



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICO MATEMÁTICAS

POSTGRADO EN
CIENCIAS MATEMÁTICAS

**HIPERESPACIOS DE
CONJUNTOS QUE NO
DESCONECTAN UN
CONTINUO**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS**

PRESENTA:

EDUARDO GARCÍA MUÑOZ

DIRECTORES DE TESIS:

DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
DR. FLORENCIO CORONA VÁZQUEZ

PUEBLA, PUEBLA, AGOSTO 2025



BUAP

Mtro. Alfredo Avendaño Arenaza
Director General de Bibliotecas
Presente

A través de este medio me dirijo a usted para informarle que la tesis con título **“HIPERESPACIOS DE CONJUNTOS QUE NO DESCONECTAN UN CONTINUO”** ha sido avalada bajo los preceptos de integridad académica; por lo tanto se autoriza la impresión de tesis del alumno:

Nombre del alumno: **García Muñoz Eduardo**

Matrícula: **221570402**

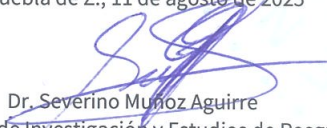
Facultad: **Facultad de Ciencias Físico Matemáticas**

Programa Educativo: **Doctorado en Ciencias Matemáticas**

Licenciatura o Posgrado: **Posgrado**


Sin más por el momento, agradezco la atención al presente.

ATENTAMENTE
“PENSAR BIEN, PARA VIVIR MEJOR”
H. Puebla de Z., 11 de agosto de 2025


Dr. Severino Muñoz Aguirre
Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado




Dr. Raúl Escobedo Conde
Director de Tesis


Dr. Florencio Corona Vázquez
Director de Tesis

Agradecimientos

Expreso mi profundo agradecimiento a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), por brindarme la oportunidad de crecer académicamente.

Estoy muy agradecido con el Dr. Raúl Escobedo Conde por su asesoramiento, por su invaluable apoyo; su experiencia y conocimientos han sido fundamentales durante el desarrollo de esta tesis doctoral.

El Dr. Florencio Corona Vázquez ha sido una figura clave en mi formación académica. Sus enseñanzas y mentoría en la licenciatura y maestría sentaron las bases para mi interés en los “continuos” y mi posterior ingreso al doctorado. Mi más sincero agradecimiento por todo.

Compañero Jorge Enrique Vega Acevedo, gracias por tu valioso apoyo y por estar siempre dispuesto a ayudarme.

Extiendo mi agradecimiento a la Srta. Teresa María Rivera Velázquez, eficiente secretaria de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por su amabilidad y buena disposición para apoyarme en los trámites administrativos relacionados con mi doctorado.

Mi eterno agradecimiento al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por haberme otorgado la beca para cursar el Doctorado

en ciencias matemáticas; su apoyo ha contribuido de manera fundamental para lograr mi desarrollo académico y profesional.

Introducción

La topología es una rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las propiedades de los espacios que se conservan bajo transformaciones continuas. Dentro de esta área, la teoría de continuos se ocupa del estudio de los espacios topológicos conexos y compactos. En este campo, los hiperespacios juegan un papel importante en la comprensión de la estructura topológica de los continuos.

La investigación sobre conjuntos que no desconectan un continuo tiene una larga trayectoria. Desde los trabajos clásicos de R. L. Moore [17] y R. H. Bing [2] sobre conjuntos de no corte y de no corte débil, hasta los estudios de J. Krasinkiewics y P. Minc [14] sobre la conexidad colocal, y más recientemente, artículos como los de Bautista-Callejas et al. [1], Bobok et al. [4], Camargo et al. [5] y Escobedo et al. [8] han profundizado en estos conceptos. Todo esto ha permitido que este campo evolucione de manera significativa.

En esta tesis, nos enfocamos en el estudio de los hiperespacios de conjuntos que no desconectan, específicamente los hiperespacios de: conjuntos de conexidad colocal, conjuntos de no corte débil, conjuntos que no bloquean a los unipuntuales, conjuntos que no bloquean a algún punto, conjuntos orilla y conjuntos de no corte. Nuestro objetivo es obtener una comprensión más profunda de la relación entre la estructura topológica de un continuo y la estructura de sus hiperespacios de conjuntos

que no desconectan. Para lograr esto, investigamos las condiciones necesarias y suficientes para que algunos de estos hiperespacios coincidan, y estudiamos el comportamiento de estos hiperespacios en gráficas finitas y continuos localmente conexos.

La tesis está organizada en cuatro capítulos. El primer capítulo presenta los preliminares necesarios para el desarrollo de la investigación. Los capítulos segundo, tercero y cuarto contienen los resultados principales de la tesis, y se enfocan en los hiperespacios de conjuntos que no desconectan, el estudio del hiperespacio de conjuntos que no cortan en continuos localmente conexos y el estudio del hiperespacio de conjuntos que no cortan en gráficas finitas, respectivamente.

En particular, en el segundo capítulo, establecemos condiciones necesarias y suficientes para que algunos de los hiperespacios de conjuntos que no desconectan coincidan (Corolarios 2.20 y 2.28). En el tercer capítulo, investigamos los hiperespacios de conjuntos que no desconectan en continuos localmente conexos, donde proporcionamos caracterizaciones de la conexidad local mediante los hiperespacios de conjuntos que no desconectan (Teorema 3.5). Además demostramos que, dentro de los continuos localmente conexos, el hiperespacio de conjuntos de no corte es compacto si y solo si el continuo es el arco o la curva cerrada simple (Teorema 3.22). También, demostramos que la coincidencia entre uno de los hiperespacios de conjuntos que no desconectan y el hiperespacio de subcontinuos caracteriza a la curva cerrada simple dentro de todos los continuos, en el sentido de que dicha coincidencia ocurre si y solo si el continuo es la curva cerrada simple (Teorema 3.56). En el cuarto capítulo, estudiamos el hiperespacio de conjuntos de no corte en gráficas finitas, descomponiéndolo en unión de conjuntos que parecen celdas y determinando su dimensión (Teorema 4.44) y número de componentes en el caso de árboles

(Teorema 4.58). Además, obtenemos caracterizaciones del arco (Teorema 4.59) y del triodo simple (Teorema 4.60) dentro de las gráficas finitas.

Nota: Esta tesis puede sufrir ligeras modificaciones durante el año 2025. Los lectores interesados pueden contactar al autor en game.1297@gmail.com para obtener la versión más actualizada.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	III
1. Preliminares	1
1.1. Continuos	1
1.2. Hiperespacios	8
2. Hiperespacios de conjuntos que no desconectan	14
2.1. Definiciones y relaciones	15
2.2. Coincidencias	22
3. Continuos localmente conexos	33
3.1. Caracterizaciones de la conexidad local	33
3.2. Compacidad	42
3.3. Caracterizaciones del arco y de la curva cerrada simple	58
4. Gráficas finitas	71
4.1. Herramientas básicas	71
4.2. Un modelo general	76
4.3. Algunos modelos particulares	87
4.4. Dimensión	102
4.5. Árboles	110
Conclusiones	118

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tiene como objetivo establecer los fundamentos necesarios para el desarrollo de nuestro estudio. Presentamos aquí la notación, definiciones y resultados conocidos que se utilizan posteriormente.

Notación

Para un subconjunto A de un espacio X escribimos \bar{A} , $\text{int}(A)$, $\text{fr}(A)$ y $X \setminus A$, para denotar la cerradura, el interior, la frontera y el complemento de A en X , respectivamente. Si B es un subconjunto de X disjunto de A decimos que B *no interseca a A* , de lo contrario decimos que B *interseca a A* . Si B y C son subconjuntos de X tales que A contiene a B y C contiene a A decimos que A *está entre B y C* .

1.1. Continuos

Definición. 1.1. Un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un *subcontinuo* de un espacio dado es un continuo que está contenido en dicho espacio. Usamos el término *no degenerado* para los espacios topológicos con más de un punto.

Notemos que si X es un continuo con métrica d y $h : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo (i. e., h es una biyección continua con inversa continua), por la continuidad de h se tiene que Y es espacio compacto y conexo. Por otro lado la función $D : Y \times Y \rightarrow [0, \infty]$ dada por $D(a, b) = d(h^{-1}(a), h^{-1}(b))$ es una métrica para la topología de Y . Por lo tanto, la propiedad de ser un continuo se preserva bajo homeomorfismos. Los siguientes son ejemplos de continuos.

Ejemplos. 1.2. Un *arco* es un espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Como este intervalo es un continuo, un arco también lo es.

Ejemplos. 1.3. Una *curva cerrada simple* es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Como S^1 es un continuo una curva cerrada simple también lo es.

Por conveniencia, usaremos *el arco* para referirnos a cualquier espacio homeomorfo al intervalo $[0, 1]$, y *la curva cerrada simple* para referirnos a cualquier espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria.

Ejemplos. 1.4. El continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ es la cerradura de W , donde

$$W = \{(x, \text{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}.$$

Todos los continuos mencionados en los ejemplos anteriores tienen la propiedad de poder ser expresados como la unión de dos subcontinuos propios. Esta observación nos ayuda a entender la siguiente definición.

Definición. 1.5. Un continuo es *descomponible*, si puede expresarse como la unión de dos subcontinuos propios. Un continuo es *indescomponible* si no es descomponible.

A continuación, presentamos algunas proposiciones que establecen condiciones necesarias y suficientes para que un continuo sea un arco o una curva cerrada simple.

Proposición. 1.6. [18, Corolario 9.29, p. 154] *Un continuo X es un arco si y solo si tiene exactamente dos puntos, p y q , tales que $X \setminus \{p\}$ y $X \setminus \{q\}$ son conjuntos conexos.*

Proposición. 1.7. [18, Teorema 9.31, p. 156] *Un continuo no degenerado X es una curva cerrada simple si y solo si para cualesquiera par de puntos distintos $x, y \in X$ se tiene que $X \setminus \{x, y\}$ no es conexo.*

Es importante destacar que, en contraste con el comportamiento observado en el arco y la curva cerrada simple, donde podemos encontrar abiertos conexos arbitrariamente pequeños alrededor de cualquier punto, en el continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ esto no es posible. Esta distinción ilustra la importancia de la siguiente definición.

Definición. 1.8. Un espacio topológico X es *localmente conexo en un punto p* , si para todo conjunto abierto, U , de X que contiene al punto p , existe un subconjunto abierto y conexo, V , de X tal que p está en V y V está contenido en U . Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos decimos que X es *localmente conexo*.

La propiedad de ser localmente conexo tiene consecuencias importantes sobre la estructura de los subconjuntos abiertos y conexos de un espacio. A continuación, presentamos una proposición que muestra una de estas implicaciones.

Proposición. 1.9. [18, Teorema 8.26, p. 132] *Si U es un subconjunto abierto y conexo de un continuo localmente conexo, entonces para cada par de puntos p y q en U existe un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$.*

Es bien conocido que los únicos continuos localmente conexos que no contienen triodos simples son el arco y la curva

cerrada simple, [18, Ejercicio 8.40, p. 135]. A continuación lo enunciamos formalmente.

Proposición. 1.10. *Si un continuo no degenerado localmente conexo no contiene triodos simples, entonces es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración. Supongamos por el contrario que X no es un arco ni una curva cerrada simple. Entonces, por la Proposición 1.7, existen dos puntos distintos x y y en X tales que $A = X \setminus \{x, y\}$ es conexo. Luego, por la Proposición 1.6, existe un punto z en A tal que $B = X \setminus \{z\}$ es conexo. De la Proposición 1.9 se sigue que existe un arco α_1 en B que contiene al conjunto $\{x, y\}$. Sea w un punto en $\alpha_1 \setminus \{x, y\}$. Por la Proposición 1.9, existe un arco $\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow A$ tal que $\alpha_2(0) = z$ y $\alpha_2(1) = w$. Definimos el conjunto $T = \{t \in [0, 1] : \alpha_2(t) \in \alpha_1\}$. Como α_2 es continua y α_1 es un conjunto cerrado, el conjunto T es cerrado en $[0, 1]$. Sea $t_0 = \min T$. El conjunto $\alpha_1 \cup \alpha_2([0, t_0])$ es un triodo simple con vértice $\alpha_2(t_0)$, lo cual contradice la hipótesis de que X no contiene triodos simples. \square

Uno de los resultados más importantes en la teoría de continuos establece que un continuo es localmente conexo si y solo si las componentes de cada conjunto abierto son conjuntos abiertos, [19, Teorema 27.9, p. 200], se tiene así el siguiente resultado.

Teorema. 1.11. *Un continuo es localmente conexo si y solo si cada componente de cada conjunto abierto es un conjunto abierto.*

Un concepto estrechamente relacionado con la conexidad local es la conexidad en pequeño. A continuación, presentamos la definición de este concepto.

Definición. 1.12. Un espacio topológico X es *conexo en pequeño en un punto p* , si para todo conjunto abierto, U , de X que contiene al punto p , existe un subconjunto conexo, V , de X tal que p está en $\text{int}(V)$ y V está contenido en U .

En [18, Ejercicio 5.22, p.83] enuncian la siguiente caracterización de la conexidad local en términos de la conexidad en pequeño.

Lema. 1.13. *Un espacio topológico es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos si y solo si es localmente conexo.*

Demostración. De las Definiciones 1.8 y 1.12 se sigue que si X es localmente conexo, entonces X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Supongamos que X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Sea U un subconjunto abierto de X , K una componente de U y p un elemento de K . Existe un subconjunto conexo V de X tal que p está en $\text{int}(V)$ y V está contenido en U . Observamos que V está contenido en U , lo que prueba que K es un conjunto abierto. Por el Teorema 1.11, X es localmente conexo. \square

Existe una relación profunda entre la conexidad en pequeño y la existencia de continuos de convergencia. De hecho, la ausencia de conexidad en pequeño en algún punto garantiza la existencia de continuos de convergencia [18, Teorema 5.12, p. 76]. A continuación definimos este concepto y enunciamos el resultado antes mencionado.

Definición. 1.14. Un subcontinuo no degenerado A de un continuo X es llamado *continuo de convergencia*, si existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tal que $A = \lim A_i$ y, para cada entero positivo i , A no interseca a A_i .

Teorema. 1.15. *Si X es un continuo que no es conexo en pequeño en un punto p , entonces existe un subcontinuo de convergencia, A , de X tal que p está en A y X no es conexo en pequeño en q , para todo q en A .*

En el estudio de continuos, la separabilidad es una propiedad importante. A continuación, definimos separabilidad y presentamos algunos resultados relacionados.

Definición. 1.16. Un espacio topológico X es *separable* si existe un subconjunto numerable D de X tal que $\overline{D} = X$.

Proposición. 1.17. [7, Teorema 4.1.18, p. 256] *Todo espacio métrico y compacto es separable.*

Proposición. 1.18. [7, Corolario 4.1.16, p. 256] *Para un espacio métrico X , las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El espacio X es separable.*
2. *Cada familia de conjuntos abiertos no vacíos disjuntos dos a dos de X es numerable.*

Considerando las propiedades de continuos y la existencia de colecciones no numerables de conjuntos que desconectan el espacio, la siguiente proposición establece un resultado interesante.

Proposición. 1.19. [18, Ejercicio 6.29, p. 100]. *Si \mathcal{C} es una colección no numerable de conjuntos disjuntos dos a dos de un continuo X tal que $X \setminus C$ no es conexo para cada C en \mathcal{C} , entonces existe un elemento A de \mathcal{C} tal que para cualesquiera conjuntos abiertos disjuntos U y V de X con $X \setminus A = U \cup V$, existen elementos B y C de \mathcal{C} tales que B interseca a U y C interseca a V .*

Demostración. Por la Proposición 1.17, X es separable. Supongamos por el contrario que para cada elemento A de \mathcal{C} existen subconjuntos abiertos disjuntos U_A y V_A de X con $X \setminus A = U_A \cup V_A$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que cada elemento B un \mathcal{C} distinto de A , está contenido en U_A . Probaremos que la familia $\{V_A : A \in \mathcal{C}\}$ es una colección no numerable de conjuntos abiertos no vacíos de X , lo cual contradice el hecho de que X es un espacio métrico separable, Proposición 1.18.

Para obtener la contradicción mencionada, tomamos A y B dos elementos diferentes de \mathcal{C} , observamos que $X = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) = (U_A \cup U_B) \cup (V_A \cap V_B)$. Notamos que $U_A \cup U_B$ y

$V_A \cap V_B$ son conjuntos abiertos disjuntos de X . Como $U_A \cup U_B$ es no vacío, por conexidad de X , tenemos que $V_A \cap V_B$ es vacío. Esto concluye la demostración. \square

Los continuos de convergencia poseen una propiedad notable: siempre tienen una cantidad no numerable de puntos de no corte, [18, Ejercicio 6.29, p. 100]. Este hecho queda establecido en el siguiente resultado.

Lema. 1.20. *Si C es un continuo de convergencia de un continuo X , entonces el conjunto $S = \{x \in C : X \setminus \{x\} \text{ es conexo}\}$ es no numerable.*

Demostración. Supongamos por el contrario que S es un conjunto numerable. Entonces, la familia $T = \{\{x\} : x \in C \text{ y } X \setminus \{x\} \text{ no es conexo}\}$ es una colección no numerable de conjuntos de X ajenos dos a dos. Fijemos un elemento arbitrario $\{x\}$ en T . Sean U y V conjuntos abiertos disjuntos no vacíos de X , tales que $X \setminus \{x\} = U \cup V$. Supongamos que $C \setminus \{x\}$ interseca a U . Probaremos que $C \setminus \{x\}$ está contenido en U , lo cual es una contradicción a la Proposición 1.19. Como C es un continuo de convergencia, existe una sucesión $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tal que $C = \lim C_i$ y, para cada entero positivo i , C no interseca a C_i . Sea y un elemento de $(C \setminus \{x\}) \cap U$. Como y es un elemento de C y $\lim C_i = C$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada entero positivo i , C_i está contenido en U , por lo tanto $C \setminus \{x\}$ está contenido en U . \square

Más allá de las propiedades específicas de los continuos de convergencia, existen resultados generales sobre espacios métricos que son de utilidad en nuestro estudio. En particular se tienen los siguientes enunciados.

Proposición. 1.21. [18, Corolario 5.9, p. 75] *Sean X un continuo y A un subcontinuo de X . Si K es una componente de $X \setminus A$, entonces $A \cup K$ es un subcontinuo de X .*

Proposición. 1.22. [18, Teorema 5.6, p. 74] Sean X un continuo y E un subconjunto propio de X . Si K es una componente de E , entonces \overline{K} interseca a $\text{fr}(E)$.

1.2. Hiperespacios

Si X es un continuo no degenerado con métrica d , los hiperespacios son ciertas familias de subconjuntos de X con alguna característica particular. Los más estudiados son:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío en } X\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

$$C(p, X) = \{A \in C(X) : p \in A\} \quad (p \in X),$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\} \text{ y}$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dados $\varepsilon > 0$, $x \in X$ y $A \in 2^X$, se definen:

La bola de radio ε centrada en x , denotada por $B_\varepsilon(x)$, como

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\},$$

la nube de radio ε centrada en A , denotada por $N(\varepsilon, A)$, como

$$N(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a).$$

Dados A y B en 2^X , definimos:

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

En [12, Proposición 2.1, p. 22] se prueba que H es una métrica para 2^X . La métrica H se conoce como la *métrica de Hausdorff*, la idea intuitiva de esta métrica es que dos subconjuntos están cercanos si ellos casi se empalman uno con el otro.

El conjunto 2^X dotado con la métrica H se llama el *hiperespacio de compactos de X* . Como 2^X contiene a $C(X)$ y a $F_n(X)$ se tiene que estos últimos también se pueden dotar de la métrica inducida por H . Al conjunto $C(X)$ dotado con la métrica inducida por H se le conoce como el *hiperespacio de subcontinuos de X* , el conjunto $F_n(X)$ dotado con la métrica inducida por H es conocido como el *n -ésimo producto simétrico de X* .

Uno de los resultados más importantes en la teoría de hiperespacios establece que 2^X y $C(X)$ son compactos [12, pp. 66-69] y arco-conexos [12, pp. 92-93] para cualquier continuo X , se tiene así el siguiente resultado.

Teorema. 1.23. *Para cualquier continuo X , los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son continuos arco-conexos.*

Habiendo establecido la topología, presentamos a continuación dos resultados que son útiles.

Proposición. 1.24. [12, Ejercicio 2.8, p.27] *Si X es un continuo, n un entero positivo y U_1, \dots, U_n son subconjuntos abiertos de X , entonces el conjunto $U = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}\}$ es un subconjunto abierto de 2^X .*

Demostración. Sea A un elemento de U . Para cada x en A , definimos $N(x) = \{i \in \{1, \dots, n\} : x \in U_i\}$. Existe un número positivo δ_x tal que $B_{\delta_x}(x)$ está contenida en $\bigcap_{i \in N(x)} U_i$. Por compacidad, existe una colección finita $\{B_{\frac{1}{2}\delta_{x_1}}(x_1), \dots, B_{\frac{1}{2}\delta_{x_k}}(x_k)\}$ tal que A está contenido en $\bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\delta_{x_i}}(x_i)$. Sea $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_k}\}$. Mostraremos

que si B es un elemento de 2^X y $H(A, B)$ es menor que δ , entonces B es un elemento de U .

Afirmación 1. Si $H(A, B)$ es menor que δ , entonces B está contenido en $\bigcup_{i=1}^n U_i$.

En efecto. Sea b un elemento de B . Existe a en A tal que $d(a, b)$ es menor que δ . Tomamos i en $\{1, \dots, k\}$ tal que a es un elemento de $B_{\frac{1}{2}\delta_{x_i}}(x_i)$. Como consecuencia, $d(b, x_i) < \delta_{x_i}$, lo que implica que b es un elemento de $\bigcap_{j \in N(x_i)} U_j$.

