



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

## UN ANÁLISIS DE LAS INTEGRALES DE HENSTOCK Y KURZWEIL EN EL MARCO DE LOS ESPACIOS DE BANACH

### TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA  
LIC. TOMÁS PÉREZ BECERRA

DIRECTOR DE TESIS  
DR. JUAN ALBERTO ESCAMILLA REYNA  
DR. JACOBO OLIVEROS OLIVEROS

PUEBLA, PUEBLA, 2014

*A mis padres, hermanos,  
esposa e hijo.*



# Agradecimientos

En primer lugar, agradezco al milagroso Señor del Convento, padre amado que siempre me acompaña.

Mi más sincero agradecimiento al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna por sus consejos, por su labor que va más allá de su deber, por brindarme su total apoyo sin pedir nada a cambio y, más que eso, por brindarme su amistad, es usted una grandiosa persona y mi ejemplo a seguir.

Agradezco al M. C. Luis Ángel Gutiérrez Méndez, que con sus ideas, sugerencias, amistad y compañerismo ha contribuido de manera notable a que este trabajo halla visto la luz.

Al gran equipo formado por el Dr. Francisco Javier Mendoza, la Dr. Ma. Guadalupe Morales y la M. C. Daniela Rodríguez, me han hecho sentir como en casa y ahora forman parte de mi familia.

A mi esposa Maricela, por su amor, cariño y amistad que me ofrece, eres mi razón de ser, a ti te dedico este logro. A mi hijo Ariel, por ser mi motivación de continuar día a día y, a tu corta edad, me has enseñado la alegría de la vida, tu sonrisa es mi inspiración.

A mis padres Alfredo y Teresa, son ustedes los que se merecen el reconocimiento, le agradezco a Dios haberme concedido ser su hijo. A mis hermanos: Javier, Alejandra, Alfredo, Miguel y Guadalupe, por los innumerables momentos de alegría, por su gran apoyo y, sobre todo, por compartir su vida conmigo.

*Este logro y mi felicidad es de todos ustedes.*



# Agradecimiento al CONACYT

Hago extensivo mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme otorgado una beca para realizar mis estudios de Maestría, sin su apoyo me habría sido imposible lograr este objetivo.



# Índice general

<b>1. Integrales de Henstock y Kurzweil para Funciones Reales</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones y Conceptos . . . . .	1
1.2. Propiedades . . . . .	4
1.3. Lema de Saks-Henstock . . . . .	6
1.3.1. Versión Débil . . . . .	7
1.3.2. Versión Fuerte . . . . .	8
1.4. El Teorema Fundamental del Cálculo . . . . .	9
1.4.1. Parte I . . . . .	10
1.4.2. Parte II . . . . .	10
1.5. Teoremas de Convergencia . . . . .	11
1.5.1. Teorema de Convergencia Monótona . . . . .	12
1.5.2. Teorema de Convergencia Dominada . . . . .	12
1.5.3. Teorema de Equi-integrabilidad . . . . .	13
<b>2. Integrales de Henstock y Kurzweil para Funciones Vectoriales</b>	<b>15</b>
2.1. Definiciones . . . . .	15
2.2. Construcción de una función en $l_2([a, b])$ . . . . .	16
2.3. Propiedades . . . . .	18
2.4. Lema de Saks-Henstock . . . . .	22
2.4.1. Versión Débil . . . . .	22
2.4.2. Versión Fuerte . . . . .	23
2.5. Teorema Fundamental del Cálculo . . . . .	25
<b>3. Integrales de Riemann, McShane, Bochner y Pettis</b>	<b>33</b>
3.1. Integrales de Tipo Riemann . . . . .	33
3.2. Extensiones de la integral de Lebesgue . . . . .	40
<b>4. Relación entre las integrales</b>	<b>49</b>
4.1. Relación entre las integrales de tipo Riemann . . . . .	49

4.2. Relación entre las integrales de tipo Riemann con las integrales de Bochner y Pettis . . . . .	56
<b>5. Teoremas de Convergencia para las integrales de Henstock y Kurzweil</b>	<b>65</b>
5.1. Teorema de Convergencia Dominada . . . . .	74
5.2. Teorema de Convergencia Monótona . . . . .	77
5.3. Teorema de Equi-integrabilidad . . . . .	83
<b>Conclusiones</b>	<b>89</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>

---

# Introducción

A Newton y a Leibnitz se les acredita la invención del Cálculo hacia 1670, cuando desarrollaron su teorema fundamental, es decir, las áreas se calculan usando antiderivadas. Posteriormente, Cauchy investigó las integrales de funciones continuas y estableció, en 1820, la primera definición rigurosa de la integral definida. Poco después Riemann refinó la definición de Cauchy y realizó un estudio de las integrales de funciones discontinuas. Sin embargo, la teoría de integración de Riemann no es totalmente satisfactoria dado que presenta algunas deficiencias, entre las cuales podemos mencionar las siguientes:

- La integral de Riemann no cumple el Teorema Fundamental del Cálculo en toda su generalidad, dado que existen funciones diferenciables cuyas derivadas no son acotadas y por tanto no son Riemann integrables; más aún, existen funciones diferenciables cuya derivada es acotada y no Riemann integrables; en este sentido se dice que la integral de Riemann no proporciona una solución general al *problema de las primitivas*.
- La integral de Riemann no posee “buenos” teoremas de convergencia en el sentido siguiente: si  $(f_n)$  es una sucesión de funciones reales Riemann integrables definidas sobre un intervalo compacto  $[a, b]$  del conjunto de los números reales, tal que  $(f_n)$  converge puntualmente a una función  $f$  en  $[a, b]$ , entonces no necesariamente se cumple que la función límite  $f$  sea Riemann integrable sobre  $[a, b]$ ; más aún, puede ser que la función límite sea integrable, pero el valor de su integral no sea el límite de la sucesión de las integrales; es decir, no necesariamente se cumple la siguiente igualdad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f. \quad (1)$$

Lebesgue en 1902, con la finalidad de resolver la aseveración de Fourier, la cual plantea la posibilidad de expresar a toda función como una serie trigonométrica, tomó la idea de Riemann y generaliza la integral, obteniendo que

esta integral, además de resolver el problema de Fourier, cuenta con “buenos” teoremas de convergencia tales como el Teorema de Convergencia Monótona y el Teorema de Convergencia Dominada; sin embargo, sigue sin dar una solución general al problema de las primitivas.

Con el objetivo de dar una solución general al problema de las primitivas, Denjoy [5] en 1912 y Perron [34] en 1914, de forma independiente, definieron integrales las cuales resultaron ser equivalentes, por lo cual se le conoce como la integral de Denjoy-Perron; aunque esta integral sí logra este objetivo y, además, cuenta con versiones análogas a los Teoremas de Convergencia Monótona y Dominada, ésta no tuvo mucho auge debido a la dificultad de su teoría.

A finales de la década de los 50, Kurzweil [26] con base en ciertas necesidades que tenía en el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y Henstock en [24] definen, de manera independiente, integrales, las cuales resultan ser equivalentes cuando se consideran funciones reales definidas sobre la recta real, es por ello que, en este contexto, se le conoce como la integral de Henstock-Kurzweil. En [22], Henstock demostró que toda función Lebesgue integrable es Henstock-Kurzweil integrable. De hecho, en [23], al igual que Kurzweil en [26], demostró que la integral de Henstock-Kurzweil es equivalente a la de Perron y, en consecuencia, a la de Denjoy y, por tanto, también proporciona una solución general al problema de las primitivas, posee teoremas de convergencia similares a los Teoremas de Convergencia Monótona y Dominada y, aún más, cuenta con un teorema de convergencia más general que estos, llamado Teorema de Equi-integrabilidad (véase la Sección 1.5.3).

Aunque la integral de Henstock-Kurzweil y la de Riemann están en términos de sumas de Riemann, la diferencia radical entre ellas es el tipo de particiones que se están considerando, es por ello que también se le conoce con los nombres de integral de *Riemann generalizada*, *integral medidora* (gauge integral), entre otros. Haciendo ligeros cambios en la definición dada por Kurzweil se definen otras integrales basados en sumas de Riemann; tal como la integral de McShane la cual, al considerar funciones con valores reales definidas sobre un intervalo compacto del conjunto de los números reales, es equivalente a la integral de Lebesgue [29]. De esta forma se puede considerar a la integral de Lebesgue como una integral basada en sumas de Riemann sin la necesidad de pasar por la Teoría de la Medida.

La integral de Henstock y la integral de Kurzweil se pueden generalizar de manera directa para funciones que toman valores en un espacio de Banach

---

definidas sobre un intervalo compacto del conjunto de los números reales. Sin embargo, estas integrales ya no son equivalentes en general, y algunos teoremas que son válidos para la integral de Henstock-Kurzweil dejan de ser verdaderos en este caso (véase los Capítulos 2 y 4).

Esto motiva a preguntarse las condiciones bajo las cuales sí son equivalentes; qué teoremas son verdaderos en el contexto vectorial y, en el caso de que no sean válidos, bajo qué condiciones sobre el espacio se pueden demostrar los teoremas correspondientes; particularmente nos enfocaremos en analizar las correspondientes formulaciones del Teorema Fundamental del Cálculo y los teoremas de convergencia (Monótona, Dominada y Equi-integrabilidad) para ambas integrales.

En la integral de Henstock-Kurzweil los Teoremas de Convergencia Monótona y Dominada hacen uso de la estructura de orden usual que existe en el conjunto de los números reales, por lo cual las formulaciones de estos teoremas no tienen sentido definirlos como tal en un espacio de Banach dado que éste no cuenta necesariamente con una estructura de orden; así pues, esto nos motiva a preguntarnos ¿cómo podríamos formular versiones de éstos teoremas bajo este contexto?. Una manera de hacerlo es definir un orden parcial en el espacio de Banach, pero ¿qué condiciones debe cumplir esta relación de orden de tal forma que éstos sean equivalentes cuando consideramos el caso real?

Por tal motivo, el objetivo general de este trabajo de tesis es realizar un análisis tanto de la integral de Henstock como de la integral de Kurzweil al considerar funciones que toman valores en un espacio de Banach y que están definidas sobre un intervalo compacto del conjunto de los números reales y su relación con la integral de Riemann, Bochner, McShane y Pettis. Los objetivos particulares son:

- Recopilar algunas propiedades elementales e importantes para ambas integrales, tales como sus propiedades algebraicas, el Lema de Saks-Henstock, entre otras.
- Analizar sus correspondientes versiones del Teorema Fundamental del Cálculo.
- Determinar algunos teoremas de convergencia.

El presente trabajo de tesis está desarrollado en 4 capítulos:

---

**Capítulo 1** Teniendo en cuenta que las integrales de Henstock y Kurzweil son equivalentes al considerar funciones reales, en este capítulo estableceremos algunas de las propiedades más importantes de la integral de Henstock-Kurzweil tales como: sus propiedades algebraicas, el Lema de Saks-Henstock, el Teorema Fundamental del Cálculo y algunos teoremas de convergencia; haciendo énfasis en el Lema de Saks-Henstock dada su importancia en esta Teoría de Integración.

**Capítulo 2** En este capítulo estableceremos las propiedades más elementales e importantes de la integral definida por Henstock cuando se consideran funciones vectoriales y que están definidas sobre un intervalo compacto; tales como algunas propiedades algebraicas, su correspondiente formulación del Teorema Fundamental del Cálculo y sus versiones del Lema de Saks-Henstock (fuerte y débil).

Es de destacar la importancia de la función construida en este mismo capítulo, dado que será nuestro caballo de batalla al servir de ejemplo y contraejemplo de diversos hechos durante el desarrollo del presente trabajo de tesis.

En este mismo capítulo consideraremos la integral de Kurzweil bajo el contexto de funciones con valores sobre un espacio de Banach definidas sobre un intervalo compacto, al establecer sus propiedades algebraicas y elementales, el Lema de Saks-Henstock en su versión débil; exhibiremos una función Kurzweil integrable la cual contradice a la versión fuerte. Estableceremos la parte I del Teorema Fundamental del Cálculo, además, exhibiremos una función Kurzweil integrable la cual muestra que no es posible formular la parte II del Teorema Fundamental del Cálculo de la integral de Henstock-Kurzweil de forma análoga para la integral de Kurzweil; por ello, establecemos una versión “débil” de la parte II de este teorema.

**Capítulo 3** Debido a que uno de nuestros objetivos generales es determinar las relaciones entre la integral de Henstock y Kurzweil con otras integrales clásicas sobre espacios de Banach, tales como la integral de Riemann, McShane, Bochner y Pettis, en este capítulo daremos una breve introducción al lector a estas integrales, la cual consiste en sus correspondientes definiciones, algunas propiedades algebraicas y las formulaciones de los teoremas de convergencia más conocidos para cada integral.

**Capítulo 4** En éste capítulo estableceremos las relaciones que existen entre ciertas integrales de tipo Riemann; cuando consideramos funciones

---

---

con valores sobre un espacio de Banach y definidas sobre un intervalo compacto del conjunto de los números reales: Riemann, McShane, Henstock y Kurzweil. Además, dado que algunas integrales se definieron para caracterizar ciertas propiedades algebraicas y/o topológicas de los espacios de Banach tales como las integrales de Bochner y Pettis, estableceremos también las relaciones que existen entre éstas con las integrales de tipo Riemann. En ciertos casos, exhibiremos algunas condiciones adicionales sobre la función o sobre el espacio de Banach para que exista una relación de equivalencia entre éstas.

**Capítulo 5** En este capítulo se definirá una relación de orden sobre un espacio de Banach, la cual permitirá establecer el correspondiente Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Henstock; además, exhibiremos una función Henstock integrable la cual muestra que no es posible formular un Teorema de Convergencia Monótona para la integral de Henstock-Kurzweil de forma análoga para la integral de Henstock; además, estableceremos su correspondiente formulación del Teorema de Equi-integrabilidad. Haciendo uso de la relación de orden definida e imponiendo condiciones más fuertes, estableceremos la formulación del Teorema de Convergencia Monótona para la integral de Kurzweil, así como su correspondiente formulación del Teorema de Equi-integrabilidad.

---



# Notaciones y Convenciones

A lo largo de este trabajo los símbolos  $\mathbb{R}$  y  $[a, b]$  denotarán al conjunto de los números reales y un intervalo compacto de éste, respectivamente. Por  $X$  y  $X^*$  denotaremos un espacio de Banach arbitrario y el espacio dual de éste, respectivamente. El símbolo  $\|\cdot\|$  representará la norma del espacio de Banach.

En el transcurso de la presente tesis estableceremos resultados considerando funciones que toman valores reales definidas sobre un intervalo compacto  $[a, b]$  y funciones que toman valores sobre un espacio de Banach y que están definidas sobre el mismo intervalo  $[a, b]$ , por lo que haremos referencia a ellas como *funciones reales* y *funciones vectoriales*, respectivamente; por tal motivo, los resultados establecidos considerando únicamente funciones reales diremos que están bajo el *contexto real*, de igual forma para el *contexto vectorial* el cual, en ocasiones, también le denominaremos el *contexto de los espacios de Banach*.

Denotamos por  $\mu$  la medida de Lebesgue y  $L_1(\mu)$  al conjunto de funciones reales Lebesgue integrables con respecto a  $\mu$ , a menos que se indique lo contrario.



# Capítulo 1

## Integrales de Henstock y Kurzweil para Funciones Reales

Dado que nuestro objetivo general es hacer un análisis de las integrales definidas por Henstock y Kurzweil en el contexto de los espacios de Banach, en este capítulo estableceremos las bases necesarias para realizar dicho estudio. El capítulo está escrito esquemáticamente; presentaremos las propiedades elementales e importantes de estas integrales en el contexto real, tales como algunas propiedades algebraicas, el Lema de Saks-Henstock, el Teorema Fundamental del Cálculo y algunos teoremas de convergencia. Debido a que las propiedades que se establecerán en este capítulo son únicamente para fines comparativos para el desarrollo de los Capítulos 2 y 3, omitiremos las demostraciones de éstos; sin embargo, el lector interesado en conocer las demostraciones de estos resultados puede consultar las siguientes referencias: [1], [17], [42] y [41].

### 1.1. Definiciones y Conceptos

Antes de establecer las definiciones de las integrales dadas por Henstock y Kurzweil en el contexto real, daremos algunos conceptos técnicos que aparecen en las definiciones de dichas integrales:

- Dos subintervalos compactos  $J, K \subset \mathbb{R}$  son **no traslapados** si y sólo si  $\text{int}J \cap \text{int}K = \emptyset$ . La **longitud de un intervalo**  $I = [a, b]$ , con  $a \leq b$ , la definimos como

$$l(I) := b - a.$$

- Una **subpartición** de  $[a, b]$  es una colección finita  $\{I_i\}_{i=1}^n$  de subintervalos compactos no traslapados de  $[a, b]$ , con  $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ . Una **partición** de  $[a, b]$  es una subpartición tal que  $[a, b] = I_1 \cup \dots \cup I_n$ .
- Una **partición etiquetada** (**subpartición etiquetada**) de  $[a, b]$  es un conjunto de pares ordenados  $P := \{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  de tal forma que la colección  $\{I_i\}$  es una partición (subpartición) de  $[a, b]$  y  $\xi_i \in I_i$ , donde al punto  $\xi_i$  le llamaremos la **etiqueta** asociada al subintervalo  $I_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .
- Una función  $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es **medidora** (**gauge**) sobre  $[a, b]$  si y sólo si  $\delta(t) > 0$ , para toda  $t \in [a, b]$ .
- Sea  $\delta$  una medidora sobre  $[a, b]$  y  $P$  una partición (subpartición) etiquetada de  $[a, b]$ , decimos que  $P$  es  **$\delta$ -fina** si

$$I_i \subseteq [\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i)],$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Nota.** De ahora en adelante al hacer referencia a una función medidora y/o partición (subpartición) etiquetada serán respecto a un mismo intervalo a menos que se indique lo contrario.

El siguiente Lema, demostrado por Cousin en 1895 ([4]), es útil para demostrar que tanto la integral de Henstock como la de Kurzweil están bien definidas.

**Lema de Cousin.** Si  $\delta$  es una medidora sobre  $[a, b]$ , entonces existe una partición (subpartición) etiquetada de  $[a, b]$  que es  $\delta$ -fina.

A continuación exhibiremos la definición la integral dada por Kurzweil en 1957 ([26]) y la integral de Henstock definida en 1961 ([24]).

**Definición 1.1.1.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es **Kurzweil integrable** sobre  $[a, b]$  si y sólo si existe  $w \in \mathbb{R}$  con la siguiente propiedad:

Dado  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta = \delta_\epsilon$  sobre  $[a, b]$ , tal que si  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - w \right| < \epsilon.$$

Si tal  $w$  existe, entonces, por el Lema de Cousin, es único, en tal caso lo denotaremos por  $w := (K) \int_a^b f$ ; además, si  $I = [a, b]$ , al valor de la integral de Kurzweil de  $f$  sobre  $I$  lo denotaremos por  $w = (K) \int_I f$ .

**Definición 1.1.2.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es **Henstock integrable** sobre  $[a, b]$  si y sólo si existe una función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con la siguiente propiedad:

Dado  $\epsilon > 0$ , existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que si  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , entonces

$$\sum_{i=1}^n |F(t_i) - F(t_{i-1}) - f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})| < \epsilon.$$

En este caso, escribiremos  $(H) \int_a^t f = F(t) - F(a)$ ,  $t \in [a, b]$ . Para  $a \leq c < d \leq b$  definimos la integral de Henstock sobre  $[c, d]$ , como  $(H) \int_c^d f = F(d) - F(c)$ .

Debido a que por el momento no contamos con las herramientas necesarias para establecer la relación entre ambas integrales, en la Sección 1.3.2 a través del Teorema 1.3.3, se establecerá que ambas integrales son equivalentes en el contexto real. Así pues, a estas integrales equivalentes les llamaremos la **integral de Henstock-Kurzweil**; para mayor comodidad a lo largo de este trabajo haremos uso de la definición de Kurzweil al referirnos a esta integral. A su vez, al espacio de funciones Henstock-Kurzweil integrables le denotaremos  $HK([a, b], \mathbb{R})$ .

**Nota.** En la literatura clásica de Teoría de Integración (véase por ejemplo [1]) existe al menos otra caracterización de la integral de Henstock-Kurzweil en términos de primitivas, sin embargo, en el presente trabajo de tesis, omitiremos su uso.

En la integral de Henstock-Kurzweil se hace mayor énfasis en las etiquetas que en la integral de Riemann, en el sentido de que en la integral de Riemann se consideran particiones uniformes, es decir, el valor de las etiquetas son puntos arbitrarios de los intervalos subordinados a una  $\delta$  constante (función medidora constante). De esta manera, dado que en la integral de Riemann sólo se consideran funciones medidoras constantes, es claro que toda función Riemann integrable es Henstock-Kurzweil integrable y el valor de las integrales coinciden. Sin embargo, el recíproco no siempre se cumple; un ejemplo de ello es la función siguiente definida por Dirichlet en 1829:

**Ejemplo 1.1.3.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(t) := \begin{cases} 1, & \text{si } t \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } t \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Esta función es Henstock-Kurzweil integrable sobre  $[0, 1]$  y no es Riemann integrable sobre el mismo intervalo (véase [1]); por lo tanto podemos afirmar que el espacio de las funciones Riemann integrables está contenido propiamente en el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables, es decir,

$$R([a, b], \mathbb{R}) \subset HK([a, b], \mathbb{R}).$$

## 1.2. Propiedades

En esta sección presentaremos algunas de las propiedades más elementales e importantes de la integral de Henstock-Kurzweil; específicamente, mencionaremos algunas propiedades algebraicas.

**Teorema 1.2.1.** Sean  $f, g \in HK([a, b], \mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces la función:

(a)  $cf$  es Henstock-Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(HK) \int_a^b cf = c(HK) \int_a^b f.$$

(b)  $f + g$  es Henstock-Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(HK) \int_a^b (f + g) = (HK) \int_a^b f + (HK) \int_a^b g.$$

**Nota.** Con base en el Teorema 1.2.1 se tiene que  $HK([a, b], \mathbb{R})$  es un espacio vectorial con respecto a las operaciones usuales de funciones y que, además, la integral es un operador lineal sobre él.

**Teorema 1.2.2.** Si  $f \in HK([a, b], \mathbb{R})$  y  $f(t) \geq 0$ , para toda  $t \in [a, b]$ , entonces

$$(HK) \int_a^b f \geq 0.$$

**Teorema 1.2.3.** (*Monotonía*) Sean  $f, g \in HK([a, b], \mathbb{R})$  tales que  $f \leq g$ . Entonces

$$(HK) \int_a^b f \leq (HK) \int_a^b g.$$

**Teorema 1.2.4. (Aditividad)** Sean  $f \in HK([a, b], \mathbb{R})$  y  $c \in (a, b)$ . Entonces  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si la función  $f$  restringida a los intervalos  $[a, c]$  y  $[c, b]$  es Henstock-Kurzweil integrable. En este caso tenemos

$$(HK) \int_a^b f = (HK) \int_a^c f + (HK) \int_c^b f.$$

**Teorema 1.2.5.** Sean  $f \in HK([a, b], \mathbb{R})$  y  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f = g$  casi donde quiera en  $[a, b]$ , en el sentido de la medida de Lebesgue, entonces  $g$  es Henstock-Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(HK) \int_a^b g = (HK) \int_a^b f.$$

A continuación mencionaremos dos propiedades de la integral de Henstock-Kurzweil que la diferencian de las integrales de Riemann y de Lebesgue; una de ellas es la *integrabilidad absoluta* y la otra es el concepto de *integral impropia*. **La integral de Henstock-Kurzweil no es una integral absoluta** en el sentido de que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es Henstock-Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  entonces, en general, no se cumple que la función  $|f|$  también sea integrable sobre el mismo intervalo (véase [36]); sin embargo, cuando se cumple la integrabilidad de  $|f|$  se tiene lo siguiente:

**Teorema 1.2.6.** Si  $f, |f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son ambas Henstock-Kurzweil integrables sobre  $[a, b]$ , entonces

$$\left| (HK) \int_a^b f \right| \leq (HK) \int_a^b |f|.$$

**Teorema 1.2.7.** Si  $f \in HK([a, b], \mathbb{R})$  y existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|f(t)| \leq M$ , para todo  $t \in [a, b]$ , entonces

$$\left| (HK) \int_a^b f \right| \leq M(b - a).$$

Si queremos definir el **concepto de integral impropia** de manera similar a como se hace para la integral de Riemann o Lebesgue, no obtenemos nada nuevo, por el siguiente resultado:

**Teorema 1.2.8. (Teorema de Hake)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces la función  $f$  es Henstock-Kurzweil integrable si y sólo si existe  $w \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $c \in [a, b)$  la restricción de  $f$  a  $[a, c]$  es integrable y

$$\lim_{c \rightarrow b^-} (HK) \int_a^c f = w.$$

En este caso,  $w = (HK) \int_a^b f$ .

