BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA “LUIS RIVERA TERRAZAS”

“ESTUDIO DE LA TRANSICIÓN METAL-AISLANTE EN EL MODELO DE AUBRY-ANDRÉ BAJO UN ENFOQUE DE SERIES DE TIEMPO”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA

MIRIAM JIMÉNEZ VALDEZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. EDUARDO JONATHAN TORRES HERRERA

No. de CVU: 1226955

ENERO DE 2025

Universidad Autónoma de Puebla
Instituto de Física "Ing. Luis Rivera Terrazas"

Estudio de la transición metal-aislante en el modelo de Aubry-André bajo un enfoque de series de tiempo

Tesis presentada por

Miriam Jiménez Valdez

para obtener el grado de

Maestra en Ciencias (Física)

Dirigida por

Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera

Puebla, México
Febrero 2025

©2025 - Miriam Jiménez Valdez

Derechos Reservados

Agradecimientos

Agradezco mucho al Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera por su instrucción y paciencia durante todo el proceso del trabajo de tesis. También agradezco al Instituto de Física por la educación recibida. Agradezco a mis papás por siempre impulsarme a cumplir con mis objetivos y estar ahí para mí siempre. Se agradece también al CONAHCyT por la beca otorgada durante la maestría que me permitió subsistir durante mi formación académica. Finalmente, un agradecimiento a la VIEP de la BUAP por la beca otorgada en el contexto del proyecto No. 100524481-VIEP2024.

Dedicado a
mis padres.

Estudio de la transición metal-aislante en el modelo de Aubry-André bajo un enfoque de series de tiempo

Resumen

Se estudia la transición metal-aislante en el modelo unidimensional de Aubry-André sin o con interacciones entre dos partículas. En particular, se propone caracterizar dicha transición mediante el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de una estadística definida en términos de los espaciamientos consecutivos entre niveles energéticos adyacentes, esto es, mediante el así llamado espectro de potencias, una herramienta ampliamente utilizada en el análisis de series de tiempo.

Time series approach to the metal-insulator transition in the Aubry-André model

Abstract

We characterize the metal-insulator transition in the one-dimensional Aubry André model without or with interactions between two particles. Particularly, we propose to characterize the transition by using the squared module of the Fourier transform of statistics defined in terms of the spacings between adjacent energy levels, that is through so-called power spectrum, a useful tool in time series analysis.

Participación en eventos

- Time series approach to the metal-insulator transition in the Aubry-André model. M. Jiménez-Valdez. International Workshop on Disordered Systems. Salamanca, España (junio de 2024).
- Pink noise turns brown in the 1D Aubry-André model. M. Jiménez-Valdez. Conference on Random Matrix Theory and its applications. SIC. Cuernavaca, México (julio de 2024).
- Time series approach to the metal-insulator transition in the Aubry-André model. M. Jiménez-Valdez. Simposio de estudiantes. IFUAP. Puebla, México (julio de 2024).
- Time series approach to characterize the phase transition in the 1D Aubry-André model. M. Jiménez-Valdez. Workshop on Open Quantum Systems and Quantum Information. Puebla, México (septiembre de 2024).
- Estudio de la transición metal-aislante en el modelo de Aubry-André bajo un enfoque de series de tiempo. M. Jiménez-Valdez. LXVII Congreso Nacional de Física. Chihuahua, México (octubre de 2024).

Contenido

1 Introducción **1**

2 Teoría de matrices aleatorias **5**

2.0.1 Caos Cuántico 7
2.0.2 Estados extendidos 8
2.0.3 Estados localizados 9
2.1 Cantidades a estudiar 11
2.1.1 Densidad de estados 11
2.1.2 Distribución de los espaciamientos 11
2.1.3 Desdoblamiento del espectro energético 12
2.1.4 Espectro de potencias 14
2.1.5 Razón inversa de participación 16
2.1.6 Distribución de Porter-Thomas 17
2.2 Ensamble Diagonal 19
2.2.1 Densidad de estados 20
2.2.2 Distribución de espaciamientos 21
2.2.3 Espectro de potencias 22
2.3 Ensamble Gaussiano Ortogonal 23
2.3.1 Densidad de estados 23
2.3.2 Distribución de espaciamientos 24
2.3.3 Espectro de potencias 25
2.3.4 Distribución de Porter-Thomas 26

3 Modelo de Aubry-André sin interacciones **27**

3.1 Resultados para el modelo AA sin interacciones 31
3.1.1 Densidad de estados 32
3.1.2 Distribución de espaciamientos 33
3.1.3 Espectro de potencias 35
3.1.4 Razón de participación 36
3.1.5 Distribución de Porter-Thomas 38

4 Modelo de Aubry-André con interacciones **40**
4.1 Resultados para el modelo AA con interacciones 41
4.1.1 Densidad de estados 42
4.1.2 Distribución de espaciamientos consecutivos 43
4.1.3 Espectro de potencias 44
4.1.4 Razón de participación 45
4.1.5 Distribución de Porter-Thomas 46

5 Conclusiones **48**

Bibliografía **50**

Capítulo 1

Introducción

La transición metal-aislante (MIT, por sus siglas en inglés), se refiere a la transición entre una fase en la que un material se comporta como un conductor y otra en la que este se comporta como aislante. P.W. Anderson en su trabajo de 1958 [1], describe cómo se puede suprimir el transporte electrónico por la presencia de impurezas aleatorias (desorden) en el sistema cuántico. Estas impurezas en el material funcionan como dispersores que producen múltiples trayectorias de dispersión e interferencia destructiva. Por lo que la difusión del electrón a través del material no solo se reduce sino que puede detenerse completamente. Entonces se dice que el electrón queda localizado y la conductividad eléctrica desaparece. A este mecanismo se le conoce en la actualidad como localización de Anderson.

En [1] Anderson mostró que el estado cuántico de un electrón en un sistema tridimensional (3D) de enlace fuerte, representado este por la función de onda del electrón, se encuentra localizado exponencialmente cuando la magnitud del desorden es suficientemente fuerte. Con desorden nos referimos por ejemplo a que existan vacancias en el sistema, sustitución de átomos de un tipo por átomos de otro tipo, todo esto de manera aleatoria. En otras palabras, después de un cierto valor crítico de la magnitud del desorden, la probabilidad de encontrar el electrón en una posición diferente a la que originalmente se encuentra decae exponencialmente con la distancia a esa posición, se dice entonces que el estado está localizado. Mientras que por debajo del punto crítico los estados cuánticos están extendidos, esto es, la probabilidad de encontrar al electrón en cualquier sitio diferente es finita [2]. En el punto crítico los estados no son ni extendidos ni localizados, se dice que son estados extendidos pero no ergódicos, en el sentido de que están extendidos en el espacio de Hilbert pero ocupan una fracción finita de este.

El fenómeno de localización de Anderson se desarrolló en el contexto de transporte electrónico [1, 3], aunque en su momento no se le prestó mucha atención. Debido a la naturaleza ondulatoria del fenómeno de localización de Anderson, su estudio se ha extendido a otros contextos, como la difusión de electrones [4]. También se han realizado experimentos con condensados de Bose-Einstein [5,6], ondas de sonido [7], luz [8–10] y redes fotónicas [11], solo por mencionar algunos ejemplos. En estudios posteriores, se demostró que en una dimensión (1D) [12] y dos dimensiones (2D) [13] todos los estados cuánticos están localizados para una magnitud infinitesimal de desorden, esto ocurre solamente en el límite termodinámico. Entonces se creía que no podía existir una transición metal-aislante en sistemas que no fueran tridimensionales. Sin embargo, en 1980 Aubry y André estudiaron un modelo unidimensional sujeto a un potencial de sitio inconmensurable [14] y mostraron que el sistema muestra una transición metal-aislante en 1D. Este modelo es el que se estudia en el presente trabajo.

Habitualmente se usan conceptos y herramientas de la teoría de matrices aleatorias (RMT, por sus siglas en inglés) [15–18] y el caos cuántico [19–23] para caracterizar el régimen en el que un sistema cuántico se encuentra, extendido (fase metálica) o localizado (fase aislante). Una de las estadísticas más utilizadas en estas áreas es la distribución de probabilidad de espaciamientos consecutivos entre niveles energéticos adyacentes, esta distribución adopta una forma particular cuando el sistema cuántico es integrable [24, 25] y tiene otra forma, que se dice es universal, cuando el sistema es caótico [26]. Dicha estadística se ha aplicado para el estudio en los modelos 1D de Anderson [27–31] y el de Aubry-André [32, 33].

Por otro lado, en la Ref. [34] se propone analizar al espectro energético de sistemas cuánticos como series discretas de tiempo. Con base en resultados numéricos, se conjetura que el carácter caótico de un sistema cuántico se manifiesta también en el espectro de potencias de sus niveles energéticos como un ruido tipo $1/f$, donde f es la frecuencia. Mediante derivaciones analíticas en el contexto de la teoría de matrices aleatorias [35] se confirma que el ruido del tipo $1/f$ es propio de sistemas caóticos, mientras que el ruido tipo $1/f^2$ es propio de sistemas integrables; a estos se les denominan también ruido rosa y ruido café respectivamente.

Esta perspectiva se extendió para la caracterización de la transición de Anderson en términos del espectro de potencias de los niveles energéticos del sistema [36]. Además, dicha caracterización se ha usado para el ensamble gaussiano continuo [37] y para el estudio

de una fase con estados extendidos pero no ergódicos en el así llamado ensamble β [38]. Recientemente en la Ref. [39] se verifica experimentalmente la concordancia de las propiedades del espectro de potencias para el modelo de Rosenzweig-Porter, a través de un experimento con un resonador de microondas superconductor plano que simula un billar cuántico, mismo que les permitió mostrar cómo el sistema transita de una fase con dinámica regular o integrable a una fase caótica. La mayoría de resultados para esta estadística han sido obtenidos para modelos basados en matrices aleatorias. Este tipo de análisis, en términos de series de tiempo, son más escasos para sistemas físicos.

Cabe destacar que la distribución de los espaciamientos consecutivos entre niveles energéticos adyacentes es un diagnóstico de las correlaciones de corto alcance. La ventaja del enfoque basado en el espectro de potencias reside en que no solo diagnostica correlaciones de corto alcance, sino que también permite analizar las correlaciones entre niveles energéticos distantes, es decir, correlaciones de largo alcance.

El estudio del análisis espectral como series de tiempo no se restringe únicamente al ámbito de la física, sino que también se ha aplicado en sistemas biológicos [40]. Por ejemplo en [41] se presenta el espectro de potencias de los latidos del corazón para mostrar cómo se produce la transición de fase de un corazón saludable a uno enfermo. También, se analiza el espectro de potencias para distintas estaciones de radio, mostrando que la música clásica, rock, jazz y blues siguien un ruido tipo $1/f$ [42].

El principal objetivo de este trabajo es caracterizar la transición de una fase extendida o metálica a una fase localizada o aislante en el modelo unidimensional de Aubry-André con y sin interacciones mediante el espectro de potencias de una estadística definida en términos de los niveles energéticos del modelo. Sabemos que esta transición metal-aislante ocurre al variar la amplitud del potencial al cual está sujeto el sistema, conocido como potencial de Harper [43]. El potencial de Harper es un potencial quasiperiodico, a diferencia del modelo de Anderson, cuya transición ocurre debido a un potencial aleatorio.

El estudio del modelo de Aubry-André es importante porque es susceptible a ser estudiado en plataformas experimentales modernas, por ejemplo, en la Ref. [44] se usan redes ópticas para investigar la dinámica y evolución temporal del sistema, mientras que en la Ref. [45] se estudia el modelo en circuitos superconductores.

En este trabajo también se hace una caracterización de la transición metal-aislante mediante indicadores tradicionales de la RMT y el caos cuántico, estudiando así la estadística de valores propios y cantidades como la densidad de estados, razón de partici-

pación, distribución entre espaciamientos de niveles energéticos adyacentes, entre otras. De estas estadísticas se concluye que el enfoque de series de tiempo empleado resulta efectivo para el modelo con interacciones y no así para el modelo sin interacciones. En cambio, el análisis de la estructura y estadística de estados propios es efectivo en ambos casos.

En los capítulos siguientes se describe a detalle cada parte de este trabajo. En el Capítulo 2 se introducen los principales conceptos utilizados en teoría de matrices aleatorias y caos cuántico, y se explica qué son dichas matrices. Asimismo, se incluye un breve repaso histórico de esta teoría matemática y su importancia en la Física. Además, se justifica el uso de estas matrices como dos casos límite para contrastar con el modelo cuántico estudiado. Uno correspondiente a describir las características del sistema cuando los estados del sistema están en su fase extendida y otro correspondiente a su fase localizada.

En los capítulos 3 y 4 se introduce el hamiltoniano para el modelo unidimensional de Aubry-André sin interacciones y con interacciones respectivamente. También se presentan los resultados numéricos computacionales de las cantidades estudiadas. Finalmente, en el Capítulo 5 se enlistan las principales conclusiones y perspectivas.

Capítulo 2

Teoría de matrices aleatorias

La teoría de matrices aleatorias (RMT, por sus siglas en inglés) es una teoría matemática que surge de la estadística en la década de los años 30. La RMT permite estudiar analíticamente las propiedades de fluctuaciones y funciones de correlación de los valores propios de matrices aleatorias. Es una teoría que surge independientemente de posibles aplicaciones a sistemas físicos.

En la década de los años 50 fue Eugene Wigner quien por primera vez usa las herramientas de esta teoría para modelar la realidad física, ya que estudió las fluctuaciones de energía en núcleos de átomos pesados y de esta manera le fue posible describir ciertas propiedades de estados excitados. El enfoque introducido por Wigner difiere fundamentalmente de la aplicación estándar de conceptos estadísticos en física. En la mecánica estadística estándar, se considera un ensamble de sistemas físicos idénticos, todos descritos por el mismo hamiltoniano que difiere en las condiciones iniciales y se calculan funciones termodinámicas realizando un promedio sobre el ensamble. Por su parte, Wigner consideraba ensambles de sistemas dinámicos gobernados por hamiltonianos diferentes con alguna propiedad de simetría común [17].

Por mucho tiempo las aplicaciones de RMT estuvieron escencialmente confinadas a la física nuclear, por razones históricas, esta fue la primera área de la física donde el conjunto de datos y el orden de magnitud de la energía eran lo suficientemente grandes para mostrar propiedades de fluctuación espectral relevantes para hacer estadística y pruebas con RMT. Posteriormente, su estudio adquirió importancia en otras áreas de la física y las matemáticas, por ejemplo, para estudiar el equilibrio y las propiedades de transporte de sistemas cuánticos desordenados y sistemas cuánticos clásicamente caóticos con pocos

grados de libertad. Además para estudiar las propiedades elastodinámicas de materiales estructurales, la conductividad en metales desordenados, la distribución de los valores de la función zeta de Riemann en la línea crítica, gravedad cuántica, cromodinámica cuántica, teoría de cuerdas y otros [18].

A finales de la década de los años 70 y a principios de los años 80 hubo un gran desarrollo de la RMT, puesto que se usaron para la caracterización de sistemas cuánticos conservativos que se comportan caóticamente en el límite clásico. Además se realizaron estudios para sólidos desordenados, lo que permitió la coalescencia entre RMT y la teoría de localización. Otro acontecimiento que marcó el desarrollo de esta teoría fue la afamada conjetura de Bohigas-Gianoni-Schmidt [26], que establece una relación entre RMT y las propiedades de fluctuación espectral de sistemas cuánticos clásicamente caóticos con pocos grados de libertad [17]. Fue entonces que RMT y la teoría de la localización comenzaron a fusionarse. La sencillez y profundidad de la RMT ha sido reconocida y apreciada casi desde su nacimiento, pues captó el interés de una amplia comunidad porque esta teoría provee herramientas para conectar la dinámica clásica con los fenómenos cuánticos [16].

Wigner y Dyson presentaron tres ensambles genéricos de matrices aleatorias, se definen en términos de las propiedades de simetría del hamiltoniano [17], se les conoce como ensambles gaussianos, puesto que sus funciones de probabilidad de encontrar una matriz particular H dentro de los ensambles tienen una forma Gaussiana,

$$P_{N\beta}(H) \propto exp\left(-\frac{\beta N}{\lambda^2} trH^2\right), \tag{2.1}$$

La variable β se conoce como el índice de Dyson y define el tipo de ensamble. Así con $\beta = 1$ se tiene el Ensamble Gaussiano Ortogonal (GOE, por sus siglas en inglés), con $\beta = 2$ el Ensamble Gaussiano Unitario (GUE, por sus siglas en inglés) y con $\beta = 4$ el Ensamble Gaussiano Simpléctico (GSE, por sus siglas en inglés). N representa el tamaño de las matrices, λ son los eigenvalores de la matriz H.