Afirmación 2. Si $H(A, B)$ es menor que δ , entonces $B \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

En efecto. Sea i un elemento de $\{1, \dots, n\}$ y a en $A \cap U_i$. Existe b en B tal que $d(a, b)$ es menor que δ . Tomamos j en $\{1, \dots, k\}$ tal que a es un elemento de $B_{\frac{1}{2}\delta_{x_j}}(x_j)$. Se tiene que $d(b, x_j) < \delta_{x_j}$. Como $B_{\delta_{x_j}}(x_j)$ está contenida en $\bigcap_{j \in N(x_i)} U_j$ y a es un elemento de $B_{\delta_{x_j}}(x_j)$, se tiene que $B_{\delta_{x_j}}(x_j)$ está contenida en U_i , lo que prueba que B interseca a U_i .

De las afirmaciones 1 y 2, se sigue que el conjunto $\{B : H(A, B) < \delta\}$ está contenido en U . Esto prueba que U es un conjunto abierto. \square

Proposición. 1.25. [12, Ejercicio 2.10, p. 27] Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continuo entre continuos. Se define $2^f : 2^X \rightarrow 2^Y$ por $2^f(A) = f(A)$. Se cumplen las siguientes afirmaciones.

(1) 2^f está bien definida.

(2) 2^f es continua.

Demostración. (1) Por el Teorema 1.23, 2^X y 2^Y son compactos. Por la continuidad de f , para cada cerrado A de X , $f(A)$ es cerrado en Y .

(2) Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos cerrados de X que converge a A . Mostraremos que toda subsucesión convergente de $\{f(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(A)$. Sea $\{f(A_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión convergente de $\{f(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ con límite B . Sea a un elemento de A . Existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a a con a_n un elemento de A_n para cada entero n . Por la continuidad de f , $f(a) = \lim f(a_{n_k})$. Por lo tanto, $f(a)$ es un elemento de B . Esto prueba que $f(A)$ está contenido en B . Sea b un elemento de B . Existe una sucesión $\{f(b_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a b con b_{n_k} un punto en A_{n_k} para cada entero n_k . Por compacidad, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a c con c un elemento de A . Por la continuidad de f , $\lim f(b_{n_k}) = f(c) = b$. Por lo tanto b es un elemento de $f(A)$. Esto prueba que B está contenido en $f(A)$. Así, toda subsucesión convergente de $\{f(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(A)$. En consecuencia $\lim f(A_n) = f(A)$, lo que implica la continuidad de 2^f . \square

Proposición. 1.26. [12, Ejercicio 2.16, p.28] *Sea X un continuo. Se define $\cup : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$ por $\cup(\mathcal{A}) = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}$. Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- (1) \cup es continua.
- (2) Si \mathcal{A} es un subcontinuo de 2^X y \mathcal{A} interseca a $C(X)$, entonces $D = \cup(\mathcal{A})$ es un subcontinuo de X .

Demostración. (1) Sea $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos cerrados de 2^X que converge a \mathcal{A} . Mostraremos que toda subsucesión convergente de $\{\cup(\mathcal{A}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\cup(\mathcal{A})$. Sea $\{\cup(\mathcal{A}_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión convergente de $\{\cup(\mathcal{A}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ con límite B . Sea a un elemento de $\cup(\mathcal{A})$. Existe A en \mathcal{A} tal que a está en A . Existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a A con A_n un elemento de \mathcal{A}_n para cada entero n . Existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a a con a_n un elemento de A_n para cada entero n . Como, para cada entero n , A_n está contenido en $\cup(\mathcal{A}_n)$, se tiene que a es un elemento de B . Esto prueba que $\cup(\mathcal{A})$ está contenido en B . Sea b un

elemento de B . Existe una sucesión $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a b con b_{n_k} un punto en $\cup(\mathcal{A}_{n_k})$ para cada entero n_k . Para cada entero n_k , existe A_{n_k} un elemento de \mathcal{A}_{n_k} tal que b_{n_k} está en A_{n_k} . Por compacidad, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a C con C en \mathcal{A} . Esto implica que b es un elemento C y por lo tanto de $\cup(\mathcal{A})$. Esto prueba que B está contenido en $\cup(\mathcal{A})$. Así, toda subsucesión convergente de $\{\cup(\mathcal{A}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\cup(\mathcal{A})$. En consecuencia $\lim \cup(\mathcal{A}_n) = \cup(\mathcal{A})$, lo que implica la continuidad de \cup .

(2) Afirmación 1. D es un conjunto conexo.

En efecto. Supongamos por el contrario que D no es conexo. Existen conjuntos abiertos disjuntos no vacíos, U y V , de X , tales que D está contenido en $U \cup V$ y D interseca tanto a U como a V . Definimos los conjuntos $W_1 = \{A \in 2^X : A \subset U\}$, $W_2 = \{A \in 2^X : A \subset V\}$ y $W_3 = \{A \in 2^X : A \subset U \cup V \text{ y } A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V\}$. Por la Proposición 1.24, W_1 , W_2 y W_3 son conjuntos abiertos de 2^X . Sea C un elemento en $\mathcal{A} \cap C(X)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que C es un elemento de W_1 . Como D interseca a V , existe E en \mathcal{A} tal que E interseca a V . Esto implica que $W_2 \cup W_3$ es no vacío. Esto contradice la conexidad de \mathcal{A} , pues $\mathcal{A} = W_1 \cup (W_2 \cup W_3)$ y W_1 , W_2 y W_3 son disjuntos dos a dos.

Afirmación 2. D es un conjunto cerrado.

En efecto. Sea d un elemento de \overline{D} . Existe una sucesión $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ de puntos de D que converge a d . Para cada entero positivo i , existe un elemento A_i en \mathcal{A} tal que d_i es un elemento de A_i . Por compacidad, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A con A en \mathcal{A} . Esto implica que d es un elemento de A , en consecuencia d está en D , lo que prueba que D es un conjunto

cerrado.

Por las afirmaciones 1 y 2, D es un subcontinuo de X . \square

Una herramienta de gran utilidad en el estudio de la estructura topológica de los hiperespacios son los arcos ordenados.

Definición. 1.27. Dados dos subcontinuos, A , B , de un continuo X tales que A es subconjunto propio de B , decimos que una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ es un *arco ordenado de A a B en $C(X)$* si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s)$ es un subconjunto propio de $\alpha(t)$, cuando s es menor que t .

En [12, Teorema 6.10, p. 90], podemos encontrar una demostración del siguiente resultado.

Teorema. 1.28. *Si A y B son subcontinuos de un continuo X tales que A es un subconjunto propio de B , entonces existe un arco ordenado en $C(X)$ de A a B .*

Este último teorema nos dice que cualquier elemento A del hiperespacio $C(X)$ se puede “inflar” continuamente hasta llegar a X .

Capítulo 2

Hiperespacios de conjuntos que no desconectan

En este capítulo, nos adentramos en el estudio de los hiperespacios de conjuntos que no desconectan, un área que ha sido previamente explorada en artículos como [8] y [11]. Sin embargo, es importante destacar que las definiciones proporcionadas en esos trabajos implican que los elementos de un hiperespacio de conjuntos que no desconectan tienen necesariamente interior vacío. En este capítulo, presentamos una perspectiva más amplia al definir los hiperespacios de conjuntos que no desconectan de manera que no requieran que sus elementos tengan interior vacío. Aunque nuestras definiciones difieren de las anteriores en este aspecto, es notable que al restringirnos a conjuntos de interior vacío, nuestras definiciones coinciden con las dadas en [8] y [11]. Esto nos permite establecer una conexión clara con la literatura existente, al mismo tiempo que ampliamos el alcance de la teoría.

2.1. Definiciones y relaciones

En esta sección, definimos los hiperespacios de conjuntos que no desconectan y exploramos sus relaciones mediante la contención de conjuntos. Iniciamos con las definiciones necesarias.

Definición. 2.1. Dados A un subconjunto cerrado no vacío de un continuo X y p un punto en el complemento de A , decimos que A *no bloquea a p* si existe una función continua α de $[0, 1]$ en 2^X tal que $\alpha(0) = \{p\}$, $\alpha(1) = \overline{X \setminus A}$ y, para cada t en $[0, 1)$, $\alpha(t)$ no interseca a A . De lo contrario decimos que A *bloquea a p* .

Definición. 2.2. Decimos que un subconjunto cerrado no vacío A de un continuo X :

- es *un conjunto de conexidad colocal de X* , si A tiene vecindades abiertas arbitrariamente pequeñas cuyos complementos son conexos, es decir, para cada conjunto abierto, U , de X que contiene a A , existe un subconjunto abierto, V , de X que contiene a A y está contenido en U tal que $X \setminus V$ es conexo.
- es *un conjunto de no corte débil de X* , si el complemento de A es conexo por continuos, es decir, si cada par de puntos en $X \setminus A$ están contenidos en un subcontinuo de X que no interseca a A . De lo contrario decimos que A es *un conjunto de corte débil de X* .
- *no bloquea a los unipuntuales de X* , si A no bloquea a cada punto de su complemento.
- *no bloquea a algún punto de X* , si existe un punto en el complemento de A tal que A no lo bloquea.
- *es un conjunto orilla de X* si para cada número positivo ε existe un subcontinuo B de X tal que $H(\overline{X \setminus A}, B)$ es menor que ε y B no interseca a A , donde, H denota la métrica de Hausdorff para 2^X .

- es un conjunto de no corte de X , si A tiene complemento conexo. De lo contrario decimos que A es un conjunto de corte de X .

Definición. 2.3. Para un continuo X , se definen los siguientes subespacios de 2^X :

- $CLC(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto de conexidad colocal de } X\}$.
- $NWC(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto de no corte débil de } X\}$.
- $NB(F_1(X)) = \{A \in 2^X : A \text{ no bloquea a los unipuntuales de } X\}$.
- $NB^*(F_1(X)) = \{A \in 2^X : A \text{ no bloquea a algún punto de } X\}$.
- $S(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto orilla de } X\}$.
- $NC(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es un conjunto de no corte de } X\}$.

Estos subespacios se llaman, hiperespacio de: conjuntos de conexidad colocal, conjuntos de no corte débil, conjuntos que no bloquean a los unipuntuales, conjuntos que no bloquean a algún punto, conjuntos orilla y conjuntos de no corte, respectivamente.

Todos ellos se conocen colectivamente como *hiperespacios de conjuntos que no desconectan a X* .

Observación. 2.4. Adoptamos la notación común en la literatura, aunque debemos tener presente que los hiperespacios de conjuntos que no desconectan que definimos contienen a los hiperespacios de conjuntos que no desconectan clásicos como subconjuntos.

Denotamos por $K_{X \setminus A}(p)$ al subconjunto más grande conexo por continuos de $X \setminus A$ que contiene al punto p , es decir, $K_{X \setminus A}(p) = \bigcup \{C \in C(X) : p \in C \text{ y } C \subset X \setminus A\}$.

A continuación, presentamos proposiciones que nos permiten establecer las relaciones entre los hiperespacios de conjuntos que no desconectan mediante la contención de conjuntos. Las pruebas de estos resultados siguen las técnicas y enfoques desarrollados en [8] y [11].

Proposición. 2.5. *Sean X un continuo, A un subconjunto cerrado no vacío de X y p un punto en el complemento de A . Las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (1) A no bloquea a p .
- (2) Existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de $\{p\}$ a $\overline{X \setminus A}$, tal que, para cada t en $[0, 1)$, $\alpha(t)$ no interseca a A .
- (3) Existe una sucesión, $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, de subcontinuos de X que no intersecan a A , tales que para cada número entero positivo n , p es un elemento de A_n , A_n está contenido en A_{n+1} y $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ coincide con $\overline{X \setminus A}$.
- (4) La cerradura de $K_{X \setminus A}(p)$ coincide con $\overline{X \setminus A}$.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Supongamos que A no bloquea a p . Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^X$ una función continua tal que $\alpha(0) = \{p\}$, $\alpha(1) = \overline{X \setminus A}$ y, para cada t en $[0, 1)$, $\alpha(t)$ no interseca a A . Por la Proposición 1.25, la función $\beta_1 : 2^{[0,1]} \rightarrow 2^X$ dada por $\beta_1(A) = \alpha(A)$ es continua. Por el inciso (1) de la Proposición 1.26, la función $\cup : 2^{2^X} \rightarrow 2^X$ definida por $\cup(\mathcal{A}) = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$ es continua. La función $\beta_2 : [0, 1] \rightarrow C(0, [0, 1])$ definida por $\beta_2(t) = [0, t]$ es continua. Se define la función $\beta : [0, 1] \rightarrow 2^X$ como $\beta(t) = \cup(\beta_1(\beta_2(t))) = \bigcup \{\alpha(s) : s \in [0, t]\}$. La función β es continua. Observe que, para cada t en $[0, 1)$, $\beta(t)$ no

interseca a A . Por el inciso (2) de la Proposición 1.26, se tiene que, $\beta(t)$ es un subcontinuo de X . Lo que implica que $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$ es un arco ordenado satisfaciendo las propiedades en (2).

(2) \Rightarrow (3) Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ un arco ordenado de $\{p\}$ a $\overline{X \setminus A}$, tal que, para cada t en $[0, 1)$, $\alpha(t)$ no interseca a A . Para cada entero positivo n , se define $A_n = \alpha(\frac{n}{n+1})$. La sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface las propiedades en (3).

(3) \Rightarrow (4) Es inmediato.

(4) \Rightarrow (3) Sea $\{d_1, d_2, \dots\}$ un subconjunto denso de $X \setminus A$. Para cada entero positivo n , sea C_n un subcontinuo de X que contiene a p , no interseca a A e interseca a $B_{\frac{1}{n}}(d_n)$. Se tiene que $\overline{\bigcup\{C_n : n \in \mathbb{N}\}}$ coincide con $\overline{X \setminus A}$. Se definen, $A_1 = \{p\}$ y $A_{n+1} = A_1 \cup \bigcup\{C_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$. La sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface las propiedades en (3).

(3) \Rightarrow (1) Sean $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ como en (3) y $A_0 = \{p\}$. Para cada entero n , por el Teorema 1.28, existe $\alpha_n : [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}] \rightarrow C(X)$ un arco ordenado de A_{n-1} a A_n . Se define $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como $\alpha(t) = \alpha_n(t)$ si t es un elemento de $[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1})$ y $\alpha(1) = \overline{X \setminus A}$. La función α es una función continua, $\alpha(0) = \{p\}$ y, para cada t en $[0, 1)$, $\alpha(t)$ no interseca a A . \square

Proposición. 2.6. *Sean X un continuo y A un subconjunto cerrado no vacío de X . Entonces:*

- (1) *A es un conjunto de no corte débil de X si y solo si para cada x en el complemento de A , se tiene que $K_{X \setminus A}(x)$ coincide con $X \setminus A$.*
- (2) *A no bloquea a los unipuntuales de X si y solo si para cada x en el complemento de A , se tiene que $\overline{K_{X \setminus A}(x)}$ coincide con $\overline{X \setminus A}$.*

(3) *A no bloquea a algún punto de X si y solo si existe x en el complemento de A tal que $\overline{K_{X \setminus A}(x)}$ coincide con $\overline{X \setminus A}$.*

Demostración. (1) Supongamos que A es un conjunto de no corte débil y sea x un punto en $X \setminus A$. En general se tiene que $K_{X \setminus A}(x)$ está contenido en $X \setminus A$. Sea $y \in X \setminus A$, existe un subcontinuo, C , de X contenido en $X \setminus A$ y conteniendo a los puntos x y y . Esto implica que y pertenece al conjunto $K_{X \setminus A}(x)$. Así, $K_{X \setminus A}(x)$ coincide con $X \setminus A$.

Supongamos ahora que, para cada x en el complemento de A , $K_{X \setminus A}(x)$ coincide con $X \setminus A$. Sean y y z puntos en el complemento de A . Por hipótesis, z es un elemento de $K_{X \setminus A}(y)$, por lo tanto, existe un subcontinuo C de X contenido en $X \setminus A$ y conteniendo a los puntos y y z . Lo que implica que A es un conjunto de no corte débil de X .

Los enunciados (2) y (3) se siguen del inciso (4) de la Proposición 2.5. \square

El siguiente teorema establece la relación entre los hiperespacios de conjuntos que no desconectan mediante la contención de conjuntos. Su demostración se basa en las técnicas desarrolladas en [8].

Teorema. 2.7. *Si X es un continuo, entonces*

$$CLC(X) \subset NWC(X) \subset NB(F_1(X)) \subset NB^*(F_1(X)) \subset S(X) \subset NC(X).$$

Demostración. Supongamos que A es un conjunto de conexidad colocal. Sean x y y dos puntos en el complemento de A . Existe un subconjunto abierto, U , de X que contiene a A y su cerradura no interseca al conjunto $\{x, y\}$. Sea V un subconjunto abierto de X conteniendo a A , contenido en U y de complemento conexo. El continuo $\overline{X \setminus V}$ no interseca a A y contiene a los puntos x y y . Así, A es un conjunto de no corte débil.

Supongamos que A es un conjunto de no corte débil de X . Sea x un punto en el complemento de A . Por el inciso (1) de

la Proposición 2.6, se tiene que $K_{X \setminus A}(x)$ coincide con $X \setminus A$. Por el inciso (2) de la Proposición 2.6, se concluye que A no bloquea a los unipuntuales de X .

Es claro que si A no bloquea a los unipuntuales de X , entonces A no bloquea a algún punto de X .

Supongamos que A no bloquea a algún punto de X . Existe un punto x en el complemento de A tal que A no bloquea a x , por el inciso (2) de la Proposición 2.5, existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$, de $\{x\}$ a $\overline{X \setminus A}$, tal que, para cada t en $[0, 1)$, $\alpha(t)$ no interseca a A . Observe que, $\{\alpha(1 - \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ que converge a $\overline{X \setminus A}$. Lo que prueba que A es un conjunto orilla de X .

Finalmente, supongamos que A es un conjunto orilla de X . Para cada entero positivo n , existe un subcontinuo, C_n , de X que no interseca a A tal que $H(C_n, \overline{X \setminus A})$ es menor que $\frac{1}{n}$. Supongamos que $X \setminus A$ no es conexo. Existen subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos, U y V , de X , tales que $X \setminus A = U \cup V$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada entero positivo n , C_n está contenido en U . Se sigue que $\overline{X \setminus A}$ está contenido en $U \cup A$. Lo que implica que V es vacío. Lo cual es una contradicción. Así, $X \setminus A$ es conexo. Por lo tanto, A es un conjunto de no corte de X . \square

Observación. 2.8. En la Observación 3.3 de [8, pp. 99-100], muestran que, bajo las definiciones establecidas allí, las inclusiones dadas en el Teorema 2.7 pueden ser propias. Dado que nuestras definiciones coinciden con las de [8] cuando se restringen a conjuntos de interior vacío, se sigue que las inclusiones también pueden ser propias en nuestro caso.

Las siguientes proposiciones establecen una relación importante entre los elementos de los hiperespacios de conjuntos que no desconectan y sus fronteras. Las demostraciones se siguen directamente de la Definición 2.2.

Proposición. 2.9. *Sea A un subconjunto cerrado no vacío de un continuo X .*

- (1) *Si A es un conjunto de conexidad colocal de X , entonces $\text{fr}(A)$ es un conjunto de conexidad colocal de $\overline{X \setminus A}$.*
- (2) *Si A es un conjunto de no corte débil de X , entonces $\text{fr}(A)$ es un conjunto de no corte débil de $\overline{X \setminus A}$.*
- (3) *Si A no bloquea a los unipuntuales de X , entonces $\text{fr}(A)$ no bloquea a los unipuntuales de $\overline{X \setminus A}$.*
- (4) *Si A no bloquea a algún punto de X , entonces $\text{fr}(A)$ no bloquea a algún punto de $\overline{X \setminus A}$.*
- (5) *Si A es un conjunto orilla de X , entonces $\text{fr}(A)$ es un conjunto orilla de $\overline{X \setminus A}$.*
- (6) *Si A es un conjunto de no de corte X , entonces $\text{fr}(A)$ es un conjunto de no corte de $\overline{X \setminus A}$.*

Proposición. 2.10. *Sea A un subconjunto cerrado no vacío de un continuo X tal que $\overline{X \setminus A}$ es un subcontinuo de X .*

- (1) *Si $\text{fr}(A)$ es un conjunto de conexidad colocal de $\overline{X \setminus A}$, entonces A es un conjunto de conexidad colocal de X .*
- (2) *Si $\text{fr}(A)$ es un conjunto de no corte débil de $\overline{X \setminus A}$, entonces A es un conjunto de no corte débil de X .*
- (3) *Si $\text{fr}(A)$ no bloquea a los unipuntuales de $\overline{X \setminus A}$, entonces A no bloquea a los unipuntuales de X .*
- (4) *Si $\text{fr}(A)$ no bloquea a algún punto de $\overline{X \setminus A}$, entonces A no bloquea a algún punto de X .*
- (5) *Si $\text{fr}(A)$ es un conjunto orilla de $\overline{X \setminus A}$, entonces A es un conjunto orilla de X .*
- (6) *Si $\text{fr}(A)$ es un conjunto de no corte de $\overline{X \setminus A}$, entonces A es un conjunto de no corte de X .*

2.2. Coincidencias

En esta sección, nos enfocamos en establecer condiciones necesarias y suficientes para que el hiperespacio de conjuntos de no corte débil coincida con el hiperespacio de conjuntos de conexidad colocal, y también, para que el hiperespacio de conjuntos que no bloquean a los unipuntuales coincida con el hiperespacio de conjuntos de no corte débil. Para lograr esto, comenzamos analizando la aposindesis y su papel en la relación entre estos espacios. En particular, demostramos que si F es un conjunto que pertenece a alguno de los hiperespacios de conjuntos que no desconectan y X es aposindético con respecto a F , entonces F pertenece al hiperespacio de conjuntos de conexidad colocal.