**Observación.** *El anterior resultado también puede formularse haciendo uso del punto extremo izquierdo y un punto interior del intervalo; al lector interesado en tales formulaciones lo invitamos consultar [1].*

El siguiente resultado es utilizado cuando no existe un valor particular que pueda ser predicho como el valor de la integral de una función o es desconocido, el cual es una caracterización de la integral de Henstock-Kurzweil.

**Teorema 1.2.9. (Criterio de Cauchy)** *Una función  $f \in HK([a, b], \mathbb{R})$  si y sólo si para cualquier  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que si  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  y  $\{(J_j, \tau_j) : j = 1, \dots, m\}$  son particiones etiquetadas  $\delta$ -finas de  $[a, b]$ , entonces*

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - \sum_{j=1}^m f(\tau_j)l(J_j) \right| \leq \epsilon.$$

Dada la relación existente entre el concepto de medibilidad y el de integrabilidad, tal como en la integral de Lebesgue, no podemos pasar por alto este concepto de gran relevancia en este trabajo, por lo que en esta sección presentaremos algunos resultados importantes relacionados con la medibilidad.

**Definición 1.2.10.** *Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es **Lebesgue medible** sobre  $[a, b]$  si y sólo si existe una sucesión  $(s_n)$  de funciones simples sobre  $[a, b]$  tal que*

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t), \text{ casi dondequiera sobre } [a, b].$$

**Teorema 1.2.11.** *Si  $f \in HK([a, b], \mathbb{R})$ , entonces  $f$  es Lebesgue medible.*

**Nota.** *Es conocido que las funciones Riemann integrables están caracterizadas por ser continuas excepto en un conjunto de medida Lebesgue cero; sin embargo, al extenderla al contexto vectorial este no es el caso, En [36] se exhibe una función Riemann integrable la cual es discontinua en un conjunto de medida positiva.*

### 1.3. Lema de Saks-Henstock

El lema de Saks-Henstock, en ocasiones llamado simplemente “Lema de Saks”, tiene una importancia fundamental en la Teoría de Integración, ya que se utiliza para demostrar diversas propiedades de la integral de Henstock-Kurzweil; por ejemplo, al demostrar la continuidad de la integral indefinida, parte importante del Teorema Fundamental del Cálculo.

---

**Nota.** Aunque Henstock en [25] atribuye este resultado a S. Saks [37], su uso en la integración es mérito de él.

### 1.3.1. Versión Débil

La integrabilidad de Henstock-Kurzweil de una función  $f$  sobre  $[a, b]$  requiere, dado  $\epsilon > 0$ , que exista una medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que si  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$  entonces se cumple que la integral dista de la suma de Riemann una distancia menor que  $\epsilon$ . El Lema de Saks-Henstock afirma que el mismo grado de aproximación es válido para la diferencia entre cualquier subconjunto de términos de esta suma de Riemann y la suma de integrales de  $f$  sobre los correspondientes subintervalos.

**Lema 1.3.1.** *Sea  $f \in HK([a, b], \mathbb{R})$ . Para cada  $\epsilon > 0$  sea  $\delta_\epsilon$  una función medidora sobre  $[a, b]$  tal que si  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , se cumple que*

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (HK) \int_a^b f \right| < \epsilon. \quad (1.1)$$

Si  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, k\}$  es cualquier subpartición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , entonces

$$\left| \sum_{i=1}^k \left\{ f(\xi_i)l(I_i) - (HK) \int_{I_i} f \right\} \right| \leq \epsilon. \quad (1.2)$$

**Demostración:** Sea  $\epsilon > 0$ , como  $f$  es Kurzweil integrable, existe una función medidora  $\delta$  de  $[a, b]$  tal que para toda partición  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$   $\delta$ -fina de  $[a, b]$  tenemos

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (HK) \int_a^b f \right| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Sea  $\sum_1$  una suma parcial de  $\sum_{i=1}^n$  y  $E_i$  la unión de  $[t_{i-1}, t_i]$  de  $\sum_1$ . Supongamos que  $E_2$  es la clausura de  $[a, b] \setminus E_1$ . Entonces, por el Teorema 1.2.4,  $f$  es Kurzweil integrable sobre  $E_2$ . Por tanto podemos elegir una partición  $\delta$ -fina  $P_2$  de  $E_2$  tal que

$$\left| \sum_2 (f(\xi_i)l(I_i) - (HK) \int_{t_{i-1}}^{t_i} f) \right| \leq \frac{\epsilon}{4},$$

donde  $\sum_2$  es sobre  $P_2$ . Ahora escribimos  $\sum_3 = \sum_1 + \sum_2$  tenemos

$$\begin{aligned} & \left| \sum_1 (f(\xi_i)l(I_i) - (HK) \int_{t_{i-1}}^{t_i} f) \right| \\ & \leq \left| \sum_3 (f(\xi_i)l(I_i) - (HK) \int_{t_{i-1}}^{t_i} f) \right| \\ & + \left| \sum_2 (f(\xi_i)l(I_i) - (HK) \int_{t_{i-1}}^{t_i} f) \right| < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Consecuentemente, el teorema queda demostrado. □

### 1.3.2. Versión Fuerte

Ahora estableceremos la posibilidad de intercambiar el valor absoluto con la sumatoria en la desigualdad (1.2), conservando el mismo grado de aproximación.

**Lema 1.3.2.** *Con las hipótesis del Lema 1.3.1, tenemos*

$$\sum_{i=1}^k \left| f(\xi_j)l(I_j) - (HK) \int_{I_j} f \right| \leq 2\epsilon.$$

**Demostración:** Sea  $P^+$  la partición formada por las parejas de  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  para las cuales  $f(\xi_i)l(I_i) - \int_{I_i} f \geq 0$ , de igual forma, sea  $P^-$  la partición formada por las parejas de  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  para las cuales  $f(\xi_i)l(I_i) - \int_{I_i} f \leq 0$ . De esta forma,

$$\begin{aligned} \sum_{P^+} \left| f(\xi_i)l(I_i) - \int_{I_i} f \right| &= \sum_{P^+} \left\{ f(\xi_i)l(I_i) - \int_{I_i} f \right\} \leq \epsilon, \\ \sum_{P^-} \left| f(\xi_i)l(I_i) - \int_{I_i} f \right| &= - \sum_{P^+} \left\{ f(\xi_i)l(I_i) - \int_{I_i} f \right\} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Sumando ambos términos concluimos la demostración. □

A continuación estableceremos la equivalencia entre la integral de Henstock y la integral de Kurzweil:

---

**Teorema 1.3.3.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  es Henstock integrable si y sólo si  $f$  es Kurzweil integrable. Además, en este caso, el valor de las integrales coinciden.*

**Demostración:**  $\Rightarrow$ ) Sea  $\epsilon > 0$ , como  $f$  es Henstock integrable, existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que si  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , entonces

$$\sum_{i=1}^n |f(\xi_i)l(I_i) - F(t_i) - F(t_{i-1})| < \epsilon.$$

Sea  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  una partición  $\delta$ -fina. Entonces

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (H) \int_a^b f \right| = \left| \sum_{i=1}^n (f(\xi_i)l(I_i) - (H) \int_{t_{i-1}}^{t_i} f) \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left| f(\xi_i)l(I_i) - (H) \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \right| = \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)l(I_i) - F(t_i) - F(t_{i-1})| < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f$  es Kurzweil integrable y  $(K) \int_a^b f = (H) \int_a^b f$ .

$\Leftarrow$ ) Tomamos  $F(t) = (K) \int_a^t f$ , para todo  $t \in [a, b]$ ; la demostración se sigue del Lema 1.3.2.

□

A lo largo de este trabajo al Lema 1.3.1 lo denominaremos **Lema débil de Saks-Henstock** y al Lema 1.3.2 como **Lema fuerte de Saks-Henstock**. Observe que 1.3.2 implica 1.3.1 como consecuencia de la desigualdad del triángulo; más aún, haciendo uso del orden usual del conjunto de los números reales, el recíproco también se cumple (véase [1]), por lo que en este contexto, son equivalentes. Sin embargo, al establecer estas mismas formulaciones para la integral de Kurzweil en el contexto vectorial, en general, éste no es el caso (Sección 2.4 del Capítulo 2).

## 1.4. El Teorema Fundamental del Cálculo

Existen dos aspectos a los cuales tradicionalmente se les denomina Teorema Fundamental del Cálculo (TFC): una parte establece una condición bajo la cual se puede integrar la derivada de una función diferenciable (Parte I) y la otra establece algunas propiedades de la integral indefinida tal como su diferenciabilidad (Parte II). En esta sección presentaremos ambos aspectos del TFC para la integral de Henstock-Kurzweil.

### 1.4.1. Parte I

**Teorema 1.4.1.** *Si la función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $[a, b]$ , entonces  $f'$  es Henstock-Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  y*

$$(HK) \int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

### 1.4.2. Parte II

**Definición 1.4.2.** *Sea  $f \in HK([a, b], \mathbb{R})$ . La función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$F(t) = (HK) \int_a^t f, \quad t \in [a, b],$$

*se le denomina la **integral indefinida** de  $f$ .*

**Teorema 1.4.3.** *Si  $f \in HK([a, b], \mathbb{R})$ , entonces:*

- (i) *Su integral indefinida  $F$  es continua en  $[a, b]$ .*
- (ii) *Si  $f$  es continua en  $t \in [a, b]$ , entonces  $F'(t) = f(t)$ .*
- (iii)  *$F$  es diferenciable casi donde quiera en  $[a, b]$  y  $F'(t) = f(t)$  casi dondequiera en  $[a, b]$ .*

A continuación estableceremos un resultado más general que el teorema anterior, para ello, requerimos antes definir algunos conceptos.

**Definición 1.4.4.** *Sean  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $[c, d] \subset [a, b]$ . Definimos la **oscilación** de la función  $F$  sobre el intervalo  $[c, d]$  por*

$$\omega(F, [c, d]) := \sup\{|F(y) - F(x)| : c \leq x \leq y \leq d\}.$$

**Definición 1.4.5.** *Sean  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $E \subset [a, b]$ .*

- *La función  $F$  es **absolutamente continua** (AC) sobre  $E$  si y sólo si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\sum_{i=1}^n |F(d_i) - F(c_i)| < \epsilon,$$

*donde  $\{[c_i, d_i] : 1 \leq i \leq n\}$  es una colección finita de intervalos no traslapados con puntos extremos en  $E$  que satisfacen*

$$\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta.$$

- La función  $F$  es **absolutamente continua en el sentido restringido** ( $AC_*$ ) sobre  $E$  si y sólo si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\sum_{i=1}^n \omega(F, [c_i, d_i]) < \epsilon,$$

donde  $\{[c_i, d_i] : 1 \leq i \leq n\}$  es una colección finita de intervalos no traslapados con puntos extremos en  $E$  que satisfacen

$$\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta.$$

- La función  $F$  es **absolutamente continua generalizada** ( $ACG$ ) sobre  $E$  si y sólo si  $F|_E$  es continua sobre  $E$  y  $E$  puede ser escrito como unión numerable de conjuntos sobre los cuales  $F$  es  $AC$ . La función  $F$  es **absolutamente continua generalizada en el sentido restringido** ( $ACG_*$ ) sobre  $E$  si y sólo si  $F|_E$  es continua sobre  $E$  y  $E$  puede ser escrito como unión numerable de conjuntos sobre los cuales  $F$  es  $AC_*$ .

Ahora contamos con las herramientas necesarias para formular el siguiente resultado, el cual, como mencionamos anteriormente, es más general que el Teorema 1.4.3.

**Teorema 1.4.6.** (Gordon, [17]) Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es Henstock-Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si existe una función  $F$   $ACG_*$  sobre  $[a, b]$  tal que  $F' = f$  casi donde quiera en  $[a, b]$ .

## 1.5. Teoremas de Convergencia

En ocasiones es necesario considerar el límite de sucesiones o series de funciones reales, si estas convergen de alguna forma, en algunos casos la función límite es mucho más complicada de analizar que los elementos de la sucesión; por ejemplo, si las funciones son Riemann integrables la función límite puede no ser Riemann integrable. Adicionalmente, si el límite es Riemann integrable, su integral de Riemann puede no ser el límite de la sucesión  $\left(\int_a^b f_n\right)$  de integrales; en [1] podemos encontrar ejemplos de lo anterior. Una condición suficiente en la integral de Riemann para garantizar que la función límite sea Riemann integrable es considerar la convergencia uniforme de la sucesión; sin embargo, la integral de Lebesgue debilita esta condición

al considerar convergencia puntual y algunas condiciones adicionales sobre la sucesión de funciones tales como que la sucesión de funciones Lebesgue integrables sea monótona o dominada bajo una función Lebesgue integrable. En esta sección exhibimos algunos teoremas de convergencia para la integral de Henstock-Kurzweil análogos a los de la integral de Lebesgue.

### 1.5.1. Teorema de Convergencia Monótona

El siguiente resultado es una generalización de un importante teorema probado en 1906 para la integral de Lebesgue, formulado por el matemático italiano Beppo Levi.

**Teorema 1.5.1. (de Convergencia Monótona)** *Sea  $(f_n)$  una sucesión monótona en  $HK([a, b], \mathbb{R})$ , y sea  $f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ , para casi toda  $t \in [a, b]$ . Entonces  $f \in HK([a, b], \mathbb{R})$  si y sólo si la sucesión  $((HK) \int_a^b f_n)$  es acotada en  $\mathbb{R}$ ; en este caso*

$$(HK) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (HK) \int_a^b f_n.$$

### 1.5.2. Teorema de Convergencia Dominada

**Teorema 1.5.2. (de Convergencia Dominada)** *Sea  $(f_n)$  una sucesión en  $HK([a, b], \mathbb{R})$  con  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ , para toda  $t \in [a, b]$ . Supongamos que existen funciones  $\alpha, \omega \in HK([a, b], \mathbb{R})$  tal que*

$$\alpha(t) \leq f_n(t) \leq \omega(t), \text{ para casi toda } t \in [a, b], n \in \mathbb{N}.$$

Entonces  $f \in HK([a, b], \mathbb{R})$  y

$$(HK) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (HK) \int_a^b f_n.$$

La hipótesis “usual” de dominación en el Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Lebesgue es que exista una función  $g$  Lebesgue integrable que domine a la sucesión  $(f_n)$  en el sentido de que  $|f_n| \leq g$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ ; sin embargo, para la integral de Henstock-Kurzweil si consideramos esta misma dominación no obtenemos nada nuevo dado que nos implica que cada elemento de la sucesión es Lebesgue integrable.

**Nota.** *Es importante notar que si al menos una de las funciones  $\alpha, \omega, f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , en el Teorema 1.5.2 es Lebesgue integrable sobre  $[a, b]$ , entonces la función límite es Lebesgue integrable sobre el mismo intervalo.*

### 1.5.3. Teorema de Equi-integrabilidad

Como podrá observar el lector, los Teoremas de Convergencia Monótona y Dominada utilizan la relación de orden usual del conjunto de los números reales; sin embargo, un criterio más general que éstos es el de equi-integrabilidad, el cual, no hace uso de esta relación, lo cual es de gran importancia al momento de considerar funciones vectoriales, esto es, dado un  $\epsilon > 0$  la misma función medidora  $\delta$  es válida para la integrabilidad de todas las funciones que pertenecen a la sucesión. En [40] denominan a este teorema como “Teorema de Convergencia Uniforme”.

**Definición 1.5.3.** Una colección  $\mathfrak{F} \subset HK([a, b], \mathbb{R})$  es **equi-integrable** sobre  $[a, b]$  si y sólo si para cada  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta_\epsilon$  sobre  $[a, b]$  tal que si  $P$  es cualquier partición  $\delta_\epsilon$ -fina de  $[a, b]$  y  $f \in \mathfrak{F}$ , entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (HK) \int_a^b f \right| \leq \epsilon.$$

**Teorema 1.5.4. (de Equi-integrabilidad)** Si  $(f_n) \subset HK([a, b], \mathbb{R})$  es una sucesión equi-integrable sobre  $[a, b]$  y  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ , para toda  $t \in [a, b]$ , entonces  $f$  es Henstock-Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(HK) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (HK) \int_a^b f_n. \tag{1.3}$$

McLeod en [28] demuestra que el Teorema de Convergencia Monótona y el Teorema de Convergencia Dominada son consecuencias del Teorema de Equi-integrabilidad; Gordon en [16] construye otra demostración de este hecho haciendo uso de resultados de la Teoría de la Medida.



## Capítulo 2

# Integrales de Henstock y Kurzweil para Funciones Vectoriales

El objetivo principal de este capítulo es realizar un análisis de las integrales definidas por Henstock y Kurzweil en el contexto de los espacios de Banach. Específicamente, analizaremos algunas de sus propiedades algebraicas; sus correspondientes versiones del Lema de Saks-Henstock y del Teorema Fundamental del Cálculo.

### 2.1. Definiciones

A continuación presentaremos las definiciones de las integrales de Henstock y Kurzweil en el contexto de los espacios de Banach.

**Definición 2.1.1.** *Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es **Henstock integrable** sobre  $[a, b]$  si y sólo si existe una función  $F : [a, b] \rightarrow X$  con la siguiente propiedad:*

*Dado  $\epsilon > 0$ , existe una función medidora  $\delta$  de  $[a, b]$  tal que si  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , se cumple que*

$$\sum_{i=1}^n \|F(t_i) - F(t_{i-1}) - f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\| < \epsilon.$$

*En este caso, escribiremos  $(H) \int_a^t f = F(t) - F(a)$ ,  $t \in [a, b]$ ; además, si  $I = [a, b]$ , al valor de la integral de Henstock de  $f$  sobre  $I$  también lo denotaremos por  $F(I) = F(b) - F(a) = (H) \int_I f$ .*

A la colección de todas las funciones Henstock integrables sobre  $[a, b]$  la denotaremos por  $H([a, b], X)$ .

**Nota.** A la integral de Henstock también se le conoce como “Integral variacional”, “Integral fuerte de Henstock-Kurzweil” o la “integral HL”.

**Definición 2.1.2.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es **Kurzweil integrable** sobre  $[a, b]$  si y sólo si existe  $w \in X$  con la siguiente propiedad:

Dado  $\epsilon > 0$ , existe una función medidora  $\delta$  de  $[a, b]$  tal que para toda partición etiquetada  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$   $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , se cumple que

$$\left\| w - \sum_i f(\xi_i)l(I_i) \right\| < \epsilon.$$

Si tal valor  $w$  existe, entonces, por el Lema de Cousin, éste es único y lo denotaremos por  $w := (K) \int_a^b f$ ; además, si  $I = [a, b]$ , al valor de la integral de Kurzweil de  $f$  sobre  $I$  también lo denotaremos por  $w = (K) \int_I f$ . A la colección de funciones Kurzweil integrables sobre  $[a, b]$  la denotaremos por  $K([a, b], X)$ .

**Nota.** Originalmente, Kurzweil define su integral considerando funciones reales (véase [26]); Cao [2] realiza la extensión de esta integral al contexto de los espacios de Banach. Esta integral es comúnmente conocida con el nombre de “integral en el sentido de Kurzweil” o “K-integral”, en ocasiones también se le denomina integral de “Kurzweil-Henstock” o “Henstock-Kurzweil” debido a que Henstock realizó aportaciones importantes para esta integral tal como la formulación del Lema de Saks-Henstock.

## 2.2. Construcción de una función en $l_2([a, b])$

La función que presentamos en esta sección (Ejemplo 2.2.4) es de suma importancia en el desarrollo de ciertas partes de este trabajo de tesis, tal como en las Secciones 2.3, 2.4, 2.5 y en el Capítulo 4; pero antes mencionaremos el concepto de *sumabilidad* y algunas propiedades de éste (Proposición 2.2.2 y Teorema 2.2.3).

**Definición 2.2.1.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un conjunto arbitrario y sea  $X$  un espacio normado. Una familia  $(x_i)_{i \in I}$  de elementos de  $X$  es **sumable** con suma  $x \in X$  y escribimos  $\sum_{i \in I} x_i = x$  si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un subconjunto finito  $F_\epsilon \subset I$  tal que para todo subconjunto finito  $F \subset I$  con  $F \supset F_\epsilon$ ,

$$\left\| x - \sum_{i \in F} x_i \right\| < \epsilon.$$

**Proposición 2.2.2.** Sean  $(x_i)_{i \in I}$  y  $(y_i)_{i \in I}$  dos familias de elementos de  $X$  y  $c \in \mathbb{R}$ . Si  $(x_i)_{i \in I}$  y  $(y_i)_{i \in I}$  son sumables, entonces  $(x_i + y_i)_{i \in I}$  y  $(cx_i)_{i \in I}$  son sumables, y además

$$\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i,$$

$$\sum_{i \in I} (cx_i) = c \sum_{i \in I} x_i.$$

Con base en la Proposición 2.2.2 se tiene que el conjunto  $l_2(I)$  de todas las familias  $(x_i)_{i \in I}$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ , tal que  $(|x_i|^2)_{i \in I}$  es sumable; es decir,

$$l_2(I) = \left\{ x = (x_i)_{i \in I}, x_i \in \mathbb{R}; \sum_{i \in I} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

es un espacio vectorial. En este caso, la expresión

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} x_i y_i$$

define un producto interior. Además,

**Teorema 2.2.3.**  $l_2(I)$  equipado con la norma

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i \in I} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

es un espacio de Banach.

El conjunto  $\mathfrak{B} = \{e_i | i \in I\}$ , con  $e_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

es una base ortonormal completa para  $l_2(I)$ .

Con los conceptos establecidos anteriormente, a continuación definiremos una función que será de suma importancia posteriormente al servir como ejemplo y contraejemplo de diversos resultados.

**Ejemplo 2.2.4.** Sea  $I = [a, b]$  y  $X = l_2([a, b])$  equipado con la norma  $\|\cdot\|_2$ . Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$  la función dada por

$$f(i) = e_i, \quad i \in [a, b].$$


---

## 2.3. Propiedades

En esta sección estableceremos algunas propiedades elementales e importantes de las integrales de Henstock y Kurzweil; la forma en cómo lo haremos es con base en el esquema dado en el Capítulo 1. Las pruebas omitidas aquí pueden encontrarse en libros clásicos tales como [38].

**Teorema 2.3.1.** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow X$  funciones Henstock (respectivamente Kurzweil) integrables sobre  $[a, b]$  y sea  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces la función:

1.  $cf$  es Henstock (respectivamente Kurzweil) integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(H(K)) \int_a^b cf = c(H(K)) \int_a^b f.$$

2.  $f + g$  es Henstock (respectivamente Kurzweil) integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(H(K)) \int_a^b (f + g) = (H(K)) \int_a^b f + (H(K)) \int_a^b g,$$

donde  $(H(K)) \int_a^b$  denota la integral de Henstock (respectivamente Kurzweil).

Como consecuencia del resultado anterior, se deduce que el conjunto  $H([a, b], X)$  (respectivamente  $K([a, b], X)$ ) es un espacio vectorial respecto a las operaciones usuales de funciones; más aún, la integral de Henstock (respectivamente Kurzweil) es un operador lineal sobre él.

**Teorema 2.3.2.** Supongamos que  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Henstock (respectivamente Kurzweil) integrable sobre  $[a, b]$  y sea  $J \subset [a, b]$  un intervalo compacto. Entonces  $f$  es Henstock (respectivamente Kurzweil) integrable sobre el intervalo  $J$ .

**Teorema 2.3.3.** Sean  $f : [a, b] \rightarrow X$  y  $c \in (a, b)$ . Si  $f$  es Henstock (respectivamente Kurzweil) integrable sobre cada uno de los intervalos  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , entonces  $f$  es Henstock (respectivamente Kurzweil) integrable sobre el intervalo  $[a, b]$ . Más aún,

$$(H(K)) \int_a^b f = (H(K)) \int_a^c f + (H(K)) \int_c^b f.$$

**Teorema 2.3.4.** Sean  $f : [a, b] \rightarrow X$  Henstock (respectivamente Kurzweil) integrable sobre  $[a, b]$  y  $g : [a, b] \rightarrow X$ . Si  $f = g$  casi dondequiera en  $[a, b]$ , entonces  $g$  es Henstock (respectivamente Kurzweil) integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(H(K)) \int_a^b g = (H(K)) \int_a^b f.$$


---

**Teorema 2.3.5.** Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Henstock (respectivamente Kurzweil) integrable sobre  $[a, b]$  y existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $\|f(t)\| \leq M$ , para todo  $t \in [a, b]$ , entonces

$$\left\| (H(K)) \int_a^b f \right\| \leq M(b-a).$$

**Demostración:** Supongamos que  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Kurzweil integrable, si  $f$  es Henstock integrable la demostración se sigue paso a paso.

