - \frac{ig_2}{\cos \theta_W} M Z_{\mu} - ie Q A_{\mu}, \quad (4.4)$$

Contribuciones a propiedades electromagnéticas de leptones del término

Lagrangiano $\mathcal{L}_E$

4.1 Contribuciones efectivas a los acoplamientos Wnl

donde se definen $\sigma^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 - i\sigma^2)$, $\sigma^- \equiv (\sigma^1 + i\sigma^2)$, $M \equiv \frac{\sigma^3}{2} - \sin^2 \theta_W Q$ y $Q \equiv \frac{\sigma^3}{2} + \frac{Y_L^I}{2Y_\phi}$, esta última definición es conocida como el operador de carga eléctrica. Tomando en cuenta los aspectos anteriores, la expresión (4) toma la forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_E = & \frac{\xi_{\alpha\beta}^D}{\Lambda^3} \left[\frac{V^2}{2} \bar{\nu}_{\alpha,L}^c \partial_\mu \partial^\mu C \nu_{\beta,L} + V h \bar{\nu}_{\alpha,L}^c \partial_\mu \partial^\mu C \nu_{\beta,L} + \frac{1}{2} h^2 \bar{\nu}_{\alpha,L}^c \partial_\mu \partial^\mu C \nu_{\beta,L} \right. \\
 & - \frac{ig_2 V^2}{2\sqrt{2}} (\partial_\mu W^{\mu+}) \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C l_{\beta,L} - \frac{ig_2 V}{\sqrt{2}} h (\partial_\mu W^{\mu+}) \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C l_{\beta,L} \\
 & - \frac{ig_2}{2\sqrt{2}} h^2 (\partial_\mu W^{\mu+}) \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C l_{\beta,L} - \frac{ig_2 V^2}{\sqrt{2}} W^{\mu+} \bar{\nu}_{\alpha,L}^c \partial_\mu C l_{\beta,L} - \sqrt{2} ig_2 V h W^{\mu+} \bar{\nu}_{\alpha,L}^c \partial_\mu C l_{\beta,L} \\
 & - \frac{ig_2}{\sqrt{2}} h^2 W^{\mu+} \bar{\nu}_{\alpha,L}^c \partial_\mu C l_{\beta,L} - \frac{ig_2 V^2}{4 \cos \theta_W} (\partial_\mu Z^\mu) \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C \nu_{\beta,L} - \frac{ig_2 V}{2 \cos \theta_W} h (\partial_\mu Z^\mu) \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C \nu_{\beta,L} \\
 & - \frac{ig_2}{4 \cos \theta_W} h^2 (\partial_\mu Z^\mu) \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C \nu_{\beta,L} - \frac{ig_2 V^2}{2 \cos \theta_W} Z^\mu \bar{\nu}_{\alpha,L}^c \partial_\mu C \nu_{\beta,L} - \frac{ig_2 V}{\cos \theta_W} h Z^\mu \bar{\nu}_{\alpha,L}^c \partial_\mu C \nu_{\beta,L} \\
 & - \frac{ig_2}{2 \cos \theta_W} h^2 Z^\mu \bar{\nu}_{\alpha,L}^c \partial_\mu C \nu_{\beta,L} - \frac{g_2^2 V^2}{4} W_\mu^+ W^{\mu-} \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C \nu_{\beta,L} - \frac{g_2^2 V}{2} h W_\mu^+ W^{\mu-} \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C \nu_{\beta,L} \\
 & - \frac{g_2^2}{4} h^2 W_\mu^+ W^{\mu-} \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C \nu_{\beta,L} - \frac{g_2^2 V^2 \sin^2 \theta_W}{2\sqrt{2} \cos \theta_W} W_\mu^+ Z^\mu \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C l_{\beta,L} \\
 & - \frac{g_2^2 V \sin^2 \theta_W}{\sqrt{2} \cos \theta_W} h W_\mu^+ Z^\mu \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C l_{\beta,L} - \frac{g_2^2 \sin^2 \theta_W}{2\sqrt{2} \cos \theta_W} h^2 W_\mu^+ Z^\mu \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C l_{\beta,L} \\
 & + \frac{g_2 e V^2}{2\sqrt{2}} W_\mu^+ A^\mu \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C l_{\beta,L} + \frac{g_2 e V}{\sqrt{2}} h W_\mu^+ A^\mu \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C l_{\beta,L} + \frac{g_2 e}{2\sqrt{2}} h^2 W_\mu^+ A^\mu \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C l_{\beta,L} \\
 & - \frac{g_2^2 V^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C \nu_{\beta,L} - \frac{g_2^2 V}{4 \cos^2 \theta_W} h Z_\mu Z^\mu \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C \nu_{\beta,L} \\
 & \left. - \frac{g_2^2}{8 \cos^2 \theta_W} h^2 Z_\mu Z^\mu \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C \nu_{\beta,L} \right] + h.c. \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

