



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Asignación de vecindades, clases y cardinalidad

Tesis presentada al

**Colegio de Matemáticas**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

por

Yoana Ivett Soriano Onofre

Asesorado por

Dr. Iván Martínez Ruiz

Dr. Alejandro Ramírez Páramo

Puebla Pue.

29 de noviembre de 2022





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Asignación de vecindades, clases y cardinalidad

Tesis presentada al

**Colegio de Matemáticas**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

por

Yoana Ivett Soriano Onofre

Asesorado por

Dr. Iván Martínez Ruiz

Dr. Alejandro Ramírez Páramo

Puebla Pue.

29 de noviembre de 2022



**Título:** Asignación de vecindades, clases y cardinalidad  
**Estudiante:** YOANA IVETT SORIANO ONOFRE

COMITÉ

---

M.C. Sergio Adán Juárez  
Presidente

---

Dr. Marcelino Taxis Taxis  
Secretario

---

Dr. Armando Romero Morales  
Vocal

---

Dr. Iván Martínez Ruiz  
Asesor

---

Dr. Alejandro Ramírez Páramo  
Asesor



# Dedicatoria

A mi madre Verónica Onofre González, la mujer que más amo.

A mi esposo Alejandro Ramírez Páramo, el amor de mi vida.

A mis hijos: Diego Ernesto, Sebastián y Ximena



# Agradecimientos

Son muchas las personas a las que tengo que agradecer; a mis directores de tesis: Iván Martínez Ruíz y Alejandro Ramírez Páramo, a los miembros del jurado, profesores: Sergio Adán Juárez, Marcelino Taxis Taxis, Armando Romero Morales; gracias por sus orientaciones, por sus aportes profesionales, por sus palabras sabias y por esos conocimientos rigurosos y precisos.

A mi tía Adela, a mis hermanas Alin y Viridiana, porque su apoyo fue muy importante para seguir hasta llegar al final de esta etapa. A mis niños hermosos: Alvi, Ximena, Diego, Sebastián y Yous, porque sus risas hacen más fácil la vida.

A mi mamá: Verónica Onofre González, gracias por todo tu apoyo, por todas esas palabras de aliento, por tí trato de ser mejor cada día, eres el motor que impulsa mis sueños. Te dedico este logro mamá, gracias por creer en mí. Te amo.

A mi querido esposo: Alejandro Ramírez Páramo, gracias amor por todo el apoyo tan incondicional que me has dado, gracias por tu confianza , por tu paciencia, por tus palabras alentadoras, por todos tus consejos. Sin ti, nada de esto hubiera sido posible. Jamás terminaré de agradecerte todo lo que has hecho por mí. Te amo.

Y YA.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>XI</b>
<b>Introducción</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Notaciones y definiciones . . . . .	1
<b>2. Asignación de vecindades</b>	<b>7</b>
2.1. Las asignaciones . . . . .	7
2.2. Sobre la clase Dual . . . . .	10
2.3. Sobre la clase dual débil . . . . .	15
<b>3. Cardinalidad</b>	<b>21</b>
3.1. Preliminares espaciales . . . . .	21
3.2. Autoduales y desigualdades cardinales . . . . .	25
3.3. Duales débiles y desigualdades cardinales . . . . .	30
<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>



# Resumen

En la primera década de los años 2000, Alas, Tkachuk, Wilson y van Mill introdujeron las nociones de clases dual y dual débil, las cuales están inspiradas en la forma en la que van Douwen define, a través de asignación de vecindades, a los  $D$ -espacios (vea [11]).

Las nociones de clase dual y dual débil, generan, de manera natural un problema para cada propiedad topológica (vea Problema General 1. en la introducción). En el presente trabajo de tesis hacemos una exposición detallada de las nociones de clase dual y clase dual débil (vea Definición 3) para ciertas propiedades topológicas; particularmente para algunas propiedades de tipo compacidad como la propiedad de Lindelöf o la compacidad débil. Esta labor la llevamos a cabo en el Capítulo 2. También, presentamos algunos resultados en los que se establecen cotas superiores para espacios que se encuentran en alguna de las clases antes comentadas; por supuesto, para algunas propiedades topológicas.

**Palabras clave:** *Asignación de vecindades, clase dual, clase dual débil, espacio topológico cardinalidad*



# Introducción

Las nociones con las que trabajaremos en esta tesis; a saber *clases dual* y *dual débil*, fueron introducidas por Alas, Tkachuk, Wilson y van Mill en la primera década de los años 2000. Sus ideas están inspiradas en la forma en la que van Douwen y Pfeffer definen (a través de asignación de vecindades) a los  $D$ -espacios (vea [11]).

Un espacio topológico  $X$  es  $D$ -espacio si para cualquier asignación de vecindades,  $\phi$  (las notaciones y definiciones serán dadas en la sección de preliminares), existe  $Y \subseteq X$  tal que  $Y$  es cerrado y discreto y  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ .

De esta definición se desprende un hecho bastante interesante; a saber, que podríamos solicitar a  $Y$  que cumpla alguna otra propiedad adicional o diferente a la cardinalidad, lo cual genera las clases que serán el objeto de estudio de esta tesis.

1. ([10]) La clase dual de  $\mathcal{P}$ , respecto de asignación de vecindades, denotada  $[\mathcal{P}]^*$ , consiste de aquellos espacios  $X$  que tienen la propiedad de que dada cualquier asignación de vecindades,  $\phi$ , existe  $Y \subseteq X$  tal que  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$  y  $Y \in [\mathcal{P}]$ .
2. ([2]) La clase dual débil de  $\mathcal{P}$ , respecto de asignación de vecindades, denotada  $[\mathcal{P}]'$ , consiste de aquellos espacios  $X$  que tienen la propiedad de que para cualquier asignación de vecindades,  $\phi$ , existe  $Y \subseteq X$  tal que  $X = cl_X(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\})$  y  $Y \in [\mathcal{P}]$ .

Las nociones definidas previamente vienen acompañadas de las interrogantes siguientes.

**Problema General 1.** *Sea  $\mathcal{P}$  una propiedad topológica.*

1. ¿Cuál es la clase dual de  $\mathcal{P}$ ,  $[\mathcal{P}]^*$ ?
2. ¿Quién es la clase dual débil de  $\mathcal{P}$ ,  $[\mathcal{P}]'$ ?
3. ¿Qué relación guarda  $[\mathcal{P}]$  con  $[\mathcal{P}]^*$  y  $[\mathcal{P}]'$ ?
4. ¿Cuándo se cumple que  $[\mathcal{P}]^* = [\mathcal{P}]$  (autodual) o  $[\mathcal{P}]' = [\mathcal{P}]$  (autodual débil)?
5. ¿Bajo qué condiciones o para qué propiedades  $\mathcal{P}$  se verifica que  $[\mathcal{P}]' = [\mathcal{P}]^*$ ?

Notemos que, por un lado, para cualquier propiedad topológica,  $\mathcal{P}$ :

1.  $[\mathcal{P}] \subseteq [\mathcal{P}]^*$ ;
2.  $[\mathcal{P}] \subseteq [\mathcal{P}]'$ , y
3.  $[\mathcal{P}]^* \subseteq [\mathcal{P}]'$ .

Para 1 y 2. Si  $X \in [\mathcal{P}]$  y  $\phi$  es una asignación de vecindades de  $X$ , tomando  $Y = X$ , se sigue que  $Y$  satisface  $\mathcal{P}$  (porque  $X \in [\mathcal{P}]$ ) y  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ ; de donde,  $X \in [\mathcal{P}]^*$ . También  $X = \overline{\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}}$ ; lo que nos dice que  $X \in [\mathcal{P}]'$ .

Para 3. Sea  $\phi$  una asignación de vecindades de  $X \in [\mathcal{P}]^*$ .

Entonces existe  $Y$  subespacio de  $X$ , el cual satisface  $\mathcal{P}$  y cumple que  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ ; pero, dado que  $\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\} \subseteq \overline{\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}}$ , concluimos que  $X = \overline{\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}}$  y, por tanto,  $X \in [\mathcal{P}]'$ .

De lo anterior se desprende que los problemas a analizar van en la dirección de determinar qué propiedades topológicas son autoduales o cuáles son propiedades débilmente duales, o bien, determinar las condiciones bajo las cuales una propiedad dada es dual o dual débil.

En el presente trabajo de tesis presentamos algunos resultados referentes al Problema General. Es importante comentar que el trabajo no consiste en tomar una propiedad y analizarla conforme a las preguntas planteadas previamente; en realidad, tomamos diversas propiedades y establecemos uno o dos resultados (en relación a alguna de las interrogantes comentadas arriba).

El trabajo se encuentra dividido en tres capítulos; el primero de ellos, y como es usual, está formado por el material, digamos básico, requerido para la lectura de esta obra. Debemos señalar que en el Capítulo 1, no hacemos una exposición a detalle de los temas requeridos como teoría de conjuntos y topología general. En realidad, solo presentamos el material de manera rápida y sencilla, por lo tanto, muchos de los resultados que se presentan se encuentran sin demostración; sin embargo, se dan referencias bibliográficas para aquellos lectores interesados en profundizar en alguno de los temas abordados en dicho capítulo.

El Capítulo 2 contiene diversos resultados relacionados con alguna de las interrogantes planteadas en lo que llamamos Problema General; en su mayoría, son resultados en los que las propiedades estudiadas resultan ya autoduales, ya autoduales débiles. Algunos de los resultados restantes en este capítulo, determinan a la clase dual o a la clase dual débil de alguna propiedad topológica.

Una de las interrogantes naturales, al hablar de conjuntos, lo cual no omite a los espacios topológicos, es: ¿Cuántos elementos tiene el conjunto? (¿Cuántos elementos tiene el espacio?). En el tercer, y último capítulo de este trabajo de tesis, presentamos cotas superiores para espacios topológicos que se encuentran en alguna de las clases estudiadas en el Capítulo 2; en su mayoría, para espacios que se encuentran en la clase dual o dual débil de las propiedades *DCCC* y Lindelöf.

Queremos resaltar que los resultados que se exponen en los capítulos 2 y 3, contienen a los autores y la referencia de la que es considerado; los que no contienen estos datos es porque no fueron encontrados en la bibliografía. De modo que esos resultados son una aportación al desarrollo de esta temática. Dicho sea de paso, las referencias empleadas en esta obra, contienen varios problemas abiertos, lo que significa que el material expuesto es una línea de investigación que se puede concontinuar con miras a realizar estudios de maestría y doctorado.

Para concluir esta introducción, queremos resaltar que intentamos hacer de este trabajo de tesis, un trabajo autocontenido, en la medida de lo posible. Por tal motivo buscamos incluir todas las nociones, resultados y pruebas que se requieren para la lectura de esta obra. Además, para aquellos resultados que hemos establecido sin demostración, damos una referencia bibliográfica en la que es posible consultar una prueba.

Yoana Ivett Soriano Onofre  
FCFM-BUAP, octubre de 2022

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Notaciones y definiciones

Con la finalidad de hacer, en la manera de lo posible, un trabajo autocontenido, en el presente capítulo, presentamos una serie de resultados y definiciones que son requisitos para la lectura de nuestra obra.

Los resultados que conforman este capítulo aparecen debido a que son una herramienta auxiliar para construcciones y pruebas de otros resultados, por lo que solo aparecerán las demostraciones que no rebasen el objetivo central de esta tesis y se incluyen referencias bibliográficas para que el lector encuentre, en caso de ser necesario, las pruebas que fueron omitidas.

Iniciamos con algunos resultados y definiciones referentes a la teoría de conjuntos; particularmente a ordinales y cardinales. En este trabajo seguiremos la notación y nomenclatura empleada en [8], en tal referencia el lector interesado encontrará una exposición más detallada, del material que se presenta a continuación.

Un *número ordinal*, o simplemente un *ordinal*, es un conjunto  $\alpha$  bien ordenado respecto de la relación de pertenencia " $\in_\alpha = \{(x, y) : x, y \in \alpha \text{ y } x \in y\}$ " y también cumple que todo elemento de  $\alpha$  es también un subconjunto de  $\alpha$ . Si  $\alpha$  es un ordinal, entonces cada elemento de  $\alpha$  es también un ordinal. Más aún, es posible definir una relación, " $<$ ", que tiene los atributos de una relación de buen orden, en la clase de números ordinales como sigue:  $\beta < \alpha$  si y solo si  $\beta \in \alpha$ .

Un ordinal  $\alpha$  es un *ordinal sucesor* si existe un ordinal  $\beta$  tal que  $\alpha = \beta + 1$ . En otro caso se dice que  $\alpha$  es un *ordinal límite*.

Un *número cardinal*, o simplemente un *cardinal*  $\kappa$ , es un ordinal tal que no admite una función inyectiva entre  $\kappa$  y un ordinal menor.

Si  $\kappa$  es un cardinal, entonces  $\kappa^+$  denota al menor cardinal mayor que  $\kappa$ . Se dice que un cardinal  $\kappa$  es un *cardinal sucesor* si  $\kappa = \lambda^+$  para algún cardinal  $\lambda$ . Si un cardinal no es un cardinal sucesor entonces se dice que es un *cardinal límite*; es claro que un cardinal  $\kappa$  es un cardinal límite si para todo cardinal  $\lambda < \kappa$ , se tiene que  $\lambda^+ < \kappa$ .

Sea  $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$  una sucesión de ordinales de longitud  $\theta$ . Decimos que la sucesión es *creciente* si  $\gamma_\rho < \gamma_\beta$ , siempre que  $\rho < \beta < \theta$ . La *cofinalidad de un ordinal límite*  $\alpha$ , denotada con el símbolo  $cf(\alpha)$ , es el menor ordinal  $\eta$  para el cual existe una sucesión de longitud  $\eta$  que es creciente y cuyo límite es  $\alpha$ . Es un hecho conocido que para cualquier ordinal límite  $\alpha$ ,  $cf(\alpha)$  es un cardinal y  $cf(\alpha) \leq \alpha$ .

Un cardinal infinito  $\kappa$  es *regular* si  $cf(\kappa) = \kappa$ ; en otro caso, se dice que  $\kappa$  es un *cardinal singular*. Se sabe que todo cardinal sucesor e infinito es un cardinal regular.

Dados un conjunto  $E$  y un cardinal  $\kappa$ , denotamos con  $\mathcal{P}(E)$  al conjunto potencia de  $E$ ; *i.e.* al conjunto de todos los subconjuntos de  $E$ . Denotamos:

1.  $[E]^{\leq \kappa}$ , a la colección de subconjuntos de  $X$  con cardinalidad menor o igual a  $\kappa$ .
2.  $[E]^{< \kappa}$ , a la colección de subconjuntos de  $X$  con cardinalidad menor a  $\kappa$ .
3.  $[E]^\kappa$ , a la colección de subconjuntos de  $X$  con cardinalidad igual a  $\kappa$ .

con cardinalidad  $\leq \kappa$ ; similarmente se definen  $[E]^{< \kappa}$  y  $[E]^\kappa$ .

En el presente trabajo denotamos con  $\omega$  al primer ordinal y cardinal numerable y con  $\omega_1$  denotamos al primer ordinal y cardinal no numerable.

El siguiente resultado (auxiliar); será empleado en diversas pruebas en el Capítulo 3.

**Teorema 1** (Erdős, Rado). *Sea  $\kappa$  un cardinal infinito,  $E$  un conjunto con  $|E| > 2^\kappa$ , y suponga que  $[E]^2 = \bigcup_{\alpha < \kappa} P_\alpha$ , donde, para todo  $\alpha \in \kappa$ ,  $P_\alpha \subseteq \mathcal{P}(E)$ . Entonces existen  $\alpha < \kappa$  y un subconjunto  $A$  de  $E$  con  $|A| > \kappa$  tales que  $[A]^2 \subseteq P_\alpha$ .*

*Demostración.* Sea  $p$  algún punto en  $E$ . Para cada  $\alpha \in \kappa^+$ , construiremos una colección  $\{R_f : f \in \kappa^\alpha\}$  de subconjuntos de  $E$  y una colección  $\{x_f : f \in \kappa^\alpha\}$  de puntos en  $E$ , tal que para cada  $f \in \kappa^\alpha$ :

- (1) si  $\alpha$  es un ordinal límite,  $R_f = \bigcap_{\beta < \alpha} R_{f|\beta}$ ;
- (2)  $\alpha = \gamma + 1$ ,  $R_f = \{x : x \in R_{f|\gamma}, x \neq x_{f|\gamma}, \{x, x_{f|\gamma}\} \in P_{f(\gamma)}\}$ ;
- (3)  $x_f \in R_f$  si  $R_f \neq \emptyset$  y  $x_f = p$  en otro caso;
- (4) si  $\beta < \alpha$ , entonces  $x_{f|\beta} \notin R_f$ ;
- (5) si  $\beta < \alpha$  y  $x \in R_f$ , entonces  $\{x, x_{f|\beta}\} \in P_{f(\beta)}$ .

La construcción es por inducción transfinita. Para  $\alpha = 0$  sea  $R_0 = E$  y  $x_0 = p$ . Ahora sea  $0 < \alpha < \kappa^+$  y supongamos que para cada  $\beta < \alpha$  se han construido las colecciones  $\{R_f : f \in \kappa^\beta\}$  y  $\{x_f : f \in \kappa^\beta\}$  de tal forma que se verifican (1) – (5) para cada  $f \in \kappa^\beta$ . Se desea construir tales colecciones para  $\gamma$ . Se tienen dos casos:

(i)  $\gamma$  límite. Para cada  $f \in \kappa^\gamma$ , defínase  $R_f$  como en (1) y  $x_f$  como en (3). Verifiquemos (4). Sea  $\beta < \gamma$  y suponga que  $x_{f|\beta} \in R_f$ , entonces  $x_{f|\rho} \in R_{f|\rho}$  para todo  $\rho < \gamma$ , en particular,  $x_{f|\beta} \in R_{f|\beta+1}$ . Lo que contradice (4) aplicado a  $\beta + 1$ . Por tanto  $x_{f|\beta} \notin R_f$ .

Ahora veamos que se satisface (5). Sea  $\beta < \gamma$  y  $x \in R_f$ . Entonces por (5), aplicado a  $\beta + 1$ , se tiene que  $\{x, x_{f|\beta}\} \in P_{f(\beta)}$ . Así pues, también se verifica (5).

(ii) caso  $\gamma = \alpha + 1$ . En este caso, se define para cada  $f \in \kappa^\gamma$ ,  $R_f$  como en (2) y,  $x_f$  como en (3). Veamos que en este caso, también, se verifican (4) y (5). Sea  $\beta < \gamma$ , entonces  $\beta \leq \alpha$ ; si  $\beta < \alpha$  entonces por (4) aplicado a  $\alpha$  se tiene que  $x_{f|\beta} \notin R_f$ . Si  $\beta = \alpha$  y  $x_{f|\beta} \in R_f$ , entonces  $x_{f|\beta} \neq x_{f|\beta}$  lo cual es absurdo. Así, (4) se cumple. Para verificar (5), sea  $\beta < \gamma$ ; nuevamente se tienen dos casos: si  $\beta = \alpha$  y  $x \in R_f$ , entonces  $\{x, x_{f|\beta}\} \in P_{f(\beta)}$  por la definición de  $R_f$ . Si  $\beta < \alpha$  y  $x \in R_f$ , por (5) aplicado a  $\alpha$ ,  $\{x, x_{f|\beta}\} \in P_{f(\beta)}$ . Lo que termina la verificación de (5).

Hemos llegado al final de la construcción de tales colecciones.

Sea  $H = \{x_f : f \in \kappa^\alpha, \alpha \in \kappa^+\}$ . Observemos que  $|\{x_f : f \in \kappa^\alpha\}| \leq \kappa^+$  para cada  $\alpha \in \kappa^+$ ; luego, como  $H = \bigcup_{\alpha \in \kappa^+} \{x_f : f \in \kappa^\alpha\}$ , se tiene que  $|H| \leq \sum_{\alpha \in \kappa^+} |\{x_f : f \in \kappa^\alpha\}| \leq \kappa^+ \kappa^+ = \kappa^+ \leq 2^\kappa$ . Puesto que  $|E| > 2^\kappa$ , existe  $x_0 \in E - H$ .

A continuación construiremos una sucesión  $\{f_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$  tal que para todo  $\alpha < \kappa^+$ :

(6)  $f_\alpha \in \kappa^\alpha$  y  $f_\alpha \upharpoonright_\beta = f_\beta$  para  $\beta < \alpha$  y

(7)  $x_0 \in R_{f_\alpha}$ .

La construcción es por inducción transfinita.

Sea  $0 < \gamma < \kappa^+$  y supongamos que se tiene construida  $f_\beta$  para todo  $\beta < \gamma$  de tal modo que se verifican (6) y (7). Por construir  $f_\gamma$ .

(i)  $\gamma$  límite. Definamos  $f_\gamma$  por  $f_\gamma \upharpoonright_\beta = f_\beta$ ; de (1) y la hipótesis de inducción se sigue (7) y claramente de la definición de  $f_\gamma$  se verifica (6).

(ii)  $\gamma = \alpha + 1$ . Como  $x_0 \neq x_{f_\alpha}$  y  $[E]^2 = \bigcup_{\alpha < \kappa} P_\alpha$ , existe  $\delta < \kappa$  tal que  $\{x_0, x_{f_\alpha}\} \in P_\delta$ . Definase  $f_\gamma$  por  $f_\gamma \upharpoonright_\beta = f_\beta$  y  $f_\gamma(\alpha) = \delta$ . Claramente  $f_\gamma$  verifica (6). Por otra parte, de (2) y la hipótesis de inducción se verifica (7). Con lo que se termina la construcción.

Sea  $g : \kappa^+ \rightarrow \kappa$  tal que  $g \upharpoonright_\alpha = f_\alpha$  para cada  $\alpha \in \kappa^+$ . Note que  $\kappa^+ = \bigcup_{\alpha \in \kappa} \{\beta : g(\beta) = \alpha\}$ . Como  $\kappa^+$  es regular, existe  $\rho < \kappa$  tal que  $|\{\beta : g(\beta) = \rho\}| = \kappa^+$ . Sea  $T = \{\beta : g(\beta) = \rho\}$ . Ahora bien, para todo  $\alpha \in T$ ,  $R_{g \upharpoonright_\alpha} \neq \emptyset$  pues  $x_0 \in R_{g \upharpoonright_\alpha}$ . Además, si  $\alpha, \beta \in T$  son tales que  $\alpha > \beta$ , por (3),  $x_{g \upharpoonright_\alpha} \in R_{g \upharpoonright_\alpha}$  y por (4)  $x_{g \upharpoonright_\beta} \notin R_{g \upharpoonright_\alpha}$  luego,  $x_{g \upharpoonright_\alpha} \neq x_{g \upharpoonright_\beta}$ , más aún, por (5) se tiene que  $\{x_{g \upharpoonright_\alpha}, x_{g \upharpoonright_\beta}\} \in P_{f(\beta)} = P_\rho$ . De donde  $A = \{x_{g \upharpoonright_\alpha} : \alpha \in T\}$  es el conjunto deseado. La prueba está completa.  $\square$

Las nociones y resultados correspondientes al área de la topología general que se requieren para poder revisar el trabajo de tesis que exponemos, son los alcanzados o considerados en un primer curso de esta temática; a continuación daremos lo más usual. Las notaciones y definiciones que no sean explícitamente dadas en el presente trabajo de tesis, son consideradas como en la referencia [5]. Es importante comentar que los espacios con los que trabajaremos en los capítulos siguientes, serán espacios Hausdorff o  $T_2$ , a menos que se especifique otra cosa.

En adelante,  $X$ , denota un espacio topológico. Dados  $x \in X$  y  $A$  y  $U$  subconjuntos de  $X$ , diremos que  $U$  es vecindad de  $x$  si  $U$  es un conjunto abierto en  $X$  y  $x \in U$ .

Denotamos  $\mathbb{R}$  al conjunto de los números reales. La topología usual de  $\mathbb{R}$ , es la colección formada por los  $U \subseteq \mathbb{R}$  para los cuales se verifica que para todo  $x \in U$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq U$ .

Usamos  $\bar{A}$  o  $cl_X(A)$ , para denotar a la *clausura* (también llamada *cerradura*) de  $A$  en  $X$ . Recordemos que  $cl_X(A) = \{x \in X : \text{para toda } U \text{ vecindad de } x, U \cap A \neq \emptyset\}$ . Se dice que  $A \subseteq X$  es cerrado si  $A = cl_X(A)$ . Es una rutina demostrar que  $\emptyset$  y  $X$ , son conjuntos cerrados. También es rutina probar que para cualquier conjunto  $A \subseteq X$ ,  $A \subseteq cl_X(A)$ .

Recordemos que  $D \subseteq X$  es *denso* en  $X$  (o simplemente denso) si  $cl_X(D) = X$ . Se dice que un espacio  $X$  es *separable* si éste contiene un subespacio denso numerable. En general, diremos que la densidad de  $X$  es menor o igual que el cardinal  $\kappa$ , lo que se denota  $d(X) \leq \kappa$ , si  $X$  tiene un subconjunto denso de cardinalidad menor o igual a  $\kappa$ .

Es una rutina demostrar que en  $\mathbb{R}$  con su topología usual, el conjunto de los números racionales,  $\mathbb{Q}$ , es un conjunto denso numerable (lo cual nos dice que  $\mathbb{R}$  es separable). Además, el conjunto de los números naturales,  $\mathbb{N}$ , es un conjunto discreto.