Definición. 2.11. Decimos que un continuo X es *aposindético con respecto a un conjunto cerrado* A si cada punto en el complemento de A está contenido en el interior de un subcontinuo que no interseca a A .

Las siguientes dos proposiciones establecen propiedades que satisfacen los conjuntos cerrados para los cuales X es aposindético con respecto a ellos.

Proposición. 2.12. *Si A es un subconjunto cerrado de un continuo X y X es aposindético con respecto a A , entonces cada componente de $X \setminus A$ es un subconjunto abierto de X .*

Demostración. Sean D una componente de $X \setminus A$ y p un punto en D . Existe un subcontinuo C de X que contiene al punto p en su interior y no interseca a A . Se sigue que C está contenido en D . Lo que prueba que D es un conjunto abierto de X . \square

Proposición. 2.13. *Si A es un subconjunto cerrado de un continuo X y X es aposindético con respecto a A , entonces cada componente de $X \setminus A$ es un conjunto conexo por continuos.*

Demostración. Sean D una componente de $X \setminus A$ y p un punto en D . Claramente $K_{X \setminus A}(p)$ está contenido en D .

Afirmación 1. $K_{X \setminus A}(p)$ es un subconjunto abierto de D .

En efecto. Sea y un punto en $K_{X \setminus A}(p)$. Existe un subcontinuo, C_1 , de X que contiene los puntos p y y , tal que C_1 está contenido en el complemento de A . Por otro lado, existe un subcontinuo, C_2 , de X que contiene al punto y en su interior y está contenido en el complemento de A . Así, $C_1 \cup C_2$ es un subcontinuo de X que contiene al punto p y está contenido en $X \setminus A$. Entonces, $C_1 \cup C_2$ está contenido en $K_{X \setminus A}(p)$. En consecuencia, $K_{X \setminus A}(p)$ es un subconjunto abierto de X y, por lo tanto, es un subconjunto abierto de D .

Afirmación 2. $K_{X \setminus A}(p)$ es un subconjunto cerrado de D .

En efecto. Sea y un punto en $D \setminus K_{X \setminus A}(p)$. Existe un subcontinuo, C_1 , de X que contiene a y en su interior y está contenido en el complemento de A . Probaremos que C_1 está contenido en $D \setminus K_{X \setminus A}(p)$. Claramente C_1 está contenido en D . Supongamos que existe un punto z en $C_1 \cap K_{X \setminus A}(p)$. Existe un subcontinuo, C_2 , de X que contiene a los puntos p y z y está contenido en el complemento de A . Así, $C_1 \cup C_2$ es un subcontinuo de X que contiene a los puntos p y y , y está contenido en el complemento de A . Esto implica que y es un elemento de $K_{X \setminus A}(p)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, C_1 está contenido en $D \setminus K_{X \setminus A}(p)$. Se tiene que $D \setminus K_{X \setminus A}(p)$ es un subconjunto abierto de D . Lo que prueba que $K_{X \setminus A}(p)$ es un subconjunto cerrado de D .

De las afirmaciones 1 y 2, se sigue que $K_{X \setminus A}(p)$ coincide con D . Lo que implica que para cualquier punto q en D , existe un subcontinuo que contiene a los puntos p y q , y no interseca a A . □

Como consecuencia inmediata de la Proposición 2.13 se tiene el siguiente corolario.

Corolario. 2.14. *Si A es un conjunto de no corte de un continuo X y X es aposindético con respecto a A , entonces A es un conjunto de no corte débil.*

El corolario a continuación establece que si F es un elemento de un hiperespacio de conjuntos que no desconectan a X y X es aposindético con respecto a F , entonces F es un conjunto de no corte débil.

Corolario. 2.15. *Sean X un continuo y $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de conjuntos que no desconectan a X . Si A es un elemento de $\mathcal{H}(X)$ y X es aposindético con respecto a A , entonces A es un conjunto de no corte débil.*

Demostración. Por el Teorema 2.7, se tiene que A es un conjunto de no corte. Del Corolario 2.14, se sigue que, F es un conjunto de no corte débil. \square

Observación. 2.16. Un conjunto cerrado F , puede ser de no corte débil sin que X sea aposindético con respecto a F , como se muestra en el ejemplo siguiente.

En el plano cartesiano consideramos los puntos $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$, $c = (\frac{3}{4}, 0)$ para cada entero positivo n , $b_n = (1, \frac{1}{n})$, los segmentos de recta $L_0 = ab$, $L_n = ab_n$ y el arco $L_{-1} = \{(\cos(x), \sin(x)) : x \in [-\pi, 0]\}$. Tomamos $X = \bigcup_{n=-1}^{\infty} L_n$ y F el segmento de recta con extremos $(-\frac{1}{4}, 0)$ y $(\frac{1}{4}, 0)$. Se ilustra en la Figura 2.1. Observamos que F es un conjunto de no corte débil y todo subcontinuo que contenga a c en su interior interseca a F .

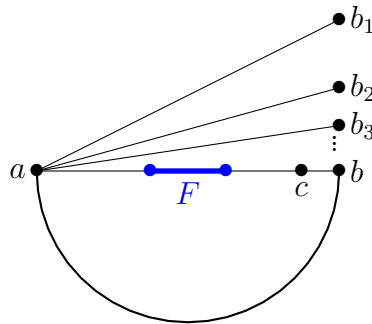


Figura 2.1

El siguiente teorema proporciona una condición necesaria y suficiente para que un conjunto de no corte débil sea un conjunto de conexidad colocal.

Teorema. 2.17. *Un subconjunto cerrado no vacío, A , de un continuo X es un conjunto de conexidad colocal, si y solo si A es un conjunto de no corte débil de X y X es aposindético con respecto a A .*

Demostración. Necesidad: Supongamos que A es un conjunto de conexidad colocal de X . Por el Teorema 2.7, es suficiente mostrar que X es aposindético con respecto a A . Sean p un punto en el complemento de A y U un subconjunto abierto de X que contiene a A tal que p no es un elemento de \bar{U} . Existe un subconjunto abierto, V , de X que contiene a A , está contenido en U y tiene complemento conexo. Se tiene que, $X \setminus V$ es un subcontinuo de X que contiene al punto p en su interior y no interseca a A . Por lo tanto, X es aposindético con respecto a A .

Suficiencia: Supongamos que A es un conjunto de no corte débil y que X es aposindético con respecto a A . Sea U un subconjunto abierto de X que contiene a A . Para cada punto x en el complemento de U , existe un subcontinuo, C_x , de X que contiene al punto x en su interior y no interseca a A . Por

compacidad, existe un subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ de $X \setminus U$ tal que $X \setminus U \subset \bigcup_{i=1}^n \text{int}(C_{x_i})$. Más aún, para cada entero i en $\{1, \dots, n\}$, existe un subcontinuo B_i de X que contiene a los puntos x_1 y x_i , y está contenido en $X \setminus A$. Sea $C = \bigcup_{i=1}^n (C_{x_i} \cup B_i)$. Claramente, C es un subcontinuo de X que contiene a $X \setminus U$ y no interseca a A . Se tiene que $X \setminus C$ es un conjunto abierto de X que contiene a A , contenido en U y cuyo complemento es conexo. Por lo tanto, A es un conjunto de conexidad colocal. \square

El siguiente corolario proporciona una condición necesaria y suficiente para que el hiperespacio de conjuntos de conexidad colocal coincida con el hiperespacio de conjuntos de no corte débil.

Corolario. 2.18. *Para un continuo X , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) *Los hiperespacio $CLC(X)$ y $NWC(X)$ coinciden.*
- (2) *El continuo X es aposindético con respecto a cada elemento de $NWC(X)$.*

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Sea A un elemento de $NWC(X)$. Por hipótesis, A es un elemento de $CLC(X)$. Por el Teorema 2.17, X es aposindético con respecto a A .

(2) \Rightarrow (1) Por el Teorema 2.7, es suficiente probar que $NWC(X)$ está contenido en $CLC(X)$. Sea A un elemento de $NWC(X)$. Por hipótesis, X es aposindético con respecto a A . Por el Teorema 2.17, A es un elemento de $CLC(X)$. \square

El corolario a continuación muestra que bajo ciertas condiciones, un hiperespacio de conjuntos que no desconectan coincide con el hiperespacio de conjuntos de conexidad colocal.

Corolario. 2.19. *Sean X un continuo y $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de conjuntos que no desconectan a X . Si X es*

aposindético con respecto a cada elemento de $\mathcal{H}(X)$, entonces los hiperespacios $CLC(X)$ y $\mathcal{H}(X)$ coinciden.

Demostración. Por el Teorema 2.7, es suficiente mostrar que $\mathcal{H}(X)$ está contenido en $CLC(X)$. Sea A un elemento de $\mathcal{H}(X)$. Como consecuencia del Corolario 2.15, se tiene que A es un conjunto de no corte débil. Del Teorema 2.17, se sigue que, A es un conjunto de conexidad colocal. Por lo tanto, los hiperespacios $CLC(X)$ y $\mathcal{H}(X)$ coinciden. \square

Como consecuencia directa del Corolario 2.19, se tiene el siguiente corolario.

Corolario. 2.20. *Sean X un continuo y $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de conjuntos que no desconectan a X . Si X es aposindético con respecto a cada elemento de $\mathcal{H}(X)$, entonces todos los hiperespacios de conjuntos que no desconectan entre $CLC(X)$ y $\mathcal{H}(X)$ coinciden.*

Observación. 2.21. La igualdad entre el hiperespacio de conjuntos que no bloquean a los unipuntuales y el hiperespacio de conjuntos de no corte débil no implica que X sea aposindético con respecto a cada conjunto que no bloquea a los unipuntuales, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

En el plano cartesiano consideramos los puntos $a = (0, 0)$, $b = (1, 0)$, para cada entero positivo n , $b_n = (1, \frac{1}{n})$, $c_n = (1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $d_n = (1 + \frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$, $a_n = (0, -\frac{1}{n})$, los segmentos de recta $L_0 = ab$, $A_n = ab_n$, $B_n = b_n c_n$, $C_n = c_n d_n$, $D_n = d_n a_n$ y los arcos $L_n = A_n \cup B_n \cup C_n \cup D_n$. Tomamos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$. Se ilustra en la Figura 2.2. Observamos que X es un continuo para el cual los hiperespacios $NWC(X)$ y $NB(F_1(X))$ coinciden y X no es aposindético con respecto a cada elemento de $NB(F_1(X))$. A continuación describimos estos hiperespacios y damos un ejemplo de un elemento F en $NB(F_1(X))$ tal que X no es aposindético con respecto a F .

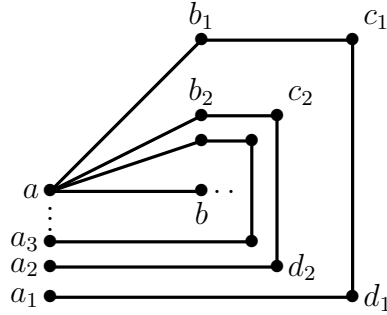


Figura 2.2

Para cada subconjunto finito no vacío $E = \{p_1, \dots, p_k\}$ de $\{p_1, p_2, \dots\}$, definimos

$$\mathcal{A}(E) = \{A_1 \cup \dots \cup A_k : A_i \in C(p_i, L_i) \setminus \{L_i\}, i \in \{1, \dots, k\}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{B}(E) = \{D \cup E : D \in \mathcal{A}(E) \text{ y } E \in C(b, L_0) \setminus \{L_0\}\}.$$

Para cada entero positivo i , tomamos $X_i = X \setminus L_i$ y definimos

$$\mathcal{C}(i) = \{X_i \cup A : A \in C(p, L_i)\} \text{ y}$$

$$\mathcal{D}(i) = \{D \cup E : D \in \mathcal{B}(i) \text{ y } E \in C(p_i, L_i)\}.$$

El hiperespacio de conjuntos de no corte débil y el hiperespacio de conjuntos que no bloquean a los unipuntuales de X coinciden con

$$\bigcup (\mathcal{A}(E) \cup \mathcal{B}(E)) \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathcal{C}(i) \cup \mathcal{D}(i)) \cup \{A : A \in C(q, L_0) \setminus \{L_0\}\},$$

donde E corre sobre todos los conjuntos cerrados no vacíos de $\{p_1, p_2, \dots\}$.

Consideramos los puntos $p_1 = (\frac{1}{2}, -1)$, $p_2 = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$, $p_3 = (\frac{1}{2}, 0)$, $q = (\frac{1}{4}, 0)$ y los segmentos de recta $P_1 = p_1 a_1$, $P_2 = p_2 a_2$ y $P_3 = p_3 b$. Tomamos $F = \bigcup_{i=1}^3 P_i$. Se ilustra en la

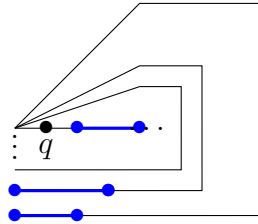


Figura 2.3

Figura 2.3. Observamos que F es un conjunto que no bloquea a los unipuntuales y todo subcontinuo que contenga a q en su interior interseca a F .

A continuación, con el fin de determinar las condiciones precisas bajo las cuales el hiperespacio de conjuntos que no bloquean a los unipuntuales coincide con el hiperespacio de conjuntos de no corte débil, presentamos una definición y un teorema, que serán cruciales para establecer los resultados deseados. La demostración del teorema sigue las técnicas empleadas en [13].

Definición. 2.22. Sean A un subconjunto cerrado de un continuo X y p un punto en el complemento de A . Decimos que X es *aposindético en p con respecto a A* si existe un subcontinuo de X que contiene a p en su interior y no interseca a A .

Teorema. 2.23. Sean X un continuo, D un subconjunto abierto no vacío de X y A un subconjunto cerrado no vacío de X que no interseca a D . Si para cada punto x en D se tiene que X no es aposindético en x con respecto a A , entonces para cada punto y en $X \setminus A$ existe un punto z en D tal que todo subcontinuo de X que contiene a los puntos y y z interseca a A .

Demostración. Sea y un punto en $X \setminus A$. Existe un subconjunto abierto no vacío, D_1 , de X , tal que $\overline{D_1}$ está

contenido en D , $\overline{D_1}$ no interseca a $A \cup \{y\}$ y $\text{diam}(\overline{D_1})$ es menor que $\frac{1}{2}$. Tomemos δ como el mínimo entre $d(A, y)$ y $d(A, \overline{D_1})$. Sea C_1 la componente de $X \setminus N_{\frac{1}{2}\delta}(A)$ que contiene a y . Como X no es aposindético en x con respecto a A para todo x en D_1 , se tiene que D_1 no está contenido en C_1 . Sea z_1 en $D_1 \setminus C_1$. Existe un subconjunto abierto, D_2 , de X tal que z_1 está en D_2 , $\overline{D_2}$ está contenido en D_1 , $\overline{D_2}$ no interseca a C_1 y $\text{diam}(\overline{D_2})$ es menor que $\frac{1}{4}$. Sea C_2 la componente de $X \setminus N_{\frac{1}{4}\delta}(A)$ que contiene a y . Como X no es aposindético en x con respecto a A para todo $x \in D_2$, existe z_2 en $D_2 \setminus C_2$. Lo cual implica que existe un subconjunto abierto, D_3 , de X tal que z_2 está en D_3 , $\overline{D_3}$ está contenido en D_2 , $\overline{D_3}$ no interseca a C_2 y $\text{diam}(\overline{D_3})$ es menor que $\frac{1}{8}$. Se continúa con este proceso. Sea $\{z\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{D_i}$. Claramente z está en D . Supongamos que existe un subcontinuo C de X que contiene a los puntos y y z , y está contenido en $X \setminus A$. Existe un entero positivo j tal que C está contenido en C_j . Lo que implica que z es un elemento de C_j . Lo cual es una contradicción pues z está en $\overline{D_{j+1}}$ y $\overline{D_{j+1}}$ no interseca a C_j . Por lo tanto, todo subcontinuo de X que contiene a los puntos y y z , interseca a A . \square

Como consecuencia directa del Teorema 2.23, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario. 2.24. *Si A es un conjunto de no corte débil de un continuo X , entonces cada abierto de X que no interseca a A contiene un punto p , tal que X es aposindético en p con respecto a A .*

Otra manera de escribir el corolario anterior es la siguiente.

Corolario. 2.25. *Si A es un conjunto de no corte débil de un continuo X , entonces el conjunto formado por los puntos en los cuales X es aposindético con respecto a A es denso en $X \setminus A$.*

Del corolario anterior se deduce el siguiente resultado.

Corolario. 2.26. *Si A es un conjunto de no corte débil de un continuo X , entonces existe un subcontinuo de X con interior distinto del vacío contenido en $X \setminus A$.*

Después de desarrollar los resultados previos, presentamos el teorema que proporciona las condiciones precisas bajo las cuales el hiperespacio de conjuntos que no bloquean a los unipuntuales coincide con el hiperespacio de conjuntos de no corte débil.

Teorema. 2.27. *Un subconjunto cerrado no vacío, A , de un continuo X es un conjunto de no corte débil, si y solo si, A no bloquea a los unipuntuales de X y existe un subcontinuo de X con interior distinto del vacío contenido en $X \setminus A$.*

Demostración. Necesidad: Supongamos que A es un conjunto de no corte débil de X . Por el Teorema 2.7, es suficiente mostrar que existe un subcontinuo de X con interior no vacío contenido en el complemento de A . El Corolario 2.26, garantiza la existencia de dicho continuo.

Suficiencia: Supongamos que A no bloquea a los unipuntuales de X y que existe un subcontinuo C de X con interior no vacío contenido en $X \setminus A$. Sean x y y dos puntos en $X \setminus A$. Por la Proposición 2.6, los conjuntos $\overline{K_{X \setminus A}(x)}$ y $\overline{K_{X \setminus A}(y)}$ son densos en $\overline{X \setminus A}$. Existen subcontinuos, C_x y C_y , de X contenidos en $X \setminus A$, tales que x es un elemento de C_x , y es un elemento de C_y , C_x interseca a $\text{int}(C)$ y C_y interseca a $\text{int}(C)$. Entonces $C \cup C_x \cup C_y$ es un subcontinuo contenido en $X \setminus A$ que contiene a los puntos x y y . Por lo tanto, A es un conjunto de no corte débil de X . \square

Corolario. 2.28. *Para un continuo X , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) *Los hiperespacios $NWC(X)$ y $NB(F_1(X))$ coinciden.*
- (2) *Para cada A en $NB(F_1(X))$ existe un subcontinuo de X con interior no vacío contenido en $X \setminus A$.*

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Sea A un elemento de $NB(F_1(X))$. Por hipótesis, A es un elemento de $NWC(X)$. Por el Teorema 2.27, existe un subcontinuo de X con interior distinto del vacío contenido en $X \setminus A$.

(2) \Rightarrow (1) Por el Teorema 2.7, es suficiente probar que $NB(F_1(X))$ está contenido en $NWC(X)$. Sea A un elemento de $NB(F_1(X))$. Por hipótesis, existe un subcontinuo de X con interior no vacío contenido en $X \setminus A$. Por el Teorema 2.27, A es un elemento de $NWC(X)$. \square

Capítulo 3

Continuos localmente conexos

En este capítulo, exploramos los continuos localmente conexos y demostramos que en este tipo de continuos, los hiperespacios de conjuntos que no desconectan coinciden. Además, proporcionamos caracterizaciones de la conexidad local, identificamos los únicos continuos localmente conexos para los cuales el hiperespacio de conjuntos de no corte es compacto y se dan caracterizaciones del arco y la curva cerrada simple.

3.1. Caracterizaciones de la conexidad local

En esta sección, se demuestra que en continuos localmente conexos, los hiperespacios de conjuntos que no desconectan coinciden. Además, demostramos que para un continuo X las siguientes condiciones son equivalentes: (i) El continuo X es localmente conexo, (ii) Cada conjunto de no corte de X tiene vecindades arbitrariamente pequeñas cuyos complementos son conexos, (iii) Cada conjunto de no corte de X tiene complemento conexo por continuos, (iv) Cada conjunto de

no corte de X no bloquea a los unipuntuales de X , (v) El continuo X es aposindético con respecto a cada uno de sus conjuntos de no corte y (vi) El continuo X es aposindético con respecto a cada uno de sus conjuntos cerrados no vacíos.

Iniciamos demostrando una proposición que aparece en [15, Teorema 3.1.31, p. 120] en términos de la llamada función \mathcal{T} de Jones.

Proposición. 3.1. *Un continuo es localmente conexo si y solo si es aposindético con respecto a cada uno de sus subconjuntos cerrados no vacíos.*

Demostración. La necesidad es clara. Para la suficiencia, supongamos que X es un continuo aposindético con respecto a cada elemento de 2^X . Sea U un subconjunto abierto de X . Como X es aposindético con respecto a $X \setminus U$, de la proposición 2.12, se sigue que cada componente de U es un conjunto abierto de X . Esto prueba la conexidad local de X , teorema 1.11. \square

El siguiente teorema establece una propiedad fundamental de los continuos localmente conexos en relación con los hiperespacios de conjuntos que no desconectan .

Teorema. 3.2. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces todos los hiperespacios de conjuntos que no desconectan coinciden.*

Demostración. Por la Proposición 3.1, se sigue que X es aposindético con respecto a a cada elemento de $NC(X)$. Del Corolario 2.20, se tiene que, todos los hiperespacios de conjuntos que no desconectan coinciden. \square

El siguiente lema es crucial en nuestro análisis y su demostración sigue las ideas desarrolladas por L. Mohler en [16, Teorema 3].