Del la expresión anterior tomamos únicamente los siguientes términos pertinentes para esta tesis

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\nu W l} = & - \frac{i \xi_{\alpha\beta}^D g_2 V^2}{2\sqrt{2} \Lambda^3} (\partial_\mu W^{\mu+}) \bar{\nu}_{\alpha,L}^c C l_{\beta,L} - \frac{i \xi_{\alpha\beta}^D g_2 V^2}{\sqrt{2} \Lambda^3} W^{\mu+} \bar{\nu}_{\alpha,L}^c \partial_\mu C l_{\beta,L} \\
 & - \frac{i \xi_{\alpha\beta}^{D*} g_2 V^2}{2\sqrt{2} \Lambda^3} (\partial_\mu W^{\mu-}) \bar{l}_{\alpha\beta} C^\dagger \nu_{\alpha,L}^c - \frac{i \xi_{\alpha\beta}^{D*} g_2 V^2}{\sqrt{2} \Lambda^3} W^{\mu-} (\partial_\mu \bar{l}_{\alpha,L}) C^\dagger \nu_{\alpha,L}^c, \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

eliminando a los neutrinos y leptones quirales l_L y ν_L en favor de campos sin quiralidades definidas l y ν

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\nu W l} = & - \frac{i \xi_{\alpha\beta}^D g_2 V^2}{2\sqrt{2} \Lambda^3} (\partial_\mu W^{\mu+}) (P_R \nu_\alpha^c)^\dagger \gamma^0 C (P_L l_\beta) \\
 & - \frac{i \xi_{\alpha\beta}^D g_2 V^2}{\sqrt{2} \Lambda^3} W^{\mu+} (P_R \nu_\alpha^c)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu C (P_L l_\beta) \\
 & - \frac{i \xi_{\alpha\beta}^{D*} g_2 V^2}{2\sqrt{2} \Lambda^3} (\partial_\mu W^{\mu-}) (P_L l_\beta)^\dagger \gamma^0 C^\dagger (P_R \nu_\alpha^c) \\
 & - \frac{i \xi_{\alpha\beta}^{D*} g_2 V^2}{\sqrt{2} \Lambda^3} W^{\mu-} \left[\partial_\mu (P_L l_\beta)^\dagger \gamma^0 \right] C^\dagger (P_R \nu_\alpha^c). \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Considerando las propiedades de la matriz de conjugación de carga dadas en la expresión (2.4) es posible demostrar las siguientes relaciones de conmutación con los operadores de proyección P_R y P_L

$$P_{\pm}C \equiv CP_{\pm}^T, \quad CP_{\pm} \equiv P_{\pm}^TC^{\dagger}, \quad C^{\dagger}P_{\pm} \equiv P_{\pm}^TC^{\dagger}, \quad P_{\pm}C^{\dagger} \equiv CP_{\pm}^T \quad (4.8)$$

donde se hace uso de la notación $P_R = P_+$ y $P_- = P_L$, implementando esto en la ecuación (3.35) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\nu Wl} = & -\frac{i\xi_{\alpha\beta}^D g_2 V^2}{2\sqrt{2}\Lambda^3} (\partial_{\mu} W^{\mu+}) \bar{\nu}_{\alpha}^c P_L P_L^T C^{\dagger} l_{\beta} - \frac{i\xi_{\alpha\beta}^D g_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} W^{\mu+} \bar{\nu}_{\alpha}^c P_L P_L^T C^{\dagger} \partial_{\mu} l_{\beta} \\ & - \frac{i\xi_{\alpha\beta}^{D*} g_2 V^2}{2\sqrt{2}\Lambda^3} (\partial_{\mu} W^{\mu-}) \bar{l}_{\beta} P_R P_R^T C^{\dagger} \nu_{\alpha}^c - \frac{i\xi_{\alpha\beta}^{D*} g_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} W^{\mu-} \partial_{\mu} \bar{l}_{\beta} P_R P_R^T C^{\dagger} \nu_{\alpha}^c. \end{aligned} \quad (4.9)$$