Sea  $\mathcal{B}_x$  una colección de vecindades de  $x$  en el espacio  $X$ . Diremos que  $\mathcal{B}_x$  es una base local de  $x$  en  $X$ , si para toda  $U$  vecindad de  $x$ , existe  $B \in \mathcal{B}_x$  tal que  $B \subseteq U$ . Se dirá que el espacio  $X$  tiene carácter menor o igual que un cardinal infinito  $\kappa$ , lo que se denota  $\chi(X) \leq \kappa$ , si cada  $x \in X$ , tiene una base local de cardinalidad menor o igual que  $\kappa$ . No es difícil verificar que  $X$  es primero numerable si y solo si  $\chi(X) \leq \omega$ .

Sean  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  familias de subconjuntos de  $X$ ; es decir,  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$  y  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Diremos que:

1.  $\mathcal{U}$  es cubierta para  $X$ , si  $\bigcup \mathcal{U} = X$ .

2.  $\mathcal{V}$  es subcubierta, si  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  y  $\bigcup \mathcal{V} = X$ .
3.  $\mathcal{U}$  es cubierta abierta de  $X$ , si  $\mathcal{U}$  es cubierta de  $X$  y cada elemento de  $\mathcal{U}$  es un conjunto abierto en  $X$ .

**Definición 1.** Se dice que un espacio topológico,  $(X, \tau)$ , es:

1. *Compacto* si toda cubierta abierta de  $X$ , admite una subcubierta finita.
2. *Lindelöf*, si toda cubierta abierta de  $X$ , admite una subcubierta numerable.

Es claro que todo espacio compacto es Lindelöf; sin embargo, el recíproco no es cierto. El conjunto,  $\mathbb{R}$ , de los número reales con su topología usual, es un espacio Lindelöf el cual no es compacto.

El siguiente es un caso particular del lema anterior.

**Teorema 2.** Si  $X$  no es compacto, entonces existen un cardinal infinito  $\lambda$  y una cubierta abierta  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ , de  $X$ , tal que:

1. Para todo  $\alpha < \lambda$ ,  $U_\alpha \neq X$ .
2. Para todo  $\alpha, \beta \in \lambda$ ,  $\alpha < \beta$ , implica que  $U_\alpha \subseteq U_\beta$ .

*Demostración.* Denotemos  $\mathcal{C}$  a la colección de cubiertas abiertas de  $X$ . Como  $X$  no es compacto, existe  $\mathcal{W}_0 \in \mathcal{C}$ , la cual satisface que para todo  $\mathcal{W}'_0 \in [\mathcal{W}]^{<\omega}$ ,  $\mathcal{W}'_0 \notin \mathcal{C}$ . Entonces el conjunto

$$A = \{|\mathcal{W}| : \mathcal{W} \in \mathcal{C} \text{ tal que } \forall \mathcal{W}' \in [\mathcal{W}]^{<\omega}, \mathcal{W}' \notin \mathcal{C}\}$$

no es vacío, así que podemos considerar a  $\lambda = \min(A)$ . Sea  $\mathcal{W} \in \mathcal{C}$  tal que para todo  $\mathcal{W}' \in [\mathcal{W}]^{<\omega}$ ,  $\mathcal{W}' \notin \mathcal{C}$  y  $|\mathcal{W}| = \lambda$ .

Notemos que:

1. Para cada  $W \in \mathcal{W}$ , se tiene que  $W \neq X$ . Si para algún  $W \in \mathcal{W}$ ,  $W = X$ , entonces  $\mathcal{W}' = \{W\}$  es una subcolección finita de  $\mathcal{W}$ , la cual satisface que  $\bigcup \mathcal{W}' = X$ , lo cual no puede ocurrir.
2. Para todo  $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ , con  $|\mathcal{W}'| < \omega$ , ocurre que  $\bigcup \mathcal{W}' \neq X$ . En efecto, si para algún  $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ , con  $|\mathcal{W}'| < \lambda$  ocurre que  $\bigcup \mathcal{W}' = X$ , entonces dado que cualquier,  $\mathcal{V}$ , subconjunto de  $\mathcal{W}'$  es un subconjunto de  $\mathcal{W}$ , tenemos que para todo,  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}'$ , con  $|\mathcal{V}| < \omega$  ocurre que  $X \neq \bigcup \mathcal{V}$ , lo cual implica que  $|\mathcal{W}'| \in A$  y por tanto,  $\lambda \leq |\mathcal{W}'|$ , lo cual es absurdo.

Como  $|\mathcal{W}| = \lambda$ , podemos escribir  $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ . Ahora definimos, recursivamente,  $U_0 = W_0$  y, para cada  $\alpha \in \lambda$ ,  $U_\alpha = \bigcup \{W_\beta : \beta < \alpha\}$  y consideramos  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ . Entonces  $\mathcal{U}$  es una cubierta abierta de  $X$ , con  $|\mathcal{U}| = \lambda$ . Además, por 2., tenemos que para todo  $\alpha < \lambda$ ,  $U_\alpha \neq X$ ; aún más, por cómo se han definido a los elementos de  $\mathcal{U}$ , tenemos que si  $\alpha, \beta \in \lambda$ , con  $\alpha < \beta$ , entonces  $U_\alpha \subseteq U_\beta$ . La prueba está completa.  $\square$

Un subconjunto  $D$  de  $X$  se dice que es *discreto* si para todo  $p \in D$ , existe un conjunto abierto  $U$  de  $X$  tal que  $U \cap D = \{p\}$ .

Un subconjunto  $Y$  de  $X$  es  $G_\kappa$  o de *tipo*  $G_\kappa$  (para algún cardinal  $\kappa$ ) si  $Y$  es la intersección de a lo más  $\kappa$  subconjuntos abiertos de  $X$ . En el caso particular cuando  $\kappa = \omega$ , es usual escribir  $G_\delta$  en lugar de  $G_\omega$ .

Sea  $X$  un espacio topológico, decimos que  $X$  es *Baire* o que satisface la *propiedad de Baire*, si la intersección numerable de conjuntos densos y abiertos en  $X$  es un conjunto denso en  $X$ .

Sean  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Diremos que  $\mathcal{U}$  es:

1. Localmente finita si para todo  $x \in X$ , existe una vecindad  $V$  de  $x$ , tal que  $|\{U \in \mathcal{U} : V \cap U \neq \emptyset\}| < \omega$ .
2. Discreta, si cada punto de  $X$  tiene una vecindad que interseca a solo un elemento de  $\mathcal{U}$ .

Observemos que se sigue de la definición que toda familia discreta es una familia localmente finita.

**Proposición 1.** *Supongamos que  $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una familia localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos en el espacio  $X$  de tal manera que  $\mathcal{U}$  es infinita. Entonces existe una familia infinita  $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  la cual satisface:*

1.  $V_1 \subseteq U_1$ ;
2. para  $2 \leq i \leq m$ ,  $V_i \subseteq U_{n_{i-1}}$ ; donde,

$$n_{i-1} = \max\{1, n_1, \dots, n_{i-2}, \max\{n \in \mathbb{N} : V_1 \cap U_n \neq \emptyset\} + 1,$$

3.  $V_i \cap V_j = \emptyset$ ,  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  y  $j \neq i$ .

*Demostración.* Tomemos  $x_1 \in U_1$ . Como  $\mathcal{U}$  es localmente finita, existe una vecindad  $V_1$  de  $x_1$  tal que  $\{n \in \mathbb{N} : V_1 \cap U_n \neq \emptyset\}$  es finito. Sea  $n_1 = \max\{n \in \mathbb{N} : V_1 \cap U_n \neq \emptyset\} + 1$ , entonces  $U_{n_1} \in \mathcal{U}$  y  $V_1 \cap U_{n_1} = \emptyset$ . Tomemos  $x_2 \in U_{n_1}$ . Nuevamente, empleando que  $\mathcal{U}$  es localmente finita, existe una vecindad  $V_2$  de  $x_2$  de tal forma que  $\{n \in \mathbb{N} : V_2 \cap U_n \neq \emptyset\}$  es finito y  $V_2 \subseteq U_{n_1}$ . Notemos que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

Sea  $m \in \mathbb{N}$  y supongamos que para cada  $1 \leq i \leq m$  hemos construido  $V_1, \dots, V_m$ . de tal manera que 1., 2. y 3. se satisfacen.

Sea  $n_m = \max\{1, n_1, \dots, n_{m-1}, \max\{n \in \mathbb{N} : V_m \cap U_n \neq \emptyset\} + 1$ . Notemos que  $U_{n_m} \in \mathcal{U}$  y  $V_m \cap U_{n_m} = \emptyset$ . Tomemos  $x_{m+1} \in U_{n_m}$ . Nuevamente, empleando que  $\mathcal{U}$  es localmente finita, existe una vecindad  $V_{m+1}$  de  $x_{m+1}$  de tal forma que  $\{n \in \mathbb{N} : V_{m+1} \cap U_n \neq \emptyset\}$  es finito y  $V_{m+1} \subseteq U_{n_m}$ .

Por construcción tenemos que  $V_{m+1} \cap V_i \neq \emptyset$ , para cualquier  $1 \leq i \leq m$ .

Como  $\mathcal{U}$  es infinita, se sigue de 1., 2. y 3. que  $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una familia celular, infinita y localmente finita.  $\square$

Sabemos que, en general, si  $\mathcal{U}$  es una familia de abiertos no vacíos en el espacio  $X$ , entonces no siempre ocurre que  $cl_X(\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}) = \bigcup\{cl_X(U) : U \in \mathcal{U}\}$ .

Por ejemplo, consideremos el espacio  $\mathbb{R}$  con la topología usual. Tomemos para cada  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  una vecindad  $U_x = (x - r, x + r)$ , de tal manera que  $0 \notin [x - r, x + r]$  (notemos que  $cl_{\mathbb{R}}(U_x) = [x - r, x + r]$ ). Entonces  $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \bigcup\{cl_{\mathbb{R}}(U_x) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$  y  $\mathbb{R} = cl_{\mathbb{R}}(\bigcup\{U_x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\})$ .

La situación con familias discretas de abiertos, es distinta.

**Proposición 2.** *Si  $\mathcal{U}$  es una familia discreta de abiertos en el espacio  $X$ , entonces  $cl_X(\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}) = \bigcup\{cl_X(U) : U \in \mathcal{U}\}$ .*

*Demostración.* Notemos que para cualquier  $U \in \mathcal{U}$ ,  $U \subseteq \bigcup\mathcal{U}$ ; luego (para cada  $U \in \mathcal{U}$ ),  $cl_X(U) \subseteq cl_X(\bigcup\mathcal{U})$ . Así que  $\bigcup\{cl_X(U) : U \in \mathcal{U}\} \subseteq cl_X(\bigcup\mathcal{U})$ .

Ahora veremos que  $cl_X(\bigcup\mathcal{U}) \subseteq \bigcup\{cl_X(U) : U \in \mathcal{U}\}$ . Sea  $x \in cl_X(\bigcup\mathcal{U})$ . Como  $\mathcal{U}$  es discreta, para tal  $x$  existe,  $U_x$ , vecindad de  $x$  tal que  $U_x$  interseca a un solo elemento de  $\mathcal{U}$ , digamos  $V$  (es decir  $V \in \mathcal{U}$  y  $V \cap U_x \neq \emptyset$ ).

Veamos que  $x \in cl_X(V)$ . Sea  $U'$  una vecindad arbitraria de  $x$  y pongamos  $W = U' \cap U_x$ , entonces como  $x \in cl_X(\bigcup\mathcal{U})$  y  $W$  es vecindad de  $x$ , tenemos que  $W \cap \bigcup\mathcal{U} \neq \emptyset$ , tomemos  $y \in W \cap \bigcup\mathcal{U}$ ;

puesto que  $W \subseteq U_x$  y  $\mathcal{U}$  es discreta, debe ocurrir que  $y \in W \cap V$ . Así,  $U' \cap V \neq \emptyset$  y por tanto  $x \in cl_X(V) \subset \bigcup\{cl_X(U) : U \in \mathcal{U}\}$ .

Con todo  $cl_X(\bigcup\{U : U \in \mathcal{U}\}) = \bigcup cl_X(U) : U \in \mathcal{U}$ . □

Finalmente, recordemos que si  $(X, \tau_X)$  y  $(Y, \tau_Y)$  son espacios topológicos, una función  $f : X \rightarrow Y$  es continua si para cada  $U \in \tau_Y$ , se verifica que  $f^{-1}(U) \in \tau_X$ . Se dice que  $X$  y  $Y$  son homeomorfos si existe una función  $f : X \rightarrow Y$  continua, biyectiva y con inversa ( $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ) continua.

Diremos que una propiedad  $\mathcal{P}$  es una propiedad topológica si para cualquier espacio topológico,  $X$ , que satisface  $\mathcal{P}$ , se verifica que todo espacio homeomorfo a él cumple  $\mathcal{P}$ . Cualquier propiedad topológica,  $\mathcal{P}$ , determina la clase de todos los espacios con la propiedad  $\mathcal{P}$ , la cual denotamos  $[\mathcal{P}]$ . Así,  $X \in [\mathcal{P}]$  si y solo si  $X$  satisface  $\mathcal{P}$ .

Por ejemplo, la cardinalidad, la compacidad y la propiedad de Lindelöf son propiedades topológicas.

## Capítulo 2

# Asignación de vecindades

### 2.1. Las asignaciones

Para iniciar nuestro trabajo, vamos a introducir las nociones objeto de estudio de esta tesis.

**Definición 2.** ([11]) Una asignación de vecindades en un espacio topológico  $(X, \tau)$ , es una función  $\phi : X \rightarrow \tau$ , tal que para cada  $x \in X$ ,  $x \in \phi(x)$ .

Cuando no exista lugar a confusión, diremos simplemente asignación de vecindades en lugar de asignación de vecindades en el espacio  $X$ .

Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.** Consideremos el espacio  $(\mathbb{R}, \tau)$ ; donde,  $\tau$  es la topología usual para  $\mathbb{R}$ .

1. Claramente la función  $\phi : X \rightarrow \tau$ , definida para cada  $x \in X$ , como  $\phi(x) = \mathbb{R}$ , es una asignación de vecindades.
2. La función  $\phi : X \rightarrow \tau$ , definida para cada  $x \in X$ , como  $\phi(x) = (x - 1/3, x + 1/3)$ , también es asignación de vecindades.
3. Consideremos la función  $\phi : X \rightarrow \tau$ , tal que  $\phi(x) = \emptyset$ , para cada  $x \in \mathbb{R}$ , no es una asignación de vecindades, pues tenemos que  $1 \notin \phi(1) = \emptyset$ .

A través del concepto de asignación de vecindades es posible definir propiedades de cubierta como, por ejemplo, la compacidad o la propiedad de Lindelöf. El resultado siguiente, de carácter genérico, tiene entre sus consecuencias los casos particulares antes mencionados.

Recordemos que un espacio topológico  $X$  es llamado  $[\theta, \kappa]$ -compacto, donde  $\theta$  y  $\kappa$  son cardinales infinitos con  $\theta \leq \kappa$ , si toda cubierta abierta  $\mathcal{U}$  de  $X$ , con  $|\mathcal{U}| \leq \kappa$  tiene una subcubierta de cardinalidad  $< \theta$ . Si  $\theta = \omega$ , entonces  $X$  es llamado inicialmente  $\kappa$ -compacto y si  $\kappa \geq |X|$ , entonces se dice que  $X$  es finalmente  $\theta$ -compacto. El lector interesado en la temática de los espacios  $[\theta, \kappa]$ -compacto, puede consultar la referencia [9].

**Teorema 3.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $\theta$  un cardinal infinito. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1.  $X$  es finalmente  $\theta$ -compacto.
2. Para cualquier asignación de vecindades,  $\phi$ , existe  $Y \in [X]^{<\theta}$  tal que  $X = \bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}$ .

*Demostración.* [1.  $\Rightarrow$  2.] Supongamos que  $X$  es finalmente  $\theta$ -compacto y sea  $\phi$  una asignación de vecindades de  $X$ . Dado que  $\mathcal{U} = \{\phi(x) : x \in X\}$  es una cubierta abierta de  $X$ , existe  $\mathcal{V} = \{\phi(x_\alpha) : \alpha \in \lambda\} \subseteq \mathcal{U}$ , con  $\lambda < \theta$  tal que  $X = \bigcup \mathcal{V}$ . Ahora, tomamos  $Y = \{x_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ . Claramente  $Y \in [X]^{<\theta}$  y  $X = \bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}$ .

[2.  $\Leftarrow$  1.] Sea  $\mathcal{U}$  una cubierta abierta de  $X$ , digamos  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \delta\}$ .

Ahora vamos a definir una asignación de vecindades  $\phi$ . Primeramente notemos que si  $x \in X$ , entonces el conjunto  $\{\alpha \in \delta : x \in U_\alpha\}$  no es vacío, ya que  $\mathcal{U}$  es cubierta de  $X$ ; luego, podemos tomar  $\alpha_x = \min\{\alpha \in \delta : x \in U_\alpha\}$ . Puesto que  $\alpha_x$  es un mínimo, tenemos que  $\alpha_x$  es único. Además, aplicando esta asignación a cada  $x \in X$ , tenemos que si  $x = y$ , entonces  $\alpha_x = \alpha_y$ . De aquí que si consideramos, para cada  $x \in X$ ,  $\phi(x) = U_{\alpha_x}$ , entonces  $\phi$  es una asignación de vecindades.

Dado que  $\phi$  es una asignación de vecindades tenemos, por hipótesis, que existe  $Y \in [X]^{<\theta}$  de tal manera que  $\bigcup \{\phi(y) : y \in Y\} = X$ . Finalmente, dado que  $\{\phi(y) : y \in Y\} \subseteq \mathcal{U}$  y  $|\{\phi(y) : y \in Y\}| \leq |Y| < \theta$ , concluimos que  $X$  es finalmente compacto.  $\square$

La asignación de vecindades definida en la demostración de la implicación [2.  $\Leftarrow$  1.], es empleada en diversas ocasiones, por tal razón nos referiremos a ella como asignación natural: Si  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \delta\}$  es una cubierta abierta del espacio  $X$ , con  $\delta$  un cardinal, la asignación natural es definida, para cada  $x \in X$ , como sigue  $\phi(x) = U_{\alpha_x}$ , donde  $\alpha_x = \min\{\alpha \in \delta : x \in U_\alpha\}$ .

A continuación presentamos algunas consecuencias del lema anterior.

**Corolario 1.**  *$X$  es compacto si y solo si para cualquier asignación de vecindades,  $\phi$ , existe  $Y \in [X]^{<\omega}$ , tal que  $X = \bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}$ .*

*Demostración.* Basta con observar que un espacio es compacto si y solo si es finalmente  $\theta$ -compacto, con  $\theta = \omega$ .  $\square$

**Corolario 2.**  *$X$  es Lindelöf si y solo si para cualquier asignación de vecindades  $\phi$ , existe  $Y \in [X]^{<\omega}$ , tal que  $X = \bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}$ .*

*Demostración.* Se sigue del hecho de que un espacio topológico,  $X$ , es Lindelöf si y solo si  $X$  es finalmente  $\theta$ -compacto, con  $\theta = \omega_1$ .  $\square$

Para el caso de la  $[\theta, \kappa]$ -compacidad, en general, solo hemos podido obtener el resultado siguiente.

**Proposición 3.** *Si  $X$  es un espacio tal que para cualquier asignación de vecindades,  $\phi$ , existe  $Y \in [X]^{<\theta}$  tal que  $X = \bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}$ , entonces  $X$  es  $[\theta, \kappa]$ -compacto.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{U}$  una cubierta abierta de  $X$ , digamos  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \delta\}$ ; donde  $\delta$  es un cardinal tal que  $\delta \leq \kappa$ .

Consideramos la asignación de vecindades natural  $\phi$ : para cada  $x \in X$ ,  $\phi(x) = U_{\alpha_x}$ ; donde,  $\alpha_x = \min\{\alpha < \delta : x \in U_\alpha\}$ . Por hipótesis, existe  $Y \in [X]^{<\theta}$  de tal manera que  $\bigcup \{\phi(y) : y \in Y\} = X$ . Finalmente, dado que  $\{\phi(y) : y \in Y\} \subseteq \mathcal{U}$  y  $|\{\phi(y) : y \in Y\}| \leq |Y| < \theta$ , concluimos que  $X$  es  $[\theta, \kappa]$ -compacto.  $\square$

Notemos que de la segunda proposición en el Teorema 3, se desprende un hecho bastante interesante. Para resaltarlo, recordemos lo que establece dicha proposición:

Dada cualquier asignación de vecindades,  $\phi$ , existe  $Y \subseteq X$  con  $|Y| < \theta$  tal que  $\bigcup \{\phi(y) : y \in Y\} = X$ .

La parte interesante es, entonces, que podríamos solicitar a  $Y$  que cumpla alguna otra propiedad diferente a la cardinalidad. Precisando, sea  $\mathcal{P}$  una propiedad topológica. Diremos que un espacio topológico  $X$ , satisface  $*(\mathcal{P})$  si:

Para toda asignación de vecindades,  $\phi$ , existe  $Y \subseteq X$  tal que  $Y$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$  y  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ .

A fin de aclarar un poco lo establecido, consideremos unos ejemplos:

1.  $\mathcal{P} =$  finito. Entonces  $*(finito)$ : Dada cualquier asignación de vecindades,  $\phi$ , existe  $Y \subseteq X$  tal que  $Y$  es finito y  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$  (en el Teorema 3, vimos que los espacios que satisfacen esta condición son los compactos).
2.  $\mathcal{P} =$  cerrado y discreto (lo que abreviamos  $CD$ ). Entonces  $*(CD)$ : Dada cualquier asignación de vecindades,  $\phi$ , existe  $Y \subseteq X$  tal que  $Y$  es cerrado y discreto y  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ . Esta es la noción conocida como  $D$ -espacio ([11]).
3.  $\mathcal{P} =$  compacto. Entonces  $*(compacto)$ : Dada cualquier asignación de vecindades,  $\phi$ , existe  $Y \subseteq X$  tal que  $Y$  es compacto y  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$  (más adelante, en el Teorema 5, mostraremos que la clase de espacios que verifican  $*(compacto)$ , es justamente la clase de los espacios compactos).

De lo establecido con la propiedad  $*(\mathcal{P})$ , para una propiedad topológica dada,  $\mathcal{P}$ , conduce de manera natural a establecer la siguiente.

**Definición 3.** Sea  $\mathcal{P}$  una propiedad topológica.

1. ([10]) La clase dual de  $\mathcal{P}$ , respecto de asignación de vecindades, denotada  $[\mathcal{P}]^*$ , consiste de aquellos espacios  $X$  que tienen la propiedad de que para cualquier asignación de vecindades  $\phi$ , existe un subespacio  $Y \subseteq X$  tal que  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$  y  $Y \in \mathcal{P}$ .
2. ([2]) La clase dual débil de  $\mathcal{P}$ , respecto de asignación de vecindades, denotada  $[\mathcal{P}]'$ , consiste de aquellos espacios  $X$  que tienen la propiedad de que para cualquier asignación de vecindades  $\phi$ , existe un subespacio  $Y \subseteq X$  tal que  $X = \overline{\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}}$  y  $Y \in \mathcal{P}$ .

Así, por ejemplo,  $[compacto]^*$  denota a la clase dual de la compacidad y  $X \in [compacto]^*$ , si para cualquier asignación de vecindades,  $\phi$ , existe  $Y \subseteq X$  tal que  $Y$  es compacto y  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ .

Mientras que  $[Lindelöf]'$ , denota a la clase dual débil de la propiedad de Lindelöf. Así,  $X \in [Lindelöf]'$ , si para cualquier asignación de vecindades,  $\phi$ , existe  $Y \subseteq X$  tal que  $Y$  es Lindelöf y  $X = cl_X(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\})$ .

En la literatura el subespacio  $Y$  de  $X$  que aparece en la Definición 3, es llamado kernel de la asignación.

Las nociones definidas previamente vienen acompañadas de las interrogantes siguientes.

**Problema General 2.** Sea  $\mathcal{P}$  una propiedad topológica.

1. ¿Cuál es la clase dual de  $\mathcal{P}$ ,  $[\mathcal{P}]^*$ ?
2. ¿Quién es la clase dual débil de  $\mathcal{P}$ ,  $[\mathcal{P}]'$ ?
3. ¿Qué relación guarda  $[\mathcal{P}]$  con  $[\mathcal{P}]^*$  y  $[\mathcal{P}]'$ ?
4. ¿Cuándo se cumple que  $[\mathcal{P}]^* = [\mathcal{P}]$  (en este caso la propiedad se dice autodual) o  $[\mathcal{P}]' = [\mathcal{P}]$  (diremos, en este caso, que la propiedad es autodual débil)?
5. ¿Bajo qué condiciones o para qué propiedades  $\mathcal{P}$  se verifica que  $[\mathcal{P}]' = [\mathcal{P}]^*$ ?

Notemos que, por un lado, para cualquier propiedad topológica,  $\mathcal{P}$ , las contenciones siguientes se verifican:  $[\mathcal{P}] \subseteq [\mathcal{P}]^*$  y  $[\mathcal{P}] \subseteq [\mathcal{P}]'$ . En efecto, si  $X \in [\mathcal{P}]$  y  $\phi$  es una asignación de vecindades de  $X$ , tomando  $Y = X$ , se sigue que  $Y$  satisface  $\mathcal{P}$  (porque  $X \in [\mathcal{P}]$ ),  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ ; de donde,  $X \in [\mathcal{P}]^*$ . También  $X = \overline{\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}}$ ; lo que nos dice que  $X \in [\mathcal{P}]'$ .