Lema. 3.3. *Si X es un continuo que no es conexo en pequeño en uno de sus puntos, entonces X contiene un conjunto de no corte que bloquea a los unipuntuales de X*

Demostración. Supongamos que X es un continuo que no es conexo en pequeño en un punto p . Existen un número positivo δ , una sucesión de componentes distintas, $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$, y un subcontinuo, L , de la cerradura de la bola abierta $B_\delta(p)$, tal que L tiene más de un punto, p es un elemento de L , $\lim L_i = L$ y, para cada entero positivo i , L_i no interseca a L , vea la demostración del Teorema 5.12 en [18, p. 76]. Sea q un punto en L distinto de p . Fijamos un número positivo, r , menor que $d(p, q)$. Para cada t en el intervalo $(0, r]$, se definen los siguientes conjuntos: P_t denota la cerradura de la componente de la bola abierta $B_t(p)$ que contiene al punto p ; $K_t = P_t \setminus B_t(p)$; Q_t es la componente de $X \setminus P_t$ que contiene al punto q ; y $C_t = \overline{Q_t} \cap K_t$. Observe que, para cada t en $(0, r]$, el conjunto $\{p, q\}$ no interseca a K_t . Por lo tanto, para cada t en $(0, r]$, C_t no interseca a $\{p, q\}$.

Mostraremos una serie de afirmaciones:

Afirmación 1. Para cada número t en $(0, r]$ y para cada punto x en C_t , $d(x, p) = t$.

En efecto. Sea t un número en $(0, r]$ y x un punto en C_t . Observe que C_t está contenido en $\text{fr}(B_t(p))$. Se sigue que $d(x, p) = t$.

Afirmación 2. Para cualquier par de números distintos en $(0, r]$, t y s , los conjuntos C_t y C_s son disjuntos.

En efecto. Por la afirmación 1, x en $C_t \cap C_s$ implica que $d(x, p) = t$ y $d(x, p) = s$. Así, $t = s$.

Afirmación 3. Si t es un número en $(0, r]$ y $X \setminus C_t = U \cup V$, donde, U y V , son conjuntos abiertos disjuntos no vacíos de

X , y p está en U , entonces q está en U .

En efecto. Supongamos que q no está en U . Entonces, q está en V . Como p y q son puntos en L y $\lim L_i = L$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada entero positivo i , L_i interseca tanto a U como a V . Por conexidad de L_i , se tiene que L_i interseca a C_t . Como C_t está contenido en P_t , se sigue que L_i interseca a P_t . Por otro lado, como t es menor que δ , se tiene que P_t está contenido en P_δ , donde, P_δ denota la componente de la cerradura de la bola abierta $B_\delta(p)$ que contiene al punto p . Se sigue que L_i interseca a P_δ . Por lo tanto, para cada entero positivo i , $L_i = P_\delta$. Esto es una contradicción que prueba la afirmación 3.

Afirmación 4. Existe un número t en $(0, r]$ tal que C_t es un conjunto de no corte de X .

En efecto. Supongamos por el contrario que para cada t en $(0, r]$, C_t es un conjunto de corte de X . Entonces, la familia $\{C_t : 0 < t \leq r\}$ es una colección no numerable de conjuntos de corte de X ajenos dos a dos. Fijemos un número arbitrario s en $(0, r]$. Sean U y V conjuntos abiertos disjuntos no vacíos de X , tales que $X \setminus C_s = U \cup V$. Supongamos que p está en U . Probaremos que para cada t en $(0, r]$ distinto de s , C_t está contenido en U , lo cual es una contradicción a la proposición 1.19. Sea t un número en $(0, r]$ distinto de s . Existen dos casos:

Supongamos que $t < s$; en este caso, note que si x es un punto en P_t , entonces $d(p, x) \leq t$ y, por la afirmación 1, x no está en C_s . Se sigue que P_t no interseca a C_s . Así, P_t está contenido en $U \cup V$. Más aún, como p es un punto común de P_t y U , por conexidad de P_t , se tiene que, P_t está contenido en U . Finalmente, como C_t es un subconjunto de P_t , se concluye que C_t está contenido en U .

Supongamos ahora que $s < t$; en este caso se tiene que $X \setminus P_t$

es un subconjunto de $X \setminus P_s$. Lo que implica que Q_t está contenido en $X \setminus P_s$. Más aún, como C_t y P_s son disjuntos, se tiene que C_t está contenido en $X \setminus P_s$. Por lo tanto, se tiene que $Q_t \cup C_t$ está contenido en $X \setminus C_s$. Por otro lado, como $Q_t \cup C_t$ está entre Q_t y $\overline{Q_t}$, se tiene que $Q_t \cup C_t$ es un conjunto conexo. Por la afirmación 3, q es un punto de U . Finalmente, como q es un punto de Q_t , se concluye que $Q_t \cup C_t$ está contenido en U . En particular, C_t está contenido en U .

Esto concluye la demostración de la afirmación 4.

Afirmación 5. Para cada número t en $(0, r]$, todo subcontinuo de X que contiene a los puntos p y q interseca a C_t .

En efecto. Supongamos por el contrario que existe un subcontinuo B de X contenido en $X \setminus C_t$ que contiene a los puntos p y q . Observe que q no es un elemento de P_t , lo que implica que, $0 < d(q, P_t)$. Para cada entero n , sea $V_n = N(\frac{d(q, P_t)}{2n}, P_t)$, y E_n la cerradura de la componente de $B \setminus \overline{V_n}$ que contiene a q . Por la Proposición 1.22, para cada entero positivo n , E_n interseca a $\text{fr}(V_n)$. Por lo tanto, para cada entero positivo n , podemos tomar un punto x_n en E_n y un punto y_n en P_t tales que $d(x_n, y_n) \leq \frac{d(q, P_t)}{2n}$. Por compacidad, podemos suponer que existe un punto q_1 en X tal que ambas sucesiones $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergen a q_1 . Por otro lado, note que, si n es menor que m , entonces E_n está contenido en E_m . Sea $E = \overline{\bigcup\{E_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Observe que E es un subcontinuo de B . Más aún, q_1 es un punto común de E y P_t . Además, E es un subconjunto de $\overline{Q_t}$, pues para cada entero positivo n , E_n está contenido en $\overline{Q_t}$. Observe que, como B no interseca a C_t , q_1 no es un elemento de C_t . Así, q_1 es un punto de $P_t \setminus K_t$. Por lo tanto, q_1 es un punto de la bola abierta $B_t(p)$. Sea M la componente de $E \cap B_t(p)$ que contiene a q_1 . Por la Proposición 1.22, existe un punto q_2 en $\overline{M} \cap \text{fr}(E \cap B_t(p))$. Note que P_t contiene al punto q_2 y q_2 no

es un elemento de la bola abierta $B_t(p)$, pues $d(p, q_2) = t$. Se sigue que, q_2 es un punto en $E \cap K_t$. Por lo tanto, dado que E está contenido en $\overline{Q_t}$, se tiene que, q_2 es un punto de C_t . Así, q_2 es un punto de $B \cap C_t$, lo cual es una contradicción pues B no interseca a C_t . Esto concluye la demostración de la afirmación 5.

Por las afirmaciones 4 y 5

- (1) Existe un número t_0 en el intervalo $(0, r]$ tal que C_{t_0} es un conjunto de no corte y todo subcontinuo de X que contiene a los puntos p y q interseca a C_{t_0} .

Si C_{t_0} bloquea a algún punto de X , entonces C_{t_0} es un conjunto de no corte que bloquea a los unipuntuales de X .

Supongamos que C_{t_0} no bloquea a los unipuntuales de X .

Por el inciso (2) de la Proposición 2.6, se tiene

- (2) Los conjuntos $K_{X \setminus C_{t_0}}(p)$ y $K_{X \setminus C_{t_0}}(q)$ son densos en $\overline{X \setminus C_{t_0}}$.

Por (1),

- (3) $K_{X \setminus C_{t_0}}(p)$ y $K_{X \setminus C_{t_0}}(q)$ son disjuntos.

Afirmación 6. Para cada número t en $(0, r]$, C_t tiene interior vacío.

En efecto. Sea t un número en $(0, r]$. Denotemos por M la componente que contiene a p en $B_t(p)$. Se tiene que $C_t \subset \overline{M} \setminus B_t(p) \subset \overline{M} \setminus M$. Por lo tanto, C_t tiene interior vacío.

Afirmación 7. Para cada s en el intervalo $(0, t_0)$, K_s es un conjunto de no corte de X .

En efecto. Sea s un elemento de $(0, t_0)$. Por la Afirmación 1, P_s está contenido en $X \setminus C_{t_0}$. Por (3), P_s no interseca a $K_{X \setminus C_{t_0}}(q)$, por lo tanto K_s no interseca a $K_{X \setminus C_{t_0}}(q)$. En consecuencia $K_{X \setminus C_{t_0}}(q)$ está contenido en $X \setminus K_s$. Por (2) y la Afirmación 6, $\overline{K_{X \setminus C_{t_0}}(q)} = X$. Esto prueba que K_s es un conjunto de no corte pues $X \setminus K_s$ está entre $K_{X \setminus C_{t_0}}(q)$ y $\overline{K_{X \setminus C_{t_0}}(q)}$.

Afirmación 8. Para cada s en el intervalo $(0, t_0)$, K_s bloquea a p .

En efecto. Sea U una vecindad abierta de q tal que \overline{U} no interseca a $B_r(p)$. Por el inciso (2) de la Proposición 2.6, es suficiente probar que si B es un subcontinuo que tiene a p e interseca U , entonces B interseca a K_s . Tomemos B un subcontinuo de X que tiene a p e interseca a U . Como s es menor que r , los conjuntos \overline{U} y $B_s(p)$ son disjuntos. Sea M la componente que tiene a p en $B \cap B_s(p)$. Por la Proposición 1.22, existe un punto q en $\overline{M} \cap \text{fr}(B \cap B_s(p))$. Note que P_s tiene al punto q y q no es un elemento de la bola abierta $B_s(p)$, pues $d(p, q) = s$. Así, q es un punto de $B \cap K_s$.

Por las Afirmaciones 6 y 7, para cada s en $(0, t_0)$, K_s es un conjunto de no corte que bloquea a los unipuntuales de X . \square

Observación. 3.4. Los conjuntos de no corte C_{t_0} y K_s tiene interior vacío.

El Teorema 3.5 proporciona caracterizaciones de la conexidad local mediante algunos de los hiperespacios de conjuntos que no desconectan .

Teorema. 3.5. *Para un continuo X , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) *El continuo X es localmente conexo.*
- (2) *Los hiperespacios $CLC(X)$ y $NC(X)$ coinciden.*

- (3) Los hiperespacios $NWC(X)$ y $NC(X)$ coinciden.
- (4) Los hiperespacios $NB(F_1(X))$ y $NC(X)$ coinciden.
- (5) El continuo X es aposindético con respecto a cada elemento de $NC(X)$.
- (6) El continuo X es aposindético con respecto a cada elemento de 2^X .

Demostración. (1) \Rightarrow (2) se sigue del Teorema 3.2.

(2) \Rightarrow (3) y (3) \Rightarrow (4) se siguen del Teorema 2.7.

(4) \Rightarrow (6) supongamos que X no es aposindético con respecto a A , para algún A en 2^X . Existe un punto p en $X \setminus A$ tal que cualquier subcontinuo de X que contenga a p en su interior, interseca a A . Sea U un subconjunto abierto de X que contiene al punto p , tal que \bar{U} no interseca a A . Observe que si V es un subconjunto conexo de X que contiene al punto p en su interior, entonces \bar{V} es un subcontinuo de X que contiene al punto p en su interior. Se sigue que, \bar{V} interseca a A . Por lo tanto, V no está contenido en U . Esto prueba que X no es conexo en pequeño en p . Por el Lema 3.3, se concluye que el hiperespacio $NB(F_1(X))$ es diferente de $NC(X)$.

(6) \Rightarrow (1) se sigue de la Proposición 3.1.

Hasta aquí, se ha probado que (1), (2), (3), (4) y (6) son equivalentes.

Ahora, (6) \Rightarrow (5) es obvio y (5) \Rightarrow (3) se sigue del Corolario 2.20. \square

Observación. 3.6. Es importante notar que el teorema anterior es igualmente válido para los respectivos hiperespacios de conjuntos que no desconectan comúnmente estudiados en la literatura.

Observación. 3.7. La igualdad entre los hiperespacios $CLC(X)$, $NWC(X)$, $NB(F_1(X))$, $NB^*(F_1(X))$ y $S(X)$ no implica la conexidad local de X , como se puede observar en el siguiente ejemplo.

En el plano cartesiano consideramos los conjuntos $W_1 = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : 0 < x \leq 1\}$ y $W_2 = \{(-x, \sin(\frac{1}{x})) : 0 < x \leq 1\}$. Tomamos $X = \overline{W_1 \cup W_2}$, $p = (-1, \sin(1))$ y $q = (1, \sin(1))$. Se ilustra en la Figura 3.1. Observamos que X es un continuo no localmente conexo para el cual los hiperespacios $CLC(X)$, $NWC(X)$, $NB(F_1(X))$, $NB^*(F_1(X))$ y $S(X)$ coinciden. A continuación describimos estos hiperespacios.

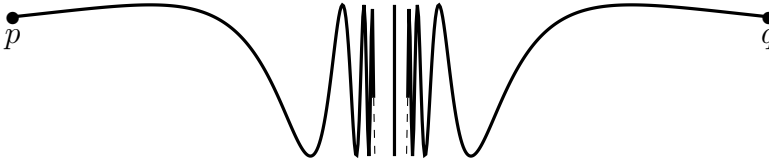


Figura 3.1

Definimos

$$\mathcal{H} = \{A \cup B : A \in C(p, X) \text{ y } B \in C(q, X)\}.$$

Se tiene la igualdad

$$CLC(X) = S(X) = C(p, X) \cup C(q, X) \cup \mathcal{H}.$$

Observación. 3.8. La igualdad entre los hiperespacios $NB^*(F_1(X))$, $S(X)$ y $NC(X)$ no implica la conexidad local de X , como se puede observar en el siguiente ejemplo.

En el plano cartesiano consideramos el conjunto $W = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : 0 < x \leq 1\}$. Tomamos $X = \overline{W}$ y $p = (1, \sin(1))$. Se ilustra en la Figura 3.2. Observamos que X es un continuo no localmente conexo para el cual los

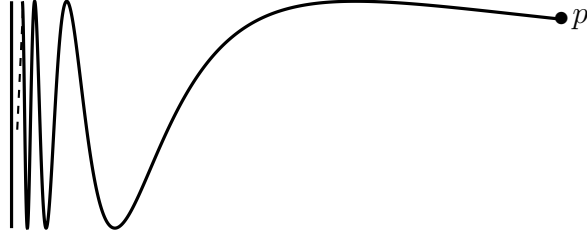


Figura 3.2

hiperespacios $NB^*(F_1(X))$, $S(X)$ y $NC(X)$ coinciden. A continuación describimos estos hiperespacios.

Definimos

$$I = \{0\} \times [-1, 1],$$

$$\mathcal{H}_1 = \{A \cup B : A \in C(p, X) \text{ y } B \in C(I, X)\} \text{ y}$$

$$\mathcal{H}_2 = \{A \cup B : A \in 2^I \text{ y } B \in C(p, X)\}.$$

Se tiene la igualdad

$$NB^*(F_1(X)) = NC(X) = C(p, X) \cup C(I, X) \cup \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup 2^I.$$

3.2. Compacidad

En esta sección, nos enfocamos en la relación entre la compacidad del hiperespacio de conjuntos de no corte y la estructura de los continuos localmente conexos. Demostramos un resultado fundamental que establece que los únicos continuos localmente conexos para los cuales el hiperespacio de conjuntos de no corte es compacto son el arco y la curva cerrada simple.

Comenzamos estableciendo tres resultados que nos proporcionarán las herramientas necesarias para alcanzar nuestra conclusión.

Proposición. 3.9. *Sea C un subcontinuo de un continuo localmente conexo X . Si U es un conjunto abierto de X que contiene a C , entonces existe un conjunto abierto y conexo de X , que contiene a C y está contenido en U .*

Demostración. Para cada punto x de C , existe un conjunto abierto y conexo U_x de X , que contiene al punto x y está contenido en U . Por compacidad, existe un subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ de C , tal que C está contenido en $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Sea $V = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Observe que V es un conjunto abierto y conexo de X que está contenido en U . \square

Teorema. 3.10. *Si el hiperespacio de conjuntos de no corte de un continuo localmente conexo es compacto, entonces cada subcontinuo del continuo tiene interior conexo.*

Demostración. Sea C un subcontinuo de X . Construiremos una sucesión de cerrados de no corte de X que converja a $X \setminus \text{int}(C)$. Definimos U_1 como la nube de radio 1 centrada en C . Por la Proposición 3.9, existe un abierto y conexo V_1 de X , que contiene a C y está contenido en U_1 . Supongamos que, para cada entero positivo, i , mayor o igual que 2, U_{i-1} y V_{i-1} están definidos. Se define $U_i = V_{i-1} \cap N(\frac{1}{i}, C)$. Por la Proposición 3.9, existe un abierto y conexo V_i de X , que contiene a C y está contenido en U_i . La sucesión de abiertos y conexos $\{V_n\}_{i=1}^{\infty}$, cumple lo siguiente: $X \setminus V_i$ está contenido en $X \setminus V_{i+1}$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} X \setminus V_n = X \setminus C$. Por lo tanto, $\lim(X \setminus V_n) = \overline{X \setminus C}$. Como, para cada número entero i , $X \setminus V_i$ es un conjunto de no corte de X , por la compacidad de $NC(X)$, se tiene que $\overline{X \setminus C}$ es un conjunto de no corte. Lo que implica que, $\text{int}(C)$ es conexo. \square

Proposición. 3.11. *Si el hiperespacio de conjuntos de no corte de un continuo localmente conexo es compacto, entonces el continuo no contiene triodos simples.*

Demostración. Supongamos que X es un continuo localmente conexo que contiene un triodo simple, $T = e_1v \cup e_2v \cup e_3v$,

donde, $e_i v$ son los arcos que forman a T y v es el vértice de T . Existen subconjuntos abiertos conexos, U_1 y U_2 , de X , tales que e_1 está contenido en U_1 , la cerradura de U_1 no interseca a $e_2 v \cup e_3 v$, e_2 está contenido en U_2 , la cerradura de U_2 no interseca a $e_1 v \cup e_3 v$, y la cerradura de U_1 no interseca a la cerradura de U_2 . Sea $C = \overline{U_1} \cup e_1 v \cup \overline{U_2} \cup e_2 v$. Observe que C es un subcontinuo de X que contiene a los puntos e_1 y e_2 en su interior y al punto v en su frontera. Por otro lado, se tiene que $C \setminus \{v\} = (\overline{U_1} \cup (e_1 v \setminus \{v\})) \cup (\overline{U_2} \cup (e_2 v \setminus \{v\}))$. Se sigue que $C \setminus \{v\}$ no es un conjunto conexo. Observe que, el interior de C está contenido en $C \setminus \{v\}$. Como e_1 es un elemento de U_1 y e_2 es un elemento de U_2 se tiene que $\text{int}(C)$ no es conexo. Por Teorema 3.10, se concluye que $NC(X)$ no es compacto. Esto concluye la demostración. \square

El Teorema 3.12 establece una caracterización de los continuos localmente conexos cuyo hiperespacio es compacto. La demostración se sigue de las Proposiciones 3.11 y 1.10.

Teorema. 3.12. *Si el hiperespacio de conjuntos de no corte de un continuo no degenerado localmente conexo es compacto, entonces el continuo es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración. Por la Proposición 3.11, X no contiene triodos simples. Por la Proposición 1.10, X es un arco o una curva cerrada simple. \square

A continuación, mostramos que tanto el hiperespacio de conjuntos de no corte del arco, como el de la curva cerrada simple son continuos arco-conexos.

El hiperespacio de conjuntos que no cortan al arco

Definición. 3.13. Sea A un subcontinuo de un continuo X , se define $C(A, X) = \{C \in C(X) : A \subset C\}$.

Lema. 3.14. *Si A es un subcontinuo de un continuo X , entonces $C(A, X)$ es un continuo arco-conexo.*

Demostración. Afirmación 1. $C(A, X)$ es cerrado en 2^X .

En efecto. Sea $\{C\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $C(A, X)$ y C un elemento de 2^X tal que $C = \lim C_i$. Como $C(X)$ es compacto, Teorema 1.23, C es un elemento de $C(X)$. Dado que A está contenido en C_i para cada entero positivo i , se tiene que A está contenido en C . Esto prueba que C es un elemento de $C(A, X)$.

Afirmación 2. $C(A, X)$ es arco-conexo.

Por el Teorema 1.28, existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de A a X . Como A está contenido en $\alpha(t)$ para toda t en el intervalo $[0, 1]$, α es un arco de A a X en $C(A, X)$. Esto prueba que $C(A, X)$ es arco-conexo.

Por las afirmaciones 1 y 2, $C(A, X)$ es un continuo arco-conexo. \square

Definición. 3.15. Dados dos subcontinuos, A y B , de un continuo X , definimos el hiperespacio $C_2(A, B, X) = \{C \cup D : C \in C(A, X) \text{ y } D \in C(B, X)\}$.

Por comodidad, denotamos $C_2(\{p\}, \{q\}, X)$ simplemente por $C_2(p, q, X)$ y $C_2(\{p\}, B, X)$ simplemente por $C_2(p, B, X)$.

Lema. 3.16. Si A y B son subcontinuos de un continuo X , entonces el hiperespacio $C_2(A, B, X)$ es un continuo.

Demostración. Por el Lema 3.14, los hiperespacios $C(A, X)$ y $C(B, X)$ son continuos. Definimos la función $f : C(A, X) \times C(B, X) \rightarrow C_2(A, B, X)$ por $f(D, E) = D \cup E$. Probaremos que f es continua y sobreyectiva.

Primero, mostraremos que f es sobreyectiva. Sea C un elemento de $C_2(A, B, X)$. Existen subcontinuos C_1 y C_2 de X tales que $C_1 \in C(A, X)$, $C_2 \in C(B, X)$ y $C = C_1 \cup C_2$. Observamos que $f(C_1, C_2) = C$. Esto prueba que f es

sobreyectiva.