De manera análoga a como se hizo en el capítulo 3, se considera a los coeficientes $\xi_{\alpha\beta}^D$ como las entradas de una matriz definida como

$$\xi^D = \begin{pmatrix} \xi_{ee}^D & \xi_{e\mu}^D & \xi_{e\tau}^D \\ \xi_{\mu e}^D & \xi_{\mu\mu}^D & \xi_{\mu\tau}^D \\ \xi_{\tau e}^D & \xi_{\tau\mu}^D & \xi_{\tau\tau}^D \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Tomando en cuenta la expresión anterior y la relación $\bar{\nu}_{\alpha}^c = -\nu_{\alpha}^T C^{\dagger}$ obtenemos que la expresión (4.9) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\nu Wl} = & \frac{ig_2 V^2}{2\sqrt{2}\Lambda^3} (\partial_{\mu} W^{\mu+}) \nu^T C^{\dagger} \xi^D P_L P_L^T C^{\dagger} l + \frac{ig_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} W^{\mu+} \nu^T C^{\dagger} \xi^D P_L P_L^T C^{\dagger} \partial_{\mu} l \\ & - \frac{ig_2 V^2}{2\sqrt{2}\Lambda^3} (\partial_{\mu} W^{\mu-}) \bar{l} \xi^{D*} P_R P_R^T C^{\dagger} C \bar{\nu}^T - \frac{ig_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} W^{\mu-} \partial_{\mu} \bar{l} \xi^{D*} P_R P_R^T C^{\dagger} C \bar{\nu}^T. \end{aligned} \quad (4.11)$$

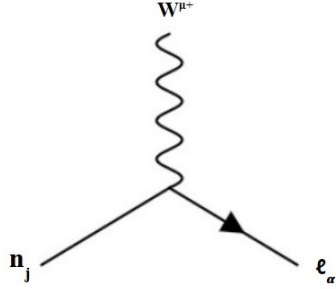
Realizando un cambio de base de neutrinos de sabor a neutrinos masivos mediante la introducción de una matriz unitaria U de tamaño 3×3 de manera análoga a como se implementó en el capítulo 3 obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\nu Wl} = & \frac{ig_2 V^2}{2\sqrt{2}\Lambda^3} (\partial_{\mu} W^{\mu+}) n^T C^{\dagger} \zeta^D P_L P_L^T C^{\dagger} U^* l + \frac{ig_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} W^{\mu+} n^T C^{\dagger} \zeta^D P_L P_L^T C^{\dagger} U^* \partial_{\mu} l \\ & - \frac{ig_2 V^2}{2\sqrt{2}\Lambda^3} (\partial_{\mu} W^{\mu-}) \bar{l} U \zeta^{D*} P_R P_R^T \bar{n}^T - \frac{ig_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} W^{\mu-} \partial_{\mu} \bar{l} U \zeta^{D*} P_R P_R^T \bar{n}^T, \end{aligned} \quad (4.12)$$