Dichos ensambles se pueden utilizar para predecir fluctuaciones de ciertas observables, es apropiado usar cada uno de ellos dependiendo de sus propiedades de simetría. Para sistemas con invarianza de reversibilidad temporal se usa GSE. Por otro lado, en ausencia de simetría de inversión temporal, el GUE es apropiado. Para sistemas con invarianza de reversibilidad temporal y simetría de rotación GOE es apropiado.

2.0.1 Caos Cuántico

Existe una relación entre RMT y el caos cuántico. En mecánica clásica se dice que la dinámica de un sistema es caótica o irregular si esta presenta una fuerte dependencia en la condiciones iniciales, la cual se manifiesta, por ejemplo, en la divergencia exponencial con el tiempo de dos trayectorias en el espacio fase, originadas estas a partir de dos condiciones iniciales muy parecidas. Cuando la dinámica del sistema es regular, las trayectorias en el espacio fase se separan a lo más de manera lineal con el tiempo. En el primer caso se denomina al sistema como caótico, mientras que en el segundo al sistema se le llama integrable. La fuerte dependencia en las condiciones iniciales puede tener diferentes causas, entre ellas están la no linealidad de las ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal del sistema [46] o la forma de las paredes con las cuales una partícula puntual colisiona de manera elástica, tal como ocurre en los así llamados billares clásicos [47]. En [22] se estudian dos modelos típicos de caos clásico, estadio Bunimovich y el billar del Sinaí. Estos son algunos de los conceptos de la denominada teoría del caos [48, 49].

Caos cuántico se refiere al estudio de las propiedades de un sistema cuyo análogo clásico es caótico. En la actualidad se acepta que la presencia de caos en un sistema cuántico permite la descripción de las propiedades termodinámicas, ya sea mediante la mecánica estadística o la termodinámica sin la necesidad de considerar un baño térmico [50, 51].

En este Capítulo se presentan las principales herramientas que se usarán para el desarrollo de esta tesis. En el contexto de RMT ilustraremos algunos conceptos claves de nuestro trabajo. Por ejemplo, estados extendidos y localizados. También presentamos las cantidades que estudiaremos más adelante en sistemas físicos de espín 1/2.

En esta tesis estamos interesados en estudiar una transición de una fase metálica a una aislante. La primera de estas fases está relacionada con el concepto de estados extendidos, mientras que la segunda con estados localizados. A continuación se da una breve descripción de estos dos conceptos.

2.0.2 Estados extendidos

Comenzamos con el siguiente ejemplo, pensemos en un electrón que va a propagarse a lo largo de una cadena unidimensional con N sitios, denotando el n-ésimo sitio con n, en cada uno de esos sitios hay iones de atómos a los cuales se asocia un potencial que actúa sobre el electrón. Se representa el estado cuántico del electrón mediante un ket de estado $|\psi\rangle$, entonces se construyen las proyecciones del ket de estado del electrón en la base de sitios de acuerdo a

$$C_n \equiv \langle n\,|\psi\rangle\,, \qquad \text{con} \quad n = 1, 2, ..., N, \tag{2.2}$$

donde la probabilidad de encontrar al electrón en el n-ésimo sitio se representa mediante el módulo al cuadrado de esa función de onda,

$$|C_n|^2 = |\langle n\,|\psi\rangle\,|^2. \tag{2.3}$$

Nos referimos a un estado extendido como aquel para el cual muchas de sus proyecciones o componentes, C_n, son diferentes de cero. Así la probabilidad de encontrar al electrón en cualquier sitio de la cadena es finita. Mientras que un estado localizado es aquel para el cual solo unas cuantas componentes son distintas de cero. Es en el primer caso cuando un sistema se comporta como un metal (conductor) y en el segundo cuando un sistema se comporta como aislante (no conductor).

Para aclarar aún más estos conceptos, simularemos estados extendidos y localizados. En el caso de un estado extendido las proyecciones de la función de onda las podemos simular computacionalmente usando un conjunto de números reales aleatorios $\{C_1, C_2, C_3, ..., C_{100}\}$, con una distribucion uniforme entre $[-1, 1]$. Normalizamos las componentes de acuerdo a

$$C_n = \frac{C_n}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N} {C_n}^2}}. \tag{2.4}$$

En la Fig. 2.1 se muestra el módulo al cuadrado $|C_n|^2$ de los números aleatorios C_n para una cadena con $N = 100$ sitios. Esto representa la amplitud de probabilidad de encontrar a la partícula en el n-ésimo sitio y se observa que la probabilidad de encontrarlo en cualquier sitio es finita.

Si la cadena permite la propagación de la partícula, es decir, hay transporte electrónico, decimos entonces que el estado está extendido sobre los sitios. Este comportamiento se relaciona con las propiedades de conducción de los materiales, ya que el sistema permite el transporte del electrón que es propio de los materiales conductores. Por esto podemos decir también que el estado está extendido o bien el sistema se encuentra en una fase metálica.

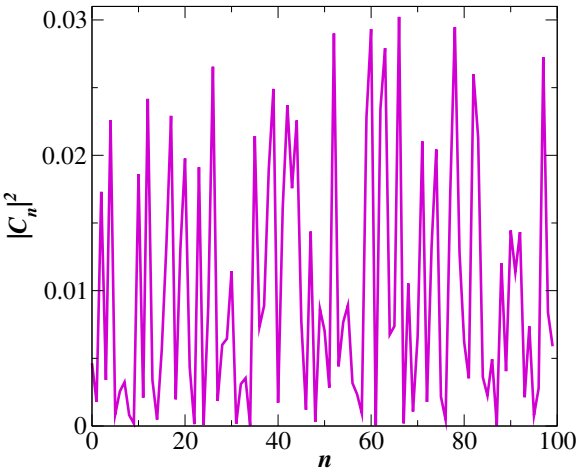

Figura 2.1: Se muestra un estado extendido a lo largo de una cadena de $N = 100$ sitios.

2.0.3 Estados localizados

Análogamente al caso de un estado extendido, queremos ilustrar el ejemplo de un electrón localizado en una cadena unidimensional con $N = 100$ sitios. Nuevamente, este electrón está asociado a un ket de estado $|\psi\rangle$ cuyas proyecciones en la base de sitios se describen por la Ec. (2.2).

Para simular computacionalmente esas proyecciones usamos una secuencia de 100 números aleatorios $\{C_1, C_2, C_3, ..., C_{100}\}$ distribuidos uniformemente entre $[-1, 1]$, pero modulados por una función exponencial, cuyo decaimiento depende de la distancia al centro de la cadena,

$$C_n = \exp(-0.5\,|n - N/2|)C_n,$$

donde la tasa de decaimiento es 0.5 y la distancia al centro es n. En este caso el electrón no se puede propagar si la función de onda está localizada a la mitad de la cadena, es decir, no hay presencia de la función de onda en sitios alejados del centro de la cadena. En términos

de la conductividad eléctrica de un material, no se permite el transporte electrónico, por lo que podemos decir que el sistema está en su fase aislante. En la Fig. 2.2 se muestra un estado exponencialmente localizado.

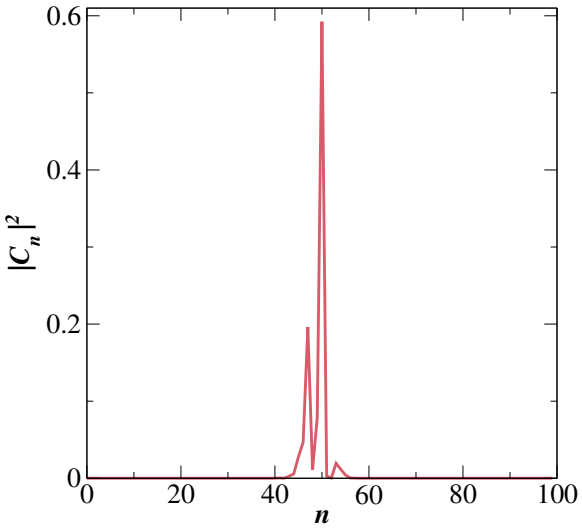

Figura 2.2: Se muestra un estado exponencialmente localizado en una cadena unidimensional de $N = 100$ sitios.

Estas definiciones de estados extendidos y localizados nos permiten describir de manera cualititiva a los estados de un sistema cuántico y comprender cómo es que su función de onda asociada a una partícula puede propagarse o no a lo largo de los sitios de la cadena. Sin embargo, existen otras cantidades que describen el grado de extensión o localización de los estados de manera cuantitativa, ver por ejemplo la sección 2.1.5 que corresponde a la llamada razón de particiàción inversa. En lo siguiente, se enuncian las cantidades y métodos que son de utilidad para estudiar los sistemas físicos que se describen en los Capítulos 3 y 4.

2.1 Cantidades a estudiar

Se enlistan las cantidades que van a estudiarse tanto en ensambles de RMT como en los sistemas físicos, esto con la intención de familiarizarse con la terminología usada.

Partimos de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo,

$$H\left|\psi_\alpha\right\rangle = E_\alpha\left|\psi_\alpha\right\rangle, \quad \text{con} \quad \alpha = 1, 2, ..., N. \tag{2.5}$$

Donde $|\psi_\alpha\rangle$ y E_α son los estados y valores propios del sistema descrito por el hamiltoniano H.

Es importante comentar que todas las cantidades que se estudiarán en esta tesis están deifindas en términos de los estados y valores propios de energía.

2.1.1 Densidad de estados

Se puede obtener la función de densidad de probabilidad de los niveles de energía, $P(E)$, que muestra la manera en que se distribuyen los valores propios del hamiltoniano. Se conoce también como densidad de estados (DoS, por sus siglas en inglés). La DoS se define como

$$P(E) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta(E - E_\alpha). \tag{2.6}$$

En donde $\delta(x)$ es la llamada delta de Dirac. Esta cantidad describe un histograma que muestra la manera en que se distribuyen las energías E_α asociadas a un sistema físico.

2.1.2 Distribución de los espaciamientos

La manera tradicional de hacer estadística de niveles de energía en el contexo de la RMT y el caos cuántico es a través de la distribución de espaciamientos consecutivos entre niveles energéticos adyacentes, nos referimos a dicha distribución como $P(s)$. Primero se definen los espaciamientos consecutivos como

$$s_\alpha = \epsilon_{\alpha+1} - \epsilon_\alpha, \quad \text{con} \quad \alpha \in \{1, 2, 3, ..., N-1\}, \tag{2.7}$$

donde los ϵ_α corresponden al espectro energético una vez aplicado un procedimiento que mapea a las energías en la forma $E_\alpha \to \epsilon_\alpha$, también conocido como desdoblamiento (ver Sec. 2.1.3).

La función de distribución de probabilidad de los epaciamientos consecutivos se define mediante

$$P(s) = \sum_{\alpha=1}^{N} \delta(s - s_\alpha). \tag{2.8}$$

La forma de construir esta distribución de probabilidad, en la práctica, es haciendo un histograma de los espaciamientos s_α entre los niveles energéticos desdoblados del sistema.

La función de distribución de probabilidad $P(s)$ se usa para la determinación del carácter caótico o integrable de un sistema cuántico. Esta estadística nos permite estudiar las correlaciones de corto alcance entre los niveles energéticos del sistema.

Es conocida la forma que adopta esta distribución cuando el sistema cuántico es integrable [24, 25] y cuando el sistema es caótico [26]. En el caso particular de un sistema cuántico que está en régimen localizado, se aplica la conjetura de Berry-Tabor [24], esta establece que las propiedades de fluctuación en el espectro de eigenvalores de un sistema integrable se comportan típicamente como números aleatorios no correlacionados así como variables propias de un proceso de Poisson. Por esta razón, aunque se trata claramente de una distribución exponencial, en la física se le conoce también como distribución de Poisson,

$$P_{\mathrm{P}}(s) = \exp(-s). \tag{2.9}$$

Mientras que para un sistema en el regimen extendido o caótico, esta distribución toma típicamente una forma particular descrita por la distribución de Wigner-Dyson [18, 52, 53]

$$P_{WD}(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right). \tag{2.10}$$

A la Ec. (2.10) también se le conoce como Wigner *surmise* [54].

Al usar estadística de niveles es necesario desdoblar el espectro energético. El desdoblemiento consiste básicamente en normalizar el espectro de tal manera que su especiamiento medio sea uno. En las referencias [16, 18, 55] se explica el procedimiento de desdoblamiento, pero a continuación damos una breve descripción de dicho procedimiento.

2.1.3 Desdoblamiento del espectro energético

Una vez obtenidos los niveles de energía, se usa la técnica de desdoblamiento que consiste en una reescalación local del espectro energético, esta permite remover las peculiaridades del sistema (desorden, interacciones, dimensionalidad, etc.) y caracterizar así

el régimen en que el sistema se encuentra, extendido o localizado. Si el sistema se encuentra en el régimen extendido, entonces se revelarán las propiedades universales predichas por la RMT.

En la práctica se realiza una transformación ($E_\alpha \rightarrow \epsilon_\alpha$) a los valores propios del sistema, considerando al conjunto de eigenvalores original como $\{E_\alpha\}$ con una energía media $\langle N(E_\alpha)\rangle$, estos se mapean a un nuevo conjunto de números $\{\epsilon_\alpha\}$ correspondientes al espectro energético desdoblado cuyo espaciamiento medio Δ es la unidad, pero que al mismo tiempo preserva el carácter de las fluctuaciones locales [16, 25].

Cuando se conoce la función de distribución de probabilidad de los niveles de energía, como en el caso de la RMT, el desdoblamiento se puede realizar analíticamente [18]. Sin embargo, en la mayoría de problemas físicos, tal distribución de probabilidad no se conoce y hay que recurrir a los métodos numéricos computacionales para hacer el desdoblamiento. El primer paso para desdoblar el espectro energético consiste en ordenar los niveles de energía de manera ascendente, $E_0 < E_1 < E_2 < E_3 < \cdots < E_N$. Posteriormente, se descartan el 20% de los valores de los extremos del espectro, esto con el objetivo de preservar la parte lineal del espectro, puesto que en los extremos hay curvaturas que pueden dar lugar a resultados espurios.

Existen diferentes opciones para el siguiente paso en el proceso de desdoblamiento. En la Ref. [41] se analizan distintos métodos para realizar el desdoblamiento, se muestra cómo el método afecta los resultados al estudiar cantidades que consideran correlaciones de largo alcance, tal como, la llamada varianza del número de niveles de energía. Mientras que para el espaciamiento entre niveles no es tan significativo. Por esta razón optamos por usar un método que considera un ajuste polinomial de orden 7 [56].

Primero, se construye una función escalera Θ, definida en términos de los valores propios ordenados, de tal forma que obtenemos el número de niveles con energía menor o igual a cierto valor de E,

$$N(E) = \int_{-\infty}^{E} P(E')dE' = \sum_{\alpha=1}^{N} \Theta(E - E_\alpha). \tag{2.11}$$

De esta manera, se define la función espectral acumulativa, como la integral del espectro que mide la cantidad de valores que hay desde $-\infty$ hasta un cierto valor de E.

La función escalera se descompone en dos partes,

$$N(E) = \overline{N}(E) + \tilde{N}(E), \tag{2.12}$$

donde el primer término corresponde a la parte suave $\overline{N}(E)$, se dice que es de carácter universal y está dada por la densidad acumulativa media espectral. El segundo término corresponde a la parte fluctuante $\tilde{N}(E)$, que depende de las peculiaridades del sistema. Lo que buscamos con el desdoblamiento es remover la parte fluctuante $\tilde{N}(E)$.

Posteriormente, se realiza un ajuste a la función escalera formada con los valores propios, de acuerdo a la Ec. (2.12), mediante un polinomio de grado 7, [56]. Luego, se evalúa el espectro en dicho ajuste y finalmente se obtienen los nuevos valores propios, $E_\alpha \rightarrow \epsilon_\alpha$, con una densidad de nivel media unitaria para el espectro desdoblado. Las energías desdobladas se expresan en unidades del espaciamiento medio entre niveles Δ y se muestra que la densidad de estados es unitaria sobre el espectro completo de energía. El desdoblamiento corresponde al mapeo de los eigenvalores sobre la parte suave. Este cambio de variable transforma la función escalera en

$$\eta(\epsilon) = \epsilon + \tilde{\eta}(\epsilon). \tag{2.13}$$

De esta manera obtenemos los niveles de energía ϵ_α desdoblados, donde la densidad de estados es unitaria sobre todo el espectro, permitiendo así realizar un estudio estadístico de estos para tener la información sin importar las peculiaridades del sistema.

