



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA**

*FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS*

***EL HIPERESPACIO DE LOS CONJUNTOS
TOTALMENTE DISCONEXOS***

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

M.C. VICENTE SÁNCHEZ GUTIÉRREZ

DIRECTORES DE TESIS:

***DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
DRA. PATRICIA PELLICER COVARRUBIAS***

PUEBLA, PUE.

DICIEMBRE 2019

Índice

1	Conceptos y resultados básicos	1
1.1	Elementos de topología	1
2	El hiperespacio de los conjuntos totalmente desconexos	7
2.1	Generalidades	7
2.2	Compacidad	8
2.3	Compacidad local	9
2.4	Conexidad	10
2.5	Conexidad local	10
2.6	Conexidad por trayectorias	15
2.7	Conclusiones	33
	Referencias	34
	Índice alfabético	36

Capítulo 1

Conceptos y resultados básicos

En este capítulo exponemos algunas nociones y resultados básicos de la topología general, y de la teoría de los continuos y sus hiperespacios, los cuales tienen como objetivo facilitar el desarrollo del capítulo dos.

1.1 Elementos de topología

Notación. El interior y la cerradura de un subconjunto A de un espacio topológico X , se denotan por $\text{int}(A)$ y \bar{A} , respectivamente. El complemento de A en X se denota por $X - A$. Si A y B son espacios topológicos, entonces $A \approx B$ denota que A es homeomorfo a B . Si \mathcal{A} es una colección de conjuntos, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ y $\bigcap \mathcal{A}$ denotan la unión y la intersección de los elementos de la familia \mathcal{A} , respectivamente. La cardinalidad de A es $|A|$. Si X es un espacio métrico y A es acotado, $\text{diám}(A)$ denota el diámetro del conjunto A ; y si $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, entonces $B(x, \varepsilon)$ denota la bola en X con centro en el punto x y de radio ε . Los símbolos \mathbb{N} y \mathbb{R} denotan los conjuntos de los números naturales $(1, 2, 3, \dots)$ y números reales, respectivamente. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en un espacio topológico X y x es un punto de X , entonces $x_n \rightarrow x$ significa que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al punto x . Por otro lado, cuando escribimos, un espacio X significa que X es un espacio topológico.

1.1 Definición. El **límite inferior** y el **límite superior** de una sucesión de conjuntos, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, en un espacio X , denotados por $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$ respectivamente, se definen como sigue:

$\liminf A_n = \{x \in X : \text{para cada conjunto abierto } U \text{ en } X \text{ que contiene al punto } x, \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \geq N\}.$

$\limsup A_n = \{x \in X : \text{para cada conjunto abierto } U \text{ en } X \text{ que contiene al punto } x, \text{ existe un subconjunto infinito, } J, \text{ de } \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \in J\}.$

1.2 Definición. Decimos que el **límite** de una sucesión de conjuntos, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, en un espacio X existe y es igual al conjunto A si $\liminf A_n = A = \limsup A_n$. Para indicar esto escribimos $\lim A_n = A$.

1.3 Proposición. Dada una sucesión, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de conjuntos en un espacio X , se tiene que:

- (a) $\liminf A_n \subseteq \overline{\limsup A_n}$;
- (b) $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$ son conjuntos cerrados en X y;
- (c) Si X es secuencialmente compacto y cada A_n es no vacío, entonces $\limsup A_n$ es no vacío.

DEMOSTRACIÓN. (a) Sean $x \in \liminf A_n$ y U un conjunto abierto en X que contiene a x . Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$. Tomando $J = \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$, se justifica que $x \in \limsup A_n$.

(b) Veamos que $\overline{\limsup A_n} \subseteq \limsup A_n$.

Sea $x \in \overline{\limsup A_n}$ y U un conjunto abierto en X que contiene a x . Se sigue que $U \cap (\limsup A_n) \neq \emptyset$, de manera que podemos tomar un punto $z \in (\limsup A_n) \cap U$. Luego, existe $J \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in J$. Por tanto $x \in \limsup A_n$.

Ahora veamos que $\overline{\liminf A_n} \subseteq \liminf A_n$.

Sea $x \in \overline{\liminf A_n}$ y U un conjunto abierto en X que contiene a x . Se sigue que $U \cap (\liminf A_n) \neq \emptyset$, así podemos tomar un punto $z \in (\liminf A_n) \cap U$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$. Por tanto $x \in \liminf A_n$.

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijamos un punto $a_n \in A_n$. Por la hipótesis sobre X , existen una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y un punto $x \in X$ tales que $a_{n_k} \rightarrow x$. Ahora, dado un conjunto abierto, U , en X existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_k} \in U$ para toda $k \geq K$. Considerando el conjunto $J = \{n_k : k \geq K\}$, se justifica que $x \in \limsup A_n$. \square

1.4 Teorema. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados, no vacíos, de un espacio métrico compacto X y x un punto en X . Se tiene que:

- (a) $x \in \liminf A_n$ si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $x_n \rightarrow x$ y $x_n \in A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $x \in \limsup A_n$ si, y sólo si, existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \dots$ y existen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tales que $x_{n_k} \rightarrow x$.

DEMOSTRACIÓN. (a) supongamos que $x \in \liminf A_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos un punto $x_n \in A_n$ de tal forma que $d(x, x_n) = \min\{d(x, y) : y \in A_n\}$, donde d es la métrica de X , tal punto x_n existe por la compacidad del conjunto A_n . Veamos que $x_n \rightarrow x$. Para esto fijemos $\varepsilon > 0$. Como $x \in \liminf A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. De modo que, para cada $n \geq N$, existe $a_n \in A_n$ tal que $d(x, a_n) < \varepsilon$. Note que $d(x, x_n) \leq d(x, a_n) < \varepsilon$, para cada $n \geq N$. Así, $x_n \rightarrow x$.

Recíprocamente, supongamos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en X tal que $x_n \rightarrow x$ y $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$, para cada $n \geq N$. Se sigue que $x_n \in A_n \cap B(x, \varepsilon)$ para cada $n \geq N$. Así, $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$. Por lo tanto, $x \in \liminf A_n$.

(b) Supongamos que $x \in \limsup A_n$. Existe un subconjunto infinito, J_1 , de \mathbb{N} tal que para todo $n \in J_1$, $B(x, 1) \cap A_n \neq \emptyset$. Fijemos $n_1 \in J_1$ y un punto $x_{n_1} \in B(x, 1) \cap A_{n_1}$. También, existe un subconjunto infinito, J_2 , de \mathbb{N} tal que, para todo $n \in J_2$, $B(x, \frac{1}{2}) \cap A_n \neq \emptyset$. Fijamos $n_2 \in J_2$ tal que $n_2 > n_1$ y tomamos un punto $x_{n_2} \in B(x, \frac{1}{2}) \cap A_{n_2}$.

De esta manera, inductivamente, se determina una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, y para cada $k \in \mathbb{N}$, el punto $x_{n_k} \in B(x, \frac{1}{k}) \cap A_{n_k}$. Se tiene que $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, $x_{n_k} \rightarrow x$.

Recíprocamente, supongamos que existen una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \dots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tales que $x_{n_k} \rightarrow x$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_{n_k}) < \varepsilon$ para todo $k \geq K$. Denotamos $J = \{n_k : k \geq K\}$. Notamos que J es infinito y $B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in J$. Así, $x \in \limsup A_n$. \square

1.5 Nota. Las pruebas de los recíprocos en (a) y (b) del Teorema 1.4 no requieren que el espacio sea métrico compacto, ni que los conjuntos de la sucesión sean cerrados. Es decir, en general, la existencia de sucesiones de puntos con las propiedades indicadas en ese teorema implica que los puntos límite pertenecen al límite inferior y límite superior, respectivamente.

1.6 Teorema. Sean $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de conjuntos en un espacio X y A y B subconjuntos de X , tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$. Se tiene que

- (a) $\lim (A_n \cup B_n) = A \cup B$;
- (b) Si existe un subconjunto infinito J de \mathbb{N} tal que $A_n \subseteq B_n$, para todo $n \in J$, entonces $A \subseteq B$;
- (c) Si X es secuencialmente compacto y existe un subconjunto infinito J de \mathbb{N} tal que $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para todo $n \in J$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. (a) Por la Proposición 1.3 (a), basta demostrar que $\limsup (A_n \cup B_n) \subseteq A \cup B \subseteq \liminf (A_n \cup B_n)$.

Sea $x \in X - (A \cup B)$. Se tiene que $x \notin \limsup A_n$ y $x \notin \limsup B_n$. Así, existen conjuntos abiertos, U y V , en X que contienen al punto x y existen enteros positivos, N_1 y N_2 tales que $U \cap A_n = \emptyset$, para cada $n \geq N_1$, y $V \cap B_n = \emptyset$, para cada $n \geq N_2$. Denotemos $W = U \cap V$ y $N = \max\{N_1, N_2\}$. Es claro que W es un conjunto abierto en X que contiene a x y $W \cap (A_n \cup B_n) = \emptyset$, para cada $n \geq N$. Así, $x \notin \limsup (A_n \cup B_n)$. Esto demuestra que $\limsup (A_n \cup B_n) \subseteq A \cup B$.

2

Ahora, fijemos un punto $x \in A \cup B$ y un conjunto abierto U en X que contiene a x . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in A$. Se tiene que $x \in \liminf A_n$, así existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$. Luego $U \cap (A_n \cup B_n) \neq \emptyset$, para todo $n \geq N$. Esto prueba que $x \in \liminf (A_n \cup B_n)$, con lo cual (a) está demostrado.

(b) Sean $x \in A$ y U un conjunto abierto en X que contiene a x . Se tiene que $x \in \liminf A_n$. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Denotemos $J' = J \cap \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$. Claro que si $n \in J'$, entonces $U \cap A_n \neq \emptyset$. Dado que $A_n \subseteq B_n$ para todo $n \in J$, se sigue que $U \cap B_n \neq \emptyset$ para todo $n \in J'$. Como J' es infinito, se obtiene que $x \in \limsup B_n$. Así, $x \in B$. Por lo tanto $A \subseteq B$.

(c) Para cada $n \in J$, fijamos un punto $x_n \in A_n \cap B_n$. Dado que X es secuencialmente compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n \in J}$ tiene una subsucesión, $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, que converge a un punto $x \in X$. Luego, por el Teorema 1.4 (b), $x \in \limsup A_n = A$ y $x \in \limsup B_n = B$ (véase también la Nota 1.5). Así, $x \in A \cap B$. \square

1.7 Notación. Para un espacio X , denotamos

$$\mathcal{CL}(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado y no vacío}\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(X) &= \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \text{ es compacto}\}, \\ \mathcal{C}(X) &= \{A \in \mathcal{K}(X) : A \text{ es conexo}\},\end{aligned}$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{F}_n(X) = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\},$$

además denotamos $\mathcal{F}(X) = \bigcup \{\mathcal{F}_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$.

1.8 Notación. Para un subconjunto U de un espacio X , denotamos

$$U^+ = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \subseteq U\} \text{ y } U^- = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \cap U \neq \emptyset\}.$$

Dado un espacio X , la **topología de Vietoris** en $\mathcal{CL}(X)$ es la que tiene como subbase a la colección

$$\{U^+ : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{U^- : U \text{ es abierto en } X\}.$$

Con esta topología $\mathcal{CL}(X)$ es denominado el **hiperespacio de los subconjuntos cerrados** del espacio X .

1.9 Notación. Para una colección finita de subconjuntos de un espacio X , digamos E_1, \dots, E_n , denotamos $\langle E_1, \dots, E_n \rangle = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n E_i \text{ y } A \cap E_i \neq \emptyset \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}\}$.

También denotemos $\beta_V = \{\langle W_1, \dots, W_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } W_i \text{ es abierto en } X \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Una prueba del siguiente Teorema puede consultarla en [9, Teorema 1.2].

1.10 Teorema. Para un espacio X , la colección β_V es una base para la topología de Vietoris del hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$.

Una prueba del siguiente resultado puede consultarla en [18, Proposición 2.4].

1.11 Proposición. Si X es un espacio T_1 , entonces $\mathcal{F}(X)$ es un subconjunto denso de $\mathcal{CL}(X)$.

1.12 Teorema. Para cualquier espacio X , si \mathcal{A} es un subespacio conexo de $\mathcal{CL}(X)$ y existe $A \in \mathcal{A}$ tal que A es conexo, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es conexo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\bigcup \mathcal{A}$ no es conexo. Consideremos U y V , conjuntos no vacíos, en X tales que $\bigcup \mathcal{A} = U \cup V$, $\overline{U} \cap V = \emptyset$ y $\overline{V} \cap U = \emptyset$. Dado que A es conexo se tiene que $A \subseteq U$ o $A \subseteq V$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \subseteq U$.

Sean $\mathcal{U} = \{B \in \mathcal{A} : B \subseteq U\}$ y $\mathcal{V} = \{B \in \mathcal{A} : B \cap V \neq \emptyset\}$. Es claro que $\mathcal{A} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ y, como $U \cap V = \emptyset$, también es claro que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Además, notemos que $A \in \mathcal{U}$, y como $V \neq \emptyset$ se obtiene que $\mathcal{V} \neq \emptyset$. Ahora, si existe $E \in \overline{\mathcal{U}} \cap \mathcal{V}$, entonces $E \cap V \neq \emptyset$. Se sigue que $E \notin \overline{\mathcal{U}}$ ya que $\overline{\mathcal{U}} \cap V = \emptyset$. Así $E \cap (X - \overline{\mathcal{U}}) \neq \emptyset$, equivalentemente $E \in (X - \overline{\mathcal{U}})^-$. Como $E \in \overline{\mathcal{U}}$, se tiene que $(X - \overline{\mathcal{U}})^- \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Sea $F \in (X - \overline{\mathcal{U}})^- \cap \mathcal{U}$. Luego, $F \cap (X - \overline{\mathcal{U}}) \neq \emptyset$ y $F \subseteq U$ lo cual es una contradicción. Esto prueba que $\overline{\mathcal{U}} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Por otro lado, si existe $E \in \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{V}}$, entonces $E \subseteq U$. Lo que implica que $E \cap \overline{\mathcal{V}} = \emptyset$, equivalentemente $E \subseteq (X - \overline{\mathcal{V}})$. Se sigue que $E \in (X - \overline{\mathcal{V}})^+$. Como $E \in \overline{\mathcal{V}}$ se tiene que $(X - \overline{\mathcal{V}})^+ \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Sea $D \in (X - \overline{\mathcal{V}})^+ \cap \mathcal{V}$. Tenemos que $D \subseteq (X - \overline{\mathcal{V}})$ y $D \cap V \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{V}} = \emptyset$.

Con todo lo anterior tenemos que \mathcal{A} no es conexo. Esta contradicción prueba el teorema. \square

1.13 Lema. Sea X un espacio Hausdorff. Si \mathcal{A} es un subconjunto conexo y compacto de $\mathcal{K}(X)$ y $S \in \mathcal{A}$, entonces cada componente de $\bigcup \mathcal{A}$ interseca a S .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe una componente A de $\bigcup \mathcal{A}$ tal que $S \cap A = \emptyset$. Dado que $\bigcup \mathcal{A}$ es compacto (vea [18, Teorema 2.5]) y X es Hausdorff, por [9, Teorema 12.9, pag 101] podemos considerar dos subconjuntos cerrados ajenos, K y L , de $\bigcup \mathcal{A}$ tales que $S \subset K$, $A \subset L$ y $K \cup L = \bigcup \mathcal{A}$. Definamos $\mathcal{K} = K^+ \cap \mathcal{A}$ y $\mathcal{L} = L^- \cap \mathcal{A}$. Observe que \mathcal{K} y \mathcal{L} son dos subconjuntos cerrados ajenos y no vacíos de \mathcal{A} cuya unión es \mathcal{A} , lo cual contradice la conexidad de \mathcal{A} . \square

1.14 Teorema. Un espacio X es regular si, y sólo si, $\mathcal{CL}(X)$ es un espacio Hausdorff y X es un espacio T_1 .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X es un espacio regular. Sean $A, B \in \mathcal{CL}(X)$ con $A \neq B$. Sin perder generalidad supongamos que $A \not\subseteq B$. Fijemos un punto $x \in A - B$. Consideremos abiertos ajenos, U y V , en X tales que $x \in U$ y $B \subseteq V$. Se tiene que U^- y V^+ son abiertos en $\mathcal{CL}(X)$, $A \in U^-$, $B \in V^+$ y $U^- \cap V^+ = \emptyset$ ya que $U \cap V = \emptyset$. En consecuencia, $\mathcal{CL}(X)$ es un espacio Hausdorff.

Recíprocamente, supongamos que X es un espacio T_1 y que $\mathcal{CL}(X)$ es un espacio Hausdorff. Sean A un subespacio cerrado de X y $x \in X - A$. Denotemos $B = A \cup \{x\}$. Se tiene que A y B son elementos de $\mathcal{CL}(X)$ y $A \neq B$. Por hipótesis, existen abiertos básicos, $\mathcal{U} = \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ y $\mathcal{V} = \langle V_1, \dots, V_m \rangle$, en $\mathcal{CL}(X)$ tales que $A \in \mathcal{U}$, $B \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Observemos que $x \notin (U_1 \cup \dots \cup U_n)$ ya que $B \notin \mathcal{U}$. Luego, dado que $A \notin \mathcal{V}$, existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $A \cap V_j = \emptyset$. Se sigue que $x \in V_j$. Denotemos $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$ y $V = \bigcap \{V_i : i \in \{1, \dots, m\} \text{ y } A \cap V_i = \emptyset\}$. Es claro que U y V son abiertos en X , $A \subseteq U$ y $x \in V$. Veamos que $U \cap V = \emptyset$. Para esto, supongamos que existe un punto $y \in U \cap V$ y denotemos $E = A \cup \{y\}$. Se tiene que $E \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto U y V son ajenos. Así X es un espacio regular. \square

Una prueba del siguiente resultado puede consultarla en [14, Lema 1].

1.15 Teorema. Sean X un espacio métrico compacto y C_1, \dots, C_n subespacios conexos de X . Si $m \geq n$, entonces $\langle C_1, \dots, C_n \rangle \cap F_m(X)$ es conexo.

Una prueba del siguiente resultado puede consultarla en [3, Teorema 1.3.6].

1.16 Teorema. Sean X un espacio y D un subconjunto denso en X . Si A es abierto en X , entonces $A \cap D$ es denso en A .

1.17 Definición. Un **continuo** es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Decimos que A es un **subcontinuo** de un continuo X si A es un subconjunto de X y A es un continuo.

1.18 Definición. Un **arco ordenado** en el hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$ de un continuo X es una función continua, $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{CL}(X)$, tal que si $s < t$, entonces $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

1.19 Nota. Si $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{CL}(X)$ es un arco ordenado y denotamos $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$, decimos que α es un arco ordenado desde A hasta B en $\mathcal{CL}(X)$.

1.20 Definición. Dado un punto p en un espacio X , la **casi componente conexa** de p en X , la cual denotamos por $Q(p)$, es la intersección de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de X que contienen a p .