Por otro lado,  $[\mathcal{P}]^* \subseteq [\mathcal{P}]'$ . En efecto, sea  $\phi$  una asignación de vecindades de  $X \in [\mathcal{P}]^*$ . Por demostrar que existe  $Y$  subespacio de  $X$ , el cual satisface  $\mathcal{P}$  y cumple que  $X = \overline{\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}}$ . Como  $X \in [\mathcal{P}]^*$ , tenemos que existe  $Y$  subespacio de  $X$ , el cual satisface  $\mathcal{P}$  y cumple que  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ ; pero, dado que  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\} \subseteq \overline{\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}} \subseteq X$ , concluimos que  $X = \overline{\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}}$  y, por tanto,  $X \in [\mathcal{P}]'$ .

El resultado siguiente establece condiciones suficientes para que un espacio sea débilmente compacto.

Recordemos que un espacio (Hausdorff),  $X$ , es débilmente compacto si toda familia localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos en  $X$  es finita (vea [12]).

**Teorema 4.** (Alas, Tkachuk y Wilson, [2]) *Sea  $X$  un espacio Hausdorff. Si para cualquier asignación de vecindades,  $\phi$ , existe un subespacio  $Y \subseteq X$ , el cual es numerablemente compacto tal que  $cl_X(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}) = X$ , entonces  $X$  es débilmente compacto.*

*Demostración.* Si  $X$  no es débilmente compacto, entonces existe una familia localmente finita,  $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  de subconjuntos abiertos no vacíos de  $X$  (la cual no es finita).

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos  $W_n = X \setminus cl_X(\bigcup\{U_m : m > n\})$ . Dado que  $\mathcal{U}$  es localmente finita, tenemos que  $X = \bigcup\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Consideramos la asignación de vecindades natural  $\phi$ ; esto es, para cada  $x \in X$ ,  $\phi(x) = U_{n_x}$ ; donde,  $n_x = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in U_n\}$ .

Para la asignación,  $\phi$ , existe  $Y \subseteq X$ , con  $Y$  numerablemente compacto tal que  $cl_X(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}) = X$ . Entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  de tal manera que  $Y \subseteq W_m$ ; luego, para cada  $y \in Y$ ,  $\phi(y) \subseteq W_m$ ; de donde,  $\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\} \subseteq W_m$ . Lo cual implica que  $W_m$  es denso en  $X$ ; lo cual es una contradicción, pues,  $W_m \cap U_{m+1} = \emptyset$ . Por tanto  $X$  es débilmente compacto.  $\square$

El problema anterior (Problema General 3) ha sido analizado en diversos trabajos, por citar algunos [2] y [10]. En las secciones siguientes exponemos algunos resultados referentes al Problema General 3. Sin embargo, estos resultados no corresponden al análisis de dicho problema para una misma propiedad.

## 2.2. Sobre la clase Dual

Iniciaremos con la obtención de clase dual de la compacidad; para ello, requerimos del siguiente resultado de carácter auxiliar.

**Lema 1.** *Si  $X$  no es  $[\theta, \kappa]$ -compacto, entonces existen un cardinal  $\theta \leq \lambda \leq \kappa$  y una cubierta abierta  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ , de  $X$ , tal que:*

1. Para todo  $\alpha < \lambda$ ,  $U_\alpha \neq X$ .
2. Para todo  $\alpha, \beta \in \lambda$ ,  $\alpha < \beta$ , implica que  $U_\alpha \subseteq U_\beta$ .

*Demostración.* Denotemos  $\mathcal{C}$  a la colección de cubiertas abiertas de  $X$ . Como  $X$  no es  $[\theta, \kappa]$ -compacto, existe  $\mathcal{W}_0 \in \mathcal{C}$ , con  $|\mathcal{W}_0| \leq \kappa$  de tal forma que para todo  $\mathcal{W}'_0 \in [\mathcal{W}]^{<\theta}$ ,  $\mathcal{W}'_0 \notin \mathcal{C}$ . Entonces

$$A = \{|\mathcal{W}| : \mathcal{W} \in \mathcal{C} \text{ con } |\mathcal{W}| \leq \kappa, \forall \mathcal{W}' \in [\mathcal{W}]^{<\theta}, \mathcal{W}' \notin \mathcal{C}\}$$

no es vacío, así que podemos considerar a  $\lambda = \text{mín}(A)$ . Sea  $\mathcal{W} \in \mathcal{C}$  tal que para todo  $\mathcal{W}' \in [\mathcal{W}]^{<\theta}$ ,  $\mathcal{W}' \notin \mathcal{C}$  y  $|\mathcal{W}| = \lambda$ . Evidentemente  $\theta \leq |\mathcal{W}|$  (si por el contrario  $|\mathcal{W}| < \theta$ , entonces  $\mathcal{W} \in [\mathcal{W}]^{<\theta}$  y  $\mathcal{W} \in \mathcal{C}$ , lo cual es absurdo).

Notemos que:

1. Para cada  $W \in \mathcal{W}$ , se tiene que  $W \neq X$ . Si para algún  $W \in \mathcal{W}$ ,  $W = X$ , entonces  $\mathcal{W}' = \{W\}$  es una subcolección de  $\mathcal{W}$  con cardinalidad  $< \theta$  la cual satisface que  $\bigcup \mathcal{W}' = X$ , lo cual no puede ocurrir.
2. Para todo  $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ , con  $|\mathcal{W}'| < \lambda$ , ocurre que  $\bigcup \mathcal{W}' \neq X$ . En efecto, si para algún  $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}$ , con  $|\mathcal{W}'| < \lambda$  ocurre que  $\bigcup \mathcal{W}' = X$ , entonces dado que cualquier,  $\mathcal{V}$ , subconjunto de  $\mathcal{W}'$  es un subconjunto de  $\mathcal{W}$ , tenemos que para todo,  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}'$ , con  $|\mathcal{V}| < \theta$  ocurre que  $X \neq \bigcup \mathcal{V}$ , lo cual implica que  $|\mathcal{W}'| \in A$  y por tanto,  $\lambda \leq |\mathcal{W}'|$ , lo cual es absurdo.

Como  $|\mathcal{W}| = \lambda$ , podemos escribir  $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ . Ahora definimos, recursivamente,  $U_0 = W_0$  y, para cada  $\alpha \in \lambda$ ,  $U_\alpha = \bigcup \{W_\beta : \beta < \alpha\}$  y consideramos  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ . Entonces  $\mathcal{U}$  es una cubierta abierta de  $X$ , con  $|\mathcal{U}| = \lambda$ . Además, por 2., tenemos que para todo  $\alpha < \lambda$ ,  $U_\alpha \neq X$ ; aún más, por cómo se han definido a los elementos de  $\mathcal{U}$ , tenemos que si  $\alpha, \beta \in \lambda$ , con  $\alpha < \beta$ , entonces  $U_\alpha \subseteq U_\beta$ . La prueba está completa.  $\square$

**Teorema 5.** (van Mill, Tkachuk y Wilson, [10])

$$[\text{compacto}] = [\text{compacto}]^*.$$

**Prueba.** Es suficiente con demostrar que  $[\text{compacto}]^* \subseteq [\text{compacto}]$ . Para verificar esta condición, sea  $X \in [\text{compacto}]^*$ . Por demostrar que  $X \in [\text{compacto}]$ .

Si  $X$  no es compacto, entonces (por el teorema anterior) existen un cardinal infinito  $\lambda$  y una cubierta abierta,  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ , de  $X$  tal que:

- (i) Para todo  $\alpha < \lambda$ ,  $U_\alpha \neq X$ .
- (ii) Si  $\alpha, \beta \in \lambda$ , con  $\alpha < \beta$ , entonces  $U_\alpha \subseteq U_\beta$ .

Ahora bien, como  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \lambda\}$  es cubierta abierta de  $X$ , podemos considerar la asignación,  $\phi(x) = U_{\alpha_x}$ , donde  $\alpha_x = \text{mín}\{\alpha \in \lambda : x \in U_\alpha\}$ .

Puesto que  $X \in [\text{compacto}]^*$ , existe  $Y$  subespacio de  $X$  tal que  $X = \bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}$  y  $Y$  es compacto. Luego, dado que  $\mathcal{U}$  también es una cubierta abierta de  $Y$  (y puesto que  $Y$  es compacto), existe  $\mathcal{U}' = \{U_{\alpha_{x_i}} : 1 \leq i \leq m\} \subseteq \mathcal{U}$ , tal que  $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$ .

Denotemos  $\beta_0 = \text{máx}\{\alpha_{x_i} : i \in \{1, \dots, m\}\}$ . Entonces, (por (ii)), tenemos que  $U_{\alpha_{x_i}} \subseteq U_{\beta_0}$ , para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ . De donde,  $Y \subseteq \bigcup \{U_{\alpha_{x_i}} : i \in \{1, \dots, m\}\} \subseteq U_{\beta_0}$ . Así que  $Y \subseteq U_{\beta_0}$ . Entonces, para cada  $y \in Y$ , tenemos que  $y \in U_{\beta_0}$ ; de este hecho junto con (ii) y la definición de  $\phi$ , tenemos que  $U_{\alpha_y} \subseteq U_{\beta_0}$  y por lo tanto  $X = \bigcup \{\phi(y) : y \in Y\} \subseteq U_{\beta_0}$ . Lo que contradice (i). La contradicción proviene de suponer que  $X \in [\text{compacto}]^* \setminus [\text{compacto}]$ . Por lo que concluimos que  $[\text{compacto}]^* \subseteq [\text{compacto}]$ .

Denotamos  $FIN$  a la propiedad de ser finito. Del Corolario 1 y el Teorema anterior, tenemos el siguiente.

**Corolario 3.**  $[FIN] = [\text{compacto}] = [\text{compacto}]^*$ .

El siguiente resultado está inspirado en el Teorema 5, por ende, la demostración sigue el mismo patrón.

**Teorema 6.** Para cardinales  $\theta$  y  $\kappa$ , tales que  $\theta \leq cf(\kappa)$ , la  $[\theta, \kappa]$ -compacidad es una propiedad autodual, respecto de asignación de vecindades. Esto es  $[\mathcal{P}] = [\mathcal{P}]^*$ , para  $\mathcal{P} = [\theta, \kappa]$ -compacto.

*Demostración.* Ahora veamos que  $[\mathcal{P}]^* \subseteq [\mathcal{P}]$ . Para ésto, sea  $X \in [\mathcal{P}]^*$ . Por demostrar que  $X \in [\mathcal{P}]$  (o bien que  $X$  es  $[\theta, \kappa]$ -compacto).

Si  $X$  no es  $[\theta, \kappa]$ -compacto, entonces (por el Lema 1) existen un cardinal  $\lambda \leq \kappa$  y una cubierta abierta,  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ , de  $X$  tal que para todo  $\alpha < \lambda$ ,  $U_\alpha \neq X$  y si  $\alpha, \beta \in \lambda$ , con  $\alpha < \beta$ , entonces  $U_\alpha \subseteq U_\beta$ .

Ahora bien, como  $\mathcal{U}$  es cubierta abierta de  $X$ , podemos considerar la asignación natural,  $\phi(x) = U_{\alpha_x}$ , donde  $\alpha_x = \min\{\alpha \in \lambda : x \in U_\alpha\}$ .

Puesto que  $X \in [\mathcal{P}]^*$ , existe  $Y$  subespacio de  $X$  tal que  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$  y  $Y$  es  $[\theta, \kappa]$ -compacto. Como  $\mathcal{U}$  también es una cubierta abierta de  $Y$  y dado que éste es  $[\theta, \kappa]$ -compacto, existe  $\mathcal{U}' \in [\mathcal{U}]^{<\theta}$ , tal que  $Y \subseteq \bigcup\mathcal{U}'$ . Puesto que  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ , y  $|\mathcal{U}'| < \theta$ , escribimos  $\mathcal{U}' = \{U_{\alpha_{y_\rho}} : \rho < \gamma\}$ ; donde  $\gamma < \theta$  es un cardinal. Como  $\gamma < \theta \leq cf(\kappa)$ , tenemos que  $\beta_0 = \sup\{\alpha_{y_\rho} : \rho < \gamma\} < \kappa$ . Notemos que para todo  $\alpha < \beta_0$ , se tiene que  $U_\alpha \subseteq U_{\beta_0}$ ; luego,  $Y \subseteq \bigcup\{U_{\alpha_{y_\rho}} : \rho \in \gamma\} \subseteq U_{\beta_0}$ . Así que  $Y \subseteq U_{\beta_0}$ . De aquí que, para cada  $y \in Y$ ,  $U_{\alpha_{y_\rho}} \subseteq U_{\beta_0}$ , por lo tanto  $X = \bigcup\{U_{\alpha_{y_\rho}} : y \in Y\} \subseteq U_{\beta_0}$ . Lo que contradice el hecho de que, para todo  $\alpha \in \lambda$ ,  $U_\alpha \neq X$ . La prueba está completa.  $\square$

Del teorema anterior tenemos la siguiente consecuencia.

**Corolario 4.** *Sea  $\kappa$  un cardinal infinito. Entonces*

$$[\text{inicialmente } \kappa\text{-compacto}]^* = [\text{inicialmente } \kappa\text{-compacto}].$$

Podría pensarse que del Teorema 6, es posible deducir que  $[\text{Lindelöf}]^* = [\text{Lindelöf}]$ ; sin embargo, esto no es así. En [2], se demostró que existe un espacio  $X \in [\text{Lindelöf}]^* \setminus [\text{Lindelöf}]$ .

Se dice que un espacio  $X$  es linealmente Lindelöf si toda cubierta abierta de  $X$ ,  $\mathcal{U}$ , la cual es una  $\subseteq$ -cadena (esto es que cualesquiera dos elementos en  $\mathcal{U}$ , son comparables respecto a la relación de contención) tiene una subcubierta numerable. Denotamos Lin-Lin a esta propiedad. También se sigue del Teorema 6 el resultado siguiente.

**Corolario 5.**  $[\text{Lin} - \text{Lin}]^* = [\text{Lin} - \text{Lin}]$

Se dice que un espacio,  $X$ , satisface la propiedad CCC-discreta (denotada DCCC) si toda familia discreta no vacía de conjuntos abiertos de  $X$  es numerable ([?]).

**Teorema 7.** *(Xuan y Song, [?])*  $[DCCC]^* = [DCCC]$ .

*Demostración.* Supongamos que existe  $X \in [DCCC]^* \setminus [DCCC]$ . Entonces, existe  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  una familia discreta de conjuntos abiertos no vacíos en  $X$ . Para cada  $\alpha \in \omega_1$ , fijamos  $x_\alpha \in U_\alpha$  y ponemos  $D = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ .

Afirmación 1:  $D$  es cerrado, discreto.

En efecto, notemos que para cada  $\alpha \in \omega_1$ ,  $U_\alpha \cap D = \{x_\alpha\}$  (pues  $\mathcal{U}$  es una familia discreta).

Ahora,  $D$ , no tiene puntos de acumulación, pues si  $x$  es un punto de acumulación de  $D$ , dado que  $X$  es Hausdorff, toda vecindad de  $x$  debe contener infinitos elementos de  $D$ , toda vecindad de  $x$  debe intersectar a una infinidad de elementos de  $\mathcal{U}$ , lo que contradice que  $\mathcal{U}$  es familia discreta. La Afimación 1 está probada.

Ahora vamos a definir una asignación de vecindades,  $\phi$ .

1. Si  $x \in D$ , entonces  $\phi(x) = U_\alpha$ ; donde  $U_\alpha$  es el único elemento de  $\mathcal{U}$  tal que  $x \in U_\alpha$ .
2. Si  $x \in X \setminus D$ ,  $\phi(x) = X \setminus D$

Como  $X \in [DCCC]^*$ , para la asignación de vecindades,  $\phi$ , existe  $Y \subseteq X$  tal que  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$  y  $Y$  es *DCCC*.

Afirmación 2:  $D \subseteq Y$ .

En efecto, si  $d \in D$ , entonces existe  $\alpha \in \omega_1$  tal que  $d = x_\alpha$ . Como  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ , tenemos que  $x_\alpha \in \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ , lo cual implica que  $x_\alpha \in \phi(z)$ , para algún  $z \in Y$ . Veamos que  $x_\alpha = z$ . Si  $x_\alpha \neq z$  entonces tenemos dos casos:

1.  $z \in X \setminus D$ . Dado que  $\phi(z) = X \setminus D$ , tenemos que  $x_\alpha \in D \cap (X \setminus D)$ , lo cual es absurdo.
2.  $z \in D$ . Entonces  $z = x_\beta$ , para algún  $\beta \in \omega_1$  y  $\alpha \neq \beta$ . Entonces cualquier vecindad de  $x_\alpha$  interseca a  $U_\alpha$  y a  $U_\beta$ , lo que contradice que  $\mathcal{U}$  es familia discreta.

La Afirmación 2 queda demostrada.

De la afirmación anterior, tenemos que  $\{U_\alpha \cap Y : \alpha \in \omega_1\}$  es una familia discreta en  $Y$ , de abiertos no vacíos en  $Y$ ; lo cual contradice el hecho de que  $Y$  es *DCCC*. La prueba está completa.  $\square$

Cuando no es posible obtener que  $[\mathcal{P}]^* = [\mathcal{P}]$ , para una propiedad dada  $\mathcal{P}$ , algunas veces la igualdad se obtiene al restringir la clase de espacios sobre la cual se trabaja. En este contexto, por  $[\mathcal{P}]^*_\mathcal{Q} = [\mathcal{P}]_\mathcal{Q}$ , entendemos que en la clase de espacios que determina la propiedad  $\mathcal{Q}$ , la propiedad  $\mathcal{P}$  es autodual. Similarmente para  $[\mathcal{P}'_\mathcal{Q}] = [\mathcal{P}]_\mathcal{Q}$ .

A continuación vamos a presentar un par de resultados referentes a lo señalado en el párrafo anterior.

Recordemos que un espacio  $X$  es llamado pseudocompacto (vea [5]) si  $X$  es Tychonoff y toda función continua real valuada definida sobre  $X$  es acotada.

Es posible demostrar que un espacio  $X$  es pseudocompacto (lo que abreviamos *pseudo*) si y solo si toda familia discreta es finita (vea [5]). Para el siguiente resultado, denotamos  $T$  a la propiedad Tychonoff.

Queremos resaltar que la prueba del resultado siguiente tiene el mismo patrón que la demostración dada para el teorema anterior.

**Teorema 8.** (*van Mill, Tkachuk y Wilson, [10]*)  $[pseudo]^*_T = [pseudo]_T$ .

*Demostración.* Supongamos que  $X \in [pseudo]^* \setminus [pseudo]$ . Entonces existe una familia discreta,  $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ , de abiertos no vacíos. Para cada  $n \in \omega$  elegimos  $x_n \in U_n$  y denotamos  $D = \{x_n : n \in \omega\}$ . Como  $\{U_n : n \in \omega\}$  es discreta, se tiene que  $D$  es cerrado y discreto. Claramente los conjuntos  $W = X \setminus D$  y  $U = \bigcup\{U_n : n \in \omega\}$  son conjuntos abiertos en  $X$ . Notemos que si  $x \in \bigcup\mathcal{U}$ , entonces existe un único  $n_x \in \omega$  tal que  $x \in U_{n_x}$ , pues la familia  $\mathcal{U}$  es discreta.

Consideremos, ahora, para cada  $x \in X$ ,  $\phi(x)$  como sigue:

1.  $\phi(x) = U_{n_x}$ ; donde  $n_x \in \omega$  es el único tal que  $x \in U_{n_x}$ .
2.  $\phi(x) = W$ .

Claro que  $\phi$  es una asignación de vecindades. Ahora, como  $X \in [pseudo]^*$ , existe un subespacio pseudocompacto,  $Y$ , de  $X$  tal que  $\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\} = X$ .

Un argumento similar al empleado para justificar la Afirmación 2., en la demostración del Teorema 7, se puede emplear para verificar que  $D \subseteq Y$ . De donde  $\{U_n \cap Y : n \in \omega\}$  es una familia discreta en  $Y$ . Una contradicción, pues  $Y$  es pseudocompacto.  $\square$

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Una familia  $\mathcal{U} \subseteq \tau$  es una familia celular, si para cada  $U \in \mathcal{U}$ ,  $U \neq \emptyset$  y si  $U, V \in \mathcal{U}$ , con  $U \neq V$ , entonces  $U \cap V = \emptyset$ .

Sea  $\kappa$  un cardinal infinito y  $X$  un espacio topológico.

1. La notación  $c(X) \leq \kappa$ , significa que toda familia celular en  $X$  tiene cardinalidad  $\leq \kappa$ . En este caso diremos que  $X$  tiene celularidad  $\leq \kappa$ .
2. Denotamos  $\kappa CC$  a la propiedad: Tener celularidad  $\leq \kappa$ . Si  $\kappa = \omega$ , escribimos  $CCC$ , en lugar de  $\omega CC$ .
3. Diremos que un espacio,  $X$ , satisface la propiedad  $\kappa P$ , si  $X$  todo conjunto cerrado en  $X$  es la intersección de  $\kappa$  conjuntos abiertos en  $X$ .

Notemos que un espacio  $X$  es perfecto si y solo si  $X$  satisface  $\omega P$ .

**Teorema 9.** *Sea  $\kappa$  un cardinal infinito. En la clase de los espacios  $\kappa P$  la propiedad  $\kappa CC$  es autodual; esto es,  $[\kappa CC]_{\kappa P}^* = [\kappa CC]_{\kappa P}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $X \in [\kappa CC]_{\kappa P}^* \setminus [\kappa CC]_{\kappa P}$ . Supongamos, además, que  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$  es una familia celular en  $X$  y denotemos  $C$  al conjunto  $X \setminus \bigcup \mathcal{U}$ ; es decir,  $C = X \setminus \bigcup \mathcal{U}$ . Puesto que  $X$  es  $\kappa$ -perfecto, existe una familia  $\{V_\beta : \beta < \kappa\}$ , de conjuntos abiertos en  $X$ , de tal forma que  $C = \bigcap \{V_\beta : \beta \in \kappa\}$ .

Fijemos  $\beta$  en  $\kappa^+$ . Vamos a definir (para tal  $\beta$ ) una asignación de vecindades,  $\phi_\beta$ . Dado  $x \in X$ , definimos  $\phi_\beta(x)$  a partir de los dos casos siguientes:

1.  $x \in V_\beta$ . Entonces  $\phi_\beta(x) = V_\beta$ .
2.  $x \notin V_\beta$ . Entonces  $x \notin C = X \setminus \bigcup \mathcal{U}$ , entonces  $x \in \bigcup \mathcal{U}$ ; luego, dado que  $\mathcal{U}$  es familia celular, existe un único  $\alpha_x < \kappa$  tal que  $x \in U_{\alpha_x}$ . Entonces  $\phi_\beta(x) = U_{\alpha_x}$ .

Por hipótesis, para la asignación de vecindades,  $\phi_\beta$ , existe  $Y_\beta$  subespacio de  $X$ , con celularidad  $\leq \kappa$  de tal manera que  $X = \bigcup \{\phi_\beta(y) : y \in Y_\beta\}$ .

Afirmación 1: El conjunto  $\{\alpha \in \kappa^+ : Y_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ , tiene cardinalidad  $\leq \kappa$ .

Se sigue del hecho de que  $\mathcal{U}$  es una familia celular y  $Y_\beta$  tiene celularidad  $\leq \kappa$ .

Afirmación 2: El conjunto  $I_\beta = \{\alpha \in \kappa^+ : U_\alpha \not\subseteq V_\beta\}$  tiene cardinalidad  $\leq \kappa$ .

En efecto, si  $U_\alpha \not\subseteq V_\beta$ , entonces  $U_\alpha \setminus V_\beta \neq \emptyset$ . Sea  $x_0 \in U_\alpha \setminus V_\beta$ , dado que  $X = \bigcup \{\phi_\beta(y) : y \in Y_\beta\}$ , existe  $y \in Y_\beta$  tal que  $x_0 \in \phi_\beta(y)$ . Ahora bien, como  $x_0 \notin V_\beta$ , tenemos que  $\phi_\beta(y) \neq V_\beta$ , lo cual implica que  $\phi_\beta(y) = U_{\alpha_y}$ . Puesto que  $x_0 \in U_\alpha \cap U_{\alpha_y}$  y  $\mathcal{U}$  es una familia celular, tenemos que  $U_\alpha = U_{\alpha_y}$ . De aquí que si  $x \in U_\alpha \setminus V_\beta$ , entonces  $U_\alpha \cap Y_\beta \neq \emptyset$ ; luego, por la Afirmación 1, tenemos que  $|I_\beta| \leq \kappa$ . La Afirmación 2 queda demostrada.

Observemos que de la justificación a la Afirmación 2, se sigue que si  $x \notin V_\beta$ , entonces existe  $y \in Y_\beta$  de tal manera que  $\phi_\beta(x) = \phi_\beta(y) = U_{\alpha_y}$ .