Sea  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  una partición etiquetada de  $[a, b]$ , es inmediato que

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) \right\| \leq M(b-a). \quad (2.1)$$

Sea  $\epsilon > 0$ , como  $f$  es Kurzweil integrable, existe  $\delta$  función medidora tal que si  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (K) \int_a^b f \right\| < \epsilon.$$

Ahora bien,

$$\left\| (K) \int_a^b f \right\| - \left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (K) \int_a^b f \right\| < \epsilon.$$

Lo anterior junto con la desigualdad (2.1) nos implica que

$$\left\| (K) \int_a^b f \right\| \leq \epsilon + \left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) \right\| = \epsilon + M(b-a).$$

Como  $\epsilon > 0$  es arbitrario, entonces

$$\left\| (K) \int_a^b f \right\| \leq M(b-a).$$

□

**Nota.** En la revisión bibliográfica que hemos realizado no encontramos el anterior resultado como tal y, aunque elemental, **su demostración es de nuestra autoría.**

**Teorema 2.3.6. (Teorema de Hake)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$  una función tal que la integral (K)  $\int_a^c f$  existe, para todo  $a \leq c < b$  y, que además el siguiente límite existe

$$\lim_{c \rightarrow b^-} (K) \int_a^c f = w.$$

Entonces la integral (K)  $\int_a^b f$  existe y la igualdad

$$(K) \int_a^b f = w$$

se cumple.

**Observación.** El recíproco del Teorema anterior también es válido como consecuencia del Teorema 2.3.2; sin embargo, el Teorema de Hake no es válido para la integral de Riemann en el contexto real ni para la integral de Lebesgue; por ejemplo, la función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$  no es Riemann integrable, sin embargo,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2.$$

**Teorema 2.3.7. (Criterio de Cauchy: Kurzweil)**

Una función  $f \in K([a, b], X)$  si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que para toda pareja de particiones etiquetadas  $\delta$ -finas  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, p\}$  y  $\{(J_j, \tau_j) : j = 1, \dots, r\}$  de  $[a, b]$  se cumple

$$\left\| \sum_{i=1}^p f(\xi_i)l(I_i) - \sum_{j=1}^r f(\tau_j)l(J_j) \right\| < \epsilon. \quad (2.2)$$

**Teorema 2.3.8. (Criterio de Cauchy: Henstock)**

Si la función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Henstock integrable, entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que para toda pareja de particiones etiquetadas  $\delta$ -finas  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, p\}$  y  $\{(J_j, \tau_j) : j = 1, \dots, r\}$  de  $[a, b]$  se cumple

$$\left\| \sum_{i=1}^p f(\xi_i)l(I_i) - \sum_{j=1}^r f(\tau_j)l(J_j) \right\| < \epsilon. \quad (2.3)$$

Observe que el Criterio de Cauchy para la integral de Kurzweil (Teorema 2.3.7) caracteriza a las funciones Kurzweil integrables. Sin embargo, el Criterio de Cauchy para la integral de Henstock (Teorema 2.3.8), no caracteriza a las funciones Henstock integrables, dado que, si fuese así entonces ambas

integrales serían equivalentes, lo cual, en general, no es cierto, tal como lo veremos en el Capítulo 4.

Por el Teorema 1.2.11 sabemos que, en el contexto real, tanto las funciones Henstock como Kurzweil integrables son Lebesgue medibles. Al considerar el contexto vectorial las funciones Henstock integrables siguen siendo medibles en el sentido siguiente:

**Definición 2.3.9.** *Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es llamada **fuertemente medible** si y sólo si existe una sucesión de funciones simples  $(f_n)$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(t) - f(t)\| = 0,$$

para casi toda  $t \in [a, b]$ .

**Nota.** *Cuando  $X = \mathbb{R}$  el concepto de medibilidad fuerte coincide con el de medibilidad de Lebesgue.*

**Teorema 2.3.10.** *(Cao, [2]) Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Henstock integrable sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  es fuertemente medible.*

Sin embargo, para la integral de Kurzweil el anterior resultado no es válido:

**Ejemplo 2.3.11.** *Consideremos la función del Ejemplo 2.2.4, construida en la Sección 2.2, es decir,  $f : [a, b] \rightarrow l_2([a, b])$  dada por*

$$f(i) = e_i, \quad i \in [a, b],$$

con

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Primero mostraremos que  $f$  es Kurzweil integrable:

- Sea  $\epsilon > 0$ , tomamos  $\delta > 0$  tal que  $\delta < \frac{\epsilon^2}{b-a}$ . Para toda partición etiquetada  $(\frac{\delta}{2})$ -fina  $\{(I_j, \xi_j) : j = 1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) - 0 \right\|_2 &= \left\| \sum_{j=1}^n e_{\xi_j}(t_j - t_{j-1}) \right\| = \left[ \sum_{j=1}^n |t_j - t_{j-1}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &< \delta^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \right]^{\frac{1}{2}} = \delta^{\frac{1}{2}}(b-a)^{\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon}{(b-a)^{\frac{1}{2}}}(b-a)^{\frac{1}{2}} = \epsilon. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Más aún, dado que la función medidora  $\delta$  es constante,  $f$  es “Riemann integrable”.

---

Ahora, probaremos que  $f$  no es fuertemente medible:

- Supongamos que  $f$  es fuertemente medible, entonces existe una sucesión  $(f_n)$  de funciones simples con valores en  $X$  que converge puntualmente a  $f$  casi donde quiera en  $[a, b]$ . Sea  $A_n = \text{Im } f_n$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  es un conjunto finito ya que  $f_n$  es simple, además existe  $M \subset [a, b]$  medible con  $\mu(M) = 0$  tal que

$$f([a, b] - M) = \{f(i) | i \in [a, b], i \notin M\} \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}. \quad (2.5)$$

$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$  es un espacio separable ya que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  es un conjunto numerable el cual es denso en él.

De (2.5) se sigue que  $f([a, b] - M)$  es un espacio separable, lo cual es falso ya que

$$\{e_i | i \in [a, b]\} \subseteq f([a, b] - M)$$

y  $\{e_i | i \in [a, b]\}$  es no numerable y  $\|e_i\|_2 = 1$ , por lo que  $f$  no es fuertemente medible.

## 2.4. Lema de Saks-Henstock

En esta sección estableceremos las versiones correspondientes del Lema de Saks-Henstock para la integral de Henstock y Kurzweil. Para el caso de la integral de Henstock ambas versiones se cumplen (versión débil y fuerte); sin embargo, para la integral de Kurzweil sólo se cumple la versión débil, aunque exhibiremos una versión similar a la versión fuerte del Lema de Saks-Henstock para la integral de Kurzweil (Lema 2.4.6).

### 2.4.1. Versión Débil

**Lema 2.4.1.** *Supongamos que  $f \in K([a, b], X)$ . Dado  $\epsilon > 0$  supongamos que una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  es tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(J_i) - (K) \int_a^b f \right\| < \epsilon,$$

para toda partición  $\{(J_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$   $\delta$ -fina de  $[a, b]$ . Entonces si  $\{(K_j, \tau_j) : j = 1, \dots, k\}$  es una subpartición  $\delta$ -fina de  $[a, b]$  arbitraria tenemos

$$\left\| \sum_{j=1}^k \left\{ f(\tau_j)l(K_j) - (K) \int_{K_j} f \right\} \right\| \leq \epsilon.$$

**Lema 2.4.2.** Si  $f \in H([a, b], X)$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que si  $\{(K_j, r_j), j = 1, \dots, k\}$  es una subpartición arbitraria  $\delta$ -fina de  $[a, b]$  tenemos

$$\left\| \sum_{j=1}^k \{f(r_j)l(K_j) - F(K_j)\} \right\| \leq \epsilon,$$

donde  $F(K_j) = (H) \int_{K_j} f$ .

### 2.4.2. Versión Fuerte

**Lema 2.4.3.** Si  $f \in H([a, b], X)$  entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que si  $\{(K_j, r_j), j = 1, \dots, k\}$  es una subpartición arbitraria  $\delta$ -fina de  $[a, b]$  tenemos

$$\sum_{j=1}^k \|f(r_j)l(K_j) - F(K_j)\| \leq \epsilon,$$

donde  $F(K_j) = (H) \int_{K_j} f$ .

A continuación mostraremos, a través de la función construida en la Sección 2.2, que la versión fuerte del Lema de Saks-Henstock no se cumple para la integral de Kurzweil.

**Ejemplo 2.4.4.** Consideremos la función  $f : [a, b] \rightarrow l_2([a, b])$  dada por

$$f(i) = e_i, \quad i \in [a, b],$$

con

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

En el Ejemplo 2.3.11 de la Sección 2.3 se demostró que  $f$  es Kurzweil integrable y el valor de su integral es 0.

Ahora probaremos que la función no cumple con la conclusión análoga al Lema Fuerte de Saks-Henstock 1.3.2, para ello tomamos  $\epsilon = \frac{b-a}{2}$ , supongamos que existe  $\delta > 0$  tal que para toda partición etiquetada  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$   $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , se cumple que

$$\sum_{i=1}^n \|f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - 0\|_2 = \sum_{i=1}^n \|e_{\xi_i}(t_i - t_{i-1})\|_2 = \sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2} = b - a; \tag{2.6}$$

por lo tanto la expresión  $\sum_{i=1}^n \|f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - 0\|_2$  no se puede hacer menor que  $\epsilon$  y en consecuencia  $f$  no cumple la tesis del Lema Fuerte de Saks-Henstock 1.3.2.

Por lo anterior, las hipótesis del Lema Fuerte de Saks-Henstock 2.4.3 no son suficientes para formular un análogo para la integral de Kurzweil; sin embargo, bajo ciertas condiciones adicionales sobre el espacio de Banach, la versión fuerte del Lema de Saks-Henstock sí tiene validez, tal y como se establece en el siguiente Teorema.

**Teorema 2.4.5.** *Si  $f \in K([a, b], X)$ , el espacio de Banach  $X$  es de dimensión finita y si para un  $\epsilon > 0$  dado, una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  es tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(J_i) - (K) \int_a^b f \right\| < \epsilon,$$

para toda partición etiquetada  $\delta$ -fina  $\{(J_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  de  $[a, b]$ , entonces tenemos

$$\sum_{j=1}^k \left\| f(\tau_j)l(K_j) - (K) \int_{K_j} f \right\| < C\epsilon,$$

para cualquier subpartición arbitraria  $\delta$ -fina  $\{(K_j, \tau_j) : j = 1, \dots, k\}$  de  $[a, b]$ .  $C$  es una constante que depende de la dimensión del espacio de Banach únicamente.

**Nota.** *El anterior resultado muestra que si  $X$  es de dimensión finita, la integral Kurzweil cumple ambas versiones del Lema de Saks-Henstock (débil y fuerte). Así pues, esto nos motiva a cuestionarnos si este hecho caracteriza a los espacios de dimensión finita, la respuesta es afirmativa, Solodov en [39] demuestra este hecho. Una gran aportación sobre esta línea fue hecha por S. Nakanishi en [32] al demostrar que la versión fuerte del Lema de Saks-Henstock se cumple en ciertos tipos de espacios llamados nucleares normados, los cuales son de dimensión finita.*

A continuación exhibiremos una formulación similar a la versión fuerte del Lema de Saks-Henstock para la integral de Kurzweil.

**Lema 2.4.6.** *(Cao, [2]) Sea  $f \in K([a, b], X)$  con integral indefinida  $F$ . Entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que para cualquier partición etiquetada  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$   $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , tenemos*

$$\sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{i=1}^n |x^*(f(\xi_i)l_{I_i} - F(I_i))| < \epsilon.$$

## 2.5. Teorema Fundamental del Cálculo

En esta sección estableceremos el correspondiente Teorema Fundamental del Cálculo tanto para la integral de Henstock como para la integral de Kurzweil. Nótese que, con base en los Teoremas 1.4.1 y 1.4.3 podemos ver que la integral de Henstock y la integral de Kurzweil en el contexto real tienen la misma formulación del TFC en sus dos partes (parte I y parte II). Aunque la integral de Henstock en el contexto de los espacios de Banach tiene la misma formulación del TFC como en el contexto real, la integral de Kurzweil solamente conserva el TFC en su parte I, dado que, en general, la derivada de la integral indefinida no coincide con la función, sin embargo, estableceremos una versión “débil” de la parte II del TFC (Teorema 2.5.11).

En el contexto de los espacios de Banach existen diferentes conceptos de diferenciabilidad, tales como la derivada de Fréchet, la derivada de Gâteaux, entre otros; sin embargo, el concepto de diferenciabilidad que utilizaremos en esta sección será el de derivada fuerte (derivada de Fréchet), el cual en el contexto real coincide con el concepto de derivada clásica.

**Definición 2.5.1.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es **fuertemente diferenciable** en  $t_0 \in [a, b]$  si y sólo si existe  $x \in X$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - x \right\| = 0.$$

Si tal  $x$  existe, es único y lo denotaremos  $x := f'(t_0)$  y la denominaremos la derivada fuerte de  $f$  en  $t_0$ ; además, si la derivada fuerte existe para cada  $t \in [a, b]$  entonces diremos que  $f$  es **fuertemente diferenciable** en  $[a, b]$ .

Ahora, demostraremos el Teorema Fundamental del Cálculo en su parte I para ambas integrales, pero antes requerimos el siguiente resultado.

**Lema 2.5.2. (Straddle)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$  fuertemente diferenciable en un punto  $t \in [a, b]$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta_\epsilon(t) > 0$  tal que si  $u, v \in [a, b]$  satisfacen

$$t - \delta_\epsilon(t) \leq u \leq t \leq v \leq t + \delta_\epsilon(t), \quad (2.7)$$

entonces

$$\|f(v) - f(u) - f'(t)(v - u)\| \leq \epsilon(v - u). \quad (2.8)$$

**Demostración:** Por la Definición 2.5.1 de la derivada fuerte  $f'(t)$  en el punto  $t \in [a, b]$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta_\epsilon(t) > 0$  tal que si  $0 < |z - t| \leq \delta_\epsilon(t)$ ,  $z \in [a, b]$ , entonces

$$\left\| \frac{f(z) - f(t)}{z - t} - f'(t) \right\| \leq \epsilon,$$

de aquí, se sigue que

$$\|f(z) - f(t) - f'(t)(z - t)\| \leq \epsilon|z - t|,$$

para todo  $z \in [a, b]$  tal que  $|z - t| \leq \delta_\epsilon(t)$ . En particular, si elegimos  $u \leq t$  y  $v \geq t$ , con  $u, v \in [t - \delta_\epsilon(t), t + \delta_\epsilon(t)]$ , entonces que  $v - t \geq 0$  y  $t - u \geq 0$ . Restando y sumando el término  $f(t) - f'(t)t$ , tenemos que

$$\begin{aligned} & \|f(v) - f(u) - f'(t)(v - u)\| \\ &= \|[f(v) - f(t) - f'(t)(v - t)] - [f(u) - f(t) - f'(t)(u - t)]\| \\ &\leq \|f(v) - f(t) - f'(t)(v - t)\| + \|f(u) - f(t) - f'(t)(u - t)\| \\ &\leq \epsilon(v - t) + \epsilon(t - u) = \epsilon(v - u). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|f(v) - f(u) - f'(t)(v - u)\| \leq \epsilon(v - u).$$

□

Al considerar funciones vectoriales el siguiente resultado es válido, tanto para la integral de Henstock como la de Kurzweil, al cual haremos referencia como el Teorema Fundamental del Cálculo parte I.

**Teorema 2.5.3. (Teorema Fundamental del Cálculo (Parte I))** Si la función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es fuertemente diferenciable en  $[a, b]$ , entonces  $f'$  es Henstock (respectivamente Kurzweil) integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(H(K)) \int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

**Demostración:** Sea  $\epsilon > 0$ , definamos la función medidora  $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  por  $\delta(t) = \delta_\epsilon(t)$ , donde  $\delta_\epsilon(t)$  cumple con 2.7 y sea  $\{([t_{i-1}, t_i], \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  una partición etiquetada  $\delta_\epsilon$ -fina de  $[a, b]$ . Como  $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ , se sigue de 2.8 que

$$\|f(t_i) - f(t_{i-1}) - f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\| \leq \epsilon(t_i - t_{i-1}). \quad (2.9)$$

Para estimar  $f(b) - f(a) - \sum_{i=1}^n f'(t)(t_i - t_{i-1})$ , usamos la suma telescópica

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1})],$$

para obtener

$$f(b) - f(a) - \sum_{i=1}^n f'(t_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(t_{i-1}) - f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})].$$

Usando la desigualdad del triángulo y la desigualdad 2.9 tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| f(b) - f(a) - \sum_{i=1}^n f'(t_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| &\leq \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1}) - f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \epsilon(t_i - t_{i-1}) = \epsilon(b - a). \end{aligned}$$

Como  $\epsilon > 0$  es arbitrario, tenemos que  $f'$  es Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  con integral igual a  $f(b) - f(a)$ . Además, de manera directa de la desigualdad anterior, tenemos que  $f'$  también es Henstock integrable sobre  $[a, b]$ .

□

Por el Teorema 2.5.3, podemos ver que tanto la integral de Henstock como la integral de Kurzweil proporcionan una solución general al problema de las primitivas en el contexto de los espacios de Banach.

Con base en el Teorema 2.3.2 se tiene que si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Henstock (respectivamente Kurzweil) integrable sobre  $[a, b]$ , entonces la expresión  $F(t) = (H(K)) \int_a^t f$  tiene sentido para todo  $t \in (a, b]$ . A la función  $F$  definida de esta manera le llamaremos la **integral indefinida** de  $f$ .

El concepto de continuidad clásico se puede generalizar de forma directa al contexto de los espacios de Banach, denominado como *continuidad fuerte*, al que haremos referencia simplemente como continuidad.

**Definición 2.5.4.**  $f : [a, b] \rightarrow X$  es **(fuertemente) continua** en  $t_0 \in [a, b]$  si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t) - f(t_0)\| = 0.$$

Diremos que  $f$  es continua si es (fuertemente) continua en cada punto de su dominio.

Antes de establecer la formulación de la parte II del Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Henstock formularemos un resultado que nos será de utilidad en su demostración: el Teorema de la Cubierta de Vitali, para ello definiremos este concepto.

**Definición 2.5.5.** Sea  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Una colección  $\mathcal{I}$  de intervalos es una **cubierta de Vitali** de  $E$  si y sólo si para cada  $t \in E$  y  $\epsilon > 0$ , existe un intervalo  $I \in \mathcal{I}$  tal que  $t \in I$  y  $\mu(I) < \epsilon$ .

**Teorema 2.5.6. (Teorema de la Cubierta de Vitali)** Sean  $E \subseteq \mathbb{R}$  con  $\mu^*(E) < \infty$ . Si  $\mathcal{I}$  es una Cubierta de Vitali de  $E$ , entonces para cada  $\epsilon > 0$  existe una colección finita  $\{I_k : 1 \leq k \leq n\}$  de intervalos disjuntos en  $\mathcal{I}$  tal que

$$\mu^* \left( E - \bigcup_{k=1}^n I_k \right) < \epsilon.$$

Además, existe una sucesión  $(I_k)$  de intervalos disjuntos en  $\mathcal{I}$  tal que

$$\mu^* \left( E - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right) = 0.$$

**Teorema 2.5.7. (Teorema Fundamental del Cálculo (Parte II))** Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Henstock integrable sobre  $[a, b]$ , entonces

- (i) Su integral indefinida  $F$  es continua en  $[a, b]$ .
- (ii) Si  $f$  es continua en  $t \in [a, b]$ , entonces  $F'(t) = f(t)$ .
- (iii)  $F$  es diferenciable casi donde quiera en  $[a, b]$  y  $F'(t) = f(t)$  casi donde quiera en  $[a, b]$ .

**Demostración:**

- (i) La continuidad se sigue de la versión débil del Lema de Saks-Henstock (Lema 2.4.2) y de la siguiente desigualdad

$$\|F(t) - F(\xi)\| \leq \|F(t) - F(\xi) - f(\xi)(t - \xi)\| + \|f(\xi)\| |t - \xi|.$$

- (ii) Sea  $t_0 \in [a, b]$  tal que  $f$  es continua en  $t_0$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que si  $|t_0 - t| < \delta$ , entonces

$$\|f(t_0) - f(t)\| < \epsilon.$$

Sea  $|h| < \delta$ , por el Teorema 2.3.5 tenemos que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} - f(t_0) \right\| = \left\| \frac{F(t_0 + h) - F(t_0) - f(t_0)h}{h} \right\| \\ &= \frac{1}{|h|} \left\| \int_{t_0}^{t_0+h} f - f(t_0)h \right\| = \frac{1}{|h|} \left\| \int_{t_0}^{t_0+h} [f - f(t_0)] \right\| \leq \left( \frac{1}{|h|} \right) \epsilon |h| = \epsilon, \end{aligned}$$

por lo tanto  $F'(t_0) = f(t_0)$ .

(iii) Sea  $E$  el conjunto de puntos  $t$  en los cuales  $F'(t)$  no existe o, si existe, no es igual a  $f(t)$ , probaremos que  $\mu(E) = 0$ .

De la definición de  $E$  vemos que para todo  $t \in E$  existe un  $\eta(t) > 0$  tal que para cualquier  $\delta > 0$  existe un punto  $u$  con  $0 < t - u < \delta$  y

$$\|F(t) - F(u) - f(t)(t - u)\| > \eta(t)(t - u)$$

o existe un punto  $v$  con  $0 < v - t < \delta$  y

$$\|F(v) - F(t) - f(t)(v - t)\| > \eta(t)(v - t).$$

Fijemos  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $E_n$  el subconjunto de  $E$  para el cual  $\eta(t) \geq \frac{1}{n}$ . Entonces la familia de intervalos cerrados  $[u, t]$  y  $[t, v]$  cubre a  $E_n$  en el sentido de Vitali (Definición 2.5.5). Aplicando el Teorema de Cobertura de Vitali (Teorema 2.5.6), dado  $\epsilon > 0$  podemos encontrar  $[u_k, v_k]$  para  $k = 1, 2, \dots, m$  con  $u_k = t_k$  o  $v_k = t_k$  tal que

$$\mu(E_n) < \sum_{i=1}^m (v_k - u_k) + \epsilon.$$

Como  $f$  es Henstock integrable sobre  $[a, b]$ , por el Lema Fuerte de Saks-Henstock 2.4.3 existe una medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que para cualquier partición  $\{([u_i, v_i], \xi_i) : i = 1, \dots, m\}$   $\delta$ -fina de  $[a, b]$  tenemos

$$\sum_{i=1}^m \|F(v_i) - F(u_i) - f(\xi_i)(u_i - v_i)\| < \epsilon.$$

Cuando formamos la familia de intervalos cerrados, debemos suponer que  $\delta < \delta(t_k)$  para  $k = 1, 2, \dots, m$ ; entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mu(E_n) &< \sum_{i=1}^m \frac{\|F(v_k) - F(u_k) - f(t_k)(u_k - v_k)\|}{\eta(t_k)} + \epsilon \\ &< \epsilon n + \epsilon \end{aligned}$$

ya que  $\frac{1}{\eta(t_k)} < n$ . Como  $\epsilon$  es arbitrario, la medida exterior de  $E_n$  es 0 y también la de  $E$ .

□

Observemos que parte esencial en la demostración del TFC Parte II es el Lema Fuerte de Saks-Henstock, el cual, en general, no es válido para la integral de Kurzweil; sin embargo, desconocemos si este lema sea una condición necesaria para demostrar el TFC (Parte II). Así pues, **dejamos abierto este problema para trabajos posteriores**. A continuación exhibiremos un ejemplo de una función Kurzweil integrable tal que su integral indefinida es fuertemente diferenciable pero ésta no coincide con la función.

**Ejemplo 2.5.8.** *Consideremos la función construida en la Sección 2.2, es decir,  $f : [a, b] \rightarrow l_2([a, b])$  dada por*

$$f(i) = e_i, \quad i \in [a, b].$$

En el Ejemplo 2.3.11 probamos que  $f$  es Kurzweil integrable con integral igual a 0 y no medible en el sentido fuerte.

Por el Teorema 2.5.11 se tiene que la integral indefinida  $F$  de  $f$  es continua y, por lo tanto, fuertemente medible, por lo que su derivada  $F'$  es fuertemente medible. Ahora, supongamos que  $F'(t) = f(t)$ , pero este hecho es una contradicción debido a que  $F'$  es fuertemente medible y  $f$  no es medible en  $[a, b]$  en el mismo sentido.