1.21 Definición. Un espacio es **totalmente desconexo** si no tiene subconjuntos conexos con más de un punto.

1.22 Teorema. Si X es un espacio Hausdorff y A_1, \dots, A_n son subespacios compactos totalmente desconexos de X , entonces $A_1 \cup \dots \cup A_n$ es un subespacio totalmente desconexo de X .

DEMOSTRACIÓN. Sean $n = 2$ y A_1, A_2 como en el enunciado. Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ es claro que $A_1 \cup A_2$ es totalmente desconexo ya que A_1, A_2 son cerrados ajenos en X . En lo que sigue, supongamos que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Sea K una componente de $A_1 \cup A_2$ y supongamos que $|K| > 1$. Notemos que K es un subespacio Hausdorff, compacto y conexo de X . Además $K \cap (A_1 - A_2) \neq \emptyset$ y $K \cap (A_2 - A_1) \neq \emptyset$. Fijemos un punto $p \in K \cap (A_1 - A_2)$. Existe un arco ordenado, $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(K)$, desde $\{p\}$ hasta K (vea [8, Teorema 5] o [9, Teorema 15.3]). Observemos que $\alpha(0) = \{p\} \in \langle X - A_2 \rangle$. Luego, por continuidad existe $t > 0$ tal que $\alpha(t) \in \langle X - A_2 \rangle$. Se sigue que $\alpha(t) \subseteq A_1$ y $\alpha(t)$ es un conexo con más de un punto lo cual contradice el hecho de que A_1 es totalmente desconexo. Por lo tanto $A_1 \cup A_2$ es totalmente desconexo.

Ahora, supongamos que se cumple para $n = k$. Veamos que se cumple para $n = k + 1$. Sean A_1, \dots, A_k, A_{k+1} como en el enunciado. Por lo supuesto para $n = k$, tenemos que $A_1 \cup \dots \cup A_k$ es un subespacio totalmente desconexo de X . Luego, por lo probado en el caso $n = 2$, tenemos que $A_1 \cup \dots \cup A_{k+1}$ es totalmente desconexo. \square

1.23 Definición. Sean X un espacio y p un punto en X . Decimos que X es **conexo en pequeño** en el punto p si cada vecindad de p contiene una vecindad conexa de p .

1.24 Definición. Un continuo X es **unicohérente** si para cualesquiera A y B subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$ se tiene que $A \cap B$ es conexo. Un continuo X es hereditariamente unicohérente si cualquier subcontinuo de X es unicohérente.

1.25 Definición. Dado un espacio X , decimos que $\dim(X) = 0$ si la topología de X tiene una base cuyos elementos son abiertos y cerrados en la topología.

1.26 Definición. Un espacio X es un espacio **de Lindelöf** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.

Una prueba de la siguiente Proposición la puede consultar en [22, Corolario 5.5].

1.27 Proposición. Si X es un continuo no degenerado, entonces X contiene un subcontinuo propio no degenerado. Además, si A es un subcontinuo propio de X y U es un subconjunto abierto de X que contiene a A , entonces existe un subcontinuo B de X tal que $A \subseteq B \subseteq U$ y $A \neq B$.

Capítulo 2

El hiperespacio de los conjuntos totalmente desconexos

En este capítulo presentamos nuestro estudio del hiperespacio de los conjuntos totalmente desconexos de un espacio topológico. Particularmente exponemos con detalle la compacidad, conexidad, conexidad local y conexidad por trayectorias de este hiperespacio.

2.1 Generalidades

En esta parte definimos el hiperespacio principal de este trabajo: el hiperespacio de los conjuntos totalmente desconexos y demostramos resultados básicos referentes a la estructura topológica de este hiperespacio.

2.1 Notación. Dado un espacio X , denotamos por $\mathcal{TD}(X)$ a la colección de los subespacios de X que son cerrados, no vacíos y totalmente desconexos, es decir,

$$\mathcal{TD}(X) = \{A \in \mathcal{CL}(X) : A \text{ es totalmente desconexo}\}.$$

2.2 Proposición. Un espacio X es T_1 si, y sólo si, $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{TD}(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X es un espacio T_1 . Es claro que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{TD}(X)$. Ahora, consideremos un elemento $A \in \mathcal{F}(X) - \mathcal{F}_1(X)$. Fijemos un punto $x \in A$ y observemos que $\{x\}$ y $A - \{x\}$ son dos cerrados, ajenos y no vacíos cuya unión es A . Así, A es totalmente desconexo. Se sigue que $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{TD}(X)$.

Por otro lado, si X es un espacio tal que $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{TD}(X)$, entonces para cada $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es cerrado en X ya que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{F}(X)$. En consecuencia, X es un espacio T_1 . \square

2.3 Proposición. Para cualquier espacio no degenerado X , se tiene que $\mathcal{TD}(X) \neq \mathcal{F}_1(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{F}_1(X) = \mathcal{TD}(X)$. Se sigue que $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{CL}(X)$, en consecuencia X es un espacio T_1 . Luego, por la Proposición 2.2, $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{TD}(X)$. Por lo supuesto tenemos que $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{F}_1(X)$, lo cual implica que $|X| = 1$, es decir que X es degenerado. \square

Observemos que, por las Proposiciones 2.2 y 2.3, se tiene que $\mathcal{TD}(X) = \mathcal{F}_1(X)$ si, y sólo si, $|X| = 1$.

2.4 Observación. Por la Proposición 2.2, notamos que si X es un espacio T_1 , entonces $\mathcal{TD}(X)$ es un subconjunto denso de $\mathcal{CL}(X)$ (vea la Proposición 1.11).

2.5 Proposición. Si X es un espacio de Hausdorff compacto, conexo y no degenerado, entonces $\text{int}_{\mathcal{CL}(X)}(\mathcal{TD}(X)) = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un conjunto abierto básico en $\mathcal{CL}(X)$, digamos $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$, donde cada U_i es abierto en X . Fijemos un punto $x \in U_1$. Luego, por la Proposición 1.27, existe un subespacio compacto y conexo, B_0 , de X tal que $\{x\} \subsetneq B_0 \subseteq U_1$. Notemos que $B_0 \in \mathcal{CL}(X) - \mathcal{TD}(X)$. Para cada $i \in \{2, \dots, n\}$, fijemos un punto $x_i \in U_i$. Sea $B = B_0 \cup \{x_2, \dots, x_n\}$. Es claro que $B \in \mathcal{CL}(X) - \mathcal{TD}(X)$ y que $B \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$. Así, $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ no está contenido en $\mathcal{TD}(X)$, por lo cual $\text{int}_{\mathcal{CL}(X)}(\mathcal{TD}(X)) = \emptyset$. \square

2.6 Proposición. Sea X un espacio regular. Se tiene que $\text{int}_{\mathcal{CL}(X)}(\mathcal{TD}(X)) \neq \emptyset$ si, y sólo si, X tiene un subespacio abierto, no vacío y totalmente desconexo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\text{int}_{\mathcal{CL}(X)}(\mathcal{TD}(X)) \neq \emptyset$. Consideremos abiertos, U_1, \dots, U_n , en X tales que $\emptyset \neq \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq \mathcal{TD}(X)$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, fijemos un punto $x_i \in U_i$ y fijemos un subespacio abierto V_i de X tal que $x_i \in V_i \subseteq \overline{V_i} \subset U_i$. Veamos que cada V_i satisface la conclusión. Para esto supongamos que existe $j \in \{1, \dots, n\}$ y A un subespacio de X tal que $A \subseteq V_j$ y A no es totalmente desconexo. Luego, \overline{A} no es totalmente desconexo. Sea $B = \overline{A} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$. Se tiene que $B \in \mathcal{CL}(X) \cap \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ y $B \notin \mathcal{TD}(X)$. Esta contradicción prueba que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, V_i es un subespacio abierto, no vacío y totalmente desconexo.

Ahora, supongamos que X tiene un subespacio abierto, no vacío y totalmente desconexo, digamos U . Sea $x \in U$, es claro que $\{x\} \in \langle U \rangle \subseteq \mathcal{TD}(X)$. \square

2.2 Compacidad

En esta sección nosotros probamos que en general la compacidad del hiperespacio $\mathcal{TD}(X)$ implica la compacidad del espacio X y notamos que la compacidad de X no implica la compacidad del hiperespacio $\mathcal{TD}(X)$. También probamos que cualquier espacio Hausdorff que contenga un subconjunto conexo no degenerado tendrá su hiperespacio de los conjuntos totalmente desconexos no compacto.

2.7 Proposición. Si X es un espacio T_1 y $\mathcal{H}(X)$ es un subespacio compacto de $\mathcal{CL}(X)$ que contiene a $\mathcal{F}_1(X)$, entonces X es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{H}(X)$ es compacto y consideremos una cubierta abierta, \mathcal{U} , de X . Denotemos $\mathcal{U}^- = \{U^- \cap \mathcal{H}(X) : U \in \mathcal{U}\}$. Dados $A \in \mathcal{H}(X)$ y $a \in A$, existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que $a \in U$, así $A \cap U \neq \emptyset$. Se sigue que \mathcal{U}^- es una cubierta abierta de $\mathcal{H}(X)$. Ahora, por la compacidad de $\mathcal{H}(X)$, existen $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ tales que $\mathcal{H}(X) = [U_1^- \cap \mathcal{H}(X)] \cup \dots \cup [U_n^- \cap \mathcal{H}(X)]$.

Observemos que si $x \in X$, entonces $\{x\} \in \mathcal{H}(X)$. Luego, $\{x\} \in U_j^- \cap \mathcal{H}(X)$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$. Se sigue que $\{x\} \cap U_j \neq \emptyset$, por lo cual $x \in U_j$. Esto prueba que $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$. Así, la colección $\{U_1, \dots, U_n\}$ es una subcubierta finita de \mathcal{U} . Por lo tanto X es compacto. \square

2.8 Corolario. Si X es un espacio T_1 y $\mathcal{TD}(X)$ es compacto, entonces X es compacto.

2.9 Proposición. Si X es un espacio Hausdorff y $\mathcal{TD}(X)$ es compacto, entonces X es totalmente desconexo.

DEMOSTRACIÓN. Dado que $\mathcal{TD}(X)$ es compacto, por el Corolario 2.8, tenemos que X es compacto. En consecuencia X es un espacio normal, de donde $\mathcal{CL}(X)$ es un espacio Hausdorff (véase el Teorema 1.14). Ahora, por la compacidad de $\mathcal{TD}(X)$ tenemos que $\mathcal{TD}(X)$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$. Como $\mathcal{TD}(X)$ es denso en $\mathcal{CL}(X)$ (Observación 2.4) se tiene que $\mathcal{TD}(X) = \mathcal{CL}(X)$. Así $X \in \mathcal{TD}(X)$. Por lo tanto X es totalmente desconexo. \square

2.10 Corolario. Si X es un espacio Hausdorff que contiene un subconjunto conexo no degenerado, entonces $\mathcal{TD}(X)$ no es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{TD}(X)$ es compacto. Luego, por la Proposición 2.9 se tiene que X es totalmente desconexo, así X no contiene un conjunto conexo no degenerado. \square

2.11 Observación. El corolario 2.10 muestra que en general la compacidad de un espacio X no implica la compacidad del hiperespacio $\mathcal{TD}(X)$. En particular, si X es un espacio no degenerado, Hausdorff, compacto y conexo, entonces $\mathcal{TD}(X)$ no es compacto.

2.12 Corolario. Sea X un espacio Hausdorff, entonces $\mathcal{TD}(X)$ es compacto si y solo si X es compacto y totalmente desconexo.

DEMOSTRACIÓN. Que la compacidad de $\mathcal{TD}(X)$ implica la compacidad de X es el Corolario 2.8.

Ahora, supongamos que X es compacto y totalmente desconexo. Notemos que dado $A \in \mathcal{CL}(X)$ se tiene que A es totalmente desconexo, es decir, $\mathcal{CL}(X) = \mathcal{TD}(X)$. Por [18, Teorema 4.2], sabemos que $\mathcal{CL}(X)$ es compacto. Por lo tanto $\mathcal{TD}(X)$ es compacto. \square

2.3 Compacidad local

En esta sección probamos que si X es un espacio Hausdorff y $\mathcal{TD}(X)$ es localmente compacto, entonces X es localmente compacto. En la prueba del siguiente Teorema, para un espacio Y y $U \subseteq Y$, $\text{Cl}_Y(U)$ denota la cerradura de U en Y , es decir, $\text{Cl}_Y(U) = \bar{U} \cap Y$.

2.13 Teorema. Si X es un espacio Hausdorff y $\mathcal{TD}(X)$ es localmente compacto en $\{x\}$, entonces X es localmente compacto en x .

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis existe un subconjunto abierto \mathcal{U} de $\mathcal{CL}(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U}$ y $\text{Cl}_{\mathcal{TD}(X)}(\mathcal{U})$ es compacto. Luego, existen subconjuntos abiertos de X , digamos V_1, \dots, V_n , tales que $\{x\} \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle \cap \mathcal{TD}(X) \subseteq \mathcal{U}$. Denotemos $V = V_1 \cap \dots \cap V_n$. Notemos que $\{x\} \in \langle V \rangle \cap \mathcal{TD}(X) \subseteq \mathcal{U}$. Como $\mathcal{F}_1(X)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{CL}(X)$ y $\mathcal{F}_1(X) \subseteq \mathcal{TD}(X)$ (vea la Proposición 2.2) tenemos que $\text{Cl}_{\mathcal{TD}(X)}(\mathcal{F}_1(V)) = \text{Cl}_{\mathcal{CL}(X)}(\mathcal{F}_1(V))$. Dado que $\mathcal{F}_1(V) \subseteq \langle V \rangle \cap \mathcal{TD}(X)$ y $\text{Cl}_{\mathcal{TD}(X)}(\mathcal{F}_1(V)) = \text{Cl}_{\mathcal{CL}(X)}(\mathcal{F}_1(V))$ se tiene que $\text{Cl}_{\mathcal{CL}(X)}(\mathcal{F}_1(V)) \subseteq \text{Cl}_{\mathcal{TD}(X)}(\mathcal{U})$. Ahora, por la compacidad de $\text{Cl}_{\mathcal{TD}(X)}(\mathcal{U})$ tenemos que $\text{Cl}_{\mathcal{CL}(X)}(\mathcal{F}_1(V))$ es compacto. Es claro que $\text{Cl}_{\mathcal{CL}(X)}(\mathcal{F}_1(V)) = \mathcal{F}_1(\text{Cl}_X(V))$ y $\mathcal{F}_1(\text{Cl}_X(V))$ es homeomorfo a $\text{Cl}_X(V)$. Así, V es un subconjunto abierto de X que contiene a x tal que $\text{Cl}_X(V)$ es compacto. \square

2.14 Corolario. Si X es un espacio Hausdorff y $\mathcal{TD}(X)$ es localmente compacto, entonces X es localmente compacto.

2.4 Conexidad

En esta sección presentamos la relación que hay entre la conexidad de un espacio X y la conexidad de su hiperespacio $\mathcal{TD}(X)$.

2.15 Proposición. Sean X un espacio T_1 y $\mathcal{H}(X)$ un subespacio de $\mathcal{CL}(X)$ que contiene a $\mathcal{F}(X)$. Entonces X es conexo si, y sólo si, $\mathcal{H}(X)$ es conexo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X es conexo. Notemos que $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{H}(X) \subseteq \mathcal{CL}(X)$. Además, sabemos que $\overline{\mathcal{F}(X)} = \mathcal{CL}(X)$ (vea la Proposición 1.11). Luego, por la conexidad de X se tiene que $\mathcal{F}(X)$ es conexo (vea [18, Teorema 4.10]). Se sigue que $\mathcal{H}(X)$ es conexo.

Para mostrar el recíproco, supongamos que X no es conexo y consideremos abiertos ajenos no vacíos, U y V , en X tales que $X = U \cup V$. Notemos que para cada $A \in \mathcal{H}(X)$, se tiene que $A \subseteq U$ o $A \cap V \neq \emptyset$, es decir, $A \in U^+$ o $A \in V^-$. Se sigue que $\mathcal{H}(X) = (U^+ \cup V^-) \cap \mathcal{H}(X) = [U^+ \cap \mathcal{H}(X)] \cup [V^- \cap \mathcal{H}(X)]$. Fijemos un punto $p \in U$ y un punto $q \in V$. Luego, $\{p\} \in U^+ \cap \mathcal{H}(X)$ y $\{q\} \in V^- \cap \mathcal{H}(X)$. Así, $U^+ \cap \mathcal{H}(X)$ y $V^- \cap \mathcal{H}(X)$ son abiertos no vacíos en $\mathcal{H}(X)$. Ahora, puesto que $U \cap V = \emptyset$ se tiene que $[U^+ \cap \mathcal{H}(X)] \cap [V^- \cap \mathcal{H}(X)] = \emptyset$. Esto prueba que si X no es conexo, entonces $\mathcal{H}(X)$ tampoco lo es. \square

2.16 Corolario. Si X es un espacio T_1 , entonces $\mathcal{TD}(X)$ es conexo si y sólo si X es conexo.

Los siguientes ejemplos muestran que la hipótesis de que el espacio X sea T_1 , en el Corolario 2.16, no se puede omitir.

2.17 Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ con topología $\tau = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, X, \emptyset\}$. Notemos que X no es T_1 , es conexo y $\mathcal{TD}(X) = \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$. Además si $U = \{1, 3\}$ y $V = \{1, 2\}$, entonces $\{3\} \in \langle U \rangle$, $\{2\} \in \langle X, V \rangle$, $\mathcal{TD}(X) \subseteq \langle U \rangle \cup \langle X, V \rangle$ y $(\langle U \rangle \cap \mathcal{TD}(X)) \cap (\langle X, V \rangle \cap \mathcal{TD}(X)) = \emptyset$. Así la conexidad de X no implica (en general) la conexidad del hiperespacio $\mathcal{TD}(X)$.

2.18 Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ con topología $\tau = \{\{1\}, \{2, 3\}, X, \emptyset\}$. Notemos que X no es T_1 , no es conexo y $\mathcal{TD}(X) = \{\{1\}\}$. Se concluye que la conexidad de $\mathcal{TD}(X)$ no implica (en general) la conexidad de X .

2.19 Observación. Si Y es un subespacio de un espacio totalmente desconexo X , entonces Y es totalmente desconexo. Se sigue que un espacio X es totalmente desconexo si, y sólo si, $\mathcal{TD}(X) = \mathcal{CL}(X)$.

2.5 Conexidad local

En esta sección probamos que, en los espacios Hausdorff compactos, la conexidad local de un espacio X es equivalente a la conexidad local de su hiperespacio $\mathcal{TD}(X)$. Para esto, primero probamos que la colección $\{\langle V_1, \dots, V_n \rangle \cap \mathcal{TD}(X) : \{V_1, \dots, V_n\}\}$ es una familia de abiertos no vacíos ajenos dos a dos es una base para la topología de Vietoris en $\mathcal{TD}(X)$ cuando X es un espacio Hausdorff compacto.