Afirmación 3.  $X = V_\beta \cup \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in I_\beta\}$ . En efecto, es suficiente con demostrar que  $X \subseteq V_\beta \cup \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in I_\beta\}$ . Sea  $x \in X$ . Tenemos dos casos:

1.  $x \in V_\beta$ . En este caso  $x \in V_\beta \cup \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in I_\beta\}$ , trivialmente.
2.  $x \notin V_\beta$ . Entonces (vea observación previa a la Afirmación 3), existe  $y \in Y_\beta$  de tal forma que  $\phi_\beta(x) = \phi_\beta(y) = U_{\alpha_y} \subseteq \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in I_\beta\}$  (pues  $x \in U_{\alpha_y} \setminus V_\beta$ ). De aquí que  $x \in V_\beta \cup \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in I_\beta\}$ .

El proceso anterior nos proporciona, para cada  $\beta \in \kappa$ , un conjunto  $I_\beta \subseteq \kappa^+$  tal que  $|I_\beta| \leq \kappa$  y que cumple las afirmaciones 1, 2 y 3. Sea  $I = \bigcup \{I_\beta : \beta < \kappa\}$ . Claramente  $I$  tiene cardinalidad  $\leq \kappa$ .

Afirmación 4.  $X = C \cup \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ . En efecto, es suficiente con demostrar que  $X \subseteq C \cup \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ . Sea  $x \in X$ . Tenemos dos casos:

1.  $x \in C$ . En este caso  $x \in C \cup \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ , trivialmente.
2.  $x \notin C$ . Entonces, existe  $\beta_x \in \kappa$  tal que  $x \notin V_{\beta_x}$ . Por la Afirmación 3, debe ocurrir que  $x \in \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in I_{\beta_x}\} \subseteq \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ .

Así, la Afirmación 4, queda demostrada; esto es,  $X = C \cup \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ .

Afirmación 5. Para cada  $\alpha \in \kappa^+$ , existe  $\beta \in \kappa$ , de tal manera que  $\alpha \in I_\beta$ .

En efecto, sea  $\alpha \in \kappa^+$  y tomemos  $x \in U_\alpha$ , entonces  $x \in \bigcup \mathcal{U}$ , de donde  $x \notin X \setminus \bigcup \mathcal{U} = C = \bigcap \{V_\beta : \beta \in \kappa\}$ ; luego, existe  $\beta \in \kappa$  de tal manera que  $x \notin V_\beta$ . Así, la observación previa a la Afirmación 3, junto con esa misma afirmación, tenemos que  $\alpha \in I_\beta$ . Lo que demuestra la Afirmación 5.

De la Afirmación 5, obtenemos que  $\kappa^+ \subseteq I \subseteq \kappa^+$  y, por tanto,  $|I| = \kappa^+$ , lo que contradice el hecho de que  $|I| \leq \kappa$ .

Así, la celularidad de  $X$  debe ser  $\kappa$ . □

Del teorema anterior tenemos el siguiente.

**Corolario 6.** (Alas, Tkachuk y Wilson, [2]) *En la clase de los espacios perfectos la propiedad CCC es autodual; es decir,  $[CCC]_P^* = [CCC]_P$ .*

## 2.3. Sobre la clase dual débil

En la presente sección daremos algunos resultados referentes al dual débil de una propiedad topológica  $\mathcal{P}$ .

Recordemos que un espacio topológico,  $X$ , es  $H$ -cerrado si para toda,  $\mathcal{U}$ , cubierta abierta de  $X$ , existe  $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ , tal que  $\bigcup \mathcal{V}$  es denso en  $X$  (vea [5]). Denotaremos  $\mathcal{FLN}$  y  $\mathcal{HC}$  a las propiedades finito y  $H$ -cerrado, respectivamente.

**Proposición 4.** (Alas, Tkachuk y Wilson, [2]) *La clase de los espacios  $H$ -cerrados es la clase dual débil de los espacios finitos; es decir,  $[\mathcal{FLN}]' = [\mathcal{HC}]$ .*

*Demostración.* Veamos que  $[\mathcal{HC}] \subseteq [\mathcal{FLN}]'$ . Sea  $X$  un espacio  $H$ -cerrado y sea  $\phi$  una asignación de vecindades. Dado que  $\{\phi(x) : x \in X\}$  es cubierta abierta de  $X$  y éste es  $H$ -cerrado, existe  $\mathcal{V} \in [\{\phi(x) : x \in X\}]^{<\omega}$  de tal forma que  $\bigcup \mathcal{V}$  es denso en  $X$ . Como  $\mathcal{V} \subseteq \{\phi(x) : x \in X\}$ , podemos suponer (sin pérdida de generalidad) que  $\mathcal{V} = \{\phi(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $Y = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$  es un subconjunto finito de  $X$  y  $\bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}$  es denso en  $X$  (porque  $\bigcup \{\phi(y) : y \in Y\} = \bigcup \mathcal{V}$ ). Con todo,  $X \in [\mathcal{FLN}]'$ , y por tanto  $[\mathcal{HC}] \subseteq [\mathcal{FLN}]'$ .

Ahora mostraremos que  $[\mathcal{FLN}]' \subseteq [\mathcal{HC}]$ . Sean  $X \in [\mathcal{FLN}]'$  y  $\mathcal{U}$  una cubierta abierta de  $X$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ , para algún cardinal  $\kappa$ .

Consideremos la asignación de vecindades,  $\phi$ , tal que para cada  $x \in X$   $\phi(x) = U_{\alpha_x}$ , donde  $\alpha_x = \min\{\alpha \in \kappa : x \in U_\alpha\}$ .

Como  $X \in [\mathcal{FLN}]'$ , existe  $Y \in [X]^{<\omega}$  tal que  $\bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}$  es denso en  $X$ . Claramente la colección  $\{\phi(y) : y \in Y\}$  es un subconjunto finito de  $\mathcal{U}$  el cual satisface que  $\bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}$  es denso en  $X$ . Así que  $X$  es  $H$ -cerrado; de donde,  $X \in [\mathcal{HC}]$ .

Con todo  $[\mathcal{FLN}]' = [\mathcal{HC}]$ . □

Sea  $\kappa$  un cardinal. Se dice que el grado débil de Lindelöf de un espacio topológico  $X$  es menor o igual que  $\kappa$ , en símbolos  $wL(X) \leq \kappa$ , si para toda cubierta abierta,  $\mathcal{U}$ , de  $X$ , existe  $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$  tal que  $cl_X(\bigcup \mathcal{V}) = X$ . En el caso en que  $\kappa = \omega$ , se dice que  $X$  es débilmente Lindelöf.

Denotamos  $\mathcal{C}(\kappa)$  y  $\mathcal{WL}(\kappa)$  a las clases de espacios con cardinalidad  $\leq \kappa$  y con grado débil de Lindelöf  $\leq \kappa$ , respectivamente. En la literatura, decir que  $X$  tiene grado débil de Lindelöf menor o igual que  $\kappa$  se denota  $wL(X) \leq \kappa$ .

**Proposición 5.** *Sea  $\kappa$  un cardinal infinito. La clase de los espacios de cardinalidad  $\leq \kappa$  tiene por dual débil a la clase de los espacios con grado débil de Lindelöf  $\leq \kappa$ . Esto es,  $[\mathcal{C}(\kappa)]' = [\mathcal{WL}(\kappa)]$ .*

*Demostración.* Veamos que  $[\mathcal{WL}(\kappa)] \subseteq [\mathcal{C}(\kappa)]'$ . Sean  $X$  un espacio tal que  $wL(X) \leq \kappa$  y sea  $\phi$  una asignación de vecindades. Puesto que  $\{\phi(x) : x \in X\}$  es cubierta abierta de  $X$ , existe  $\mathcal{V} \in [\{\phi(x) : x \in X\}]^{\leq \kappa}$  de tal forma que  $cl_X(\bigcup \mathcal{V}) = X$  (porque  $wL(X) \leq \kappa$ ). Como  $\mathcal{V} \subseteq \{\phi(x) : x \in X\}$ , podemos suponer (sin pérdida de generalidad) que  $\mathcal{V} = \{\phi(x_\alpha) : \alpha \in \gamma\}$ , para algún cardinal  $\gamma \leq \kappa$ . Entonces  $Y = \{x_\alpha : \alpha \in \gamma\}$  es un subconjunto de  $X$ , con  $|Y| \leq \kappa$  y  $\bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}$  es denso en  $X$  (porque  $\bigcup \{\phi(y) : y \in Y\} = \bigcup \mathcal{V}$ ). Así,  $X \in [\mathcal{C}(\leq \kappa)]'$ , y por tanto  $[\mathcal{WL}(\kappa)] \subseteq [\mathcal{C}(\kappa)]'$ .

Ahora mostraremos que  $[\mathcal{C}(\kappa)]' \subseteq [\mathcal{WL}(\kappa)]$ . Sean  $X \in [\mathcal{C}(\kappa)]'$  y  $\mathcal{U}$  una cubierta abierta de  $X$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \gamma\}$ , para algún cardinal  $\gamma$ .

Consideremos la asignación de vecindades,  $\phi$ , tal que para cada  $x \in X$   $\phi(x) = U_{\alpha_x}$ , donde  $\alpha_x = \min\{\alpha \in \gamma : x \in U_\alpha\}$ .

Puesto que  $X \in [\mathcal{C}(\kappa)]'$ , existe  $Y \in [X]^{\leq \kappa}$  tal que  $cl_X(\bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}) = X$ . Claramente la colección  $\{\phi(y) : y \in Y\} \in [\mathcal{U}]^{\leq \kappa}$  y  $cl_X(\bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}) = X$ . Así que  $wL(X) \leq \kappa$ ; de donde,  $X \in [\mathcal{WL}(\kappa)]$ .

Con todo  $[\mathcal{C}(\kappa)]' = [\mathcal{WL}(\kappa)]$ . □

**Corolario 7.** *(Alas, Tkachuk y Wilson, [2])*

$$[\mathcal{C}(\omega)]' = [\text{débilmente compacto}]$$

En los resultados anteriores, hemos obtenido la clase dual débil de alguna clase, pero hasta ahora ninguna de éstas ha sido la misma; es decir, en ningún caso, la propiedad es autodual débil.

A continuación veremos que para la compacidad débil (denotamos  $\mathcal{DC}$  a la propiedad débilmente compacto), su clase dual débil es ella misma, solo que en la clase de los espacios casi regulares.

Un espacio  $X$  es casi regular ( $CR$ ) si para cualquier abierto no vacío  $U$ , existe un abierto no vacío  $V$  tal que  $cl_X(V) \subseteq U$  (vea [?]).

**Teorema 10.** *El dual débil de la compacidad débil es la clase de los espacios débilmente compactos. Esto es  $[\mathcal{DC}]'_{CR} = [\mathcal{DC}]_{CR}$ .*

*Demostración.* Es suficiente con demostrar que  $[\mathcal{DC}]'_{CR} \subseteq [\mathcal{DC}]_{CR}$

Ahora sea  $X \in [\mathcal{DC}]'$  y supongamos que  $X$  no es débilmente compacto, entonces existe una familia localmente finita,  $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ , de abiertos no vacíos en  $X$ , la cual no es finita. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\mathcal{U}$  es celular (vea Proposición 1).

Dado que  $X$  es regular, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe un abierto no vacío,  $V_n$ , tal que  $\bar{V}_n \subseteq U_n$ .

Ahora vamos a definir una asignación de vecindades como sigue: Sea  $x \in X$ , entonces

1. Si  $x \in \bigcup \mathcal{U}$ , entonces existe un único  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in U_{n_x}$ . Consideramos  $\phi(x) = U_{n_x}$ .
2. Si  $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}$ , entonces  $\phi(x) = X \setminus (\bigcup \{\bar{V}_n : n \in \mathbb{N}\})$ .

Claro que  $\phi$  es una asignación de vecindades. Luego, por hipótesis, existe  $Y \subseteq X$ , con  $Y$  débilmente compacto, tal que  $cl_X(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}) = X$ .

Afirmación: Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n \cap Y \neq \emptyset$ .

En efecto, supongamos que no es así, es decir, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $U_{n_0} \cap Y = \emptyset$ . Observemos que  $V_{n_0} \cap \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\} = \emptyset$ . Por supuesto, porque si  $V_{n_0} \cap \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\} \neq \emptyset$ , entonces existe  $y_0 \in Y$  tal que  $V_{n_0} \cap \phi(y_0) \neq \emptyset$ . Ahora, puesto que  $U_{n_0} \cap Y = \emptyset$  y  $\mathcal{U}$  es una familia celular, entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $\phi(y) \neq U_n$ . Entonces  $\phi(y) = X \setminus (\bigcup\{\bar{V}_n : n \in \mathbb{N}\})$ , pero  $V_{n_0} \subseteq \bigcup\{\bar{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ , implica que  $X \setminus (\bigcup\{\bar{V}_n : n \in \mathbb{N}\}) \subseteq X \setminus V_{n_0}$ ; luego,  $V_{n_0} \cap \phi(y) \neq \emptyset$ , implica que  $V_{n_0} \cap X \setminus V_{n_0} \neq \emptyset$ . Lo cual es absurdo. Así, la afirmación queda demostrada.

De la afirmación anterior obtenemos que la colección  $\{U_n \cap Y : n \in \mathbb{N}\}$  es una familia de conjuntos abiertos en  $Y$ , localmente finita que no es finita, lo que contradice el hecho de que  $Y$  es débilmente compacto.

Así,  $X$  es débilmente compacto y por tanto  $[DC]_{CR}' \subseteq [DC]_{CR}$ . □

Para el resultado siguiente, denotamos  $R$  al axioma de separación correspondiente a la regularidad. Puesto que todo espacio regular es casi regular, tenemos el siguiente.

**Corolario 8.** (Alas, Tkachuk y Wilson, [2]) *El dual débil de la compacidad débil es la clase de los espacios débilmente compactos. Esto es  $[DC]_R' = [DC]_R$ .*

A continuación veremos que en la clase de los espacios casi regulares, la propiedad  $DCCC$  es una propiedad autodual débil.

**Teorema 11.**  $[DCCC]_{CR}' = [DCCC]_{CR}$

*Demostración.* Supongamos que existe  $X \in [DCCC]' \setminus [DCCC]$ . Entonces, existe  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ , familia discreta de conjuntos abiertos no vacíos en  $X$ .

Debido a que  $X$  es casi regular, tenemos que para cada  $\alpha < \omega_1$ , existe  $V_\alpha \neq \emptyset$  tal que  $cl_X(V_\alpha) \subseteq U_\alpha$ .

Ahora vamos a definir una asignación de vecindades,  $\phi$ .

1. Si  $x \in \bigcup \mathcal{U}$ , entonces  $\phi(x) = U_\alpha$ ; donde  $U_\alpha$  es el único elemento de  $\mathcal{U}$  tal que  $x \in U_\alpha$  ( $\alpha$  es único porque  $\mathcal{U}$  es una familia discreta).
2. Si  $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}$ ,  $\phi(x) = X \setminus cl_X(\bigcup\{V_\alpha : \alpha < \omega_1\})$

Dado que la familia  $\{V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$  es discreta,  $\bigcup\{cl_X(V_\alpha) : \alpha < \omega_1\} = cl_X(\bigcup\{V_\alpha : \alpha < \omega_1\})$  (vea Proposición 2).

Ahora, para la asignación de vecindades dada, existe  $Y \subseteq X$  de tal forma que  $X = cl_X(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\})$  y  $Y$  es  $DCCC$ .

Afirmación: Para cada  $\alpha \in \omega_1$ ,  $U_\alpha \cap Y \neq \emptyset$ .

En efecto, fijemos  $\alpha \in \omega_1$ . Dado que  $\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$  es denso en  $X$ , se tiene que  $V_\alpha \cap \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\} \neq \emptyset$ ; luego, existen  $z \in X$  y  $y_z \in Y$  de tal manera que  $z \in V_\alpha \cap \phi(y_z)$ . Tenemos dos posibilidades para  $y_z$ :

- (a)  $y_z \in X \setminus \bigcup \mathcal{U}$ . Este caso no puede ocurrir, pues de lo contrario  $z \in V_\alpha \cap X \setminus cl_X(\bigcup\{V_\beta : \beta \in \omega_1\})$ ; lo cual implica que  $z \in V_\alpha \cap X \setminus \bigcup\{V_\beta : \beta \in \omega_1\}$  (porque  $\bigcup\{V_\beta : \beta \in \omega_1\} \subseteq cl_X(\bigcup\{V_\beta : \beta \in \omega_1\})$ ), pero esto es absurdo, pues  $V_\alpha \cap X \setminus \bigcup\{V_\beta : \beta \in \omega_1\} = \emptyset$ .
- (b)  $y_z \in \bigcup \mathcal{U}$ . Entonces  $\phi(y_z) = U_\beta$  (donde  $\beta$  es el único elemento de  $\omega_1$ , para el cual  $y_z \in U_\beta$ ). Dado que  $\mathcal{U}$  es una familia discreta, necesariamente debe ocurrir que  $\alpha = \beta$ ; luego,  $y_z \in U_\alpha$  y  $y_z \in Y$ . Por tanto  $U_\alpha \cap Y \neq \emptyset$ .

Así, para cada  $\alpha \in \omega_1$ ,  $U_\alpha \cap Y \neq \emptyset$ .

De la afirmación anterior, tenemos que  $\{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$  es una familia discreta de subconjuntos abiertos no vacíos en  $Y$ , lo cual contradice el hecho de que  $Y$  es *DCCC*. La prueba está completa.  $\square$

Antes de ver una consecuencia del Teorema 11, vamos a probar la siguiente proposición que es de carácter auxiliar.

**Proposición 6.** *Si  $X$  es un espacio débilmente Lindelöf, entonces  $X$  satisface la propiedad *DCCC*.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{U}$  una familia discreta de abiertos no vacíos en  $X$ . Entonces, para cada  $x \in X$ , existe  $U_x$  vecindad de  $x$  tal que  $U_x$  intersecta a un único elemento de  $\mathcal{U}$ . Luego, es claro que la colección  $\mathcal{U}' = \{U_x : x \in X\}$  es una cubierta abierta de  $X$ , el cual es débilmente Lindelöf, existe  $\mathcal{V} = \{U_{x_n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}'$  tal que  $cl_X(\mathcal{V}) = X$ .

Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos  $\mathcal{U}_n = \{U \in \mathcal{U} : U \cap U_{x_n} \neq \emptyset\}$ . Puesto que  $cl_X(\mathcal{V}) = X$  y los elementos de  $\mathcal{U}$  son abiertos no vacíos, tenemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{U}_n \neq \emptyset$  y, claramente,  $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}$ . Más aún,  $\mathcal{U} \subseteq \bigcup \{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Así,  $\mathcal{U} = \bigcup \{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ . De esta igualdad, la construcción de  $\mathcal{U}'$  y el hecho de que  $\mathcal{U}'$  es familia discreta, tenemos que  $|\mathcal{U}| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{U}_n| \leq \omega$ . Por tanto  $|\mathcal{U}| \leq \omega$  y así,  $X$  satisface la *DCCC*.  $\square$

En el resultado siguiente,  $\mathcal{WL}$ , denota la propiedad débilmente Lindelöf. Antes de establecer y demostrar que en la clase de los espacios perfectamente normales la propiedad de ser débilmente Lindelöf es autodual débil, queremos señalar que en [15], los autores comentan que en la clase de los espacios perfectamente normales, las propiedades *CCC*, *DCCC* y  $\mathcal{WL}$  son equivalentes; sin embargo no hemos podido encontrar dicha equivalencia y tampoco hemos podido demostrarla o encontrar un ejemplo que ilustre lo contrario.

**Corolario 9.** *(Xuan y Song, [15]) La clase  $[\mathcal{WL}]$  es autodual débil en la clase de los espacios perfectamente normales. Esto es,  $[\mathcal{WL}]'_{PN} = [\mathcal{WL}]_{PN}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un espacio perfectamente normal tal que  $X \in [\mathcal{WL}]'$  y tomemos una asignación de vecindades,  $\phi$ . Por demostrar que  $X \in [\mathcal{WL}]_{PN}$ . Puesto que  $X \in [\mathcal{WL}]'_{PN}$ , existe  $Y$  subespacio de  $X$  tal que  $Y$  es débilmente Lindelöf y  $cl_X(\bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}) = X$ . Por la proposición anterior, tenemos que  $Y$  satisface la propiedad *DCCC*. De donde,  $X \in [DCCC]'$ . Aún más, el hecho de que  $X$  sea perfectamente normal implica que  $X$  es casi regular; luego  $X \in [DCCC]'_{CR}$ , entonces (por el Teorema 11), tenemos que  $X \in [DCCC]'_{CR}$ ; es decir,  $X$  tiene la propiedad *DCCC*, lo cual es equivalente a débilmente Lindelöf (pues  $X$  es perfectamente normal). Esto es  $X \in [\mathcal{WL}]'_{CR}$ .  $\square$

Diremos que una propiedad  $\mathcal{P}$  es cerrada bajo uniones numerables, si se cumple que para cualquier espacio topológico  $X$  y cualquier colección numerable,  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  de subespacios de  $X$ , tales que  $X_n \in \mathcal{P}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que el subespacio  $\bigcup \{X_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}$ . En el Teorema 12, veremos algunos ejemplos de propiedades que satisfacen ser cerradas bajo uniones numerables.

Recordemos que dados  $A$  un subconjunto de un espacio topológico  $X$  y  $\mathcal{U}$  una familia de subconjuntos de  $X$ , la estrella de  $A$  respecto de  $\mathcal{U}$ , denotada  $St(A, \mathcal{U})$ , es el conjunto  $\bigcup \{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}$ . Es usual que si  $A = \{x\}$ , para algún  $x \in X$ , se escribe  $St(x, \mathcal{U})$ , en lugar de  $St(\{x\}, \mathcal{U})$ .

**Definición 4.** *(Xuan y Song, [15]) Un espacio  $X$  es desarrollable, si existe una sucesión de cubiertas abiertas de  $X$ ,  $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$  (a la que nos referimos por desarrollo), tal que para cada  $x \in X$ ,  $\{st(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$  es base local de  $x$  en  $X$ .*

El siguiente lema es extraído del análisis que hicimos sobre las demostraciones hechas por Xuan y Song para el Teorema 12.

**Lema 2.** Sea  $\mathcal{P}$  una propiedad tal que las condiciones siguientes se verifican:

- (i)  $\mathcal{P}$  es cerrada bajo uniones numerables, y
- (ii) Si  $Y \in \mathcal{P}$  y  $Y$  es un subconjunto denso en  $X$ , entonces  $X \in \mathcal{P}$ .

Entonces en la clase de los espacios Baire y desarrollables,  $\mathcal{P}$  es autodual débil. Esto es,  $[\mathcal{P}]'_{BD} = [\mathcal{P}]_{BD}$ .

*Demostración.* Sea  $X \in [\mathcal{P}]'_{BD}$ . Para ver que  $X$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ , veremos que  $X$  tiene un subespacio denso que satisface  $\mathcal{P}$ .

Sea  $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$  un desarrollo para  $X$ . Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos una asignación,  $\phi^n$  como sigue:

$\phi^n(x) = St(x, \mathcal{U}_n)$ , para cada  $x \in X$ . Dado que  $X \in [\mathcal{P}]'_{BD}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $Y_n$  subconjunto de  $X$ , el cual satisface la propiedad  $\mathcal{P}$  y tal que  $cl_X(\bigcup\{\phi^n(y) : y \in Y_n\}) = X$ .

Sea  $Y = \bigcup\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Por (i), tenemos que  $Y$  satisface  $\mathcal{P}$ . La prueba estará completa una vez que demosremos la siguiente.

Afirmación:  $Y$  es denso en  $X$ .

Para ver ésto, sea  $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup\{\phi^n(y) : y \in Y_n\}$ . Como  $X$  es un espacio de Baire y para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\bigcup\{\phi^n(y) : y \in Y_n\}$  es un conjunto denso y abierto en  $X$ , tenemos que  $D$  es denso en  $X$ .

Ahora, sean  $x \in X$  y  $W_x$  una vecindad de  $x$  en  $X$ . Como  $D$  es denso, existe  $d \in D \cap W_x$ . Luego, del hecho de que  $X$  es desarrollable, existe  $n_d \in \mathbb{N}$ , de tal manera que  $d \in St(d, \mathcal{U}_{n_d}) \subseteq W_x$ . Puesto que  $D \subseteq \{\phi^{n_d}(y) : y \in Y_{n_d}\}$ , existe  $y_d \in Y_{n_d}$  de tal manera que  $d \in \phi^{n_d}(y_d) = St(y_d, \mathcal{U}_{n_d})$ ; lo cual implica que  $y_d \in St(d, \mathcal{U}_{n_d}) \subseteq W_x$ . Por tanto  $y_d \in W_x \cap Y$ . Así  $Y$  es denso en  $X$ ; por lo tanto (por (ii)), tenemos que  $X$  satisface  $\mathcal{P}$  y así,  $X \in [\mathcal{P}]$ .  $\square$

**Teorema 12.** (Xuan y Song, [15]) En la clase de los espacios de Baire y desarrollables, las propiedades  $WL$ ,  $CCC$  y separabilidad, son autodual débil. Esto es, si  $\mathcal{P} \in \{WL, CCC, separable\}$ , entonces  $[\mathcal{P}]'_{BD} = [\mathcal{P}]_{BD}$ .

*Demostración.* Por el Lema anterior, es suficiente verificar que las propiedades en cuestión satisfacen las condiciones (i) y (ii), del mismo.