Con base en el ejemplo anterior se demuestra que el TFC en su parte II de la integral de Henstock (Teorema 2.5.7) no es válido para la integral de Kurzweil, por lo que en este punto podemos preguntarnos las condiciones bajo las cuales este teorema es válido, o si es posible formular alguna versión análoga a él. Cao en [2] establece una versión débil del Teorema Fundamental del Cálculo en su parte II para la integral de Kurzweil, en la cual se usa el concepto de *derivada escalar*, por tal motivo, definiremos antes este concepto.

**Definición 2.5.9.** *Sea  $F : [a, b] \rightarrow X$  y sea  $E \subset [a, b]$ . Una función  $f : E \rightarrow X$  es una **derivada escalar** de  $F$  sobre  $E$  si y sólo si para cada  $x^* \in X^*$  la función real  $x^*F$  es diferenciable sobre  $E$  y*

$$(x^*F)' = x^*f$$

sobre  $E$ .

**Lema 2.5.10.** *(Fremlin, [14]) Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$  Kurzweil integrable. Para cada  $x^* \in X^*$  la función  $x^*f$  es Henstock-Kurzweil integrable sobre cada intervalo  $J \subset [a, b]$  y*

$$(K) \int_J x^*f = x^* \left( (K) \int_J f \right).$$

**Demostración:** Sea  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta$  función medidora tal que para toda partición  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$   $\delta$ -fina de  $[a, b]$  tenemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (K) \int_a^b f \right\| < \epsilon.$$

Sea  $x^* \in X^*$ , como  $x^*$  es lineal y acotado tenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n (x^* f)(\xi_i)l(I_i) - x^* \left( (K) \int_a^b f \right) \right| \\ &= \left| x^* \left( \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (K) \int_a^b f \right) \right| \\ &\leq \|x^*\| \left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (K) \int_a^b f \right\| \leq \|x^*\|\epsilon. \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.3.2 se cumple para todo  $J \subset [a, b]$ , además  $(K) \int_J x^* f = x^*(K) \int_J f$ .

□

**Teorema 2.5.11.** (*Una versión Débil del Teorema Fundamental del Cálculo (Parte II)*, Cao, [2]) Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$  Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  y  $F$  su integral indefinida. Entonces

- (i)  $F$  es continua en  $[a, b]$ .
- (ii) Si  $f$  es continua en  $t \in [a, b]$ , entonces  $F'(t) = f(t)$ .
- (iii) La función  $f$  es derivada escalar de  $F$  casi donde quiera en  $[a, b]$ ; además,
 
$$(x^* F)' = x^* f \text{ casi donde quiera en } [a, b].$$

**Demostración:**

- (i) Se sigue de la versión débil del Lema de Saks-Henstock (Lema 2.4.1) para la integral de Kurzweil y de la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} & \|F(t) - F(\xi)\| \\ &\leq \|F(t) - F(\xi) - f(\xi)(t - \xi)\| + \|f(\xi)\| |t - \xi|. \end{aligned}$$

- (ii) La demostración de este punto es análoga a la del Teorema 2.5.7.

(iii) Por el Lema 2.5.10, la composición  $x^*f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es Henstock-Kurzweil sobre  $[a, b]$  y, además, es continua en todo  $t \in [a, b]$  donde  $f$  es continua.

Definimos  $G(t) := (HK) \int_a^t x^*f$ , para todo  $t \in [a, b]$ , por el Teorema 1.4.3 y por el Lema 2.5.10, tenemos que

$$G'(t) = \left( x^*(HK) \int_a^t f \right)' = (x^*F(t))' = x^*f(t),$$

para todo  $t \in [a, b]$  donde  $f$  es continua.

□

**Nota.** *En ciertas referencias bibliográficas, tales como en [7] y [33], el Teorema 2.5.11 es mencionado pero sin demostración, dado que en la bibliografía consultada no encontramos la demostración de este hecho como tal, **la prueba dada aquí es de nuestra autoría.***

---

## Capítulo 3

# Integrales de Riemann, McShane, Bochner y Pettis

Como el objetivo general de este trabajo es realizar un análisis de las integrales definidas por Henstock y Kurzweil en el contexto de los espacios de Banach, se tiene que parte de este análisis es determinar las relaciones entre estas integrales con otras integrales clásicas que existen en el contexto de los espacios de Banach, tales como la integral de Riemann, la integral de Bochner, la integral de McShane y la integral de Pettis; dicho estudio se realizará en el Capítulo 4. Por tal motivo, el objetivo de este capítulo es presentar algunos de los resultados más conocidos acerca de la integral de Riemann, McShane, Bochner y Pettis; específicamente, mencionaremos la definición de estas integrales, algunas de sus propiedades algebraicas y, en algunos casos, algunos teoremas de convergencia y sus Teoremas Fundamentales del Cálculo. No presentaremos las demostraciones de estos teoremas, al lector interesado en conocer más a detalle la teoría de cada una de estas integrales lo remitimos a las siguientes referencias: integral de Riemann ([36]); integral de McShane ([18], [29], [30], [36], [39]); integral de Bochner ([38]); integral de Pettis ([9], [35], [38]).

### 3.1. Integrales de Tipo Riemann

La definición de la integral de Riemann para el contexto vectorial es similar a la del contexto real, simplemente se considera la norma en lugar del valor absoluto.

**Definición 3.1.1.** *Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es **Riemann integrable** sobre  $[a, b]$  si y sólo si existe  $w \in X$  con la siguiente propiedad:*

Dado  $\epsilon > 0$  existe un número positivo  $\delta$ , tal que si  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - w \right\| < \epsilon.$$

Al valor de la integral de Riemann lo denotaremos por  $w := (R) \int_a^b f$ .

A la colección de todas las funciones Riemann integrables la denotaremos por  $R([a, b], X)$ .

**Nota.** Obsérvese que la definición de la integral de Riemann está en términos de particiones etiquetadas  $\delta$ -finas, debido que podemos considerar a la función medidora como constante positiva.

Una integral que esté dada en términos de sumas de Riemann, se dice que es una *integral de tipo Riemann*; una integral de este tipo es la integral de McShane [29], la cual, en el contexto real es equivalente a la integral de Lebesgue. Así, se tiene una definición para la integral de Lebesgue en términos de sumas de Riemann, la cual no hace uso de la Teoría de la Medida. A continuación establecemos la definición de la integral de McShane, pero antes mencionaremos el concepto de *partición etiquetada libre*.

- Una **partición etiquetada libre (subpartición etiquetada libre)**  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  de  $[a, b]$  es una partición que consiste de subintervalos  $\{I_i\}$  que forman una partición (subpartición) de  $[a, b]$  y puntos  $\xi_i \in [a, b]$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ , los cuales denominaremos **etiquetas libres**.

**Definición 3.1.2.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es **McShane integrable** sobre  $[a, b]$  si y sólo si existe  $w \in X$  con la siguiente propiedad:

Dado  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que para toda partición etiquetada libre  $\{(I_i, \xi_i); i = 1, \dots, n\}$   $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , se tiene que

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - w \right\| < \epsilon.$$

Al valor de la integral de McShane lo denotaremos por  $w := (M) \int_a^b f$ .

A la colección de todas las funciones McShane integrables la denotaremos por  $M([a, b], X)$ .

**Observación.** La diferencia entre las particiones etiquetadas consideradas en la integral de McShane y la de Kurzweil es que en éstas se exige que las etiquetas asociadas a cada subintervalo estén en él, en la de McShane las etiquetas pueden o no estar en cada subintervalo.

A continuación establecemos algunas propiedades algebraicas y sus correspondientes versiones del Teorema Fundamental de Cálculo y algunos teoremas de convergencia para la integral de Riemann y la integral de McShane.

**Teorema 3.1.3.** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow X$  funciones Riemann (respectivamente McShane) integrables sobre  $[a, b]$  y sea  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces la función:

1.  $cf$  es Riemann (respectivamente McShane) integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(R(M)) \int_a^b cf = c(R(M)) \int_a^b f.$$

2.  $f + g$  es Riemann (respectivamente McShane) integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(R(M)) \int_a^b (f + g) = (R(M)) \int_a^b f + (R(M)) \int_a^b g,$$

donde  $(R(M)) \int_a^b$  denota la integral de Riemann (respectivamente McShane).

Con base en el Teorema 3.1.3, las colecciones  $R([a, b], X)$  y  $M([a, b], X)$  son espacios vectoriales respecto a las operaciones usuales de funciones y la integral respectiva es un operador lineal sobre ellos.

**Teorema 3.1.4.** Supongamos que  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Riemann (respectivamente McShane) integrable sobre  $[a, b]$  y sea  $J \subset [a, b]$  un intervalo compacto. Entonces  $f$  es Riemann (respectivamente McShane) integrable sobre el intervalo  $J$ .

**Teorema 3.1.5.** Sean  $f : [a, b] \rightarrow X$  y  $c \in (a, b)$ . Entonces  $f$  es Riemann (respectivamente McShane) integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si  $f$  es Riemann (respectivamente McShane) integrable sobre cada uno de los intervalos  $[a, c]$  y  $[c, b]$ . En tal caso

$$(R(M)) \int_a^b f = (R(M)) \int_a^c f + (R(M)) \int_c^b f.$$

**Teorema 3.1.6.** Sean  $f \in M([a, b], X)$  y  $g : [a, b] \rightarrow X$ . Si  $f = g$  casi dondequiera en  $[a, b]$ , entonces  $g$  es McShane integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(M) \int_a^b g = (M) \int_a^b f.$$

**Teorema 3.1.7. (Teorema Fundamental del Cálculo (Parte I))** Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es fuertemente diferenciable en  $[a, b]$  y  $f' : [a, b] \rightarrow X$  es Riemann (respectivamente McShane) integrable sobre  $[a, b]$ , entonces

$$(R(M)) \int_a^t f' = f(t) - f(a), \text{ para todo } t \in [a, b].$$

Aunque la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann y McShane se formulan de manera similar, para la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo se tienen formulaciones distintas, tal y como se muestra a continuación.

**Teorema 3.1.8. (Teorema Fundamental del Cálculo (Parte II))** Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Riemann (respectivamente McShane) integrable sobre  $[a, b]$ , entonces

(i) Su integral indefinida  $F$  es continua en  $[a, b]$ .

(ii) Si  $f$  es continua en  $t \in [a, b]$ , entonces  $F'(t) = f(t)$ .

(iii) La función  $f$  es derivada escalar de  $F$  casi dondequiera en  $[a, b]$ ; además,

$$(x^*F)' = x^*f \text{ casi donde quiera en } [a, b].$$

Observe el lector que la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann (respectivamente McShane) (Teorema 3.1.8) está formulada en una versión débil, análoga al Teorema 2.5.11 de la integral de Kurzweil, debido a que la función del Ejemplo 2.5.8 no coincide con la derivada de su integral indefinida en todo  $[a, b]$  y, como se demostró en el Ejemplo 2.3.11, la función es Riemann integrable y, por lo tanto, McShane integrable, dado que, como veremos en el Capítulo 4, toda función Riemann integrable es McShane integrable.

Las propiedades que se establecen en los Teoremas 3.1.3, 3.1.4 y 3.1.5 para las integrales de Riemann y McShane son las mismas que se tienen en el contexto real para ambas integrales; sin embargo, algunas propiedades que tienen estas integrales en el contexto real dejan de ser ciertas en el contexto

vectorial, un ejemplo de ello es la *integrabilidad absoluta*, dado que existen funciones vectoriales Riemann integrables o McShane integrables tales que al componerlas con la función norma dejan de serlo.

**Ejemplo 3.1.9.** Sean  $B[a, b]$  el espacio de Banach de las funciones reales acotadas definidas en  $[a, b]$ , dotado con la norma del supremo y  $E \subset [a, b]$  no Lebesgue medible, consideremos la función  $f : [a, b] \rightarrow B[a, b]$  definida por

$$f(i) = \begin{cases} \chi_{\{i\}}, & \text{si } i \in E, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Primero probaremos que  $f$  es Riemann integrable sobre  $[a, b]$ :

- Sea  $\epsilon > 0$ . Tomamos  $\delta = \epsilon$  y  $\{([t_{i-1}, t_i], \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\|_{\infty} &= \left\| \sum_{i \in E} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \notin E} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\|_{\infty} \\ &= \left\| \sum_{i \in E} \chi_{\{\xi_i\}}(t_i - t_{i-1}) \right\| \leq \max_{i \in \mathbb{N}} \{t_i - t_{i-1}\} < \epsilon. \end{aligned}$$

Ahora que,  $\|f\| = \chi_E$  no es Lebesgue medible ya que  $E$  no es Lebesgue medible. Además, como veremos en el Capítulo 4, a través del Teorema 4.1.2,  $f$  también es McShane integrable, por lo que una función Riemann (McShane) integrable no necesariamente es absolutamente integrable.

Sin embargo, si la condición de integrabilidad de la composición de la función con la norma del espacio es impuesta, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.10.** Sean  $f : [a, b] \rightarrow X$  una función Riemann (respectivamente McShane) integrable sobre  $[a, b]$  y  $K$  una cota superior de  $\|f\|$  en  $[a, b]$ , es decir,

$$\|f(t)\| \leq K, \text{ para todo } t \in [a, b].$$

Entonces

$$\left\| (R(M)) \int_a^b f \right\| \leq K(b - a).$$

Si además  $\|f\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es Riemann (respectivamente McShane) integrable,

$$\left\| (R(M)) \int_a^b f \right\| \leq (R(M)) \int_a^b \|f\|.$$

También, al extender la integral de Riemann al contexto de los espacios de Banach deja de ser cierta una caracterización conocida de la integral de Riemann en el contexto real, a saber: *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Entonces  $f$  es Riemann integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si  $f$  es continua casi dondequiera en  $[a, b]$ .*

**Ejemplo 3.1.11.** Consideremos  $X = l_2([a, b])$  y  $f : [a, b] \rightarrow l_2([a, b])$  definida por

$$f(i) = e_i, \quad i \in [a, b],$$

donde

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Con base en el ejemplo 2.3.11, se tiene que  $f$  es Riemann integrable sobre  $[a, b]$ ; sin embargo, la función  $f$  **no es continua en ningún punto**  $t \in [a, b]$ . En efecto, tomamos  $\epsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$$\|f(i) - f(j)\|_2 = \|e(i) - e(j)\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |-1|^2} = \sqrt{2},$$

para todo  $i, j \in [a, b]$ ,  $i \neq j$ , por lo tanto no es continua en  $[a, b]$ .

**Teorema 3.1.12.** (Rodríguez, [36]) Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es acotada y continua casi donde quiera en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es Riemann integrable sobre  $[a, b]$ .

**Observación.** Hasta el momento no conocemos cuáles son todos los espacios de Banach que cumplen con la caracterización de la integral de Riemann a través de las condiciones de continuidad y acotamiento casi dondequiera. Sin embargo, a los espacios de Banach  $X$  que cumplen con el Teorema 3.1.12 y con su recíproco se dice que tienen la **propiedad de Lebesgue**. Al lector interesado en conocer acerca de este tópico lo remitimos a [36].

Finalizaremos esta sección mencionando algunos teoremas de convergencia más conocidos de la integral de McShane.

**Teorema 3.1.13.** (**Teorema de Convergencia Dominada: McShane**, Rodríguez, [36]) Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones integrables McShane que converge puntualmente casi dondequiera en  $[a, b]$  hacia una función  $f : [a, b] \rightarrow X$ . Si existe  $g \in L_1(\mu)$  tal que  $\|f_n\| \leq g$  casi dondequiera en  $[a, b]$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f$  es integrable McShane sobre  $[a, b]$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M) \int_a^b f_n = (M) \int_a^b f.$$

**Definición 3.1.14.** Una colección  $\mathcal{F}$  de funciones  $f : [a, b] \rightarrow X$  es llamada *M-equi-integrable* si y sólo si toda  $f \in \mathcal{F}$  es McShane integrable sobre  $[a, b]$  y para cualquier  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que si  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  es una partición etiquetada libre  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^n (I_i) f(\xi_i) - (M) \int_a^b f \right\| < \epsilon,$$

para toda  $f \in \mathcal{F}$ .

**Teorema 3.1.15.** (*Teorema de Equi-integrabilidad: McShane, Schwabik and Guoju, [38]*) Sean  $(f_n) \subset M([a, b], X)$  es una sucesión *M-equi-integrable* tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t), \text{ para toda } t \in [a, b].$$

Entonces la función  $f$  es McShane integrable sobre  $[a, b]$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M) \int_a^b f_n = (M) \int_a^b f.$$

Como ejemplo de una aplicación del concepto de *M-equi-integrabilidad* tenemos el siguiente resultado, el cual nos permite caracterizar a las funciones McShane integrables.

**Teorema 3.1.16.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es McShane integrable si y sólo si el conjunto

$$\{x^* f : \|x^*\| \leq 1\}$$

es *M-equi-integrable*.

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) Si  $f$  es McShane integrable, entonces dado  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) l(I_i) - (M) \int_a^b f \right\| \leq \epsilon,$$

para toda partición etiquetada libre  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  de  $[a, b]$   $\delta$ -fina. Para todo  $x^* \in X^*$  tenemos

$$\left| \sum_{i=1}^n x^* f(\xi_i) l(I_i) - x^* \left( (M) \int_a^b f \right) \right|$$

$$\leq \|x^*\| \left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (M) \int_a^b f \right\| \leq \epsilon \|x^*\|,$$

y por lo tanto  $\{x^*f : \|x^*\| \leq 1\}$  es  $M$ -equi-integrable.

$\Leftarrow$ ) Si  $\{x^*f : \|x^*\| \leq 1\}$  es  $M$ -equi-integrable, entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^n x^*f(\xi_i)l(I_i) - (M) \int_a^b x^*f \right\| \leq \epsilon,$$

para toda partición etiquetada libre  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  de  $[a, b]$   $\delta$ -fina y todo  $x^* \in X^*$ , con  $\|x^*\| \leq 1$ . Por lo tanto, si  $\{(J_i, \tau_i) : i = 1, \dots, s\}$  es otra partición etiquetada libre de  $[a, b]$   $\delta$ -fina, tenemos

$$\begin{aligned} & \left| x^* \left( \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^s f(\tau_i)l(J_i) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n x^*f(\xi_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^s x^*f(\tau_i)l(J_i) \right| \leq 2\epsilon, \end{aligned}$$

para todo  $x^* \in X^*$ , con  $\|x^*\| \leq 1$ . Por lo que

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^s f(\tau_i)l(J_i) \right\| \leq 2\epsilon,$$

y, por el Criterio de Cauchy para la integral de McShane (análogo al Teorema 2.3.7),  $f$  es McShane integrable.

□

## 3.2. Extensiones de la integral de Lebesgue

En esta sección establecemos algunas de las extensiones más naturales de la integral de Lebesgue al contexto de los espacios de Banach, tales como la integral de Bochner y Pettis; además, recordaremos algunas propiedades algebraicas y algunos teoremas de convergencia para estas integrales.

Iniciaremos definiendo la integral de Bochner, pero antes mencionaremos algunos hechos de la integral de Lebesgue.

**Definición 3.2.1.** Una función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es **simple** si y sólo si la imagen de  $g$  es un conjunto finito  $\{a_i \in \mathbb{R} | i = 1, \dots, n\}$  y  $g$  es representada en la forma

$$g = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i},$$

donde  $E_i = \{t \in [a, b] | g(t) = a_i\}$ ,  $E_i$  Lebesgue medibles, para todo  $i = 1, \dots, n$ , y  $\chi_{E_i}$  es la función característica del conjunto  $E_i$ . En este caso, la **integral de Lebesgue** de  $g$  sobre  $[a, b]$  se define como

$$(L) \int_a^b g := \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i).$$

**Definición 3.2.2.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función Lebesgue medible no negativa. La **integral de Lebesgue** de  $f$  sobre  $[a, b]$  se define como

$$(L) \int_a^b f := \sup \left\{ (L) \int_a^b g \right\},$$

donde el supremo es tomado sobre todas las funciones simples  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq g(t) \leq f(t)$ , para toda  $t \in [a, b]$ .

Dada cualquier función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos su *parte positiva* y su *parte negativa* como  $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$  y  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ , respectivamente. Es claro que  $f = f^+ - f^-$ , y es posible demostrar que  $f$  es medible si y sólo si  $f^+$  y  $f^-$  son medibles, por lo que, con base en la Definición 3.2.2 se define la integral de  $f$  de la siguiente manera

$$(L) \int_a^b f = (L) \int_a^b f^+ - (L) \int_a^b f^-,$$

y las dos integrales del lado derecho de la igualdad son finitas.

La generalización de la integral de Lebesgue para funciones vectoriales sigue varios caminos, los cuales dan lugar a definir distintas integrales, tales como la *integral de Dunford*, la *integral de Pettis*, la *integral de Bochner*, la *integral de Birkhoff* y la *integral de Gelfand*. Tiempo después de que Kurzweil definiera su integral, otras integrales fueron definidas, tales como la integral de *Pettis-Kurzweil*, *Dunford-Kurzweil*, entre otros. En este trabajo consideraremos únicamente la integral de Bochner y Pettis.

Siguiendo el esquema de la construcción de la integral de Lebesgue pero ahora en el contexto vectorial se define la integral de Bochner; para ello, necesitamos definir el concepto de función simple y la integral de una función simple para funciones vectoriales.

**Definición 3.2.3.** Una función  $g : [a, b] \rightarrow X$  es **simple** si y sólo si la imagen de  $g$  es un conjunto finito  $\{y_i \in X; i = 1, \dots, n\}$  y  $g$  es representada en la forma

$$g = \sum_{i=1}^n y_i \chi_{E_i},$$

donde  $E_i = \{t \in [a, b] | g(t) = y_i\}$ ,  $E_i$  Lebesgue medibles, para todo  $i = 1, \dots, n$  y  $\chi_{E_i}$  es la función característica del conjunto  $E_i$  Lebesgue medible. En este caso, la **integral de Bochner** de  $g$  sobre  $[a, b]$  es

$$(B) \int_a^b g = \sum_{i=1}^n y_i \mu(E_i).$$

**Definición 3.2.4.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es **fuertemente medible** si y sólo si existe una sucesión de funciones simples  $(g_n)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n(t) - f(t)\| = 0,$$

para casi todo  $t \in [a, b]$ .

Así pues, con los conceptos definidos anteriormente definiremos la integral de Bochner.

**Definición 3.2.5.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$  fuertemente medible. Decimos que  $f$  es **Bochner integrable** sobre  $[a, b]$  si y sólo si existe una sucesión  $(g_n)$  de funciones simples tal que  $\|f - g_n\|$  es Lebesgue medible, para cada  $n \in \mathbb{N}$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^b \|f - g_n\| = 0.$$

En este caso la integral de Bochner sobre  $[a, b]$ , denotada por  $(B) \int_a^b f$ , se define como

$$(B) \int_a^b f := \lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_a^b g_n, \quad (3.1)$$

A la colección de las funciones Bochner integrables lo denotaremos por  $B([a, b], X)$ .

En este punto el lector podría preguntarse si la igualdad (3.1) está bien definida, en el sentido siguiente: ¿Si  $(h_n)$  es otra sucesión de funciones simples tal que 3.1 se cumple, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_a^b h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_a^b g_n$ ? En efecto, el siguiente resultado da respuesta afirmativa a esta interrogante.

**Proposición 3.2.6.** Sean  $f : [a, b] \rightarrow X$  una función fuertemente medible y sean  $(g_n), (h_n)$  sucesiones de funciones simples tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_a^b g_n, \lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_a^b h_n$  existen. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_a^b g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_a^b h_n.$$

A continuación mostramos algunas propiedades algebraicas y un teorema de convergencia para la integral de Bochner.

**Teorema 3.2.7.** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow X$  funciones Bochner integrables sobre  $[a, b]$  y sea  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces la función:

- $cf$  es Bochner integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(B) \int_a^b cf = c(B) \int_a^b f.$$

- $f + g$  es Bochner integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(B) \int_a^b (f + g) = (B) \int_a^b f + (B) \int_a^b g.$$

**Teorema 3.2.8.** (Schwabik and Guoju, [38]) Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es fuertemente medible y dominada por una función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue integrable, es decir,  $\|f(t)\| \leq g(t)$ , para casi toda  $t \in [a, b]$ , entonces  $f$  es Bochner integrable.

El siguiente resultado es una generalización de la caracterización de las funciones Lebesgue integrables.

**Teorema 3.2.9.** (Schwabik and Guoju, [38]) Una función fuertemente medible  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Bochner integrable si y sólo si  $\|f\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es Bochner integrable.