Ahora veamos que f es continua. Sea $\{(C_i, H_i)\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $C(A, X) \times C(B, X)$ y (C, H) un elemento de $C(A, X) \times C(B, X)$ tal que $(C, H) = \lim(C_i, H_i)$. Como $C = \lim C_i$ y $H = \lim H_i$, se tiene que $\lim f(C_i, H_i) = \lim C_i \cup H_i = C \cup H = f(C, H)$. Esto prueba la continuidad de f .

Como $C(A, X)$ y $C(B, X)$ son continuos, $C(A, X) \times C(B, X)$ es compacto y conexo. Dado que f es continua y sobreyectiva, $C_2(A, B, X)$ es compacto y conexo. Por lo tanto, $C_2(A, B, X)$ es un continuo. \square

Lema. 3.17. *Si A y B son subcontinuos de un continuo X , entonces el hiperespacio $C(A, X) \cup C(B, X) \cup C_2(A, B, X)$ es un continuo arco-conexo.*

Demostración. Sea $H = C(A, X) \cup C(B, X) \cup C_2(A, B, X)$. Por la compacidad de los hiperespacios $C(A, X)$, $C(B, X)$ y $C_2(A, B, X)$ (Lemas 3.14 y 3.16), H es compacto. Observamos que X es elemento de H . Mostraremos que para cada elemento F en H distinto de X , existe un arco de F a X en H . Sea F un punto en H distinto de X . Hay 3 casos a considerar:

Caso 1. F es un elemento de $C(A, X)$. Existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de F a X , Teorema 1.28. Observamos que α es un arco de F a X en H .

Caso 2. F es un elemento de $C(B, X)$. Análogo al Caso 1.

Caso 3. F es un elemento de $C_2(A, B, X)$. Existen subcontinuos, D y E , de X tales que D está en $C(A, X)$, E está en $C(B, X)$ y $F = D \cup E$. Existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de D a X , Teorema 1.28. Definimos la función $\beta : [0, 1] \rightarrow C_2(A, B, X)$ como $\beta(t) = F \cup \alpha(t)$. La

función β es un arco de F a X en H .

□

Lema. 3.18. *Si X es un arco con puntos extremos p y q , entonces $NC(X)$ coincide con $C(p, X) \cup C_2(p, q, X) \cup C(q, X)$.*

Demostración. Sea $H = C(p, X) \cup C_2(p, q, X) \cup C(q, X)$. Probaremos que $NC(X)$ coincide con H .

Primero, mostraremos que H está contenido en $NC(X)$. Sea A un elemento de H . Si A pertenece a $C(p, X)$, entonces el complemento de A es vacío o es un conjunto conexo que contiene a q . Si A pertenece a $C(q, X)$, entonces el complemento de A es vacío o es un conjunto conexo que contiene a p . Si A pertenece a $C_2(p, q, X)$, entonces el complemento de A es vacío o es homeomorfo a $(0, 1)$. Esto implica que A es un elemento de $NC(X)$, en consecuencia H está contenido en $NC(X)$.

Ahora veamos que $NC(X)$ está contenido en H . Sea F un conjunto de no corte de X . Mostraremos dos afirmaciones:

Afirmación 1. Si K es una componente de F , entonces K es un elemento de $C(p, X)$ o K es un elemento de $C(q, X)$.

En efecto. Supongamos que existe un punto k en $K \setminus \{p, q\}$. Note que $X \setminus \{k\}$ tiene exactamente dos componentes, una de ellas contiene a p y la otra contiene a q . Así, K contiene a p o K contiene a q .

Afirmación 2. El conjunto F tiene a lo más dos componentes. Se sigue de la afirmación 1.

Procedemos ahora a demostrar el resultado. Por la Afirmación 2, F tiene a lo más dos componentes. Si F tiene exactamente una componente, por la Afirmación 1, F es un elemento de $C(p, X) \cup C(q, X)$. Si F tiene dos componentes, por la

Afirmación 1, una componente de F contiene a p y la otra contiene a q . Por lo tanto, F es un elemento de $C_2(p, q, X)$. Esto prueba que $NC(X)$ coincide con $C(p, X) \cup C_2(p, q, X) \cup C(q, X)$. □

La Proposición 3.19 establece que el hiperespacio de conjuntos que no cortan del arco es un continuo arco-conexo. Este resultado es consecuencia de los Lemas 3.17 y 3.18.

Proposición. 3.19. *Si X es un arco, entonces $NC(X)$ es un continuo arco-conexo.*

Demostración. Sean p y q los puntos extremos de X . Por el Lema 3.18, $NC(X)$ coincide con $C(p, X) \cup C_2(p, q, X) \cup C(q, X)$. Por el Lema 3.17, $NC(X)$ es un continuo arco-conexo □

El hiperespacio de conjuntos que no cortan a la curva cerrada simple

Lema. 3.20. *Si X es una curva cerrada simple, entonces $NC(X)$ coincide con $C(X)$.*

Demostración. Es claro que $C(X)$ está contenido en $NC(X)$. Mostraremos que $NC(X)$ está contenido en $C(X)$. Sea F un elemento de $NC(X)$. Supongamos que existen puntos distintos, p y q , en F . El conjunto $X \setminus \{p, q\}$ consta de dos componentes, y los puntos p y q , pertenecen a la cerradura de cada una de esas componentes. Como $X \setminus F$ es conexo, F debe contener a alguna de las componentes de $X \setminus \{p, q\}$, por lo tanto, los puntos p y q están en la misma componente en F . Esto prueba que F es conexo. Se sigue que F es un elemento de $C(X)$. Así, $NC(X)$ coincide con $C(X)$. □

Como consecuencia del Lema 3.20 y del Teorema 1.23, se tiene el siguiente resultado.

Proposición. 3.21. *Si X es una curva cerrada simple, entonces $NC(X)$ es un continuo arco-conexo.*

Demostración. Por el Lema 3.20, $NC(X)$ coincide con $C(X)$. Por el Teorema 1.23, $NC(X)$ es un continuo arco-conexo. \square

Enseguida, demostramos el teorema que caracteriza la compacidad del hiperespacio de conjuntos de no corte en continuos localmente conexos, estableciendo que esto ocurre si y solo si el continuo es un arco o una curva cerrada simple. La demostración de este resultado se sigue directamente del Teorema 3.12 y de las Proposiciones 3.19 y 3.21.

Teorema. 3.22. *Para un continuo localmente conexo no degenerado X , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) *El hiperespacio $NC(X)$ es un continuo.*
- (2) *El hiperespacio $NC(X)$ es compacto.*
- (3) *El continuo X es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración. (1) \Rightarrow (2) es obvio, (2) \Rightarrow (3) es el Teorema 3.12 y (3) \Rightarrow (1) se sigue de las Proposiciones 3.19 y 3.21. \square

La compacidad de los hiperespacios de conjuntos que no desconectan no es suficiente para garantizar la conexidad local. De hecho, los hiperespacios de conjuntos que no desconectan pueden ser continuos incluso cuando el continuo no es localmente conexo. Esto se ilustrará en detalle en el siguiente ejemplo.

Hiperespacios de conjuntos que no desconectan a compactaciones del rayo

En esta sección, nos enfocamos en el estudio de los hiperespacios de conjuntos que no desconectan asociados a las compactaciones del rayo. Demostramos que estos hiperespacios de conjuntos que no desconectan resultan ser

continuos arco-conexos. Comenzamos dando una serie de definiciones y lemas que nos sirven para demostrar los resultados principales.

Definición. 3.23. Dados dos subcontinuos, A y B , de un continuo X , definimos $2^A(B, X) = \{C \cup D : C \in 2^A \text{ y } D \in C(B, X)\}$.

Por comodidad, denotamos $2^A(\{p\}, X)$ simplemente por $2^A(p, X)$.

Lema. 3.24. Si A y B son subcontinuos de un continuo X , entonces el hiperespacio $2^A(B, X)$ es un continuo.

Demostración. Por el Teorema 1.23, 2^A es un continuo. Por el Lema 3.14, $C(B, X)$ es un continuo. Definimos la función $f : 2^A \times C(B, X) \rightarrow 2^A(B, X)$ por $f(D, E) = D \cup E$. Probaremos que f es continua y sobreyectiva.

Primero, mostraremos que f es sobreyectiva. Sea C un elemento de $2^A(B, X)$. Existen subconjuntos C_1 y C_2 de X tales que $C_1 \in 2^A$, $C_2 \in C(B, X)$ y $C = C_1 \cup C_2$. Observamos que $f(C_1, C_2) = C$. Esto prueba que f es sobreyectiva.

Ahora veamos que f es continua. Sea $\{(C_i, H_i)\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $2^A \times C(B, X)$ y (C, H) un elemento de $2^A \times C(B, X)$ tal que $(C, H) = \lim(C_i, H_i)$. Como $C = \lim C_i$ y $H = \lim H_i$, se tiene que $\lim f(C_i, H_i) = \lim C_i \cup H_i = C \cup H = f(C, H)$. Esto prueba la continuidad de f .

Como 2^A y $C(B, X)$ son continuos, $2^A \times C(B, X)$ es compacto y conexo. Dado que f es continua y sobreyectiva, $2^A(B, X)$ es compacto y conexo. Por lo tanto, $2^A(B, X)$ es un continuo. \square

De manera similar a como se demostró el lema 3.17, se puede demostrar el siguiente lema.

Lema. 3.25. *Si A y B son subcontinuos de un continuo X , entonces el hiperespacio $2^A \cup C(A, X) \cup C(B, X) \cup C_2(A, B, X) \cup 2^A(B, X)$ es un continuo arco-conexo.*

Demostración. Sea $H = 2^A \cup C(A, X) \cup C(B, X) \cup C_2(A, B, X) \cup 2^A(B, X)$. Por la compacidad de los hiperespacios 2^A , $C(A, X)$, $C(B, X)$, $C_2(A, B, X)$ y $2^A(B, X)$ (Teorema 1.23, Lemas 3.14, 3.16 y 3.24), H es compacto. Observamos que X es elemento de H . Mostraremos que para cada elemento F en H distinto de X , existe un arco de F a X en H . Sea F un punto en H distinto de X . Hay 5 casos a considerar:

Caso 1. F es un elemento de $C(A, X)$. Existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de F a X , Teorema 1.28. Observamos que α es un arco de F a X en H .

Caso 2. F es un elemento de $C(B, X)$. Análogo al Caso 1.

Caso 3. F es un elemento de $C_2(A, B, X)$. Existen subcontinuos, D y E , de X tales que D está en $C(A, X)$, E está en $C(B, X)$ y $F = D \cup E$. Existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de D a X , Teorema 1.28. Definimos la función $\beta : [0, 1] \rightarrow C_2(A, B, X)$ como $\beta(t) = F \cup \alpha(t)$. La función β es un arco de F a X en H .

Caso 4. F es un elemento de 2^A . Existe un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow 2^A$ de F a A , Teorema 1.23. Como $\alpha(1)$ es un elemento de $C(A, X)$, por el Caso 1, hay un arco de $\alpha(1)$ a X en H . Así, hay un arco de F a X en H .

Caso 5. F es un elemento de $2^A(B, X)$. Existen subconjuntos, D y E , de X tales que D está en 2^A , E está en $C(B, X)$ y $F = D \cup E$. Existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de E a X , Teorema 1.28. Definimos la función $\beta : [0, 1] \rightarrow 2^A(B, X)$ como $\beta(t) = F \cup \alpha(t)$. La función β es un arco de F a X en H . \square

Definición. 3.26. Un continuo X es una *compactación del rayo* si puede escribirse como $X = R \cup S$ con $R \cap S = \emptyset$, donde, R es un subcontinuo de X y S es un subconjunto denso de X y homeomorfo al intervalo $[0, 1)$. En tal caso, el conjunto R se llama *residuo* de X .

Dado que, si f y g son dos homeomorfismos de $[0, 1)$ en S , se cumple que $f(0) = g(0)$, podemos denominar al punto $f(0)$ como *el punto inicial de la compactación*. En esta sección p siempre denotará el punto inicial de la compactación.

Proposición. 3.27. Si $X = Y \cup S$ es una compactación del rayo con residuo Y , entonces $NC(X)$ coincide con $2^Y \cup C(Y, X) \cup C(p, X) \cup 2^Y(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$.

Demostración. Sea $H = 2^Y \cup C(Y, X) \cup C(p, X) \cup 2^Y(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$. Primero probaremos que $NC(X)$ está contenido en H :

Sea F un conjunto de no corte de X . Mostraremos dos afirmaciones:

Afirmación 1. Si K es una componente de F que interseca a S , entonces K es un elemento de $C(Y, X)$ o K es un elemento de $C(p, X)$.

En efecto. Supongamos que existe un punto q en $K \cap S \setminus \{p\}$. Notemos que $X \setminus \{q\}$ tiene exactamente dos componentes, una de ellas contiene a Y y la otra contiene a p . Así, K contiene a Y o K contiene a p .

Afirmación 2. $F \cap S$ tiene a lo más dos componentes. Se sigue de la afirmación 1.

Procedemos ahora a demostrar el lema. Si F no interseca a Y , por las afirmaciones 1 y 2 se concluye que F es un elemento de $C(p, X)$. Si F interseca a Y . Hay dos casos a

analizar:

Caso 1: F contiene a Y : de la afirmación 2 se sigue que $F \cap S$ tiene a lo más dos componentes. Si $F \cap S$ tiene exactamente una componente, entonces, por la afirmación 1, se tiene que F es un elemento de $C(Y, X)$. Si $F \cap S$ tiene exactamente dos componentes, por la afirmación 1 se concluye que F es un elemento de $C_2(p, Y, X)$.

Caso 2: F no contiene a Y . De las afirmaciones 1 y 2, se sigue que $F \cap S$ tiene exactamente una componente y dicha componente contiene a p . Así, F es un elemento de $2^Y(p, X)$. Esto prueba que $NC(X)$ está contenido en H .

Veamos ahora que H está contenido en $NC(X)$. Damos una serie de afirmaciones que son fáciles de probar. Sea F un elemento de H distinto de X .

Afirmación 1. Si F es un elemento de 2^Y , entonces $X \setminus F$ está entre S y \bar{S} .

Afirmación 2. Si F es un elemento de $C(Y, X)$, entonces $X \setminus F$ es homeomorfo a $(0, 1]$.

Afirmación 3. Si F es un elemento de $C(Y, X)$, entonces $X \setminus F$ es homeomorfo a una compactación del rayo sin el punto inicial de la compactación.

Afirmación 4. Si F es un elemento de $C_2(p, Y, X)$, entonces $X \setminus F$ es homeomorfo a $(0, 1)$.

Afirmación 5. Si F es un elemento de $2^Y(p, X)$, entonces existe un subconjunto conexo T de S tal que $X \setminus F$ está entre T y \bar{T} .

De las afirmaciones 1, 2, 3, 4 y 5, se sigue que H está

contenido en $NC(X)$.

Se ha probado que $NC(X)$ coincide con $2^Y \cup C(Y, X) \cup C(p, X) \cup 2^Y(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$. \square

Lema. 3.28. *Si $X = Y \cup S$ es una compactación del rayo con residuo Y , entonces para cada F en $2^Y \cup 2^Y(p, X)$ que no contenga a Y , se tiene que F bloquea a algún punto de X .*

Demostración. Sea x un elemento en $Y \setminus F$. Mostraremos que F bloquea a x . Supongamos que existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de $\{x\}$ a $\overline{X \setminus F}$ tal que, para cada t en $[0, 1)$, $\alpha(t)$ no interseca a F .

Afirmación 1. Si $\alpha(t)$ interseca a S para algún t en el intervalo $[0, 1]$, entonces Y está contenido en $\alpha(t)$.

En efecto. Supongamos por el contrario que Y no está contenido en $\alpha(t)$. Tomemos un elemento x en $Y \setminus \alpha(t)$. Existe una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de $S \setminus \alpha(t)$ que converge a x . Para cada entero positivo i , sean U_i y V_i las componentes de $X \setminus \{x_i\}$ con $Y \subset U_i$ y p en V_i . Sea z un punto en $\alpha(t) \cap S$. Existe un entero positivo i tal que z está en V_i . Como $\alpha(t)$ está contenido en $X \setminus \{x_i\}$, se tiene que $\alpha(t)$ está contenido en V_i . Esto contradice que x es un elemento de $\alpha(t)$.

Afirmación 2. Para cada t en $[0, 1)$, $\alpha(t)$ está contenido en Y .

En efecto. Si $\alpha(t)$ interseca a S , por la Afirmación 1, Y está contenido en $\alpha(t)$. Esto implicaría que $\alpha(t)$ interseca a F , lo cual es una contradicción.

Por las Afirmaciones 1 y 2, y la compacidad de $C(Y)$ (Teorema 1.23), $\alpha(1) = \overline{X \setminus F}$ está contenido en Y . Esto es una contradicción pues $X \setminus F$ es un conjunto abierto que interseca a S . Esto prueba que no existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de $\{x\}$ a $\overline{X \setminus F}$ tal que, para cada t en

$[0, 1)$, $\alpha(t)$ no interseca a F . Por los incisos (1) y (2) de la Proposición 2.5, se concluye la demostración. \square

Lema. 3.29. *Si $X = Y \cup S$ es una compactación del rayo con residuo Y , entonces para cada F en $2^Y \cup 2^Y(p, X)$ distinto de X , se tiene que F no bloquea a algún punto de X .*

Demostración. Sea F un elemento de $2^Y \cup 2^Y(p, X)$ distinto de X .

Caso 1. F está en 2^Y . El conjunto S está contenido en $X \setminus F$. Como S es arco-conexo y $\overline{S} = \overline{X \setminus F}$, por los incisos (1) y (4) de la Proposición 2.5, F no bloquea a x para cada x en S .

Caso 2. F está en $2^Y(p, X)$. Existe un elemento q de S tal que $F = (F \cap Y) \cup qp$, donde qp denota el arco de q a p en S . Como $S \setminus qp$ es arco-conexo y $\overline{S \setminus qp} = \overline{X \setminus qp}$, por los incisos (1) y (4) de la Proposición 2.5, F no bloquea a x para cada x en $S \setminus qp$. \square

Lema. 3.30. *Si $X = Y \cup S$ es una compactación del rayo con residuo Y , entonces para cada F en $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$ distinto de X , se tiene que F no bloquea a los unipuntuales de X .*

Demostración. Sea F un elemento de $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$ distinto de X .

Caso 1. F está en $C(Y, X)$. Existe un elemento q de S tal que $X \setminus F = qp \setminus \{q\}$, donde qp es el arco de q a p en S . Como $qp \setminus \{q\}$ es arco-conexo, por el inciso (2) de la Proposición 2.6, F no bloquea a los unipuntuales de X .

Caso 2. F está en $C(p, X)$. Existe un elemento q de S tal que $F = qp$, donde qp es el arco de q a p en S . Como $X \setminus qp$ es conexo por continuos, por el inciso (2) de la Proposición 2.6, F no bloquea a los unipuntuales de X .

Caso 3. F está en $C_2(p, Y, X)$. Existen dos puntos distintos q y r de S tales que $X \setminus F = qr \setminus \{q, r\}$, donde qr es el arco de q a r en S . Como $qr \setminus \{q, r\}$ es arco-conexo, por el inciso (2) de la Proposición 2.6, F no bloquea a los unipuntuales de X . \square

Lema. 3.31. *Si $X = Y \cup S$ es una compactación del rayo con residuo Y , entonces para cada F en $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$, se tiene que X es aposindético con respecto a F .*

Demostración. Sea F un elemento de $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$ distinto de X .

Caso 1. F está en $C(Y, X)$. Existe un elemento q de S tal que $X \setminus F = qp \setminus \{q\}$, donde qp es el arco de q a p en S . Como $qp \setminus \{q\}$ es localmente conexo, X es aposindético con respecto a F .

Caso 2. F está en $C(p, X)$. Existe un elemento q de S tal que $F = qp$, donde qp es el arco de q a p en S . Dado que para punto x en $X \setminus qp$ existe un elemento z de $X \setminus qp$ tal que x no pertenece a zq , donde zq es el arco de z a q en S , x es un elemento del interior de la cerradura de la componente que contiene a Y en $X \setminus \{z\}$. Esto prueba que X es aposindético con respecto a F .

Caso 3. F está en $C_2(p, Y, X)$. Existen dos puntos distintos q y r de S tales que $X \setminus F = qr \setminus \{q, r\}$, donde qr es el arco de q a r en S . Como $qr \setminus \{q, r\}$ es localmente conexo, X es aposindético con respecto a F . \square

El siguiente lema se sigue de los lemas 3.27, 3.30 y 3.28.

Lema. 3.32. *Si $X = Y \cup S$ es una compactación del rayo con residuo Y , entonces $NB(F_1(X))$ coincide con $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$.*

Demostración. Por los Lemas 3.27 y 3.28, $NB(F_1(X))$ está contenido en $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$. Por el Lema

3.30, $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$ está contenido en $NB(F_1(X))$. Por lo tanto, $NB(F_1(X))$ coincide con $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$. \square

De la aplicación conjunta de los Lemas 3.32, 3.31 y 2.19 se obtiene el siguiente resultado.

Lema. 3.33. *Si $X = Y \cup S$ es una compactación del rayo con residuo Y , entonces $CLC(X)$ coincide con $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$.*

Demostración. Por el Lema 3.32, $NB(F_1(X))$ coincide con $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$. Del Lema 3.31, concluimos que X es aposindético con respecto a cada elemento de $NB(F_1(X))$. Por el Lema 2.19, $CLC(X)$ coincide con $NB(F_1(X))$. Por lo tanto, $CLC(X)$ coincide con $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$. \square

De los Lemas 3.27, 3.32 y 3.29 se sigue el siguiente resultado.