2.1.4 Espectro de potencias

Se presenta el principal enfoque de esta tesis, donde vamos a tratar al espectro energético de un sistema como una serie de tiempo. De esta manera se realiza una caracterización del régimen localizado o extendido en que se encuentra el sistema, mediante el estudio de su espectro de potencias.

Es importante definir una serie de tiempo como una colección de datos sucesivos. Para realizar este análisis, empezamos definendo las δ_n como la suma de las diferencias entre los espaciamientos s_α y su valor medio $\langle s \rangle = \Delta$. Esta cantidad representa la desviación de la energía desdoblada de su valor medio n [34].

$$\delta_n = \sum_{\alpha=1}^{n} (s_\alpha - \Delta) = \epsilon_{n+1} - \epsilon_1 - n, \qquad \text{con} \qquad n \in \{1, 2, \ldots, N-1\} \tag{2.14}$$

$$\Delta = \frac{1}{N-1}\sum_{\alpha=1}^{N-1} s_\alpha. \tag{2.15}$$

En la Ref. [34] se aplica un enfoque de series de tiempo para análizar el espectro energético de los ensambles gaussianos. Para familiarizarnos con el concepto, veamos un ejemplo, en la Fig. 2.3 se compara una serie de tiempo obtenida a partir de una serie cuasiperiódica [ver Ec. (2.16)], con otra que muestra δ_n para los eigenvalores del ensamble GOE.

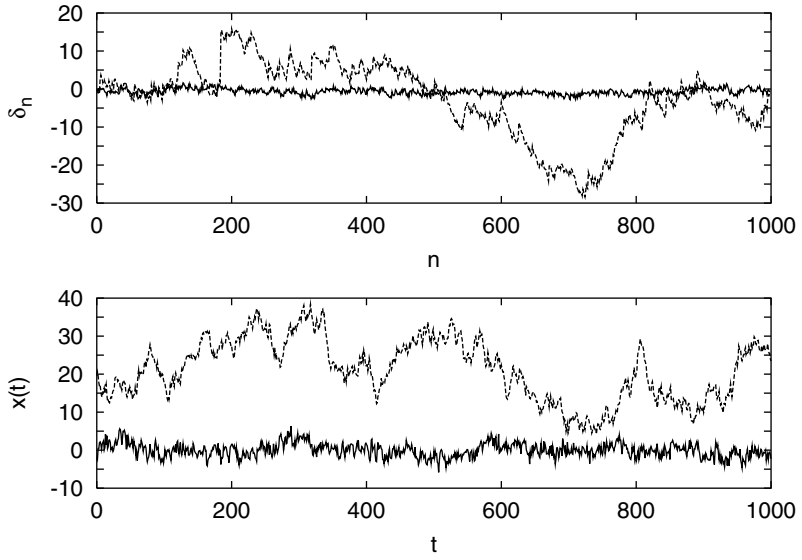

Figura 2.3: (Panel superior) Se muestran dos series de tiempo discretas una correspondiente a los espaciamientos δ_n para el ensamble GOE (línea sólida) y serie de tiempo para el ensamble diagonal (línea punteada). (Panel inferior) se muestra una serie de tiempo continua generada a partir de una función cuasiperiódica. Imagen tomada de la Ref. [34].

Para generar las curvas del panel inferior de la Fig. 2.3 se calculan M valores para una serie periódica $x(t)$ con intervalos igualmente espaciados de tiempo $t_i = i\Delta t$, resultando un periodo temporal total de $T = M\Delta t$.

$$x_i = x(t) = \sum_{k=1}^{M/2} \sqrt{P(\omega_k)\Delta\omega}\cos\omega_k t_i + \phi_k \qquad \text{con} \quad 1 \leq i \leq M, \tag{2.16}$$

donde $\omega_k = k\Delta\omega$ son múltiplos de la frecuencia más baja $\Delta\omega = 2\pi/T$. Además, la fase aleatoria $\phi \in [0, 2\pi]$ es la única fuente de fluctuación.

De la Fig. 2.3, notamos que se compara la serie de tiempo de los espaciamientos entre niveles de energía de GOE y el ensamble diagonal, con la serie de tiempo continua obtenida a partir de una función con fase aleatoria.

El siguiente paso para calcular el espectro de potencias consiste en calcular la transformada de Fourier de δ_n,

$$\tilde{\delta}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_n \exp\left(-i\frac{2\pi kn}{N}\right). \tag{2.17}$$

Una vez obtenida esta transformada, el espectro de potencias se obtiene mediante el cuadrado del valor absoluto de la transformada de Fourier anterior,

$$P_k = \left|\tilde{\delta}_k\right|^2. \tag{2.18}$$

En los casos de estadística tipo GOE y Poisson, existen expresiones teóricas para el espectro de potencias [35],

$$\langle P_k \rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)}, & \text{Poisson.} \\ \dfrac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)} - \dfrac{1}{12} + \dfrac{N^2}{4\pi^2}\left[\dfrac{K_{\mathrm{GOE}}(\frac{k}{N})-1}{k^2} + \dfrac{K_{\mathrm{GOE}}(1-\frac{k}{N})-1}{(N-k)^2}\right], & \text{GOE.} \end{cases} \tag{2.19}$$

A $K_{\mathrm{GOE}}(x)$ de la Ec. (2.19) se le conoce como factor de forma espectral de dos niveles y está dado por

$$K_{\mathrm{GOE}}(x) = \begin{cases} 2x - x\log(1+2x), & \text{si} \quad x < 1, \\ 2 - x\log\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right), & \text{si} \quad x \geq 1, \end{cases} \tag{2.20}$$

En el límite $k \gg 1$, las expresiones dadas en la Ec. (2.19) se reducen a

$$\langle P_k \rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{k^2}, & \text{Poisson} \\ \dfrac{1}{k}, & \text{GOE} \end{cases} \tag{2.21}$$

Los decaimientos $1/k^2$ y $1/k$ están asociados respectivamente con ruido café y ruido rosa [34].

2.1.5 Razón inversa de participación

La razón inversa de participación (IPR, por sus siglas en inglés), es una medida que cuantifica el grado de localización o extensión de un estado en una base determinada

mediante consideraciones relativas al problema. En este caso, dado que estamos interesados en estudiar localización, trabajaremos en la base de sitios. La IPR es una cantidad que contiene información acerca de la estructura de los estados propios del sistema.

Matemáticamente un estado $|\psi_\alpha\rangle$ se representa como una combinación lineal de los vectores de la base de sitios $|n\rangle$ como

$$|\psi_\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{N} |n\rangle \langle n|\psi_\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{N} C_\alpha^n |n\rangle , \tag{2.22}$$

donde las componentes C_α^n son las proyecciones del estado en la base, con N como el número total de sitios. Teniendo dichas proyecciones, entonces la IPR para el α-ésimo estado se define de la siguiente manera

$$\mathrm{IPR}_\alpha = \sum_{n=1}^{N} |C_\alpha^n|^4 \tag{2.23}$$

Retomando los ejemplos de estados extendidos y localizados asociados a las Figs. 2.1 y 2.2, podemos también calcular su IPR, de esta forma sabemos cuántas componentes de la base participan en la composición de este estado, obteniendo IPR $= 0.01823$ para el estado extendido, la IPR es proporcional a $\dfrac{1}{100}$, mientras que la IPR para el estado localizado es IPR $= 0.509$. Finalmente concluimos que en estados extendidos la IPR $\propto \dfrac{1}{N}$, lo que implica que un gran número de estados de la base contribuyen a la estructura del estado en cuestión. En otras palabras, la probabilidad de encontrar a la partícula en cualquier sitio de la cadena es finita. Mientras que para estados localizados la IPR es $\mathcal{O}(1)$, lo que implica que solo unos cuantos estados de la base contribuyen a la estructura del estado. En términos del electrón esto implica que la probabilidad de encontrar al electrón es finita solamente en una región específica de la cadena. Para un estado completamente localizado la IPR $= 1$.

2.1.6 Distribución de Porter-Thomas

Ya se han descrito las distribuciones que predicen el comportamiento de los valores propios de energía para un sistema con estados extendidos o localizados, otro aspecto importante en la RMT y el caos cuántico es estudiar el comportamiento de las componentes de sus estados propios.

En esta sección se presenta la distribución de Porter-Thomas que fue desarrollada en el contexto de física nuclear. En la Ref. [57] muestran una distribución que predice

la probabilidad de que una partícula reaccione con el núcleo de otra de manera específica, mediante un enfoque estadístico se describen las fluctuaciones de los anchos de resonancia en reacciones nucleares. Estos anchos de reacción pueden interpretarse como probabilidades de transición entre dos estados diferentes del sistema de reacción. En dicho trabajo estudian los anchos reducidos de las resonancias de reacción de los neutrones, estos son una medida de la fuerza de un estado para la emisión de nucleones de ondas. Haciendo uso de procedimientos estadísticos se obtiene finalmente la distribución de Porter-Thomas dada por

$$P(x) = \left(\frac{N}{2\pi x}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{Nx^2}{2}\right). \tag{2.24}$$

A pesar de que el origen de esta distribución se desarrolló en el contexto de física nuclear, por su parte, en la Ref. [15] se utiliza en el contexto de matrices aleatorias y una predicción importante es que el comportamiento de las componentes de los estados propios del ensamble GOE fluctúan de acuerdo con la distribución dada por la Ec. (2.24). Para el estudio estadístico de las componentes de estados propios de un sistema consideramos $x = |C_\alpha^n|^2$.

Debido a que las componentes x son cantidades muy pequeñas, vamos a trabajar con su logaritmo, esto ayuda a tener mayor resolución. De acuerdo con el teorema de transformación para variables aleatorias,

$$f_y = f_x[g^{-1}(y)] \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|. \tag{2.25}$$

Si $y = g(x) = \ln x$, evaluamos la Ec. (2.25) con $g^{-1}(y) = e^y$. Entonces la función de distribución toma la forma

$$P(y) = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{y - N\exp(y)}{2}\right], \qquad y = \ln x. \tag{2.26}$$

Cuando las componentes de los estados propios de un cierto sistema se distribuyen de acuerdo a la Ec. (2.26) se dice que estos estados se comportan como los estados propios de matrices del GOE, esto es, las componentes se consideran variables aleatorias no correlacionadas. Este comportamiento es típico de extados extendidos, mientras que para estados localizados la distribución es diferente y su forma depende del estado en cuestión.

En las siguientes dos secciones se introducen los ensambles diagonal y gaussiano ortogonal de la RMT. Así como también se presentan resultados de las cantidades recientemente definidas para estos ensambles.

2.2 Ensamble Diagonal

El ensamble diagonal (DE, por sus siglas en inglés), a pesar de que no es uno de los ensambles clásicos de la RMT, se usa como una referencia para comparar con sistemas cuánticos en su fase localizada.

Los elementos de este ensamble son matrices cuadradas de tamaño $N \times N$. Contienen elementos distintos de cero solamente en la diagonal, mientras que los elementos fuera de la diagonal son cero; estos elementos $\{E_i\}$ son números aleatorios que siguien una distribución gaussiana. Los elementos de las matrices del DE están dados mediante

$$H_{ij} = E_i \delta_{ij}, \qquad \text{con} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.27}$$

donde δ_{ij} es una delta de Kronecker que toma valor de 1 para elementos sobre la diagonal mientras que fuera de la diagonal son valores nulos. El DE no se trata propiamente de un sistema físico realista, pero las propiedades que describe son de utilidad para compararlas con los modelos físicos que estudiaremos.

En esta sección se hace un repaso de las cantidades enunciadas en secciones anteriores, pero aplicadas a este ensamble, de esta manera, nos es útil corroborar que el código que implementamos para el cálculo de las cantidades esté funcionando correctamente, puesto que son cantidades con resultados ya conocidos. Al mismo tiempo que nos servirán de referencia para el caso en que el sistema a estudiar esté en una fase localizada. Presentamos un ensamble de matrices con tamaño $N = 1500$. La construcción de las matrices es sencilla.

2.2.1 Densidad de estados

Como se expuso anteriormente, estudiar la densidad de estados nos permite visualizar de qué manera están distribuidas las energías del sistema o los estados propios de un sistema. Las energías para este ensamble se van a distribuir de manera guassiana. Sin embargo, realizar este ejercicio nos sirve como preparación para más adelante ver la distribución de energías de los modelos a estudiar.

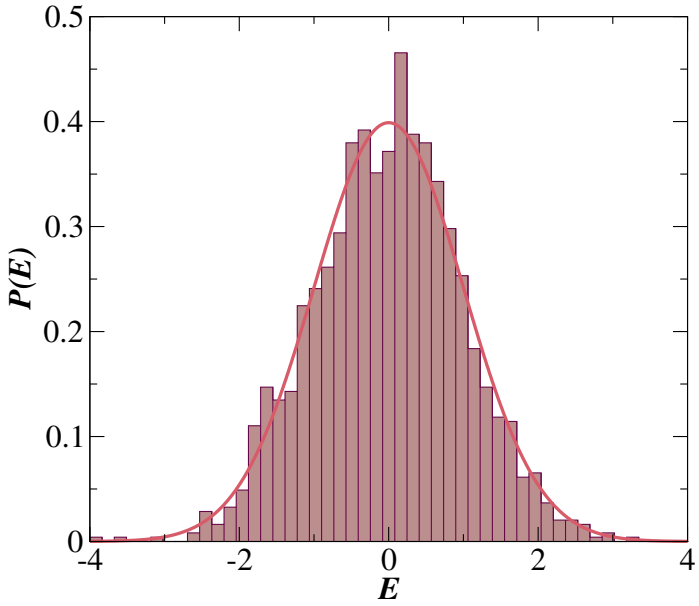

Figura 2.4: Densidad de estados para el DE. El histograma muestra la distribución de energía de una matriz cuadrada diagonal para $N = 1500$. La curva sólida muestra una distribución gaussiana.

En la figura 2.4 se muestra la densidad de estados para el ensamble diagonal, en el eje vertical se presenta la frecuencia con que aparecen las distintas energías, mientras que, en el eje horizontal aparecen las energías. Vemos que el histograma muestra un comportamiento gaussiano, como era de esperarse. Los segmentos en color café corresponden a los valores numéricos, la curva sólida corresponde a la distribución gaussiana

$$P(E)_G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-E^2/2\right).$$

Para fines prácticos, usamos un tamaño de muestra pequeño, sin embargo, la estadística se describe muy bien. Aumentar el tamaño de la muestra tendría el efecto de suavizar las fluctuaciones alrededor de la distribución gaussiana.

2.2.2 Distribución de espaciamientos

En la figura 2.5 se muestra el histograma correspondiente a la distribución de los espaciamientos entre los números aleatorios adyacentes (niveles energéticos) del ensamble diagonal. Se observa que efectivamente se sigue una distribución del tipo Poisson, como se predice en la Ref. [25].

Algo interesante de notar es que cuando $s \to 0$, la probabilidad de que dos niveles de energía tengan el mismo valor es 1, algo que no ocurre para sistemas caóticos. Es decir, los niveles energéticos de sistemas integrables pueden cruzarse, existen degeneraciones.

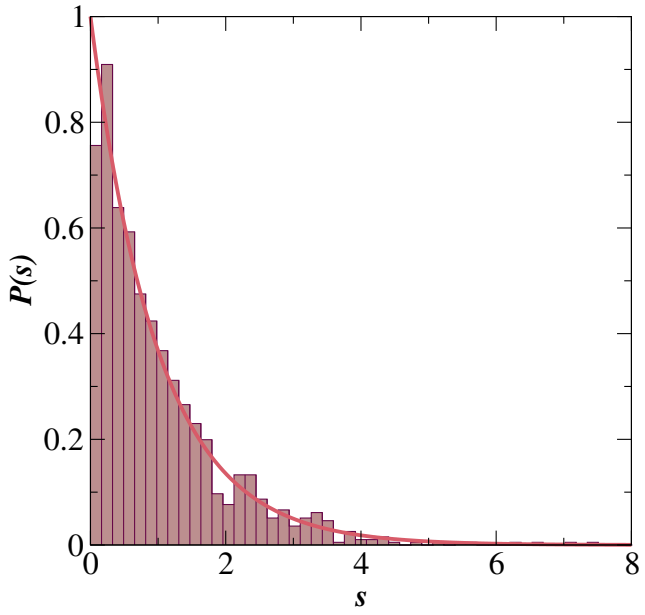

Figura 2.5: Se muestra la distribución de espaciamientos consecutivos para el ensamble diagonal. Se considera $N = 1500$. La curva sólida en rojo corresponde a la Ec. (2.9).