**Teorema 3.2.10.** Sean  $f \in B([a, b], X)$  y  $g : [a, b] \rightarrow X$ . Si  $f = g$  casi donde quiera en  $[a, b]$ , entonces  $g$  es Bochner integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(B) \int_a^b g = (B) \int_a^b f.$$

**Teorema 3.2.11.** (Cascales and Troyansky, [3]) Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Bochner integrable, entonces, para todo  $E \subset [a, b]$  Lebesgue medible, se tiene que

$$\left\| (B) \int_E f \right\| \leq (L) \int_E \|f\|.$$

**Teorema 3.2.12. (Teorema de Convergencia Dominada: Bochner, Cascales and Troyansky, [3])** Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones Bochner integrables sobre  $[a, b]$  que converge puntualmente hacia una función  $f$  sobre  $[a, b]$ . Si existe  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue integrable sobre  $[a, b]$  tal que  $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ , para casi todo  $t \in [a, b]$ , entonces  $f$  es Bochner integrable sobre  $[a, b]$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_a^b f_n = (B) \int_a^b f.$$

**Demostración:** Como la sucesión  $(f_n)$  converge puntualmente a  $f$  casi donde quiera en  $[a, b]$  y  $\|f_n\| \leq g$ , para casi todo  $t \in [a, b]$ , entonces  $\|f\| \leq g$ . Como el límite de funciones fuertemente medibles es fuertemente medible,  $f$  es fuertemente medible y, por el Teorema 3.2.8,  $f$  es Bochner integrable.

Ya que tanto  $(f_n)$  como  $f$  están dominadas por  $g$ , tenemos que

$$\|f_n - f\| \leq 2g.$$

El Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Lebesgue implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^b \|f_n - f\| = 0. \quad (3.2)$$

Sea  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N$ ,

$$(L) \int_a^b \|f_n - f\| < \epsilon.$$

Ahora, por el Teorema 3.2.11

$$\left\| (B) \int_a^b f_n - (B) \int_a^b f \right\| \leq (L) \int_a^b \|f_n - f\|,$$

en consecuencia,

$$\left\| (B) \int_a^b f_n - (B) \int_a^b f \right\| \leq \epsilon,$$

para  $n \geq N$ ; en otras palabras,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_a^b f_n = (B) \int_a^b f.$$

□

**Nota.** En [3] el Teorema 2.5.11 es mencionado pero sin demostración, dado que en la bibliografía consultada no encontramos la demostración de este hecho como tal, **la prueba dada aquí es de nuestra autoría.**

**Observación.** Como ya hemos mencionado anteriormente, la integral de Lebesgue tiene “buenos” teoremas de convergencia, entre ellos, el Teorema de Convergencia Monótona y el Teorema de Convergencia Dominada; sin embargo, el Teorema de Convergencia Monótona de la integral de Lebesgue no puede ser formulado de manera análoga para la integral de Bochner, dado que no se cuenta necesariamente con una estructura de orden sobre el espacio de Banach  $X$ .

A continuación definiremos un concepto de medibilidad distinto a la medibilidad fuerte: *medibilidad débil*.

**Definición 3.2.13.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es llamada **débilmente medible** si y sólo si para cada  $x^* \in X^*$  la función real  $x^*f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es Lebesgue medible en  $[a, b]$ .

Aunque los conceptos de medibilidad fuerte y débil, en general, no son equivalentes, éstos sí guardan una relación entre sí.

**Teorema 3.2.14.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$ . Si  $f$  es fuertemente medible, entonces  $f$  es débilmente medible.

Sin embargo, el recíproco en general no es válido, dado que la función del Ejemplo 2.2.4 es débilmente medible y no es fuertemente medible; aunque, bajo ciertas condiciones adicionales sobre el espacio o sobre las funciones sí existe una relación de equivalencia, tal como lo establecen los siguientes dos resultados, omitimos las demostraciones e invitamos al lector interesado en conocerlas a consultar [38].

**Teorema 3.2.15. (Teorema de Medibilidad de Pettis)** Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es fuertemente medible si y sólo si  $f$  es débilmente medible y existe un conjunto  $M \subset [a, b]$ , con  $\mu(M) = 0$ , tal que el conjunto

$$\{f(t) : t \in [a, b] - M\}$$

es separable.

Como consecuencia del Teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.16.** Si  $X$  es un espacio de Banach separable, entonces  $f : [a, b] \rightarrow X$  es fuertemente medible si y sólo si  $f$  es débilmente medible.

**Nota.** Observe que, acorde con el teorema anterior, se tiene que para funciones reales, el concepto de medibilidad fuerte y medibilidad débil son equivalentes; pero dado que no todo espacio de Banach es separable, el concepto de medibilidad fuerte se define a través de convergencia puntual de funciones simples.

Así pues, dado que los conceptos de medibilidad fuerte y débil no son equivalentes en general, el concepto de medibilidad débil da lugar para definir otra integral: la *integral de Pettis*.

**Definición 3.2.17.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  tal que  $x^*f$  es Lebesgue integrable, para todo  $x^* \in X^*$  es **Pettis integrable** sobre  $[a, b]$  si y sólo si para cada conjunto Lebesgue medible  $E$  en  $[a, b]$  existe un vector  $v_f(E) \in X$  tal que la integral de Lebesgue

$$(L) \int_E x^* f$$

existe y es igual a  $x^*(v_f(E))$ , para todo  $x^* \in X^*$ . En este caso,  $v_f(E)$  es llamado **la integral de Pettis** de  $f$  sobre  $E$  y lo denotamos por  $v_f(E) := (P) \int_a^b f$ .

**Nota.** Como observará el lector en la definición de la integral de Pettis una condición sobre la función  $f$  es que  $x^*f$  sea Lebesgue integrable, para todo  $x^* \in X^*$ ; como consecuencia,  $f$  es débil medible.

Denotamos por  $P([a, b], X)$  el conjunto de todas las funciones Pettis integrables sobre  $[a, b]$ .

A continuación estableceremos algunas propiedades algebraicas de este espacio y un teorema de convergencia.

**Teorema 3.2.18.** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow X$  funciones Pettis integrables sobre  $[a, b]$  y sea  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces la función:

- $cf$  es Pettis integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(P) \int_a^b cf = c(P) \int_a^b f.$$

- $f + g$  es Pettis integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(P) \int_a^b (f + g) = (P) \int_a^b f + (P) \int_a^b g.$$

**Teorema 3.2.19.** Sean  $f \in P([a, b], X)$  y  $g : [a, b] \rightarrow X$ . Si  $f = g$  casi dondequiera en  $[a, b]$ , entonces  $g$  es Pettis integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(P) \int_a^b g = (P) \int_a^b f.$$

**Definición 3.2.20.** Una sucesión de funciones reales medibles  $(f_n)$  definidas sobre  $[a, b]$  **converge en medida** a una función  $f$  medible si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{t \in [a, b] : |f_n(t) - f(t)| > \epsilon\}) = 0.$$

**Teorema 3.2.21.** (Musiał, [31]) Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$  una función que satisface las siguientes dos condiciones:

- (i) existe una sucesión de funciones Pettis integrables  $f_n : [a, b] \rightarrow X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^* f_n = x^* f$  en medida, para cada  $x^* \in X^*$ ,
- (ii) existe  $h \in L_1(\mu)$  tal que para cada  $x^*$  que pertenece a la bola unitaria cerrada de  $X^*$  y cada  $n \in \mathbb{N}$ , la desigualdad  $|x^* f_n| \leq h$  se cumple casi dondequiera.

Entonces  $f \in P([a, b], X)$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P) \int_E f_n = (P) \int_E f,$$

para todo  $E \subset [a, b]$  Lebesgue medible.

En el siguiente capítulo estableceremos la relación que existe entre las integrales que se han mencionado hasta este momento en esta tesis: *integral de Henstock*, *integral de Kurzweil*, *integral de Bochner*, *integral de McShane* e *integral de Pettis*.



# Capítulo 4

## Relación entre las integrales de Riemann, McShane, Bochner, Pettis, Henstock y Kurzweil

Debido a que ciertas propiedades algebraicas o topológicas de un espacio de Banach son caracterizadas a través de determinadas integrales tales como la integral de Bochner y Pettis, uno de nuestros objetivos es determinar la relación existente entre las distintas integrales mencionadas durante el desarrollo de la presente tesis.

### 4.1. Relación entre las integrales de tipo Riemann

**Teorema 4.1.1.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$  una función Riemann (respectivamente McShane) integrable, entonces es Kurzweil integrable y el valor de las integrales coinciden.*

**Demostración:** Sea  $f$  Riemann integrable. Entonces dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para toda partición etiquetada  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  de  $[a, b]$   $\delta$ -fina

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (R) \int_a^b f \right\| < \epsilon.$$

Tomemos a la función medidora constante  $\Delta(t) = \delta$ , para todo  $t \in [a, b]$  y por lo tanto es Kurzweil integrable y el valor de las integrales coinciden.

Ahora, sea  $f$  McShane integrable. Entonces dado  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  tal que para toda partición etiquetada libre  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$

de  $[a, b]$   $\delta$ -fina

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (M) \int_a^b f \right\| < \epsilon.$$

Como cualquier partición etiquetada es una partición etiquetada libre, la desigualdad anterior es válida para cualquier partición etiquetada de  $[a, b]$   $\delta$ -fina, por lo que  $f$  es Kurzweil integrable y el valor de las integrales coinciden.

□

**Teorema 4.1.2.** (Rodríguez, [36]) *Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$  una función Riemann integrable, entonces es McShane integrable y el valor de las integrales coinciden.*

Así pues, acorde a los Teoremas 4.1.1 y 4.1.2 tenemos que,

$$R([a, b], X) \subset M([a, b], X) \subset K([a, b], X). \quad (4.1)$$

Sin embargo, los recíprocos en general no son válidos, dado que existen funciones que son Kurzweil integrables y que no son McShane integrables; también, existen funciones McShane integrables las cuales no son Riemann integrables. En efecto, las funciones siguientes son ejemplos de ello.

**Ejemplo 4.1.3.** *Consideremos nuevamente la función de Dirichlet  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$f(t) := \begin{cases} 1, & \text{si } t \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } t \text{ es irracional.} \end{cases}$$

*La cual es McShane (Lebesgue) integrable sobre  $[0, 1]$  y no es Riemann integrable sobre  $[0, 1]$  (véase [36]).*

**Ejemplo 4.1.4.** *Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por*

$$f(t) := \begin{cases} t^2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{t^2} \right), & \text{si } t \in (0, 1], \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

*Definida de esta forma  $f$  es Kurzweil integrable sobre  $[0, 1]$  y no es McShane (Lebesgue) integrable sobre  $[0, 1]$  (véase [1]).*

**Nota.** *Como recordará el lector, en la Sección 3.1 hicimos la observación de que la integral de McShane es equivalente a la integral de Lebesgue cuando  $X = \mathbb{R}$ .*

Sin embargo, imponiendo una condición adicional a una función Kurzweil integrable tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.5.** (Naralenkov [33]) Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Kurzweil integrable y acotada sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  es McShane integrable sobre  $[a, b]$ .

Por otro lado, como recordará el lector, la integral de Henstock (Definición 2.1.1) también está dada en términos de particiones etiquetadas, pero no está definida en términos de sumas de Riemann; por lo tanto, para determinar la relación que existe entre ésta con la integral de Riemann, McShane y Kurzweil se requiere de un análisis más exhaustivo.

Primero iniciaremos determinando la relación que existe entre la integral de Henstock y la integral de Kurzweil; en este caso se tiene que toda función Henstock integrable es Kurzweil integrable, tal y como se demuestra en el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.6.** Si  $f \in H([a, b], X)$ , entonces  $f \in K([a, b], X)$  y el valor de las integrales coinciden, es decir,

$$(K) \int_a^b f = F(b) - F(a),$$

donde  $F$  es la función de la definición de la integral de Henstock.

**Demostración:** Sea  $\epsilon > 0$ , como  $f$  es Henstock integrable, existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que si  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , entonces

$$\sum_{i=1}^n \|f(\xi_i)l(I_i) - F(t_i) - F(t_{i-1})\| < \epsilon.$$

Sea  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  una partición  $\delta$ -fina. Entonces

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (H) \int_a^b f \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n (f(\xi_i)l(I_i) - (H) \int_{t_{i-1}}^{t_i} f) \right\| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left\| f(\xi_i)l(I_i) - (H) \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \right\| = \sum_{i=1}^n \|f(\xi_i)l(I_i) - F(t_i) - F(t_{i-1})\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f$  es Kurzweil integrable y  $(K) \int_a^b f = (H) \int_a^b f$ .

□

Así pues, con base en el Teorema 4.1.6 se tiene que

$$H([a, b], X) \subseteq K([a, b], X). \quad (4.2)$$

Ahora bien, es natural preguntarse si el recíproco del Teorema 4.1.6 es válido; es decir, ¿toda función Kurzweil integrable es Henstock integrable?. La respuesta a la anterior interrogante, en general, es negativa; un ejemplo de ello es la función dada en el Ejemplo 2.2.4, la cual es Kurzweil integrable y no es Henstock integrable, como lo demostramos a continuación.

**Ejemplo 4.1.7.** Como vimos en el Ejemplo 2.3.11 de la Sección 2.3, la función  $f : [a, b] \rightarrow l_2([a, b])$  definida por

$$f(t) = e_t, \quad t \in [a, b],$$

es Riemann integrable sobre  $[a, b]$  y, por lo tanto, Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  con  $(K) \int_a^b f = 0$ .

Ahora veremos que no es Henstock integrable en  $[a, b]$ . En efecto, sea  $\epsilon = \frac{b-a}{2}$ , supongamos que existe  $\delta > 0$  tal que para toda partición etiquetada  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$   $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , se cumple que

$$\sum_{i=1}^n \|f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - 0\|_2 = \sum_{i=1}^n \|e_{\xi_i}(t_i - t_{i-1})\|_2 = \sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2} = b - a;$$

por lo tanto la expresión  $\sum_{i=1}^n \|f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) - 0\|_2$  no se puede hacer menor que  $\epsilon$  y en consecuencia  $f$  no es Henstock integrable sobre  $[a, b]$ .

El anterior ejemplo implica que, en general,

$$H([a, b], X) \subsetneq K([a, b], X).$$

Sin embargo, esto nos motiva a cuestionarnos acerca de qué condiciones adicionales debe imponerse a un espacio de Banach  $X$  para que  $K([a, b], X) \subset H([a, b], X)$ ; es decir,  $K([a, b], X) = H([a, b], X)$ . En este caso se tiene que si  $X$  es de dimensión finita, entonces ambas integrales son equivalentes, tal como se establece en el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.8.** (Schwabik and Guoju, [38]) Sea  $X$  un espacio de Banach de dimensión finita. Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Henstock integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si  $f$  es Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$ .

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) Es una consecuencia inmediata del Teorema 4.1.6.

$\Leftarrow$ ) Sean  $X$  un espacio de dimensión finita y  $f$  una función Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$ . Entonces por el Lema de Saks-Henstock para la integral de Kurzweil (Teorema 2.4.5) se tiene que para todo  $\epsilon > 0$  existe una medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que

$$\sum_{i=1}^n \left\| f(\xi_i)l(I_i) - (K) \int_{I_i} f \right\| < \epsilon,$$

para toda partición  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$   $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , por lo tanto,  $f$  es Henstock integrable sobre  $[a, b]$ .

□

El Teorema 4.1.8 nos motiva a cuestionarnos si los espacios de dimensión finita están caracterizados por este hecho, es decir: *Sea  $X$  un espacio de Banach. ¿Si toda función Kurzweil integrable es Henstock integrable, entonces el espacio de Banach  $X$  es de dimensión finita?*, la respuesta es afirmativa, Solodov en [39] demuestra la veracidad de este hecho.

Una aportación de gran relevancia en esta dirección es la realizada por Cao en [2], donde establece la relación entre la integral de Henstock con la de Kurzweil a través de un operador.

**Teorema 4.1.9.** (Cao, [2]) *Sea  $T : X \rightarrow Y$  absolutamente sumable, es decir, existe  $\rho > 0$  tal que para todo conjunto finito  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de puntos en  $X$ , tenemos*

$$\sum_{k=1}^n \|Tx_k\| \leq \rho \sup_{\|x^*\| \leq 1} \sum_{k=1}^n |x^*(x_k)|.$$

*Si  $f \in K([a, b], X)$ , entonces  $Tf \in H([a, b], Y)$ .*

Como consecuencia del resultado anterior, se tiene que si el operador identidad sobre  $X$  es absolutamente sumable, entonces  $H([a, b], X) = K([a, b], X)$ .

A continuación analizaremos la relación de la integral de Henstock con la integral de Riemann, para ello consideremos la función del Ejemplo 4.1.7 la cual es Riemann integrable y no es Henstock integrable. Así pues, tenemos que

$$R([a, b], X) \not\subset H([a, b], X). \quad (4.3)$$

Por otro lado, el espacio de las funciones  $H([a, b], X)$  no está contenido en el espacio  $R([a, b], X)$ , dado que, si esto fuese cierto en general, entonces el Teorema Fundamental del Cálculo (parte I) para la integral de Henstock, daría lugar a una contradicción, dado que la integral de Riemann no integra la derivada de todas las funciones diferenciables. Así pues, en general, tenemos lo siguiente

$$H([a, b], X) \not\subset R([a, b], X). \quad (4.4)$$

Con base en las expresiones (4.3) y (4.4) nos vemos motivados a preguntarnos si en general existe al menos intersección entre estos espacios; en efecto, dado que cualquier función constante pertenece a ambos espacios. de igual forma, surge de manera natural la interrogante de bajo qué condiciones adicionales sobre el espacio de Banach  $X$  existe una relación de contención entre los espacios  $R([a, b], X)$  y  $H([a, b], X)$ ; en particular, si **el espacio de Banach  $X$  es de dimensión finita**  $R([a, b], X) \subset H([a, b], X)$ , dado que como anteriormente vimos, en espacios de dimensión finita,  $H([a, b], X)$  coincide con  $K([a, b], X)$  y toda función Riemann integrable es Kurzweil integrable. Ahora bien, nos podemos cuestionar si los espacios de dimensión finita están caracterizados por esa propiedad, es decir: *Sea  $X$  un espacio de Banach. ¿Si  $R([a, b], X) \subset H([a, b], X)$ , entonces la dimensión de  $X$  es finita?*, con base a la bibliografía que hemos consultado hasta el momento no hemos encontrado respuesta a esta interrogante, **la cual trataremos en futuras investigaciones.**

A continuación veremos la relación de la integral de Henstock con la de McShane. En general, no existe una relación de contención entre los espacios de funciones Henstock integrables y McShane integrables.

**Ejemplo 4.1.10.** (Federson. [11])

Considere el espacio

$$Z = l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \left\{ z = (z_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}, z_{ij} \in \mathbb{R}; \sum_{i,j=1}^{\infty} |z_{ij}|^2 < \infty \right\}$$

equipado con la norma

$$\|z\|_2 = \left( \sum_{i,j=1}^{\infty} |z_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y la función  $f : [0, 1] \rightarrow Z$  definida por

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i,$$

donde

$$f_i(t) = 2^i e_{ij},$$

siempre que  $\frac{j}{2^i} \leq t < \frac{j}{2^i} + \frac{1}{2^{2i}}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, 2^i - 1$ , y  $f_i(t) = 0$  en otro caso.

$f \in M([a, b], Z) \setminus H([a, b], Z)$ , al lector interesado en consultar la demostración de este hecho lo invitamos a ver [11]. Además, la función definida en el Ejemplo 2.2.4 de la Sección 2.2 también es una función Riemann integrable y, por lo tanto, McShane integrable la cual no es Henstock integrable.

El siguiente ejemplo establece una función la cual es a su vez Henstock y McShane integrable.

**Ejemplo 4.1.11.** (Federson, [11])

Consideremos el espacio

$$l_2(\mathbb{N}) = \left\{ (x_i), x \in \mathbb{R} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}.$$

Sea  $f : [0, 1] \rightarrow l_2(\mathbb{N})$  definida por

$$f(t) = \frac{2^i}{i} e_i, \text{ siempre que } \frac{1}{2^i} \leq \frac{1}{2^{i-1}}, \quad i = 1, \dots,$$

Definida de esta forma  $f \in H([a, b], X)$  y  $f \in M([a, b], X)$  (véase [11]).

Como consecuencia de los ejemplos 2.2.4, 4.1.10 y 4.1.11, tenemos que

$$M([a, b], X) \not\subset H([a, b], X) \quad (4.5)$$

y  $H([a, b], X) \cap M([a, b], X) \neq \emptyset$ . Ahora, si consideramos el caso  $X = \mathbb{R}$ , la integral de Henstock es equivalente a la integral de Henstock-Kurzweil y la integral de McShane es equivalente a la integral de Lebesgue y, como vimos en el Capítulo 1, el espacio de funciones Lebesgue integrables está contenido propiamente en el espacio de funciones Henstock-Kurzweil integrables, es decir, existen funciones Henstock integrables que no son McShane integrables, lo cual implica que

$$H([a, b], X) \not\subset M([a, b], X). \quad (4.6)$$

La Figura 4.1 muestra gráficamente lo demostrado hasta ahora.

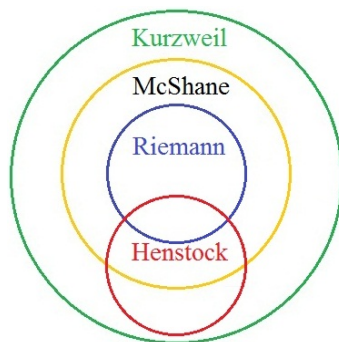


Figura 4.1.

## 4.2. Relación entre las integrales de tipo Riemann con las integrales de Bochner y Pettis

Iniciaremos estableciendo la relación entre la integral de Bochner con la integral de Pettis mediante el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.1.** (Schwabik and Guoju, [38]) Sean  $f : [a, b] \rightarrow X$  y  $E \subset [a, b]$  medible. Si  $f$  es Bochner integrable en  $E$ , entonces  $f$  es Pettis integrable en  $E$  y el valor de las integrales coinciden.

Así pues, con base en el Teorema anterior se tiene que

$$B([a, b], X) \subset P([a, b], X), \quad (4.7)$$

pero el recíproco, en general, no se cumple; un ejemplo de ello es el siguiente.

**Ejemplo 4.2.2.** (Cascales y Troyansky, [3])

Sean  $X = l_2([a, b])$  y  $f : [0, 1] \rightarrow X$  una función definida por

$$f(t) = e_t;$$

$f$  es Pettis integrable sobre  $[0, 1]$ , pero no es Bochner integrable sobre  $[0, 1]$ . En efecto, para cada  $x^* \in X^*$  se tiene que  $x^*f = 0$  casi dondequiera en  $[0, 1]$  y, por lo tanto,  $f$  es Pettis integrable. Sin embargo,  $f$  no es Bochner integrable sobre  $[0, 1]$  dado que no es fuertemente medible (Ejemplo 2.3.11).

Como lo hicimos anteriormente, en este punto podemos preguntarnos bajo qué condiciones toda función Pettis integrable es Bochner integrable; en

---

la revisión bibliográfica que hemos realizado no encontramos una respuesta general a esta interrogante, aunque si hallamos respuestas parciales. Por ejemplo, si el espacio de Banach es separable, toda función Pettis integrable es Bochner integrable, es decir, si un espacio de Banach es separable, entonces la integral de Bochner y la integral de Pettis son equivalentes (véase [38]). Es natural preguntarnos si los espacios de Banach separables están caracterizados por la equivalencia entre las integrales de Bochner y Pettis; acorde a la revisión bibliográfica que hemos realizado no encontramos una respuesta general a esta interrogante, por lo tanto, **planteamos como objetivo la formulación de la solución para futuras investigaciones.**

La relación entre la integral de McShane con la integral de Pettis es establecida en el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.3.** *(Schwabik and Guoju, [38]) Sean  $f : [a, b] \rightarrow X$  y  $E \subset [a, b]$  medible. Si  $f$  es McShane integrable sobre  $E$ , entonces  $f$  es Pettis integrable sobre  $E$  y el valor de las integrales coinciden.*

Como consecuencia del Teorema 4.2.3, tenemos que

$$M([a, b], X) \subset P([a, b], X). \quad (4.8)$$

En este punto surge de manera natural el preguntarnos si el recíproco del Teorema 4.2.3 es cierto, la respuesta en general es negativa ya que en [15] y en [9] los autores exhiben ejemplos de funciones las cuales son Pettis integrables y no son McShane integrables, dado que dichos ejemplos utilizan conceptos que no han sido definidos a lo largo de este trabajo de tesis y por la complejidad de sus construcciones no los damos explícitamente.

Con base a lo anterior es natural preguntarse bajo qué condiciones toda función Pettis integrable es McShane integrable; los siguientes resultados establecen las condiciones necesarias y/o suficientes para la equivalencia entre estas integrales.