Lema. 3.34. *Si $X = Y \cup S$ es una compactación del rayo con residuo Y , entonces $NB^*(F_1(X))$ coincide con $2^Y \cup C(Y, X) \cup C(p, X) \cup 2^Y(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$.*

Demostración. Por el Lema 3.27, $NB^*(F_1(X))$ está contenido en $2^Y \cup C(Y, X) \cup C(p, X) \cup 2^Y(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$. Por los Lemas 3.32 y 3.29, $2^Y \cup C(Y, X) \cup C(p, X) \cup 2^Y(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$ está contenido en $NB^*(F_1(X))$. Por lo tanto $NB^*(F_1(X))$ coincide con $2^Y \cup C(Y, X) \cup C(p, X) \cup 2^Y(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$. \square

Finalmente, enunciaremos las proposiciones que establecen que los hiperespacios de conjuntos que no desconectan para una compactación del rayo son continuos arco-conexos. Estos resultados son consecuencia directa de los resultados expuestos en esta sección.

Proposición. 3.35. *Si $X = Y \cup S$ es una compactación del rayo con residuo Y y $\mathcal{H}(X)$ es un elemento de $\{CLC(X), NWC(X), NB(F_1(X))\}$ entonces $\mathcal{H}(X)$ coincide con $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$ y es un continuo arco-conexo.*

Demostración. Por los Lemas 3.32 y 3.33, $CLC(X)$ y $NB(F_1(X))$ coinciden con $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$. Por el Teorema 2.7, $NWC(X)$ coincide con $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$. Del Lema 3.17, se sigue que $C(Y, X) \cup C(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$ es arco-conexo. \square

Proposición. 3.36. *Si $X = Y \cup S$ es una compactación del rayo con residuo Y y $\mathcal{H}(X)$ es un elemento de $\{NB^*(F_1(X)), S(X), NC(X)\}$ entonces $\mathcal{H}(X)$ coincide con $2^Y \cup C(Y, X) \cup C(p, X) \cup 2^Y(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$ y es un continuo arco-conexo.*

Demostración. Por los Lemas 3.27 y 3.34, $NB^*(F_1(X))$ y $NC(X)$ coinciden con $2^Y \cup C(Y, X) \cup C(p, X) \cup 2^Y(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$. Del Teorema 2.7, se sigue que $S(X)$ coincide con $2^Y \cup C(Y, X) \cup C(p, X) \cup 2^Y(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$. Por el Lema 3.25, $2^Y \cup C(Y, X) \cup C(p, X) \cup 2^Y(p, X) \cup C_2(p, Y, X)$ es un continuo arco-conexo. \square

3.3. Caracterizaciones del arco y de la curva cerrada simple

En esta sección, presentamos caracterizaciones del arco y de la curva cerrada simple. El resultado más destacado establece que si para algún continuo, alguno de sus hiperespacios de conjuntos que no desconectan coincide con su hiperespacio de subcontinuos, entonces dicho continuo es necesariamente una curva cerrada simple.

Caracterizaciones del arco

Aquí, presentamos una serie de caracterizaciones del arco utilizando los hiperespacios de conjuntos que no desconectan. Estas caracterizaciones nos permiten comprender mejor la relación entre la topología del arco y la estructura de sus hiperespacios.

Corolario. 3.37. *Si X es un continuo no localmente conexo, entonces $NC(X) \cap F_1(X)$ es no numerable.*

Demostración. Como X no es localmente conexo, por el Lema 1.13 y el Teorema 1.15, se tiene que existe un continuo de convergencia C de X . Del Lema 1.20, se tiene que $\{x \in C : X \setminus \{x\} \text{ es conexo}\}$ es no numerable. Por lo tanto, $NC(X) \cap F_1(X)$ es no numerable. \square

Teorema. 3.38. *Sea X un continuo, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *Existen puntos distintos p y q de X tales y que $NC(X)$ coincide con $C(p, X) \cup C(q, X) \cup C_2(p, q, X)$.*

(2) *X es un arco.*

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Observemos que X solo tiene dos puntos de no corte, los puntos p y q . Por el Lema 3.37, X es localmente conexo. De la Proposición 3.17, se tiene que $NC(X)$ es compacto. Por el Teorema 3.12, X es un arco o una curva cerrada simple. Como $X \setminus \{p, q\}$ es conexo, se sigue que X no es una curva cerrada simple. Por lo tanto, X es un arco.

(2) \Rightarrow (1) Sea X un arco con puntos extremos p y q . Del Lema 3.18, se tiene que $NC(X) = C(p, X) \cup C(q, X) \cup C(p, q, X)$. \square

Teorema. 3.39. *Sean X un continuo localmente conexo y $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de conjuntos que no desconectan a X , las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) Existen puntos distintos p y q de X tales y que $\mathcal{H}(X)$ coincide con $C(p, X) \cup C(q, X) \cup C(\{p, q\}, X)$.

(2) X es un arco.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Por el Teorema 3.2, $NC(X)$ coincide con $\mathcal{H}(X)$. Del Teorema 3.38, se tiene que X es un arco.

(2) \Rightarrow (1) Sea X un arco con puntos extremos p y q . Por la Proposición 3.18, $NC(X) = C(p, X) \cup C(q, X) \cup C(\{p, q\}, X)$. Del Teorema 3.2, se tiene que $\mathcal{H}(X) = NC(X)$. \square

Observación. 3.40. El siguiente ejemplo muestra que la condición de conexidad local pedida en el Teorema 3.39 es necesaria.

En el plano cartesiano consideramos los conjuntos $W_1 = \{(x, \text{sen}(\frac{1}{x})) : 0 < x \leq 1\}$ y $W_2 = \{(-x, \text{sen}(\frac{1}{x})) : 0 < x \leq 1\}$. Tomamos $X = \overline{W_1 \cup W_2}$, $p = (-1, \text{sen}(1))$ y $q = (1, \text{sen}(1))$. Se ilustra en la Figura 3.3. Observamos que X es un continuo no localmente conexo para el cual los hiperespacios $CLC(X)$, $NWC(X)$, $NB(F_1(X))$, $NB^*(F_1(X))$ y $S(X)$ coinciden con $C(p, X) \cup C(q, X) \cup C(\{p, q\}, X)$.

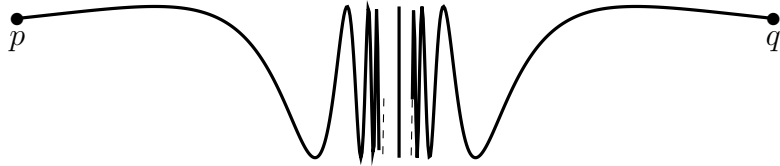


Figura 3.3

Caracterizaciones de la curva cerrada simple

Nuestro objetivo ahora es dar caracterizaciones de la curva cerrada simple. Comenzamos enunciando resultados

preliminares que son útiles para nuestro análisis. Para cada uno de ellos, se proporciona la referencia correspondiente.

Proposición. 3.41. [2, Teorema 11] *Un continuo no degenerado X es una curva cerrada simple si para todo conjunto cerrado F de exactamente un elemento, se tiene que F no corta débilmente y para cada conjunto cerrado G de exactamente dos elementos, se tiene que G corta débilmente.*

Con las ideas expuestas en la demostración del Teorema 5.12 en [18, 10, p. 76], se puede probar el siguiente resultado.

Teorema. 3.42. *Sea X un continuo que no es conexo en pequeño en un punto p . Para toda vecindad U de p , existe un subcontinuo de convergencia K de X que contiene a p , está contenido en el interior de U y X no es conexo en pequeño en cada punto de K .*

Demostración. Como X no es conexo en pequeño en p , existe una vecindad cerrada V de p tal que p no está en el interior de la componente que lo contiene en V . Sea W una vecindad cerrada de p contenida en $\text{int}(V \cap U)$ y C la componente que contiene a p en W . Observemos que p no está en el interior de C . Por lo tanto p es un elemento de $\overline{W \setminus C}$. Existe una sucesión $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

- (1) $p = \lim p_i$,
- (2) para cada entero positivo i , p_i es un elemento de $W \setminus C$.

Para cada entero positivo i , sea C_i la componente que contiene a p_i en W . Si C interseca a C_i para algún entero positivo i , entonces $C \cup C_i$ está contenido en C , esto implica que p_i es un elemento de C , lo cual contradice (2). Por lo tanto:

- (3) Para cada entero positivo i , C no interseca a C_i .

Sea W' una vecindad cerrada de p tal que

- (4) W' está contenida en el interior de W .

Por (1), sin pérdida de generalidad podemos suponer que, para cada entero positivo i , p_i es un elemento de W' . Para cada entero positivo i , sea K_i la componente que contiene a p_i en W' . Como W' está contenido en W ,

(5) para cada entero positivo i , K_i está contenido en C_i .

Por compacidad de $C(X)$ (Teorema 1.23), sin pérdida de generalidad podemos suponer que

(6) $\lim K_i = K$ para algún subcontinuo K de X .

Como, para cada entero positivo i , p_i es un elemento de K_i , se tiene que

(7) p es un elemento de K .

Dado que para cada entero positivo i , K_i está contenido en W' y W' es conjunto cerrado en X , se tiene que

(8) K está contenido en W' .

Por (8) y (4), K está contenido en W . Como C es la componente que contiene a p en W , se sigue de (6) y (7) que

(9) K está contenido en C .

Por (9), (5) y (3),

(10) para cada entero positivo i , K no interseca a K_i .

Por el Teorema 1.22, para cada entero positivo i , K_i interseca a $\text{fr}(W')$. De (6) se sigue que K interseca a $\text{fr}(W')$. Por (7) y como p está en el interior de W' , K es no degenerado. Por (6), (8) y (10), K es un continuo de convergencia contenido en U . Mostraremos que X no es conexo en pequeño en cada punto de K . Supongamos que existe un elemento x en K tal que X es conexo en pequeño en x . Como x está en K , por (8) y (4), se tiene que

(11) x está en el interior de W .

Por (9), se tiene que

(12) C es la componente de W que contiene a x en W .

Como X es conexo en pequeño en x , por (11), existe una vecindad conexa G de x tal que G está contenida en W . Por (12),

(13) G está contenida en C .

Como x está en K , por (6) y (5), G interseca a C_t para algún número positivo t . Por (13), C interseca a C_t . Esto contradice (3). Por lo tanto, X no es conexo en pequeño en cada punto de K . \square

Observación. 3.43. Si C es un continuo de convergencia de X , entonces $\text{int}(C) = \emptyset$, lo que implica $X = \overline{X - C}$.

A continuación, y con los resultados anteriores en mente, comenzamos nuestro estudio detallado, que nos llevará a demostrar una serie de resultados y culminar en un teorema que caracteriza a la curva cerrada simple.

Lema. 3.44. *Un continuo no degenerado X es una curva cerrada simple si y solo si $NC(X)$ está contenido en $C(X)$.*

Demostración. Necesidad: Por el Lema 3.20, se tiene que $NC(X)$ coincide con $C(X)$.

Suficiencia: Se sigue de la Proposición 1.7. \square

A partir de la Proposición 3.20 y el Lema 3.44, se obtiene el siguiente resultado

Proposición. 3.45. *Un continuo no degenerado X es una curva cerrada simple si y solo si $NC(X)$ coincide con $C(X)$.*

Proposición. 3.46. *Un continuo no degenerado X es una curva cerrada simple si y solo si $CLC(X)$ coincide con $C(X)$.*

Demostración. Sea X una curva cerrada simple. Por la Proposición 3.20, $NC(X)$ coincide con $C(X)$. Del Teorema 3.2, se tiene que $CLC(X)$ coincide con $NC(X)$.

Supongamos ahora que $CLC(X)$ coincide con $C(X)$. Primero mostraremos que X es localmente conexo. Sean U un subconjunto abierto de X , K una componente de U y x un elemento de K . Dado que $\{x\}$ pertenece a $CLC(X)$, existe un conjunto abierto V de X que contiene a x , está contenido en U y $X \setminus V$ es conexo. Como $\overline{X \setminus V}$ es un elemento de $CLC(X)$, por el Teorema 2.17, X es aposindético con respecto a $\overline{X \setminus V}$. Por lo tanto, existe un subcontinuo C de X tal que x está en el interior de C y C está contenido en V . Dado que C está contenido en K , K es un conjunto abierto. Por el Teorema 1.11, X es localmente conexo. Ahora, por el Teorema 3.2, $NC(X)$ coincide con $C(X)$. Del Lema 3.45 se sigue que X es una curva cerrada simple. \square

Proposición. 3.47. *Un continuo no degenerado X es una curva cerrada simple si y solo si $NWC(X)$ y $C(X)$ coinciden.*

Demostración. Sea X una curva cerrada simple. Por la Proposición 3.20, $NC(X)$ coincide con $C(X)$. Del Teorema 3.2, se tiene que $NWC(X)$ coincide con $NC(X)$.

Supongamos ahora que $NWC(X)$ coincide con $C(X)$. Por la Proposición 3.41, X es una curva cerrada simple. \square

Proposición. 3.48. *Si X es un continuo tal que $NB^*(F_1(X))$ coincide con $C(X)$, entonces $NWC(X)$ coincide con $C(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 2.7, es suficiente probar que $C(X)$ está contenido en $NWC(X)$. Sean C un subcontinuo de X y x, y dos puntos distintos de $X \setminus C$. Existe un punto z en $X \setminus C$ tal que C no bloquea a z en X . Por el inciso (2) de la Proposición 2.5, existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha(0) = \{z\}$, $\alpha(1) = \overline{X \setminus C}$ y, para cada t menor que 1, $\alpha(t)$ no interseca a C . Hay dos casos a considerar.

Caso 1: Supongamos que z coincide con x , como $C \cup \{y\}$ no pertenece a $NB^*(F_1(X))$, existe $s < 1$ tal que y está en $\alpha(s)$. Esto implica que $\alpha(s)$ es un subcontinuo de X que contiene a los puntos x y y , y está contenido en $X \setminus C$.

Caso 2: Supongamos ahora que los puntos x , z y y son distintos entre sí. Como $C \cup \{x\}$ y $C \cup \{y\}$ no pertenecen a $NB^*(F_1(X))$, existen $s_x < 1$ y $s_y < 1$ tales que x está en $\alpha(s_x)$ y y está en $\alpha(s_y)$. Esto implica que $\alpha(s_x) \cup \alpha(s_y)$ es un subcontinuo de X que contiene a los puntos x y y , y está contenido en $X \setminus C$.

Esto prueba que C es un elemento de $NWC(X)$. \square

Proposición. 3.49. *Un continuo no degenerado X es una curva cerrada simple si y solo si $NB^*(F_1(X))$ coincide con $C(X)$.*

Demostración. Supongamos que X es una curva cerrada simple. Por la Proposición 3.47, $NWC(X)$ coincide con $C(X)$. Del Teorema 3.2, se sigue que $NB^*(F_1(X))$ coincide con $C(X)$.

Supongamos ahora que $NB^*(F_1(X))$ coincide con $C(X)$. Por la Proposición 3.48, $NWC(X)$ coincide con $C(X)$. De la Proposición 3.47, se sigue que X es una curva cerrada simple. \square

Proposición. 3.50. *Si X es un continuo tal que $S(X)$ coincide con $C(X)$, entonces $NWC(X)$ coincide con $C(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 2.7, es suficiente probar que $C(X)$ está contenido en $NWC(X)$. Sean C un subcontinuo de X y x, y dos puntos distintos de $X \setminus C$. Como $C \cup \{x\}$ y $C \cup \{y\}$ no pertenecen a $S(X)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cualquier subcontinuo K de X con $H(K, \overline{X \setminus C}) < \varepsilon$, se cumple que K interseca tanto a $C \cup \{x\}$ como a $C \cup \{y\}$. Por hipótesis, existe un subcontinuo K de X tal que $H(K, \overline{X \setminus C}) < \varepsilon$ y K no interseca a C . Se sigue que K es un subcontinuo de X que contiene a los puntos x y y , y está contenido en $X \setminus C$. Esto prueba que $C \in NWC(X)$. \square

Proposición. 3.51. *Un continuo no degenerado X es una curva cerrada simple si y solo si $S(X)$ coincide con $C(X)$.*

Demostración. Supongamos que X es una curva cerrada simple. Por la Proposición 3.47, $NWC(X)$ coincide con $C(X)$. Del Teorema 3.2, se sigue que $S(X)$ coincide con $C(X)$.

Supongamos ahora que $S(X)$ coincide con $C(X)$. Por la Proposición 3.50, $NWC(X)$ coincide con $C(X)$. De la Proposición 3.47, se sigue que X es una curva cerrada simple. \square

Proposición. 3.52. *Sea X un continuo tal que $NB(F_1(X))$ coincide con $C(X)$. Si C es un subcontinuo propio de X con interior distinto del vacío, entonces para cada punto z en $\text{int}(C)$ se tiene que X es conexo en pequeño en z .*

Demostración. Supongamos que X no es conexo en pequeño en z . Como z está en $\text{int}(C)$, por el Teorema 3.42 existe un continuo de convergencia A que contiene al punto z y está contenido en $\text{int}(C)$. Sean p y q puntos distintos de A . Mostraremos que $\{p, q\}$ es un elemento de $NB(F_1(X)) = C(X)$.

Primero se probará que $\{p, q\}$ no bloquea a los puntos de $X \setminus A$. Como A no bloquea a los unipuntuales de X , por el inciso (2) de la Proposición 2.5, para cada x en $X \setminus A$, existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que $\alpha(0) = \{x\}$, $\alpha(1) = \overline{X \setminus A}$ y, para cada t en $[0, 1)$, $\alpha(t)$ no interseca a A . Como $\{p, q\}$ está contenido en A se tiene que, para cada t en $[0, 1)$, $\alpha(t)$ no interseca a $\{p, q\}$. Note que $\overline{X \setminus \{p, q\}}$ y $\overline{X \setminus A}$ coinciden con X . Se sigue que $\alpha(0) = \{x\}$, $\alpha(1) = X$ y, para cada t en $[0, 1)$, $\alpha(t)$ no interseca a $\{p, q\}$. Por la Proposición 2.5, se tiene que, para cada $x \in X \setminus A$, $\{p, q\}$ no bloquea a x .

Ahora mostraremos que $\{p, q\}$ no bloquea a los puntos de $A \setminus \{p, q\}$. Sea x en $A \setminus \{p, q\}$. Como C es distinto de X , se tiene que $X \setminus C$ es no vacío. Notemos que $X \setminus C$ coincide con

$\text{int}(\overline{X - C})$. Dado que C está en $NB(F_1(X))$, se tiene $X \setminus C$ es conexo. Por lo tanto, $\overline{X \setminus C}$ es un subcontinuo de X . Como A está contenido en $\text{int}(C)$ y x está en A , se sigue que $\overline{X \setminus C}$ está contenido en $X \setminus \{x\}$. Por el Teorema 2.27, se obtiene que $\{x\}$ es un conjunto de no corte débil. Esto implica la existencia de un subcontinuo K de X que contiene a los puntos p y q y está contenido en $X \setminus \{x\}$. Sea U una vecindad abierta de x contenida en $\text{int}(C)$ que no interseca a K . Observamos que $U \setminus A$ es un subconjunto abierto de X que interseca a $\text{int}(C)$ y está contenido en $X \setminus K$. Como K está en $NB(F_1(X))$ y x no está en K , por el inciso (3) de la Proposición 2.5, existe un subcontinuo, K_x , de X que contiene a x , está contenido en $X \setminus K$ e interseca a $(X \setminus A) \cap \text{int}(C)$. Sea $\beta_1 : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow C(X)$ un arco ordenado de $\{x\}$ a K_x en $C(X)$. Observamos que, para cada t en $[0, \frac{1}{2}]$, $\beta_1(t)$ no interseca a K . Sea y un punto en $K_x \cap (U \setminus A) \cap \text{int}(C)$. Dado que y no está en A y A es un elemento de $NB(F_1(X))$, por el inciso 2 de la proposición 2.5, existe un arco ordenado $\beta_2 : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow C(X)$ de $\{y\}$ a $\overline{X - A}$ en $C(X)$ tal que, para cada t en $[\frac{1}{2}, 1)$, $\beta_2(t)$ no interseca a A . Se define la función $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$ como

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_1(t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ K_x \cup \beta_2(t) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

La función $\beta : [0, 1] \rightarrow C(X)$ es continua y satisface $\beta(0) = \{x\}$, $\beta(1) = \overline{X \setminus \{p, q\}}$, (pues $\overline{X \setminus \{p, q\}}$ y $\overline{X - A}$ coinciden con X), y, para cada t en $[0, 1)$, $\beta(t)$ no interseca a $\{p, q\}$. Así, para cada x en $A \setminus \{p, q\}$, $\{p, q\}$ no bloquea a x .

Por lo tanto, $\{p, q\}$ es un elemento de $NB(F_1(X))$, resultando en una contradicción. Lo que implica que X es conexo en pequeño en z . \square

Proposición. 3.53. *Si X es un continuo para el cual $NB(F_1(X))$ coincide con $C(X)$, entonces cada punto de X está contenido en el interior de un subcontinuo propio de X .*

Demostración. Dado un punto x en X , denotamos por $k(x)$ al conjunto $\{y \in X : \text{existe } C \in C(X) \setminus \{X\} \text{ tal que } x, y \in C\}$.

Primero, mostraremos que X es descomponible: Supongamos que X es indescomponible. Sean p y q puntos en X tales que $k(p)$ no interseca a $k(q)$. Sea x en $X \setminus \{p, q\}$. Si x no está en $k(p) \cup k(q)$, entonces $k(x)$ es denso en X . Como $\overline{X \setminus \{p, q\}}$ coincide con X , por la Proposición 2.5, se tiene que $\{p, q\}$ no bloquea a x . Supongamos que x está en $k(p) \cup k(q)$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que x es un elemento de $k(p)$. Dado que $\{p\}$ pertenece a $NB(F_1(X))$, por la Proposición 2.5, existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \rightarrow C(X)$ de $\{x\}$ a $\overline{X \setminus \{p\}} = X$ tal que, para cada t en $[0, 1)$, p no está en $\alpha(t)$. Note que, para cada t en $[0, 1)$, $\alpha(t)$ está contenido en $k(p)$, se sigue que, para cada t en $[0, 1)$, $\alpha(t)$ no interseca a $\{p, q\}$. Así, $\{p, q\}$ no bloquea a x . Se tiene que $\{p, q\}$ es un elemento de $NB(F_1(X))$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es descomponible.