**Para separable:** 1. Sea  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  una colección de subespacios de un espacio  $X$ , de tal manera que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $X_n$  es separable. Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $D_n$  subconjunto denso numerable de  $X_n$ . Denotemos  $D = \bigcup\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Entonces  $D$  es un subconjunto denso de  $\bigcup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ . En efecto, sea  $U$  un conjunto abierto no vacío en  $X$ . Entonces, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $U \cap X_{n_0} \neq \emptyset$ . Como  $U \cap X_{n_0}$  es un conjunto abierto no vacío en  $X_{n_0}$  y  $D_{n_0}$  es denso en  $X_{n_0}$ , tenemos que existe  $d \in D_{n_0} \cap (U \cap X_{n_0})$ . Lo cual implica que  $U \cap (\bigcup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}) \neq \emptyset$ .

2. Supongamos que  $Y$  es un subconjunto denso de  $X$  y que  $Y$  es separable, entonces existe  $D$  subconjunto denso numerable de  $Y$ . Veamos que  $D$  también es denso en  $X$ . Sea  $U$  un conjunto abierto no vacío en  $X$ . Dado que  $Y$  es denso en  $X$ , tenemos que  $U \cap Y \neq \emptyset$ ; luego,  $U \cap Y$  es un conjunto abierto y no vacío en  $Y$  y como  $D$  es denso en  $Y$ , tenemos que  $D \cap (U \cap Y) \neq \emptyset$ , lo cual implica que  $D \cap U \neq \emptyset$ . Así,  $X$  es separable.

**Para CCC:** 1. Sea  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  una colección de subespacios de un espacio  $X$ , de tal manera que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $X_n$  es CCC. Por demostrar que  $X' = \bigcup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  es CCC.

Supongamos que no, es decir, existe una familia celular,  $\mathcal{U}$ , en  $X'$  la cual no es numerable. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que tiene cardinalidad  $\omega_1$ . Así, ponemos  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ .

Denotamos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{U}_n = \{U \in \mathcal{U} : U \cap X_n \neq \emptyset\}$ . Notemos que  $\mathcal{U} = \bigcup \{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Ahora, dado que  $|\mathcal{U}| = \omega_1$ , debe existir  $m \in \mathbb{N}$ , de tal forma que  $|\mathcal{U}_m| = \omega_1$ . Entonces la colección  $\{X_m \cap U : U \in \mathcal{U}_m\}$  es una familia celular en  $X_m$  de cardinalidad  $\omega_1$ ; lo que contradice el hecho de que  $X_m$  es *CCC*. Esta contradicción se obtiene de suponer que  $X'$  no es *CCC*; por tanto,  $X' = \bigcup \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  es *CCC*.

2. Sean  $X$  un espacio topológico y  $Y$  un subespacio denso de  $X$ , el cual es *CCC*. Por demostrar que  $X$  es *CCC*. Supongamos que  $\mathcal{U}$  es una familia celular. Notemos que la colección  $\mathcal{U}' = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ , es una familia celular en  $Y$  y, además,  $|\mathcal{U}'| = |\mathcal{U}|$ . Ahora, dado que  $Y$  es *CCC*,  $|\mathcal{U}'| = \omega$ ; luego,  $|\mathcal{U}| = \omega$  y por tanto  $X$  es *CCC*.

**Para WL:** 1. Sea  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  una colección de subespacios de un espacio  $X$ , de tal manera que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $X_n$  es *WL*. Por demostrar que  $\bigcup \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  es *WL*.

Denotemos  $X'$  a la unión de los  $X_n$ ; es decir,  $X' = \bigcup \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  y sea  $\mathcal{U}$  una cubierta abierta de  $X'$ . Puesto que  $\mathcal{U}$ , también es cubierta abierta de  $X_n$  (para cada  $n \in \mathbb{N}$ ) y dado que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n$  es *WL*, tenemos que existe (para cada  $n \in \mathbb{N}$ )  $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}$ , con  $|\mathcal{U}_n| \leq \omega$ , de tal forma que  $X_n \subseteq cl_{X_n}(\bigcup \mathcal{U}_n)$ . Sea  $\mathcal{U}' = \bigcup \{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Entonces  $\mathcal{U}'$  es una subcolección numerable de  $\mathcal{U}$ , la cual satisface que  $X' = cl_{X'}(\bigcup \mathcal{U}')$  (Si  $x \in X'$  y  $U$  es una vecindad de  $x$  en  $X'$ , entonces existe  $n_x \in \mathbb{N}$  de tal manera que  $x \in X_{n_x}$ . Como  $X_{n_x} \subseteq cl_{X_n}(\bigcup \mathcal{U}_{n_x})$ ; luego,  $U \cap X_{n_x}$  es una vecindad de  $x$  en  $X_{n_x}$ ; de donde  $(\bigcup \mathcal{U}_{n_x}) \cap (U \cap X_{n_x}) \neq \emptyset$ , así, si  $y \in (\bigcup \mathcal{U}_{n_x}) \cap (U \cap X_{n_x})$ , entonces  $y \in (\bigcup \mathcal{U}') \cap U$ . Así,  $X'$  es *WL*).

2. Sean  $X$  un espacio y  $Y$  un subconjunto denso de  $X$  el cual es *WL*. Por demostrar que  $X$  es *WL*. Sea  $\mathcal{U}$  una cubierta abierta de  $X$ , entonces  $\mathcal{U}$  también cubre a  $Y$ , el cual es *WL*; luego, existe  $\mathcal{V}$  subcolección numerable de  $\mathcal{U}$ , de tal manera que  $Y \subseteq cl_X(\bigcup \mathcal{V})$ . Notemos que  $X = cl_X(Y) \subseteq cl_X(cl_X(\bigcup \mathcal{V})) = cl_X(\bigcup \mathcal{V})$ . Por tanto  $X$  es *WL*.  $\square$

En la clase de los espacios perfectamente normales las clases *CCC*, *WL* y *DCCC* coinciden (ver [11]).

# Capítulo 3

## Cardinalidad

### 3.1. Preliminares espaciales

De ahora en adelante, si  $A$  es un subconjunto del espacio  $X$  y  $\mathcal{U}$  es una familia de subconjuntos de  $X$ , denotamos,  $St^0(A, \mathcal{U}) = A$  y para cada  $1 \leq n \in \mathbb{N}$ ,  $St^{n+1}(A, \mathcal{U}) = St(St^n(A, \mathcal{U}), \mathcal{U})$ .

**Lema 3.** Sean  $X$  un espacio topológico,  $\mathcal{U}$  una familia de subconjuntos de  $X$  y  $A \subseteq X$ , con  $A \neq \emptyset$ . Para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $St(A, \mathcal{U}) \subseteq St^n(A, \mathcal{U})$ .

*Demostración.* La prueba es por inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 1$ . Trivial.

Supongamos que para  $n = m$  se verifica que  $St(A, \mathcal{U}) \subseteq St^m(A, \mathcal{U})$ . Por demostrar que la afirmación se cumple para  $n = m + 1$ .

Sea  $y \in St(A, \mathcal{U})$ . Entonces existe  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $y \in U$  y  $A \cap U \neq \emptyset$ . Ahora, por hipótesis de inducción tenemos que  $St(A, \mathcal{U}) \subseteq St^m(A, \mathcal{U})$ ; luego,  $y \in U \cap St^m(A, \mathcal{U})$ , lo cual implica que  $y \in U \subseteq St^{m+1}(A, \mathcal{U})$ . Así, dado que  $y \in St(A, \mathcal{U})$  fue arbitrario, concluimos que  $St(A, \mathcal{U}) \subseteq St^{m+1}(A, \mathcal{U})$ .

La prueba está completa.  $\square$

**Lema 4.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Para todo  $n \geq 2$  y cualesquiera  $x, y \in X$ , los enunciados siguientes son equivalentes:

1.  $x \in St^n(y, \mathcal{U})$ .
2. Existen  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\} \subseteq X$ , con  $x_0 = x$  y  $x_{n+1} = y$ , y  $\{U_1, \dots, U_{n+1}\} \subseteq \mathcal{U}$  de tal forma que para  $1 \leq i \leq n + 1$  se cumple que  $\{x_{i-1}, x_i\} \subseteq U_i$ .

*Demostración.* (1.  $\Rightarrow$  2.) Por inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 2$ . Sean  $x, y \in X$  y supongamos que  $x \in St^2(y, \mathcal{U})$ , entonces existe  $U_1 \in \mathcal{U}$  de tal manera que  $x \in U_1$  y  $U_1 \cap St(y, \mathcal{U}) \neq \emptyset$ . Tomemos  $x_1 \in U_1 \cap St(y, \mathcal{U})$  entonces existe  $U_2 \in \mathcal{U}$  de tal forma que  $x_1 \in U_2$  y  $U_2 \cap \{y\} \neq \emptyset$ . Notemos finalmente que los puntos  $\{x_0, x_1, x_2\}$ , con  $x_0 = x$  y  $x_2 = y$  junto con el conjunto  $\{U_1, U_2\} \subseteq \mathcal{U}$  satisfacen que para  $1 \leq i \leq 2$ ,  $\{x_{i-1}, x_i\} \subseteq U_i$ . Así, la afirmación se cumple para  $n = 2$ .

Ahora supongamos que la afirmación es cierta para  $n = m$  ( $m \geq 2$ ); es decir que para cualesquiera  $x, y \in X$ , si  $x \in St^m(y, \mathcal{U})$ , entonces existen  $\{x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\} \subseteq X$ , con  $x_0 = x$  y  $x_{m+1} = y$ , y  $\{U_1, \dots, U_{m+1}\} \subseteq \mathcal{U}$  de tal forma que para  $1 \leq i \leq m + 1$  se cumple que  $\{x_{i-1}, x_i\} \subseteq U_i$ . Por demostrar que la afirmación se verifica para  $n = m + 1$ .

Tomemos  $x, y \in X$ , arbitrarios y supongamos que  $x \in St^{m+1}(y, \mathcal{U})$ . Entonces existe  $U \in \mathcal{U}$  de tal forma que  $x \in U$  y  $U \cap St^m(y, \mathcal{U}) \neq \emptyset$ . Tomemos  $z \in U \cap St^m(y, \mathcal{U})$ , entonces  $z \in U$  y  $z \in St^m(y, \mathcal{U})$ . Por hipótesis de inducción, aplicada a  $y$  y  $z$ , tenemos que existen  $\{z_0, \dots, z_{m+1}\} \subseteq X$ , con  $z_0 = z$  y  $z_{m+1} = y$ , y  $\{V_1, \dots, V_{m+1}\} \subseteq \mathcal{U}$ , de tal forma que, para cada  $1 \leq i \leq m+1$ , se cumple que  $\{z_{i-1}, z_i\} \subseteq V_i$ . Pongamos  $x_0 = x$ ,  $x_{m+2} = y$  y para cada  $1 \leq i \leq m+2$ ,  $x_i = z_{i-1}$ ; además, denotamos  $U_1 = U$  y para cada  $2 \leq i \leq m+2$ , denotamos  $U_i = V_{i-1}$ .

Afirmación:  $\{x_0, \dots, x_{m+2}\}$  es un subconjunto de  $X$  con  $x_0 = x$  y  $x_{m+2} = y$ ; también,  $\{U_1, \dots, U_{m+2}\}$  es un subconjunto de  $\mathcal{U}$  y se satisface que para  $1 \leq i \leq m+2$ ,  $\{x_{i-1}, x_i\} \subseteq U_i$ .

En efecto, para  $i = 1$ ,  $x_0 = x$ ,  $x_1 = z_0 = z$  y  $U_1 = U$ , pero por construcción  $\{x, z\} \subseteq U$ . Ahora, si  $i = 2$ , entonces  $x_{2-1} = x_1 = z_0 = z$  y  $x_2 = z_{2-1} = z_1$  y  $U_2 = V_{2-1} = V_1$  y por construcción  $\{z_0, z_1\} \subseteq V_1$  y así,  $\{x_1, x_2\} \in U_2$ . Similarmente se verifican los casos restantes. Lo que concluye la demostración.

Con todo, concluimos que para todo  $n \geq 2$  y cualesquiera  $x, y \in X$ ,  $x \in St^n(y, \mathcal{U})$  implica que existe  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\} \subseteq X$ , con  $x_0 = x$  y  $x_{n+1} = y$ , y  $\{U_1, \dots, U_{n+1}\} \subseteq \mathcal{U}$  de tal manera que para cada  $1 \leq i \leq n+1$  se verifica que  $\{x_{i-1}, x_i\} \subseteq U_i$ .

(2.  $\Leftarrow$  1.) Mostraremos por inducción sobre  $n \geq 2$  que:

(\*) Si para cualesquiera  $x, y \in X$  tales que existen  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\} \subseteq X$ , con  $x_0 = x$  y  $x_{n+1} = y$ , y  $\{U_1, \dots, U_{n+1}\} \subseteq \mathcal{U}$  de manera tal que para  $1 \leq i \leq n+1$  se cumple que  $\{x_{i-1}, x_i\} \subseteq U_i$ , entonces  $x \in St^n(y, \mathcal{U})$ .

Para  $n = 2$ . Sean  $x, y \in X$  tales que existen  $\{x_0, x_1, x_2\} \subseteq X$ , con  $x_0 = x$  y  $x_2 = y$ , y  $\{U_1, U_2\} \subseteq \mathcal{U}$  de manera tal que para  $1 \leq i \leq 2$  se cumple que  $\{x_{i-1}, x_i\} \subseteq U_i$ . Como  $\{x_1, x_2\} \subseteq U_2$  y  $U_2 \in \mathcal{U}$ , se tiene que  $x_1 \in St(x_2, \mathcal{U}) = St(y, \mathcal{U})$ . Ahora, dado que  $\{x_0, x_1\} \subseteq U_1$ , tenemos que  $x_1 \in St(y, \mathcal{U}) \cap U_1$ ; luego, dado que  $U_1 \in \mathcal{U}$ , se tiene que  $U_1 \subseteq St^2(y, \mathcal{U})$ ; así que  $x \in St^2(y, \mathcal{U})$ .

Ahora supongamos que la afirmación (\*) se verifica para  $n = m$  y veamos que ésta se cumple para  $n = m+1$ . Sean  $x, y \in X$  para los cuales existen  $\{x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+2}\} \subseteq X$ , con  $x_0 = x$  y  $x_{m+2} = y$ , y  $\{U_1, \dots, U_{m+2}\} \subseteq \mathcal{U}$  de manera tal que para  $1 \leq i \leq m+2$  se cumple que  $\{x_{i-1}, x_i\} \subseteq U_i$ .

Definamos, para cada  $0 \leq i \leq m+1$ ,  $y_i = x_{i+1}$  y para  $1 \leq i \leq m+1$ , tomamos  $V_i = U_{i+1}$ . Entonces,  $\{y_0, \dots, y_{m+1}\}$  es un subconjunto de  $X$ , tal que  $y_0 = x_1$  y  $y_{m+1} = x_{m+2} = y$  y  $\{V_1, \dots, V_{m+1}\}$  es un subconjunto de  $\mathcal{U}$ , el cual satisface que para cada  $1 \leq i \leq m+1$ ,  $\{y_{i-1}, y_i\} \subseteq V_i$ ; así que por hipótesis de inducción,  $x_1 = y_0 \in St^m(y, \mathcal{U})$ . Ahora bien, dado que  $x_1 \in St^m(y, \mathcal{U}) \cap U_1$ , tenemos que  $U_1 \subseteq St^{m+1}(y, \mathcal{U})$ . Como  $x = x_0 \in U_1$ , tenemos que  $x \in St^{m+1}(y, \mathcal{U})$ . Concluimos que (\*) se verifica para  $n = m+1$  y por tanto para todo  $n \geq 2$ .  $\square$

El siguiente es una consecuencia del lema anterior.

**Teorema 13.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  una colección de subconjuntos de  $X$ . Para cualesquiera  $x, y \in X$  y  $n \geq 2$ ,  $x \in St^n(y, \mathcal{U})$  si y solo si  $y \in St^n(x, \mathcal{U})$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $n \geq 2$ .

Para  $n = 2$ . Sean  $x, y \in X$ , arbitrarios, tales que  $x \in St^2(y, \mathcal{U})$ . Entonces, por el Lema 4, existen  $\{x_0, x_1, x_2\} \subseteq X$ , con  $x_0 = x$  y  $x_2 = y$  y  $\{U_1, U_2\} \subseteq \mathcal{U}$ , de tal manera que, para cada  $1 \leq i \leq 2$ ,  $\{x_{i-1}, x_i\} \subseteq U_i$ . Notemos que  $\{x, x_1\} \subseteq U_1$  y  $U_1 \in \mathcal{U}$ , implican que  $x_1 \in St(x, \mathcal{U})$ . Ahora, como  $\{x_1, y\} \subseteq U_2$ , tenemos que  $U_2 \cap St(x, \mathcal{U}) \neq \emptyset$ ; así que  $U_2 \subseteq St(St(x, \mathcal{U}), \mathcal{U}) = St^2(x, \mathcal{U})$  y por tanto  $y \in St^2(x, \mathcal{U})$ .

Supongamos ahora que la conclusión del teorema se verifica para  $n = m$ . Por demostrar que el enunciado del teorema se verifica para  $n = m+1$ .

Sean  $x, y \in X$ , arbitrarios, tales que  $x \in St^{m+1}(y, \mathcal{U})$ . Entonces por el Lema 4, tenemos que existen  $\{x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+2}\} \subseteq X$ , con  $x_0 = x$  y  $x_{m+2} = y$ , y  $\{U_1, \dots, U_{m+2}\} \subseteq \mathcal{U}$  de tal forma que para  $1 \leq i \leq m+2$  se cumple que  $\{x_{i-1}, x_i\} \subseteq U_i$ . Definimos, para cada  $0 \leq i \leq m+1$ ,  $y_i = x_i$  y, para cada  $1 \leq i \leq m+1$   $V_i = U_i$ . Observemos que  $\{y_0, \dots, y_{m+1}\}$  es un subconjunto de  $X$  tal que  $y_0 = x_0 = x$  y  $y_{m+1} = x_{m+1}$  y  $\{V_1, \dots, V_m\}$  es un subconjunto de  $\mathcal{U}$ , para el cual se verifica que, para cada  $1 \leq i \leq m+1$ ,  $\{y_{i-1}, y_i\} \subseteq U_i$ ; luego, por el Lema 4,  $x \in St^m(y_{m+1}, \mathcal{U}) = St^m(x_{m+1}, \mathcal{U})$ . Así, por hipótesis de inducción,  $x_{m+1} \in St^m(x, \mathcal{U})$ . Finalmente, dado que  $\{x_{m+1}, x_{m+2}\} \subseteq U_{m+2}$ , se sigue que  $x_{m+1} \in U_{m+2} \cap St^m(x, \mathcal{U})$  y por ende,  $U_{m+2} \subseteq St^{m+1}(x, \mathcal{U})$ . Por tanto  $y = x_{m+2} \in St^{m+1}(x, \mathcal{U})$ . La prueba está completa.  $\square$

**Proposición 7.** *Sean  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  una cubierta abierta de  $X$ . Para cualesquiera  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ , las afirmaciones siguientes son equivalentes, para cada  $n \in \mathbb{N}$ :*

1.  $y \notin St^n(x, \mathcal{U})$ ;
2.  $x \notin St^n(y, \mathcal{U})$ ,
3.  $St(x, \mathcal{U}) \cap St(y, \mathcal{U}) = \emptyset$ .

*Demostración.* La equivalencia (1.  $\iff$  2.) Es una consecuencia inmediata del teorema anterior, con  $n = 2$ .

Veamos la implicación (2.  $\implies$  3.)

Supongamos que  $x \notin St^n(y, \mathcal{U})$  y que  $St(x, \mathcal{U}) \cap St(y, \mathcal{U}) \neq \emptyset$ . Tomemos  $z \in St(x, \mathcal{U}) \cap St(y, \mathcal{U})$ . Entonces, dado que  $z \in St(x, \mathcal{U})$ , existe  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $\{x, z\} \subseteq U$ . Ahora, puesto que  $z \in St(y, \mathcal{U})$  y  $z \in U$ , podemos concluir que  $z \in St(y, \mathcal{U}) \cap U$ ; luego,  $x \in U \subseteq St^n(y, \mathcal{U})$ , lo cual es una contradicción.

(3.  $\implies$  1.) Sean  $x, y \in X$  arbitrarios tales que  $x \neq y$ . Supongamos que  $St(x, \mathcal{U}) \cap St(y, \mathcal{U}) \neq \emptyset$  y que  $y \in St^n(x, \mathcal{U})$ .

Si  $y \in St^n(x, \mathcal{U})$ , por el Lema 4, existen  $\{x_0, x_1, x_2\} \subseteq X$ , con  $x_0 = y$  y  $x_2 = x$  y  $\{U_1, U_2\} \subseteq \mathcal{U}$ , de tal manera que, para cada  $1 \leq i \leq 2$ ,  $\{x_{i-1}, x_i\} \subseteq U_i$ . Notemos que de la contención  $\{x_0, x_1\} \subseteq U_1$ , tenemos que  $x_1 \in St(x_0, \mathcal{U}) = St(y, \mathcal{U})$  y de la contención  $\{x_1, x_2\} \subseteq U_2$ , tenemos que  $x_1 \in St(x_2, \mathcal{U}) = St(x, \mathcal{U})$ ; lo que implica que  $St(y, \mathcal{U}) \cap St(x, \mathcal{U}) \neq \emptyset$ . Lo cual es una contradicción.

La prueba está completa.  $\square$

Recordemos que un espacio Hausdorff  $X$  tiene pseudocaracter cerrado  $\leq \kappa$  (donde  $\kappa$  es un cardinal infinito), lo que se denota  $\psi_c(X) \leq \kappa$ , si para cada  $x \in X$ , existe una familia  $\mathcal{B}_x$  de vecindades de  $x$ , con  $|\mathcal{B}_x| \leq \kappa$ , de tal forma que  $\{x\} = \bigcap \{\overline{B} : B \in \mathcal{B}_x\}$ . Si  $\kappa = \omega$ , diremos que  $X$  tiene pseudocaracter cerrado numerable.

El resultado siguiente será empleado en la demostración del Teorema 14.

**Proposición 8.** *Sean  $X$  un espacio topológico,  $A \subseteq X$  y  $\mathcal{U}$  cubierta abierta de  $X$ . Entonces  $cl_X(St(A, \mathcal{U})) \subseteq St^2(A, \mathcal{U})$ .*

*Demostración.* En efecto, sea  $x \in cl_X(St(A, \mathcal{U}))$ , como  $\mathcal{U}$  es cubierta abierta de  $X$ , existe  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $x \in U$ ; luego,  $U \cap St(A, \mathcal{U}) \neq \emptyset$ , lo que implica que  $x \in U \subseteq St^2(A, \mathcal{U})$ .  $\square$

**Definición 5.** ([1]) *Un espacio topológico  $X$  tiene rango  $k$ -diagonal, donde  $1 \leq k \in \mathbb{N}$ , si existe una familia numerable,  $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$  de cubiertas abiertas de  $X$  (llamada sucesión  $k$ -diagonal) de tal manera que para cada  $x \in X$  se verifica que  $\{x\} = \bigcap \{St^k(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ .*

A continuación veremos que si un espacio Hausdorff tiene rango 2-diagonal, entonces su pseudocaracter cerrado es a lo más numerable. Antes daremos una proposición.

**Teorema 14.** Si  $X \in T_2$  tiene rango 2-diagonal, entonces  $\psi_c(X) \leq \omega$ .

*Demostración.* Como  $X$  tiene rango 2-diagonal, existe una sucesión  $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$  de cubiertas abiertas de  $X$  con la propiedad de que para cada  $x \in X$ , se cumple que:

$$\{x\} = \bigcap \{St^2(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por la proposición anterior tenemos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$  (y cada  $x \in X$ ),  $cl_X(St(x, \mathcal{U}_n)) \subseteq St^2(x, \mathcal{U}_n)$ ; luego (para cada  $x \in X$ ),

$$\bigcap \{cl_X(St(x, \mathcal{U}_n)) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcap \{St^2(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\} = \{x\}.$$

Lo que nos permite concluir que  $\psi_c(X) \leq \omega$ . □

**Lema 5.** (Xuan, Shi [14]) Sea  $X$  un espacio de rango  $k$ -diagonal, donde  $k \geq 1$ . Si  $|X| > 2^\omega$ , entonces para cada sucesión  $k$ -diagonal,  $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ , para  $X$ , existen  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $S \subseteq X$ , tales que:

1.  $|S| > \omega$ ;
2.  $S$  es cerrado y discreto, y
3. para cualesquier  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $y \notin St^k(x, \mathcal{U}_{n_0})$ .

*Demostración.* Sea  $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$  una sucesión  $k$ -diagonal. Suponemos, sin pérdida de generalidad que, para cualquier  $n \in \omega$ ,  $St^k(x, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq St^k(x, \mathcal{U}_n)$ . Para cada  $n \in \omega$ , consideramos

$$P_n = \{\{x, y\} \in [X]^2 : x \notin St^k(y, \mathcal{U}_n)\}$$

Entonces  $[X]^2 = \bigcup \{P_n : n \in \omega\}$ ; luego, por el Teorema 1, existen  $n_0 \in \omega$  y un subconjunto,  $S$ , de  $X$ , con  $|S| > \omega$  y tal que  $[S]^2 \subseteq P_{n_0}$ . Es claro que para cualesquiera  $x, y \in P_{n_0}$ , con  $x \neq y$ ,  $y \notin St^k(x, \mathcal{U}_{n_0})$  (vea Teorema 13). De aquí que para cada  $x \in S$ ,  $S \cap St^k(x, \mathcal{U}_{n_0}) = \{x\}$ ; lo cual indica que  $S$  es discreto.