**Teorema 4.2.4.** *(Gordon [17]) Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$  fuertemente medible. Si  $f$  es Pettis integrable sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  es McShane integrable sobre  $[a, b]$ .*

**Teorema 4.2.5.** *(Schwabik [40]) Sea  $X$  un espacio de Banach separable. Entonces una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Pettis integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si  $f$  es McShane integrable sobre  $[a, b]$ .*

**Teorema 4.2.6.** *(Di Piazza-Preiss [9]) Sea  $X$  un espacio de Hilbert. Entonces una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es McShane integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si es Pettis integrable sobre  $[a, b]$ .*

---

**Teorema 4.2.7.** (Deville-Rodríguez [6]) Sea  $X$  un subespacio de un espacio Hilbert generado. Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  Pettis integrable sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  es McShane integrable sobre  $[a, b]$ .

Para determinar la relación entre la integral de Pettis y la integral de Kurzweil consideremos el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.8.** (Fremlin, [14]) Sea  $f : [a, b] \rightarrow X$ .  $f$  es McShane integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si  $f$  es Pettis integrable y Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$ .

En [13, p. 535] se establece que toda función  $f : [a, b] \rightarrow X$  Pettis integrable es Kurzweil integrable, lo cual, en general, es incorrecto; en efecto, supongamos que es válido: si  $f$  es Pettis integrable entonces es Kurzweil integrable, por el Teorema 4.2.8 tenemos que  $f$  es McShane integrable, lo cual es una contracción ya que en [15] y en [9] los autores exhiben ejemplos de funciones las cuales son Pettis integrables y no son McShane integrables. Por lo que

$$P([a, b], X) \not\subset K([a, b], X).$$

La función del Ejemplo 4.1.4 es una función Kurzweil integrable la cual no es Pettis integrable, por lo que tenemos que

$$K([a, b], X) \not\subset P([a, b], X).$$

Por lo que afirmamos que no hay relación de contención entre  $K([a, b], X)$  y  $P([a, b], X)$ ; sin embargo, cualquier función constante es tanto Pettis integrable como Kurzweil integrable. Gráficamente, la relación entre los espacios de funciones Pettis, McShane y Kurzweil integrables es representada mediante la Figura 4.2.

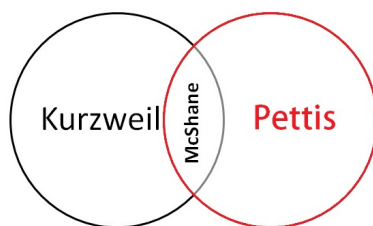


Figura 4.2.

Con base en la contención 4.1 de la Sección 4.1, la contención 4.8 y el Teorema 4.2.8 de la presente sección, una representación gráfica de la relación entre las integrales de Riemann, McShane, Pettis y Kurzweil es la Figura 4.3.

---

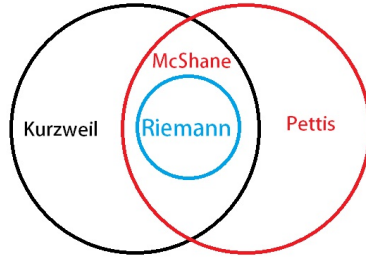


Figura 4.3.

Por último haremos tres comparaciones más: la integral de Riemann con la integral de Bochner, la integral de Bochner con la integral de McShane y la integral de Henstock con la integral de Pettis.

En general, no existe relación de contención entre el espacio de funciones Riemann integrables y el espacio de funciones Bochner integrables, dado que existen funciones Riemann integrables que no son Bochner integrables y funciones Bochner integrables que no son Riemann integrables. En el Ejemplo 2.3.11 se exhibe una función Riemann integrable, pero al no ser fuertemente medible no es Bochner integrable; por lo tanto,

$$R([a, b], X) \not\subset B([a, b], X). \quad (4.9)$$

Por otro lado, la función definida en el Ejemplo 4.1.3 de la Sección 4.1 exhibe una función Bochner integrable la cual no es Riemann integrable; por lo tanto,

$$B([a, b], X) \not\subset R([a, b], X). \quad (4.10)$$

Sin embargo,

$$R([a, b], X) \cap B([a, b], X) \neq \emptyset, \quad (4.11)$$

dado que toda función constante es tanto Riemann integrable como Bochner integrable.

Así pues, con base en las expresiones (4.9), (4.10) y (4.11) podemos dar una representación gráfica de la relación entre el espacio de funciones Riemann integrables y el espacio de funciones Bochner integrables mediante la Figura 4.4.

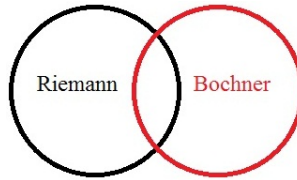


Figura 4.4.

El siguiente teorema establece la relación entre el espacio de funciones Bochner integrables y el espacio de funciones McShane integrables.

**Teorema 4.2.9.** *(Schwabik and Guoju, [38]) Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Bochner integrable sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  es McShane integrable sobre  $[a, b]$ .*

Así pues, con base en el Teorema 4.2.9 se cumple que

$$B([a, b], X) \subset M([a, b], X); \tag{4.12}$$

el recíproco, en general no es válido, ya que en particular en [38] se exhibe un ejemplo de una función McShane integrable la cual no es Bochner integrable; dada la complejidad de su construcción, omitimos su formulación e invitamos al lector interesado a consultar dicho trabajo.

Nuevamente, es natural preguntarnos acerca de qué condiciones debe cumplir el espacio de Banach para tener la equivalencia de las integrales de Bochner y McShane, en particular si el espacio es de dimensión finita toda función McShane integrable es Bochner integrable (véase [38]). Ahora bien, es natural preguntarnos si los espacios de dimensión finita están caracterizados por dicha propiedad, en [38] el autor establece que si el espacio es de dimensión infinita existe una función la cual es McShane integrable y no es Bochner integrable. Por lo que tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 4.2.10.** *Sean  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y  $X$  un espacio de Banach.  $X$  es de dimensión finita si y sólo si para cada  $f : [a, b] \rightarrow X$ ,  $f$  es Bochner integrable sobre  $[a, b]$  si y sólo si  $f$  es McShane integrable sobre  $[a, b]$ .*

Gráficamente la Figura 4.5 representa la relación entre el espacio de funciones Bochner integrables y el espacio de funciones McShane integrables.

---

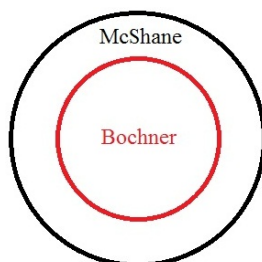


Figura 4.5.

Respecto a las integrales de Henstock y Pettis no existe, en general, una relación de contención entre los espacios de funciones de estas integrales, ya que la función dada en el Ejemplo 4.2.2 es una función Pettis integrable y no es Henstock integrable (Ejemplo 4.1.7), por otro lado, la función del Ejemplo 4.1.4 es una función real que es Henstock integrable y no es Pettis integrable debido a que en el contexto real la integral de Henstock es equivalente a la de Kurzweil y, a su vez, la integral de Pettis es equivalente a la de Lebesgue. Sin embargo, cualquier función constante es tanto Pettis integrable como Henstock integrable y además el valor de las integrales coinciden. Así pues, una representación gráfica de las integrales de Henstock y Pettis está dada mediante la Figura 4.6.

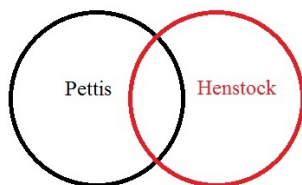


Figura 4.6.

Por último, determinaremos la relación que existe entre las integrales de Bochner y Henstock, tal relación viene dada por el siguiente teorema.

**Teorema 4.2.11.** (Federson, [11]) *Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Bochner integrable sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  es Henstock integrable sobre  $[a, b]$ .*

Así pues, se tiene que

$$B([a, b], X) \subset H([a, b], X); \quad (4.13)$$

aunque el recíproco, en general, no se cumple, ya que la función dada en el Ejemplo 4.1.4 es una función Henstock integrable la cual no es Bochner

---

integrable. Así pues, una representación gráfica de la relación entre la integral de Bochner y Henstock es la Figura 4.7.

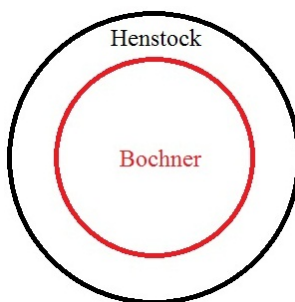


Figura 4.7.

El siguiente resultado será de gran utilidad en demostraciones de resultados posteriores, tales como los teoremas de convergencia; debido a que en su demostración son utilizados resultados los cuales no se encuentran establecidos en este trabajo de tesis, omitimos su demostración. Al lector interesado en conocer la demostración lo invitamos a consultar [12].

**Teorema 4.2.12.** *Sea  $X$  un espacio de Banach. Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Henstock integrable, entonces existen conjuntos cerrados  $B_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , tal que  $B_j \subset B_{j+1}$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\cup_j B_j = [a, b]$  y  $f$  es Bochner integrable sobre cada  $B_j$ . Más aún, para todo subintervalo cerrado  $I$  de  $[a, b]$ ,*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (B) \int_I \chi_{B_j} f = (H) \int_I f. \tag{4.14}$$

Acorde a las Figuras 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7, una representación gráfica de las relaciones entre las integrales de Riemann, Bochner, McShane, Pettis, Henstock y Kurzweil es la Figura 4.8.

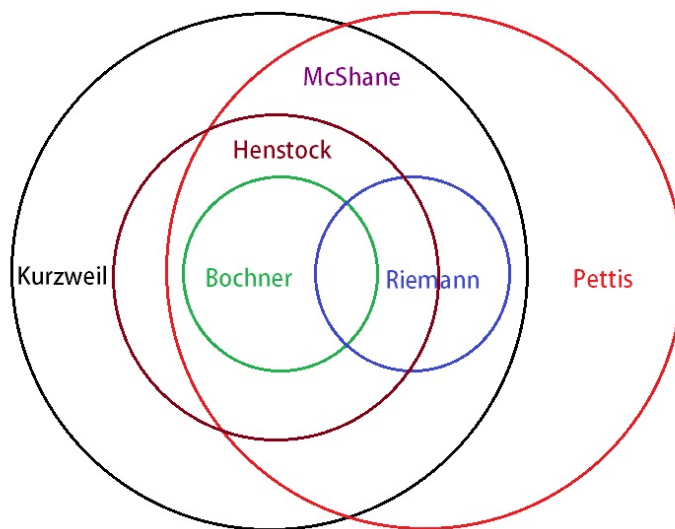


Figura 4.8.



## Capítulo 5

# Teoremas de Convergencia para las integrales de Henstock y Kurzweil

En este capítulo estableceremos los correspondientes teoremas de convergencia para la integral de Henstock y de Kurzweil similares a los que se tienen en el contexto real: Teorema de Convergencia Monótona (Teorema 1.5.1), Dominada (Teorema 1.5.2) y Equi-integrabilidad (Teorema 1.5.4); sin embargo, observe que los primeros dos teoremas de convergencia están formulados en términos de la relación de orden usual que existe en el conjunto de los números reales, así pues, dado que en general, en un espacio de Banach no se cuenta con una estructura de orden, estos teoremas no pueden ser formulados de manera análoga al contexto real; por lo tanto, con la finalidad de establecer estos teoremas de convergencia en el contexto de los espacios de Banach, iniciaremos definiendo una relación de orden en un espacio de Banach arbitrario.

**Definición 5.0.13.** *Un subconjunto cerrado  $X_+$  de un espacio normado  $X$  es llamado un **cono ordenado** si y sólo si*

(i)  $X_+ + X_+ \subseteq X_+$ ,

(ii)  $X_+ \cap (-X_+) = \{0\}$ ,

(iii)  $cX_+ \subseteq X_+$  para todo  $c > 0$ .

**Nota.** *Los puntos (i) y (ii) significan que  $X_+$  es cerrado bajo la suma y producto por escalares positivos.*

**Observación.** Si consideramos el conjunto  $\{0\}$ , éste cumple con las condiciones de la Definición 5.0.13. Además, observe que el inciso (ii) de la Definición 5.0.13 impide que un subespacio vectorial del espacio  $X$  sea un cono ordenado.

**Nota.** En trabajos tales como en [10] al concepto de cono ordenado lo denominan como “cono positivo”, debido a que sus elementos cumplen con una cierta condición de “positividad” análoga a la que se tiene en el conjunto de los números reales.

**Definición 5.0.14.** Sea  $X_+$  un cono ordenado de un espacio normado  $X$  y sean  $x, y \in X$ , definimos una relación de orden  $\leq$  en  $X$  como

$$x \leq y \text{ si y sólo si } y - x \in X_+.$$

La relación  $\leq$  define un orden parcial en  $X$ , en efecto:

1. sean  $x, y, z \in X$ , dado que  $x - x = 0 \in X_+$  implica  $x \leq x$  y por lo tanto es reflexiva;
2. ya que si  $x \leq y$  y  $y \leq x$ , entonces  $y - x \in X_+$  y  $x - y = -(y - x) \in X_+$  y por (ii),  $x - y = 0$ , es decir,  $x = y$ , por lo que es antisimétrica;
3. si  $x \leq y$  y  $y \leq z$ , entonces  $y - x \in X_+$  y  $z - y \in X_+$ , por (i),  $x - y + y - z = x - z \in X_+$  e implica que es transitiva.

Observe que dado un cono ordenado definimos un orden parcial; más aún, el recíproco también se cumple, es decir, si  $\leq$  es un orden parcial sobre  $X$  entonces el conjunto  $X_+ = \{y \in X \mid 0 \leq y\}$  es un cono ordenado. Así pues, los elementos de un cono ordenado son aquellos que son “positivos” en el sentido del orden parcial construido.

**Definición 5.0.15.** Un **espacio de Banach ordenado** es un par  $(X, \leq)$  tal que  $X$  es un espacio de Banach y  $\leq$  es una relación de orden parcial definida en  $X$ .

**Nota.** Cuando hagamos referencia a un espacio de Banach ordenado simplemente lo denotaremos  $X$ , a menos que se indique lo contrario.

**Ejemplo 5.0.16.** El espacio

$$C([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\},$$

dotado con la norma del supremo  $\|\cdot\|_\infty$  y con la relación de orden “ $f \leq g$  si y sólo si  $f(t) \leq g(t)$ , para todo  $t \in [0, 1]$ ”, es un espacio de Banach ordenado.

**Ejemplo 5.0.17.** (M. Federson [10]) Sea  $X$  un espacio de Banach ordenado y  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espacio de medida y sean  $f, g \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$  funciones reales, donde  $1 \leq p \leq \infty$ . Entonces la relación “ $f \leq g$  si y sólo si  $f(t) \leq g(t)$   $\mu$ -casi donde quiera” define una relación de orden parcial sobre  $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ .

**Definición 5.0.18.** Sean  $X$  un espacio de Banach ordenado y  $(f_n)$  una sucesión de funciones Henstock (respectivamente Kurzweil) integrables con valores en  $X$  y definidas sobre  $[a, b]$ . La sucesión  $(f_n)$  es:

- **creciente** si y sólo si  $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,
- **decreciente** si y sólo si  $f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$ , para todo  $t \in [a, b]$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,
- **monótona** si y sólo si es creciente o decreciente,
- **puntualmente acotada en norma** casi donde sea si y sólo si

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty,$$

para casi todo  $t \in [a, b]$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

Recordemos que en la Teoría de los Espacios Normados existe el concepto de *acotamiento de un conjunto*, el cual se define de la siguiente manera: Sean  $X$  un espacio normado y  $A \subset X$ . Se dice que  $A$  es **acotado (respecto a la norma)** si y sólo si existe  $K \geq 0$  tal que

$$\|x\| \leq K, \text{ para todo } x \in A. \quad (5.1)$$

Sin embargo, haciendo uso de la relación de orden de un espacio de Banach ordenado podemos definir otro concepto de acotamiento de un conjunto de la siguiente manera: Sean  $X$  un espacio de Banach ordenado y  $A \subset X$ . Se dice que  $A$  es **acotado (respecto al orden)** si y sólo si

$$A \subset [y, z] := \{x \in X \mid y \leq x \leq z\}. \quad (5.2)$$

Así pues, dado que en un espacio de Banach ordenado tenemos al menos dos conceptos de conjunto acotado, para hacer una distinción entre estos dos conceptos si un conjunto es acotado respecto a la condición 5.1, entonces diremos que el conjunto es **acotado en norma**; si un conjunto es acotado respecto a la condición 5.2, entonces diremos que el conjunto es **acotado en orden**.

En particular, en el conjunto de los números reales, considerando el valor absoluto como su norma y su relación de orden usual, se tiene que el concepto

de acotamiento en norma y acotamiento en orden son equivalentes; además, es un hecho conocido que toda sucesión  $(x_n) \subset \mathbb{R}$  que es creciente (respectivamente decreciente) y acotada superiormente (respectivamente inferiormente) es convergente y, además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$$

$$\left( \text{respectivamente } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \right).$$

Sin embargo, en general, no es válido que si una sucesión de un espacio de Banach es creciente (respectivamente decreciente) y acotada superiormente (respectivamente inferiormente) es convergente; un ejemplo de ello es el siguiente.

**Ejemplo 5.0.19.** *Consideremos el espacio*

$$C([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ es continua}\},$$

dotado con la norma del supremo  $\|\cdot\|_\infty$  y con la relación de orden “ $f \leq g$  si y sólo si  $f(t) \leq g(t)$ , para todo  $t \in [0, 1]$ ”. Sea  $(f_n) \subset C([0, 1], \mathbb{R})$  una sucesión de funciones, donde

$$f_n(t) := \begin{cases} 1, & \text{si } t \in (\frac{1}{n}, 1], \\ nt, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}], \end{cases}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(f_n)$  es creciente y acotada en orden, ya que  $0 \leq f_n \leq 1$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

La sucesión  $(f_n)$  converge puntualmente a la función

$$f_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in (0, 1], \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Pero  $f_0 \notin C([a, b], X)$ , por lo tanto no existe  $f \in C([a, b], X)$  tal que la sucesión  $(f_n)$  converja en norma a  $f$ .

**Definición 5.0.20.** Sea  $X_+$  un cono ordenado de un espacio de Banach  $X$ . Se dice que  $X_+$  es

- **normal** si y sólo si existe una constante  $\gamma \geq 1$  tal que si  $x, y \in X$  y  $0 \leq x \leq y$ , entonces

$$\|x\| \leq \gamma \|y\|, \tag{5.3}$$

- **regular** si y sólo si toda sucesión creciente y acotada en orden de  $X_+$  converge,
- **completamente regular** si y sólo si toda sucesión creciente y acotada en norma de  $X_+$  converge.

**Lema 5.0.21.** Sean  $X$  un espacio ordenado a través de un cono completamente regular y  $(x_n)$  una sucesión creciente en orden y acotada en norma. Entonces existe  $x \in X$  tal que  $(x_n)$  converge en norma a  $x$ .

**Demostración:** Sean  $y_n = x_n - x_1$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . La sucesión  $(y_n)$  es creciente en orden y acotada en norma de elementos de  $X_+$ . Como  $X_+$  es completamente regular existe  $x \in X$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_1 - x\| = 0$ , por lo tanto  $(x_n)$  converge en norma a  $x_1 + x$ .

□

**Nota.** En la revisión bibliográfica que hemos realizado no encontramos el Lema 5.0.21 como tal, por ello, aunque es de lo más elemental, **su demostración es de nuestra autoría.**

**Observación.** Toda sucesión decreciente en orden y acotada en norma en un espacio ordenado a través de un cono completamente regular converge en norma. Así, toda sucesión monótona y acotada en norma es convergente en norma.

Los siguientes espacios son ejemplos de espacios de Banach los cuales tienen conos ordenados completamente regulares (véase [20]).

- Espacios de sucesiones  $l_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , normados por una  $p$ -norma y con el orden " $(x_n) \leq (y_n)$  si y sólo si  $x_n \leq y_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ".
- Espacios de funciones  $L_p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , normado por una  $p$ -norma y ordenado puntualmente casi donde sea, donde  $\Omega$  es un espacio de medida.

El siguiente teorema muestra la relación existente entre los conceptos definidos anteriormente; al lector interesado en conocer la demostración de este teorema lo invitamos a consultar [19].

**Teorema 5.0.22.** (Gou, [19]) Sea  $X_+$  un cono ordenado de un espacio de Banach  $X$ . Si  $X_+$  es completamente regular, entonces  $X_+$  es regular; además, si  $X_+$  es regular, entonces  $X_+$  es normal. El recíproco se cumple si  $X$  es débilmente secuencialmente completo.

Dado que un cono completamente regular es regular y normal, los espacios  $l_p$  y  $L_p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , dados anteriormente también son ejemplos de estos espacios.

Como el lector podrá percatarse el Teorema 1.2.3 está formulado en términos de la relación de orden usual de los números reales; por lo tanto, este teorema no puede formularse, en general, para el espacio  $H([a, b], X)$  (respectivamente  $K([a, b], X)$ ), donde  $X$  es cualquier espacio de Banach. Sin embargo, si el espacio  $X$  es ordenado, entonces tenemos los siguientes teoremas.

**Teorema 5.0.23.** (*Monotonía, Heikkilä, [20]*) Sean  $X$  un espacio de Banach ordenado y  $f, g : [a, b] \rightarrow X$  funciones Kurzweil integrables sobre  $[a, b]$ .

(i) Si  $f(t) \leq g(t)$  para casi toda  $t \in [a, b]$ , entonces

$$(K) \int_a^b f \leq (K) \int_a^b g.$$

(ii) Sea  $[c, d] \subseteq [a, b]$ . Si  $0 \leq f(t)$  para casi toda  $t \in [a, b]$ , entonces

$$(K) \int_c^d f \leq (K) \int_a^b f.$$

### Demostración:

(i) Por el Teorema 3.2.19 podemos suponer que  $f(t) \leq g(t)$  para toda  $t \in [a, b]$ . Denotemos  $h = g - f$ , entonces  $h(t)$  pertenece al cono ordenado  $X_+$  de  $X$  para toda  $t \in [a, b]$ . Sea  $[c, d] \subset [a, b]$ . Por el Teorema 2.3.2,  $h$  es Kurzweil integrable sobre  $[c, d]$ .

Para demostrar que  $(K) \int_c^d h \in X_+$ , observemos primero que  $(K) \int_c^d h = 0 \in X_+$  si  $c = d$ . Supongamos que  $c < d$ , acorde a la definición de la integral de Kurzweil podemos elegir para cada  $n \in \mathbb{N}$  una función medidora  $\delta_n$  y una partición etiquetada  $\{(I_i^n, \xi_i^n) : i = 1, \dots, m_n\}$   $\delta_n$ -fina de  $[c, d]$  tal que

$$\left\| (K) \int_c^d h - \sum_{i=1}^{m_n} h(\xi_i^n) l(I_i^n) \right\| < \frac{1}{n}.$$

Denotemos  $y_n = \sum_{i=1}^{m_n} h(\xi_i^n) l(I_i^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $X_+$  es cerrado y como  $y_n \in X_+$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $(K) \int_c^d h = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in X_+$ .

Consecuentemente,

$$0 \leq (K) \int_c^d h = (K) \int_c^d g - (K) \int_c^d f.$$

Esto demuestra la afirmación.