2.20 Proposición. Sean X un espacio T_1 y p un punto en X . Si $\mathcal{H}(X)$ es un subespacio de $\mathcal{CL}(X)$ que contiene a $\mathcal{F}_1(X)$ y $\mathcal{H}(X)$ es conexo en pequeño en el punto $\{p\}$, entonces X es conexo en pequeño en el punto p .

DEMOSTRACIÓN. Sea U un subespacio abierto de X tal que $p \in U$. Notemos que $\{p\} \in \langle U \rangle \cap \mathcal{H}(X)$. Por hipótesis, existe un subespacio conexo, \mathcal{V} , de $\mathcal{H}(X)$ tal que $\{p\} \in \text{int}_{\mathcal{H}(X)}(\mathcal{V})$ y $\mathcal{V} \subseteq \langle U \rangle$. Sea $V = \bigcup \{A \in \mathcal{H}(X) : A \in \mathcal{V}\}$. Notemos que \mathcal{V} es un subespacio conexo de $\mathcal{CL}(X)$ el cual contiene un subespacio conexo de X , a saber $\{p\}$. Luego, por el Teorema 1.12, se tiene que V es conexo. Además, es claro que $p \in V$.

Afirmación 1. Se tiene que $p \in \text{int}(V)$.

Para probar esto, consideremos conjuntos abiertos, U_1, \dots, U_n , en X tales que $\{p\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \mathcal{H}(X) \subseteq \mathcal{V}$. Sea $W = U_1 \cap \dots \cap U_n$. Tenemos que W es abierto en X y $p \in W$. Ahora, dado $x \in W$, se tiene que $x \in U_i$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Así, $\{x\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \mathcal{H}(X) \subseteq \mathcal{V}$. En consecuencia $x \in V$. Esto prueba que W es un espacio abierto en X contenido en V que tiene a p , lo cual prueba la Afirmación 1.

Afirmación 2. Se tiene que $V \subseteq U$.

Para probar esto, dado $x \in V$ existe $A \in \mathcal{V}$ tal que $x \in A$. Como $\mathcal{V} \subseteq \langle U \rangle$ tenemos que $A \subseteq U$, así $x \in U$. Esto prueba la Afirmación 2.

En resumen, hemos probado que V es un subespacio conexo de X , contenido en U que contiene a p en su interior. \square

2.21 Corolario. Sea X un espacio. Si $\mathcal{H}(X)$ es un subespacio de $\mathcal{CL}(X)$ que contiene a $\mathcal{F}_1(X)$ y $\mathcal{H}(X)$ es localmente conexo en $\{x\}$, para cada $x \in X$, entonces X es localmente conexo.

2.22 Corolario. Sea X un espacio T_1 . Si $\mathcal{TD}(X)$ es localmente conexo, entonces X es localmente conexo.

2.23 Definición. Una **familia celular** en un espacio X es una familia de subconjuntos abiertos no vacíos de X ajenos dos a dos.

2.24 Notación. La colección de todas las familias celulares finitas de X es denotada por $\mathfrak{C}(X)$.

2.25 Notación. Denotamos al hiperespacio $\mathcal{TD}(X) \cap \mathcal{K}(X)$ por $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}(X)$.

Los siguientes resultados nos serán de gran utilidad para demostrar que la familia $\{\langle V_1, \dots, V_n \rangle \cap \mathcal{K}_{\mathcal{D}}(X) : n \in \mathbb{N} \text{ y } \{V_1, \dots, V_n\} \in \mathfrak{C}(X)\}$ es base para la topología de Vietoris en $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}(X)$, cuya prueba es una aportación nuestra.

2.26 Lema. Sean X un espacio Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Si K_1, \dots, K_n son subespacios compactos y ajenos dos a dos de X , entonces existen abiertos U_1, \dots, U_n en X tales que $K_i \subseteq U_i$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$, para cada $i \neq j$.

DEMOSTRACIÓN. Basta probar el Lema para el caso $n = 2$. Sean K_1 y K_2 subespacios compactos y ajenos de X . Fijemos un punto $x \in K_1$. Para cada punto $y \in K_2$, existen subconjuntos abiertos ajenos V_y y W_y de X tales que $x \in V_y$ y $y \in W_y$. Es claro que $K_2 \subseteq \bigcup \{W_y : y \in K_2\}$. Por la compacidad de K_2 existen puntos y_1, \dots, y_m en K_2 tales que $K_2 \subseteq \bigcup \{W_{y_i} : i \in \{1, \dots, m\}\}$. Sean $V = \bigcap \{V_{y_i} : i \in \{1, \dots, m\}\}$ y $W = \bigcup \{W_{y_i} : i \in \{1, \dots, m\}\}$. Es claro que $x \in V$, $K_2 \subseteq W$ y, V y W son ajenos. Hemos probado que para cualquier punto $x \in K_1$ existen subconjuntos abiertos ajenos, V y W , de X tales que $x \in V$ y $K_2 \subseteq W$. Ahora, para cada $x \in K_1$ consideremos subconjuntos abiertos ajenos V_x y W_x de X tales que $x \in V_x$ y $K_2 \subseteq W_x$. Por la compacidad de K_1 existen puntos x_1, \dots, x_r en K_1 tales que $K_1 \subseteq \bigcup \{V_{x_i} : i \in \{1, \dots, r\}\}$. Definamos $U_1 = \bigcup \{V_{x_i} : i \in \{1, \dots, r\}\}$ y $U_2 = \bigcap \{W_{x_i} : i \in \{1, \dots, r\}\}$. Es claro que U_1 y U_2 son abiertos ajenos tales que $K_1 \subseteq U_1$ y $K_2 \subseteq U_2$. \square

2.27 Lema. Si Q_1, \dots, Q_r son subconjuntos abiertos, cerrados y no vacíos de un espacio X , entonces existe una familia finita \mathcal{F} de subconjuntos de X que cumplen las siguientes condiciones.

- (1) Los elementos de \mathcal{F} son abiertos.
- (2) Los elementos de \mathcal{F} son cerrados.
- (3) Los elementos de \mathcal{F} son ajenos dos a dos.
- (4) Los elementos de \mathcal{F} son no vacíos.
- (5) $\bigcup \mathcal{F} = Q_1 \cup \dots \cup Q_r$.

DEMOSTRACIÓN. Definamos $F_1 = Q_1$ y para cada $i \in \{2, \dots, r\}$ sea $F_i = Q_i - (\bigcup\{Q_j : j \in \{1, \dots, i-1\}\})$. Sea $\mathcal{F} = \{F_i : F_i \neq \emptyset\}$. Veamos que \mathcal{F} cumple las condiciones del Lema.

Dado que para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ tenemos que Q_i es abierto y cerrado se tiene que $Q_1 \cup \dots \cup Q_j$ es abierto y cerrado, para cada $j \in \{1, \dots, r\}$. Así, F_i es abierto y cerrado para cada $F_i \in \mathcal{F}$, es decir, \mathcal{F} cumple las condiciones (1) y (2). Además, es claro que \mathcal{F} cumple la condición (4).

Ahora, si $x \in F_i \cap F_j$ con $i < j$, entonces $x \in F_i \subset Q_i$ y $x \in F_j - (Q_1 \cup \dots \cup Q_i \cup \dots \cup Q_{j-1})$, de donde $x \notin Q_i$. Esta contradicción prueba que \mathcal{F} cumple la condición (3).

Finalmente, es claro que $\bigcup \mathcal{F} \subseteq \bigcup\{Q_i : i \in \{1, \dots, r\}\}$. Por otra parte, dado $x \in \bigcup\{Q_i : i \in \{1, \dots, r\}\}$ se tiene que $x \in Q_1$ o $x \notin Q_1$. Si $x \in Q_1$, entonces $x \in F_1$. Si $x \notin Q_1$, definimos $s = \min\{i \in \{1, \dots, r\} : x \in Q_i\}$. Se sigue que $x \in F_s$. Esto prueba que \mathcal{F} cumple la condición (5). \square

2.28 Lema. Si X es un espacio Hausdorff compacto, entonces X tiene una base \mathcal{B} tal que U es abierto y cerrado en X , para cada $U \in \mathcal{B}$, si y sólo si, X es totalmente desconexo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X tiene una base \mathcal{B} tal que U es abierto y cerrado en X , para cada $U \in \mathcal{B}$. Consideremos $A \subseteq X$ tal que A tiene al menos dos puntos. Dados dos puntos distintos en A , digamos x y y , existe un abierto en X , digamos U tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Por hipótesis existe un elemento $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U$. Luego $A \cap W$ y $A \cap (X - W)$ son una separación de A . Por lo tanto A no es conexo, se sigue que X es totalmente desconexo.

Notemos que en la implicación anterior no usamos el hecho de que el espacio fuera Hausdorff y compacto. Sólo usamos que el espacio es T_1 .

Recíprocamente, sean $p \in X$ y U un abierto en X que contiene a p . Notemos que la componente conexa de p en X es $\{p\}$ y esta coincide con la casi componente conexa, $Q(p)$, de p en X (vea [3, Teorema 6.1.23]). Dado que X es normal, existe un abierto W en X tal que $p \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$. Observe que $Q(p) \subseteq W$ y \overline{W} es compacto.

Afirmamos que existen V_1, \dots, V_k abiertos y cerrados en X tales que si $V_p^w = V_1 \cap \dots \cap V_k$ entonces $V_p^w \subseteq W \subseteq U$ y $p \in V_p^w$.

En efecto, sea $A = X - W$. Para cada V abierto y cerrado en X que contenga a p sea $U_v = X - V$. Notemos que A es compacto y $A \subseteq \bigcup\{U_v : V \text{ es un abierto y cerrado en } X \text{ que contiene a } p\}$. Luego, existen abiertos y cerrados V_1, \dots, V_k tales que $A \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_k = (X - V_1) \cup \dots \cup (X - V_k)$. En consecuencia, $V_1 \cap \dots \cap V_k \subseteq W$. Se sigue que $V_p^w \subseteq W$. Esto prueba la Afirmación.

Finalmente, sea $\mathcal{B} = \{V_p^w : p \in X \text{ y } W \text{ es abierto en } X\}$. Es claro que \mathcal{B} es una base de abiertos y cerrados en X . \square

2.29 Lema. Sean X un espacio Hausdorff, $A \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}(X)$ y V_1, \dots, V_n abiertos en X tales que $A \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle$. Entonces, existen subconjuntos cerrados ajenos no vacíos, digamos A_1, \dots, A_m , tales que se cumplen las siguientes condiciones.

- (1) $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$.
- (2) Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ existe $j_i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $A_i \subseteq V_{j_i}$.
- (3) Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ existe $r_j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $A_{r_j} \subseteq V_j$.

Más aún, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ existe un conjunto abierto U_i en X tal que:

- (4) $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
- (5) $A_i \subseteq U_i \subseteq V_{j_i}$.
- (6) Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $A_{r_j} \subseteq U_{r_j} \subseteq V_j$.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $a \in A$, definamos $V_a = \bigcap \{V_j : a \in V_j\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ fijemos un punto $y_i \in V_i$. Sea $\{x_1, \dots, x_s\} = \{y_i : i \in \{1, \dots, n\} \text{ y } y_i \neq y_j \text{ si } i \neq j\}$. Como X es un espacio Hausdorff existe una colección de conjuntos abiertos en X y ajenos dos a dos, $\{W_1, \dots, W_s\}$, tal que $x_i \in W_i$, para cada $i \in \{1, \dots, s\}$. Notemos que $x_i \in W_i \cap V_{x_i}$, para cada $i \in \{1, \dots, s\}$. Luego, por el Lema 2.28, para cada $i \in \{1, \dots, s\}$ existe un conjunto abierto y cerrado en A , digamos B_{x_i} tal que $x_i \in B_{x_i} \subseteq W_i \cap V_{x_i}$. Es claro que $\{B_{x_i} : i \in \{1, \dots, s\}\}$ es una familia de conjuntos abiertos y cerrados en A ajenos dos a dos. Denotemos $B = A - (B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_s})$. Se tiene que B es cerrado y abierto en A . En particular, B es compacto. Luego, por el Lema 2.28, para cada $b \in B$ existe un conjunto B_b abierto y cerrado en A , en particular, abierto y cerrado en B , tal que $b \in B_b \subseteq V_b$. Por la compacidad de B , existen b_1, \dots, b_t puntos en B tales que $B = B_{b_1} \cup \dots \cup B_{b_t}$. Sea $C_1 = B_{b_1}$ y para cada $j \in \{2, \dots, t\}$ definimos $C_j = B_{b_j} - (\bigcup \{B_{b_r} : r \in \{1, \dots, j-1\}\})$. Sea $\{F_1, \dots, F_k\} = \{C_j : C_j \neq \emptyset\}$. Por el Lema 2.27, $\{F_1, \dots, F_k\}$ es una familia de conjuntos abiertos y cerrados no vacíos en A , ajenos dos a dos cuya unión es B . Definamos $A_i = B_{x_i}$, para cada $i \in \{1, \dots, s\}$ y $A_{s+i} = F_i$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Si $m = s + k$, entonces $\{A_1, \dots, A_m\}$ es una colección de abiertos y cerrados en A , ajenos dos a dos cuya unión es A .

Veamos que la familia $\{A_1, \dots, A_m\}$ cumple las condiciones (2) y (3).

Sea $i \in \{1, \dots, m\}$. Se tiene que $A_i \subseteq B_{a_i}$ para algún $a_i \in \{x_1, \dots, x_s, b_1, \dots, b_t\}$. Luego, existe $j_i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_i \in V_{j_i}$. Como $B_{a_i} \subseteq V_{a_i}$ y $V_{a_i} \subseteq V_{j_i}$ se tiene que $A_i \subseteq V_{j_i}$. Por otro lado, dado $j \in \{1, \dots, n\}$ existe $r_j \in \{1, \dots, s\}$ tal que $x_{r_j} \in V_j$. Luego, $x_{r_j} \in B_{x_{r_j}} = A_{r_j}$ y $B_{x_{r_j}} \subseteq V_{x_{r_j}} \subseteq V_j$, de donde $A_{r_j} \subseteq V_j$. Por lo tanto, la familia $\{A_1, \dots, A_m\}$ cumple las condiciones (2) y (3).

Ahora, como A_i es cerrado en A y A es compacto tenemos que A_i es compacto, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. En consecuencia, existen abiertos ajenos en X , O_1, \dots, O_m , tales que $A_i \subseteq O_i$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ (vea el Lema 2.26). Dado $i \in \{1, \dots, m\}$ definamos $U_i = O_i \cap (\bigcap \{V_j : A_i \subseteq V_j\})$. Es claro que la familia $\{U_1, \dots, U_m\}$ cumple la condición (4).

Veamos que la familia $\{U_1, \dots, U_m\}$ cumple las condiciones (5) y (6).

Sea $i \in \{1, \dots, m\}$. Por la condición (2), existe $j_i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $A_i \subseteq V_{j_i}$. En consecuencia, $A_i \subseteq U_i \subseteq V_{j_i}$. Por otro lado, dado $j \in \{1, \dots, n\}$, por la condición (3), existe $r_j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $A_{r_j} \subseteq V_j$, así $A_{r_j} \subseteq U_{r_j} \subseteq V_j$. Por lo tanto la familia $\{U_1, \dots, U_m\}$ cumple las condiciones (5) y (6). \square

2.30 Teorema. Sea X un espacio Hausdorff. Entonces la colección $\{\langle V_1, \dots, V_n \rangle \cap \mathcal{K}_D(X) : n \in \mathbb{N} \text{ y } \{V_1, \dots, V_n\} \in \mathfrak{C}(X)\}$ es base para la topología de Vietoris en $\mathcal{K}_D(X)$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración se sigue inmediatamente del Lema 2.29 y [18, Lema 2.3.1]. \square

2.31 Teorema. Si X es un espacio Hausdorff compacto, entonces X es localmente conexo si, y sólo si, el hiperespacio $\mathcal{TD}(X)$ es localmente conexo.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar que la condición es necesaria consideremos $A \in \mathcal{TD}(X)$ y W_1, \dots, W_n abiertos en X tales que $A \in \mathcal{W} = \langle W_1, \dots, W_n \rangle \cap \mathcal{TD}(X)$. Por el Lema 2.29, existen r subespacios compactos no vacíos de A , digamos A_1, \dots, A_r , tales que $A = A_1 \cup \dots \cup A_r$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y que además cumplen las siguientes dos condiciones.

- (1) Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $A_i \subset W_j$.
- (2) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $j \in \{1, \dots, r\}$ tal que $A_j \subset W_i$.

Sean U_1, \dots, U_r abiertos ajenos dos a dos en X tales que $A_i \subset U_i$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ y denotemos $V_i = (\bigcap \{W_j : A_i \subset W_j, \text{ con } j \in \{1, \dots, n\}\}) \cap U_i$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.

Dado $i \in \{1, \dots, r\}$, para cada $x \in A_i$ consideremos un subespacio abierto y conexo, C_x , tal que $x \in C_x \subset V_i$. Por la compacidad de A_i , existe un subconjunto finito $\{x_{i1}, \dots, x_{ik_i}\}$ de A_i tal que $A_i \subset C_{x_{i1}} \cup \dots \cup C_{x_{ik_i}}$. Denotemos $D_i = C_{x_{i1}} \cup \dots \cup C_{x_{ik_i}}$. Observemos que D_i tiene sólo un número finito de componentes, las cuales denotamos por $M_1^i, \dots, M_{p_i}^i$, y notemos que cada una de estas componentes es un subespacio abierto de X . Denotemos

$$\mathcal{V} = \langle M_1^1, \dots, M_{p_1}^1, \dots, M_1^r, \dots, M_{p_r}^r \rangle \cap \mathcal{TD}(X).$$

Notemos que \mathcal{V} es abierto en $\mathcal{TD}(X)$.

Afirmación 1. Se tiene que \mathcal{V} es conexo.

Para probar esta afirmación, por el Lema 1.15 tenemos que $\mathcal{V} \cap \mathcal{F}_m(X) = \langle M_1^1, \dots, M_{p_1}^1, \dots, M_1^r, \dots, M_{p_r}^r \rangle \cap \mathcal{F}_m(X)$ es conexo, para cada $m \geq p_1 + \dots + p_r$. Ahora, por la definición de $\mathcal{F}(X)$ y por el hecho de que $\mathcal{F}_i(X) \subseteq \mathcal{F}_j(X)$ si $i \leq j$ tenemos que $\mathcal{V} \cap \mathcal{F}(X) = \bigcup \{\mathcal{V} \cap \mathcal{F}_m(X) : m \geq p_1 + \dots + p_r\}$, se sigue que $\mathcal{V} \cap \mathcal{F}(X)$ es conexo. Por otro lado, sabemos que $\mathcal{F}(X)$ es denso en $\mathcal{TD}(X)$. Luego, por el Teorema 1.16, tenemos que $\mathcal{V} \cap \mathcal{F}(X)$ es denso en \mathcal{V} , es decir, $Cl_{\mathcal{V}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{F}(X)) = \mathcal{V}$. En consecuencia, \mathcal{V} es conexo. Esto prueba la Afirmación 1.