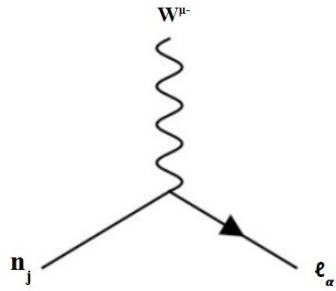
donde se define $n \equiv U^{\dagger} \nu$ y $\zeta^D \equiv U^{\dagger} \xi^D U^*$. Haciendo uso de la definición dada en (2.3) y la definición de campo de Majorana ($\psi^c = \psi$) es posible demostrar que $n^T C^{\dagger} = -\bar{n}$ y $\bar{n}^T = C^{\dagger} n$, implementando esto en la ecuación (4.12) finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\nu Wl} = & -\frac{ig_2 V^2}{2\sqrt{2}\Lambda^3} [(\partial_{\mu} W^{\mu+}) \bar{n}_j \zeta_{j\alpha}^D P_L P_L^T C^{\dagger} U_{\alpha j}^* l_{\alpha} + (\partial_{\mu} W^{\mu-}) \bar{l}_{\alpha} \zeta_{j\alpha}^{D*} P_R P_R^T C^{\dagger} U_{\alpha j} n_j] \\ & - \frac{ig_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} [W^{\mu+} \bar{n}_j \zeta_{j\alpha}^D P_L P_L^T C^{\dagger} U_{\alpha j}^* \partial_{\mu} l_{\alpha} + W^{\mu-} \partial_{\mu} \bar{l}_{\alpha} \zeta_{j\alpha}^{D*} P_R P_R^T C^{\dagger} U_{\alpha j} n_j]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

A partir de la expresión (4.13) se obtienen las expresiones de los vértices W^+nl y W^-nl .



$$= -\frac{ig_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} \left(\frac{1}{2}q+p\right)^\mu \zeta_{j\alpha}^D P_L P_L^T C^\dagger U_{\alpha j}^*, \quad (4.14)$$



$$= -\frac{ig_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} \left(\frac{1}{2}q+p\right)^\mu \zeta_{j\alpha}^{D*} P_R P_R^T C^\dagger U_{\alpha j}, \quad (4.15)$$

En la siguiente sección con base a este par de expresiones se construirán los diagramas de Feynman a tratar.

4.2. Corrientes derivadas de los acoplamientos Wnl donde intervienen neutrinos

Los Diagramas a considerar se muestran a continuación.

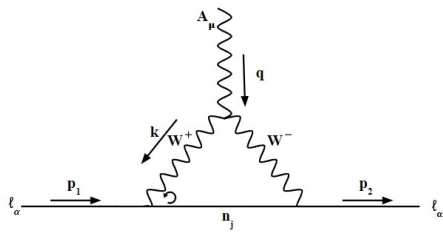


Figura 4.1: Corriente cargada con vértice efectivo a la izquierda

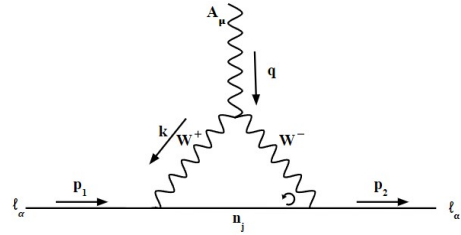


Figura 4.2: Corriente cargada con vértice efectivo a la derecha

Estos diagramas describen nuevamente procesos en donde se tienen leptones descritos en el eigenspacio de sabor l_α y un campo fotónico A^μ en capa de masa mientras que fuera de la capa de maas se involucran un neutrino y dos bosones $W^\pm$. En estos diagramas, la flecha es utilizada para denotar que el vértice en donde se encuentra, es el vértice proveniente de la teoría efectiva y descrita por las expresiones (4.14) o (4.15) según corresponda, mientras aquellos vértices sin flecha corresponden a los vértices usuales del Modelo Estándar. Para su construcción se utilizó la norma unitaria, de manera que el parámetro de fijación de norma $\xi \rightarrow \infty$ por tanto el propagador bosónico se expresa

$$\mu \xrightarrow{p} \nu = \frac{-i}{p^2 - M_W^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{M_W^2} \right). \quad (4.16)$$

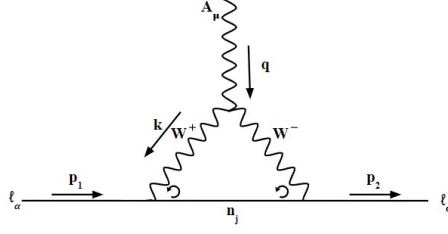


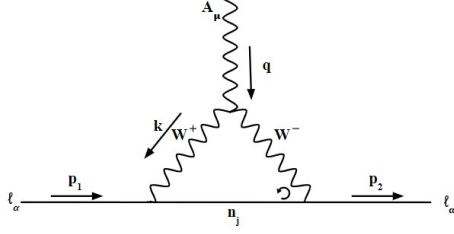
Figura 4.3: Corriente cargada con vértice efectivo a la derecha e izquierda