*Afirmación:*  $S$  es cerrado. Supongamos que  $x_0$  es un punto de acumulación de  $S$ . Como  $X$  es  $T_2$ , se tiene que para cualquier,  $U$ , vecindad de  $x_0$ ,  $|U \cap S| \geq \omega$ . Dado que  $\mathcal{U}_{n_0}$  es cubierta abierta de  $X$ , existe  $U \in \mathcal{U}_{n_0}$  tal que  $x_0 \in U_{n_0}$ ; luego, podemos tomar  $y, z \in U \cap S$ , con  $y \neq z$ . Entonces  $y \in U \subseteq St(z, \mathcal{U}_{n_0}) \subseteq St^k(z, \mathcal{U}_{n_0})$ , pero  $y \in St(y, \mathcal{U}_{n_0}) \subseteq St^k(y, \mathcal{U}_{n_0})$ ; de donde  $St^k(y, \mathcal{U}_{n_0}) \cap St^k(z, \mathcal{U}_{n_0}) \neq \emptyset$ . Lo cual es una contradicción. Así,  $S$  no tiene puntos de acumulación y por tanto  $S$  es cerrado.

La prueba está completa. □

**Lema 6.** (Basile, Bella y Ridderbos, [3]) Si  $X$  es un espacio de Baire con rango 1-diagonal, entonces  $d(X) \leq wL(X)^\omega$ .

*Demostración.* Sean  $\kappa = wL(X)$  y  $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$  una sucesión de cubiertas abiertas de  $X$ , testigo de que  $X$  tiene rango 1-diagonal. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{\leq \kappa}$  de tal manera que  $cl_X(\bigcup \mathcal{V}_n) = X$ . Denotemos  $\mathcal{V} = \bigcup \{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Notemos que  $|\mathcal{V}| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{V}_n| \leq \kappa \cdot \omega = \kappa$ . Esto es,  $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ .

Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , hacemos  $D_n = \bigcup \mathcal{V}_n$ . Observemos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D_n$  es un subconjunto denso y abierto en  $X$ ; luego, dado que  $X$  es Baire, tenemos que  $D = \bigcap \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$  es un subconjunto denso de  $X$ .

Fijemos un buen orden en  $\mathcal{V}$  y definimos  $f : D \rightarrow \mathcal{V}^{\mathbb{N}}$ , como sigue  $f(d) = f_d$ ; donde  $f_d : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{V}$  es definida como  $f_d(n) = \min\{V \in \mathcal{V} : d \in V \in \mathcal{V}_n\}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

*Afirmación:*  $f$  es inyectiva. Sean  $x, y \in D$  tales que  $x \neq y$ . Entonces  $y \notin St(x, \mathcal{U}_m)$ , para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Sea  $V = f_x(m)$ , entonces  $x \in V$  y  $V \in \mathcal{U}_m$  (pues  $\mathcal{V}_m \subseteq \mathcal{U}_m$ ); de aquí que  $y \notin V$  y por lo tanto  $f_x(m) \neq f_y(m)$ , lo que implica que  $f(x) \neq f(y)$ . Por tanto  $f$  es inyectiva.

De la afirmación anterior tenemos que  $|D| \leq |\mathcal{V}^{\mathbb{N}}| \leq \kappa^\omega$ . Así, como  $D$  es denso, tenemos que  $d(X) \leq |D| \leq \kappa^\omega$ . □

**Proposición 9.** (Basile, Bella y Ridderbos, [3]) Si  $X$  tiene rango 3-diagonal, entonces  $|X| \leq \omega L(X)^\omega$ .

*Demostración.* Sean  $\kappa = \omega L(X)$  y  $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$  una sucesión de cubiertas abiertas que atestiguan el hecho de que  $X$  tiene rango 3-diagonal. Como  $\omega L(X) = \kappa$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{\leq \kappa}$ , de tal manera que  $\bigcup \mathcal{V}_n = X$ . De aquí que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que para todo  $x \in X$ , existe  $V \in \mathcal{V}_n$  de modo que  $St(x, \mathcal{U}_n) \cap V \neq \emptyset$  (en efecto, si  $x \in U \in \mathcal{U}_n$ , el hecho de que  $\bigcup \mathcal{V}_n$  es denso, implica que  $U \cap \bigcup \mathcal{V}_n \neq \emptyset$ ; de donde  $U \cap V \neq \emptyset$ , para algún  $V \in \mathcal{V}_n$  y dado que  $U \subseteq St(x, \mathcal{U})$ , tenemos que  $V \cap St(x, \mathcal{U}) \neq \emptyset$ ). De aquí se sigue que  $V \subseteq St^2(x, \mathcal{U}_n)$ .

Sea  $\mathcal{V} = \bigcup \{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Notemos que  $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ .

Fijamos en  $\mathcal{V}$  un buen orden y definimos una función  $F : X \rightarrow \mathcal{V}^{\mathbb{N}}$  como sigue:  $F(x)(n) = \min\{V \in \mathcal{V} : V \in \mathcal{V}_n \text{ y } St(x, \mathcal{U}_n) \cap V \neq \emptyset\}$ .

Veamos que  $F$  es inyectiva. Sean  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ . Por hipótesis, existe  $n \in \mathbb{N}$  de tal manera que  $St^2(x, \mathcal{U}_n) \cap St(y, \mathcal{U}_n) = \emptyset$ . Puesto que  $F(x)(n) \subseteq St^2(x, \mathcal{U}_n)$  y  $F(y)(n) \cap St(y, \mathcal{U}_n) \neq \emptyset$ , tenemos que  $F(x)(n) \neq F(y)(n)$ . Así,  $F$  es inyectiva y por lo tanto  $|X| \leq |\mathcal{V}^{\mathbb{N}}| = \kappa^\omega$ .  $\square$

**Teorema 15.** (Xuan, Shi, [13]) Si  $X$  satisface la propiedad DCCC y tiene rango 3-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ .

*Demostración.* Sea  $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$  una sucesión de cubiertas abiertas que atestiguan el hecho de que  $X$  tiene rango 3-diagonal y supongamos que  $|X| > 2^\omega$ . Por el Teorema 1, existe  $S \subseteq X$ , tal que:

1.  $|S| > \omega$ ;
2.  $S$  es cerrado y discreto, y
3. para cualesquier  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $y \notin St^3(x, \mathcal{U}_{n_0})$ .

Afirmación: La familia  $\mathcal{V} = \{St(s, \mathcal{U}_{n_0}) : s \in S\}$  es una familia celular y no numerable.

En efecto, notemos que si  $s_1, s_2 \in S$ , entonces por 3., tenemos que  $s_1 \notin St^3(s_2, \mathcal{U}_{n_0})$ , y como  $St^2(s_2, \mathcal{U}_{n_0}) \subseteq St^3(s_2, \mathcal{U}_{n_0})$ , tenemos que  $s_1 \notin St^2(s_2, \mathcal{U}_{n_0})$ . Así, por la Proposición 7, tenemos que  $St(s_1, \mathcal{U}_{n_0}) \cap St(s_2, \mathcal{U}_{n_0}) = \emptyset$ .

El hecho de que  $\mathcal{V}$  es una familia celular, implica que  $|\mathcal{V}| = |S| > \omega$ . Luego, dado que  $X$  es DCCC, se tiene que  $\mathcal{V}$  no es una familia discreta. Entonces existe  $x_0 \in X$  tal que para cualquier vecindad,  $U$  de  $x_0$ , se tiene que  $U$  interseca a más de un elemento de  $\mathcal{V}$ . Como  $\mathcal{U}_{n_0}$  es cubierta abierta de  $X$ , existe  $U_{x_0} \in \mathcal{U}_{n_0}$ , de tal forma que  $x_0 \in U_{x_0}$ . Luego, existen  $s_1, s_2 \in S$ , con  $s_1 \neq s_2$  tales que  $U_{x_0} \cap St(s_i, \mathcal{U}_{n_0}) \neq \emptyset$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Tomemos  $z \in U_{x_0} \cap St(s_1, \mathcal{U}_{n_0})$ . Notemos que  $z \in St^2(s_2, \mathcal{U}_{n_0})$  (puesto que  $U_{x_0} \cap St(s_2, \mathcal{U}_{n_0}) \neq \emptyset$ , implica que  $U_{x_0} \subseteq St^2(s_2, \mathcal{U}_{n_0})$ ). Ahora,  $z \in St(s_1, \mathcal{U}_{n_0})$ , implica que existe  $U_z \in \mathcal{U}_{n_0}$  de tal manera que  $\{s_1, z\} \subseteq U_z$ ; luego,  $z \in St^2(s_2, \mathcal{U}_{n_0}) \cap U_z$ . Lo cual implica que  $U_z \subseteq St^3(s_2, \mathcal{U}_{n_0})$ , entonces  $s_1 \in St^2(s_2, \mathcal{U}_{n_0})$ . Una contradicción.

Por tanto  $|X| \leq 2^\omega$ .  $\square$

## 3.2. Autoduales y desigualdades cardinales

**Teorema 16.** (Xuan y Song, [16]) Si  $X \in [CCC]^*$  y  $X$  tiene rango 2-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ .

*Demostración.* Supongamos que  $|X| > 2^\omega$ . Como  $X$  tiene rango 2-diagonal, existe una sucesión  $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$  de cubiertas abiertas de  $X$  de tal manera que para cualquier  $x \in X$ ,  $\{x\} = \bigcap \{St^2(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ .

Por el Lema 5, existe  $S \subseteq X$ , tal que:

1.  $|S| > \omega$ ;
2.  $S$  es cerrado y discreto, y
3. para cualesquier  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $y \notin St^2(x, \mathcal{U}_{n_0})$ .

Por la Proposición 7, se sigue que  $\{St(s, \mathcal{U}_{n_0}) : s \in S\}$  es una familia celular en  $X$ .

Ahora consideramos la asignación de vecindades  $\phi$ , definida para cada  $x \in X$  como sigue:

1.  $\phi(x) = St(x, \mathcal{U}_{n_0})$ , si  $x \in S$ , y
2.  $\phi = X \setminus S$ , si  $x \notin S$ .

Como  $X \in [CCC]^*$ , para tal asignación de vecindades existe  $Y$  subespacio de  $X$  el cual es  $CCC$  y además satisface que  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ .

Afirmación:  $S \subseteq Y$ .

En efecto, sea  $s \in S$ . Como  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ , existe  $y_s \in Y$  de tal manera que  $s \in \phi(y_s)$ . Notemos que  $y_s \in S$ , pues de lo contrario  $\phi(y_s) \neq X \setminus S$ , lo que implica que  $s \in S \cap (X \setminus S)$ , lo cual es absurdo. Ahora, si  $s \neq y_s$ , entonces (dado que  $s, y_s \in S$ ), tenemos que  $St(s, \mathcal{U}_{n_0}) \cap St(y_s, \mathcal{U}_{n_0}) = \emptyset$ , lo que implica que  $s \notin St(y_s, \mathcal{U}_{n_0}) = \phi(y_s)$ .

De lo anterior obtenemos que  $s = y_s$  y por tanto  $s \in Y$ . Lo que demuestra que la afirmación es cierta.

De la afirmación anterior se sigue que la colección  $\{St(x, \mathcal{U}_{n_0}) \cap Y : x \in S\}$  es una familia celular (de abiertos no vacíos) en  $Y$ , lo cual contradice que  $Y$  es  $CCC$ . Por tanto  $|X| \leq 2^\omega$ .  $\square$

Antes de establecer el siguiente resultado vamos a recordar una de las desigualdades más importantes en la teoría de los invariantes cardinales topológicos, a la que haremos referencia como desigualdad de Hajnal y Juhász:

Para cualquier espacio Hausdorff  $X$ ,  $|X| \leq 2^{c(X)\chi(X)}$ .

**Teorema 17.** *Sea  $X$  un espacio Hausdorff. Si  $X \in [\kappa CC]^*$ ,  $\chi(X) = \kappa$  y  $X$  es  $\kappa$ -perfecto, entonces  $|X| \leq 2^\kappa$ .*

*Demostración.* Del Teorema 9, tenemos que en la clase de los espacios  $\kappa$ -perfectos la propiedad  $\kappa CC$  es autodual respecto de asignación de vecindades; esto es,  $[\kappa CC]_{\kappa P}^* = [\kappa CC]_{\kappa P}$ ; luego, si  $X \in [\kappa CC]_{\kappa P}^*$ , entonces  $X \in [\kappa CC]_{\kappa P}$ . Luego por la desigualdad de Hajnal y Juhász, tenemos que  $|X| \leq 2^\kappa$ .  $\square$

**Corolario 10.** *(Xuan y Song, [16]) Si  $X \in [CCC]^*$ , primero numerable y perfecto, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ .*

**Teorema 18.** *(Xuan y Song, [16]) Si  $X \in [CCC]^*$ , primero numerable con rango 1-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ .*

*Demostración.* Por hipótesis existe una sucesión  $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$  de cubiertas abiertas de  $X$  de tal manera que para cualquier  $x \in X$ ,  $\{x\} = \bigcap\{St(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $St(x, \mathcal{U}_{n+1}) \subseteq St(x, \mathcal{U}_n)$ . Para cada  $x \in X$ , tomamos  $\mathcal{B}_x = \{B_x^n : n \in \mathbb{N}\}$  base local de  $x$ . También podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_x^{n+1} \subseteq B_x^n$ .

Supongamos que  $|X| > 2^\omega$ .

Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos

$$P_n = \{\{x, y\} \in [X]^2 : B_x^n \cap B_y^n = \emptyset \text{ y } y \notin St(x, \mathcal{U}_n)\}.$$

Notemos que  $[X]^2 = \bigcup \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ . En efecto, es evidente que  $\bigcup \{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [X]^2$ . Veamos la otra contención. Sean  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ . Puesto que  $\{y\} = \bigcap \{St(y, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  de tal manera que  $x \notin St(y, \mathcal{U}_n)$ . Es claro que  $x \notin St(y, \mathcal{U}_{n_0})$ . Ahora, como  $X$  es Hausdorff, tenemos que existen  $B_x^k \in \mathcal{B}_x$  y  $B_y^m \in \mathcal{B}_y$  tales que  $B_x^k \cap B_y^m = \emptyset$ . Tomando  $n = \max\{n_0, k, m\}$ , tenemos que  $y \notin St(x, \mathcal{U}_n)$  y  $B_x^n \cap B_y^n = \emptyset$ ; es decir,  $\{x, y\} \in P_n$ .

Por el Lema 5, existen  $n_0 \in \mathbb{N}$  y un subconjunto no numerable  $S$  de  $X$  tal que  $[S]^2 \subseteq P_{n_0}$ .

Afirmación 1. El conjunto  $S$  es cerrado y discreto en  $X$ .

En efecto, supongamos que no, es decir, existe  $x$  es un punto de acumulación de  $S$ . Como  $X$  es  $T_2$ , para cada  $U \in \mathcal{U}_{n_0}$ , tal que  $x \in U$ , se cumple que  $U \cap S$  es infinito. Por tanto existen  $z, y \in S \cap U$ , con  $z \neq y$ ; luego,  $y \in U \subseteq St(z, \mathcal{U}_{n_0})$ , lo cual no puede ocurrir. De donde  $S$  no tiene puntos de acumulación y por tanto  $S$  es cerrado y discreto en  $X$ .

Notemos que  $\{B_x^{n_0} : x \in S\}$  es una familia celular no numerable (porque  $[S]^2 \subseteq P_{n_0}$ ).

Ahora consideramos la asignación de vecindades,  $\phi$  definida, para cada  $x \in X$ , como sigue:

1.  $\phi(x) = B_x^{n_0}$ , si  $x \in S$ , y
2.  $\phi(x) = X \setminus S$ , si  $x \notin S$ .

Como  $X \in [CCC]^*$ , para tal asignación de vecindades existe  $Y$  subespacio de  $X$  el cual es  $CCC$  y además satisface que  $X = \bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}$ .

Afirmación:  $S \subseteq Y$ .

En efecto, sea  $s \in S$ . Como  $X = \bigcup \{\phi(y) : y \in Y\}$ , existe  $y_s \in Y$  de tal manera que  $s \in \phi(y_s)$ . Notemos que  $y_s \in S$ , pues de lo contrario  $\phi(y_s) \neq X \setminus S$ , lo que implica que  $s \in S \cap (X \setminus S)$ , lo cual es absurdo. Ahora, si  $s \neq y_s$ , entonces (dado que  $s, y_s \in S$ ), tenemos que  $B_s^{n_0} \cap B_{y_s}^{n_0} = \emptyset$ , lo que implica que  $s \notin B_{y_s}^{n_0} = \phi(y_s)$ , lo cual es absurdo. Así  $S \subseteq Y$ .

De la afirmación anterior se sigue que la colección  $\{B_s^{n_0} \cap Y : s \in S\}$  es una familia celular (de abiertos no vacíos) en  $Y$ , lo cual contradice que  $Y$  es  $CCC$ .  $\square$

En [7] Hodel introdujo el pseudocaracter Hausdorff de un espacio  $X$ , denotado  $H\psi(X)$ , el cual satisface que  $H\psi(X) \leq \kappa$  si para cada  $x \in X$ , existe una colección,  $\mathcal{B}_x$ , de vecindades de  $x$  en  $X$  (nos referimos a  $\mathcal{B}_x$  como pseudobase Hausdorff), con  $|\mathcal{B}_x| \leq \kappa$  y de tal forma que para cualesquiera  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , existen  $U_x \in \mathcal{B}_x$  y  $U_y \in \mathcal{B}_y$  tales que  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

Notemos que si  $H\psi(X) \leq \omega$ , entonces para cada  $x \in X$ , existe una pseudobase Hausdorff,  $\mathcal{B}'_x = \{U_n^x : n \in \mathbb{N}\}$ . Fijemos  $\mathcal{B}'_x$  y consideramos  $B_1^x = U_1^x$  y para  $n \geq 2$ ,  $B_n^x = \bigcap \{U_i^x : 1 \leq i \leq n\}$ . Denotemos  $\mathcal{B}_x = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\}$ .

Notemos que por construcción se tiene que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_{n+1} \subseteq B_n$ .

Aplicando el proceso anterior a cada  $\mathcal{B}'_x$ , obtenemos, para cada  $x \in X$  la colección  $\mathcal{B}_x = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ , tal que  $B_{n+1} \subseteq B_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Veamos que, para cada  $x \in X$ ,  $\mathcal{B}_x$ , es una pseudobase Hausdorff. En efecto, si  $x, y \in X$  y  $x \neq y$ , entonces existen  $U_n^x \in \mathcal{B}'_x$  y  $U_m^y \in \mathcal{B}'_y$ , tales que  $U_n^x \cap U_m^y = \emptyset$ . Por construcción  $B_n^x = \bigcap \{U_i^x : 1 \leq i \leq n\} \subseteq U_n^x$  y  $B_m^y = \bigcap \{U_i^y : 1 \leq i \leq m\} \subseteq U_m^y$ ; luego  $B_n^x \cap B_m^y = \emptyset$ .

Se dice que un espacio  $X$  tiene extensión menor o igual que un cardinal infinito,  $\kappa$ , lo que se denota,  $e(X) \leq \kappa$ , si todo subconjunto cerrado y discreto de  $X$  tiene cardinalidad menor o igual que  $\kappa$ .

**Teorema 19.** Si  $X \in [CCC]^*$  y  $H\psi(X) = \omega$ , entonces  $e(X) \leq 2^\omega$ .

*Demostración.* Para cada  $x \in X$ , tomamos  $\mathcal{B}_x = \{B_n^x : n \in \mathbb{N}\}$  pseudobase Hausdorff de  $x$ . Por lo comentado antes de este teorema, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_{n+1}^x \subseteq B_n^x$ .

Ahora bien, si  $e(X) > 2^\omega$ , entonces existe un subconjunto  $E \subseteq X$ , cerrado y discreto con  $|E| > 2^\omega$ .

Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos

$$P_n = \{\{x, y\} \in [E]^2 : B_n^x \cap B_n^y = \emptyset\}.$$

Observemos que  $[E]^2 = \bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ . En efecto, es claro que  $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [E]^2$ . Ahora si  $\{x, y\} \in [E]^2$ , entonces existen  $B_n^x \in \mathcal{B}'_x$  y  $B_m^y \in \mathcal{B}'_y$ , tales que  $B_n^x \cap B_m^y = \emptyset$ . Consideremos  $k = \max\{n, m\}$ , entonces  $B_k^x \subseteq B_n^x$  y  $B_k^y \subseteq B_m^y$ ; lo cual implica que  $B_k^x \cap B_k^y = \emptyset$  y así,  $\{x, y\} \in P_k$ . Por tanto  $[E]^2 \subseteq \bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Con todo  $[E]^2 = \bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Por el Teorema 1, existen  $n_0 \in \mathbb{N}$  y un subconjunto  $S$  de  $E$ , con  $|S| \geq \omega_1$  tal que  $[S]^2 \subseteq P_{\alpha_0}$ .

Como  $S \subseteq E$ , tenemos que  $S$  es cerrado y discreto en  $X$ .

Notemos que  $\{B_{n_0}^x : x \in S\}$  es una familia celular no numerable (porque  $[S]^2 \subseteq P_{\alpha_0}$ ).

Ahora consideramos la asignación de vecindades,  $\phi$  definida, para cada  $x \in X$ , como sigue:

1.  $\phi(x) = B_x^{n_0}$ , si  $x \in S$ , y
2.  $\phi(x) = X \setminus S$ , si  $x \notin S$ .

Como  $X \in [CCC]^*$ , para tal asignación de vecindades existe  $Y$  subespacio de  $X$  el cual es  $CCC$  y además se verifica que  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ .

Afirmación:  $S \subseteq Y$ .

En efecto, sea  $s \in S$ . Como  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ , existe  $y_s \in Y$  de tal manera que  $s \in \phi(y_s)$ . Notemos que  $y_s \in S$ , pues de lo contrario  $\phi(y_s) = X \setminus S$ , lo que implica que  $s \in S \cap (X \setminus S)$ , lo cual es absurdo. Ahora, si  $s \neq y_s$ , entonces (dado que  $s, y_s \in S$ ), tenemos que  $B_{n_0}^s \cap B_{n_0}^{y_s} = \emptyset$ , lo que implica que  $s \notin B_{n_0}^{y_s} = \phi(y_s)$ , lo cual es absurdo. Así  $S \subseteq Y$ .

De la afirmación anterior se sigue que la colección  $\{B_s^{n_0} \cap Y : s \in S\}$  es una familia celular (de abiertos no vacíos) de cardinalidad  $\geq \kappa^+$  en  $Y$ , lo cual contradice que  $Y$  es  $CCC$ .  $\square$

Evidentemente, toda base de un punto  $x$  (en un espacio  $X$ ), es una pseudobase Hausdorff de  $x$ , luego, si  $X$  es un espacio primero numerable, tenemos que  $H\psi(X) \leq \omega$ . De este hecho y el Teorema 19, se tiene el siguiente.

**Corolario 11.** (Xuan y Song, [16]) Si  $X \in [CCC]^*$  y  $X$  es primero numerable, entonces  $e(X) \leq 2^\omega$ .

**Proposición 10.** (Xuan y Song, [16]) Si  $X \in [DCCC]^*$  y  $X$  tiene rango 3-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ .

*Demostración.* Por el Teorema 7, tenemos que  $[DCCC]^* = [DCCC]$ ; luego, si  $X \in [DCCC]^*$ , entonces  $X \in [DCCC]$ . Así, por el Teorema 19, tenemos que  $|X| \leq 2^\omega$ .  $\square$

En la teoría de los invariantes cardinales existen diversos resultados que establecen cotas superiores para la cardinalidad de espacios topológicos; una de las más sobresalientes es llamada desigualdad de Arhangel'skii (y a la que nos referiremos con dicho nombre):

Para cualquier espacio Lindelöf y primero numerable,  $X \in T_2$ ,  $|X| \leq 2^\omega$ .

En términos de funciones cardinales, la desigualdad de Arhangel'skii se establece de la siguiente forma (vea [7]): Para cualquier espacio Hausdorff  $X$ ,  $|X| \leq 2^{L(X) \times(X)}$ . Donde  $L(X)$ , denota el grado de Lindelöf de un espacio. Se entiende que si  $X$  es un espacio,  $L(X) \leq \kappa$  (para un cardinal infinito  $\kappa$ ) si para toda  $\mathcal{U}$ , cubierta abierta de  $X$ , existe  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  tal que  $\bigcup \mathcal{V} = X$  y  $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ . Es consecuencia de la definición anterior que un espacio  $X$  es Lindelöf si y solo si  $L(X) \leq \omega$ .

Esta desigualdad se tiene generalizada por diversos autores, tal es el caso de la siguiente, obtenida por Arhangel'skii y Sapirovski (nos referimos a la desigualdad siguiente como desigualdad de Arhangel'skii-Sapirovskii).

*Si  $X$  es un espacio Hausdorff Lindelöf con pseudocaracter y estrechez numerables, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ .*

En términos de funciones cardinales, la desigualdad previa se establece como sigue:

Para todo espacio Hausdorff,  $X$ ,  $|X| \leq 2^{L(X)\psi(X)t(X)}$ .