(ii) Como  $f\chi_{[c,d]} \leq f$  en  $[a, b]$ , por (i), tenemos que

$$(K) \int_a^b f\chi_{[a,b]} \leq \int_a^b f.$$

□

**Teorema 5.0.24.** (*Monotonía, Heikkilä, [21]*) Sea  $X$  un espacio de Banach ordenado a través de un cono ordenado normal. Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow X$  funciones fuertemente medibles, tales que  $0 \leq f(t) \leq g(t)$  para casi toda  $t \in [a, b]$ . Si  $g$  es Henstock integrable sobre  $[a, b]$ , entonces  $f$  es Henstock integrable sobre  $[a, b]$ , y para todo subintervalo cerrado  $[c, d]$  de  $[a, b]$ ,

$$(H) \int_c^d f \leq (H) \int_c^d g.$$

**Demostración:** Por el Teorema 4.2.12 existen conjuntos cerrados  $B_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , tal que  $B_j \subset B_{j+1}$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\cup_j B_j = [a, b]$ ,  $g$  es Bochner integrable sobre cada  $B_j$  y

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (B) \int_c^d \chi_{B_j} g = (K) \int_c^d g. \quad (5.4)$$

Como el cono ordenado de  $X$  es normal, entonces

$$\|f(t)\| \leq \gamma \|g(t)\|, \text{ para casi toda } t \in [a, b].$$

Este resultado implica que  $f$  es Bochner integrable sobre cada  $B_j$  debido a que  $g$  lo es. Para cada subintervalo cerrado  $[c, d] \subset [a, b]$  definimos

$$\begin{aligned} F_+([c, d]) &= (H) \int_c^d g, \\ F_j^+([c, d]) &= (H) \int_c^d \chi_{B_j} g, \\ F_j([c, d]) &= (H) \int_c^d \chi_{B_j} f. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Si  $j < i$ , por el Teorema 5.0.23

$$\begin{aligned} 0 \leq F_i([c, d]) - F_j([c, d]) &= (B) \int_c^d \chi_{B_i \setminus B_j} f \leq (B) \int_c^d \chi_{B_i \setminus B_j} g \\ &= F_i^+([c, d]) - F_j^+([c, d]). \end{aligned}$$

Por la normalidad del cono lo anterior implica que

$$\|F_i([c, d]) - F_j([c, d])\| \leq \gamma \|F_i^+([c, d]) - F_j^+([c, d])\|, \text{ siempre que } j < i. \quad (5.6)$$

Por 5.4 y 5.5 la sucesión  $(F_j^+([a, b]))_{j \in \mathbb{N}}$  converge, y por lo tanto es una sucesión de Cauchy. Entonces, por 5.6, la sucesión  $(F_j([a, b]))_{j \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy y, por lo tanto, converge. Por la desigualdad 5.6 tenemos que, cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\|F([c, d]) - F_j([c, d])\| \leq \gamma \|F_+([c, d]) - F_j^+([c, d])\|, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \quad (5.7)$$

Definimos

$$f_j(t) = \chi_{B_j}(t)f(t), \quad g_j(t) = \chi_{B_j}(t)g(t), \quad t \in [a, b], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como  $\cup_j B_j = [a, b]$ , para cada  $\xi \in [a, b]$  existe un  $j(\xi) \in \mathbb{N}$  tal que  $\xi \in B_j$ , para todo  $j \geq j(\xi)$ . Entonces

$$f_j(\xi) = f(\xi) \text{ y } g_j(\xi) = g(\xi) \text{ siempre que } \xi \in [a, b] \text{ y } j \geq j(\xi). \quad (5.8)$$

Se sigue de 5.7 y 5.8 que dado cualquier punto  $\xi_i \in [a, b]$ , cualquier subintervalo  $I_i \subset [a, b]$  y cualquier entero  $j \geq j(\xi_i)$ , entonces

$$\begin{aligned} \|f(\xi_i)l(I_i) - F(I_i)\| &= \|f_j(\xi_i)l(I_i) - F(I_i)\| \\ &\leq \|f_j(\xi_i)l(I_i) - F_j(I_i)\| + \|F_j(I_i) - F(I_i)\| \\ &\leq \|f_j(\xi_i)l(I_i) - F_j(I_i)\| + \gamma \|F_j^+(I_i) - F_+(I_i)\| \\ &\leq \|f_j(\xi_i)l(I_i) - F_j(I_i)\| + \gamma \|g(\xi_i)l(I_i) - F_j^+(I_i)\| + \gamma \|g(I_i) - F_+(I_i)\| \\ &= \|f_j(\xi_i)l(I_i) - F_j(I_i)\| + \gamma \|g_j(\xi_i)l(I_i) - F_j^+(I_i)\| + \gamma \|g(I_i) - F_+(I_i)\|. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Sea  $\epsilon > 0$ . Por el Teorema 4.2.11, como las funciones  $f_j$  y  $g_j$  son Bochner integrables también son Henstock integrables. Por la versión fuerte del Lema de Saks-Henstock para la integral de Henstock (Lema 2.4.3), existen funciones

medidoras  $\delta_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , tales que para toda subpartición etiquetada  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, s\}$   $\delta_j$ -fina de  $[a, b]$ ,

$$\sum_{i=1}^s \|f_j(\xi_i)l(I_i) - F_j(I_i)\| < \frac{\epsilon}{2^j} \text{ y } \sum_{i=1}^s \|g_j(\xi_i)l(I_i) - F_j^+(I_i)\| < \frac{\epsilon}{2^j}. \quad (5.10)$$

Elegimos una función medidora  $\delta_+$  tal que si  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  es una partición etiquetada  $\delta_+$ -fina de  $[a, b]$ ,

$$\sum_{i=1}^n \|g(\xi_i)l(I_i) - F_+(I_i)\| < \epsilon. \quad (5.11)$$

Definimos una función medidora  $\delta$  por

$$\delta(\xi) = \min\{\delta_+(\xi), \delta_{j(\xi)}(\xi)\}, \quad \xi \in [a, b].$$

Sea  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ . Por 5.9 tenemos, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \|f(\xi_i)l(I_i) - F(I_i)\| &\leq \|f_{j(\xi_i)}(\xi_i)l(\xi_i) - F_{j(\xi_i)}(I_i)\| \\ &+ \gamma \|g_{j(\xi_i)}(\xi_i)l(I_i) - F_{j(\xi_i)}^+(I_i)\| + \gamma \|g(\xi_i)l(I_i) - F_+(I_i)\|. \end{aligned}$$

Sumando ambos lados de la desigualdad anterior sobre  $i$  y definiendo  $m = \min\{j(\xi_i)\}$  y  $n = \max\{j(\xi_i)\}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|f(\xi_i)l(I_i) - F(I_i)\| &\leq \sum_{j=m}^n \sum_{j(\xi_i)=j} \|f_j(\xi_i)l(I_i) - F_j(I_i)\| \\ &+ \gamma \sum_{j=m}^n \sum_{j(\xi_i)=j} \|g_j(\xi_i)l(I_i) - F_j^+(I_i)\| + \gamma \sum_{i=1}^n \|g(\xi_i)l(I_i) - F_+(I_i)\|. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Por 5.10 y 5.11 y 5.12 tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \|f(\xi_i)l(I_i) - F(I_i)\| \leq \sum_{j=m}^n \frac{\epsilon}{2^j} + \gamma\epsilon < (3\gamma + 2)\epsilon.$$

Esto prueba que  $f$  es Henstock integrable sobre  $[a, b]$  y por como definimos  $F_j$  y  $F_j^+$  tenemos que  $F_j \leq F_j^+$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Este resultado implica que, cuando  $j \rightarrow \infty$ ,  $F(I) \leq F_+(I)$ , o equivalentemente,

$$(H) \int_c^d f \leq (H) \int_c^d g.$$

□

El siguiente resultado establece una caracterización de una cierta clase de funciones Henstock integrables sobre un espacio de Banach ordenado a través del concepto de medibilidad fuerte.

**Teorema 5.0.25.** (Heikkilä, [21]) *Sea  $X$  es un espacio de Banach ordenado a través de un cono ordenado normal. Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  es acotada en orden puntualmente casi dondequiera por funciones Henstock integrables, entonces  $f$  es Henstock integrable si y sólo si  $f$  es fuertemente medible.*

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) Si  $f$  es Henstock integrable, es fuertemente medible por el Teorema 2.3.10.  
 $\Leftarrow$ ) Sea  $g_-, g_+ : [a, b] \rightarrow X$  funciones Henstock integrables tales que  $g_-(t) \leq f(t) \leq g_+(t)$  para casi toda  $t \in [a, b]$ . Entonces  $g_+ - g_-$  es Henstock integrable,  $f - g_-$  es fuertemente medible, y

$$0 \leq f(t) - g_-(t) \leq g_+(t) - g_-(t) \text{ para casi toda } t \in [a, b].$$

Por lo tanto  $f - g_-$  es Henstock integrable por el Teorema 5.0.24, entonces  $f = g_- + (f - g_-)$  es Henstock integrable.

□

## 5.1. Teorema de Convergencia Dominada

Al igual que en el contexto real, si tenemos una sucesión de funciones  $(f_n)$  que toman valores en un espacio de Banach ordenado, decimos que la sucesión  $(f_n)$  está **dominada** si y sólo si existen funciones  $g_{\pm}$  fuertemente medibles tales que

$$g_-(t) \leq f_n(t) \leq g_+(t),$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$  y para casi todo  $t \in [a, b]$ .

En este momento contamos con las herramientas necesarias para formular el Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Henstock.

**Teorema 5.1.1.** (Teorema de Convergencia Dominada, Heikkilä, [21]) *Sean  $X$  un espacio de Banach ordenado a través de un cono normal y  $g_{\pm}, f_n : [a, b] \rightarrow X$  funciones fuertemente medibles,  $n \in \mathbb{N}$ . Si la sucesión  $(f_n)$  está dominada por  $g_{\pm}$ ,  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  puntualmente para casi todo  $t \in [a, b]$  y  $g_{\pm} \in H([a, b], X)$ , entonces  $f, f_n \in H([a, b], X)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , y*

$$(H) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (H) \int_a^b f_n.$$

**Demostración:** La función límite  $f$  de la convergencia puntual casi donde quiera de la sucesión  $(f_n)$  de funciones fuertemente medibles es fuertemente medible [21]. Ya que  $f_n(t) \in [g_-(t), g_+(t)]$ , para casi toda  $t \in [a, b]$  y los intervalos ordenados  $[x, y]$  de  $X$  son cerrados, entonces  $f(t) \in [g_-(t), g_+(t)]$ , para casi toda  $t \in [a, b]$ . Por el Teorema 5.0.25 las funciones  $f$  y  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , son Henstock integrables. Más aún,

$$g_-(t) - g_+(t) \leq f(t) - f_n(t) \leq g_+(t) - g_-(t), \text{ para casi toda } t \in [a, b],$$

y

$$0 \leq f(t) - f_n(t) + g_+(t) - g_-(t) \leq 2(g_+(t) - g_-(t)), \text{ para casi toda } t \in [a, b].$$

Ya que el cono ordenado de  $X$  es normal y por lo anterior tenemos que

$$\|f(t) - f_n(t) + g_+(t) - g_-(t)\| \leq 2\gamma \|g_+(t) - g_-(t)\|, \text{ para casi toda } t \in [a, b]. \quad (5.13)$$

Por el Teorema 4.2.12 existe una sucesión de conjuntos cerrados  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $B_j \subset B_{j+1}$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\cup_j B_j = [a, b]$ ,  $g_+ - g_-$  es Bochner integrable sobre cada  $B_j$  y

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (B) \int_{B_j} (g_+ - g_-) = (H) \int_a^b (g_+ - g_-). \quad (5.14)$$

Las funciones  $v = f - f_n + g_+ - g_-$  y  $v_+ = 2(g_+ - g_-)$  cumplen las hipótesis del Lema 5.0.24; además, por la normalidad del cono ordenado tenemos que para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} & \left\| (H) \int_a^b (f - f_n + g_+ - g_-) - (B) \int_{B_j} (f - f_n + g_+ - g_-) \right\| \\ & \leq 2\gamma \left\| (H) \int_a^b (g_+ - g_-) - (B) \int_{B_j} (g_+ - g_-) \right\|. \end{aligned}$$

Este resultado implica que, para toda  $j, n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} & \left\| (H) \int_a^b (f - f_n) - (B) \int_{B_j} (f - f_n) \right\| \\ & \leq (2\gamma + 1) \left\| (H) \int_a^b (g_+ - g_-) - (B) \int_{B_j} (g_+ - g_-) \right\|. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Sea  $\epsilon > 0$ . Como

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (B) \int_{B_j} (g_+ - g_-) = (H) \int_a^b (g_+ - g_-),$$

existe  $j_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left\| (H) \int_a^b (g_+ - g_-) - (B) \int_{B_{j_\epsilon}} (g_+ - g_-) \right\| \leq \frac{\epsilon}{4\gamma + 2}. \quad (5.16)$$

Se sigue de 5.15 y 5.16 que

$$\left\| (H) \int_a^b (f - f_n) - (B) \int_{B_{j_\epsilon}} (f - f_n) \right\| \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (5.17)$$

En vista de 5.13 tenemos

$$\|f(t) - f_n(t)\| \leq (2\gamma + 1)\|g_+(t) - g_-(t)\|, \text{ para casi toda } t \in B_{j_\epsilon}.$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Bochner (Teorema 3.2.12), existe  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left\| (B) \int_{B_{j_\epsilon}} (f - f_n) \right\| \leq \frac{\epsilon}{2}, \text{ para } n \geq n_\epsilon. \quad (5.18)$$

Se sigue de 5.17 y 5.18 que

$$\left\| (H) \int_a^b (f - f_n) \right\| \leq \epsilon, \text{ para } n \geq n_\epsilon.$$

La prueba anterior muestra que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H) \int_a^b f_n = (H) \int_a^b f.$$

□

Sin embargo, si sustituimos la hipótesis de dominación en el Teorema de Convergencia Dominada de la integral de Henstock (Teorema 5.1.1) por la dominación “usual”, el siguiente resultado es válido.

**Teorema 5.1.2. (Teorema de Convergencia Dominada: Henstock)**  
 Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones Henstock integrables sobre  $[a, b]$  que converge puntualmente hacia una función  $f$  sobre  $[a, b]$ . Si existe  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Henstock-Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  tal que  $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ , para casi todo  $t \in [a, b]$ , entonces  $f$  es Henstock integrable sobre  $[a, b]$  y

$$(H) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (H) \int_a^b f_n.$$

**Demostración:** Por el Teorema 2.3.10  $(f_n)$  es una sucesión de funciones fuertemente medibles y dado que toda función positiva Henstock-Kurzweil integrable es Lebesgue integrable,  $g$  es Lebesgue integrable sobre  $[a, b]$ . Por el Teorema 3.2.12  $f$  es Bochner integrable sobre  $[a, b]$  y, por el Teorema 4.2.11, es Henstock integrable sobre  $[a, b]$ , más aún,

$$(H) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (H) \int_a^b f_n.$$

□

Para la integral de Kurzweil no es posible formular un resultado análogo al Teorema 5.1.2, debido a que una función Kurzweil integrable no necesariamente es fuertemente medible, sin embargo, si pedimos convergencia puntual y medibilidad fuerte a la sucesión de funciones, el Teorema se demuestra de forma trivial haciendo uso del Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Henstock. En general, en la revisión bibliográfica que hemos realizado no se han encontrado resultados ligados al Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Kurzweil, lo cual nos hace pensar que aún no existe; así pues, lo anterior nos motiva a cuestionarnos qué condiciones se necesitan para establecer el Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Kurzweil, **este problema lo abordaremos en trabajos posteriores.**

## 5.2. Teorema de Convergencia Monótona

**Lema 5.2.1.** *Sea  $X$  un espacio de Banach ordenado a través de un cono completamente regular. Si  $(f_n) \subset K([a, b], X)$  es una sucesión monótona acotada puntualmente en norma casi donde sea en  $[a, b]$ , entonces*

$$f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t),$$

*existe para casi toda  $t \in [a, b]$ .*

**Demostración:** Por hipótesis existe  $A \subset [a, b]$  Lebesgue medible, con  $\mu(A) = 0$  tal que la sucesión  $(f_n(t))$  es acotada en norma, para cada  $t \in [a, b] - A$ . Entonces para cada  $t \in [a, b] - A$ ,  $(f_n)$  es monótona y acotada en norma, como  $X_+$  es completamente regular,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ . Por lo tanto,  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ , para casi toda  $t \in [a, b]$ .

□

**Lema 5.2.2.** *Sea  $X$  un espacio de Banach ordenado a través de un cono completamente regular. Si  $(f_n) \subset K([a, b], X)$  es una sucesión monótona acotada puntualmente en norma casi donde sea y la sucesión de integrales  $(K) \int_a^b f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es acotada en norma, entonces*

$$f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t),$$

existe casi donde quiera en  $[a, b]$ , y

$$F([c, d]) := \lim_{n \rightarrow \infty} (K) \int_c^d f_n,$$

existe para todo subintervalo cerrado  $[c, d]$  de  $[a, b]$

**Demostración:** Supongamos que  $(f_n)$  es creciente y puntualmente acotada en norma casi donde sea en  $[a, b]$ . Entonces por el Lema 5.2.1  $(f_n)$  converge puntualmente a la función  $f$  casi donde quiera en  $[a, b]$ . Sea  $[c, d]$  un subintervalo de  $[a, b]$ , por el Lema 5.0.23 tenemos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq (K) \int_c^d (f_n - f_0) \leq (K) \int_a^b (f_n - f_0).$$

Como  $X_+$  es completamente regular, también es normal por el Lema 5.0.22, por lo tanto las desigualdades anteriores y de la definición de normalidad 5.3 implican

$$\left\| (K) \int_c^d (f_n - f_0) \right\| \leq \gamma \left\| (K) \int_a^b (f_n - f_0) \right\|, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde  $\gamma \geq 1$ . Entonces

$$\left\| (K) \int_c^d f_n \right\| \leq \left\| (K) \int_c^d f_0 \right\| + \gamma \left\| (K) \int_a^b f_n \right\| + \gamma \left\| (K) \int_a^b f_0 \right\|,$$

$n \in \mathbb{N}$ .

Este resultado, y la hipótesis de que la sucesión de integrales  $(K) \int_a^b f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es acotada en norma, implica que la sucesión de integrales  $(K) \int_c^d f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es acotada en norma, y además también es creciente por el Teorema 5.0.23.

---

Denotemos

$$F_n([c, d]) := (K) \int_c^d f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Debido a que el cono ordenado de  $X$  es completamente regular, entonces la sucesión de integrales  $(K) \int_c^d f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge, es decir, el límite

$$F([c, d]) := \lim_{n \rightarrow \infty} F_n([c, d]),$$

existe para todo subintervalo cerrado  $[c, d]$  de  $[a, b]$ , donde  $F([c, d]) = F(d) - F(c)$  y  $F_n([c, d]) = F_n(d) - F_n(c)$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

□

**Teorema 5.2.3. (Teorema de Convergencia Monótona, Heikkilä, [20])**  
 Sea  $X$  un espacio de Banach ordenado a través de un cono completamente regular. Si  $(f_n) \subset K([a, b], X)$  es una sucesión monótona acotada puntualmente en norma casi donde sea y la sucesión de integrales  $(K) \int_a^b f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es acotada en norma, entonces existe una función  $f \in K([a, b], X)$  tal que  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ , para casi todo  $t \in [a, b]$  y

$$(K) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (K) \int_a^b f_n. \quad (5.19)$$

**Demostración:** Supongamos que  $(f_n)$  es creciente y puntualmente acotada en norma casi donde sea.

Por el Lema 5.2.1

$$f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t),$$

existe para casi todo  $t \in [a, b]$ ; más aún, por el Teorema 3.2.19, podemos suponer que, para todo  $t \in [a, b]$ ,

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t),$$

y por el Lema 5.2.2

$$F([a, b]) := \lim_{n \rightarrow \infty} (K) \int_a^b f,$$

existe, demostraremos que  $f$  es Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  y que  $F([a, b]) = (K) \int_a^b f$ .

Sea  $\epsilon > 0$ . Denotemos

$$F_n([c, d]) := (K) \int_c^d f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por el Lema 5.2.2, elegimos  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|F([a, b]) - F_{n_\epsilon}([a, b])\| \leq \frac{\epsilon}{\gamma}, \quad (5.20)$$

para  $n \geq n_\epsilon$ .

Por la versión débil del Lema de Saks-Henstock para la integral de Kurzweil (Lema 2.4.1) existen funciones medidoras  $\delta_n$  sobre  $[a, b]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , para las cuales

$$\left\| \sum_{i=1}^p [f_n(\xi_i)l(I_i) - F_n(I_i)] \right\| \leq \frac{\epsilon}{2^n}, \quad (5.21)$$

siempre que  $D = \{(I_i, \xi_i); i = 1, \dots, p\}$  sea una partición o subpartición  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ .

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ , para toda  $t \in [a, b]$ , existe un  $n(t) \in \mathbb{N}$ , para el cual

$$\|f(t) - f_{n(t)}(t)\| < \epsilon, \quad (5.22)$$

cuando  $n \geq n(t)$ .

Definimos una función medidora  $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  por

$$\delta(t) = \max\{\delta_{n(t)}(t), \delta_{n_\epsilon}(t)\}, \quad t \in [a, b].$$

Sea  $\{(I_i, \xi_i), i = 1, \dots, s\}$  una partición  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ . Para cada  $i$  y  $n_i = \max\{n(\xi_i), n_\epsilon\}$  tenemos

$$\begin{aligned} f(\xi_i)l(I_i) - F(I_i) &= [f(\xi_i) - f_{n_i}(\xi_i)]l(I_i) + f_{n_i}(\xi_i)l(I_i) \\ &\quad - F_{n_i}(I_i) + F_{n_i}(I_i) - F(I_i). \end{aligned}$$

Sumando ambos lados de la igualdad anterior sobre  $i$  y denotando  $k = \min_i\{n_i\}$  y  $m = \max_i\{n_i\}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s (f(\xi_i)l(I_i) - F(I_i)) &= \sum_{i=1}^s [f(\xi_i) - f_{n_i}(\xi_i)]l(I_i) \\ &+ \sum_{n=k}^m \sum_{n_i=n} [f_{n_i}(\xi_i)l(I_i) - F_{n_i}(I_i)] + \sum_{i=1}^s [F_{n_i}(I_i) - F(I_i)]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Como

$$0 \leq \sum_{i=1}^s [F(I_i) - F_{n_i}(I_i)] \leq \sum_{i=1}^s [F(I_i) - F_{n_\epsilon}(I_i)] = F([a, b]) - F_{n_\epsilon}([a, b]),$$

por la Definición 5.3 y por la desigualdad 5.20 tenemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^s [F([a, b]) - F_{n_i}([a, b])] \right\| \leq \gamma \|F([a, b]) - F_{n_\epsilon}([a, b])\| \leq \epsilon. \quad (5.24)$$

Dado que 5.21 se cumple también para particiones  $\delta_n$ -finas de  $[a, b]$ , tenemos

$$\left\| \sum_{n_i=n}^s [f_{n_i}(\xi_i)l(I_i) - F_{n_i}(I_i)] \right\| \leq \frac{\epsilon}{2^n}, \quad (5.25)$$

para  $k \leq n \leq m$ .

Se sigue de 5.22, 5.23, 5.24 y 5.25 que

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^s f(\xi_i)l(I_i) - F([a, b]) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^s [f(\xi_i)l(I_i) - F(I_i)] \right\| \\ & \leq \sum_{i=1}^s \|f(\xi_i) - f_n(\xi_i)\|l(I_i) + \sum_{n=k}^m \left\| \sum_{n_i=n}^s [f_{n_i}(\xi_i)l(I_i) - F_n(I_i)] \right\| \\ & \quad + \left\| \sum_{i=1}^s [F_{n_i}(I_i) - F(I_i)] \right\| \\ & \leq \epsilon(b-a) + \sum_{n=k}^m \frac{\epsilon}{2^n} + \epsilon < [(b-a) + 3]\epsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que  $f$  es Kurzweil integrable, y que  $F([a, b]) = (K) \int_a^b f$ . Por lo tanto, por el Lema 5.2.2,

$$(K) \int_a^b f = F([a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n([a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (K) \int_a^b f_n.$$

Si  $(f_n)$  es decreciente y puntualmente acotada y si las integrales  $(K) \int_a^b f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  forman una sucesión acotada, entonces la sucesión  $(-f_n)$  es creciente y acotada puntualmente, y la sucesión de integrales  $(K) \int_a^b (-f_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  es acotada. Aplicando la prueba de arriba para  $(-f_n)$  vemos que las afirmaciones se cumplen también en este caso.

□

Con el siguiente ejemplo mostramos que el Teorema de Convergencia Monótona para la integral de Henstock-Kurzweil no puede formularse en forma análoga para la integral de Henstock.

**Ejemplo 5.2.4.** (Federson [10]) *Considere el espacio*

$$l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \left\{ z = (z_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}, z_{ij} \in \mathbb{R}; \sum_{i,j=1}^{\infty} |z_{ij}|^2 < \infty \right\}$$

equipado con la norma

$$\|z\|_2 = \left( \sum_{i,j=1}^{\infty} |z_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y la función  $f : [0, 1] \rightarrow l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$  definida por

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t),$$

donde

$$f_i(t) = \begin{cases} 2^i e_{ij}, & \frac{j}{2^i} \leq t < \frac{j}{2^i} + \frac{1}{2^{2i}}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para  $j = 0, 1, 2, \dots, 2^i - 1$ , y  $e_{ij} = \xi_{\{(i,j)\}}$ , para cada  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  y  $\{e_{ij}\}$  es un conjunto ortonormal de  $l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ .

Sean  $g_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces cada  $g_n \in H([0, 1], l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$ ; sin embargo,  $f \notin H([0, 1], l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$  (véase [10]).

Sin embargo, si además de suponer la monotonía de la sucesión, suponemos que es dominada por funciones fuertemente medibles podemos formular el siguiente resultado el cual es una consecuencia del Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Henstock.