Afirmación 2. Se tiene que $A \in \mathcal{V}$.

Para probar esta afirmación, notemos que $A = \bigcup_{i=1}^r A_i \subset \bigcup_{i=1}^r (\bigcup_{j=1}^{k_i} C_{x_{ij}}) = \bigcup_{i=1}^r (\bigcup_{j=1}^{p_i} M_j^i)$. Además, dado M_j^i , existe un punto $x_{il} \in \{x_{i1}, \dots, x_{ik_i}\} \subset A_i$ tal que $C_{x_{il}} \subset M_j^i$, se sigue que $A_i \cap M_j^i \neq \emptyset$. En consecuencia, $A \cap M_j^i \neq \emptyset$. Esto prueba la Afirmación 2.

Afirmación 3. Se tiene que $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$.

Para probar esta Afirmación, fijemos $B \in \mathcal{V}$. Por la condición (2), dado $j \in \{1, \dots, n\}$, existe $i \in \{1, \dots, r\}$, tal que $A_i \subset W_j$. Como $B \cap (\bigcup_{l=1}^{p_i} M_l^i) \neq \emptyset$ y $B \cap (\bigcup_{l=1}^{p_i} M_l^i) \subset W_j$ se tiene que $B \cap W_j \neq \emptyset$. Así, $B \cap W_j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Por otro lado, es claro que

$B \subset W_1 \cup \dots \cup W_n$ ya que dado $j \in \{1, \dots, r\}$ y $l \in \{1, \dots, p_j\}$, M_l^j es componente de D_j y por definición de D_j se tiene que $D_j \subset V_j$ y $V_j \subset W_i$, para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. Esto prueba la Afirmación 3.

En resumen, hemos probado que \mathcal{V} es un subespacio abierto y conexo de $\mathcal{TD}(X)$ tal que $A \in \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Así, que la condición es necesaria queda demostrada.

Finalmente, que la condición es suficiente se sigue del Corolario 2.22. \square

2.6 Conexidad por trayectorias

En esta sección mostramos que el hiperespacio $\mathcal{TD}(X)$ es conexo por trayectorias si X es un dendroide suave y mostramos un dendroide Y cuyo hiperespacio $\mathcal{TD}(Y)$ no es conexo por trayectorias. También damos una clase de espacios, digamos \mathcal{A} , tal que para cada $Y \in \mathcal{A}$, el hiperespacio $\mathcal{TD}(Y)$ tiene una cantidad no numerable de arco componentes.

Iniciamos el estudio de la conexidad por trayectorias del hiperespacio de los conjuntos totalmente desconexos probando que $\mathcal{TD}([0, 1])$ es conexo por trayectorias.

2.32 Teorema. El hiperespacio $\mathcal{TD}([0, 1])$ es conexo por trayectorias.

DEMOSTRACIÓN. Afirmación. Para cada $A \in \mathcal{TD}([0, 1])$, existe una función continua $F : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}([0, 1])$ tal que $F(0) = A$ y $F(1) = \{0\}$.

Para probar esta Afirmación, sea $A \in \mathcal{TD}([0, 1])$. Para cada $a \in A$, definamos la función $f_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $f_a(t) = a(1 - t)$ y definamos $F : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}([0, 1])$ como $F(t) = \{f_a(t) : a \in A\}$. Notemos que $F(0) = \{f_a(0) : a \in A\} = \{a : a \in A\} = A$ y $F(1) = \{f_a(1) : a \in A\} = \{0\}$. Así, para $t \in [0, 1]$ tenemos que $F(t) \in \mathcal{TD}([0, 1])$. Ahora, fijemos $t_0 \in (0, 1)$ y consideremos $B \subset F(t_0)$ con $|B| \geq 2$. Fijemos puntos $b_1, b_2 \in B$, con $b_1 \neq b_2$. Luego, existen puntos $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ tales que $f_{a_1}(t_0) = b_1$ y $f_{a_2}(t_0) = b_2$. Sin perder generalidad, supongamos que $a_1 < a_2$. Como A es totalmente desconexo, existe un punto $a_3 \in (0, 1)$ tal que $a_1 < a_3 < a_2$ y $a_3 \notin A$. Sea $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $g(t) = a_3(1 - t)$. Se tiene que $g(t_0) \notin F(t_0)$ y $b_1 < g(t_0) < b_2$. Se sigue que $[0, g(t_0))$ y $(g(t_0), 1]$ son una separación de B . Por lo tanto B es totalmente desconexo. Por otro lado, si $b \in F(t_0)$, entonces existe una sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $F(t_0)$ tal que $b_n \rightarrow b$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un punto $a_n \in A$ tal que $f_{a_n}(t_0) = b_n$. Dada la compacidad de A , la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $a_{n_k} \rightarrow a \in A$. Notemos que $f_{a_{n_k}}(t_0) = b_{n_k}$ y $b_{n_k} \rightarrow b$. Además $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{a_{n_k}}(t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}(1 - t_0) = a(1 - t_0) = f_a(t_0)$. Por lo tanto, $b = f_a(t_0)$. En consecuencia, $b \in F(t_0)$. Esto demuestra que $F(t_0) \in \mathcal{TD}([0, 1])$.

Ahora, veamos que la función F es continua. Para esto consideremos una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $[0, 1]$ tal que $t_n \rightarrow t \in [0, 1]$ y probemos que $\limsup F(t_n) \subset F(t) \subset \liminf F(t_n)$. Sea $b \in \limsup F(t_n)$. Luego, existe una subsucesión $\{b_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $b_{n_k} \in F(t_{n_k})$ y $b_{n_k} \rightarrow b$. Se sigue que, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un punto $a_{n_k} \in A$ tal que $f_{a_{n_k}}(t_{n_k}) = b_{n_k}$. Por la compacidad de A , podemos suponer que $a_{n_k} \rightarrow a \in A$. Se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{a_{n_k}}(t_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}(1 - t_{n_k}) = a(1 - t) = f_a(t) \in F(t)$. Por lo tanto, $\limsup F(t_n) \subset F(t)$. Por otro lado, dado $b \in F(t)$, existe $a \in A$ tal que $f_a(t) = b$. Por la continuidad de f_a se tiene que $f_a(t_n) \rightarrow f_a(t)$. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_a(t_n) \in F(t_n)$, así $b \in \liminf F(t_n)$. Por lo tanto la función F es continua. Esto prueba la Afirmación.

Finalmente, consideremos $A, B \in \mathcal{TD}([0, 1])$. Por la Afirmación, existen funciones continuas, $F : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}([0, 1])$ y $G : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}([0, 1])$, tales que $F(0) = A$, $F(1) = \{0\}$, $G(0) = B$ y $G(1) = \{0\}$. Definamos la función $H : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}([0, 1])$ como sigue

$$H(t) = \begin{cases} F(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2-2t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Es claro que H es una función continua tal que $H(0) = A$ y $H(1) = B$. \square

2.33 Corolario. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se tiene que $\mathcal{TD}([a, b])$ es conexo por trayectorias.

2.34 Lema. Sea X un espacio regular. Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}(X)$ es una función continua, C es un subconjunto cerrado no vacío de $\bigcup f([0, 1])$ y $u = \inf\{s \in [0, 1] : f(s) \cap C \neq \emptyset\}$, entonces $f(u) \cap C \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que $f([0, 1])$ es un subconjunto compacto y no vacío de $\mathcal{CL}(X)$. Luego, por [18, Teorema 2.5.1] se tiene que $\bigcup f([0, 1])$ es un subconjunto cerrado y no vacío de X . En consecuencia, C es un subconjunto cerrado de X . Supongamos que $f(u) \cap C = \emptyset$ y sea $V = X - C$. Observemos que V es abierto en X y $f(u) \subset V$. Se sigue que $f^{-1}(V^+)$ es un conjunto abierto en $[0, 1]$ tal que $u \in f^{-1}(V^+)$ y $f^{-1}(V^+) \cap \{s \in [0, 1] : f(s) \cap C \neq \emptyset\} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $f(u) \cap C \neq \emptyset$. \square

El siguiente ejemplo muestra que en general la conexidad por trayectorias de X no implica la de $\mathcal{TD}(X)$, aún cuando el espacio X sea un continuo.

2.35 Ejemplo. Sean $A = \{(x, |\sin(\frac{\pi}{x})|) : x \in (0, 1]\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ y } y < 0\}$ y $X = (\{0\} \times [0, 1]) \cup A \cup B \subseteq \mathbb{R}^2$ con la topología usual. Entonces X es conexo por trayectorias pero $\mathcal{TD}(X)$ no es conexo por trayectorias.

DEMOSTRACIÓN. Para probar que $\mathcal{TD}(X)$ no es conexo por trayectorias consideremos $S_0 = \{(0, 0)\}$ y $S_1 = \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0)\}$ elementos en $\mathcal{TD}(X)$. Supongamos que existe una función continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}(X)$ tal que $f(0) = S_0$ y $f(1) = S_1$. Sea $g : A \rightarrow (0, 1]$ la proyección en la primera coordenada, es decir, $g((x, y)) = x$, para cada $(x, y) \in A$. Notemos que g es un homeomorfismo. Para cada $q \in (0, 1)$, definimos $A_q = g^{-1}((0, q))$.

Observación 1. Un elemento $E \in \mathcal{TD}(X)$ está contenido en un arco de X si, y sólo si, existe $q \in (0, 1)$ tal que $A_q \cap E = \emptyset$.

Notemos que S_0 está contenido en el arco $\{0\} \times [0, 1]$ y S_1 no está contenida en algún arco de X . Sea

$$r = \sup\{s \in [0, 1] : f(t) \text{ está contenido en algún arco de } X, \text{ para cada } t \leq s\}.$$

Por el Teorema 2.30 podemos considerar U_1, \dots, U_m bolas abiertas en X , ajenas dos a dos tales que $\text{diám}(U_i) < \frac{1}{2}$, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ y $f(r) \in \mathcal{U} = \langle U_1, \dots, U_m \rangle$. En lo que sigue consideramos dos casos.

Caso 1. $f(r)$ está contenido en un arco de X . Notemos que $0 \leq r < 1$. Por la Observación 1, existe $q \in (0, 1)$ tal que $A_q \cap f(r) = \emptyset$. Por como definimos r , para cada $\varepsilon > 0$, existe $t \in [r, r + \varepsilon)$ tal que $f(t)$ no está contenido en algún arco de X . De esta manera, por la continuidad de f , podemos consideremos $t_0 \in (r, 1]$ tal que $f([r, t_0]) \subset \mathcal{U}$ y $f(t_0)$ no está contenido en algún arco de X . Fijemos un punto $x_1 \in f(t_0) \cap A_q$. Sea $x_2 \in f(t_0) \cap A_{q_2}$ con $0 < q_2 < \min\{\frac{1}{2}, g(x_1)\}$. Notemos que $x_1 \neq x_2$ y $A_{q_2} \subset A_q$. Ahora, supongamos que se han determinado n puntos, digamos x_1, \dots, x_n , tales que $x_i \in f(t_0) \cap A_{q_i}$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ con $q_1 = q$. Tomemos un

punto $x_{n+1} \in f(t_0) \cap A_{q_{n+1}}$ donde $0 < q_{n+1} < \min\{\frac{1}{n+1}, g(x_n)\}$. De este modo, inductivamente, hemos determinado una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en A_q tal que $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$ y $g(x_n) \rightarrow 0$. Por la compacidad de X , podemos suponer que $x_n \rightarrow x \in X$. Notemos que $x \in \{0\} \times [0, 1]$. Sin perder generalidad supongamos que $x \in U_1$. Ahora, elijamos una componente conexa C de $\overline{A_q} \cap \overline{U_1}$ tal que $C \cap f(t_0) \neq \emptyset$ y $C \subset A_q$ (basta tomar una componente de $\overline{A_q} \cap \overline{U_1}$ que contenga un punto de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ muy cerca de x). Notemos que $C \cap f(r) = \emptyset$ ya que $C \subset A_q$ y $A_q \cap f(r) = \emptyset$. Sea $a = \min\{g(y) : y \in C\}$ y $b = \max\{g(y) : y \in C\}$, los cuales existen ya que g es un homeomorfismo y C es cerrado en $\overline{A_q} \cap \overline{U_1}$, el cual es cerrado en X , así C es cerrado en X y por lo tanto compacto. Observemos que $g(C) = [a, b]$ y $g^{-1}(a), g^{-1}(b) \in Fr(U_1)$, en consecuencia $g^{-1}(a), g^{-1}(b) \notin U_1$. Definamos $D = C \cap [\bigcup f([r, t_0])]$. Observe que D es un subconjunto cerrado de $\bigcup f([r, t_0])$.

Afirmación 1. Se tiene que $D = [\bigcup f([r, t_0])] \cap U_1 \cap (A_b - \overline{A_a})$.

Para probar esta Afirmación, se tiene que $C \cap [\bigcup f([r, t_0])] \subset \overline{U_1} \cap [\bigcup f([r, t_0])]$. Dado que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $f([r, t_0]) \subset \mathcal{U}$ tenemos que $\overline{U_1} \cap [\bigcup f([r, t_0])] = U_1 \cap [\bigcup f([r, t_0])]$. Además, como $C = g^{-1}([a, b])$, $g^{-1}(a), g^{-1}(b) \notin U_1$ y $A_b - \overline{A_a} = g^{-1}((a, b))$ se sigue que $D \subset [\bigcup f([r, t_0])] \cap U_1 \cap (A_b - \overline{A_a})$. Por otro lado, es claro que $[\bigcup f([r, t_0])] \cap U_1 \cap (A_b - \overline{A_a}) \subset D$ ya que $A_b - \overline{A_a} = g^{-1}((a, b)) \subset C$. Esto prueba la Afirmación 1.

Ahora, notemos que $f|_{[r, t_0]}$ y D satisfacen las condiciones del Lema 2.34, así $f(u) \cap D \neq \emptyset$, donde $u = \inf\{s \in [r, t_0] : f(s) \cap D \neq \emptyset\}$. Como $f(r) \cap C = \emptyset$ y $D \subset C$ tenemos que $r < u$. Consideremos los conjuntos abiertos $V = U_1 \cap (A_b - \overline{A_a})$ y $\mathcal{V} = \langle V, U_1, \dots, U_m \rangle$. Por la Afirmación 1, $V \cap [\bigcup f([r, t_0])] = D$. Como $f(u) \cap D \neq \emptyset$ y $f(u) \in f([r, t_0]) \subset \mathcal{U}$ se tiene que $f(u) \in \mathcal{V}$. Luego, $f^{-1}(\mathcal{V})$ es un conjunto abierto en $[0, 1]$ tal que $u \in f^{-1}(\mathcal{V})$ y $f^{-1}(\mathcal{V}) \cap [r, u] = \emptyset$, esto contradice la continuidad de la función f .

Caso 2. $f(r)$ no está contenido en algún arco. En este caso, notemos que $0 < r$. Por la continuidad de f podemos tomar un punto $t_0 \in [0, r]$ tal que $f([t_0, r]) \subset \mathcal{U}$. Notemos que $f(t_0)$ está contenido en algún arco. Luego, por la Observación 1, existe $q \in (0, 1)$ tal que $f(t_0) \cap A_q = \emptyset$. De manera similar al caso 1, podemos elegir una componente C de $\overline{A_q} \cap \overline{U_1}$ tal que $f(r) \cap C \neq \emptyset$ y $C \subset A_q$. Sea $a = \min\{g(y) : y \in C\}$ y $b = \max\{g(y) : y \in C\}$. Definamos $D = C \cap [\bigcup f([t_0, r])]$. De igual forma que en la Afirmación 1 se prueba que $D = [\bigcup f([t_0, r])] \cap U_1 \cap (A_b - \overline{A_a})$. Por otro lado, $f|_{[t_0, r]}$ y D cumplen las condiciones del Lema 2.34. Así, si $u = \inf\{s \in [t_0, r] : f(s) \cap D \neq \emptyset\}$, entonces $f(u) \cap D \neq \emptyset$. En consecuencia, $u > t_0$ ($f(t_0) \cap A_q = \emptyset$ y $C \subset A_q$). Definamos $V = U_1 \cap (A_b - \overline{A_a})$ y $\mathcal{V} = \langle V, U_1, \dots, U_m \rangle$. Dado que $f(u) \cap D \neq \emptyset$ y $f(u) \in f([t_0, r]) \subset \mathcal{U}$ se tiene que $f(u) \in \mathcal{V}$. Se sigue que $f^{-1}(\mathcal{V})$ es un conjunto abierto en $[0, 1]$ tal que $u \in f^{-1}(\mathcal{V})$ y $f^{-1}(\mathcal{V}) \cap [t_0, u] = \emptyset$, lo cual contradice la continuidad de f .

Por lo tanto, no existe una función continua, $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}(X)$, tal que $f(0) = S_0$ y $f(1) = S_1$. \square

A continuación enunciamos una serie de definiciones que nos ayudarán a exhibir una clase de continuos cuyo hiperespacio de conjuntos totalmente desconexos es conexo por trayectorias.

2.36 Definición. Un **dendroide** es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente (vea la definición 1.24).

Notemos que en un dendroide X , para cualesquiera dos puntos x y y con $x \neq y$, existe un único arco en X desde x hasta y , de lo contrario X no sería hereditariamente unicoherente (una prueba de esto la puede consultar en [20, pag. 42]).

2.37 Notación. Si X es un dendroide y $x, y \in X$, entonces xy denota el único arco en X con puntos finales x y y . Si $x = y$, entonces $xy = \{x\}$.

2.38 Definición. Un dendroide X es **suave** si existe un punto $p \in X$ tal que dada cualquier sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a a en X , entonces $\text{Lim } a_n p = ap$.

2.39 Definición. Sean X un dendroide y $p \in X$. Definimos un orden parcial \leq_p en X como sigue. Si $x, y \in X$, entonces $x \leq_p y$ si, y sólo si, $x \in yp$.

2.40 Observación. Observemos que si X es un dendroide y $x, p \in X$, entonces $\{y \in X : y \leq_p x\}$ es totalmente ordenado.

2.41 Definición. Decimos que un orden parcial \leq en un espacio X es continuo si \leq es un subconjunto cerrado de $X \times X$, (vea [19, Definición 1.10]).

Los siguientes dos resultados los puede consultar en [19] (Lema 1.12 y Teorema 1.15).

2.42 Lema. Un dendroide X es suave si, y sólo si, existe un punto $p \in X$ tal que el orden parcial \leq_p es continuo.

2.43 Teorema. Si X es un espacio métrico compacto y \leq es un orden parcial continuo en X , entonces existe una métrica equivalente r para X que satisface la siguiente condición.

$$(1) \text{ Si } x \leq y \leq z \text{ en } X \text{ y } x \neq y \neq z, \text{ entonces } r(x, y) < r(x, z).$$

Además, r puede ser construida tal que

$$(2) \text{ si } x \leq y \leq z \text{ en } X, \text{ entonces } r(x, z) = r(x, y) + r(y, z).$$

2.44 Teorema. Si X es un dendroide suave, entonces $\mathcal{TD}(X)$ es contráctil.

DEMOSTRACIÓN. Sea p un punto en X tal que el orden parcial \leq_p es continuo (vea la Definición 2.39 y el Lema 2.42). Consideremos d una métrica equivalente para X que satisface la condición (2) del Teorema 2.43. Como X es compacto, podemos suponer que $\text{máx}\{d(x, p) : x \in X\} = 1$.