A continuación recordamos las definiciones de los conceptos involucrados en la desigualdad previa.

Un espacio,  $X$ , tiene pseudocaracter numerable, lo que se denota  $\psi(X) \leq \omega$ , si para cada  $x \in X$ , existe  $\mathcal{B}_x$  una colección numerable de vecindades de  $x$  en  $X$ , de tal forma que  $\{x\} = \bigcap \mathcal{B}_x$ .

Se dice que un espacio,  $X$ , tiene estrechez menor o igual que un cardinal infinito  $\kappa$ , lo que se denota  $t(X) \leq \kappa$ , si se verifica que para cualquier  $A \subseteq X$  y cualquier  $x \in cl_X(A)$ , existe  $B \subseteq A$ , con  $|B| \leq \kappa$  tal que  $x \in cl_X(B)$ . Si  $\kappa = \omega$ , se dice que  $X$  tiene estrechez numerable.

Para poder establecer el siguiente resultado, requerimos introducir una notación.

Si  $\kappa$  es un cardinal infinito,  $DEN(\kappa)$ , denota la propiedad topológica: tener densidad menor o igual que  $\kappa$ . Así,  $X$  satisface  $DEN(\kappa)$  si  $d(X) \leq \kappa$ .

**Teorema 20.** *Si  $X \in [DEN(\kappa)]^*$  y  $\psi_c(X)t(X) \leq \gamma$ , entonces  $|X| \leq 2^{\kappa^\gamma \cdot \gamma}$ .*

*Demostración.* Primero veremos que  $L(X) \leq \kappa^\gamma$ . Sea  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \rho\}$  una cubierta abierta de  $X$ , donde  $\rho$  es un cardinal infinito. Consideremos la asignación de vecindades,  $\phi$ , tal que para cada  $x \in X$   $\phi(x) = U_{\alpha_x}$ , donde  $\alpha_x = \min\{\alpha \in \kappa : x \in U_\alpha\}$ . Dado que  $X \in [DEN(\kappa)]^*$ , existe  $Y$  subespacio de  $X$  con  $d(Y) \leq \kappa$  tal que  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ . Luego, por la desigualdad de Hodel,  $|Y| \leq d(Y)^{\psi_c(Y)t(Y)} \leq \kappa^\gamma$  (porque  $\psi_c(Y)t(Y) \leq \psi_c(X)t(X) \leq \gamma$ ); es decir,  $|Y| \leq \kappa^\gamma$ . Entonces  $\{\phi(y) : y \in Y\} \subseteq \mathcal{U}$ , con  $|\{\phi(y) : y \in Y\}| \leq \kappa^\gamma$ .

Así, dado que  $\mathcal{U}$  era una cubierta abierta arbitraria de  $X$  a la cual hemos extraído una subcubierta de cardinalidad  $\leq \kappa^\gamma$ , concluimos que  $L(X) \leq \kappa^\gamma$ .

Ahora, notemos que  $\psi_c(X) \leq \psi_c(X)t(X)$  y  $\psi(X) \leq \psi_c(X)$  (esto último se sigue de las definiciones de pseudocaracter y pseudocaracter cerrado), entonces  $\psi(X) \leq \gamma$ .

Finalmente, por la desigualdad de Arhangel'skii-Sapirovskii, tenemos que  $|X| \leq 2^{\kappa^\gamma \cdot \gamma} = 2^{\kappa^\gamma}$ . □

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente.

**Corolario 12.** *Sea  $X$  un espacio  $T_2$ . Si  $X \in [DEN(2^\kappa)]^*$  y  $\psi_c(X)t(X) \leq \kappa$ , entonces  $|X| \leq 2^{2^\kappa}$ .*

La versión numerable del corolario previo, establece que:

Si  $X$  es un espacio Hausdorff tal que  $X \in [DEN(2^\omega)]^*$  y  $\psi_c(X)t(X) \leq \omega$ , entonces  $|X| \leq 2^{2^\omega}$ .

**Teorema 21.** *Para cualquier  $X \in [DEN(2^\omega)]^*$  con rango 2-diagonal, se cumple que  $L(X) \leq 2^\omega$ .*

*Demostración.* Veamos que  $L(X) \leq 2^\omega$ . Sea  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$  una cubierta abierta de  $X$ , donde  $\kappa$  es un cardinal infinito. Consideremos la asignación de vecindades,  $\phi$ , tal que para cada  $x \in X$ ,  $\phi(x) = U_{\alpha_x}$ , donde  $\alpha_x = \min\{\alpha \in \kappa : x \in U_\alpha\}$ . Dado que  $X \in [DEN(2^\omega)]^*$ , existe  $Y$  subespacio de  $X$  con  $d(Y) \leq 2^\omega$  tal que  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ . Puesto que  $d(Y) \leq 2^\omega$ , existe  $D \subseteq Y$  con  $|D| \leq 2^\omega$ , el cual es denso en  $Y$ .

Como  $X$  tiene rango 2-diagonal (vea Definición 5), existe una sucesión  $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$  de cubiertas abiertas de  $X$  con la propiedad de que para cada  $x \in X$ , se cumple que:

$$(1) \quad \{x\} = \bigcap\{St^2(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y cada  $y \in Y$ , fijamos un punto  $d_y^n \in D \cap St(y, \mathcal{U}_n)$  y definamos  $f : Y \rightarrow D$  como sigue:

Para cada  $y \in Y$ ,  $f(y) = f_y : \mathbb{N} \rightarrow D$ ; donde  $f_y(n) = d_y^n$ .

Afirmación:  $f$  es inyectiva.

En efecto, sean  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ . Entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $y \notin St(x, \mathcal{U}_m)$ ; luego (por la Proposición 7),  $St(x, \mathcal{U}_m) \cap St(y, \mathcal{U}_m) = \emptyset$ . Luego  $d_x^m \neq d_y^m$ . Así,  $f$  es inyectiva y por tanto  $|Y| \leq |D^\mathbb{N}| \leq |D|^\omega \leq (2^\omega)^\omega = 2^\omega$ . En suma,  $\{\phi(y) : y \in Y\} \subseteq \mathcal{U}$ , con  $|\{\phi(y) : y \in Y\}| \leq 2^\omega$ .

Así, dado que  $\mathcal{U}$  era una cubierta abierta arbitraria de  $X$  a la cual hemos extraído una subcubierta de cardinalidad  $\leq 2^\omega$ , concluimos que  $L(X) \leq 2^\omega$ .  $\square$

### 3.3. Duales débiles y desigualdades cardinales

**Teorema 22.** (*Xuan y Song, [15]*) Si  $X \in [CCC]'$  es Hausdorff, Baire y tiene rango 2-diagonal, entonces  $X$  tiene cardinalidad  $|X| \leq 2^\omega$ .

*Demostración.* Como  $X$  tiene rango 2-diagonal, existe una sucesión  $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$  de cubiertas abiertas de  $X$  de tal manera que para cualquier  $x \in X$ ,  $\{x\} = \bigcap\{St^2(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ . De aquí se sigue que si  $x, y \in X$  son cualesquiera, tales que  $x \neq y$ , entonces existe  $m \in \mathbb{N}$ , de tal manera que  $y \notin St^2(x, \mathcal{U}_m)$ . Por la Proposición 7, tenemos que:

$$(*) \quad y \notin St^2(x, \mathcal{U}_m) \text{ si y solo si } x \notin St^2(y, \mathcal{U}_m) \text{ o bien } y \notin St^2(x, \mathcal{U}_m) \text{ si y solo si } St(x, \mathcal{U}_m) \cap St(y, \mathcal{U}_m) = \emptyset.$$

Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos la asignación de vecindades,  $\phi^n$ , definida para cada  $x \in X$ , como  $\phi^n(x) = St(x, \mathcal{U}_n)$ . Dado que  $X \in [CCC]'$  (para cada  $n \in \mathbb{N}$ ), existe  $Y_n \subseteq X$ , de tal forma que  $Y_n$  cumple la  $CCC$  y  $X = cl_X(\{\phi^n(y) : y \in Y_n\})$ .

Puesto que  $X$  es Baire y cada  $\bigcup\{\phi(y)^n : y \in Y_n\}$  es un subconjunto abierto y denso en  $X$ , tenemos que  $D = \bigcap\{\bigcup\{\phi(y)^n : y \in Y_n\} : n \in \mathbb{N}\}$  es denso en  $X$ .

Afirmación 1:  $|D| \leq 2^\omega$ .

En efecto, supongamos que la afirmación es falsa; es decir,  $|D| > 2^\omega$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos  $P_n = \{\{x, y\} \in [D]^2 : y \notin St^2(x, \mathcal{U}_n)\}$ . Se sigue de lo establecido al inicio de la prueba que  $[D]^2 = \bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Entonces, por el Lema 5, existen  $m \in \mathbb{N}$  y  $S \subseteq D$ , tales que:

1.  $|S| > \omega$ ;
2.  $S$  es cerrado y discreto, y
3. para cualesquier  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $y \notin St^2(x, \mathcal{U}_m)$ .

Se sigue de la Proposición 7 que la colección  $\{St(s, S) : s \in S\}$  es una familia celular.

Afirmación 2.  $\bigcup\{\phi^m(y) : y \in Y_m\} = St(Y_m, \mathcal{U}_m)$ .

En efecto, si  $x \in \bigcup\{\phi^m(y) : y \in Y_m\}$ , entonces existe  $y_x \in Y_m$  tal que  $x \in \phi_{y_x}^m = St(y_x, \mathcal{U}_m)$ ; luego, existe  $U \in \mathcal{U}$ , de tal manera que  $\{x, y_x\} \in U$ . De aquí, junto con el hecho de que  $y_x \in Y_m \cap U$ , tenemos que  $x \in St(Y_m, \mathcal{U}_m)$ . Así que  $\bigcup\{\phi^m(y) : y \in Y_m\} \subseteq St(Y_m, \mathcal{U}_m)$ . Por otro lado, si  $x \in St(Y_m, \mathcal{U}_m)$ , entonces existe  $U \in \mathcal{U}_m$  tal que  $U \cap Y_m \neq \emptyset$  y  $x \in U$ . Tomemos  $y_x \in U \cap Y_m$ , entonces  $x \in St(y_x, \mathcal{U}_m) \subseteq \bigcup\{\phi^m(y) : y \in Y_m\}$ . Luego,  $St(Y_m, \mathcal{U}_m) \subseteq \bigcup\{\phi^m(y) : y \in Y_m\}$ . La afirmación queda demostrada.

Afirmación 3. Para cada  $s \in S$ ,  $St(s, \mathcal{U}) \cap Y_m \neq \emptyset$ . En efecto, notemos que  $S \subseteq D \subseteq \bigcup\{\phi^m(y) : y \in Y_m\}$ , entonces  $s \in \bigcup\{\phi^m(y) : y \in Y_m\}$  y por la afirmación anterior,  $s \in St(Y_m, \mathcal{U})$ , entonces existe  $U \in \mathcal{U}_m$  tal que  $U \cap Y_m \neq \emptyset$  y  $s \in U$ . Tomemos  $y_s \in U \cap Y_m$ , entonces  $y_s \in St(s, \mathcal{U}_m) \cap Y_m$ .

De la afirmación anterior obtenemos que la colección  $\{St(x, \mathcal{U}) \cap Y_m : x \in S\}$  es una familia celular en  $Y$  con cardinalidad mayor que  $|S| > \omega$ . Lo cual contradice el hecho de que  $Y$  es CCC. Por lo tanto  $|D| \leq 2^\omega$ .

Como  $|D| \leq 2^\omega$ , se sigue que  $|D^\mathbb{N}| \leq 2^\omega$ .

Ahora definamos  $f : X \rightarrow D^\mathbb{N}$  como sigue, dado  $x \in X$ ,  $f(x) = f_x$ , donde  $f_x : \mathbb{N} \rightarrow D$  está definida de la manera siguiente:  $f_x(n) = d_x^n$ ; donde  $d_x^n$  es un punto arbitrario de  $D \cap St(x, \mathcal{U}_n)$ . Dado que  $D$  es denso en  $X$ , tenemos que  $f_x$  está bien definida.

Afirmación 4.  $f$  es inyectiva. En efecto, sean  $x, y \in X$  arbitrarios tales que  $x \neq y$ . Entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  de tal forma que  $y \notin St^2(x, \mathcal{U}_m)$ ; así que, por la Proposición 3.4,  $St(x, \mathcal{U}_m) \cap St(y, \mathcal{U}_m) = \emptyset$ . De donde  $d_x^m \neq d_y^m$ ; lo cual implica que  $f_x(m) \neq f_y(m)$ ; y por lo tanto,  $f(x) \neq f(y)$ . Esto es,  $f$  es inyectiva.

De la afirmación anterior obtenemos que  $|X| \leq |D^\mathbb{N}| \leq 2^\omega$ . La prueba está completa.  $\square$

La demostración del resultado que presentamos a continuación sigue el mismo patrón que la prueba del Teorema 22.

**Teorema 23.** (Xuan y Song, [15]) Si  $X \in [DCCC]'$  es Hausdorff, Baire y tiene rango 3-diagonal, entonces  $X$  tiene cardinalidad  $\leq 2^\omega$ .

*Demostración.* Como  $X$  tiene rango 3-diagonal, existe una sucesión  $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$  de cubiertas abiertas de  $X$  de tal manera que para cualquier  $x \in X$ ,  $\{x\} = \bigcap\{St^3(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ .

Notemos que si  $x, y \in X$  son tales que  $x \neq y$ , entonces existe  $m \in \mathbb{N}$ , de tal manera que (vea Teorema 13)

$$(*) \quad y \notin St^3(x, \mathcal{U}_m) \text{ si y solo si } x \notin St^3(y, \mathcal{U}_m).$$

Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos la asignación de vecindades,  $\phi^n$ , definida como  $\phi^n(x) = St(x, \mathcal{U}_n)$ , para cada  $x \in X$ . Dado que  $X \in [DCCC]'$  (para cada  $n \in \mathbb{N}$ ), existe  $Y_n \subseteq X$ , de tal forma que  $Y_n$  cumple la DCCC y  $X = cl_X(\{\phi^n(y) : y \in Y_n\})$ .

Puesto que  $X$  es Baire y cada  $\bigcup\{\phi^n(y) : y \in Y_n\}$  es un subconjunto abierto y denso en  $X$ , tenemos que  $D = \bigcap\{\bigcup\{\phi^n(y) : y \in Y_n\} : n \in \mathbb{N}\}$  es denso en  $X$ .

Afirmación 1:  $|D| \leq 2^\omega$ .

En efecto, supongamos que  $|D| > 2^\omega$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos  $P_n = \{\{x, y\} \in [D]^2 : y \notin St^3(x, \mathcal{U}_n)\}$ . Por lo comentado en el segundo párrafo de la prueba, Se sigue que  $D = \bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Entonces, por el Lema 5, existen  $m \in \mathbb{N}$  y  $S \subseteq D$ , tales que:

1.  $|S| > \omega$ ;

2.  $S$  es cerrado y discreto, y
3. para cualesquier  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $y \notin St^3(x, \mathcal{U}_m)$ .

Afirmación 2.  $cl_X(St(S, \mathcal{U}_m)) \subseteq St^2(S, \mathcal{U}_m)$ .

En efecto, sea  $x \in cl_X(St(S, \mathcal{U}_m))$ . Entonces, para cualquier  $U$  vecindad de  $x$ , se tiene que  $U \cap St(S, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ . Puesto que  $\mathcal{U}_m$  es cubierta abierta de  $X$ , existe  $U \in \mathcal{U}_m$  de tal forma que  $x \in U$ ; luego,  $U \cap St(S, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ , lo cual implica que  $x \in U \subseteq St^2(S, \mathcal{U}_m)$ . Por tanto  $cl_X(St(S, \mathcal{U}_m)) \subseteq St^2(S, \mathcal{U}_m)$ .

Afirmación 3. La colección  $\mathcal{D} = \{St(s, \mathcal{U}_m) : s \in S\}$  es discreta.

Supongamos que no es discreta y que  $x_0 \in X$  es tal que para toda,  $U$ , vecindad de  $x$ ,  $|\{s \in S : St(s, \mathcal{U}_m) \cap U \neq \emptyset\}| > 1$ . Como  $\mathcal{U}_m$  es cubierta abierta de  $X$ , existe  $U \in \mathcal{U}_m$  de tal manera que  $x \in U$ . Por nuestra suposición, existen  $s_0, s_1 \in S$ , con  $s_0 \neq s_1$ , de tal manera que  $U \cap St(s_0, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$  y  $U \cap St(s_1, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ . Entonces  $U \subseteq St^2(s_0, \mathcal{U}_m)$  y  $U \cap St(s_1, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ ; lo cual implica que  $St^2(s_0, \mathcal{U}_m) \cap St(s_1, \mathcal{U}_m)$ . Sea  $z \in St^2(s_0, \mathcal{U}_m) \cap St(s_1, \mathcal{U}_m)$ , entonces existe  $V \in \mathcal{U}_m$  de tal forma que  $\{z, s_1\} \subseteq V$ ; de donde  $V \cap St^2(s_0, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$  y  $V \in \mathcal{U}_m$ , entonces  $\{z, s_1\} \subseteq V \subseteq St^3(s_0, \mathcal{U}_m)$ . De aquí que  $s_1 \in St^3(s_0, \mathcal{U}_m)$ , lo cual contradice el punto 3. Con lo que queda demostrada la Afirmación 3.

Afirmación 4. Para cada  $s \in S$ ,  $St(s, \mathcal{U}_m) \cap Y_m \neq \emptyset$ .

En efecto, sea  $s \in S$  arbitrario. Puesto que  $S \subseteq D \subseteq \bigcup\{\phi^m(y) : y \in Y_m\}$ , existe  $y_s \in Y_m$ , de tal manera que  $s \in \phi^m(y) = St(y_s, \mathcal{U}_m)$ ; luego, existe  $U \in \mathcal{U}$ , tal que  $\{s, y_s\} \in U$ . Así, dado que  $\{s, y_s\} \subseteq U$  y  $U \in \mathcal{U}_m$ , tenemos que  $y_s \in St(s, \mathcal{U}_m)$ . Por tanto,  $St(s, \mathcal{U}_m) \cap Y_m \neq \emptyset$ . Lo que concluye la prueba de la Afirmación 4.

De la afirmación anterior tenemos que la colección  $\{Y_m \cap St(s, \mathcal{U}_m) : s \in S\}$  es una familia discreta de conjuntos abiertos no vacíos en  $Y_m$ , con  $|\{Y_m \cap St(s, \mathcal{U}_m) : s \in S\}| > \omega$ , lo cual contradice que  $Y_m$  satisface *DCCC*. De esta contradicción obtenemos que la Afirmación 1 se verifica; es decir,  $|D| \leq 2^\omega$ .

Ahora definamos  $f : X \rightarrow D^{\mathbb{N}}$  como sigue, dado  $x \in X$ ,  $f(x) = f_x$ , donde  $f_x : \mathbb{N} \rightarrow D$  está definida por:  $f_x(n) = d_x^n$ ; donde  $d_x^n$  es un punto arbitrario de  $D \cap St(x, \mathcal{U}_n)$ . Dado que  $D$  es denso en  $X$ , tenemos que  $f$  está bien definida.

Afirmación 5.  $f$  es inyectiva.

En efecto, sean  $x, y \in X$  arbitrarios tales que  $x \neq y$ . Entonces existe  $k \in \mathbb{N}$  de tal forma que  $y \notin St^3(x, \mathcal{U}_k)$ , entonces debido a que  $St^2(x, \mathcal{U}_k) \subseteq St^3(x, \mathcal{U}_k)$ , tenemos que  $y \notin St^2(x, \mathcal{U}_k)$ , así que por la Proposición 7,  $St(x, \mathcal{U}_k) \cap St(y, \mathcal{U}_k) = \emptyset$ , concluimos que  $d_x^k \neq d_y^k$ ; lo cual implica que  $f_x(k) \neq f_y(k)$  y por ende,  $f(x) \neq f(y)$ . Esto es,  $f$  es inyectiva.

De la afirmación anterior obtenemos que  $|X| \leq |D^\omega| \leq 2^\omega$ . □

El resultado siguiente muestra que si el espacio  $X$ , en el teorema anterior, tiene rango 4-diagonal, entonces la condición Baire se puede omitir.

**Teorema 24.** (*Xuan y Song, [15]*) Si  $X \in [DCCC]'$  es Hausdorff y tiene rango 4-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ .

*Demostración.* Supongamos que  $|X| > 2^\omega$ . Como  $X$  tiene rango 4-diagonal, existe una sucesión  $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$  de cubiertas abiertas de  $X$  con la propiedad de que para cada  $x \in X$ , se cumple que:

$$(1) \quad \{x\} = \bigcap \{St^4(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos  $P_n = \{\{x, y\} \in [X]^2 : y \notin St^4(x, \mathcal{U}_n)\}$ . Tenemos que  $[X]^2 = \bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ . En efecto, es claro que  $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [X]^2$ . Veamos que  $[X]^2 \subseteq \bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Sean  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ , entonces (por (1)), existe  $k \in \mathbb{N}$ , de tal manera que  $y \notin St^4(x, \mathcal{U}_k)$ ; luego,  $\{x, y\} \in P_k \subseteq \bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Entonces, por el Lema 5, existen  $m \in \mathbb{N}$  y  $S \subseteq D$ , tales que:

1.  $|S| > \omega$ ;
2.  $S$  es cerrado y discreto, y
3. para cualesquiera  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $y \notin St^4(x, \mathcal{U}_m)$ .

Afirmación 1.  $cl_x(St(S, \mathcal{U}_m)) \subseteq St^2(S, \mathcal{U}_m)$ .

En efecto, sea  $y \in cl_x(St(S, \mathcal{U}_m))$ . Entonces  $St(y, \mathcal{U}_m) \cap St(S, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ . Tomemos  $z \in St(y, \mathcal{U}_m) \cap St(S, \mathcal{U}_m)$ . Como  $z \in St(y, \mathcal{U}_m)$ , existe  $U \in \mathcal{U}_m$  de tal manera que  $\{y, z\} \subseteq U$ . Ahora, dado que  $z \in U \cap St(S, \mathcal{U}_m)$  y  $U \in \mathcal{U}$ , tenemos que  $y \in U \subseteq St^2(S, \mathcal{U}_m)$ . Así,  $y \in St^2(S, \mathcal{U}_m)$  y por tanto  $cl_x(St(S, \mathcal{U}_m)) \subseteq St^2(S, \mathcal{U}_m)$ .

Afirmación 2. La colección  $\{St(s, \mathcal{U}_m) : s \in S\}$  es discreta.

Supongamos que no es discreta; es decir, existe  $x_0 \in X$  de tal manera que para toda,  $U$ , vecindad de  $x_0$ ,  $|\{s \in S : U \cap St(s, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset\}| \geq 2$ . Dado que  $\mathcal{U}_m$  es cubierta de  $X$ , existe  $U \in \mathcal{U}_m$ , de tal manera que  $x_0 \in U$ . Por nuestra hipótesis, existen  $s_1, s_2 \in S$ , con  $s_1 \neq s_2$  tales que  $U \cap St(s_i, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Ahora, como  $U \cap St(s_1, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ , existe  $x_1 \in U \cap St(s_1, \mathcal{U}_m)$ ; luego, existe  $U_1 \in \mathcal{U}_m$  de tal manera que  $\{x_1, s_1\} \subseteq U_1$ . Dado que  $U \cap St(s_2, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ , tenemos que  $U \subseteq St^2(s_2, \mathcal{U}_m)$  y por consiguiente,  $x_1 \in St^2(s_2, \mathcal{U}_m)$ , así que  $U_1 \cap St^2(s_2, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ , lo cual implica que  $\{x_1, s_1\} \subseteq U_1 \subseteq St^3(s_2, \mathcal{U}_m)$ . Lo cual no puede ocurrir ya que  $s_1 \notin St^4(s_2, \mathcal{U}_m)$ .

Claramente  $\bigcup\{St(s, \mathcal{U}_m) : s \in S\} = St(S, \mathcal{U}_m)$ . De la afirmación previa y la Proposición 2, tenemos que  $\bigcup\{cl_X(St(s, \mathcal{U}_m)) : s \in S\} = cl_X(\bigcup\{St(s, \mathcal{U}_m) : s \in S\}) = cl_X(St(S, \mathcal{U}_m))$ .

Afirmación 3. La colección  $\{St^2(s, \mathcal{U}_m) : s \in S\}$  es una familia celular.

En efecto, supongamos que  $St^2(s_1, \mathcal{U}_m) \cap St^2(s_2, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ , para  $s_1, s_2 \in S$ . Sea  $x_1 \in St^2(s_1, \mathcal{U}_m) \cap St^2(s_2, \mathcal{U}_m)$ . Dado que  $x_1 \in St^2(s_1, \mathcal{U}_m)$ , existe  $U_1 \in \mathcal{U}$ , de tal manera que  $x_1 \in U_1$  y  $U_1 \cap St^2(s_1, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ . Tomemos  $x_2 \in U_1 \cap St^2(s_2, \mathcal{U}_m)$ , entonces existe  $U_2 \in \mathcal{U}$ , de tal manera que  $\{x_2, s_2\} \subseteq U_2$ . Ahora, como  $x_1 \in U_1 \cap St^2(s_2, \mathcal{U}_m)$ , tenemos que  $U_1 \subseteq St^3(s_2, \mathcal{U}_m)$ ; luego,  $x_2 \in St^3(s_2, \mathcal{U}_m) \cap U_2$ , lo cual implica que  $U_2 \subseteq St^4(s_2, \mathcal{U}_m)$  y por tanto  $s_1 \in St^4(s_2, \mathcal{U}_m)$ , lo cual no puede ocurrir. Por lo que la Afirmación 3. se cumple.