2.2.3 Espectro de potencias

Se calcula el espectro de potencias para el ensamble diagonal. En la Fig. 2.6 se muestran los resultados para matrices de tamaño 1500×1500 y para un promedio sobre $1,000$ elementos del DE.

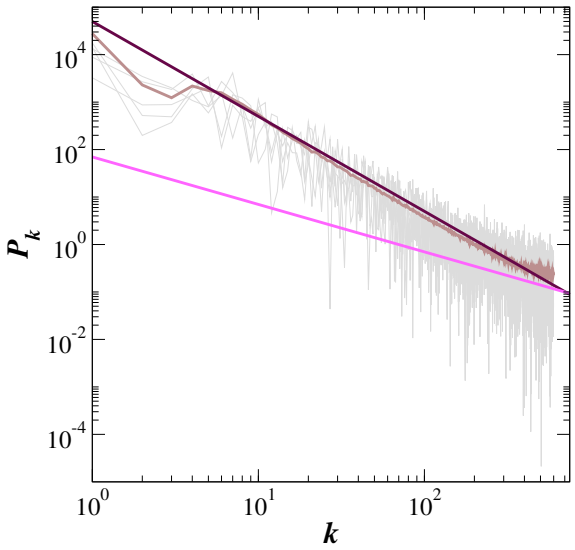

Figura 2.6: Espectro de potencias para el ensamble diagonal. Las curvas grises muestran realizaciones individuales del espectro de potencias, la curva rosa muestra un decaimiento como $1/k$, la curva marrón describe el decaimiento $1/k^2$, la curva café muestra el promedio sobre 1000 realizaciones.

Como se predice, vemos que el espectro mostrado sufre un decaimiento como ley de potencias de $1/k^2$ propio de sistemas con dinámica integrable o en una fase localizada. Las realizaciones individuales (curvas grises) muestran que hay muchas fluctuaciones y unas pocas realizaciones no permiten observar con claridad el comportamiento del espectro de potencias, por esta razón se calcula el promedio del espectro de potencias (curva café).

Para el ensamble diagonal no se realiza el análisis de la estructura y estadística de los estados propios del sistema, tal como la IPR y la distribución de Porter-Thomas. Esto debido a que en este ensamble estamos tratando con el caso de estados totalmente localizados, es decir, solamente una componente es distinta de cero, resultando una IPR $=$ 1. Por otro lado, para la distribución de Porter-Thomas, al realizar la sumatoria de las componentes y obtener el logaritmo natural obtenemos $\ln 1 = 0$, por lo cual no es posible obtener dicha distribución.

2.3 Ensamble Gaussiano Ortogonal

Por sus siglas en inglés GOE, a este ensamble lo componen matrices cuadradas simétricas completamente llenas de números aleatorios reales con una distribución gaussiana. Además, estas matrices son invariantes bajo transformaciones ortogonales. Representamos una matriz de GOE cuyos elementos H_{ij} con media cero y varianza de acuerdo a

$$\langle H_{ij}^2 \rangle = \begin{cases} 1, & \text{para} \quad i = j \\ 1/2, & \text{para} \quad i \neq j \end{cases} \tag{2.28}$$

En la práctica, las matrices de este ensamble se pueden construir a partir de la suma entre una matriz aleatoria y su matriz transpuesta, dividida entre dos.

Este ensamble es uno de los ensambles gaussianos que se introdujeron como una idealización matemática [18] y que en sí mismo no describe ningún sistema físico, pero podría entenderse como la representación de un sistema en el que todas las partículas interactúan de manera simultánea.

En 1984, Bohigas, Giannoni y Schmit establecieron su famosa conjetura [26], esta establece que el espectro energético de sistemas con simetría de reversibilidad temporal muestran las mismas propiedades de fluctuación predichas para GOE. Esta conjetura nos permite usar este ensamble para compararlo con el modelo de Aubry-André, pues cuenta con esta simetría. A continuación se muestran las cantidades estudiadas para GOE, que sirven para estudiar la fase caótica de los modelos de interés.

2.3.1 Densidad de estados

Esta cantidad nos permite visualizar la manera en que los niveles de energía están distribuidos. El ensamble GOE obedece un comportamiento descrito por la ley del semicírculo de Wigner

$$P(E) = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{con} - r \leq x < r \tag{2.29}$$

siendo r el radio del semicírculo. Se muestra en Ref. [54] la derivación teórica.

En la Fig. 2.7 se presenta el histograma de las energías para GOE. Como era de esperarse, hay una buena correspondencia con la ley del semicírculo de Wigner.

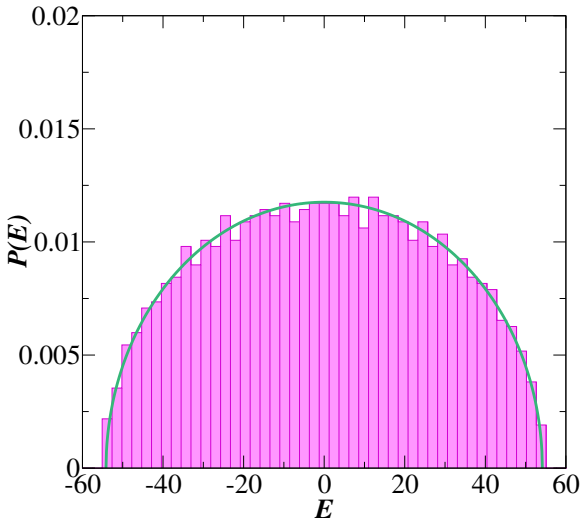

Figura 2.7: Se muestra la densidad de estados de una matriz de GOE. Para un tamaño $N = 1500$. La curva verde corresponde a la ley del semicírculo dada por la Ec. (2.29).

2.3.2 Distribución de espaciamientos

En la Fig. 2.8 se muestra esta distribución para una matriz del ensamble GOE. Algo interesante que ocurre es que conforme $s \to 0$ el crecimiento lineal de la curva para

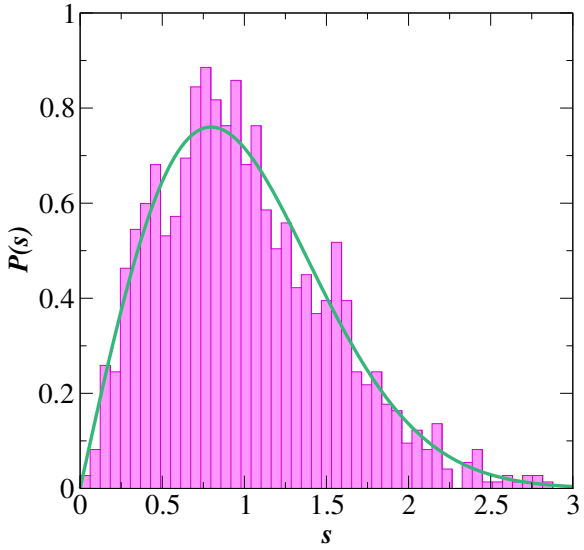

Figura 2.8: Se muestra la distribución de espaciamientos consecutivos para una matriz de GOE. La curva verde corresponde a la Ec. (2.10). y el histograma muestra los resultados numéricos. Para $N = 1500$.

espaciamientos pequeños describe el efecto de la repulsión entre niveles, es decir, la probabilidad de encontrar dos niveles energéticos con el mismo valor o muy cercanos decrece de manera lineal con s, en particular $P_{WD}(0) = 0$. También se dice que los niveles están correlacionados. A este fenómeno se le conoce como repulsión lineal entre niveles energéticos adyacentes y esto es un distintivo típico de los sistemas cuánticos caóticos que poseen simetría de reversibilidad temporal.

2.3.3 Espectro de potencias

Como se describió en secciones anteriores, el espectro de potencias se ha estudiado en un contexto de RMT. Por lo anterior, calculamos dicho espectro para GOE con matrices de tamaño 1500×1500. En la Fig. 2.9 se muestra el espectro de potencias para matrices

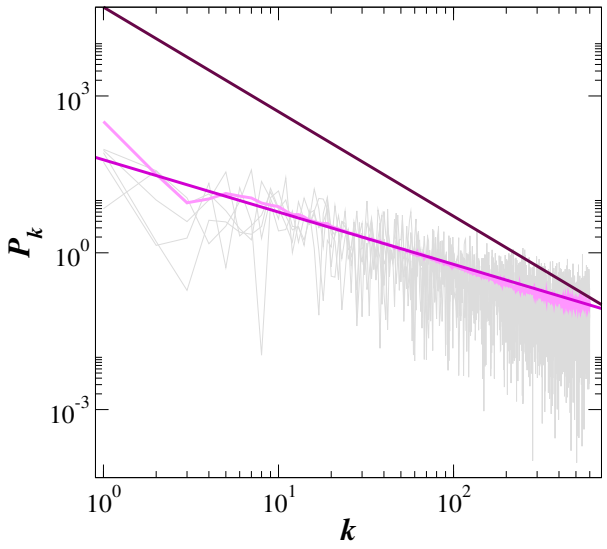

Figura 2.9: Se muestra el espectro de potencias para matrices de GOE. La curva rosa oscura corresponde al decaimiento $1/k$ propio del ruido rosa, la curva café representa el decaimiento $1/k^2$. Las curvas grises muestran realizaciones individuales para el espectro de potencias, la curva rosa claro muestra el promedio para 1000 realizaciones. El tamaño de las matrices es $N = 1500$.

del ensamble GOE. Se observa un decaimiento como ley de potencias de $1/k$, propio de un sistema con estados extendidos o bien que sigue una dinámica caótica.

Esta técnica, exige tener un promedio suficientemente grande, puesto que las realizaciones individuales no muestran mucha precisión con lo que se quiere mostrar.

2.3.4 Distribución de Porter-Thomas

En la Fig. 2.10 se muestra un histograma con la distribución del logaritmo de las componenetes $|C_\alpha^n|^2$ de los estados propios para un estado $|\psi_\alpha\rangle$. Por su parte la curva verde describe la distribución de Porter-Thomas, dada la ecuación de manera analítica para un tamaño $N = 1500$. Notamos que el histograma se ajusta muy bien a la curva

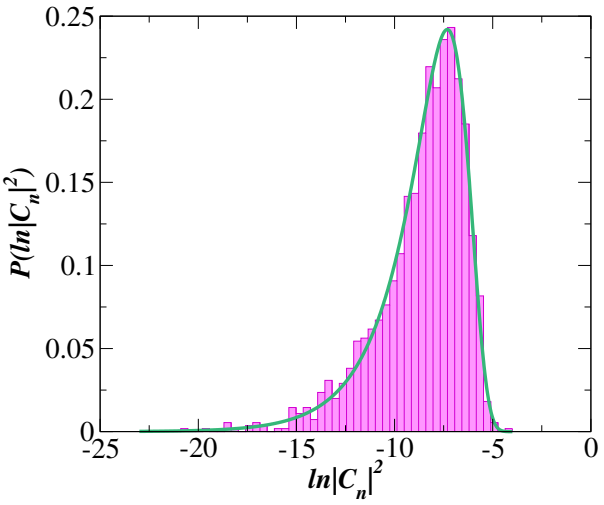

Figura 2.10: Se muestra la distribución de Porter-Thomas para una matriz de GOE de tamaño $N = 1500$.

teórica correspondiente a la distribución de Porter-Thomas. A pesar de que hay ligeras fluctuaciones, con más muestras estadísticas esas fluctuaciones se reducen. Además, en la Ref. [15] se predice que las fluctuaciones de las componentes de los estados propios de un ensamble GOE siguen una distribución de Porter-Thomas. Esta cantidad nos servirá para trabajar con los modelos físicos que estudiaremos.

Capítulo 3

Modelo de Aubry-André sin interacciones

El primer modelo físico que estudiamos es el de un sistema de partículas de espín 1/2. Cada partícula está colocada en cada uno de los L sitios de una cadena unidimensional, en el cual se aplica un potencial quasi-periódico dependiente del sitio en dirección z. A continuación se muestra el hamiltoniano que describe este modelo

$$H = \sum_{k=1}^{L} (S_k^x S_{k+1}^x + S_k^y S_{k+1}^y) + 2 \sum_{k=1}^{L} h_k S_k^z, \tag{3.1}$$

con $S_k^{x,y,z} = \hbar \sigma_k^{x,y,z}/2$ como operadores de espín 1/2 actuando sobre el espín ubicado en el k-ésimo sitio, escritos en términos de las matrices de Pauli $\sigma_k^{x,y,z}$. En la Ec. (3.1) se consideran condiciones de frontera periódicas, $S_{L+1}^{x,y} = S_1^{x,y}$, para evitar posibles efectos de borde. Trabajaremos en unidades en las que $\hbar = 1$.

La primera sumatoria en la Ec. (3.1) toma en cuenta acoplamientos entre primeros vecinos y representa el potencial local sobre cada sitio. El parámetro h_k está dador por

$$h_k = h \cos(2\pi\beta k + \phi), \tag{3.2}$$

con h como la amplitud del potencial, $1/\beta$ el periodo y ϕ una fase arbitraria que no modifica el espectro de energía del sistema, lo que sin pérdida de generalidad nos permite considerar $\phi = 0$. Aunque en el caso particular del espectro de potencias consideraremos a ϕ como una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 2\pi]$. Lo anterior con el propósito de realizar un promedio y suavizar las curvas. Está forma de potencial fue

introducida por Harper [43]. El modelo representado por el hamiltoniano dado por la Ec. (3.1) fue estudiado por Aubry y André [14] para mostrar teóricamente la existencia de localización de Anderson en redes inconmensurables. El modelo ha sido estudiado también en un contexto matemático, en el cual se le conoce como operador *almost-Mathieu*. Por estas razones al modelo se le conoce también como modelo almost-Mathieu-Harper-Aubry-André. En este trabajo, por simplicidad, lo llamaremos modelo de Aubry-André (modelo AA).

El potencial de Harper tiene la peculiaridad de que para β diofantino [58], el modelo AA presenta una transición metal-aislante [14, 59]. En específico, el sistema está en una fase extendida para $h < 1$, mientras que se encuentra en una fase localizada para $h > 1$, de manera que el punto crítico se encuentra en $h = 1$. Se ilustran las fases por las cuales pasa el sistema y su respectivo valor de amplitud de potencial de Harper h en la Fig. 3.1. Cabe señalar que el valor del punto crítico se puede determinar mediante la dualidad que el modelo AA posee entre una representación en la base de sitios (espacio real) y otra en la representación de momentos (espacio de Fourier).

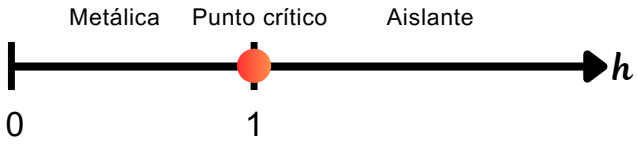

Figura 3.1: Esquema de la transición metal-aislante en el modelo de Aubry-André sin interacciones.

En la literatura se suele usar $\beta = (\sqrt{5} - 1)/2$, que se conoce como el recíproco de la razón dorada y es un número irracional que, en particular, puede ser aproximado mediante el cociente entre dos números adyacentes de la serie de Fibonacci, dividiendo el mayor entre el menor, por ejemplo 2584/1597. En este trabajo usamos el mismo valor fijo de β, sin embargo, es interesante notar que el espectro de energía como función de la magnitud del parámetro β muestra estructuras muy ricas tanto en regímenes localizados como en regímenes extendidos. Particularmente, para el valor crítico de h el espectro de energía despliega un patrón que se conoce como la mariposa de Hofstadter [60], este patrón atestigua el carácter multifractal del espectro energético del sistema. Además, los estados propios de energía también muestran un comportamiento crítico [61]. Debido a la

inconmensurabilidad del periodo β, las propiedades del sistema son diferentes a aquellas de sistemas desordenados y sistemas con simetría de traslación [62].

La dimensión del espacio de Hilbert para una cadena con L partículas con espín $1/2$ es $\mathcal{N} = 2^L$. Sin embargo, el hamiltoniano conmuta con el operador que representa la magnetización total en la dirección z, $[H, \mathcal{S}^z] = 0$, donde el operador $\mathcal{S}^z$ está dado por

$$\mathcal{S}^z = \sum_{k=1}^{L} S_k^z = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L} \sigma_k^z. \tag{3.3}$$

Esto provoca que la matriz hamiltoniana tenga una estructura diagonal en bloques, con $L + 1$ bloques independientes, cada uno correspondiente a un valor específico de la magnetización $\mathcal{S}^z$ y siendo $\mathcal{N}_{L,u} = L!/u!(L-u)!$ la dimensión del espacio de cada bloque, donde u representa al número de espines apuntando hacia arriba.