Afirmación 1. Dado cualquier $x \in X$ y número real $r \in [0, d(x, p)]$, existe un único punto y en el arco px tal que $d(p, y) = r$.

Para probar esta Afirmación notemos que $\{y \in X : y \leq_p x\} = xp$ es conexo, así al menos existe un punto $y \leq_p x$ tal que $d(y, p) = r$. Supongamos ahora que y y z son puntos en xp tales que $d(y, p) = d(z, p) = r$. Como $\{y \in X : y \leq_p x\} = xp$ es totalmente ordenado, se tiene que $y \leq_p z$ o $z \leq_p y$. Supongamos que $y \leq_p z$. Dado que $p \leq_p y \leq_p z$ tenemos que $r = d(p, z) = d(p, y) + d(y, z) = r + d(y, z)$ lo que implica que $y = z$. Esto prueba la Afirmación 1.

Definamos $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ dada por

$$H((x, t)) = \begin{cases} \text{el único } y \in px \text{ tal que } d(y, p) = t, & \text{si } d(x, p) \geq t \\ x, & \text{si } d(x, p) \leq t. \end{cases}$$

Por la Afirmación 1 tenemos que H está bien definida.

Afirmación 2. La función H es continua.

En efecto, dado que la función $d : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x) = d(x, p)$ es continua, los conjuntos $U = \{(x, t) \in X \times [0, 1] : d(x, p) \geq t\}$ y $V = \{(x, t) \in X \times [0, 1] : d(x, p) \leq t\}$ son cerrados

en $X \times [0, 1]$. Además, $U \cup V = X \times [0, 1]$. Así, basta probar que H es continua en estos dos conjuntos. Observemos que H es continua en V . Para probar que H es continua en U consideremos una sucesión $\{(x_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ en U que converge a (x, t) en U . Sea y un punto en la cerradura de $\{H((x_n, t_n)) : n \in \mathbb{N}\}$. Dado que $H((x_n, t_n)) \leq_p x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y \leq_p es cerrado se tiene que $y \leq_p x$ (vea el Lema 2.42 y la Definición 2.41). Como $d(H((x_n, t_n)), p) = t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t_n \rightarrow t$, la continuidad de d implica que $d(y, p) = t$. Se sigue que y es el único punto en el arco px tal que $d(y, p) = t$, es decir, $H((x, t)) = y$. Como X es compacto, esto establece la continuidad de H .

Observemos que H cumple las siguientes condiciones.

- (i) $H((x, 0)) = p$,
- (ii) $H((x, 1)) = x$, para cada $x \in X$,
- (iii) $H((H((x, s)), t)) = H((x, \min\{s, t\}))$, para cada $x \in X$ y para cada $s, t \in [0, 1]$.

Ahora, Definamos $\mathcal{H} : \mathcal{TD}(X) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{CL}(X)$ dada por $\mathcal{H}((A, t)) = H(A \times \{t\})$, para cada $(A, t) \in \mathcal{TD}(X) \times [0, 1]$. Notemos que \mathcal{H} está bien definida ya que H es continua y $A \times \{t\}$ es compacto en $X \times [0, 1]$. Además, por las condiciones (i) y (ii) tenemos que $\mathcal{H}((A, 0)) = \{p\}$ y $\mathcal{H}((A, 1)) = A$, para cada $A \in \mathcal{TD}(X)$. Por otro lado, la función inducida $\mathbb{H} : \mathcal{CL}(X \times [0, 1]) \rightarrow \mathcal{CL}(X)$ dada por $\mathbb{H}(E) = H(E)$, para cada $E \in \mathcal{CL}(X \times [0, 1])$ es continua ya que H lo es (vea [9, Lema 13.3]). En consecuencia la función \mathcal{H} es continua.

Ahora, para cada $t \in (0, 1)$ sea $F_t = \{x \in X : d(x, p) \leq t\}$ y $B_t = \{x \in X : d(x, p) = t\}$. Notemos que para cada $x \in X$, $H((x, t)) \in F_t$. Fijemos un elemento $A \in \mathcal{TD}(X)$.

Afirmación 3. Se tiene que $H(A \times \{t\}) \subseteq (A \cap F_t) \cup B_t$ para cada $t \in (0, 1)$.

Sean $t \in (0, 1)$ y $H((a, t)) \in H(A \times \{t\})$. Se tiene que $a \in F_t$ o $a \notin F_t$. Si $a \in F_t$, tenemos que $H((a, t)) = a \in A \cap F_t$. Ahora, si $a \in X - F_t$, entonces $d(a, p) > t$. Luego, por la definición de H se tiene que $H((a, t))$ es un punto en X tal que $d(p, H((a, t))) = t$, de donde $H((a, t)) \in B_t$. Esto prueba la Afirmación 3.

Afirmación 4. Los conjuntos F_t y B_t son cerrados, para cada $t \in [0, 1]$.

Para esto, basta recordar que la función $d : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x) = d(x, p)$ es continua y notar que $F_t = d^{-1}([0, t])$ y $B_t = d^{-1}(t)$.

Afirmación 5. El conjunto B_t es totalmente desconexo para cada $t \in (0, 1)$.

Sean $x \in B_t$ y K la componente conexa de x en B_t . Notemos que $K \in \mathcal{C}(X)$, ya que B_t es cerrado en X (vea la Afirmación 4). Si existe $z \in K - \{x\}$, como X es arco conexo y hereditariamente unicoherente existe un arco L en K desde x hasta z . Notemos que $x, z \in L \subseteq K \subseteq B_t$. Además, $x \neq p$ ya que para cada $t \in (0, 1)$, $p \notin B_t$ puesto que $p \in F_0$. En consecuencia x, p y z son tres puntos distintos en X . También observemos que $p \notin L$. Consideremos el arco en X , px , desde p hasta x y sea w la primera vez que el arco px intersecta al arco xz . Se sigue que $w \in L$ y $pw \cap xz = \{w\}$. Dado que $w \in L \subseteq B_t$ y $p \notin B_t$ tenemos que $p \neq w$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $z \neq w$. Como $p, z \in H(\{z\} \times [0, t])$ (ya que $H((z, 0)) = p$ y $z \in L \subseteq K \subseteq B_t$) y $H(\{z\} \times [0, t])$ es conexo tenemos que $w \in H(\{z\} \times [0, t])$ ($pw = pw \cup wz$). Luego, existe $r \in [0, t]$ tal que $H((z, r)) = w$. Si $r = t$, entonces $w = H((z, t)) = z$ ya que $z \in B_t \subseteq F_t$, de donde $w = z$ lo cual es una contradicción. Así, $r \in [0, t)$ y $H((z, r)) = w$, es decir, $w \in F_r$ con $r < t$, por lo cual $w \notin B_t$ lo que contradice el hecho de que $w \in L \subseteq K \subseteq B_t$. Esto prueba la Afirmación 5.

Finalmente, dado $t_0 \in (0, 1)$ tenemos por la Afirmación 3 que $\mathcal{H}((A, t_0)) = H(A \times \{t_0\}) \subseteq (A \cap F_{t_0}) \cup B_{t_0}$. Notemos que $(A \cap F_{t_0})$ y B_{t_0} son subconjuntos compactos y totalmente desconexos (vea la Afirmación 4). Luego, por el Teorema 1.22 tenemos que $(A \cap F_{t_0}) \cup B_{t_0}$ es totalmente desconexo, así $\mathcal{H}((A, t_0))$ es totalmente desconexo. Con todo lo anterior hemos probado que \mathcal{H} es una función continua de $\mathcal{TD}(X) \times [0, 1]$ a $\mathcal{TD}(X)$ tal que $\mathcal{H}((A, 0)) = \{p\}$ y $\mathcal{H}((A, 1)) = A$ para cada $A \in \mathcal{TD}(X)$. \square

En seguida mencionamos algunas consecuencias inmediatas del Teorema 2.44.

2.45 Corolario. Si X es un dendroide suave, entonces $\mathcal{TD}(X)$ es conexo por trayectorias.

2.46 Definición. Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

El siguiente resultado lo puede consultar en [13, Teorema 8, pag. 116].

2.47 Teorema. Un continuo X es una dendrita si, y sólo si, X es un dendroide suave en cada uno de sus puntos.

2.48 Corolario. Si X es una dendrita, entonces $\mathcal{TD}(X)$ es conexo por trayectorias.

2.49 Definición. Un continuo es una **dendrita local** si cada uno de sus puntos tiene una vecindad la cual es una dendrita.

2.50 Corolario. Si X es una dendrita local, entonces $\mathcal{TD}(X)$ es conexo por trayectorias.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $A \in \mathcal{TD}(X)$. Por [12, Teorema 9, pag. 307] $X = Y \cup Z$, donde Y y Z son dendritas. Fijemos un punto $p \in Y \cap Z$. Ahora, por el Corolario 2.48, existen funciones continuas, $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}(Y)$ y $\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}(Z)$, tales que $\alpha_1(0) = A \cap Y$, $\alpha_1(1) = \{p\}$, $\alpha_2(0) = A \cap Z$ y $\alpha_2(1) = \{p\}$. Definamos $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}(X)$ dada por $\alpha(t) = \alpha_1(t) \cup \alpha_2(t)$. Por el Teorema 1.22 tenemos que α esta bien definida. Notemos que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = \{p\}$. Es claro que α es continua (vea [10, Lema 1.1 (a)]). En consecuencia, cualquier elemento de $\mathcal{TD}(X)$ se puede unir mediante una trayectoria con $\{p\}$. \square

En seguida mostramos un ejemplo de un dendroide (no suave) cuyo hiperespacio $\mathcal{TD}(X)$ no es conexo por trayectorias. Para esto primero recordamos una definición la cual puede consultar en [1, D5].

2.51 Definición. Un continuo X es **uniformemente arco conexo** si X es arcoconexo y si para cada $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que cada arco A en X contiene puntos a_0, a_1, \dots, a_k tales que $A = a_0a_1 \cup \dots \cup a_{k-1}a_k$ y $\text{diám}(a_i a_{i+1}) < \varepsilon$ para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

2.52 Ejemplo. Sea L_0 el segmento de recta que une el punto $(0, 0)$ con el punto $(1, 0)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $x_n = (1, \frac{1}{n})$, $y_{in} = (1, \frac{1}{n} - \frac{i}{2n^2(n+1)})$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ y $z_{in} = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4} - \frac{i}{2n^2(n+1)})$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean H_n el segmento de recta que une el punto x_n con el punto z_{1n} , I_n el segmento de recta que une al punto $(0, 0)$ con el punto x_n , J_{in} el segmento de recta que une el punto z_{in} con el punto y_{in} con $i \in \{1, \dots, n\}$ y K_{in} el segmento de recta que une el punto y_{in} con el punto $z_{(i+1)n}$ con $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos $L_n = H_n \cup I_n \cup (\bigcup\{J_{in} : i \in \{1, \dots, n\}\}) \cup (\bigcup\{K_{in} : i \in \{1, \dots, n-1\}\})$ y $X = L_0 \cup (\bigcup\{L_n : n \in \mathbb{N}\})$, vea la figura 2.1, nosotros probaremos que $\mathcal{TD}(X)$ no es conexo por trayectorias.

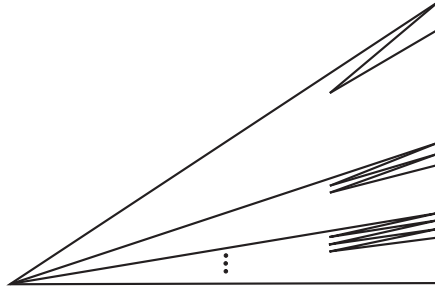


Figura 2.1: Un dendroide X con hiperespacio $\mathcal{TD}(X)$ no conexo por trayectorias

Para probar que $\mathcal{TD}(X)$ no es conexo por trayectorias consideremos $S_0 = \{(0, 0)\}$ y $S_1 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 0)\} \cup \{y_{in} : n \in \mathbb{N} \text{ y } i \in \{1, \dots, n\}\}$ elementos en $\mathcal{TD}(X)$. Supongamos que existe una función continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}(X)$ tal que $f(0) = S_0$ y $f(1) = S_1$. Notemos que S_0 está contenido en un subcontinuo uniformemente arco conexo de X y S_1 no está contenido en algún subcontinuo uniformemente arco conexo de X . Sea

$r = \sup\{s \in [0, 1] : f(t) \text{ está contenido en algún subcontinuo uniformemente}$

arco conexo de X , para cada $t \leq s\}$.

Por el Teorema 2.30 podemos considerar U_1, \dots, U_k bolas abiertas en X , ajenas dos a dos tales que $\text{diám}(U_i) < \frac{1}{8}$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ y $f(r) \in \mathcal{U} = \langle U_1, \dots, U_k \rangle$. En lo que sigue consideramos dos casos.

Caso 1. $f(r)$ está contenido en un subcontinuo uniformemente arco conexo de X . Notemos que $0 \leq r < 1$. Sea $t_0 \in (r, 1]$ tal que $f([r, t_0]) \subseteq \mathcal{U}$ y tal que $f(t_0)$ no está contenido en un subcontinuo uniformemente arco conexo. Así para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ con $N > n$ tal que $f(t_0) \cap J_{iN} \neq \emptyset$ o $f(t_0) \cap K_{iN} \neq \emptyset$ para algún $i > N$. Se sigue que $f(t_0)$ tiene un punto de acumulación en el segmento de recta que une al punto $(\frac{3}{4}, 0)$ con el punto $(1, 0)$. Denotemos tal punto por x_0 . Sin perder generalidad supongamos que $x_0 \in U_1$. Como $f(r)$ está contenido en un subcontinuo uniformemente arco conexo de X , podemos considerar $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(r) \cap J_{in} = \emptyset$ para cada $n \geq m$ y cada $i \in \{m, \dots, n\}$ y $f(r) \cap K_{in} = \emptyset$ para cada $n \geq m$ y cada $i \in \{m, \dots, n-1\}$. Fijemos C una componente de U_1 tal que $f(t_0) \cap C \cap (J_{jN} \cup K_{lM}) \neq \emptyset$ con $N, M > 2m$, $j \in \{2m, \dots, N\}$ y $l \in \{2m, \dots, M-1\}$. Notemos que $f(r) \cap C = \emptyset$. Definamos $D = \overline{C \cap \bigcup f([r, t_0])}$. Observe que D es un subconjunto cerrado de $\bigcup f([r, t_0])$ ya que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\overline{D} \subseteq \overline{C} \cap \bigcup f([r, t_0]) \subseteq \overline{C} \cap \bigcup f([r, t_0])$, vea [18, Teorema 2.5].

Ahora, notemos que $f|_{[r, t_0]}$ y D satisfacen las condiciones del Lema 2.34, en consecuencia si $u = \inf\{s \in [r, t_0] : f(s) \cap D \neq \emptyset\}$, entonces $f(u) \cap D \neq \emptyset$. Como $f(r) \cap C = \emptyset$ y $D \subseteq C$ tenemos que $r < u$. Consideremos los conjuntos abiertos C y $\mathcal{V} = \langle C, U_1, \dots, U_m \rangle$. Como $f(u) \cap D \neq \emptyset$ y $f(u) \in f([r, t_0]) \subseteq \mathcal{U}$ se tiene que $f(u) \in \mathcal{V}$. Luego, $f^{-1}(\mathcal{V})$ es un conjunto abierto en $[0, 1]$ tal que $u \in f^{-1}(\mathcal{V})$ y $f^{-1}(\mathcal{V}) \cap [r, u) = \emptyset$, esto contradice la continuidad de la función f .

Caso 2. $f(r)$ no está contenido en un subcontinuo arco conexo. En este caso, notemos que $0 < r$ y que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ con $N > n$ tal que $f(r) \cap J_{iN} \neq \emptyset$ o $f(r) \cap K_{iN} \neq \emptyset$ para algún $i > N$. Se sigue que $f(r)$ tiene un punto de acumulación en el segmento de recta que une al punto $(\frac{3}{4}, 0)$ con el punto $(1, 0)$. Denotemos tal punto por x_0 . Sin perder generalidad supongamos que $x_0 \in U_1$. Fijemos un punto $t_0 \in [0, r)$ tal que $f([t_0, r]) \subseteq \mathcal{U}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal

que $f(t_0) \cap J_{in} = \emptyset$ para cada $n \geq m$ y cada $i \in \{m, \dots, n\}$ y $f(t_0) \cap K_{in} = \emptyset$ para cada $n \geq m$ y cada $i \in \{m, \dots, n-1\}$. Fijemos C una componente de U_1 tal que $f(r) \cap C \cap (J_{jN} \cup K_{lM}) \neq \emptyset$ con $N, M > 2m$, $j \in \{2m, \dots, N\}$ y $l \in \{2m, \dots, M-1\}$. Notemos que $f(t_0) \cap C = \emptyset$. Definamos $D = C \cap [\bigcup f([t_0, r])]$. Observe que D es un subconjunto cerrado de $\bigcup f([t_0, r])$ ya que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\overline{D} \subseteq \overline{C} \cap \bigcup f([t_0, r]) \subseteq \overline{C} \cap \bigcup f([t_0, r])$, vea [18, Teorema 2.5].

Ahora, notemos que $f|_{[t_0, r]}$ y D satisfacen las condiciones del Lema 2.34, en consecuencia si $u = \inf\{s \in [t_0, r] : f(s) \cap D \neq \emptyset\}$, entonces $f(u) \cap D \neq \emptyset$. Como $f(t_0) \cap C = \emptyset$ y $D \subseteq C$ tenemos que $t_0 < u$. Consideremos los conjuntos abiertos C y $\mathcal{V} = \langle C, U_1, \dots, U_m \rangle$. Como $f(u) \cap D \neq \emptyset$ y $f(u) \in f([t_0, r]) \subseteq \mathcal{U}$ se tiene que $f(u) \in \mathcal{V}$. Luego, $f^{-1}(\mathcal{V})$ es un conjunto abierto en $[0, 1]$ tal que $u \in f^{-1}(\mathcal{V})$ y $f^{-1}(\mathcal{V}) \cap [t_0, u) = \emptyset$, esto contradice la continuidad de la función f .

Por lo tanto, no existe una función continua, $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}(X)$, tal que $f(0) = S_0$ y $f(1) = S_1$.

Hasta este punto, hemos mostrado dos ejemplos de dos continuos cuyos hiperespacios de los conjuntos totalmente desconexos no son conexos por trayectorias, vea los ejemplos 2.52 y 2.35. Lo que nos conduce a la pregunta ¿Cuántas componentes por trayectorias tendrá nuestro hiperespacio de estudio para dichos continuos?. Para intentar responder dicha pregunta, enunciaremos las siguientes definiciones y demostramos una serie de resultados.

Los siguientes dos resultados fueron probados en el Lema 2.28. El significado de $\dim(X) = 0$ lo puede consultar en la Definición 1.25.