Los vértices $W^\pm nl$ sin flecha son descritos por la expresión dada en (3.29) mientras que el vértice $A^\mu W^\nu W^\lambda$ está dado por

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagrama de vértice } A_\mu(k_1) \text{ conectado a } W_\nu^\dagger(k_2) \text{ y } W_i(k_3) \\
 & = -ie [(k_1 - k_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (k_2 - k_3)_\mu g_{\nu\lambda} + (k_3 - k_1)_\nu g_{\lambda\mu}]. \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

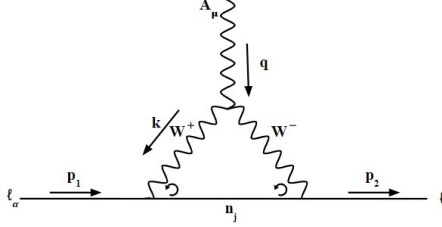
De esta manera se construyen las expresiones para los diagramas en cuestión.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagrama de Feynman similar al de la Figura 4.3, pero con un loop de W bosones y un vértice de fotón.} \\
 & = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}_\alpha(p_2) \frac{ig_2}{\sqrt{2}} \gamma_\lambda P_L (U_{PMNS})_{\alpha j} \\
 & \quad \frac{-i}{(k-q)^2 - m_W^2} \left(g^{\lambda\rho} \frac{(k-q)^\lambda (k-q)^\rho}{M_W^2} \right) \\
 & \quad (-i)e[(q-k)_\rho g_{\mu\nu} + (k-(k-q))_\mu g_{\nu\rho} + ((k-q)-q)_\nu g_{\rho\mu}] \\
 & \quad \frac{-i}{k^2 - m_W^2} \left(g^{\nu\sigma} - \frac{k^\nu k^\sigma}{m_W^2} \right) \frac{-ig_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} \left(\frac{1}{2}k + p_1 \right)_\sigma \zeta_{j\alpha}^D P_L P_L^T C^\dagger U_{\alpha j}^* \\
 & \quad \frac{i(\not{p}_1 + \not{k} + m_j)}{(p_1 + k)^2 - m_j^2} u_\alpha(p_1) \\
 & = -\frac{g_2^2 V^2 e}{2\Lambda^3} \zeta_{j\alpha}^D (U_{PMNS})_{\alpha j} U_{\alpha j}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-q)^2 - m_W^2} \frac{1}{k^2 - m_W^2} \frac{1}{(p_1 + k)^2 - m_j^2} \\
 & \quad \left(g^{\lambda\rho} \frac{(k-q)^\lambda (k-q)^\rho}{M_W^2} \right) [(q-k)_\rho g_{\mu\nu} + (k-(k-q))_\mu g_{\nu\rho} + ((k-q)-q)_\nu g_{\rho\mu}] \\
 & \quad \left(g^{\nu\sigma} - \frac{k^\nu k^\sigma}{m_W^2} \right) \left(\frac{1}{2}k + p_1 \right)_\sigma \\
 & \quad \bar{u}_\alpha(p_2) \gamma_\lambda P_L P_L P_L^T C^\dagger (\not{p}_1 + \not{k} + m_j) u_\alpha(p_1) \quad (4.18)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}_\alpha(p_2) \frac{-ig_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} \left(\frac{1}{2}(k-q) + p_2 \right) \lambda \zeta_{j\alpha}^{D*} P_R P_R^T C^\dagger U_{\alpha j} \\
 &\quad \frac{-i}{(k-q)^2 - m_W^2} \left(g^{\lambda\rho} \frac{(k-q)^\lambda (k-q)^\rho}{M_W^2} \right) \\
 &\quad (-i)e[(q-k)_\rho g_{\mu\nu} + (k-(k-q))_\mu g_{\nu\rho} + ((k-q)-q)_\nu g_{\rho\mu}] \\
 &\quad \frac{-i}{k^2 - m_W^2} \left(g^{\nu\sigma} - \frac{k^\nu k^\sigma}{m_W^2} \right) \frac{ig_2}{\sqrt{2}} \gamma_\sigma P_L (U_{PMNS})_{\alpha j}^* U_{\alpha j} \\
 &\quad \frac{i(\not{p}_1 + \not{k} + m_j)}{(p_1 + k)^2 - m_j^2} u_\alpha(p_1) \\
 &= -\frac{g_2^2 V^2 e}{2\Lambda^3} \zeta_{jk}^{D*} (U_{PMNS})_{\alpha j}^* U_{\alpha j} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-q)^2 - m_W^2} \frac{1}{k^2 - m_W^2} \frac{1}{(p_1 + k)^2 - m_j^2} \\
 &\quad \left(\frac{1}{2}(k-q) + p_2 \right) \lambda \left(g^{\lambda\rho} \frac{(k-q)^\lambda (k-q)^\rho}{M_W^2} \right) \\
 &\quad [(q-k)_\rho g_{\mu\nu} + (k-(k-q))_\mu g_{\nu\rho} + ((k-q)-q)_\nu g_{\rho\mu}] \left(g^{\nu\sigma} - \frac{k^\nu k^\sigma}{m_W^2} \right) \\
 &\quad \bar{u}_\alpha(p_2) P_R P_R^T C^\dagger \gamma_\sigma P_L (\not{p}_1 + \not{k} + m_j) u_\alpha(p_1)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Los resultados obtenidos para los dos diagramas anteriores se tiene una dependencia explícita de la matriz de conjugación de carga C la cual no puede ser absorbida por otros medios, este hecho representa una dificultad si se desea calcular dicha expresión por medio del software, pues actualmente no existe ninguna expresión definida en las paqueterías para representar a la matriz C . Sin embargo la estructura de la parametrización del vértice electromagnético dado en la ecuación (3.10) es una estructura matemática general de modo que todo diagrama de este tipo debe tener esta misma estructura, y no existe un sólo término en esta expresión que dependa de la matriz C . Bajo esta lógica es posible inferir que, a pesar de que a primera instancia estos diagramas no parecen eliminarse, esto deberá ocurrir en algún punto posterior, ya que no hay manera de que el resultado contenga a la matriz C de manera explícita y por tanto ambas expresiones son incompatibles.