Notemos que si  $x \in St^2(S, \mathcal{U}_m)$ , entonces existe un único  $s_x \in S$ , de tal manera que  $x \in St^2(s_x, \mathcal{U}_m)$ . Por supuesto, si  $x \in St^2(S, \mathcal{U}_m)$ , entonces existe  $U \in \mathcal{U}_m$  de tal manera que  $x \in U$  y  $U \cap St(S, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ . Tomemos  $s \in U \cap St(S, \mathcal{U}_m)$ , entonces existe  $V \in \mathcal{U}_m$  de tal forma que  $s \in V$  y  $V \cap S \neq \emptyset$ . Tomemos  $s_x \in V \cap S$ . Como  $\{s, s_x\} \in V$  y  $V \in \mathcal{U}_m$ , tenemos que  $s \in St(s_x, \mathcal{U}_m)$ ; luego,  $s \in U \cap St(s_x, \mathcal{U}_m)$  y  $U \in \mathcal{U}_m$ , lo cual implica que  $U \subseteq St^2(s_x, \mathcal{U}_m)$  y por tanto  $x \in St^2(s_x, \mathcal{U}_m)$ . La unicidad de  $s_x$  se sigue de que la familia  $\{St^2(s, \mathcal{U}_m) : s \in S\}$  es una familia celular.

Ahora consideramos la asignación de vecindades,  $\phi$  definida como sigue, para cada  $x \in X$ :

- (a) Si  $x \in St^2(S, \mathcal{U}_m)$ , entonces  $\phi(x)$  es el único elemento,  $St^2(s_x, \mathcal{U}_m)$ , de  $\{St^2(s, \mathcal{U}_m) : s \in S\}$ , tal que  $x \in St^2(s_x, \mathcal{U}_m)$ .
- (b) Si  $x \in X \setminus St^2(S, \mathcal{U}_m)$ , entonces  $\phi(x) = X \setminus cl_X(St(S, \mathcal{U}))$ .

Así, para esta asignación de vecindades, existe  $Y \subseteq X$ , tal que  $cl_X(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}) = X$  y  $Y$  es *DCCC*.

Afirmación 4. Para cualquier  $s \in S$ , se cumple que  $St^2(s, \mathcal{U}_m) \cap Y \neq \emptyset$  si y solo si  $St(s, \mathcal{U}_m) \cap \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\} \neq \emptyset$ .

En efecto, tomemos  $s \in S$ , arbitrario y supongamos que  $St^2(s, \mathcal{U}_m) \cap Y \neq \emptyset$ , tomemos  $y \in St^2(s, \mathcal{U}_m) \cap Y$ , entonces, por un lado existe  $U \in \mathcal{U}_m$  tal que  $y \in U$  y  $U \cap St(s, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ . Por otro lado, el hecho de que  $\{St^2(x, \mathcal{U}_m) : x \in S\}$  es una familia celular y  $y \in St^2(s, \mathcal{U}_m)$ , tenemos que  $\phi(y) = St^2(s, \mathcal{U}_m)$ . Así, puesto que  $U \subseteq St^2(s, \mathcal{U}_m) = \phi(y)$ , tenemos que  $\phi(y) \cap St(s, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ .

Supongamos ahora que  $St(s, \mathcal{U}_m) \cap \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\} \neq \emptyset$ . Entonces existe  $y_s \in Y$ , tal que  $St(s, \mathcal{U}_m) \cap \phi(y_s) \neq \emptyset$ , entonces existe  $U \in \mathcal{U}_m$  tal que  $s \in U$  y  $U \cap \phi(y_s) \neq \emptyset$ .

Tenemos dos casos:

- (i)  $\phi(y_s) = St^2(s_{y_s}, \mathcal{U}_m)$ . Entonces  $s = s_{y_s}$ , pues si  $z \in U \cap St^2(s_{y_s}, \mathcal{U}_m)$ , entonces  $z \in St(s, \mathcal{U}_m) \subseteq St^2(s, \mathcal{U}_m)$ , lo que implica que  $St^2(s, \mathcal{U}_m) \cap St^2(s_{y_s}, \mathcal{U}_m) \neq \emptyset$ , de modo que  $St^2(s, \mathcal{U}_m) = St^2(s_{y_s}, \mathcal{U}_m)$ . Ahora, como  $y_s \in St^2(s_{y_s}, \mathcal{U}_m) = St^2(s, \mathcal{U}_m)$ , tenemos que, en este caso,  $St^2(s, \mathcal{U}_m) \cap Y \neq \emptyset$ .
- (ii)  $\phi(y) = X \setminus cl_X(St^2(S, \mathcal{U}_m))$ . Este caso no puede ocurrir, pues de lo contrario, si  $z \in U \cap X \setminus cl_X(St^2(S, \mathcal{U}_m))$ , entonces  $z \in U \cap X \setminus U$ ; puesto que  $s \in U \in \mathcal{U}_m$ , implica que  $U \subseteq St^2(S, \mathcal{U}_m) \subseteq cl_X(St^2(S, \mathcal{U}_m))$  y complementando  $X \setminus cl_X(St^2(S, \mathcal{U}_m)) \subseteq X \setminus U$ .

Lo que termina la prueba de la Afirmación 4.

Afirmación 5. La colección  $\{St^2(s, \mathcal{U}_m) \cap Y : s \in S\}$  es una familia discreta de abiertos no vacíos en  $Y$ .

En efecto, sea  $y \in Y$ , arbitrario. Notemos que  $\phi(y) \cap Y$  es una vecindad de  $y$  en  $Y$  y

1. Si  $\phi(y) = X \setminus cl_X(St^2(S, \mathcal{U}_m))$ , entonces  $(\phi(y) \cap Y) \cap \{St^2(s, \mathcal{U}_m) \cap Y : s \in S\} = \emptyset$ .
2.  $\phi(y) = (St^2(s_y, \mathcal{U}_m))$ . Supongamos que  $(\phi(y) \cap Y) \cap (St^2(s_i, \mathcal{U}_m) \cap Y) \neq \emptyset$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Entonces existen  $y_i \in (\phi(y) \cap Y) \cap (St^2(s_i, \mathcal{U}_m) \cap Y)$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Entonces  $y_i \in St^2(s_i, \mathcal{U}_m) \cap St^2(s_y, \mathcal{U}_m)$ , para  $i \in \{1, 2\}$  y como  $\{St^2(x, \mathcal{U}_m) : x \in S\}$  es una familia celular, tenemos que  $St^2(s_i, \mathcal{U}_m) = St^2(s_y, \mathcal{U}_m)$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Entonces  $\phi(y) \cap Y$  interseca solo a un elemento de  $\{St^2(s, \mathcal{U}_m) \cap Y : s \in S\}$

Así, la Afirmación 5 queda demostrada.

De la afirmación anterior tenemos que  $Y$  no cumple  $DCCC$ , lo cual es una contradicción. Por tanto  $|X| \leq 2^\omega$ . □

De los dos últimos resultados nacen un par de interrogantes.

**Problema 1.** ¿Es cierto que si  $X \in [CCC]'$  es Hausdorff y tiene rango 3-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ ?

**Problema 2.** ¿Es cierto que si  $X \in [DCCC]'$  es Hausdorff y tiene rango 3-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ ?

En el Teorema 25 daremos una respuesta afirmativa a estas interrogantes.

El Lema 6 y la Proposición 9, establecen cotas superiores para la densidad y la cardinalidad de un espacio topológico  $X$ , respectivamente, en términos de su grado débil de Lindelöf. Para concluir este trabajo de tesis, a continuación vamos a presentar algunos resultados particulares, empleando duales débiles, que permiten obtener cotas para el grado débil de Lindelöf de un espacio dado.

**Lema 7.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $\gamma$  un cardinal infinito. Si para cada asignación de vecindades  $\phi$ , existe  $Y \subseteq X$ , con  $|Y| \leq \gamma$  tal que  $X = \overline{\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}}$ , entonces  $wL(X) \leq \gamma$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{U}$  una cubierta abierta de  $X$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ , para algún cardinal  $\kappa$ . Notemos que si  $\kappa \leq \gamma$ , entonces  $\mathcal{V} = \mathcal{U}$  es una subcolección de  $\mathcal{U}$  con  $|\mathcal{V}| \leq \gamma$  tal que  $cl_X(\bigcup \mathcal{V}) = X$ .

Supongamos ahora que  $\gamma < \kappa$  y consideremos la asignación de vecindades  $\phi$  definida para cada  $x \in X$  como sigue  $\phi(x) = U_{\alpha_x}$ , donde  $\alpha_x = \min\{\alpha \in \kappa : x \in U_\alpha\}$ . Por hipótesis, existe  $Y \in [X]^{\leq \gamma}$ , de tal manera que  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$ . Así, para la cubierta abierta,  $\mathcal{U}$ , existe una subcolección; a saber,  $\{\phi(y) : y \in Y\}$ , con cardinalidad  $\leq \gamma$ , cuya unión es un conjunto denso en  $X$ . Por lo tanto  $wL(X) \leq \gamma$ .  $\square$

Como una consecuencia del lema anterior y la Proposición 9, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 25.** *Si  $X \in [DCCC]'$  es Hausdorff con rango 3-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ .*

*Demostración.* Sea  $\phi$  una asignación de vecindades. Por hipótesis, existe  $Y \subseteq X$ , tal que  $X = \bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}$  y  $Y$  es *DCCC*. Dado que  $X$  tiene rango 3-diagonal,  $Y$  tiene rango 3-diagonal; así que por el Teorema 15, tenemos que  $|Y| \leq 2^\omega$ . Luego, por el Lema anterior,  $wL(X) \leq 2^\omega$ . Finalmente, por la Proposición 9 tenemos que  $|X| \leq wL(X)^\omega = 2^\omega$ .  $\square$

Observemos que si  $X$  es un espacio que satisface a *CCC*, entonces  $X$  satisface *DCCC*. En efecto, si  $X$  no es *DCCC*, entonces existe una familia discreta  $\mathcal{U}$  no numerable. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ . Para cada  $\alpha \in \omega$ , tomamos  $x_\alpha \in U_\alpha$  y  $V_\alpha$ , vecindad de  $x_\alpha$  de tal manera que  $V_\alpha \subseteq U_\alpha$  y  $V_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ , para cualquier  $\beta \in \omega \setminus \{\alpha\}$  (lo cual es posible por el hecho de que  $\mathcal{U}$  es discreta). Claramente la colección  $\{V_\alpha : \alpha \in \omega\}$  es una familia celular en  $X$  de abiertos no vacíos y con cardinalidad  $\omega_1$ ; lo que contradice que  $X$  satisface la *CCC*. De este hecho obtenemos que si  $X \in [CCC]'$ , entonces  $X \in [DCCC]'$ .

De lo anterior obtenemos el Corolario 13, el cual da una respuesta afirmativa a la siguiente interrogante de [15]:

**Problema 3.** *¿Es cierto que si  $X \in [CCC]'$  es Hausdorff y tiene rango 3-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ ?*

**Corolario 13.** *Si  $X \in [CCC]'$  es Hausdorff con rango 3-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ .*

Otro resultado importante en la teoría de los invariantes cardinales topológicos es la desigualdad Bell, Ginsburg y Woods:

*Para cualquier espacio débilmente Lindelöf y primero numerable,  $X \in T_4$ ,  $|X| \leq 2^\omega$ .*

El lector interesado en una demostración o en una exposición más detallada de la teoría de los invariantes cardinales topológicos puede consultar [7].

En el resultado siguiente, denotamos  $L$  a la propiedad de Lindelöf. También vamos a requerir de otra de las famosas desigualdades cardinales; a saber la debida a Bell, Ginsburg y Woods; la cual establece que:

Para cualquier espacio normal,  $X$ ,  $|X| \leq 2^{wL(X)\chi(X)}$ .

**Teorema 26.** *Si  $X \in [L]'$  es normal y primero numerable, entonces  $|X| \leq 2^{2^\omega}$ .*

*Demostración.* Sea  $\phi$  una asignación de vecindades. Por hipótesis existe  $Y$  subespacio de  $X$  tal que  $cl_X(\{\phi(y) : y \in Y\}) = X$  y  $Y$  es Lindelöf. Ahora bien, por la desigualdad de Arhangel'skii, tenemos que  $|Y| \leq 2^\omega$ . Así, por el Lema 7,  $wL(X) \leq 2^\omega$ . Finalmente, por la desigualdad de Bell, Ginsburg y Woods, tenemos que  $|X| \leq 2^{wL(X)\chi(X)} = 2^{2^\omega \cdot \omega} = 2^{2^\omega}$ .  $\square$

El Lema 7, junto con la Proposición 9, permiten establecer el siguiente.

**Teorema 27.** *Si  $X \in [L]'$  es primero numerable y  $X$  tiene rango 3-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ .*

*Demostración.* Dado que  $X \in [L]'$  es primero numerable, podemos ver (como en la prueba del Teorema 26) que  $wL(X) \leq 2^\omega$ ; luego, el hecho de que  $X$  tenga rango 3-diagonal, implica (por la Proposición 9) que  $|X| \leq wL(X)^\omega \leq (2^\omega)^\omega = 2^\omega$ .  $\square$

En el resultado siguiente, se omite la condición de ser primero numerable y se debilita la hipótesis sobre el rango, requeridas en el teorema anterior, pero se solicita la propiedad de Baire.

En [6], Ginsburg y Woods demostraron que: *Todo espacio Lindelöf,  $X$ , con rango 1-diagonal, tiene cardinalidad  $\leq 2^\omega$ .*

**Teorema 28.** *Si  $X \in [L]'$  es Baire con rango 2-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ .*

*Demostración.* Veamos que  $wL(X) \leq 2^\omega$ . Consideremos una asignación de vecindades,  $\phi$ , de  $X$ . Puesto que  $X \in [L]'$ , existe  $Y \subseteq X$  tal que  $Y$  es Lindelöf y  $cl_X(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\})$ .

El hecho de que  $X$  tenga rango 2-diagonal, implica que  $X$  tiene rango 1-diagonal; de donde,  $Y$  tiene rango 1-diagonal. Luego, por el resultado de Ginsburg y Woods comentado en el párrafo previo a este teorema, tenemos que  $|Y| \leq 2^\omega$ . Por tanto  $wL(X) \leq 2^\omega$ .

Ahora, por el Lema 6, tenemos que  $d(X) \leq wL(X)^\omega \leq (2^\omega)^\omega = 2^\omega$ . Sea  $D \subseteq X$  denso con  $|D| \leq 2^\omega$ .

Como  $X$  tiene rango 2-diagonal, existe una sucesión  $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$  de cubiertas abiertas de  $X$  con la propiedad de que para cada  $x \in X$ , se cumple que:

$$(1) \quad \{x\} = \bigcap \{St^2(x, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y cada  $x \in X$ , fijamos un punto  $d_x^n \in D \cap St(x, \mathcal{U}_n)$  y definamos  $f : X \rightarrow D$  como sigue:

Para cada  $x \in X$ ,  $f(x) = f_x : \mathbb{N} \rightarrow D$ ; donde  $f_x(n) = d_x^n$ .

Afirmación:  $f$  es inyectiva.

En efecto, sean  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ . Entonces existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $y \notin St(x, \mathcal{U}_m)$ ; luego (por la Proposición 7),  $St(x, \mathcal{U}_m) \cap St(y, \mathcal{U}_m) = \emptyset$ . Luego  $d_x^m \neq d_y^m$ . Así,  $f$  es inyectiva y por tanto  $|X| \leq |D^\mathbb{N}| \leq |D|^\omega \leq (2^\omega)^\omega = 2^\omega$ .  $\square$

Para el siguiente resultado vamos a emplear una desigualdad cardinal dada por Pospíšil: *Para cualquier espacio  $X \in T_2$ ,  $|X| \leq d(X)^{x(X)}$  (vea [7]).*

**Teorema 29.** *Si  $X \in [L]'$  es Baire, primero numerable y tiene rango 1-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ .*

*Demostración.* Veamos que  $wL(X) \leq 2^\omega$ . Consideremos una asignación de vecindades,  $\phi$ , de  $X$ ; puesto que  $X \in [L]'$ , existe  $Y \subseteq X$  tal que  $Y$  es Lindelöf y  $cl_X(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}) = X$ . Ahora, como  $X$  tiene rango 1-diagonal, tenemos que  $Y$  tiene rango 1-diagonal. Luego, por el resultado el resultado de Ginsburg y Woods comentado antes del Teorema 28,  $|Y| \leq 2^\omega$ .

Así, por el Lema 6, tenemos que  $d(X) \leq wL(X)^\omega \leq (2^\omega)^\omega = 2^\omega$ . Sea  $D \subseteq X$  denso con  $|D| \leq 2^\omega$ .

Luego, por la desigualdad de Pospíšil, tenemos que  $|X| \leq d(X)^{x(X)} \leq |D|^\omega \leq (2^\omega)^\omega = 2^\omega$ .  $\square$

**Teorema 30.** *Si  $X \in [L]'$  es Baire, Hausdorff con estrechez numerable y rango 2-diagonal, entonces  $|X| \leq 2^\omega$ .*

*Demostración.* Veamos que  $wL(X) \leq 2^\omega$ . Consideremos una asignación de vecindades,  $\phi$ , de  $X$ . Dado que  $X \in [L]'$ , existe  $Y \subseteq X$  tal que  $Y$  es Lindelöf y  $cl_X(\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\}) = X$ .

Ahora bien, como  $X$  tiene rango 2-diagonal, por el Corolario 14, tenemos que  $\psi_c(X) \leq \omega$ ; luego, por la desigualdad de Hodel, tenemos que  $|X| \leq d(X)^{\psi_c(X)t(x)} \leq 2^\omega$ .  $\square$

Para concluir este trabajo de tesis, vamos a presentar un par de resultados presentados recientemente en [17] por Xuan y Song.

**Teorema 31.** *Si  $X$  es un espacio primero numerable y  $X \in [CCC]^*$ , entonces  $|X| \leq 2^{2^\omega}$ .*

*Demostración.* Primero que nada mostraremos que  $L(X) \leq 2^\omega$ .

Sea  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ , una cubierta abierta de  $X$ . Definamos una signación de vecindades,  $\phi$ , como sigue  $\phi(x) = U_{\alpha_x}$ ; donde  $\alpha_x = \min\{\alpha \in \kappa : x \in U_\alpha\}$ . Como  $X \in [CCC]^*$ , existe  $Y$  subconjunto de  $X$  tal que  $Y$  es  $CCC$  y  $\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\} = X$ . Dado que  $Y$  es  $CCC$  y primero numerable (porque  $X$  es primero numerable y  $Y \subseteq X$ ), de la desigualdad de Hajnal y Juhasz (vea los dos párrafos previos al Teorema 17), tenemos que  $|Y| \leq 2^\omega$ . Luego,  $|\{\phi(y) : y \in Y\}| \leq 2^\omega$ . De donde  $L(X) \leq 2^\omega$  y por la desigualdad de Arhangel'skii, concluimos que  $|X| \leq 2^{2^\omega}$ .  $\square$

**Teorema 32.** *Si  $X$  es un espacio normal, primero numerable y  $X \in [\mathcal{WL}]^*$ , entonces  $|X| \leq 2^{2^\omega}$ .*

*Demostración.* Primero mostraremos que  $L(X) \leq 2^\omega$ .

Sea  $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ , una cubierta abierta de  $X$ . Definamos una signación de vecindades,  $\phi$ , como sigue  $\phi(x) = U_{\alpha_x}$ ; donde  $\alpha_x = \min\{\alpha \in \kappa : x \in U_\alpha\}$ . Como  $X \in [\mathcal{WL}]^*$ , existe  $Y$  subconjunto de  $X$  tal que  $Y$  es débilmente Lindelöf y  $\bigcup\{\phi(y) : y \in Y\} = X$ . Dado que  $Y$  es débilmente Lindelöf y primero numerable. Consideremos a  $Z = cl_X(Y)$ . Claramente  $Z$  es débilmente Lindelöf y primero numerable; luego, por la desigualdad de Bell, Ginsbug y Woods (vea el párrafo previo al Teorema 26), tenemos que  $|Y| \leq 2^\omega$ . Luego,  $|\{\phi(y) : y \in Y\}| \leq 2^\omega$ . De donde  $L(X) \leq 2^\omega$  y por la desigualdad de Arhangel'skii, concluimos que  $|X| \leq 2^{2^\omega}$ .  $\square$

## Conclusiones

En el presente trabajo de tesis hemos trabajado con las nociones de clade dual y clase dual débil (vea Definición 3) para ciertas propiedades topológicas. Hemos visto que por cada propiedad topológica  $\mathcal{P}$ , tenemos los siguientes problemas:

**Problema General 3.** *Sea  $\mathcal{P}$  una propiedad topológica.*

1. *¿Cuál es la clase dual de  $\mathcal{P}$ ,  $[\mathcal{P}]^*$ ?*
2. *¿Quién es la clase dual débil de  $\mathcal{P}$ ,  $[\mathcal{P}]'$ ?*
3. *¿Qué relación guarda  $[\mathcal{P}]$  con  $[\mathcal{P}]^*$  y  $[\mathcal{P}]'$ ?*
4. *¿Cuándo se cumple que  $[\mathcal{P}]^* = [\mathcal{P}]$  (en este caso la propiedad se dice autodual) o  $[\mathcal{P}]' = [\mathcal{P}]$  (diremos, en este caso, que la propiedad es autodual débil)?*
5. *¿Bajo qué condiciones o para qué propiedades  $\mathcal{P}$  se verifica que  $[\mathcal{P}]' = [\mathcal{P}]^*$ ?*

Ahora podemos, además, agregar a la lista previa, el problema de analizar lo que ocurre con las iteraciones (para cada propiedad topológica  $\mathcal{P}$ ). Por poner un ejemplo, ¿Quién es  $[[\textit{compacto}]^*]'$ ? En este trabajo de tesis no hemos abordado resultados de este tipo (iteraciones) y no hemos visto alguno en las referencias empleadas.

Los problemas anteriores, por supuesto, establecen que esta temática no es un área exhausta. Se puede observar (en las referencias empleadas en esta tesis) que las propiedades estudiadas hasta el día de hoy son pocas. Aún más en varias de las referencias empleadas en este trabajo de tesis, hay listas de problemas abiertos; lo cual establece que el material visto aquí, es un área de investigación, lo que abre la posibilidad de estudiarla con miras a realizar estudios de maestría o doctorado.

# Bibliografía

- [1] A. V. Arhangel'skii, R. Z. Buzyakova, *The rank of the diagonal and sbmetrizability*, Commentat. Math. Univ. Caro. 47 (2006) 585-597.
- [2] O. T. Alas, V. V. Tkachuk, R. G. Wilson, *Covering properties and neighbourhood assignments*, Topol. Proc. 30, 1 (2006) 25-38.
- [3] D. Basile, A. Bella, G. J. Ridderbos, *Weak extent, submetrizability and diagonal degrees*, Houston Journal of Mathematics. 40,1 (2011) 585-597.
- [4] J. Casas de la Rosa, *Asignación de vecindades y espacios estrella- $\mathbb{P}$* , Tesis de Maestría, FCFM-BUAP (2014).
- [5] Engelking R., *General topology*, Polish Sci. Publ., Warsaw, 1977.
- [6] J. Ginsburg, R. S. Woods, *A cardinal inequality for topological spaces involving closed discrete sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 64,2 (1977) 585-597.
- [7] R. Hodel, *Cardinal functions I*, in K. Kunen and J. E. Vaughan eds., Handbook of Set Theoretic Topology, North Holland (1984), 1-61.
- [8] Hrbacek K., Jech T., *Introduction to Set Theory*, Marcel Dakker, Inc., Second Edition 1978.
- [9] K. Kuenen, J. Vaughan, *Handbook of set-theoretic topology*, North Holland, 1984.
- [10] J. van Mill, V. V. Tkachuk, R. G. Wilson, *Classes defined by stars and neighbourhood assignments*, Topol. Appl. 154 (2007) 2127-2134.
- [11] E. K. van Douwen, W. Pfeffer, *Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces*, Pacific J. Math. 81 (1979) 371-377.  
(1971), pp 457463.
- [12] J. R. Porter y R. Grant Woods, *Feebly Compact Spaces, Martin's Axiom, and Diamond*, Topology Proceedings 9 (1984), pp 105121.
- [13] W.-F. Xuan., W.-X Shi. *A note on spaces with rank 3-diagonal*, Bull. Aust. Math. Soc. 90 (2014), 521-524.
- [14] W.-F. Xuan., W.-X Shi. *Cardinalities of DCCC normal spaces with a rank 2-diagonal*, Math. Bohem. 141 (2016) 457-461.
- [15] W.-F. Xuan., Y.-K Song. *Weak duals and neighbourhood assignments*, Topol. Appl. 255 (2019) 141-147.
- [16] W.-F. Xuan., Y.-K Song. *Dually properties and cardinal inequalities*, Topol. Appl. 255 (2019) 141-147.
- [17] W.-F. Xuan., Y.-K Song. *Cardinal invariants od dually CCC spaces*, Topol. Appl. 296 (2021) 107683.