2.53 Lema. Sea X un espacio T_1 . Si $\dim(X) = 0$, entonces X es totalmente desconexo.

2.54 Lema. Sea X un espacio compacto y Hausdorff, entonces $\dim(X) = 0$ si, y sólo si, X es totalmente desconexo.

Como consecuencia de los Lemas 2.53 y 2.54 se tiene el siguiente Corolario.

2.55 Corolario. Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff, entonces $\dim(X) = 0$, si, y sólo si, X es totalmente desconexo.

2.56 Lema. [3, Teorema 3.3.1] Si X es un espacio localmente compacto y Hausdorff, entonces X es $T_{3\frac{1}{2}}$.

El siguiente resultado es una consecuencia de [3, Proposición 1.5.5].

2.57 Lema. Si X es un espacio T_3 , $K \subseteq X$ es compacto y $L \in \mathcal{CL}(X)$ tal que $K \cap L = \emptyset$, entonces existe V abierto en X tal que $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X - L$.

2.58 Lema. [3, Teorema 3.3.2] Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. Si $K \subseteq X$ es compacto y W es abierto en X tal que $K \subseteq W$, entonces existe V abierto en X tal que $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq W$ y \overline{V} es compacto.

2.59 Definición. Decimos que un espacio X es un **espacio de Lindelöf** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.

2.60 Lema. [3, Teorema 3.8.4] Si X es un espacio de Lindelöf y $D \in \mathcal{CL}(X)$, entonces D es de Lindelöf.

2.61 Definición. Un espacio X es numerablemente compacto si toda cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita.

2.62 Lema. [3, Teorema 3.10.3] Sea X un espacio. Entonces X es numerablemente compacto si, y sólo si, todo subconjunto infinito numerable de X tiene algún punto de acumulación.

2.63 Lema. [3, Teorema 3.10.1] Sea X un espacio de Lindelöf, entonces X es compacto si, y sólo si, X es numerablemente compacto.

2.64 Lema. [3, Teorema 3.8.3] Si X es un espacio de Lindelöf y T_3 , entonces X es T_4 .

2.65 Lema. Sean X un espacio Hausdorff y $C \subseteq X$ cerrado, discreto y numerable. Si $A, B \subseteq C$ y $A - B$ es infinito, entonces A no es compacto y $A - B$ tampoco lo es.

DEMOSTRACIÓN. Como $A - B$ es infinito se tiene que A es infinito. Para cada $a \in A$, fijemos U_a abierto en X tal que $U_a \cap A = \{a\}$. Luego, $\{U_a : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A que no tiene subcubiertas finitas. De manera análoga se muestra que $A - B$ no es compacto. \square

2.66 Lema. Sean X un espacio Hausdorff, $E \in \mathcal{CL}(X)$ y $K \subseteq X$ compacto. Si E no es compacto, entonces $E - K$ es infinito.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $E - K$ es finito y sea \mathcal{U} una cubierta abierta de $K \cup E$. Como K es compacto, existen U_1, \dots, U_n abiertos en X tales que $K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$. Sea $E - K = \{x_1, \dots, x_m\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, fijemos $V_i \in \mathcal{U}$ tal que $x_i \in V_i$. Se sigue que $K \cup E \subseteq (U_1 \cup \dots \cup U_n) \cup (V_1 \cup \dots \cup V_m)$, en consecuencia $K \cup E$ es compacto. Dado que $E \in \mathcal{CL}(X)$ y $E \subseteq E \cup K$ tenemos que E es compacto, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $E - K$ es infinito. \square

2.67 Lema. Sea X un espacio T_3 . Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ es discreto, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe W_n abierto en X tal que $x_n \in W_n$, y $W_i \cap W_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto, para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_i \in X - \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N} - \{i\}\}}$. Por el Lema 2.57, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe U_i abierto en X tal que $x_i \in U_i$ y $\overline{U_i} \cap \{x_n : n \in \mathbb{N} - \{i\}\} = \emptyset$. Sea $W_1 = U_1$ y denotemos $W_i = U_i - (\overline{U_1} \cup \dots \cup \overline{U_{i-1}})$, para toda $i \geq 2$. Notemos que $x_i \in W_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Ahora, sean $i, j \in \mathbb{N}$ con $i < j$. Dado $x \in W_j$, se tiene que $x \notin \overline{U_i}$, en consecuencia $x \notin W_i$. \square

2.68 Proposición. Para cada $A, B \subseteq \mathbb{N}$, decimos que $A \sim B$ si, y sólo si, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A \cap [N, \infty) = B \cap [N, \infty)$. Se cumplen las siguientes condiciones.

- (1) La relación \sim es de equivalencia.
- (2) Si $A, B \subseteq \mathbb{N}$ son finitos, entonces $A \sim B$.
- (3) La clase $[A]_{\sim}$ es numerable, para cada $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- (4) Hay tantas clases de equivalencia como números reales.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$.

(1) Es claro que $A \sim A$ y también que si $A \sim B$ entonces $B \sim A$. Ahora, si $A \sim B$ y $B \sim C$ se tiene que existen $N, M \in \mathbb{N}$ tales que $A \cap [N, \infty) = B \cap [N, \infty)$ y $B \cap [M, \infty) = C \cap [M, \infty)$. Sea $m = \max\{M, N\}$. Se sigue que $A \cap [m, \infty) = B \cap [m, \infty) = C \cap [m, \infty)$, de donde $A \sim C$.

(2) Si A y B son finitos consideremos $m = \max A$ y $n = \max B$. Dado $N = \max\{m, n\} + 1$, se tiene que $A \cap [N, \infty) = \emptyset = B \cap [N, \infty)$.

(3) Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{L}_k = \{E \subseteq \mathbb{N} : A \cap [k, \infty) = E \cap [k, \infty)\}$.

Afirmamos que $|\mathcal{L}_k| < \omega$.

En efecto, definamos $f_k : \mathcal{P}(\{1, \dots, k-1\}) \rightarrow \mathcal{L}_k$ dada por $f(E) = E \cup (A \cap [k, \infty))$. Veamos que f_k es sobreyectiva. Sea $D \in \mathcal{L}_k$. Se tiene que $D \cap \{1, \dots, k-1\} \in \mathcal{P}(\{1, \dots, k-1\})$. Ahora, $f_k(D \cap \{1, \dots, k-1\}) = (D \cap \{1, \dots, k-1\}) \cup (A \cap [k, \infty)) = (D \cap \{1, \dots, k-1\}) \cup (D \cap [k, \infty)) = D \cap \mathbb{N} = D$. Por lo tanto f_k es sobreyectiva. En consecuencia, $2^{k-1} = |\mathcal{P}(\{1, \dots, k-1\})| \geq |\mathcal{L}_k|$. Esto prueba la Afirmación.

Por otro lado, observemos que $[A]_{\sim} = \bigcup \{\mathcal{L}_k : k \in \mathbb{N}\}$. Se sigue que $[A]_{\sim}$ es numerable, para cada $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(4) Observemos que $\{[A]_{\sim} : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ es una partición de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Como $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ y $[A]_{\sim}$ es numerable, para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, se tiene que hay tantas clases de equivalencia como números reales. \square

2.69 Teorema. Si X es segundo numerable, entonces $|\tau| \leq |\mathbb{R}|$, donde τ denota la topología de X .

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ una base numerable para la topología de X . Para cada subconjunto abierto, U , de X fijemos un subconjunto, digamos N_u , de \mathbb{N} tal que $U = \bigcup \{B_i : i \in N_u\}$. Definamos $f : \tau \rightarrow \{A : A \subseteq \mathbb{N}\}$ dada por $f(U) = N_u$. Es claro que f es una función inyectiva. \square

2.70 Corolario. Si X es segundo numerable, entonces $|\mathcal{CL}(X)| \leq |\mathbb{R}|$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ es abierto en } X\}$. Definamos $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{CL}(X)$ por $f(A) = X - A$, para cada $A \in \mathcal{A}$. Es claro que f es una función biyectiva. Por el Teorema 2.69, el corolario esta probado. \square

2.71 Lema. Sea X un espacio Hausdorff y localmente compacto. Sean K un subconjunto compacto de X , $P \in \mathcal{CL}(X)$ y $B \subseteq X$ tales que $P - K \subseteq B$. Supongamos que $P - K = \{c_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{CL}(X)$ es discreto y $c_n \neq c_m$ para cada $n \neq m$. Si existe $\{P_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{CL}(X)$ tal que $P_k \rightarrow P$ y $\overline{P_k - B}$ no es compacto, para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces existe V abierto en X , existe $M \in \mathbb{N}$ y para cada $m \in \mathbb{N}$ existe U_m abierto y existe $n_m \in \mathbb{N}$ tales que:

- (1) Los elementos de $\{U_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{V\}$ son ajenos dos a dos.
- (2) Se tiene que $c_m \in U_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$ y $K \subseteq V$.
- (3) Se tiene que $n_m < n_{m+1}$, para cada $m \in \mathbb{N}$.
- (4) Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $x_m \in P_{M+m} \cap (U_{n_m} - \{c_{n_m}\})$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 2.56 tenemos que X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, y así T_3 . Luego, por los Lemas 2.57 y 2.58, existe V abierto en X tal que $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X - (P - K)$ y \overline{V} es compacto. Ahora, por el Lema 2.67, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe V_m abierto en X tal que $c_m \in V_m$ y $V_n \cap V_m = \emptyset$, si $n \neq m$. Como X es T_3 (Lema 2.56), para cada $m \in \mathbb{N}$, existen abiertos en X , W_m y W'_m tales que $c_m \in W_m$, $\overline{V} \subseteq W'_m$ y $W_m \cap W'_m = \emptyset$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $U'_m = W_m \cap V_m$. Se tiene que $U'_m \cap U'_n = \emptyset$ si $n \neq m$ ya que para cada $n \in \mathbb{N}$, $U'_n \subseteq V_n$ y $V_n \cap V_m = \emptyset$. Además, dado $m \in \mathbb{N}$, $U'_m \cap V = \emptyset$ ya que $U'_m \subseteq W_m$, $W_m \cap W'_m = \emptyset$ y $\overline{V} \subseteq W'_m$. Por el Lema 2.58, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe U_m abierto en X tal que $c_m \in U_m \subseteq \overline{U_m} \subseteq U'_m$ y

$\overline{U_m}$ es compacto. Notemos que la familia $\{U_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{V\}$ satisface las condiciones (1) y (2) de este Lema.

Para probar las condiciones (3) y (4), sea $U = V \cup (\bigcup\{U_m : m \in \mathbb{N}\})$. Es claro que $P \in \langle U \rangle$. Como $P_k \rightarrow P$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $P_k \in \langle U \rangle$, para todo $k > M$. Si $\overline{P_{M+1} - B} \subseteq \overline{V}$, por la compacidad de \overline{V} , tenemos que $\overline{P_{M+1} - B}$ es compacto, lo cual contradice la hipótesis del Lema. En consecuencia, existe $y_1 \in \overline{P_{M+1} - B} - \overline{V} \subseteq P_{M+1} - V$ (ya que $P_{M+1} - B \subseteq P_{M+1}$). Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y_1 \in U_{n_1}$. Luego, existe $x_1 \in (P_{M+1} - B) \cap U_{n_1}$. Notemos que $x_1 \neq c_{n_1}$ ya que $c_{n_1} \in P - K \subseteq B$, de donde $x_1 \in (P_{M+1} - B) \cap (U_{n_1} - \{c_{n_1}\}) \subseteq P_{M+1} \cap (U_{n_1} - \{c_{n_1}\})$. De esta forma, supongamos que se han construido $n_1 < \dots < n_j$ y puntos $x_1, \dots, x_j \in X$ tales que $x_i \in P_{M+i} \cap (U_{n_i} - \{c_{n_i}\})$. Ahora, como $\overline{P_{M+j+1} - B} \subseteq P_{M+j+1}$ no es compacto y $\overline{V \cup U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_j}}$ es compacto, existe un punto $y_{j+1} \in \overline{P_{M+j+1} - B} - (\overline{V \cup U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_j}})$. Luego, existe $n_{j+1} \in \mathbb{N}$ tal que $y_{j+1} \in U_{n_{j+1}}$. Sea $x_{j+1} \in (P_{M+j+1} - B) \cap (U_{n_{j+1}} - \{c_{n_{j+1}}\}) \subseteq P_{M+j+1} \cap (U_{n_{j+1}} - \{c_{n_{j+1}}\})$. Finalmente, si es necesario reordenamos n_1, \dots, n_j, n_{j+1} . Así, inductivamente hemos probado las condiciones (3) y (4) del Lema. \square

La siguiente definición será de gran utilidad en las pruebas de los siguientes resultados.

2.72 Definición. Decimos que un subconjunto A de un espacio X es **cerra-abierto** en X si A es cerrado y abierto en X .

2.73 Lema. Sea E un espacio T_4 tal que $\dim(E) = 0$. Sea $Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ cerrado, discreto e infinito. Si $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia celular de cerra-abiertos en E tal que $y_n \in Q_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una familia celular, $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, de cerra-abiertos en E tal que $y_n \in V_n \subseteq Q_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{CL}(E)$. Más aún, si $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{CL}(E)$ es tal que $P_n \subseteq V_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{CL}(E)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $L = \overline{\bigcup\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}} - \bigcup\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si L es vacío no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que L es no vacío. Notemos que $Y \subseteq E - L$ y L es cerrado. Como E es T_4 , existe W_0 abierto en E tal que $Y \subseteq W_0 \subseteq \overline{W_0} \subseteq E - L$. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in Q_n \cap W_0$ y $Q_n \cap W_0$ es abierto en E . Como $\dim(E) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe V_n abierto y cerrado en E , tal que $y_n \in V_n \subseteq Q_n \cap W_0$. Es claro que $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia celular en E .

Afirmamos que $\bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{CL}(E)$.

Para probar esta Afirmación, dado que $V_n \subseteq Q_n \cap W_0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq (\bigcup\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}) \cap W_0$, de donde $\bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup\{Q_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \overline{W_0} \subseteq \bigcup\{Q_n : n \in \mathbb{N}\} \cap (E - L)$. En consecuencia $\bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Luego, dado $x \in \overline{\bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N}\}}$, tenemos que $x \in Q_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in Q_n - V_n$, se tiene que $(Q_n - V_n) \cap (\bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N}\}) = \emptyset$ ($Q_n \cap Q_m = \emptyset$, si $n \neq m$), lo cual contradice el hecho de que $x \in \overline{\bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Por lo tanto, $x \in V_n$. Esto prueba la Afirmación.

De igual forma que en la Afirmación, se prueba que si $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{CL}(E)$ es tal que $P_n \subseteq V_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{CL}(E)$. \square

2.74 Lema. Sea X un espacio T_4 . Si $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia tal que $P_n \cap P_m = \emptyset$ si $n \neq m$; $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{CL}(X)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ P_n es cerra-abierto en $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces existe una familia celular $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $P_n \subseteq U_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que P_m y $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N} - \{m\}\}$ son cerrados en $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$, en consecuencia P_m y $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N} - \{m\}\}$ son cerrados

ajenos en X . Como X es T_4 , para cada $m \in \mathbb{N}$, existe W_m abierto en X tal que $P_m \subseteq W_m$ y $W_m \cap \bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N} - \{m\}\} = \emptyset$. Dado que X es T_4 , para cada $m \in \mathbb{N}$ existe V_m abierto en X tal que $P_m \subseteq V_m \subseteq \overline{V_m} \subseteq W_m$. Sea $U_1 = V_1$ y $U_m = V_m - (\overline{V_1} \cup \dots \cup \overline{V_{m-1}})$. Es claro que la familia $\{U_m : m \in \mathbb{N}\}$ satisface el Lema. \square

2.75 Lema. Sea X un espacio T_4 y localmente compacto. Sean $E, B \in \mathcal{TD}(X)$. Sea $Y \subseteq \overline{E - B}$ cerrado, discreto e infinito numerable. Entonces existe V abierto y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe U_n abierto en X tales que

- (1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $V \cap U_n = \emptyset$ y $U_n \cap U_m = \emptyset$, con $n \neq m$.
- (2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \cap E \neq \emptyset$ y $B \subseteq V$.
- (3) $E \subseteq V \cup (\bigcup\{U_n : n \in \mathbb{N}\})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por el Lema 2.67, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe W_n abierto en X tal que $y_n \in W_n$ y $W_n \cap W_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Ahora, por el Corolario 2.55, se tiene que E es 0-dimensional, en consecuencia, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe O_n cerra-abierto en E tal que $y_n \in O_n \subseteq W_n$. Luego, por el Lema 2.73, existe una familia celular $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cerra-abiertos en E tales que $y_n \in V_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{CL}(E)$. Observe que $\bigcup\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{CL}(X)$. Dado que para cada $n \in \mathbb{N}$ $y_n \in \overline{E - B}$ y $y_n \in V_n$, existe $x_n \in V_n \cap (E - B) = V_n - B$. Como E es 0-dimensional, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe P_n cerra-abierto en E tal que $x_n \in P_n \subseteq V_n - B$. Luego, por el Lema 2.73 podemos suponer que $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{CL}(E)$ de donde $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado en X . Observemos que $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ cumple las condiciones del Lema 2.74, así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe Q_n abierto en X tal que $P_n \subseteq Q_n$ y $Q_n \cap Q_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Por otro lado, notemos que $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E - B$. Se sigue que $B \cup (E - \bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\})$ y $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ son cerrados ajenos en X . Como X es T_4 existen V y W abiertos ajenos en X tales que $B \cup (E - \bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\}) \subseteq V$ y $\bigcup\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq W$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = Q_n \cap W$. Es claro que $\{V\} \cup \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface las condiciones (1) y (3) del Lema. Para probar la condición (2), notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in P_n \subseteq Q_n \cap W \cap E = U_n \cap E$. \square

2.76 Lema. Sean X un espacio y \mathcal{A} un subespacio conexo de $\mathcal{CL}(X)$. Si K es un subconjunto abierto, cerrado y no vacío de $\bigcup\mathcal{A}$, entonces $A \cap K \neq \emptyset$ para cada $A \in \mathcal{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap K = \emptyset$. Como K es abierto en $\bigcup\mathcal{A}$, existe U abierto en X tal que $K = U \cap (\bigcup\mathcal{A})$.

Afirmación 1. Tenemos que $K^- \cap \mathcal{A} = U^- \cap \mathcal{A}$.

Para probar esta Afirmación, dado $B \in K^- \cap \mathcal{A}$ se tiene que $B \cap K \neq \emptyset$ y $B \in \mathcal{A}$. Como $K \subseteq U$ obtenemos que $B \cap U \neq \emptyset$ y $B \in \mathcal{A}$, por lo cual $B \in U^- \cap \mathcal{A}$. Por lo tanto $K^- \cap \mathcal{A} \subseteq U^- \cap \mathcal{A}$. Por otro lado, dado $E \in U^- \cap \mathcal{A}$ tenemos que $E \cap U \neq \emptyset$ y $E \in \mathcal{A}$. Se sigue que $E \cap U \neq \emptyset$ y $E \subseteq \bigcup\mathcal{A}$, de donde $\emptyset \neq E \cap U \subseteq E \cap (\bigcup\mathcal{A}) \cap U = E \cap K$. Así, $E \in K^- \cap \mathcal{A}$. Esto prueba la Afirmación 1.