La representación matricial del hamiltoniano (3.1) se escribe en la base formada por los estados propios de S^z, que son estados de muchos cuerpos y se pueden escribir como productos tensoriales de estados de un solo cuerpo, particularmente se consideran estados con dos posibles niveles energéticos.

Veamos un ejemplo para un sistema con 4 espines, $L = 4$, donde la dimensión del espacio de Hilbert es $\mathcal{N}_4 = 16$ y los estados de la base son

$$|\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\,, \quad |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle\, |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle\,, \quad |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\,, \ldots. \tag{3.4}$$

Mientras que los estados del subespacio con valor de magnetización $\mathcal{S}^z = 0$ son

$$|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle\,, \quad |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\,, \quad |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle\,, \quad |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\,, \quad |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle \quad \text{y} \quad |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\,. \tag{3.5}$$

Por lo que, la dimensión de este subespacio es $\mathcal{N}_{4,2} = 6$, con $L = 4$ y $u = 2$. De aquí en adelante usaremos por simplicidad $\mathcal{N}$ que denota la dimensión del espacio de Hilbert, ya sea completo o el subespacio con $u = L/2$, con L par.

La importancia de utilizar un subespacio con un valor específico de la magnetización radica en que, si bien es posible reproducir analíticamente el hamiltoniano (3.1) para un número pequeño de partículas, al momento de realizar estadística se requiere alcanzar tamaños más grandes del sistema que de manera analítica resulta imposible, por lo que es necesario recurrir a métodos computacionales para abordar este trabajo. Restringirnos a un subespacio de simetría es útil porque se reducen considerablemente los tamaños de las matrices a tratar. Por ejemplo, si consideramos un sistema con $L = 12$ partículas, la dimensión

del espacio de Hilbert completo es $\mathcal{N} = 2^{12} = 4096$, mientras que en el subespacio $\mathcal{S}^z = 0$, la dimensión se reduce considerablemente, $\mathcal{N} = 924$. Si consideramos un sistema con $L = 16$ partículas, la dimensión del espacio de Hilbert completo es $\mathcal{N} = 2^{16} = 65536$, mientras que en el subespacio $\mathcal{S}^z = 0$, la dimensión se reduce considerablemente, $\mathcal{N} = 12870$.

Así, en este trabajo estamos acotados al subespacio con $\mathcal{S}^z = 0$, ya que es el que tiene la dimensión más grande $\mathcal{N}_{L,L/2} = L!/(L/2)!^2$ y está constituido por estados con la mitad de espines apuntando hacia arriba y la mitad hacia abajo, a esto se le conoce también como *half-filling*.

Reproducimos la matriz hamiltoniana de manera analítica para un sistema con $L = 4$ partículas, como se muestra en la Fig. 3.2, la matriz resultante es de 16×16 y presenta una estructura en bloques, cada uno correspondientes a un valor de magnetización.

Del cálculo analítico observamos que en la representación de los estados propios de S^z, los elementos fuera de la diagonal están dados por los términos en x y y, correspondientes a la primera sumatoria en la Ec. (3.1). Por la forma en la que este actúa sobre los estados de la base se conoce como término de *flip-flop* pues intercambia la orientación cuando hay dos espínes adyacentes con direcciones opuestas, lo que implica que se acoplen solamente estados cuya orientación de espines adyacentes difiere.

$$(S_k^x S_{k+1}^x + S_k^y S_{k+1}^y) \left|\ldots \uparrow_k \downarrow_{k+1} \ldots\right\rangle = \frac{1}{2} \left|\ldots \downarrow_k \uparrow_{k+1} \ldots\right\rangle . \tag{3.6}$$

Por otro lado, los elementos de la diagonal están dados por el término en dirección z, que es el término de la segunda sumatoria en la Ec. (3.1). La forma que este actúa sobre los estados de la base es

$$S_k^z \left|\ldots \uparrow_k \downarrow_{k+1} \ldots\right\rangle = \frac{1}{2} \left|\ldots \uparrow_k \downarrow_{k+1} \ldots\right\rangle \text{ y } S_k^z \left|\ldots \downarrow_k \uparrow_{k+1} \ldots\right\rangle = -\frac{1}{2} \left|\ldots \downarrow_k \uparrow_{k+1} \ldots\right\rangle . \tag{3.7}$$

Se observa que este término deja invariantes los estados de la base, pero hace notoria la diferencia en energía entre un espín hacia arriba y uno hacia abajo.

Considerando la información anteriormente expuesta y mediante un lenguaje de programación apropiado (Python), se realiza la implementación numérica de la representación matricial del hamiltoniano (3.1), de esta manera es posible alcanzar un mayor tamaño del sistema. Asimismo obtenemos una mejor estadística para las cantidades estudiadas del modelo que se presentan en la siguientes secciones. Igulamente, se verifica que la matriz del código arroje resultados correctos, al comparar con la matriz analítica, de esta forma se tiene confianza en los resultados numéricos.

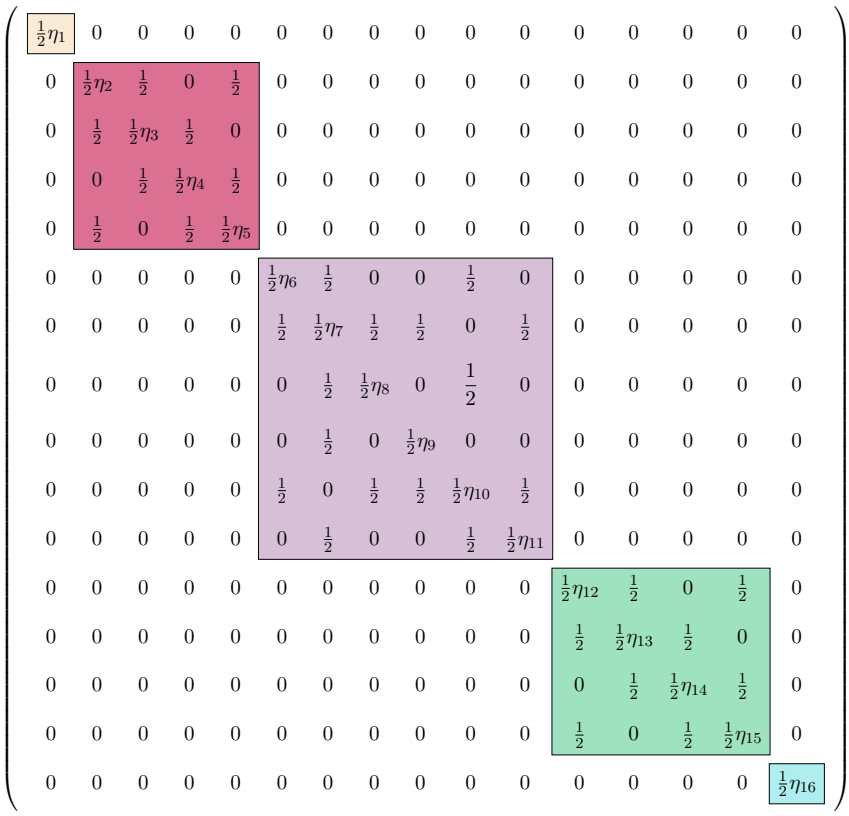

Figura 3.2: Matriz hamiltoniana del modelo de Aubry-André sin interacciones, Ec. (3.1). Está escrita en la base de estados propios de S^z, con un número de sitios $L = 4$. Cada bloque representa un sector de magnetización diferente. Sector con $\mathcal{S}^z = 2$ en amarillo, sector con $\mathcal{S}^z = 1$ en rosa, sector con $\mathcal{S}^z = 0$ en lila, sector con $\mathcal{S}^z = -1$ en verde y sector con $\mathcal{S}^z = -2$ en azul. Vemos que es una matriz rala, es decir, muchos de los elementos fuera de la diagonal son cero. Mientras que los elementos que están sobre la diagonal principal $\eta_{\mathcal{N}} = \sum_{i=1}^{L} h_i$ representan la sumatoria de las distintas h_i.

Los códigos computacionales con los que se obtuvieron los resultados de esta tesis están disponibles bajo petición explícita a la autora.

3.1 Resultados para el modelo AA sin interacciones

A continuación se presentan resultados de las cantidades descritas en el Capítulo 2, pero aplicadas al modelo de Aubry-André sin interacciones. Como ya se ha mencionado, tanto el modelo como las cantidades se implementaron numéricamente en un lenguaje de

computación adecuado. Los resultados que se presentan son para el mayor número de partículas que pudimos considerar bajo la limitación que establece el carácter finito de la memoria de las computadoras clásicas que fueron utilizadas, esto es, $L = 16$ en el subespacio con $\mathcal{S}^z = 0$, lo que implica matrices de tamaño $\mathcal{N} = 12870$.

3.1.1 Densidad de estados

Como se explicó en la Sección 2.1.1, la densidad de estados permite visualizar cómo están distribuidas las energías asociadas al sistema cuántico.

Realizamos los histogramas para un valor de la amplitud del potencial de Harper correspondiente a cada fase del sistema, se muestran en la Fig. 3.3. En el panel a) se presenta el histograma de las energías del sistema para un valor de $h = 0.2$, en esta figura vemos que el espectro de energías sigue una distribución gaussiana.

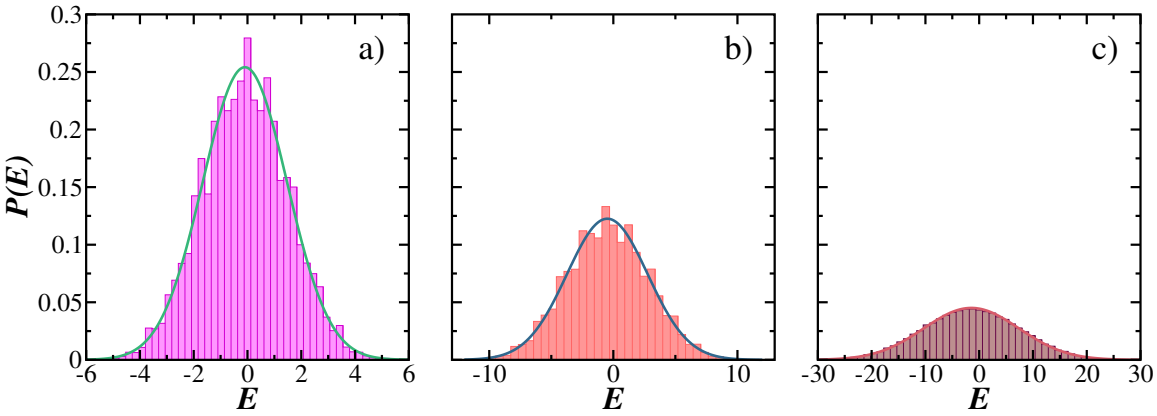

Figura 3.3: Se muestra la distribución de las energías para el modelo de Aubry-André sin interacciones. En el panel a) el histograma rosa considera un valor de $h = 0.2$, en b) se considera un valor $h = 1$ y en c) corresponde a $h = 3$. Para todos los casos, la curva teórica (línea continua) es una distribución gaussiana que presenta el ajuste a cada histograma. Para un tamaño de $L = 16$ en $\mathcal{S}^z = 0$.

En el panel b) se muestra la distribución de valores propios para $h = 1$, que corresponde al punto crítico o de transición del sistema. Se observa que la distribución también es gaussiana, pero con una desviación estándar mayor. Además se aprecia que el centro de la distribución se desplaza hacia la izquierda del cero.

Finalmente, en el panel c) se muestra la DoS de las energías en la fase localizada del sistema con un valor de $h = 3.0$. En la gráfica fácilmente se distingue una distribución gaussiana, aunque cabe mencionar que no es posible distinguir si la gráfica exhibe un estado

localizado o extendido, ya que la densidad de estados no proporciona propiamente esta información. Lo que sí es posible notar es que el rango de energías que toma el sistema conforme nos movemos de una fase extendida a una localizada va en aumento. Además el centro de la distribución aparece más desplazado hacia la izquierda del cero en comparación con los otros dos valores de h. Equivalentemente, el espectro se vuelve más negativo conforme h aumenta. Esto se puede explicar tomando en cuenta los términos en el hamiltoniano (3.1), cuando h es suficientemente grande, el potencial de Harper domina y la matriz hamiltoniana adquiere una forma predominantemente diagonal. Así los valores propios de hamiltoniano corresponden a los elementos diagonales.

Los ajustes en la Fig. 3.3 corresponden a una curva gaussiana para todos los casos. En la tabla 3.1 se muestran los valores referentes a la desviación estándar y media correspondientes a las curvas del ajuste.

Valor de h	Desviación estándar σ	Media μ
0.2	1.5722868	-0.097182493
1.0	3.2554824	-0.48591246
3.0	8.8496045	-1.4577374

Tabla 3.1: Se muestran los valores de desviación estándar y media de cada histograma mostrado en la Fig. 3.3.

De la tabla se confirma que cuando h aumenta, el ancho de la distribución también aumenta y su centro se desplaza más a la izquierda del cero. Efectos interesantes que pueden ser estudiados a profundidad, aunque su análisis detallado está fuera de los objetivos de está tesis.

3.1.2 Distribución de espaciamientos

En esta Sección se estudia la forma en que se distribuyen los espaciamientos consecutivos para el modelo que no considera interacciones. Para ello, una vez obtenido el espectro de energía previamente desdoblado, dicho procedimiento se explicó en la Sec. 2.1.3, se realiza el histograma.

Esta distribución ha sido estudiada para algunos modelos físicos, por ejemplo en la Ref. [28] se estudian los espaciamientos entre niveles energéticos para el modelo de Anderson. En ese trabajo se toman como referencia los límites de Poisson para la fase localizada y la distribución de Wigner-Dyson en la fase extendida. También en la Ref. [29] se extiende

dicho estudio para el modelo de Anderson en tres dimensiones.

Recientemente otra estadística más, cuya popularidad se ha incrementado, es la estadística que se basa en las razones entre espaciamientos consecutivos [63]. Este tratamiento presenta una ventaja, ya que no es necesario el proceso de desdoblamiento para revelar la universalidad de la estadística de los niveles energéticos.

En la Fig. 3.4, se muestra la $P(s)$ para el modelo de Aubry-André sin interacciones. Se divide en tres paneles, cada uno correspondiente con una fase del sistema determinada por el valor que se le asigna a h. En el panel a) con $h = 0.2$, se observa el histograma de los espaciamientos (rosa). Dado que para este valor de h el sistema se encuentra en una fase extendida, se podría esperar que la distribución de espaciamientos fuera del tipo Wigner-Dyson, sin embargo, se ajusta más a una exponencial.

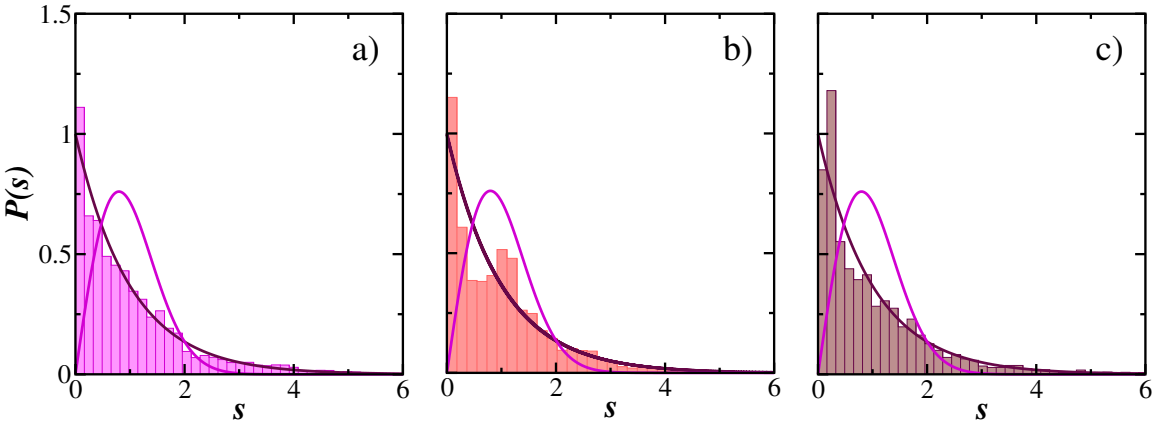

Figura 3.4: Se muestra la $P(s)$ para el modelo de Aubry-André sin interacciones en cada fase. En el panel a) el histograma rosa considera un valor de $h = 0.2$, en b) se considera un valor $h = 1$ y en c) corresponde a $h = 3$. Para todos los casos, se ponen dos curvas como referencia, la curva rosa es la distribución de Wigner-Dyson y la curva café es una exponencial. Con $\mathcal{N} = 12870$.