Procederemos a demostrar el enunciado. Dado que X es descomponible, existen subcontinuos propios, L y M , de X tales que $X = L \cup M$. Por la Proposición 3.52, para cada x en $\text{int}(L)$ se tiene que X es conexo en pequeño en x . Sea p en $\text{int}(L)$, existe un subcontinuo C que contiene a p en su interior y está contenido en $\text{int}(L)$. Como C está en $NB(F_1(X))$ se tiene que $X \setminus C$ es abierto y conexo, lo que implica que $\overline{X \setminus C}$ es un subcontinuo propio de X . Note que $X = (X \setminus C) \cup \text{int}(L)$, esto prueba el enunciado. \square

Aplicando las Proposiciones 3.53 y 3.52, y el Lema 1.13, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema. 3.54. *Si X es un continuo tal que $NB(F_1(X))$ coincide con $C(X)$, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sea x un elemento de X . Por la Proposición 3.53, existe un subcontinuo propio de X que contiene a x en su

interior. De la Proposición 3.52, se sigue que X es conexo en pequeño en x . Por el Lema 1.13, X es localmente conexo. \square

Como consecuencia de los Teoremas 3.2 y 3.54, y la Proposición 3.47, se tiene el resultado siguiente.

Proposición. 3.55. *Un continuo no degenerado X es una curva cerrada simple si y sólo si $NB(F_1(X))$ coincide con $C(X)$.*

Demostración. Supongamos que X es una curva cerrada simple. Por la Proposición 3.47, $NWC(X)$ coincide con $C(X)$. Del Teorema 3.2, se sigue que $NB(F_1(X))$ coincide con $C(X)$. Supongamos ahora que $NB(F_1(X))$ coincide con $C(X)$. Por la Proposición 3.54, X es localmente conexo. Del Teorema 3.2, se sigue que $NWC(X)$ coincide con $C(X)$. Por la Proposición 3.47, X es una curva cerrada simple. \square

Finalmente, las proposiciones 3.45, 3.47, 3.49, 3.51, y 3.55, nos permiten enunciar el siguiente teorema, que caracteriza a la curva cerrada simple.

Teorema. 3.56. *Para un continuo X , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) *El continuo X es una curva cerrada simple.*
- (2) *Los hiperespacios $CLC(X)$ y $C(X)$ coinciden.*
- (3) *Los hiperespacios $NWC(X)$ y $C(X)$ coinciden.*
- (4) *Los hiperespacios $NB(F_1(X))$ y $C(X)$ coinciden.*
- (5) *Los hiperespacios $NB^*(F_1(X))$ y $C(X)$ coinciden.*
- (6) *Los hiperespacios $S(X)$ y $C(X)$ coinciden.*
- (7) *Los hiperespacios $NC(X)$ y $C(X)$ coinciden.*

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Se sigue de la Proposición 3.46.

(2) \Rightarrow (3) Por la Proposición 3.46, X es una curva cerrada simple. De la Proposición 3.47, se sigue que $NWC(X)$ y $C(X)$ coinciden.

(3) \Rightarrow (4) Por la Proposición 3.47, X es una curva cerrada simple. De la Proposición 3.55, se sigue que $NB(F_1(X))$ y $C(X)$ coinciden.

(4) \Rightarrow (5) Por la Proposición 3.55, X es una curva cerrada simple. De la Proposición 3.49, se sigue que $NB^*(F_1(X))$ y $C(X)$ coinciden.

(5) \Rightarrow (6) De la Proposición 3.49, X es una curva cerrada simple. De la Proposición 3.51, se sigue que $S(F_1(X))$ y $C(X)$ coinciden.

(6) \Rightarrow (7) Por la Proposición 3.51, X es una curva cerrada simple. De la Proposición 3.45, se sigue que $NC(X)$ y $C(X)$ coinciden.

(7) \Rightarrow (1) Se sigue de la Proposición 3.45. □

Capítulo 4

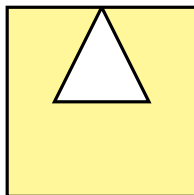
Gráficas finitas

Este capítulo se centra en el estudio del hiperespacio de conjuntos de no corte en gráficas finitas, abordando tres aspectos: su representación como unión de conjuntos similares a celdas, la determinación de su dimensión y el recuento de las componentes del hiperespacio de conjuntos de no corte en árboles.

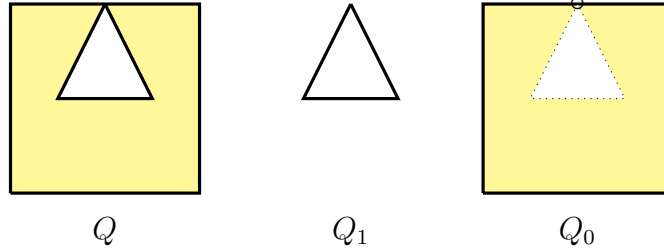
4.1. Herramientas básicas

Antes de iniciar el estudio del hiperespacio de conjuntos de no corte en gráficas finitas, se presentan a continuación una definición y algunos resultados técnicos útiles para nuestro análisis.

Definición. 4.1. La *2-celda agujerada* es el cuadrado formado por los vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ y $(1, 0)$ menos el interior del triángulo formado por los vértices $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$ y $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$.

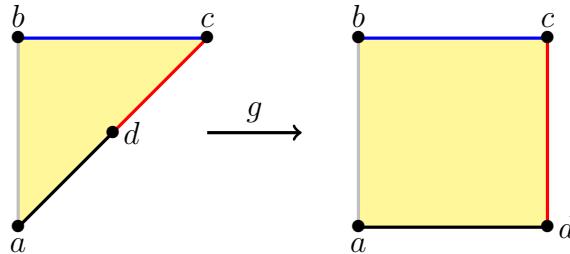


Durante todo este capítulo, Q siempre denotará la 2-celda agujerada, Q_1 el contorno del triángulo con vértices $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$ y $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$, y Q_0 el conjunto $Q \setminus Q_1$. Estos conjuntos se ilustran en la siguiente figura.



Lema. 4.2. *Existe un homeomorfismo, h , de $C([0, 1])$ en $[0, 1]^2$ tal que $h([0, 1]) = (0, 1)$ y $h(C(0, [0, 1]) \cup C(1, [0, 1])) = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\})$.*

Demostración. Cada subcontinuo, C , del intervalo $[0, 1]$ está determinado por su elemento mínimo, m_c , y su elemento máximo, M_c . La función $f(C) = (m_c, M_c)$ es un homeomorfismo de $C([0, 1])$ en el triángulo, T , de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$, [12, Ejemplo 3.1, pp. 29-31]. El triángulo T puede ser deformado de manera continua mediante la función g , representada en la siguiente figura, en una 2-celda.

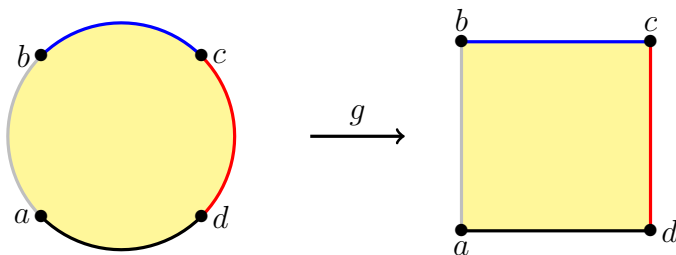


Denotamos por h a la función $g \circ f$. La función h es un homeomorfismo de $C([0, 1])$ en $[0, 1]^2$. Podemos observar que los subcontinuos que contiene al punto 0 quedan representados en el arco $\{0\} \times [0, 1]$, en la figura de arriba corresponde al segmento de recta que une al punto a con el punto b en la

2-celda, y los subcontinuos que contiene al punto 1 quedan representados en el arco $[0, 1] \times \{1\}$, en la figura de arriba corresponde al segmento de recta que une al punto b con el punto c en la 2-celda. \square

Lema. 4.3. *Existe un homeomorfismo, h , de $C(S^1)$ en $[0, 1]^2$ tal que $h(F_1(S^1)) = (\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0, 1\})$.*

Demostración. Cada subcontinuo propio, C , de S^1 está determinado por su punto medio, m_C , y su longitud, l_C . La función definida por $f(C) = (1 - \frac{l_C}{2\pi})m_C$, para cuando C es un subcontinuo propio de S^1 , y $f(S^1) = (0, 0)$, es un homeomorfismo de $C(S^1)$ en el disco unitario, D , [12, Ejemplo 3.2, pp. 31-35]. Observe que cada punto en el contorno de D representa un conjunto unipuntual. El disco D puede ser deformado de manera continua mediante la función g , representada en la siguiente figura, en una 2-celda.



Denotamos por h a la función $g \circ f$. La función h es un homeomorfismo de $C(S^1)$ en $[0, 1]^2$. Podemos observar que cada punto en el contorno de la 2-celda representa un conjunto unipuntual. \square

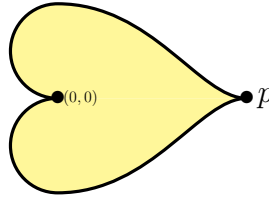
Lema. 4.4. *Sean X una curva cerrada simple y p un punto en X . Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- (1) *Existe un homeomorfismo, h , de $C(p, S^1)$ en $[0, 1]^2$ tal que $h(S^1) = (0, 1)$, $h(\{p\}) = (1, 0)$ y $h(\text{fr}(C(S^1) \setminus C(p, S^1))) = (\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0, 1\})$.*

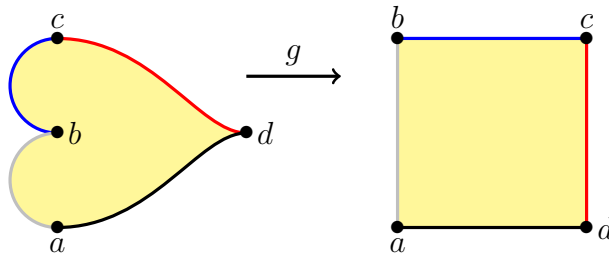
- (2) Existe un homeomorfismo, h , de $\overline{\{C \in C(S^1) : p \notin C\}}$ en Q , tal que $h(S^1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $h(\{p\}) = (\frac{1}{2}, 1)$, $h(\text{fr}_{C(S^1)}(\overline{\{C \in C(S^1) : p \notin C\}})) = Q_1$ y $h(F_1(S^1)) = (\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0, 1\})$.

Demostración. Sean p un punto en S^1 y $f : C(S^1) \rightarrow D$ la función definida en la demostración del Lema 4.3.

(1) La función f restringida a $C(p, S^1)$ es un homeomorfismo de $C(p, S^1)$ en el continuo Y , representado en la siguiente figura, [12, Ejemplo 3.2, pp. 31-35].

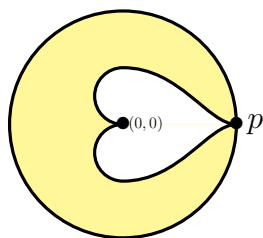


En el continuo Y el origen representa a S^1 y el resto de puntos en el contorno de Y representa a un subcontinuo de S^1 que contiene al punto p en su frontera. El continuo Y puede ser deformado de manera continua mediante la función g , representada en la siguiente figura, en una 2-celda.

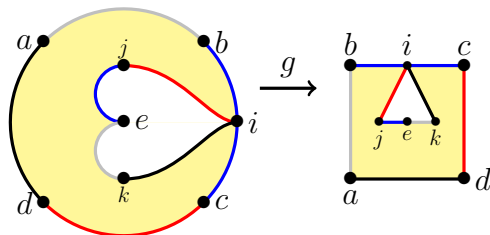


Denotamos por h a la función $g \circ f$. La función h es un homeomorfismo de $C(p, S^1)$ en $[0, 1]^2$. Podemos observar que S^1 queda representado por el punto $(0, 1)$ en la 2-celda y cualquier otro punto en el contorno de la 2-celda representa a un subcontinuo de S^1 que contiene al punto p en su frontera.

(2) La función f restringida a $\overline{\{C \in C(S^1) : p \notin C\}}$ es un homeomorfismo de $\{C \in C(S^1) : p \notin C\}$ en el continuo Y , representado en la siguiente figura, [12, Ejemplo 3.2, pp. 31-35].



En el continuo Y el origen representa a S^1 , los puntos en el contorno exterior de Y , los que están en la circunferencia unitaria, representan los conjuntos unipuntuales de S^1 y los puntos en el contorno interior, los que están en el corazón, distintos del origen, representan a un subcontinuo de S^1 que contiene al punto p en su frontera. El continuo Y puede ser deformado de manera continua mediante la función g , representada en la siguiente figura, en una 2-celda agujerada.



Denotamos por h a la función $g \circ f$. La función h es un homeomorfismo de $\overline{\{C \in C(S^1) : p \notin C\}}$ en la 2-celda agujerada. Podemos observar que S^1 queda representado por el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en la 2-celda agujerada. Un punto en el conjunto Q_1 representa un subcontinuo de la circunferencia que contiene al punto p en su frontera. Un punto en el contorno del cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ y $(1, 0)$ representa un conjunto unipuntual de S^1 \square

4.2. Un modelo general

Esta sección, se centra en la representación del hiperespacio de conjuntos de no corte como unión de conjuntos similares a celdas. Comenzamos estableciendo la notación y terminología empleada en este capítulo.

Definición. 4.5. Una *gráfica finita* es un continuo que puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o bien se intersecan solo en uno o en sus dos puntos extremos. Un *árbol* es una gráfica finita sin curvas cerradas simples. Dado un entero positivo n , un n -*odo simple* es una gráfica finita, que se puede escribir como la unión de n arcos que tienen un punto de origen común, v , y no se intersecan en ningún otro punto. El punto v es llamado *vértice* del n -odo simple.

Dados una gráfica finita X y un punto p en X , decimos que p es de *orden n en X* , denotado por $\text{ord}(p, X) = n$, si p tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a un n -odo simple y tiene al punto p como vértice. Si $\text{ord}(p, X) = 1$ el punto p es llamado *punto extremo de X* . El conjunto de todos los puntos extremos de X es denotado por $E(X)$. Si $\text{ord}(p, X) = 2$ el punto p es llamado *punto ordinario de X* . El conjunto de todos los puntos ordinarios de X es denotado por $O(X)$. El punto p es llamado *punto de ramificación de X* si $\text{ord}(p, X) \geq 3$. El conjunto de todos los puntos de ramificación de X es denotado por $R(X)$. El punto p es un *vértice de X* si p es un punto extremo o es un punto de ramificación. El conjunto de todos los vértices de X es denotado por $V(X)$.

Una *arista de X* es un arco que tiene como puntos extremos dos elementos de $V(X)$ y no contiene más de dos vértices de X o una curva cerrada simple que contiene a lo más un punto de ramificación de X . El conjunto de aristas de X , se denota por $\text{edge}(X)$. Decimos que una arista de X

es un *lazo* si es una curva cerrada simple que contiene un único punto de ramificación de X . Dada una arista e de X denotamos al conjunto $e - V(X)$ por $\langle e \rangle$.

Una *subgráfica de aristas de X* es un subcontinuo propio de X que puede escribirse como la unión de elementos de $\text{edge}(X)$ o un conjunto unipuntual formado por un elemento de $V(X)$. Dada una subgráfica de aristas G de X , decimos que una arista e de X es una *arista adjunta de G* si G interseca a e y e no está contenida en G . El conjunto de todas las aristas adjuntas de G es denotado por $\text{adj}(G)$, es decir, $\text{adj}(G) = \{a \in \text{edge}(X) : a \cap G \neq \emptyset \text{ y } a \not\subseteq G\}$. Una arista adjunta, e , de G es llamada *arista simple de G* si el conjunto $e \cap V(X)$ no está contenido en G . Una arista adjunta, e , de G es llamada *arista múltiple de G* si el conjunto $e \cap V(X)$ está contenido en G . Una arista múltiple de G es llamada *arista doble de G* si no es un lazo. Una arista múltiple de G es llamada *bucle de G* si es un lazo.

A continuación, establecemos una proposición que es útil para lo que sigue.

Proposición. 4.6. *Si F es un conjunto de no corte de una gráfica finita X y e es una arista de X tal que F interseca a e , entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (1) *Si e es un lazo, entonces $F \cap e$ es un subcontinuo de e .*
- (2) *Si e es un arco, entonces $F \cap e$ tiene a lo más dos componentes. Además, si tiene dos componentes, entonces cada componente contiene un punto extremo de e .*

Demostración. (1). Basta probar que $F \cap e$ es conexo. Supongamos que existen puntos distintos p_1 y p_2 en $F \cap e$. Sean U_1 y U_2 las componentes de $e \setminus \{p_1, p_2\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U_1 no contiene puntos de ramificación de X . Observe que U_1 es una componente

de $X \setminus \{p_1, p_2\}$. Sea U la componente que contiene a U_2 en $X \setminus \{p_1, p_2\}$. Se sigue que, U_1 está contenido en F , o U está contenido en F . Lo que implica que, p_1 y p_2 están en la misma componente en $F \cap e$. Así, el conjunto $F \cap e$ es conexo.

(2). Supongamos que existen puntos distintos p_1 , p_2 y p_3 en $F \cap e$. Existen componentes, U_1 y U_2 , de $e \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ tales que la clausura de cada una de ellas contiene exactamente dos elementos de $\{p_1, p_2, p_3\}$ y $\{p_1, p_2, p_3\}$ está contenido en $\overline{U_1} \cup \overline{U_2}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que p_1 y p_2 son elementos de $\overline{U_1}$ y que p_2 y p_3 son elementos de $\overline{U_2}$. Observe que U_1 y U_2 son componentes de $X \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$. Se sigue que, U_1 está contenido en F , o U_2 está contenido en F . Lo que implica que, p_1 y p_2 están en la misma componente en $F \cap e$ o p_2 y p_3 están en la misma componente en $F \cap e$. Esto prueba que dados tres puntos en $F \cap e$, dos de ellos están en la misma componente en $F \cap e$. Por lo tanto, $F \cap e$ tiene a lo más dos componentes. Supongamos que $F \cap e$ tiene exactamente dos componentes. Sean p y q puntos en diferentes componentes de $F \cap e$. Existe una componente, U , de $e \setminus \{p, q\}$ tal que p y q son elementos de \overline{U} y U no contiene puntos extremos de e . Note que U es una componente de $X \setminus \{p, q\}$. Se sigue que, $X \setminus U$ está contenida en F . Así, $e \setminus U$ está contenido en F . Observe que $e \setminus U$ tiene dos componentes y cada una de ellas contiene un punto extremo de e . Por lo tanto, cada componente de $F \cap e$ contiene un punto extremo de e . \square

Definimos ahora los conjuntos que constituyen la descomposición del hiperespacio de conjuntos de no corte.

Definición. 4.7. Dada una arista, e , de X , denotamos por $\sigma(e)$ a la colección de conjuntos de no corte de X cuyo complemento está contenido en $\langle e \rangle$, es decir, $\sigma(e) = \{F \in NC(X) : X \setminus F \subset \langle e \rangle\}$.

Observación. 4.8. Para cada arista, e , de una gráfica finita, X , se cumple que X es un elemento de $\sigma(e)$.

Definición. 4.9. Dada una subgráfica de aristas, G , de X , se definen: el conjunto $T(G) = X \setminus (G \cup \cup\{\langle e \rangle : e \in \text{adj}(G)\})$ y $\Delta(G)$ como la colección de conjuntos de no corte de X que contienen a $T(G)$, están contenidos en $X \setminus G$ e intersecan a cada arista adjunta de G , es decir, $\Delta(G) = \{F \in NC(X) : T(G) \subset F \subset X \setminus G \text{ y } F \cap e \neq \emptyset \text{ para cada } e \in \text{adj}(G)\}$.

Por comodidad, denotamos $\Delta(\{v\})$ simplemente por $\Delta(v)$, donde, v es un elemento de $V(X)$.

Observación. 4.10. El conjunto $T(G)$ puede ser vacío; en caso contrario es un conjunto de no corte de X y está contenido en $X \setminus \text{int}(G)$.

Observación. 4.11. Para cada punto v en $V(X)$ se tiene que X es un elemento de $\overline{\Delta(v)}$.

Observación. 4.12. Si X es un árbol, entonces la definición de $\Delta(G)$ puede ser escrita simplemente como $\Delta(G) = \{F \in NC(X) : T(G) \subset F \subset X \setminus G\}$.

A continuación, mostramos que cada elemento del hiperespacio de conjuntos de no corte pertenece a alguno de los conjuntos definidos anteriormente.

Proposición. 4.13. *Para cada conjunto de no corte F de una gráfica finita X , se cumple que existe una arista, e , de X tal que F es un elemento de $\sigma(e)$ o existe una subgráfica de aristas, G , de X tal que F es un elemento de $\Delta(G)$.*

Demostración. Supongamos que F no pertenece a $\sigma(e)$ para cada e en $\text{edge}(X)$, es decir, para cada e en $\text{edge}(X)$, $X \setminus F$ no está contenido en $\langle e \rangle$. Sea $\mathcal{A} = \{e \in \text{edge}(X) : e \cap F \neq \emptyset \text{ y } e \not\subset F\}$. Observe que, para cada $e \in \mathcal{A}$, el conjunto $(e \setminus F) \cap V(X)$ es distinto del vacío. De la Proposición 4.6, se sigue que, para cada $e \in \mathcal{A}$, $F \cap e$ es un subcontinuo de e . Como $X \setminus F$ es conexo, se tiene que el conjunto $G = (X \setminus F) \setminus \cup\{\langle e \rangle : e \in \mathcal{A}\}$ es una subgráfica de aristas de X . Por construcción de G , se tiene que, F no interseca a G . Note que los conjuntos $\text{adj}(G)$ y \mathcal{A} coinciden. Por lo tanto, F es un elemento de $\Delta(G)$. \square

Los siguientes seis lemas describen propiedades clave de los conjuntos que hemos definido.