Ahora, como K es cerrado en $\bigcup\mathcal{A}$ tenemos que $\bigcup\mathcal{A} - K$ es abierto en $\bigcup\mathcal{A}$. En consecuencia, existe V abierto en X tal que $\bigcup\mathcal{A} - K = V \cap (\bigcup\mathcal{A})$.

Afirmación 2. Tenemos que $(\bigcup\mathcal{A} - K)^+ \cap \mathcal{A} = V^+ \cap \mathcal{A}$.

Para probar esta Afirmación, sea $C \in (\bigcup\mathcal{A} - K)^+ \cap \mathcal{A}$. Como $(\bigcup\mathcal{A} - K) \subseteq V$ se tiene que $C \in V^+ \cap \mathcal{A}$. Por otro lado, dado $D \in V^+ \cap \mathcal{A}$ tenemos que $D \subseteq V$ y $D \subseteq \bigcup\mathcal{A}$. Se sigue que $D \subseteq V \cap (\bigcup\mathcal{A}) = \bigcup\mathcal{A} - K$. Así, $D \in (\bigcup\mathcal{A} - K)^+ \cap \mathcal{A}$. Esto prueba la Afirmación 2.

Notemos que $\mathcal{A} = [(\bigcup \mathcal{A} - K)^+ \cap \mathcal{A}] \cup [K^- \cap \mathcal{A}]$, $A \in (\bigcup \mathcal{A} - K)^+ \cap \mathcal{A}$. Además, como $K \neq \emptyset$ y $K \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ se tiene que $K^- \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. También, observemos que $[(\bigcup \mathcal{A} - K)^+ \cap \mathcal{A}] \cap [K^- \cap \mathcal{A}] = \emptyset$. Por las Afirmaciones 1 y 2, $(\bigcup \mathcal{A} - K)^+ \cap \mathcal{A}$ y $K^- \cap \mathcal{A}$ son abiertos en \mathcal{A} . Con todo esto tenemos que \mathcal{A} no es conexo, lo cual es una contradicción. \square

El siguiente resultado es uno de los resultados más importantes que obtuvimos durante el desarrollo de este trabajo. Dicho resultado está incluido en nuestro artículo *The hyperspace of totally disconnected sets*, vea [4].

2.77 Teorema. Sea X un espacio Hausdorff, localmente compacto y Lindelöf. Si C es un subconjunto cerrado, discreto y numerable de X y A y B son subconjuntos de C tales que $A - B$ es infinito, entonces no existe una trayectoria de A a B en $\mathcal{TD}(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe una trayectoria $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}(X)$ tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(1) = A$. Sean $T = \{t \in [0, 1] : \overline{\alpha(t) - B} \text{ es compacto}\}$ y $t_0 = \sup T$. Observe que $0 \in T$. Ahora por el Lema 2.65, A no es compacto y $A - B$ tampoco lo es. Como $A - B$ es infinito tenemos que $\overline{A - B}$ es un subconjunto infinito de C . En consecuencia $\overline{A - B}$ no es compacto, es decir, $1 \notin T$. Supongamos que $t_0 \notin T$, es decir, $\overline{\alpha(t_0) - B}$ no es compacto. Por el Lema 2.63 tenemos que $\overline{\alpha(t_0) - B}$ no es numerablemente compacto, luego por el Lema 2.62 existe $Y \subseteq \overline{\alpha(t_0) - B}$ cerrado, discreto e infinito numerable. Por el Lema 2.75, existe un subconjunto abierto V de X y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un subconjunto abierto U_n de X que cumplen las siguientes condiciones.

- (1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \cap V = \emptyset$ y $U_n \cap U_m = \emptyset$ si $n \neq m$.
- (2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \cap \alpha(t_0) \neq \emptyset$.
- (3) $\alpha(t_0) \subseteq V \cup (\bigcup \{U_n : n \in \mathbb{N}\})$ y $B \subseteq V$.

Sea $U = V \cup (\bigcup \{U_n : n \in \mathbb{N}\})$. Observemos que $\alpha(t_0) \in U^+$ y $t_0 > 0$. Por la continuidad de α existe $\delta > 0$ tal que $\alpha([t_0 - \delta, t_0]) \subseteq U^+$. Fijemos $t_1 \in [t_0 - \delta, t_0] \cap T$. Se sigue que $\overline{\alpha(t_1) - B}$ es compacto. En consecuencia, existe $F \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\overline{\alpha(t_1) - B} \subseteq V \cup (\bigcup \{U_n : n \in F\})$. Sea $N \in \mathbb{N} - F$. Notemos que $\alpha([t_0 - \delta, t_0]) \subseteq \mathcal{CL}(X)$ es conexo. Además, $U_N \cap (\bigcup \alpha([t_0 - \delta, t_0]))$ es un subconjunto abierto y cerrado no vacío de $\bigcup \alpha([t_0 - \delta, t_0])$ (por la condición (1) y del hecho de que $\bigcup \alpha([t_0 - \delta, t_0]) \subseteq U$). Luego, por el Lema 2.76, se tiene que $\alpha(t) \cap U_N \neq \emptyset$, para cada $t \in [t_0 - \delta, t_0]$, de donde $\alpha(t_1) \cap U_N \neq \emptyset$. Como $B \subseteq V$ y $U_N \cap V = \emptyset$ obtenemos que $(\overline{\alpha(t_1) - B}) \cap U_N \neq \emptyset$. Esta contradicción prueba que $t_0 \in T$. Ahora, como $1 \notin T$ se tiene que $t_0 < 1$.

Afirmación 1. Se tiene que $\alpha(t_0)$ no es compacto y es infinito.

Para probar esta Afirmación, supongamos que $\alpha(t_0)$ es compacto y sea U un subconjunto abierto de X tal que $\alpha(t_0) \in \langle U \rangle$. Por el Lema 2.58 tenemos que existe V abierto en X tal que $\alpha(t_0) \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ y \overline{V} es compacto. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha((t_0, t_0 + \varepsilon)) \subseteq \langle V \rangle$. Se sigue que, para cada $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$, $\alpha(t) \subseteq V \subseteq \overline{V}$. Como \overline{V} es compacto se tiene que $\alpha(t)$ es compacto, para cada $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$. Dado que $\overline{\alpha(t) - B}$ es un subconjunto cerrado del compacto $\alpha(t)$, para cada $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$, se concluye que $\overline{\alpha(t) - B}$ es compacto, para cada $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$, lo cual contradice la definición de t_0 . Por lo tanto, $\alpha(t_0)$ no es compacto, y en consecuencia $\alpha(t_0)$ es infinito. Esto prueba la Afirmación 1.

Definamos $K = \overline{\alpha(t_0) - B}$.

Afirmación 2. Se tiene que $\alpha(t_0) - K \subseteq B$ y $\alpha(t_0) - K$ es cerrado, discreto e infinito numerable.

Para probar esta Afirmación, consideremos un punto $x \in \alpha(t_0) - K = \alpha(t_0) - \overline{\alpha(t_0) - B}$. Entonces, $x \in \alpha(t_0)$ y $x \notin \overline{\alpha(t_0) - B}$. Se sigue que, $x \in \alpha(t_0)$ y existe V abierto en X tal que $x \in V$ y $V \cap (\alpha(t_0) - B) = \emptyset$, lo que implica que $x \in B$. Así, $\alpha(t_0) - K \subseteq B$. Además, como $\alpha(t_0)$ no es compacto se tiene que $\alpha(t_0) - K$ es infinito además es cerrado y discreto porque $\alpha(t_0) - K \subseteq B \subseteq C$ con C cerrado y discreto. Por lo tanto, la Afirmación 2 esta probada.

Denotemos $\alpha(t_0) - K = \{c_n : n \in \mathbb{N} \text{ y } c_n \neq c_m \text{ si } n \neq m\}$. Como $t_0 \neq 1$, existe una sucesión $\{t_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq [0, 1] - T$ tal que tal que $t_k \rightarrow t_0$. Se sigue que, $\alpha(t_k) \rightarrow \alpha(t_0)$ y $\alpha(t_k) - B$ no es compacto, para cada $k \in \mathbb{N}$. Notemos que K , $\alpha(t_0)$ y B satisfacen las condiciones del Lema 2.71, en consecuencia, existe V abierto en X y existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe U_m abierto y existe $n_m \in \mathbb{N}$ que cumplen las siguientes condiciones.

- (1) Los elementos de la familia $\{U_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{V\}$ son ajenos dos a dos.
- (2) Para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $c_m \in U_m$ y $K \subseteq V$.
- (3) $n_m < n_{m+1}$, para cada $m \in \mathbb{N}$.
- (4) Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $x_m \in \alpha(t_{M+m}) \cap (U_{n_m} - \{c_{n_m}\})$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos

$$V_m = \begin{cases} U_m, & \text{si } m \neq n_k, \text{ para cada } k \in \mathbb{N} \\ U_{n_k} - \{x_k\}, & \text{si } m = n_k, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Sea $W = V \cup (\bigcup \{V_m : m \in \mathbb{N}\})$. Dado un punto $y \in \alpha(t_0)$ tenemos que $y \in \alpha(t_0) - K$ o $y \in K$. Si $y \in K$, entonces $y \in V$. Ahora, si $y \in \alpha(t_0) - K$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y = c_m$. Como $c_m \in U_m$, se tiene $y \in V_m$. En consecuencia, $\alpha(t_0) \in W^+$.

Como $\alpha(t_k) \rightarrow \alpha(t_0)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(t_{M+N}) \in W^+$. Notemos que $x_N \in \alpha(t_{M+N}) \cap (U_{n_N} - \{c_{n_N}\})$. Dado que $U_r \cap U_s = \emptyset$, si $r \neq s$, se tiene que $x_N \in V_{n_N} = U_{n_N} - \{x_N\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto no existe una trayectoria de A a B en $\mathcal{TD}(X)$. \square

Como consecuencia del Teorema 2.77, tenemos los siguientes tres resultados, los cuales son algunos de los resultados principales de este trabajo.

2.78 Teorema. El hiperespacio $\mathcal{TD}(\mathbb{R})$ tiene exactamente \mathfrak{c} componentes por trayectorias.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que \mathbb{N} es un subconjunto cerrado, discreto e infinito numerable de \mathbb{R} . Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$ tal que $[A] \neq [B]$. Por el Teorema 2.68 parte (2) podemos suponer que $A - B$ es infinito. Por el Teorema 2.77 no existe una trayectoria de A a B en $\mathcal{TD}(X)$ para cada $A, B \subseteq \mathbb{N}$ tales que $[A] \neq [B]$. Por la Proposición 2.68, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tiene \mathfrak{c} clases de equivalencia, en consecuencia, $\mathcal{TD}(\mathbb{R})$ tiene al menos \mathfrak{c} componentes por trayectorias. Finalmente, por el Corolario 2.70, $\mathcal{TD}(\mathbb{R})$ tiene a lo más \mathfrak{c} componentes por trayectorias. \square

2.79 Teorema. Si X es un espacio Hausdorff, localmente compacto, Lindelöf y no compacto, entonces $\mathcal{TD}(X)$ tiene al menos \mathfrak{c} componentes por trayectorias.

DEMOSTRACIÓN. Como X es de Lindelöf y no es compacto, por el Lema 2.63, se tiene que X no es numerablemente compacto. Luego, por el Lema 2.62, existe C subconjunto de X tal que C es cerrado, discreto e infinito numerable. Pongamos $C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sean $N, M \subseteq \mathbb{N}$ tales que N no esta relacionado con M , en el sentido de la Proposición 2.68. Definamos $A = \{x_n : n \in M\}$ y $B = \{x_n : n \in N\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $A - B$ es infinito. Por el Teorema

2.77 tenemos que no existe una trayectoria en $\mathcal{TD}(X)$ desde A hasta B , para cada $M, N \subseteq \mathbb{N}$ tales que $[M] \neq [N]$. Luego, por la Proposición 2.68, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tiene \mathfrak{c} clases de equivalencia, en consecuencia, $\mathcal{TD}(X)$ tiene al menos \mathfrak{c} componentes por trayectorias. \square

2.80 Corolario. Si X es un espacio Hausdorff, localmente compacto, no compacto y segundo numerable, entonces $\mathcal{TD}(X)$ tiene exactamente \mathfrak{c} componentes por trayectorias.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.79 tenemos que $\mathcal{TD}(X)$ tiene al menos \mathfrak{c} componentes por trayectorias. Luego, por el Corolario 2.70 tenemos que $\mathcal{TD}(X)$ tiene a lo más \mathfrak{c} componentes por trayectorias. \square

El siguiente Teorema se obtuvo durante el desarrollo de este trabajo y muestra que, para un espacio Hausdorff, localmente compacto y Lindelöf, si una componente por trayectorias en el hiperespacio de los conjuntos totalmente disconexos contiene un elemento compacto, entonces cualquier elemento de la componente es compacto.

2.81 Teorema. Sea X un espacio Hausdorff, localmente compacto y Lindelöf. Si L y M pueden conectarse por una trayectoria en $\mathcal{TD}(X)$, entonces L es compacto si, y sólo si, M es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Sean $L, M \in \mathcal{TD}(X)$ y $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}(X)$ una función continua tal que $\alpha(0) = L$ y $\alpha(1) = M$. Basta probar que si L es compacto entonces M también lo es. Supongamos que L es compacto y M no lo es. Sea $r = \sup \{t \in [0, 1] : \alpha(t) \text{ es compacto}\}$.

Afirmación 1. Se tiene que $\alpha(r)$ no es compacto.

Para probar esta Afirmación consideramos dos casos.

Caso 1. Si $r = 1$, no hay nada que probar.

Caso 2. $r < 1$. En este caso, supongamos que $\alpha(r)$ es compacto. Sea U abierto en X tal que $\alpha(r) \in \langle U \rangle$. Luego, por el Lema 2.58, existe V abierto en X tal que $\alpha(r) \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ y \bar{V} es compacto. Por la continuidad de α , existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha((r - \varepsilon, r + \varepsilon)) \subseteq \langle V \rangle$. En consecuencia, $\alpha(t)$ es compacto, para cada $t \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$, lo cual es una contradicción. Esto prueba la Afirmación 1.

Por otro lado, como X es de Lindelöf y $\alpha(r)$ es cerrado en X , por el Lema 2.60, se tiene que $\alpha(r)$ es de Lindelöf. Luego, por los Lemas 2.62 y 2.63, $\alpha(r)$ contiene un subconjunto infinito numerable que no tiene puntos de acumulación. En consecuencia existe A subconjunto de $\alpha(r)$ tal que A es cerrado, discreto e infinito numerable. Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por el Lema 2.67, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe V'_n abierto en X tal que $x_n \in V'_n$ y $V'_n \cap V'_m = \emptyset$, si $n \neq m$. Ahora, por el Lema 2.54, $\alpha(r)$ es 0-dimensional, de donde para cada $n \in \mathbb{N}$ existe W_n cerra-abierto en $\alpha(r)$ tal que $x_n \in W_n \subseteq V'_n$. Por el Lema 2.73 existe una familia celular $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cerra-abiertos en $\alpha(r)$ tal que $x_n \in V_n \subseteq W_n \subseteq V'_n$ y $\bigcup \{V_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{CL}(\alpha(r)) \subseteq \mathcal{CL}(X)$. Notemos que $\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\alpha(r) - \bigcup \{V_n : n \in \mathbb{N}\}\}$ es una familia celular de cerra-abiertos en $\bigcup \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como X es localmente compacto y Hausdorff, por el Lema 2.56, X es $T_{3\frac{1}{2}}$. Además, como X es de Lindelöf, por el Lema 2.64, se tiene que X es un espacio T_4 . Luego, por el Lema 2.74, existe una familia celular $\{U_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ tal que $(\alpha(r) - \bigcup \{V_n : n \in \mathbb{N}\}) \subseteq V_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $V_n \subseteq U_n$. Observemos que $\alpha(r) \subseteq \bigcup \{U_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, es decir, $\alpha(r) \in (\bigcup \{U_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\})^+$. Por la continuidad de α , existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha([r - \varepsilon, r + \varepsilon]) \subseteq (\bigcup \{U_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\})^+$. Fijemos $t_0 \in [r - \varepsilon, r)$ tal que $\alpha(t_0)$ es compacto. En consecuencia, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(t_0) \cap U_N = \emptyset$. También observemos que $(\bigcup \alpha([r - \varepsilon, r + \varepsilon])) \cap U_N = (\bigcup \alpha([r - \varepsilon, r + \varepsilon])) \cap \bar{U}_N$, así $(\bigcup \alpha([r - \varepsilon, r + \varepsilon])) \cap U_N$ es un subconjunto

abierto y cerrado, no vacío de $\bigcup \alpha([r - \varepsilon, r + \varepsilon])$. Como $\alpha([r - \varepsilon, r + \varepsilon])$ es un subespacio conexo de $\mathcal{CL}(X)$, por el Lema 2.76, se sigue que $\alpha(t) \cap ((\bigcup \alpha([r - \varepsilon, r + \varepsilon])) \cap U_N) \neq \emptyset$, para cada $t \in [r - \varepsilon, r + \varepsilon]$, de donde $\alpha(t_0) \cap U_N \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Esta contradicción prueba que M es compacto. \square

2.82 Corolario. Sea X un espacio Hausdorff, localmente compacto y Lindelöf. Si $\mathcal{TD}(X)$ es conexo por trayectorias, entonces X es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Si X no es compacto, entonces X cumple las hipótesis del Teorema 2.79, por lo que $\mathcal{TD}(X)$ tendría al menos \mathfrak{c} componentes por trayectorias. \square

El siguiente resultado es de gran ayuda para probar que la conexidad por trayectorias de $\mathcal{TD}(X)$ implica la conexidad por trayectorias de X , cuando X es un espacio Hausdorff, localmente compacto y Lindelöf. La prueba original del siguiente resultado la puede consultar en [7, Teorema 3.2].

2.83 Teorema. Si X es un espacio Hausdorff, $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{D}}(X)$ es una trayectoria y $p \in \alpha(0)$, entonces existe una función continua $f : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = p$ y $f(t) \in \alpha(t)$ para cada $t \in [0, 1]$.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos $K = \bigcup \alpha([0, 1]) \subseteq X$. Por [18, Teorema 2.5] tenemos que K es compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ definamos $I_{n,i} = [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y para cada $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ recursivamente definamos $p_{n,i}$ y un subconjunto compacto $K_{n,i}$ como sigue. Sea $p_{n,0} = p$ y sea $K_{n,0}$ la componente conexa de $\bigcup \alpha(I_{n,0})$ la cual contiene a $p_{n,0}$. Para cada $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, por el Lema 1.13, podemos elegir un punto $p_{n,i} \in K_{n,i-1} \cap \alpha(\frac{i}{2^n})$. Sea $K_{n,i}$ la componente conexa de $\bigcup \alpha(I_{n,i})$ que contiene a $p_{n,i}$. Por [18, Teorema 2.5] tenemos que $K_{n,i}$ es compacto, para cada $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $G_n = \bigcup \{I_{n,i} \times K_{n,i} : i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}\}$. Observemos que G_n es compacto ya que es unión finita de compactos. Además es un subespacio conexo de $[0, 1] \times K$ ya que $(\frac{i+1}{2^n}, p_{n,i+1}) \in (I_{n,i} \times K_{n,i}) \cap (I_{n,i+1} \times K_{n,i+1})$, para cada $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Como $\mathcal{CL}([0, 1] \times K)$ es compacto, vea [18, Teorema 4.2], $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene un punto de acumulación, digamos G , en $\mathcal{CL}([0, 1] \times K)$.