**Teorema 5.2.5.** (Heikkilä [21]) *Sean  $X$  un espacio de Banach ordenado a través de un cono regular y  $(f_n)$  una sucesión monótona de funciones fuertemente medibles de  $[a, b]$  a  $X$ . Si existen funciones Henstock integrables  $g_{\pm} : [a, b] \rightarrow X$  tales que  $g_-(t) \leq f_n(t) \leq g_+(t)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  y para casi todo  $t \in [a, b]$ , entonces  $f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  existe para casi toda  $t \in [a, b]$ , y*

$$(H) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (H) \int_a^b f_n.$$

**Demostración:** Las hipótesis dadas implican que para casi toda  $t \in [a, b]$  la sucesión  $(f_n)$  es monótona y acotada en el orden en  $X$ . Debido a que el cono ordenado de  $X$  es regular, entonces  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  existe para casi toda  $t \in [a, b]$ .

Definiendo  $f(t) = 0$  para los restantes puntos  $t \in [a, b]$  obtenemos una función fuertemente medible  $f : [a, b] \rightarrow X$ . Consecuentemente, la hipótesis del Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Henstock (Teorema 5.1.1) se cumple para  $(f_n)$  y  $f$ , por lo tanto

$$(H) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (H) \int_a^b f_n.$$

□

Una de las hipótesis del Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Henstock (Teorema 5.1.1) es la propiedad de normalidad del cono ordenado, a diferencia del Teorema 5.2.5 para esta misma integral, donde la condición de regularidad es impuesta sobre el cono, dado que, como hemos visto anteriormente, una sucesión monótona y acotada en orden no necesariamente es convergente, por lo que no tiene sentido hablar de función límite, por ello, la condición de regularidad garantiza la existencia de dicha función; además de que la condición de dominación es impuesta, a diferencia del contexto real, donde esta condición sobre la sucesión de funciones no es necesaria.

### 5.3. Teorema de Equi-integrabilidad

**Definición 5.3.1.** Una colección  $\mathcal{F}$  de funciones  $f : [a, b] \rightarrow X$  es llamada *H-equi-integrable* (respectivamente *K-equi-integrable*) si y sólo si toda  $f \in \mathcal{F}$  es Henstock (respectivamente Kurzweil) integrable sobre  $[a, b]$  y para cualquier  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que si  $\{(t_i, I_i) : i = 1, \dots, n\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ , entonces

$$\sum_{i=1}^n \|f(t_i)\mu(I_i) - F(I_i)\| < \epsilon,$$

$$\left( \left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)l(I_i) - (K) \int_I f \right\| < \epsilon \right),$$

para toda  $f \in \mathcal{F}$ .

**Observación.** *Hablando coloquialmente, un conjunto  $\mathcal{F}$  es  $H$ -equi-integrable ( $K$ -equi-integrable) si y sólo si para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  que cumple la desigualdad de la definición 2.1.1 (definición 2.1.2), para toda  $f \in \mathcal{F}$ .*

Como podrá observar el lector, el Teorema de Equi-integrabilidad para la integral de Henstock-Kurzweil (Teorema 1.5.4) no está formulado en términos de la relación de orden usual que existe en el conjunto de los número reales; así pues, este teorema lo podemos formular para cualquier espacio de Banach sin la necesidad de que este espacio sea ordenado, tal como se establece a continuación.

**Teorema 5.3.2. (Teorema de Equi-Integrabilidad: Kurzweil, Kurzweil y Jarník, [27])** *Sea  $(f_n) \subset K([a, b], X)$  una sucesión  $K$ -equi-integrable tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f(t), \text{ para toda } t \in [a, b].$$

*Entonces la función  $f$  es Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (K) \int_a^b f_n = (K) \int_a^b f.$$

**Demostración:** Sea  $\epsilon > 0$ ; si  $\delta$  es la medidora de la definición de equi-integrabilidad de la sucesión  $(f_n)$  correspondiente al valor  $\epsilon > 0$ , entonces para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  tenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^p f_n(t_i)l(I_i) - (K) \int_a^b f_n \right\| < \epsilon, \quad (5.26)$$

para toda partición etiquetada  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, p\}$   $\delta$ -fina de  $[a, b]$ .

Si la partición  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, p\}$  es fija, entonces la convergencia puntual de la sucesión  $(f_n)$  a  $f$  permite que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p f_n(\xi_i)l(I_i) = \sum_{i=1}^p f(\xi_i)l(I_i).$$

Elegimos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n > n_0$  la desigualdad

$$\left\| \sum_{i=1}^p f_k(\xi_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^p f(\xi_i)l(I_i) \right\| < \epsilon$$

se cumple. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^p f(\xi_i)l(I_i) - (K) \int_a^b f_p \right\| \\ & \leq \left\| \sum_{i=1}^p [f(\xi_i)l(I_i) - f_n(\xi_i)l(I_i)] \right\| \\ & + \left\| \sum_{i=1}^p f_n(\xi_i)l(I_i) - (K) \int_a^b f_n \right\| < 2\epsilon, \end{aligned}$$

para  $n > n_0$ .

De aquí que para  $n, l > n_0$  se cumple la desigualdad

$$\left\| (K) \int_a^b f_n - (K) \int_a^b f_l \right\| < 4\epsilon,$$

la cual muestra que la sucesión  $(K) \int_a^b f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  de elementos de  $X$  es Cauchy y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (K) \int_a^b f_n = w \in X \text{ existe.} \quad (5.27)$$

Sea  $\epsilon > 0$ . Por hipótesis existe una medidora  $\delta$  tal que 5.26 se cumple para toda  $k \in \mathbb{N}$  siempre que  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  sea una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ . Por 5.27 elegimos  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left\| (K) \int_a^b f_n - w \right\| < \epsilon,$$

para toda  $n \geq N$ . Supongamos que  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, p\}$  es una partición etiquetada  $\delta$ -fina de  $[a, b]$ . Como  $f_n$  converge a  $f$  puntualmente existe  $n_1 \geq N$  tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^p f_{n_1}(\xi_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^p f(\xi_i)l(I_i) \right\| < \epsilon.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^p f(\xi_i)l(I_i) - w \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^p f(\xi_i)l(I_i) - \sum_{i=1}^p f_{n_1}(\xi_i)l(I_i) \right\| \\ & + \left\| \sum_{i=1}^p f_{n_1}(\xi_i)l(I_i) - (K) \int_a^b f_{n_1} \right\| + \left\| (K) \int_a^b f_{n_1} - w \right\| < 3\epsilon, \end{aligned}$$

y se sigue que  $f$  es Kurzweil integrable sobre  $[a, b]$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (K) \int_a^b f_n = w = (K) \int_a^b f.$$

□

Al igual que en el caso de la integral de McShane (Teorema 3.1.16), el siguiente resultado caracteriza a las funciones Kurzweil integrables en términos de la  $K$ -equi-integrabilidad.

**Teorema 5.3.3.** *Una función  $f : [a, b] \rightarrow X$  es Kurzweil integrable si y sólo si el conjunto*

$$\{x^* f : \|x^*\| \leq 1\}$$

*es  $K$ -equi-integrable.*

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) Si  $f$  es Kurzweil integrable, entonces dado  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) l(I_i) - (K) \int_a^b f \right\| \leq \epsilon,$$

para toda partición etiquetada  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  de  $[a, b]$   $\delta$ -fina. Para todo  $x^* \in X^*$  tenemos

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n x^* f(\xi_i) l(I_i) - x^* \left( (K) \int_a^b f \right) \right| \\ & \leq \|x^*\| \left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) l(I_i) - (K) \int_a^b f \right\| \leq \epsilon \|x^*\|, \end{aligned}$$

y por lo tanto  $\{x^* f : \|x^*\| \leq 1\}$  es  $K$ -equi-integrable.

$\Leftarrow$ ) Si  $\{x^* f : \|x^*\| \leq 1\}$  es  $K$ -equi-integrable, entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe una función medidora  $\delta$  sobre  $[a, b]$  tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^n x^* f(\xi_i) l(I_i) - (K) \int_a^b x^* f \right\| \leq \epsilon,$$

para toda partición etiquetada  $\{(I_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  de  $[a, b]$   $\delta$ -fina y todo  $x^* \in X^*$ , con  $\|x^*\| \leq 1$ . Por lo tanto, si  $\{(J_i, \tau_i) : i = 1, \dots, s\}$  es otra partición etiquetada de  $[a, b]$   $\delta$ -fina, tenemos

$$\left| x^* \left( \sum_{i=1}^n f(\xi_i) l(I_i) - \sum_{i=1}^s f(\tau_i) l(J_i) \right) \right|$$


---

$$= \left| \sum_{i=1}^n x^* f(\xi_i) l(I_i) - \sum_{i=1}^s x^* f(\tau_i) l(J_i) \right| \leq 2\epsilon,$$

para todo  $x^* \in X^*$ , con  $\|x^*\| \leq 1$ . Por lo que

$$\left\| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) l(I_i) - \sum_{i=1}^s f(\tau_i) l(J_i) \right\| \leq 2\epsilon,$$

y, por el Criterio de Cauchy para la integral de Kurzweil (Teorema 2.3.7),  $f$  es Kurzweil integrable.

□

**Teorema 5.3.4. (Teorema de Equi-integrabilidad: Henstock, Schwabik and Guoju, [38])** Sean  $(f_n) \subset H([a, b], X)$  una sucesión  $\mathcal{H}$ -equi-integrable sobre  $[a, b]$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t), \text{ para toda } t \in [a, b].$$

Entonces la función  $f$  es Henstock integrable sobre  $[a, b]$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [F_n(b) - F_n(a)] = F(b) - F(a),$$

donde  $F_n, F$  son las integrales indefinidas de  $f_n$  y  $f$ , respectivamente, para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración:** Primero observemos que la  $\mathcal{H}$ -equi-integrabilidad dada en la Definición 5.3.1 implica la  $\mathcal{K}$ -equi-integrabilidad. El Teorema 5.3.2 implica la integrabilidad Kurzweil de  $f$  y la relación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [F_n(d) - F_n(c)] = F(d) - F(c),$$

para todo intervalo  $[c, d] \subset [a, b]$ .

Sea  $\epsilon > 0$  dado y sea  $\delta$  la función medidora de la definición de  $\mathcal{H}$ -equi-integrabilidad de la sucesión  $(f_n)$ . Supongamos que  $\{(t_i, I, i) : i = 1, \dots, p\}$  es una partición arbitraria  $\delta$ -fina de  $[a, b]$  y consideramos la suma

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \|f(t_i)l(I_i) - [F(t_i) - F(t_{i-1})]\| \leq \sum_{i=1}^p \|f(t_i)l(I_i) - f_n(t_i)l(I_i)\| \\ & + \sum_{i=1}^p \|f_n(t_i)l(I_i) - [F_n(t_i) - F_n(t_{i-1})]\| + \sum_{i=1}^p \|F_n(t_i) - F_n(t_{i-1}) - [F(t_i) - F(t_{i-1})]\| \end{aligned}$$

Tomando  $n$  suficientemente grande tal que

$$\sum_{i=1}^p \|f(t_i)l(I_i) - f_n(t_i)l(I_i)\| < \epsilon$$

y

$$\sum_{i=1}^p \|F_n(t_i) - F(t_{i-1}) - [F(t_i) - F(t_{i-1})]\| < \epsilon,$$

obtenemos

$$\sum_{i=1}^p \|f(t_i)\mu(I_i) - [F(t_i) - F(t_{i-1})]\| < 3\epsilon$$

y la Henstock integrabilidad de  $f$  está probada.

□

El Teorema de Equi-integrabilidad para la integral de Henstock-Kurzweil es más general que el Teorema de Convergencia Dominada y el Teorema de Convergencia Monótona, en el sentido de que éstos son consecuencia del Teorema de Equi-integrabilidad, como lo demostró McLeod en [28]; así pues, esto nos motiva a cuestionarnos si esto sigue siendo válido para la integral de Henstock y la integral de Kurzweil en el contexto de los espacios de Banach, **dejamos abierta esta interrogante para futuras investigaciones.**

---

# Conclusiones

El objetivo general de este trabajo de tesis fue realizar un análisis de las integrales definidas tanto por Henstock como por Kurzweil considerando funciones definidas sobre un intervalo compacto del conjunto de los números reales y que toman valores sobre un espacio de Banach, haciendo énfasis en algunas propiedades algebraicas, en el Teorema Fundamental del Cálculo y en algunos teoremas de convergencia; además, determinar las relaciones de estas integrales con otras integrales clásicas en integración vectorial, específicamente, con la integral de Riemann, McShane, Bochner y Pettis.

Como se demostró en el Capítulo 1, las integrales de Henstock y Kurzweil son equivalentes en el contexto real, con base en el Ejemplo 2.2.4 de la Sección 2.2, en el contexto vectorial no son equivalentes y, al no ser equivalentes, ciertas propiedades aún se comparten con el caso real tal como la linealidad de la integral o el primer aspecto del Teorema Fundamental del Cálculo, pero algunas otras no, tal como el segundo aspecto del Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Kurzweil, en el cual la principal diferencia es que la función es derivada escalar de su integral indefinida (Teorema 2.5.11).

En el Capítulo 4 se estableció la relación que existe entre éstas y otras integrales vectoriales clásicas, tales como la integral de Riemann, McShane, Bochner y Pettis. Con base en las contenciones entre espacios dadas en (4.1), (4.2), (4.7), (4.8), (4.12) y (4.13) obtuvimos la representación gráfica entre estas integrales mostrada en la Figura 5.1.

Como hicimos énfasis en el Capítulo 5, en un espacio de Banach no necesariamente se tiene una estructura de orden, por lo que el Teorema de Convergencia Monótona (Teorema 1.5.1) y el Teorema de Convergencia Dominada (Teorema 1.5.2) no pueden ser formulados de forma directa al contexto vectorial tanto para la integral de Henstock como para la integral de Kurzweil. Así pues, en este capítulo se definió una relación de orden sobre un espacio de Banach arbitrario a través de un cono ordenado (Definición 5.0.13).

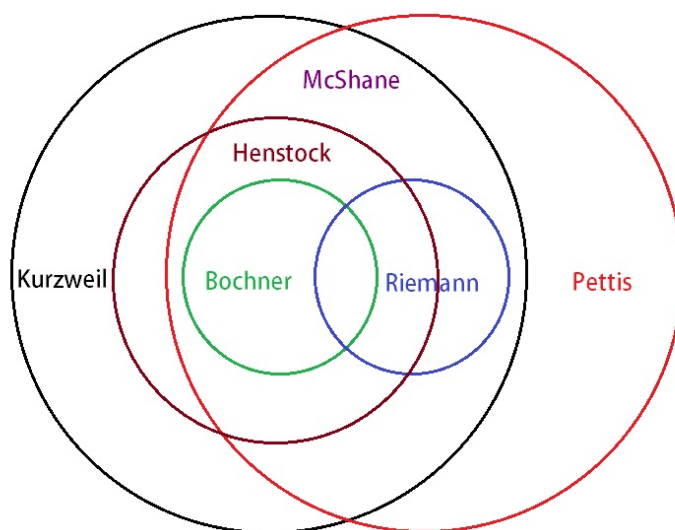


Figura 5.1.

Ahora, al contar con una relación de orden sobre un espacio de Banach se podría pensar que se pueden formular los Teoremas de Convergencia Monótona y Dominada de forma directa tanto para la integral de Henstock como de Kurzweil, sin embargo, no basta con tener una relación de orden se pueden formular los Teoremas de Convergencia Monótona y Dominada, ya que en particular se demostró en el Ejemplo 5.2.4 que el Teorema de Convergencia Monótona no es válido para la integral de Henstock de forma similar a como se tiene en el contexto real, pero el Teorema de Convergencia Dominada sí (Teoremas 5.1.1 y 5.1.2). Por otro lado, respecto a la integral de Kurzweil en la revisión bibliográfica que realizamos no encontramos un Teorema de Convergencia Dominada para esta integral, sin embargo, sí se tiene el Teorema de Convergencia Monótona para esta integral (Teorema 5.2.3). El Teorema de Equi-integrabilidad (Teorema 1.5.4) para la integral de Henstock-Kurzweil, al no estar en términos de la relación de orden que se tiene en el conjunto de los números reales, admite una extensión directa al caso vectorial tanto para la integral de Henstock y la integral de Kurzweil (Teoremas 5.3.4 y 5.3.2, respectivamente).

Por último, queremos mencionar que a lo largo de este trabajo de tesis planteamos diferentes problemas abiertos, los cuales pretendemos que formen parte de nuestro proyecto doctoral; específicamente, estos problemas son:

- Parte esencial en la demostración del TFC Parte II para la integral de Henstock es el Lema Fuerte de Saks-Henstock, el cual, en general, no es

válido para la integral de Kurzweil; sin embargo, desconocemos si este lema sea una condición necesaria para demostrar el TFC (Parte II), es decir, ¿existirá una forma de demostrar el TFC parte II de la integral de Henstock sin hacer uso del Lema Fuerte de Saks-Henstock?

- El Teorema de Equi-integrabilidad para la integral de Henstock-Kurzweil es más general que el Teorema de Convergencia Dominada y el Teorema de Convergencia Monótona, en el sentido de que éstos son consecuencia de él, como lo demostró McLeod en [28], esto nos motiva a cuestionarnos si esto sigue siendo válido para la integral de Henstock y la integral de Kurzweil en el contexto de los espacios de Banach.
- Sea  $X$  un espacio de Banach. ¿Si  $R([a, b], X) \subset H([a, b], X)$ , entonces la dimensión de  $X$  es finita?
- ¿Es posible caracterizar a los espacios separables por la equivalencia de la integral de Bochner y Pettis?
- Debido a que en general un espacio de Banach no cuenta con una estructura de orden, en [8] Di Piazza y Marraffa establecen un teorema de convergencia para la integral de McShane en términos de los elementos del dual topológico del espacio de Banach  $X$ . Además, dado que los Teoremas de Convergencia Monótona y Dominada que se tienen para la integral de Henstock-Kurzweil hacen uso de la estructura de orden usual del conjunto de los números reales ¿será posible formular los Teoremas de Convergencia Monótona y Dominada que se tienen para la integral de Henstock-Kurzweil de manera análoga para la integral de Henstock y para la integral de Kurzweil en términos de los elementos del dual topológico del espacio de Banach?, es decir, si  $(f_n)$  es una sucesión de funciones vectoriales Henstock (respectivamente Kurzweil) que converge puntualmente a una función  $f$  de tal forma que para todo  $x^* \in X^*$ , la sucesión  $(x^* f_n)$  resulta ser monótona o dominada, entonces esto nos garantice que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x^* f_n = \int_a^b x^* f.$$

- En general, no contamos con una versión del Teorema de Convergencia Monótona para la integral de Henstock análoga al de la integral de Henstock-Kurzweil; a su vez, tampoco contamos con una versión del Teorema de Convergencia Dominada para la integral de Kurzweil de forma similar a la integral de Henstock-Kurzweil, por lo que nos planteamos como objetivo la formulación de dichos resultados.



# Bibliografía

- [1] R. G. Bartle, *A Modern Theory of Integration*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 32, American Mathematical Society, USA, 2001.
- [2] S. S. Cao, *The Henstock integral for Banach-valued functions*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics **16** (1992), 35–40.
- [3] B. Cascales and S. Troyansky, *Fundamentos de Análisis Matemático*, Tech. report, Curso de doctorado, Universidad de Murcia, España, 2004.
- [4] P. Cousin, *Sur le fonctions de  $n$  variables complexes*, Acta Mathematica **19** (1895), 1–62.
- [5] A. Denjoy, *Une extension de l'intégral de M. Lebesgue*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **154** (1912), 859–862.
- [6] R. Deville and J. Rodríguez, *Integration in Hilbert generated Banach spaces*, Israel Journal of Mathematics **177** (2010), 285–306.
- [7] L. Di-Piazza, *Kurzweil-Henstock type integration on Banach spaces*, Real Analysis Exchange **22** (2003/2004), no. 2, 543–555.
- [8] L. Di-Piazza and V. Marraffa, *The McShane, Pu and Henstock integrals of Banach valued functions*, Czechoslovak Mathematical Journal **52** (2002), no. 127, 609–633.
- [9] L. Di-Piazza and D. Preiss, *When do McShane and Pettis integrals coincide?*, Illinois Journal of Mathematics **47** (winter 2003), no. 4, 1177–1187.
- [10] M. Federson, *The Monotone Convergence Theorem for multidimensional abstract Kurzweil vector integrals*, Czechoslovak Mathematical Journal **52** (2002), no. 127, 429–437.

- 
- [11] ———, *Some peculiarities of the Henstock and Kurzweil integrals of Banach space-valued functions*, Real Analysis Exchange **29** (2003-2004), no. 1, 1–21.
- [12] M. Federson and P. Táboas, *Impulsive retarded differential equations in Banach spaces via Bochner–Lebesgue and Henstock integrals*, Nonlinear Analysis **50** (2002), 389–407.
- [13] C. K. Fong, *A continuous version of Orlicz–Pettis Theorem via vector-valued Henstock–Kurzweil integrals*, Czechoslovak Mathematical Journal **52** (2002), no. 127, 531–536.
- [14] D. H. Fremlin, *The Henstock and McShane integrals for vector-valued functions*, Illinois Journal of Mathematics **38** (1994), no. 3, 471–479.
- [15] D. H. Fremlin and J. Mendoza, *On the integration of vector-valued Functions*, Illinois Journal of Mathematics **38** (1994), 127–147.
- [16] R. A. Gordon, *On the integration of vector-valued functions*, Real Analysis Exchange **15** (1989-1990), no. 2, 724–728.
- [17] ———, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, USA, 1989-1990.
- [18] ———, *The McShane integral of Banach-valued functions*, Illinois Journal of Mathematics **34** (1990), 557–567.
- [19] D. Gou, Y. J. Cho, and J. Zhu, *Partial Ordering Methods in Nonlinear Problems*, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2004.
- [20] S. Heikkilä, *Monotone Convergence Theorems for Henstock–Kurzweil integrable functions and applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **377** (2011), 286–295.
- [21] S. Heikkilä, M. Kumpulainen, and S. Seikkala, *Convergence Theorems for HL integrable vector-valued functions with applications*, Nonlinear Analysis **70** (2009), 1939–1955.
- [22] R. Henstock, *The efficiency of convergence factor for functions of a continuous real variable*, Journal of the London Mathematical Society **1** (1955), no. 3, 273–286.
- [23] ———, *A new descriptive definition of the Ward integral*, Journal of the London Mathematical Society **35** (1960), 43–48.
-

- 
- [24] ———, *Definitions of Riemann type of the variational integrals*, Proceedings of the London Mathematical Society **3** (1961), no. 1, 402–418.
- [25] ———, *Theory of integration*, Butterworths, London, 1963.
- [26] J. Kurzweil, *Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter*, Czechoslovak Mathematical Journal **7** (1957), no. 3, 418–449.
- [27] J. Kurzweil and J. Jarník, *Equi-integrability and controlled convergence of Perron-type integrable functions*, Real Analysis Exchange **17** (1991/92), no. 1, 110—139.
- [28] R. M. McLeod, *The generalized Riemann integral*, Carus Monograph, no. 20, Mathematical Association of America, USA, 1980.
- [29] E. J. McShane, *A Riemann-type integral that includes Lebesgue-Stieltjes, Bochner and stochastic integrals*, AMS Memoirs, vol. 88, 1969.
- [30] ———, *A Unified Theory of Integration*, The American Mathematical Monthly **80** (1973), 349–359.
- [31] K. Musiał, *Handbook of Measure Theory I*, Elsevier, Amsterdam, 2002.
- [32] S. Nakanishi, *The Henstock Integral for Functions with Values in Nuclear Spaces*, Mathematica Japonica **39** (1994), 309–335.
- [33] K. Naralencov, *Several comments on the Henstock-Kurzweil and McShane integrals of vector-valued functions*, Czechoslovak Mathematical Journal **60** (2011), no. 136, 1091–1106.
- [34] O. Perron, *Über den Integralbegriff*, Sitzungsberichte / Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse Abteilung I, Biologie, Mineralogie, Erdkunde **16** (1914), 1–16.
- [35] J. Rodríguez, *On the equivalence of McShane and Pettis integrability in non-separable Banach spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **341** (2008), 80–90.
- [36] J. Rodríguez, *Integrales vectoriales de Riemann y McShane*, Ph.D. thesis, Universidad de Murcia, España, 2002.
- [37] S. Saks, *Sur les fonctions d'intervalle*, Fundamenta Mathematicae **10** (1927), no. 1, 211–214.
-

- [38] S. Schwabik and Y. Guoju, *Topics in Banach Space Integration*, Real Analysis, vol. 10, World Scientific, Singapore, 2005.
  - [39] A. P. Solodov, *Henstock and McShane integrals for Banach-valued functions*, Mathematical Notes **65** (1999), no. 6, 723–730.
  - [40] C. Swartz, *Measure, Integration and Function Spaces*, World Scientific, Singapore, 1994.
  - [41] ———, *Introduction to Gauge Integrals*, World Scientific, Singapore, 2001.
  - [42] L. P. Yee, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, Real Analysis, vol. 2, World Scientific, Singapore, 1989.
-