En todos los paneles se muestran las distributciones de Poisson (curva café) y de Wigner-Dyson (curva rosa). Observamos que en el panel b) para $h = 1$ el histograma de los espaciamientos (rojo) no coincide con ninguna de las dos distribuciones. Finalmente, en el panel c) donde se considera $h = 3$, el histograma café correspondiente a los valores numéricos para el modelo de Aubry-André obedece un comportamiento también parecido al de la distribución de Poisson. Concluimos que con esta distribuciíon no es posible detectar la transición de fase, por lo que debe considerarse otra estadística.

3.1.3 Espectro de potencias

Recordando las expresiones aproximadas para el ruido rosa y ruido café [Ec. (2.21)] que se presentaron en el capítulo de matrices aleatorias, vemos que estas aproximaciones resultan ser suficientemente buenas para diagnosticar cuando un sistema es caótico o integrable,

$$\langle P_k \rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{ruido rosa} \\ \dfrac{1}{k^2}, & \text{ruido café} \end{cases}$$

En los paneles de la Fig. 3.5, se muestra el espectro de potencias de los espaciamiientos entre niveles de energía para el modelo de Aubry-André sin interacciones, donde para todos los paneles, las curvas rosa y café representan los valores exactos descritos por la Ec. (2.20).

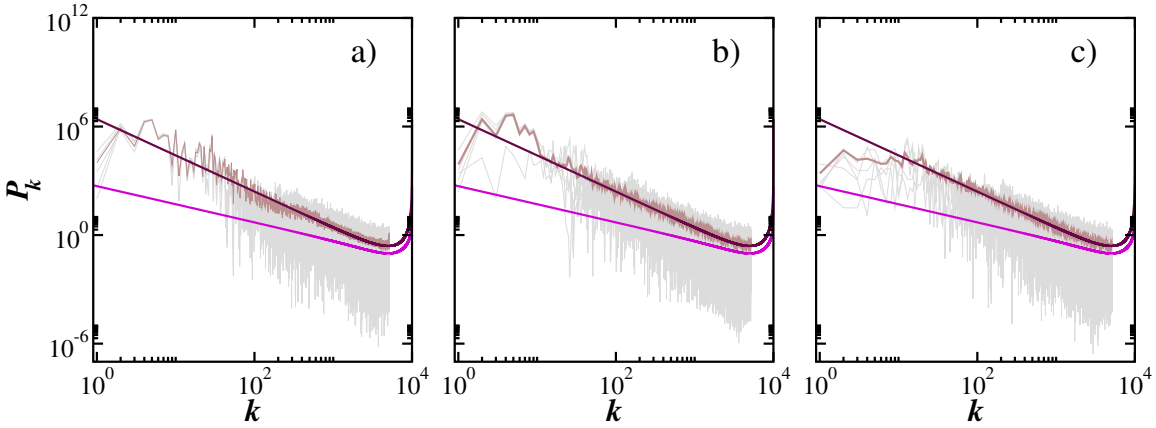

Figura 3.5: Se muestra el espectro de potencias para el caso del modelo de Aubry-André sin interacciones. De acuerdo al valor de la amplitud del potencial de Harper en a) $h = 0.2$, en b) $h = 1$ y en c) $h = 3$. Para todos los casos, las curvas grises muestran fluctuaciones de realizaciones individuales, mientras que las curvas en color café representa el promedio sobre 1000 realizaciones de la fase ϕ en el potencial de Harper. Por otro lado, las curvas rosa y café son las expresiones exactas dadas en la Ec. (2.19). Consideramos $L = 16$ con $\mathcal{N} = 12870$.

En el panel a) se muestra el espectro de potencias promedio para 1000 realizaciones, las curvas grises ilustran las fluctuaciones de realizacionnes individuales, mientras que la curva café muestra el promedio. Vemos que el promedio sigue un decaimiento del tipo $1/k^2$ y por lo tanto decimos que el espectro de potencias no detecta la fase extendida. En el panel b) se presenta el espectro de potencias para el punto crítico, vemos que el comportamiento es

prácticamente $1/k^2$, aunque recordemos que esta es una región de transición. En el panel c) se muestra el espectro de potencias promedio con la curva café, mientras que las curvas grises ilustran las fluctuaciones de realizaciones individuales. Vemos que el promedio también sigue un decaimiento del tipo $1/k^2$ o bien ruido café lo que indica una fase localizada.

Nuestros resultados sobre el espectro de potencias sugieren que las estadísticas basadas en los valores propios del sistema no son útiles para detectar la transición metal-aislante en el modelo de Aubry-André sin interacciones. En contraste, como se verá a continuación, las cantidades basadas en los estados propios, como el PR y la distribución de las componentes de tales estados, sí detectaron la transición.

3.1.4 Razón de participación

En la Sección 2.1.5 se presentó la definición de la IPR, y se mostró como una característica cuantificable del grado de extensión o localización de un estado en un sistema cuántico. En esta sección, se describe la razón de participación (PR, por sus siglas en inglés), esta cantidad es el inverso de la IPR e igualmente nos permite conocer el régimen en el que se encuentra el sistema cuántico a partir de las componentes de sus eigenestados. El PR de un estado $|\psi_\alpha\rangle$ se calcula mediante

$$\mathrm{PR}_\alpha = 1/\sum_{n=1}^{\mathcal{N}} |C_n^\alpha|^4, \quad \text{con} \quad C_n^\alpha = \langle n|\psi_\alpha\rangle. \tag{3.8}$$

Existen estimaciones teóricas de la PR asociadas al ensamble diagonal y al GOE Ec. (3.9). En el DE se considera un estado completamente localizado, es decir, solo una componente es la que predomina para la formación de dicho estado, por lo que la razón de participación es $\mathcal{O}(1)$. En teoría de matrices aleatorias todos los estados del ensamble GOE están extendidos independientemente de su energía. A continuación se dan los valores teóricos del PR en ambos casos,

$$\mathrm{PR}_\alpha = \begin{cases} \mathcal{O}(1), & \text{ED.} \\ \dfrac{\mathcal{N}+2}{3}, & \text{GOE.} \end{cases} \tag{3.9}$$

Para el modelo de Aubry-André sin interacciones obtenemos el conjunto completo de sus estados propios y calculamos el PR de todos estos estados. Normalizamos cada uno de los estados con el valor del PR para GOE dado en la Ec. (3.9). Esta normalización resulta útil para reconocer fácilmente qué tan extendidos son los estados del modelo AA sin interacciones

en comparación con los estados propios de matrices de GOE. Así PR $\to 0$ indica que el estado está localizado y PR $\to 1$ indica un estado extendido tanto como los estados propios de matrices de GOE.

La Fig. 3.6 se divide en tres paneles, cada uno muestra la PR para diferentes valores de h, estos valores corresponden a cada régimen del sistema, en a) $h = 0.2$ para la fase extendida, b) $h = 1$ para el punto crítico y finalmente en c) $h = 3.0$ para la fase localizada. En el eje vertical se presenta la PR normalizada de los estados propios (puntos) y el eje horizontal muestra los correspondientes valores propios de energía del modelo AA sin interacciones.

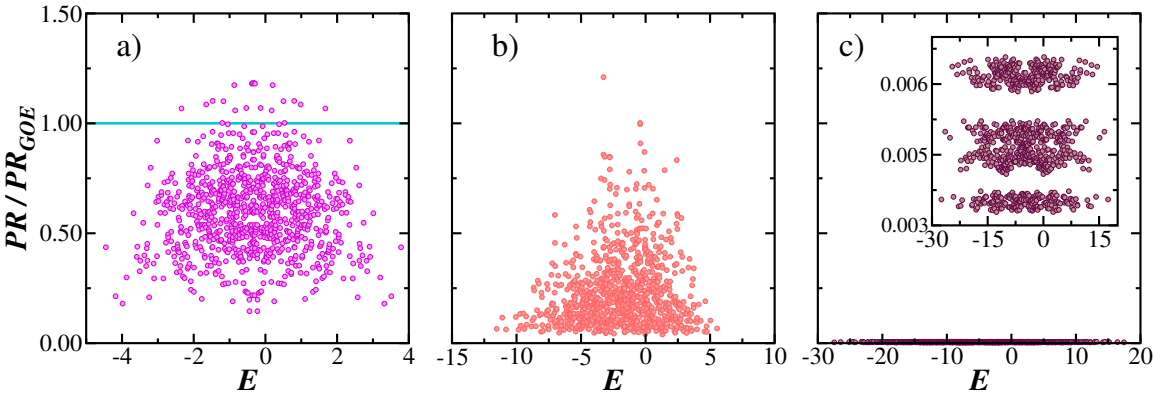

Figura 3.6: Se muestra la razón de participación respecto a la energía del sistema para el modelo de Aubry-André sin interacciones. Cada panel corresponde a una diferente fase del sistema, en a) se usa $h = 0.2$, en b) $h = 1$ y en c) $h = 3$, para $L = 16$ con $\mathcal{N} = 12870$.

En el panel a) la curva azul indica $PR/PR_{GOE} = 1$. Vemos que la PR de cada uno de los estados propios del hamiltoniano están dispersos por todo el espectro de energía pero la mayor concentración es en el centro del mismo. Además se muestran algunos por arriba de la curva azul, es decir, algunos estados están más extendidos que los estados de GOE. Si bien las contribuciones de los estados no es homogénea, muchos de ellos tienen PR con valores más próximos a 1 que a 0.

En el panel b), correspondiente al punto crítico o de transición del sistema, se muestra que los valores de la PR de los estados son mayoritariamente menores que 1, aunque algunos estados son extendidos.

Finalmente, en el panel c) se muestra la PR de los estados en la fase localizada del sistema. En la gráfica fácilmente se distingue que todos los estados tiene un valor de PR muy pequeño, mucho menor que 1. A simple vista los valores de PR parecen distribuirse

homogéneamente, sin embargo, en el *inset* de la gráfica vemos que a pesar de que estén cercanos al cero presentan una propia estructura en franjas; podemos concluir que la gráfica exhibe que los estados están localizados.

3.1.5 Distribución de Porter-Thomas

Otra cantidad que podemos calcular a partir de las componentes de las proyecciones de los eigenestados en una base es la distribución de Porter-Thomas. En la Sec. 2.1.6 se presentó esta distribución, ver Ec. (2.26).

Los resultados de Porter y Thomas fueron una contribución importante en el contexto de la física nuclear, sin embargo, se siguen extendiendo estudios que usan esta distribución para describir las fluctuaciones de energía en sistemas cuánticos complejos [64].

Para este análisis elegimos el estado cuya energía esté más cercana a cero, esto es, aquel estado con el correspondiente valor propio de energía con menor valor absoluto. En la Fig. 3.7 se muestran tres paneles, en cada uno de ellos se presenta la distribución del logaritmo de las componentes de dicho estado para valores de h tales que el sistema se encuentra en la fase metálica, punto crítico y fase aislante.

En el panel a), para $h = 0.2$, notamos una buena correspondencia del histograma con la expresión teórica para matrices de GOE [Ec. (2.26)]. Esto confirma que efectivamente se trata de un estado extendido, aunque el hecho de que la correspondencia no sea excelente

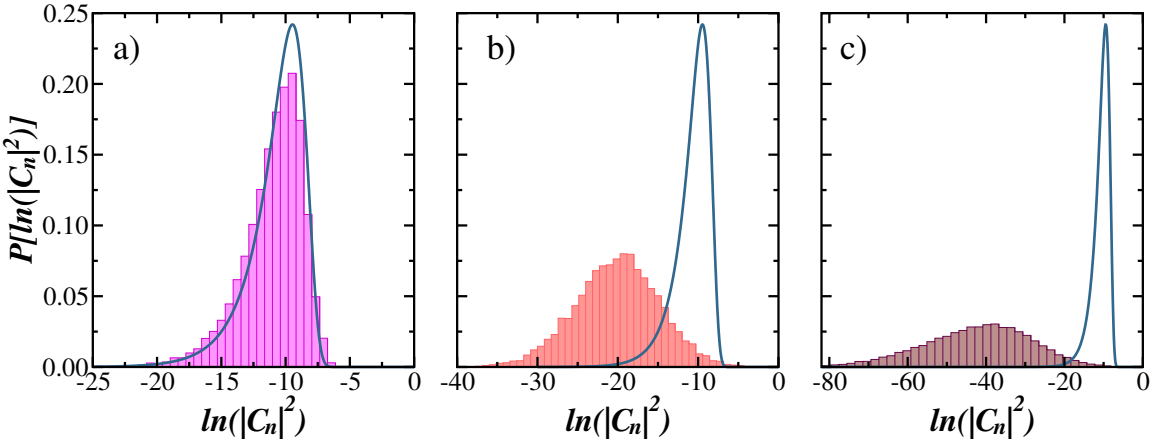

Figura 3.7: Se muestra la distribución del logaritmo de $|C_n|^2$ para el modelo de Aubry-André sin interacciones en cada fase correspondientes a diferentes valores de h. En el panel a) con $h = 0.2$, en b) con $h = 1$ y en c) corresponde a $h = 3$. La curva sólida azul describe la distribución de Porter-Thomas. Para $L = 16$ con $\mathcal{N} = 12870$.

puede indicar que este estado no se comporta del todo como aquellos estados propios de matrices de GOE. En los paneles b) para $h = 1$ y c) para $h = 3$ no existe correspondencia con la distribución de Porter-Thomas, por lo que descartamos que se trate de estados extendidos.

Capítulo 4

Modelo de Aubry-André con interacciones

Recordamos que el modelo de Aubry-André representa a un sistema de partículas con espín 1/2, donde cada una de ellas están colocadas en cada uno de los sitios de una cadena unidimensional con L sitios, las partículas están acopladas entre primeros vecinos y sujetas a un potencial de sitio en la dirección z.

Se presenta el hamiltoniano para el modelo con interacciones. Para introducir estas, incluimos el término de interacción entre primeros vecinos tipo Ising en la dirección z,

$$H = \sum_{k=1}^{L} (S_k^x S_{k+1}^x + S_k^y S_{k+1}^y + S_k^z S_{k+1}^z) + \sum_{k=1}^{L} h_k S_k^z. \tag{4.1}$$

Como ya se ha mencionado, los $S_k^{x,y,z} = \hbar \sigma_k^{x,y,z}/2$ son operadores de espín 1/2, escritos en términos de las matrices de Pauli $\sigma_k^{x,y,z}$. En la Ec. (4.1) se consideran condiciones de frontera periódicas, $S_{L+1}^{x,y,z} = S_1^{x,y,z}$.

En la representación matricial del hamiltoniano únicamente cambiarán los valores que están sobre la diagonal comparándolo con el modelo sin interacciones. El hamiltoniano (4.1) sigue conmutando con la magnetización total en dirección z, por lo tanto la estructura en bloques observada para el modelo sin interacciones se mantiene (ver Fig. 3.2 y la discusión al rededor de la misma). Así en este modelo seguimos trabajando en el subespacio con magnetización $\mathcal{S}^z = 0$.

Veremos cómo la inclusión de las interacciones entre partículas puede cambiar drásticamente las propiedades del sistema, esto será más evidente en el caso del espectro

energético.

A diferencia del modelo sin interacciones que presenta un solo punto crítico en $h = 1$, la presencia de interacciones produce una doble transición. Primero, una transición entre una fase con estados extendidos y una fase con estados extendidos pero no ergódicos en $h \sim 0.7$. Seguida de una transición de esta última fase a una fase localizada en $h \sim 1.7$, estos valores se tomaron de la Ref. [65]. Lo anterior está esquematizado en la Fig. 4.1.

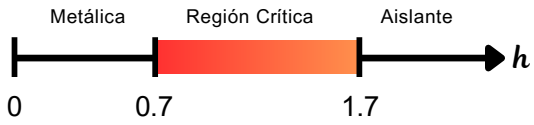

Figura 4.1: Fases del modelo de Aubry-André con interacciones.

Nos referimos a ergódico al hecho de que los estados llenan totalmente el espacio de Hilbert, sin embargo, cuando decimos que los estados son extendidos pero no ergódicos, es más bien que van a ocupar una fracción muy pequeña del espacio total.