$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}_\alpha(p_2) \frac{-ig_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} \left(\frac{1}{2}(k-q) + p_2 \right)_\lambda \zeta_{j\alpha}^{D*} P_R P_R^T C^\dagger U_{\alpha j} \\
 &\quad \frac{-i}{(k-q)^2 - m_W^2} \left(g^{\lambda\rho} \frac{(k-q)^\lambda (k-q)^\rho}{M_W^2} \right) \\
 &\quad (-i)e[(q-k)_\rho g_{\mu\nu} + (k-(k-q))_\mu g_{\nu\rho} + ((k-q)-q)_\nu g_{\rho\mu}] \\
 &\quad \frac{-i}{k^2 - m_W^2} \left(g^{\nu\sigma} - \frac{k^\nu k^\sigma}{m_W^2} \right) \frac{-ig_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} \left(\frac{1}{2}k + p_1 \right)_\sigma \zeta_{\alpha j}^D P_L P_L^T C^\dagger U_{\alpha j}^* \\
 &\quad \frac{i(\not{p}_1 + \not{k} + m_j)}{(p_1 + k)^2 - m_j^2} u_\alpha(p_1) \\
 &= \frac{g_2^2 V^4 e}{2\Lambda^6} \zeta_{jk}^{D*} \zeta_{jk}^D U_{\alpha j} U_{\alpha j}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-q)^2 - m_W^2} \frac{1}{k^2 - m_W^2} \frac{1}{(p_1 + k)^2 - m_j^2} \\
 &\quad \left(\frac{1}{2}(k-q) + p_2 \right)_\lambda \left(g^{\lambda\rho} \frac{(k-q)^\lambda (k-q)^\rho}{M_W^2} \right) \\
 &\quad [(q-k)_\rho g_{\mu\nu} + (k-(k-q))_\mu g_{\nu\rho} + ((k-q)-q)_\nu g_{\rho\mu}] \left(g^{\nu\sigma} - \frac{k^\nu k^\sigma}{m_W^2} \right) \\
 &\quad \frac{-ig_2 V^2}{\sqrt{2}\Lambda^3} \left(\frac{1}{2}k + p_1 \right)_\sigma \\
 &\quad \bar{u}_\alpha(p_2) P_R P_R^T C^\dagger C P_L^T P_L (\not{p}_1 + \not{k} + m_j) u_\alpha(p_1) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Este diagrama se elimina tomando en cuenta que $P_R P_L = 0$. De esta manera este tercer diagrama tampoco contribuiría a las propiedades electromagnéticas de los leptones.