Afirmación 1.- Dado $t \in [0, 1]$ y U un subconjunto abierto de X tal que $\alpha(t) \in \langle U \rangle$ existen un subconjunto abierto V de $[0, 1]$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N, i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ y $V \cap I_{n,i} \neq \emptyset$ entonces $\alpha(I_{n,i}) \subseteq \langle U \rangle$.

Para probar esta Afirmación, dado que α es continua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(x) \in \langle U \rangle$ para cada $x \in [0, 1] \cap (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\text{diám}(I_{n,i}) = \frac{1}{2^n}$. Sea $r < \varepsilon$ y tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon - r$. Definamos $V = (t - r, t + r) \cap [0, 1]$. Luego, para cada $n \geq N$ y cada $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ se tiene que si $I_{n,i} \cap V \neq \emptyset$, entonces $I_{n,i} \subseteq (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ (sea $a \in I_{n,i} \cap V$ y $b \in I_{n,i}$, tenemos que $d(b, t) \leq d(a, b) + d(a, t) < \varepsilon - r + r = \varepsilon$ ya que $a, t \in V$). Así el conjunto V y N cumplen la Afirmación 1.

Afirmación 2.- Se tiene que $G \cap (\{t\} \times K) \subseteq \{t\} \times \alpha(t)$, para cada $t \in [0, 1]$.

Para probar esta Afirmación, supongamos que existe un punto $t \in [0, 1]$ y un punto $x \in K - \alpha(t)$ tales que $(t, x) \in G$. Dado que $\{x\}$ y $\alpha(t)$ son compactos ajenos existen abiertos ajenos en K , U_x y U_t , tales que $x \in U_x$ y $\alpha(t) \subseteq U_t$. Por la Afirmación 1, existe un subconjunto abierto V de $[0, 1]$ que contiene a t y existe $N \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N, i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ y $V \cap I_{n,i} \neq \emptyset$ entonces $\alpha(I_{n,i}) \subseteq \langle U_t \rangle$. Note que $O = \langle V \times U_x, [0, 1] \times K \rangle$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{CL}([0, 1] \times K)$ que contiene a G (esto ya que $G \subseteq [0, 1] \times K$ y $(t, x) \in G \cap (V \times U_x)$).

Enseguida veamos que $G_n \notin O$ para cada $n \geq N$. Para esto fijemos $n \geq N$ e $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. Consideremos dos casos.

Caso 1.- Si $V \cap I_{n,i} = \emptyset$, entonces es claro que $(I_{n,i} \times K_{n,i}) \cap (V \times U_x) = \emptyset$.

Caso 2.- Si $V \cap I_{n,i} \neq \emptyset$, entonces $[\bigcup \alpha(I_{n,i})] \cap U_x \subseteq U_t \cap U_x = \emptyset$ de donde $K_{n,i} \cap U_x = \emptyset$, por lo tanto $(I_{n,i} \times K_{n,i}) \cap (V \times U_x) = \emptyset$.

Así, hemos probado que $G_n \cap (V \times U_x) = \emptyset$ para cada $n \geq N$. Luego, tenemos que O es un abierto que contiene a G y que interseca a lo más N elementos de $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$, lo cual contradice la propiedad de G . Esto prueba la Afirmación 2.

Afirmación 3.- Se tiene que $\pi_1(G) = [0, 1]$ y $(0, p) \in G$, donde $\pi_1 : [0, 1] \times K \rightarrow [0, 1]$ es la primera proyección.

Primero veamos que $\pi_1(G) = [0, 1]$. Para esto supongamos que $\pi_1(G) \neq [0, 1]$ y consideremos un subconjunto abierto propio U de $[0, 1]$ tal que $\pi_1(G) \subseteq U$. Como $G \in \langle U \times K \rangle$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G_n \in \langle U \times K \rangle$. Luego $\pi_1(G_n) \subseteq U$ lo cual contradice el hecho de que $\pi_1(G_n) = [0, 1]$ ($G_n = \bigcup \{I_{n,i} \times K_{n,i} : i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}\}$ y $\bigcup \{I_{n,i} : i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}\} = [0, 1]$). Concluimos que $\pi_1(G) = [0, 1]$. Por otro lado, supongamos que $(0, p) \notin G$. Sea $V = ([0, 1] \times K) - \{(0, p)\}$. Note que $G \in \langle V \rangle$. Por construcción tenemos que $(0, p) \in I_{n,0} \times K_{n,0} \subseteq G_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo cual $G_n \notin \langle V \rangle$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia $\langle V \rangle \cap \{G_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $(0, p) \in G$. Así la Afirmación 3 está probada.

Afirmación 4.- G es la gráfica de una función.

En efecto, sea $t \in [0, 1]$ y supongamos que $(t, x_1), (t, x_2) \in G$. Veamos que $x_1 = x_2$. Supongamos que $x_1 \neq x_2$. Por la Afirmación 2 tenemos que $x_1, x_2 \in \alpha(t)$. Sea $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ una cubierta abierta disjunta de $\alpha(t)$ tal que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$ (sean W_1 y W_2 abiertos ajenos en X tales que $x_1 \in W_1$ y $x_2 \in W_2$. Por el Lema 2.28 existe W , abierto y cerrado en $\alpha(t)$ tal que $x_1 \in W \subseteq W_1$. Tenemos que W y $\alpha(t) - W$ son compactos ajenos. Por el Lema 2.26, existen U_1 y U_2 abiertos ajenos en X tales que $W \subseteq U_1$ y $\alpha(t) - W \subseteq U_2$. Es claro que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y $\alpha(t) \subseteq U_1 \cup U_2$). Por la Afirmación 1, existe un intervalo abierto V de $[0, 1]$ que contiene a t y existe $N \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N$, $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ y $V \cap I_{n,i} \neq \emptyset$ entonces $\alpha(I_{n,i}) \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle$. Definamos $O = \langle V \times U_1, V \times U_2, [0, 1] \times K \rangle$ y observemos que $G \in O$. Enseguida veamos que $G_n \notin O$ para cada $n \geq N$. Fijemos $n \geq N$. Consideremos $G'_n = \bigcup \{I_{n,i} \times K_{n,i} : i \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \text{ y } I_{n,i} \cap V = \emptyset\}$ y $G''_n = \bigcup \{I_{n,i} \times K_{n,i} : i \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \text{ y } I_{n,i} \cap V \neq \emptyset\}$. Es claro que $G'_n \cap (V \times U_i) = \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Además G''_n es conexo (cada $I_{n,i} \times K_{n,i}$ es conexo, V es un intervalo y $(\frac{i}{2^n}, p_{n,i}) \in (I_{n,i} \times K_{n,i}) \cap (I_{n,i-1} \times K_{n,i-1})$). Ahora, por la elección de V , tenemos que $G''_n \subseteq ([0, 1] \times U_1) \cup ([0, 1] \times U_2)$ (ya que $\bigcup \{I_{n,i} : i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}\} = [0, 1]$, $K_{n,i} \subseteq \bigcup \alpha(I_{n,i})$ y si $V \cap I_{n,i} \neq \emptyset$, entonces $\alpha(I_{n,i}) \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle = \langle U_1, U_2 \rangle$). En consecuencia, existe $i_0 \in \{1, 2\}$ tal que $G''_n \cap (V \times U_{i_0}) = \emptyset$. Esto demuestra que $G_n \cap (V \times U_{i_0}) = [G'_n \cap (V \times U_{i_0})] \cup [G''_n \cap (V \times U_{i_0})] = \emptyset$. Esto prueba que $G_n \notin O$, para cada $n \geq N$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x_1 = x_2$. Así la Afirmación 4 esta probada.

Finalmente, nuestra función requerida, f , es la que tiene como gráfica a G . Por la Afirmación 3 tenemos que f es una función tal que $f(0) = p$ y con dominio $[0, 1]$. Por la Afirmación 2 se tiene que el codominio de la función f es K y que $f(t) \in \alpha(t)$, para cada $t \in [0, 1]$. Además, sabemos que la gráfica G de f es cerrada y que K es compacto, luego por el Teorema del grafo cerrado (vea [3, Ejercicio 3.1.D (a)]) tenemos que f es continua. \square

2.84 Lema. Si $A \in \mathcal{TD}(X)$ y $\{U_1, \dots, U_n\} \in \mathcal{C}(X)$ son tales que $A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$, entonces $A \cap U_i \in \mathcal{CL}(X)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que $\overline{A \cap U_i} \subset A \cap U_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Fijemos $i \in \{1, \dots, n\}$ y consideremos un punto $x \in \overline{A \cap U_i} \subset \overline{A} \cap \overline{U_i}$. Se sigue que $x \in \overline{A}$ y como A es cerrado obtenemos que $x \in A$. Ahora, como $A \subset U_1 \cup \dots \cup U_n$ se tiene que $x \in U_j$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$. Supongamos que $j \neq i$. Luego U_j es un subconjunto abierto que contiene a x y dado que $x \in \overline{U_i}$ tenemos que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $i = j$, así $x \in U_i$. \square

2.85 Teorema. Si X es un espacio Hausdorff, localmente compacto y Lindelöf tal que $\mathcal{TD}(X)$ es conexo por trayectorias, entonces X es conexo por trayectorias.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in X$ y $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}(X)$ una trayectoria tal que $\alpha(0) = \{x\}$ y $\alpha(1) = \{y\}$. Notemos que $\{x\}$ es compacto, así por el Teorema 2.81 tenemos que $\alpha([0, 1]) \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{D}}(X)$. Ahora, por el Teorema 2.83 existe una trayectoria $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) \in \{y\}$. \square

2.86 Proposición. Sea X un espacio compacto para el cual existe una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ y existe $p \in X$ que cumplen las siguientes condiciones:

- (1) $H(x, 0) = p$ y $H(x, 1) = x$, para cada $x \in X$.
- (2) La función $g_t : X \rightarrow X$ dada por $g_t(x) = H(x, t)$ es un encaje, para cada $t \in (0, 1)$.

Entonces $\mathcal{TD}(X)$ es conexo por trayectorias.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un elemento $A \in \mathcal{TD}(X)$. Definamos $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{CL}(X)$ dada por $\alpha(t) = H(A \times \{t\})$. Notemos que dado $t \in (0, 1)$ se tiene que $\alpha(t) = H(A \times \{t\}) = g_t(A)$. Como cada función g_t es un encaje tenemos que $\alpha(t) \in \mathcal{TD}(X)$ para cada $t \in [0, 1]$, es decir, α es una función de $[0, 1]$ a $\mathcal{TD}(X)$.

Veamos que α es continua.

Para esto definamos $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{CL}(X \times [0, 1])$ dada por $\beta(t) = A \times \{t\}$ y notemos que β es continua. Por otro lado, la función inducida $\mathcal{H} : \mathcal{CL}(X \times [0, 1]) \rightarrow \mathcal{CL}(X)$ dada por $\mathcal{H}(E) = H(E)$, para todo $E \in \mathcal{CL}(X \times [0, 1])$ es continua (vea [9, Lema 13.3]). Finalmente, observemos que dado $t \in [0, 1]$, tenemos que $\mathcal{H}(\beta(t)) = \mathcal{H}(A \times \{t\}) = H(A \times \{t\}) = \alpha(t)$. En consecuencia, α es una función continua tal que $\alpha(0) = \{p\} = H(A \times \{0\})$ y $\alpha(1) = A = H(A \times \{1\})$ para cada $A \in \mathcal{TD}(X)$. \square

2.87 Corolario. Si X es un espacio compacto, entonces $\mathcal{TD}(\text{Cono}(X))$ es conexo por trayectorias.

DEMOSTRACIÓN. El $\text{Cono}(X)$ cumple las propiedades de la Proposición 2.86. \square

2.88 Teorema. Si X es un espacio Hausdorff, compacto y conexo por trayectorias tal que cada punto $p \in X$ tiene una vecindad homeomorfa a algún continuo X_p de la forma $X_p \simeq \text{Cono}(Y_p)$, para algún continuo Y_p , y p sea el vértice de tal cono, entonces $\mathcal{TD}(X)$ es conexo por trayectorias.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \in \mathcal{TD}(X)$. Por la compacidad de A , existen vecindades U_{p_1}, \dots, U_{p_n} tales que $A \subseteq U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n}$ y cada U_{p_i} es homeomorfa al cono de algún continuo X_{p_i} . Notemos que U_{p_i} es un continuo, así $A \cap U_{p_i}$ es cerrado. Luego, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe una función continua $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}(U_{p_i})$ tal que $\alpha_i(0) = A \cap U_{p_i}$ y $\alpha_i(1) = \{p_i\}$ (vea el Corolario 2.87).

Definamos $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{TD}(X)$ dada por $\alpha(t) = \alpha_1(t) \cup \dots \cup \alpha_n(t)$. Por el Teorema 1.22 tenemos que la función está bien definida.

Veamos que α es continua.

Para esto, sea W abierto en X . Se tiene que $\alpha^{-1}(W^+) = \alpha_1^{-1}(W^+) \cap \dots \cap \alpha_n^{-1}(W^+)$ y $\alpha^{-1}(W^-) = \alpha_1^{-1}(W^-) \cup \dots \cup \alpha_n^{-1}(W^-)$. Por lo tanto α es continua.

Notemos que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = \{p_1, \dots, p_n\}$. Así, α es una trayectoria desde A hasta $\{p_1, \dots, p_n\}$. Como X es arcoconexo se tiene que $\mathcal{F}(X)$ también lo es (esto se puede justificar de manera similar al inciso (a) de la demostración del Teorema 4.10 de [18]). Por lo tanto, $\mathcal{TD}(X)$ es conexo por trayectorias. \square

2.89 Corolario. Si X es una variedad compacta y conexas, entonces $\mathcal{TD}(X)$ es conexo por trayectorias.

Enseguida mencionamos algunos problemas que los autores de este trabajo nos planteamos y no pudimos resolver.

2.90 Problema. Será cierto que ¿si X es un dendroide contráctil, entonces $\mathcal{TD}(X)$ es contráctil?

2.91 Problema. Dar condiciones sobre X bajo las cuales $\mathcal{TD}(X)$ sea contráctil.

2.92 Problema. ¿Si X es un continuo uniformemente arco conexo, entonces $\mathcal{TD}(X)$ es conexo por trayectorias?.

2.93 Problema. ¿Si X es un continuo no uniformemente arco conexo, entonces $\mathcal{TD}(X)$ tiene c componentes por trayectorias?.

2.7 Conclusiones

En esta tesis introducimos el hiperespacio de todos los subconjuntos cerrados no vacíos totalmente desconexos de un espacio topológico, al cual equipamos con la topología de Vietoris. Hemos obtenido resultados relacionados con la compacidad, la conexidad y la conexidad local de este hiperespacio. También presentamos un estudio de la conexidad por trayectorias, en particular, demostramos que para un dendroide suave este hiperespacio es conexo por trayectorias y, además, probamos un resultado bastante general el cual implica que para los espacios Euclidianos este hiperespacio tiene una cantidad no numerable de componentes conexas por trayectorias. Los resultados originales de esta tesis constituyen el material que contiene nuestro artículo *The hyperspace of totally disconnected sets*, que está por aparecer en la revista Glasnik Matematički, [4].

Referencias

- [1] J. J. Charatonik, *Two invariants under continuity and the incomparability of fans*, Fund. Math. 53 (1964), 187-204.
- [2] J. J. Charatonik, C. Eberhart *On smooth dendroids*, Fund. Math. 67 (1970), 297-322.
- [3] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics. Vol 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [4] R. Escobedo, P. Pellicer-Covarrubias, V. Sánchez-Gutiérrez, *The hyperspace of totally disconnected sets*, por aparecer en Glasnik Matematički.
- [5] J. B. Fugate, G. R. Gordh, Jr. and Lewis Lum, *Arc-smooth continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1981), 545-561.
- [6] S. García-Ferreira, Y. F. Ortiz-Castillo, *The hyperspace of convergent sequences*, Topol. Appl. 196 (2015), 795-804.
- [7] S. García-Ferreira, R. Rojas-Hernández, *Connectedness like properties on the hyperspace of convergent sequences*, Topol. Appl. 230 (2017), 639-647.
- [8] L. M. García-Velázquez, *Whitney Levels in hyperspaces of non-metrizable continua*, Topol. Appl. 182 (2015) 24-35.
- [9] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and recent advances*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [10] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), 22-36.
- [11] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, Academic Press, New York, N. Y. 1966.
- [12] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.
- [13] L. Lum, *Weakly smooth dendroids*, Fund. Math. 83 (1974), 111-120.
- [14] J. M. Martínez-Montejano, *Mutual aposyndesis of symmetric products*, Top. Proc. 24 Spring (1999), 203-213.
- [15] D. Maya, P. Pellicer-Covarrubias, R. Pichardo, *Induced mappings on the hyperspace of convergent sequences*, Topol. Appl. 229 (2017), 85-105.
- [16] D. Maya, P. Pellicer-Covarrubias, R. Pichardo, *Cardinal functions on the hyperspace of convergent sequences*, Math. Slovaca 28 No. 2 (2018), 431-450.

- [17] D. Maya, P. Pellicer-Covarrubias, R. Pichardo, *General properties of the hyperspace of convergent sequences*, Top. Proc. 51 (2018), 143-168.
- [18] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1) (1951), 152-182.
- [19] L. Mohler, *A characterization of smoothness in dendroids*, Fund. Math. 67 (1970), 369-376.
- [20] L. Montejano-Peimbert, I. Puga-Espinosa, *Shore points in dendroids and conical pointed hyperspaces*, Topol. Appl. 46 (1992), 41-54.
- [21] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [22] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, (1992).
- [23] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol 28, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., (1942).

Índice alfabético

Arco ordenado, 5
 $\mathcal{CL}(X), \mathcal{K}(X), \mathcal{C}(X)$, 3
Casi componente conexa, 5
Cerra-abierto, 25
Conexo en pequeño, 6
Continuo, 5
Dendrita, 20
Dendrita local, 20
Dendroide, 17
Dendroide suave, 18
 $\dim(X) = 0$, 6
Familia celular $\mathcal{C}(X)$, 11
 $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}(X)$, 11
Límite, 1
Límite inferior, 1
Límite superior, 1
Lindelöf, 6
Totalmente desconexo, 6
Unicoherente, 6
Uniformemente arco conexo, 20