En este capítulo se estudia al modelo con interacciones, estas interacciones se pueden explicar al momento de aplicar una transformación de Jordan-Wigner, donde los términos en la dirección x y y representan acoplamientos, mientras que aquellos en dirección z representan es un potencial sobre el k-ésimo sitio, mientras que el término de Ising en la dirección z corresponde al producto de operadores de número que es propio de interacciones entre partículas.

Como ya se mencionó anteriormente, un aspecto que provee de relevancia a los estudios sobre el modelo de Aubry-André reside en que es susceptible de ser estudiado en plataformas experimentales modernas, por ejemplo, en la Ref. [44] se usan redes ópticas para investigar la dinámica y evolución temporal del sistema, mientras que en la Ref. [45] se estudia el modelo en circuitos superconductores.

4.1 Resultados para el modelo AA con interacciones

Se muestran resultados para las cantidades que se han descrito en secciones anteriores, pero ahora aplicadas a este modelo de Aubry-André que considera interacciones entre partículas.

4.1.1 Densidad de estados

A continuación se muestra la densidad de estados para el modelo de Aubry-André con interacciones. Como vimos en secciones anteriores, es un análisis que depende fuertemente de las particularidades del sistema y cuyo uso no es propiamente el de detectar transiciones de fase.

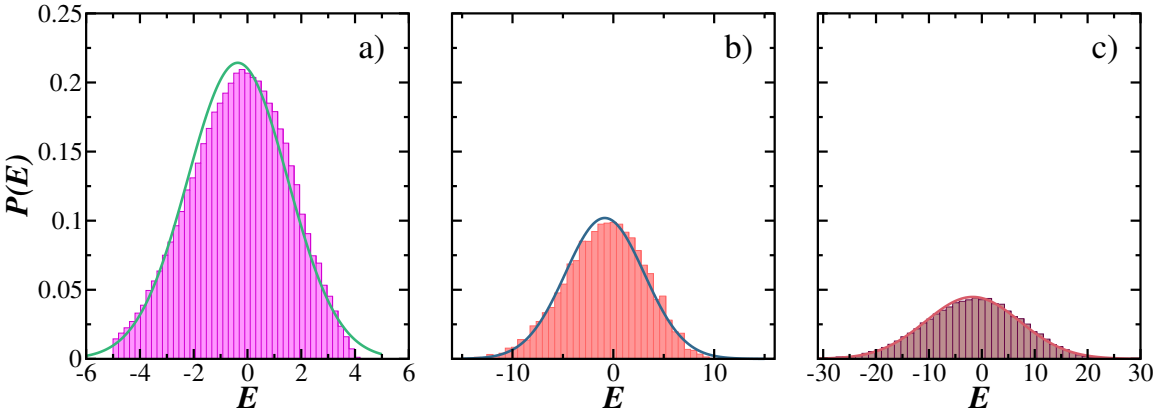

Figura 4.2: Distribución de los espaciamientos para el modelo de Aubry-André con interacciones. Los histogramas presentan los valores numéricos y las curvas sólidas son un ajuste gaussiano. Para a) se usa $h = 0.2$, en b) $h = 1.2$ y en c) $h = 3.0$. Para un sistema de $L = 16$ partículas con un correspondiente subespacio de dimensión $\mathcal{N} = 12870$.

Realizamos los histogramas para un valor de la amplitud del potencial de Harper correspondiente a cada fase en que el sistema se puede encontrar, se muestran en la Fig. 4.2. En el panel a) se presenta el histograma de las energías del sistema para un valor de $h = 0.2$, en esta figura vemos que el espectro de energías sigue una distribución gaussiana. En el panel b) el histograma corresponde a $h = 1.2$ para el cual el sistema se encuentra en una fase crítica y en c) $h = 3$ correspondiente a la fase localizada. Vemos que en todos los casos, los histogramas se ajustan bien a una distribución gaussiana. En la Tabla 4.1 están los valores referentes a la desviación estándar y media correspondientes a las curvas de ajuste en cada caso.

De la Tabla 4.1 se nota que conforme el valor de h aumenta, tanto la varianza como el valor medio de los valores propios de energía aumentan. Además, de manera similar al caso sin interacciones, la media tiende a ser más negativa.

Valor de h	Desviación estándar σ	Media μ
0.2	1.8621812	-0.36384916
1.2	3.9138539	-0.84976162
3.0	8.9056798	-1.7244041

Tabla 4.1: Valores de desviación estándar y media para la función gaussiana de ajuste de la Fig. 4.2.

4.1.2 Distribución de espaciamientos consecutivos

En la Figura 4.3 se muestran los histogramas que representan la distribución de los espaciamientos consecutivos entre valores propios de energía para el modelo de Aubry-André con interacciones. En el panel a), tomando un valor de $h = 0.2$ para la amplitud del potencial de Harper, vemos que la distribución de los espaciamientos consecutivos entre valores propios de energía para el modelo de Aubry-André con interacciones se ajusta bien a la predicción para GOE, esto es, la distribución de Wigner-Dyson. Para el panel b) correspondiente a $h = 1.2$ que coloca al sistema en la región crítica, vemos que los espaciamientos siguen una distribución parecida a la de Poisson, sin embargo, al tratarse de una región de transición no podemos asegurar que se trate de una fase localizada. Mientras que en c), para $h = 3$, la distribución del histograma es una tipo Poisson, que típicamente se asocia a la fase localizada del sistema.

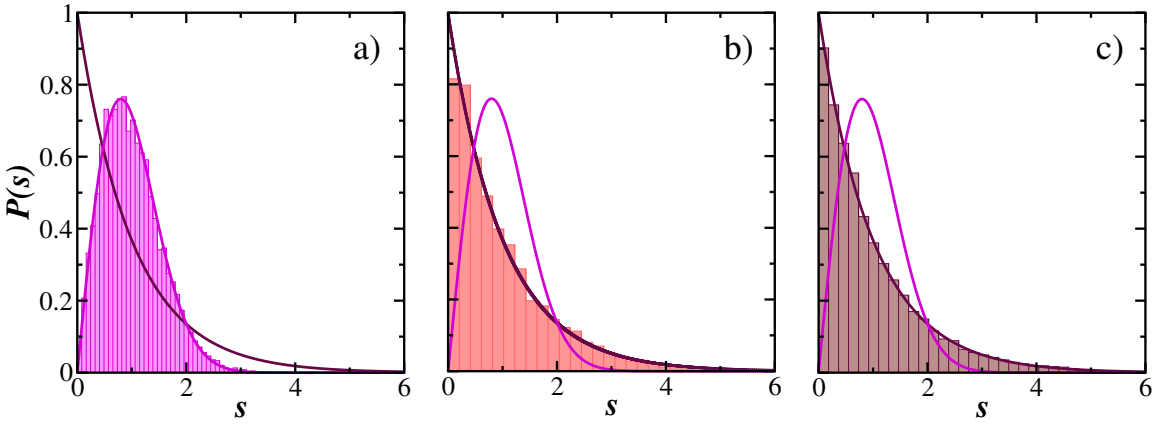

Figura 4.3: P(s) para el modelo AA con interacciones. Los histogramas consideran distintos valores para h. En a) $h = 0.2$, en b) $h = 1.2$ y en c) $h = 3$. Las curvas teóricas corresponden a la distribución de Wigner-Dyson (curva rosa) y la distribución de Poisson (curva café). Con $L = 12870$.

De lo anterior concluimos que esta estadística resulta útil para detectar esa transición de fase metal-aislante, a diferencia de lo que ocurre con el sistema que no considera interacciones.

4.1.3 Espectro de potencias

Se calcula el espectro de potencias para un ensamble de 1000 realizaciones del sistema, en la Fig. 4.4 se muestran tres páneles que presentan las gráficas para dicho espectro considerando cada fase del sistema.

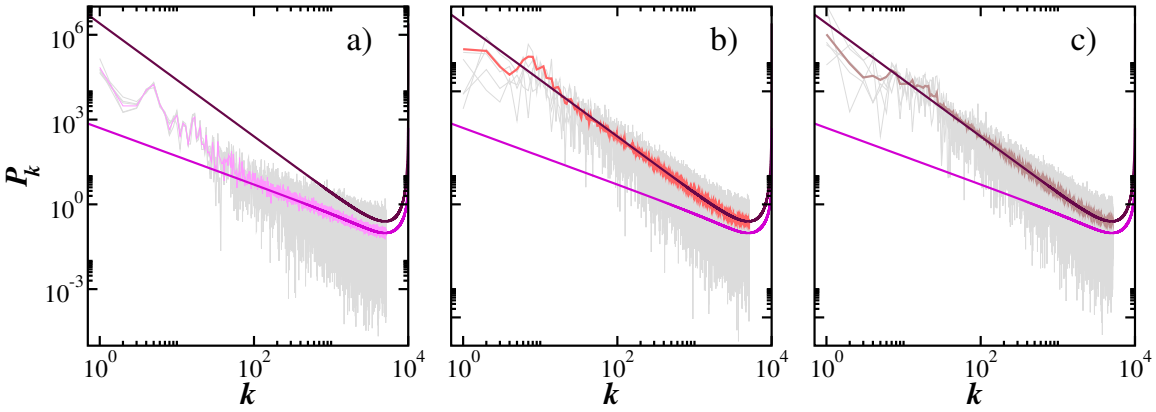

Figura 4.4: Se presenta el espectro de potencias para el modelo de Aubry-André con interacciones. Cada panel presenta una gráfica correspondiente a un valor de la amplitud del potencial de Harper. En a) $h = 0.2$, en b) $h = 1.2$ y en c) $h = 3$. Para todos los casos las curvas grises muestran fluctuaciones de realizaciones individuales, mientras que las curvas rosa, rojo y café representan el promedio sobre realizaciones. Las curvas de color rosa y café intenso corresponden a los valores exactos para P_k [Ec. (2.19)]. Con $L = 16$.

En el panel a) se muestra el espectro de potencias promedio para 1000 realizaciones, las curvas grises ilustran las fluctuaciones de realizaciones individuales, mientras que la curva rosa muestra el promedio del espectro de potencias. Vemos que el promedio sigue un decaimiento del tipo $1/k$ lo que indica un comportamiento propio en un sistema caótico y en este caso también a un sistema en una fase con estados extendidos (fase metálica). Notamos que el espectro de potencias exhibe un comportamiento no homogéneo, puesto que para k pequeñas parece que el decaimiento es paralelo a $1/k$, este fenómeno ya ha sido observado y discutido en el contexto de un tipo de ensambles de matrices aleatorias en las Refs. [37, 38]. Hasta donde sabemos, para el modelo que se estudia en esta tesis no hay referencias sobre lo que ocurre en el espectro de potencias, por tal motivo, se requiere un

análisis más profundo sobre este comportamiento en este modelo.

En el panel b) se presenta el espectro de potencias para $h = 1.2$ que coloca al sistema en la región crítica. Vemos que el comportamiento es practicamente $1/k^2$, aunque recordemos que esta es una región de transición.

En el panel c) se muestra el espectro de potencias promedio con la curva café, mientras que las curvas grises ilustran las fluctuaciones de realizaciones individuales. Vemos que el promedio sigue un decaimiento del tipo $1/k^2$ o bien ruido café, lo que indica que el sistema se encuentra en una fase localizada (aislante).

4.1.4 Razón de participación

Se comentó en secciones previas que la IPR y la PR son recíprocos. Estas cantidades nos permiten conocer qué tantas componentes participan en la conformación de un estado propio del sistema, y a su vez, diagnosticar si se trata de un estado extendido o localizado.

En esta sección se analiza la razón de participación, ver Ec. (3.8), de todos los estados propios del modelo de Aubry-André con interacciones. Calculamos la PR para cada valor de h, o bien, para cada fase. Normalizamos el PR con el $\mathrm{PR_{GOE}}$ [Ec. (3.9)].

En la Fig. 4.5 se muestra la PR con respecto a los valores propios de energía, cada panel corresponde a las diferentes fases, en a) $h = 0.2$ para la fase extendida, b) $h = 1.2$ para la región crítica y finalmente en c) $h = 3.0$ para la fase localizada.

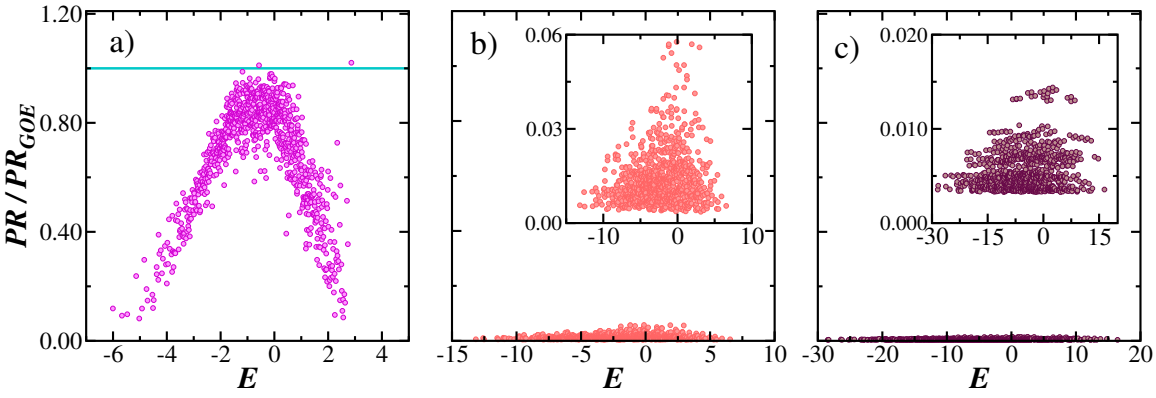

Figura 4.5: Se muestra la razón de participación respecto a los valores propios del modelo de Aubry-André con interacciones en cada una de sus fases. En el panel se toma en cuenta un valor a) $h = 0.2$, en b) con $h = 1.2$ y en c) $h = 3$. Con $L = 12870$.

En el panel a) vemos que la mayoría de los estados propios están cercanos en el centro a la línea azul y decaen según la energía se aleja del centro, esto indica que los estados con energía cercana al centro del espectro energético están extendidos y aquellos con energía cercana a los extremos están localizados. En el panel b) se muestra que prácticamente todos los estados tienen un valor de PR cercano a cero, en el inset se presenta la estructura de las mismas en el centro del espectro. Finalmente, en el panel c), el PR de todos los estados propios tiene un valor cercano a cero y las fluctuaciones que describen son mínimas como se aprecia en el *inset* de la gráfica.

Con este tipo de análisis es posible tener una descripción cualitativa y cuantitativa del grado de extensión o localización de un estado, observamos que dicho diagnóstico sí detecta la transición ya que fue muy consistente en cada una de las fases.

4.1.5 Distribución de Porter-Thomas

Recordemos que para comparar la distribución del logaritmo de las componentes al cuadrado de los estados propios del sistema con la distribución de Porter-Thomas [Ec. (2.26)], consideramos como variable al logaritmo de las componentes $|C_n|^2$, esto para visualizar mejor la forma de la distribución. Al igual que en el caso del modelo sin interacciones, aquí elegimos un estado cuya energía esté más cercana a cero.

Los histogramas de la Figura 4.6 muestran en cada panel una gráfica para diferentes

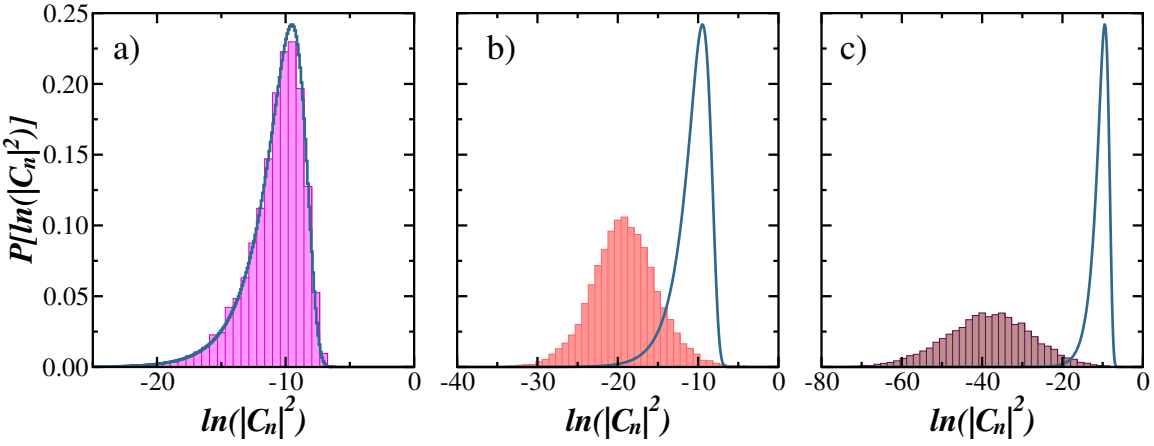

Figura 4.6: Se muestra la distribución de $\ln|C_n|^2$ para el modelo de Aubry-André con interacciones. Para cada fase, donde se consideran diferentes valores de h. En el panel a) con $h = 0.2$, en b) con $h = 1.2$ y en c) $h = 3$. La curva sólida azul describe la distribución de Porter-Thomas. Para $L = 16$ con $\mathcal{N} = 12870$.

valores de la amplitud del potencial h, correspondientes a los casos de una fase extendida $h = 0.2$, otra para la región crítica $h = 1.2$ y una para la fase localizada $h = 3.0$. Las curvas sólidas azules representan la expresión teórica que es la distribución de Porter-Thomas para matrices de GOE.