Conclusiones

Las corrientes cargadas analizadas dentro de este trabajo, derivadas a partir de los términos Lagrangianos Efectivos no contribuyen al momento anómalo magnético de transición $\mu_{\alpha\beta}$ ni al momento dipolar eléctrico de transición $d_{\alpha\beta}$ de los campos leptónicos. Para el caso de de las corrientes cargadas derivadas de las expresiones (1-3), si bien se llegaba a que cada diagrama tenía un valor diferente de cero individualmente, al sumarse todos, los diagramas en donde se consideraban neutrinos de Majorana se eliminaban con los que consideraban neutrinos de Dirac. Por otra parte para la corriente cargada derivada de la expresión (4) debe de hacerse cero en algún punto del cálculo debido a que la estructura general es incompatible con la estructura correspondiente a la de la parametrización del vértice electromagnético dado por (3.10) la cual genera las contribuciones buscadas. Estos resultados fueron un tanto inesperados como desafortunados pues no permiten un análisis más profundo en cuanto a las propiedades electromagnéticas mencionadas se refiere.

Bibliografía

- [1] S. L. Glashow, *Partial-symmetries of weak interactions*, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
- [2] A. Salam, “*Weak and electromagnetic interactions*”, in *Elementary particle theory: relativistic groups and analyticity*, N. Svartholm, ed., p. 367. Almqvist & Wiksell, 1968. Proceedings of the eighth Nobel symposium.
- [3] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [4] B. Pontecorvo, *Mesonium and anti-mesonium*, Sov. Phys. JETP **6**, 429 (1957)
- [5] Y. Fukuda *et al.*(Super-Kamiokande Collaboration), *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998).
- [6] Q. R. Ahmad *et al.*(SNO Collaboration), *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, Phys. Rev. Lett. **89**, 011301 (2002).
- [7] P. A. M. Dirac, *The quantum theory of the electron*, Proc. Roy .Soc. Lond. A **117**, 610 (1928).
- [8] E. Majorana, *Teoria simmetrica dell’ elettrone e del positrone*, Nuovo Cimento **14**, 171 (1937).
- [9] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, *Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation*, Phys. Rev. Lett. **44**, 912 (1980).
- [10] E. Ma, *Neutrino Mass: Mechanisms and Models*, ePrint: arXiv:0905.0221.
- [11] C. Giunti and C. W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics* (New York: Oxford University Press, 2007).
- [12] S. Weinberg, *Baryon- and Lepton-Nonconserving Processes*, Phys. Rev. Lett. **43**, 1566 (1979).
- [13] K. S. Babu and C. N. Leung, *Classification of effective neutrino mass operators*, Nucl. Phys. B **619**, 667 (2001).
- [14] F. Englert and R. Brout, *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons*, Phys. Rev. Lett. **13** 321 (1964).
- [15] P. W. Higgs, *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*, Phys. Lett. **12** 132 (1964).
- [16] P. W. Higgs, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, Phys. Rev. Lett. **13** 508 (1964).
- [17] A. Dobado, A. Gómez-Nicola, A. L. Maroto, and J. R. Peláez, *Effective Lagrangians for the Standard Model* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1997).

- [18] V. Shtabovenko, R. Mertig, and F. Orellana, *New developments in FeynCalc 9.0*, Comput. Phys. Commun. **207**, 432 (2016).
- [19] H. H. Patel, *Package-X: A Mathematica package for the analytic calculation of one-loop integrals*, Comput. Phys. Commun. **197**, 276 (2015).
- [20] G. Passarino and M. Veltman, *One-loop corrections for e^+e^- annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the Weinberg model*, Nucl. Phys. B **160**, 151 (1979).
- [21] J. Wudka, *Electroweak Effective Lagrangians*, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 2301 (1994).
- [22] E. Noether, *Invariant variation problems*. *Transport Theory and Statistical Physics*, Taylor & Francis **1**, (3):186–207, (1971).
- [23] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books, 1995).
- [24] D. M. Y. Sommerville, *An Introduction to the geometry of N dimensions* Methuen & Company. (1929)
- [25] A. D. Sakharov, *Violation of CP invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe*, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **5**, 32 (1967) [JETP Lett. **5**, 24 (1967)] [Violation of CP invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe, Sov. Phys. Usp. **34**, 392 (1991)] [Usp. Fiz. Nauk **161**, 61 (1991)].
- [26] C. Grosse-Knetter, R. Koegerler *Unitary Gauge, Stueckelberg Formalism and Gauge Invariant Models for Effective Lagrangians* Phys. Rev. D, **48**, 6 (1993)
- [27] J. Goldstone, *Field theories with !!Superconductor?? solutions*, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).
- [28] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Broken Symmetries*, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [29] A. G. Grozin, *Introduction to effective field theories. 1. Heisenberg-Euler effective theory, decoupling of heavy flavours*, arXiv preprint arXiv:0908.4392 (2009).
- [30] C. P. Burgess, *An introduction to effective field theory*, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **57** (2007)
- [31] M. Nowakowski, E. A. Paschos, J. M. Rodriguez *All electromagnetic form factors*, arXiv:physics/0402058 (2011)
- [32] W. Hollik, J. I. Illana, S. Rigolin, C. Schappacher, and D. Stöckinger, *Top dipole form factors and loop-induced CP violation in supersymmetry*, Nucl. Phys. **B551**, 3 (1999).
- [33] H. Georgi, *Effective field theory*, Annual review of nuclear and particle science **43.1** (1993): 209-252.
- [34] R. B. Singh, *Introduction to modern physics, volume I*, New Age International Publishers (2002).
- [35] A. Dobado, A. Gómez-Nicola, A. L. Maroto, and J. R. Peláez, *Effective Lagrangians for the Standard Model* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1997).
- [36] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction* Springer. (2003)
- [37] M. Kobayashi and T. Maskawa, *CP-violation in the renormalizable theory of weak interaction*, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- [38] J. F. Nieves, *Electromagnetic properties of Majorana neutrinos*, Phys. Rev. D **26**, 3152 (1982).

- [39] C. Giunti and A. Studenikin, *Neutrino electromagnetic properties*, Phys. At. Nucl. **72**, 2089 (2009).
- [40] C. Brogini, C. Giunti, and A. Studenikin, *Electromagnetic properties of neutrinos*, Adv. High Energy Phys. **2012**, 459526 (2012).
- [41] C. Giunti and A. Studenikin, *Neutrino electromagnetic interactions: A window to new physics*, Rev. Mod. Phys. **87**, 531 (2015).
- [42] Z. Maki, M. Nakagawa, S. Sakata *Remarks on the Unified Model of Elementary Particles*, Progress of Theoretical Physics, **28**, 5 (1962)
- [43] R. E. Shrock, *Electromagnetic properties and decays of Dirac and Majorana neutrinos in a general class of gauge theories*, Nucl. Phys. **B 206**, 359 (1982).
- [44] M. Pospelov and A. Ritz, *Neutron electric dipole moment from electric and chromoelectric dipole moments of quarks*, Phys. Rev. D **63**, 073015 (2001).
- [45] A. Denner, *Feynman rules for fermion-number-violating interactions*, Nucl. Phys. **B 387** 467 (1992)
- [46] D. Demir, O. Lebedev, K. A. Olive, M. Pospelov, and A. Ritz, *Electric dipole moments in the MSSM at large $\tan \beta$* , Nucl. Phys. **B680**, 339 (2004).
- [47] G. 't Hooft, *Scalar one-loop integrals* M. J. Veltman, Nucl. Phys. **B 153** 365 (1979).
- [48] G. Passarino, M. J. Veltman, *One Loop Corrections for $e^+ e^-$ Annihilation Into $\mu^+ \mu^-$* Nucl. Phys. B **160** 151 (1979).