En el panel a) vemos una correspondencia muy buena del histograma con la distribución de Porter-Thomas, por lo que podemos concluir que en la fase extendida del sistema las componentes de sus estados propios se comportan igual las componentes de los estados propios del ensamble GOE. En el caso de b) y c) vemos que los estados no siguen la distribución de Porter-Thomas, por lo que se concluye que no se comportan como estados extendidos, es decir, esta distribución nos permite detectar con buena correspondencia la transición de fase.

Capítulo 5

Conclusiones

Se reprodujo computacionalmente el modelo unidimensional de Aubry-André con y sin interacciones de manera exitosa, se alcanzó un tamaño en cada sistema suficientemente grande de tal forma que es posible describir con buena precisión las propiedades estadísticas de sus valores y estados propios.

Los ensambles de matrices aleatorias presentados GOE y ED, resultaron modelos nulos muy útiles pues logran reproducir los casos extremos de fases extendidas y localizadas respectivamente. Sirvieron para comparar lo que ocurre en un sistema físico real y su representación computacional fue útil al momento de verificar el correcto funcionamiento de los códigos. Notamos que en el caso particular del ensamble diagonal, estudiar las componentes de los vectores propios de energía carecía de sentido, debido a que, todos los elementos fuera de la diagonal son cero y las contribuciones se debían únicamente a la diagonal, por lo que elevar estas componentes nulas a cierta potencia no aportaría nada, por esta razón para este ensamble se omitieron algunas estadísticas. Mientras que el GOE al ser de uso recurrente con resultados bien conocidos, fue una buena referencia para contrastar con los resultados de los sistemas físicos.

Si bien, son varias las cantidades que nos pueden ayudar a determinar la fase en que está un sistema cuántico que presenta la transición de Anderson. Vemos que algunas proporcionan ventajas sobre las otras que no la detectan completamente. En particular para los modelos que se trataron en esta tesis.

Por su parte, la distribución entre espaciamientos consecutivos adyacentes resultó ser conveniente para detectar la transición de fase en el caso del sistema con interacciones, no así para el sistema que no considera interacciones.

La estadística basada en las razones entre espaciamientos entre niveles consecutivos adyacentes fue tomada en cuenta como una opción, sin embargo, se omitieron dichos resultados porque no se exhibía la transición en el caso del modelo AA sin interacciones, por lo que se optó por realizar las otras estadísticas y contrastar los resultados con el modelo que considera interacciones entre partículas.

En el caso de la razón de participación, vemos que se detecta bien la transición de fase en ambos casos del modelo de Aubry-André con y sin interacciones. A pesar de que se detecta la transición notamos que solo hay buena correspondencia en la parte central del espectro energético, una ventaja que presenta es que existen valores teóricos del ensamble GOE de RMT que sirven de referencia para evaluar esta transición.

De la distribución de Porter-Thomas, concluimos que es un buen diagnóstico para identificar estados extendidos tanto en el modelo con interacciones como en el modelo sin interacciones. Presenta una ventaja sobre la estadísticas de valores propios, que en el caso del modelo sin interacciones no le es posible distinguir entre una fase extendida y una localizada. Si bien este diagnóstico resulta útil para detectar que se trata de estados extendidos, sin embargo, no da mayor información del caso intermedio y localizado, por lo que se tiene que complementar con otra estadística.

El espectro de potencias es muy útil en el modelo con interacciones, sin embargo, para el modelo sin interacciones no fue posible detectar la transición. Esta cantidad, a diferencia de las otras, mide correlaciones de largo y corto alcance, por lo que nos da una mejor perspectiva de lo que ocurre en el sistema.

De estas estadísticas se concluye que el enfoque de series de tiempo empleado resulta efectivo para el modelo con interacciones y no así para el modelo sin interacciones. En cambio, el análisis de la estructura y estadística de estados propios es efectivo en ambos casos.

Una de las perspectivas que quedan para este trabajo es realizar un análisis para diferentes tamaños del sistema. Además de considerar más valores en la región crítica o al rededor de la misma para ambos modelos. Finalmente, se está realizando la escritura de un artículo para someterlo pronto a revisión con los resultados de este trabajo, incluyendo un análisis de las correlaciones de largo alcance entre los valores propios de energía del modelo de Aubry-André con o sin interacciones. Lo anterior se realizó mediante la así llamada varianza del número de niveles energéticos. Sin embargo estos resultados se obtuvieron posteriormente a la escritura de esta tesis y por lo tanto no han sido incluidos en la misma.

Bibliografía

[1] Anderson, P. W.: Absence of Diffusion in Certain Random Lattices (1958)

[2] Schenk, O., Bollhöfer, M., and Römer, R. A.: On large-scale diagonalization techniques for the Anderson model of localization. *SIAM Rev* 50, 91–112 (2008)

[3] Lagendijk, A., Tiggelen, B. v., and Wiersma, D. S.: Fifty years of Anderson localization. *Physics Today* 62, 24–29 (2009)

[4] Anderson, P. W., Thouless, D. J., Abrahams, E., and Fisher, D. S.: New method for a scaling theory of localization. *Phys Rev B* 22, 3519–3526 (1980)

[5] Billy, J., Josse, V., Zuo, Z., Bernard, A., Hambrecht, B., Lugan, P., Clément, D., Sanchez-Palencia, L., Bouyer, P., and Aspect, A.: Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder. *Nature* 453, 891–894 (2008)

[6] Roati, G., D'Errico, C., Fallani, L., Fattori, M., Fort, C., Zaccanti, M., Modugno, G., Modugno, M., and Inguscio, M.: Anderson localization of a non-interacting Bose–Einstein condensate. *Nature* 453, 895–898 (2008)

[7] Hu, H., Strybulevych, A., Page, J., Skipetrov, S. E., and van Tiggelen, B. A.: Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. *Nat Phys* 4, 945–948 (2008)

[8] Störzer, M., Gross, P., Aegerter, C. M., and Maret, G.: Observation of the critical regime near Anderson localization of light. *Phys Rev Lett* 96, 063904 (2006)

[9] Segev, M., Silberberg, Y., and Christodoulides, D. N.: Anderson localization of light. *Nat Photonics* 7, 197–204 (2013)

[10] Yamilov, A., Skipetrov, S. E., Hughes, T. W., Minkov, M., Yu, Z., and Cao, H.: Anderson localization of electromagnetic waves in three dimensions. *Nat Phys* 1–6 (2023)

[11] Lahini, Y., Pugatch, R., Pozzi, F., Sorel, M., Morandotti, R., Davidson, N., and Silberberg, Y.: Observation of a localization transition in quasiperiodic photonic lattices. *Phys Rev Lett* 103, 013901 (2009)

[12] Thouless, D. J.: A relation between the density of states and range of localization for one dimensional random systems. *J Phys C: Solid State Phys* 5, 77 (1972)

[13] Abrahams, E., Anderson, P., Licciardello, D., and Ramakrishnan, T.: Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions. *Phys Rev Lett* 42, 673 (1979)

[14] Aubry, S. and André, G.: Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices. *Ann Israel Phys Soc* 3, 18 (1980)

[15] Brody, T. A., Flores, J., French, J. B., Mello, P., Pandey, A., and Wong, S. S.: Random-matrix physics: spectrum and strength fluctuations. *Rev Mod Phys* 53, 385 (1981)

[16] Bohigas, O.: Random matrix theories and chaotic dynamics. Tech. rep., Paris-11 Univ. (1991)

[17] Guhr, T., Müller-Groeling, A., and Weidenmüller, H. A.: Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. *Phys Rep* 299, 189–425 (1998)

[18] Mehta, M. L.: *Random matrices*. Elsevier (2004)

[19] Haake, F.: *Quantum signatures of chaos*. Springer (1991)

[20] Gutzwiller, M. C.: Quantum chaos. *Scientific American* 266, 78–85 (1992)

[21] Stöckmann, H.-J.: Quantum chaos: an introduction (2000)

[22] Casati, G. and Chirikov, B.: *Quantum Chaos*. Cambridge University Press (2006)

[23] Reichl, L. E.: *Transition to Chaos*. Springer (2021)

[24] Berry, M. V. and Tabor, M.: Level clustering in the regular spectrum. *Proc R Soc A: Math Phys Eng Sci* 356, 375–394 (1977)

[25] Scaramazza, J. A., Shastry, B. S., and Yuzbashyan, E. A.: Integrable matrix theory: Level statistics. *Phys Rev E* 94, 032106 (2016)

[26] Bohigas, O., Giannoni, M.-J., and Schmit, C.: Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys Rev Lett* 52, 1 (1984)

[27] Wischmann, B. and Müller-Hartmann, E.: Level statistics and localization: A study of the 1D Anderson model. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter* 79, 91–99 (1990)

[28] Aronov, A. et al.: Level spacing distribution near the Anderson transition. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 60, 881 (1994)

[29] Varga, I., Hofstetter, E., Schreiber, M., and Pipek, J.: Shape analysis of the level-spacing distribution around the metal-insulator transition in the three-dimensional Anderson model. *Phys Rev B* 52, 7783 (1995)

[30] Sorathia, S., Izrailev, F., Zelevinsky, V., and Celardo, G.: From closed to open one-dimensional Anderson model: Transport versus spectral statistics. *Phys Rev E* 86, 011142 (2012)

[31] Torres-Herrera, E. J., Méndez-Bermúdez, J., and Santos, L. F.: Level repulsion and dynamics in the finite one-dimensional Anderson model. *Phys Rev E* 100, 022142 (2019)

[32] Zarate Herrada, D. A.: *Caracterización dinámica de la transición metal-aislante de sistemas cuánticos unidimensionales cuasiperiódicos.* B.S. thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (2018)

[33] Torres-Herrera, E. J. and Santos, L. F.: Dynamical detection of level repulsion in the one-particle Aubry-André model. *Condensed Matter* 5, 7 (2020)

[34] Relano, A., Gómez, J., Molina, R., Retamosa, J., and Faleiro, E.: Quantum chaos and $1/f$ noise. *Phys Rev Lett* 89, 244102 (2002)

[35] Faleiro, E., Gómez, J., Molina, R., Muñoz, L., Relaño, A., and Retamosa, J.: Theoretical derivation of $1/f$ noise in Quantum Chaos. *Phys Rev Lett* 93, 244101 (2004)

[36] García-García, A. M.: Power spectrum characterization of the Anderson transition. *Phys Rev E* 73, 026213 (2006)

[37] Relaño, A., Muñoz, L., Retamosa, J., Faleiro, E., and Molina, R. A.: Power-spectrum characterization of the continuous Gaussian ensemble. *Phys Rev E* 77, 031103 (2008)

[38] Das, A. K. and Ghosh, A.: Nonergodic extended states in the β ensemble. *Phys Rev E* 105, 054121 (2022)

[39] Zhang, X., Zhang, W., Che, J., and Dietz, B.: Experimental test of the Rosenzweig-Porter model for the transition from Poisson to Gaussian unitary ensemble statistics. *Phys Rev E* 108, 044211 (2023)

[40] Kobayashi, M. and Musha, T.: 1/f Fluctuation of Heartbeat Period. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* BME-29, 456–457 (1982)

[41] García-Gudiño, D., Mendoza-Temis, J., Toledo-Roy, J., Morales, I., Landa, E., Rivera, L., Fossion, R., and Frank, A.: Early warning studies in an atrial model to prevent fibrillation. *AIP Conference Proceedings* 1747, 090003 (2016)

[42] Voss, R. F. and Clarke, J.: "1/f noise" in music: Music from 1/f noise. *The Journal of the Acoustical Society of America* 63, 258–263 (1978)

[43] Harper, P. G.: Single band motion of conduction electrons in a uniform magnetic field. *Proc Phys Soc Section A* 68, 874 (1955)

[44] Schreiber, M., Hodgman, S. S., Bordia, P., Lüschen, H. P., Fischer, M. H., Vosk, R., Altman, E., Schneider, U., and Bloch, I.: Observation of many-body localization of interacting fermions in a quasirandom optical lattice. *Science* 349, 842–845 (2015)

[45] Li, H., Wang, Y.-Y., Shi, Y.-H., Huang, K., Song, X.-H., Guihan, L., Mei, Z.-Y., Zhou, B., Zhang, H., Zhang, J.-C., Chen, S., Zhao, S., Tian, Y., Yang, Z.-Y., Xiang, Z., Xu, K., Zheng, D., and Fan, H.: Observation of critical phase transition in a generalized Aubry-André-Harper model with superconducting circuits. *npj Quantum Information* 9 (2023)

[46] Berman, G. and Izrailev, F.: The Fermi–Pasta–Ulam problem: fifty years of progress. *Chaos* 15 (2005)

[47] Chernov, N. and Markarian, R.: *Chaotic billiards*. Amer. Math. Soc. (2006)

[48] Gleick, J.: *Chaos: Making a new science*. Penguin (2008)

[49] Strogatz, S. H.: *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Westview Press (2000)

[50] D'Alessio, L., Kafri, Y., Polkovnikov, A., and Rigol, M.: From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics. *Adv Phys* 65, 239–362 (2016)

[51] Borgonovi, F., Izrailev, F. M., Santos, L. F., and Zelevinsky, V. G.: Quantum chaos and thermalization in isolated systems of interacting particles. *Phys Rep* 626, 1–58 (2016)

[52] Dyson, F. J.: The threefold way. Algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics. *J Math Phys* 3, 1199–1215 (1962)

[53] Porter, C. E.: Book Review: Statistical theories of spectra: fluctuations. (Academic Press, New York, 1965. xv-576 p. 5.95 paper, 9.50 cloth). *Nuclear Physics* 78, 696–696 (1966)

[54] Wigner, E. P.: Gatlinburg Conference on Neutron Physics by time-of-flight. *Report ORNL 2309 (1957) p 59* 95, 114101 (2005)

[55] Bertrand, C. L. and García-García, A. M.: Anomalous Thouless energy and critical statistics on the metallic side of the many-body localization transition. *Phys Rev B* 94, 144201 (2016)

[56] Abul-Magd, A. A. and Abul-Magd, A. Y.: Unfolding of the spectrum for chaotic and mixed systems. *Phys A: Stat Mech Appl* 396, 185–194 (2014)

[57] Porter, C. E. and Thomas, R. G.: Fluctuations of Nuclear Reaction Widths. *Phys Rev* 104, 483–491 (1956)

[58] Niven, I. M.: *Diophantine approximations*. Courier Corporation (2008)

[59] Jitomirskaya, S. Y.: Metal-insulator transition for the almost Mathieu operator. *Ann Math* 1159–1175 (1999)

[60] Hofstadter, D. R.: Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields. *Phys Rev B* 14, 2239 (1976)

[61] Kohmoto, M., Sutherland, B., and Tang, C.: Critical wave functions and a Cantor-set spectrum of a one-dimensional quasicrystal model. *Phys Rev B* 35, 1020 (1987)

[62] Sutherland, B.: Quasiperiodic physics in one dimension. In *Disorder and Nonlinearity: Proceedings of the Workshop JR Oppenheimer Study Center Los Alamos, New Mexico, 4–6 May, 1988*, 62–69. Springer (1989)

[63] Oganesyan, V. and Huse, D. A.: Localization of interacting fermions at high temperature. *Phys Rev B* 75, 155111 (2007)

[64] Hagino, K. and Bertsch, G. F.: Porter-Thomas fluctuations in complex quantum systems. *Phys Rev E* 104, L052104 (2021)

[65] Xu, S., Li, X., Hsu, Y.-T., Swingle, B., and Das Sarma, S.: Butterfly effect in interacting Aubry-Andre model: Thermalization, slow scrambling, and many-body localization. *Phys Rev Res* 1, 032039 (2019)