Lema. 4.14. *Si e es una arista de una gráfica finita X , entonces $\sigma(e)$ es un subconjunto cerrado de X .*

Demostración. Sea F un elemento de $\sigma(e)$. Existe una sucesión $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ de puntos en $\sigma(e)$, con límite F . Para cada entero positivo i , se tiene que, $X \setminus \langle e \rangle$ está contenido en F_i . Se sigue que, $X \setminus \langle e \rangle$ está contenido en F . En consecuencia, $X \setminus F$ está contenido en $\langle e \rangle$. Por lo tanto, F es un elemento de $\sigma(e)$. \square

Lema. 4.15. *Sean X una gráfica finita y e una arista de X . Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) *Si e es un arco con puntos extremos p y q , entonces cada elemento en $\sigma(e)$ puede escribirse como la unión de $X \setminus \langle e \rangle$ con un subcontinuo de e que contiene a p y un subcontinuo de e que contiene a q , es decir, $\sigma(e) = \{(X \setminus \langle e \rangle) \cup A \cup B : A \in C(p, e) \text{ y } B \in C(q, e)\}$.*

(2) *Si e es una curva cerrada simple, se tienen dos casos:*

2.1 *La arista e no contiene puntos de ramificación de X , entonces $\sigma(e)$ coincide con el hiperespacio de subcontinuos de X , es decir $\sigma(e) = C(X)$.*

2.2 *La arista e contiene un punto de ramificación, r , de X , entonces cada elemento de $\sigma(e)$ puede escribirse como la unión de $X \setminus \langle e \rangle$ con un subcontinuo de e que contiene a r , es decir, $\sigma(e) = \{(X \setminus \langle e \rangle) \cup A : A \in C(r, e)\}$.*

Demostración. Sea F un elemento de $\sigma(e)$.

(1) Por el inciso (2) de la Proposición 4.6, se tiene que, el conjunto $F \cap e$ tiene a lo más dos componentes y si tiene dos componentes, cada una de ellas contiene un punto extremo de e . Como los puntos p y q son elementos de F ,

se tiene que, si $F \cap e$ es conexo, entonces F contiene a e . Así, F es igual a $(X \setminus \langle e \rangle) \cup e = X$. Supongamos ahora que $F \cap e$ tiene exactamente dos componentes. Sean K_1 y K_2 las componentes de $F \cap e$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que p está en K_1 y que q está en K_2 . Así, $F = (X \setminus \langle e \rangle) \cup K_1 \cup K_2$. Lo que prueba (1).

(2) Por el inciso (1) de la Proposición 4.6, $F \cap e$ es un subcontinuo de e . Con base en este hecho, procedemos a demostrar los casos (2.1) y (2.2):

(2.1) En este caso, se tiene que, e coincide con X . Se sigue que X es una curva cerrada simple. Observe que todo cerrado de no corte de X es un elemento de $\sigma(e)$. Lo que implica que, el hiperespacio de conjuntos de no corte de X está contenido en el hiperespacio de subcontinuos de X . La otra contención es clara. Lo que prueba que $\sigma(e)$ coincide con $C(X)$.

(2.2) Se tiene que $F \cap e$ es un subcontinuo de e que contiene a r . De modo que, $F = (X \setminus \langle e \rangle) \cup (F \cap e)$. Lo que concluye la demostración. \square

Lema. 4.16. *Si G es una subgráfica de aristas de X , e una arista simple de G y p el punto extremo de e que no está en G , entonces para cada F en $\Delta(G)$ se tiene que $F \cap e$ es un subcontinuo de e que contiene a p .*

Demostración. Sea F un elemento de $\Delta(G)$. Observe que el punto extremo de e que está en G , no es un elemento de F . Por el inciso (2) de la Proposición 4.6, el conjunto $F \cap e$ es un subcontinuo de e . Por la definición de $\Delta(G)$, se tiene que p es un elemento de F . Por lo tanto, $F \cap e$ es un subcontinuo de e que contiene a p . \square

Lema. 4.17. *Si e es un bucle de una subgráfica de aristas G y r el único punto de ramificación de X que pertenece a e , entonces para cada elemento, F , en $\overline{\Delta(G)}$, se tiene que, $F \cap e$*

es un subcontinuo de e que no tiene al punto r , o $F \cap e$ es un subcontinuo de e que tiene al punto r en su frontera, o $F \cap e$ es e .

Demostración. Sea F un elemento de $\overline{\Delta(G)}$. Existe una sucesión, $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$, de elementos en $\Delta(G)$ convergiendo a F . Como consecuencia del inciso (1) de la Proposición 4.6, se tiene que, para cada entero positivo i , $F_i \cap e$ es un subcontinuo de e . Así, $F_i \cap e$ es un subcontinuo de e que no contiene a r . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $F_i \cap e$ converge a un subcontinuo B de e . El continuo B es un elemento de $\overline{\{C \in C(e) : r \notin C\}} = \{C \in C(e) : r \notin C\} \cup \{C \in C(e) : r \in \text{fr}(C)\} \cup \{e\}$, [12, Ejemplo 3.2, pp. 31-35]. Así, B no tiene a r , o B tiene a r en su frontera, o B es e . Para concluir la demostración, mostraremos que $F \cap e$ es igual a B . Supongamos que $F \cap B$ es distinto de B . Observemos que el único punto en e que puede estar en $F \setminus B$ es r . Supongamos que r es un elemento de $F \setminus B$. Por el inciso (1) de la Proposición 4.6, se deduce que $F \cap e$ es un subcontinuo de e . De donde r pertenece a $F \cap e$ y B está contenido en un subcontinuo de $F \cap e$. En consecuencia, existen elementos en e distintos de r que están en $F \setminus B$. Lo cual es una contradicción. Lo que prueba que $F \cap e = B$. \square

Lema. 4.18. *Sean G una subgráfica de aristas de X , e_1, e_2, \dots, e_l las aristas simples de G , p_i el extremo de e_i que no está en G y $e_{l+1}, e_{l+2}, \dots, e_{l+k}$ las aristas múltiples de G . Si F es un elemento de $\overline{\Delta(G)}$, entonces F puede escribirse de la forma $T(G) \cup A_1 \cup \dots \cup A_{l+k}$, donde, para cada i en $\{1, \dots, l\}$, A_i es un subcontinuo de e_i que contiene a p_i y para cada i en $\{l+1, \dots, l+k\}$, A_i es un subcontinuo de e_i .*

Demostración. Existe una sucesión, $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$, de elementos en $\Delta(G)$, que converge a F . Observe que, para cada entero positivo i , el conjunto F_i puede escribirse de la forma $F_i = T(G) \cup \bigcup \{F_i \cap e : e \in \text{adj}(G)\}$. Por el Lema 4.16, se tiene que, para cada j en $\{1, \dots, l\}$, $F_i \cap e_j$ es un subcontinuo de

e_j que contiene p_j . Como consecuencia del inciso (1) de la Proposición 4.6, se tiene que, para cada j en $\{l+1, \dots, l+k\}$, $F_i \cap e_j$ es un subcontinuo de e_j . Para cada número entero i y para cada j en $\{1, \dots, l+k\}$ sea $A_{ij} = F_i \cap e_j$. Así, $F_i = T(G) \cup A_{i1} \cup \dots \cup A_{i(l+k)}$, donde, para cada j en $\{1, \dots, l\}$, A_{ij} es un elemento de $C(p_j, e_j)$ y para cada j en $\{l+1, \dots, l+k\}$, A_{ij} es un elemento de $C(e_j)$. Sin pérdida de generalidad, para cada j en $\{1, \dots, l+k\}$, podemos suponer que la sucesión $\{A_{ij}\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A_j . Observe que, para cada j en $\{1, \dots, l\}$, A_j es un elemento de $C(p_j, e_j)$ y para cada j en $\{l+1, \dots, l+k\}$, A_j es un elemento de $C(e_j)$. Así, F es igual $T(G) \cup A_1 \cup \dots \cup A_{l+k}$. \square

Lema. 4.19. *Sean G una subgráfica de aristas de X , e_1, e_2, \dots, e_l las aristas simples de G , p_i el extremo de e_i que no está en G y $e_{l+1}, e_{l+2}, \dots, e_{l+k}$ las aristas múltiples de G . Si, para cada i en $\{1, \dots, l\}$, A_i es un elemento de $C(p_i, e_i) \setminus \{e_i\}$ y, para cada i en $\{l+1, \dots, l+k\}$, A_i es un elemento de $C(e_i)$ que está contenido en $\langle e_i \rangle$, entonces $T(G) \cup A_1 \cup \dots \cup A_{l+k}$ es un elemento de $\Delta(G)$.*

Demostración. Para cada $i \in \{1, \dots, l\}$, el conjunto $B_i = e_i \setminus A_i$ es un conjunto conexo que interseca a G . Por lo tanto, $G \cup B_i$ es un conjunto conexo.

Para cada i en $\{l+1, \dots, l+k\}$, hay dos casos a considerar:

Caso 1: La arista e_i es una arista doble de G . En este caso, el conjunto $B_i = e_i \setminus A_i$ es la unión de dos conjuntos conexos que intersecan a G . En consecuencia $G \cup B_i$ es un conjunto conexo.

Caso 2: La arista e_i es un bucle de G . Aquí, el conjunto $B_i = e_i \setminus A_i$ es un conjunto conexo que interseca a G . Así, $G \cup B_i$ es un conjunto conexo.

Observe que $X \setminus (T(G) \cup A_1 \cup \dots \cup A_{l+k}) = \bigcup \{G \cup B_i : i \in \{1, \dots, l+k\}\}$. Lo que prueba que $T(G) \cup A_1 \cup \dots \cup A_{l+k}$ es un elemento de $\Delta(G)$. \square

Presentamos ahora una proposición que muestra la equivalencia topológica entre ciertos conjuntos y una 2-celda.

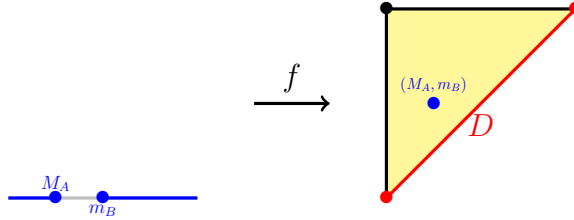
Proposición. 4.20. *Si e es una arista de una gráfica finita X , entonces $\sigma(e)$ es homeomorfo a $[0, 1]^2$.*

Demostración. Hay tres casos a considerar:

Caso 1: La arista e es un arco con puntos extremos p y q . Por el inciso (1) del Lema 4.15, se tiene que

$$\sigma(e) = \{(X \setminus \langle e \rangle) \cup A \cup B : A \in C(p, e) \text{ y } B \in C(q, e)\}.$$

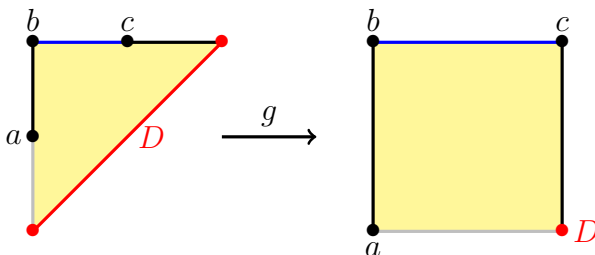
En este caso, es claro que, $\sigma(e)$ es homeomorfo al subespacio $\mathcal{H} = \{A \cup B : A \in C(0, [0, 1]) \text{ y } B \in C(1, [0, 1])\}$ de $2^{[0,1]}$. Mostraremos que \mathcal{H} es homeomorfo a $[0, 1]^2$. Cada cerrado, $A \cup B$, que pertenece a \mathcal{H} , distinto de $[0, 1]$, está determinado por el elemento máximo de A , M_A , y el elemento mínimo de B , m_B . La función $f(A \cup B) = (M_A, m_B)$ es una asignación inyectiva de $\mathcal{H} \setminus \{X\}$ en el triángulo, T , de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$.



Denotamos por D al segmento de recta que une a los vértices $(0, 0)$ y $(1, 1)$. En el triángulo T , se define la relación de equivalencia \sim , de la siguiente manera: $x \sim y$ si y sólo si x y y son elementos de D , o si $x = y$. Consideramos T/\sim el espacio cociente inducido por la relación de equivalencia \sim y denotamos por $\pi : T \rightarrow T/\sim$ la proyección natural. Se define la función $h_1 : \mathcal{H} \rightarrow T/\sim$ de la siguiente manera:

$$h_1(A \cup B) = \begin{cases} (M_A, m_B) & \text{si } A \cup B \neq X \\ \pi(D) & \text{si } A \cup B = X \end{cases}$$

La función h resulta ser un homeomorfismo entre \mathcal{H} y T/\sim . El espacio cociente T/\sim puede ser deformado de manera continua mediante la función g , representada en la siguiente figura, en una 2-celda.



Denotamos por h a la función $g \circ h_1$. La función h es un homeomorfismo de \mathcal{H} en $[0, 1]^2$. Podemos observar que $[0, 1]$ queda representado en el punto $(1, 0)$. El conjunto $\{0, 1\}$ queda representado en el punto $(0, 1)$. Los cerrados que tiene al 0 en su frontera quedan representados en $([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$. Los cerrados que contiene al punto 1 en su frontera quedan representados en $([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times (0, 1])$.

Caso 2: La arista e es una curva cerrada simple que no contiene puntos de ramificación. Se sigue del inciso (2.1) del Lema 4.15 y del Lema 4.3.

Caso 3: La arista e es un lazo. Aquí, por el inciso (2.2) del Lema 4.15, se tiene que, $\sigma(e) = \{(X \setminus \langle e \rangle) \cup A : A \in C(r, e)\}$. Consideremos la circunferencia unitaria en el plano, S^1 , y un punto, p en ella. Es claro que, $\sigma(e)$ es homeomorfo a $C(p, S^1)$. Del Lema 4.4, se sigue que $\sigma(e)$ es homeomorfo a $[0, 1]^2$. \square

Como consecuencia directa de la proposición anterior, se tiene el siguiente corolario.

Corolario. 4.21. *Si X es una gráfica finita, entonces el hiperespacio de conjuntos de no corte de X contiene un subconjunto homeomorfo a la 2-celda.*

La siguiente proposición establece que ciertos conjuntos pueden ser encajados en un espacio que se parece a una celda.

Proposición. 4.22. *Si G es una subgráfica de aristas de X , entonces existe un encaje $h : \overline{\Delta(G)} \rightarrow [0, 1]^{k+2l} \times Q^m$ tal que $((0, 1)^{k+2l} \times Q_0^m) \subset h(\Delta(G))$, donde, k es el número aristas simples de G , l es el número de aristas dobles de G , m es el número de bucles de G , a su vez Q y Q_0 como en la Definición 4.1.*

Demostración. Sean e_1, \dots, e_k las aristas simples de G , e_{k+1}, \dots, e_{k+l} las aristas dobles de G y $e_{k+l+1}, \dots, e_{k+l+m}$ los bucles de G . Para cada i en $\{1, \dots, k\}$, sean p_i el extremo de e_i que no está en G y $\mathcal{C}_i = C(p_i, e_i) \setminus \{e_i\}$. Para cada i en $\{k+1, \dots, k+l\}$, sea $\mathcal{C}_i = \{C \in C(e_i) : C \subset \langle e_i \rangle\}$. Para cada i en $\{k+l+1, \dots, k+l+m\}$, sean r_i el único punto de ramificación de X que está contenido en e_i y $\mathcal{C}_i = \{C \in C(e_i) : r_i \notin C\}$. Sea F un elemento en $\overline{\Delta(G)}$. Por los Lemas 4.17 y 4.18, F puede escribirse de la forma $T(G) \cup A_1^F \cup \dots \cup A_{k+l+m}^F$, donde, para cada i en $\{1, \dots, k+l+m\}$, A_i^F es un elemento de $\overline{\mathcal{C}_i}$. Observe que el conjunto de no corte F queda determinado por los subcontinuos $A_1^F, \dots, A_{k+l+m}^F$. Para cada i en $\{1, \dots, k\}$, existe un homeomorfismo, $h_i : C(p_i, e_i) \rightarrow [0, 1]$, tal que $h_i(\mathcal{C}_i) = [0, 1]$. Para cada i en $\{k+1, \dots, k+l\}$, se define $h_i : C(e_i) \rightarrow [0, 1]^2$ como el homeomorfismo descrito en el Lema 4.2. Para cada i en $\{k+l+1, \dots, k+l+m\}$, se define $h_i : \overline{\mathcal{C}_i} \rightarrow Q$ como el homeomorfismo descrito en el inciso (2) del Lema 4.4. La función $h : \overline{\Delta(G)} \rightarrow [0, 1]^{k+2l} \times Q^m$ definida por $h(F) = (h_1(A_1^F), \dots, h_{k+l+m}(A_{k+l+m}^F))$ es inyectiva y continua. Por el Lema 4.19, se tiene que el conjunto $E = \{T(G) \cup C_1 \cup \dots \cup C_{k+l+m} : C_i \in \mathcal{C}_i\}$ está contenido en $\Delta(G)$. Note que $((0, 1)^{k+2l} \times Q_0^m) \subset h(E)$. Por lo tanto, h es un encaje de $\overline{\Delta(G)}$ en $[0, 1]^{k+2l} \times Q^m$ tal que $(0, 1)^{k+2l} \times Q_0^m$ está contenido en $h(\Delta(G))$. \square

El resultado final de esta sección, que se sigue de las proposiciones 4.13, 4.20 y 4.22, muestra que el hiperespacio de

conjuntos de no corte se expresa como la unión de conjuntos que se pueden encajar en espacios parecidos a una celda.

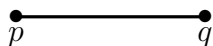
Corolario. 4.23. *Si X es una gráfica, la unión $NC(X) = \cup\{\sigma(e) : e \in \text{edge}(X)\} \cup \cup\{\overline{\Delta(G)} : G \text{ es una subgráfica de aristas de } X\}$ es una descomposición del hiperespacio de conjuntos de no corte de X .*

4.3. Algunos modelos particulares

Esta sección está dedicada a la construcción de modelos para el hiperespacio de conjuntos de no corte de algunas gráficas finitas, lo que constituye un paso fundamental en la comprensión de su topología. A partir de los resultados presentados en la sección anterior, es suficiente enfocar nuestro análisis en los conjuntos $\sigma(e)$ y $\overline{\Delta(G)}$, donde e representa una arista y G una subgráfica de aristas, para construir un modelo para el hiperespacio de conjuntos de no corte. Una vez determinados los conjuntos $\sigma(e)$ y $\overline{\Delta(G)}$, el paso crucial es pegarlos adecuadamente. Comenzamos con algunos ejemplos ilustrativos.

Modelo para el hiperespacio de no corte del arco

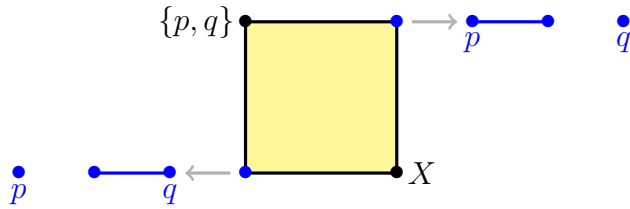
Consideremos el arco X que va de p a q , ilustrado en la figura siguiente.



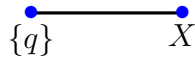
En el caso del arco, identificamos una arista y dos subgráficas de aristas. Las subgráficas de aristas son $\{p\}$ y $\{q\}$, y la única arista es el arco de p a q , al cual llamamos e .

Empezamos examinando el conjunto $\sigma(e)$. En este caso, $\sigma(e)$ es la colección de conjuntos de no corte formada por los cerrados que pueden escribirse como la unión de un

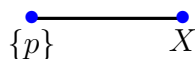
subcontinuo que contiene a p con un subcontinuo que contiene a q . Por la Proposición 4.20, sabemos que $\sigma(e)$ es homeomorfo a una 2-celda. El arco de p a q queda representado en el punto $(1, 0)$, el conjunto $\{p, q\}$ queda representado en el punto $(0, 1)$. Un punto en el conjunto $([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$ representa un cerrado que se puede escribir como la unión de $\{p\}$ con un subcontinuo que contiene a q . Un punto en el conjunto $([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times (0, 1])$ representa un cerrado que se puede escribir como la unión de $\{q\}$ con un subcontinuo que contiene a p . Cualquier otro punto en la 2-celda representa un cerrado que se puede escribir como la unión de un continuo que contiene a p en su interior con un continuo que contiene a q en su interior. Esto se ilustra en la siguiente figura.



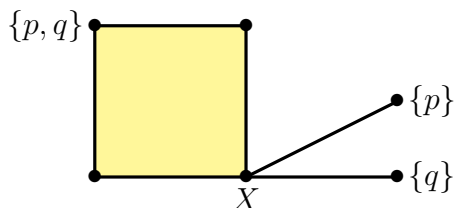
A continuación, analizamos los conjuntos $\overline{\Delta(p)}$ y $\overline{\Delta(q)}$. La gráfica de aristas p tiene una única arista adjunta, el arco de p a q . Observe que, en este caso $\overline{\Delta(p)}$ coincide con $C(q, pq)$, donde pq denota el arco de p a q . Sea h el encaje construido en la demostración de la Proposición 4.22, el cual va de $\overline{\Delta(p)}$ en $[0, 1]$. Dicho encaje es un homeomorfismo de $\overline{\Delta(p)}$ en $[0, 1]$. El punto 0 representa al conjunto $\{q\}$ y el punto 1 representa al arco pq . Como se muestra en la siguiente figura.



De forma similar, $\overline{\Delta(q)}$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. El punto 0 representa al conjunto $\{p\}$ y el punto 1 representa al arco pq . Esto se ilustra en la figura a continuación.



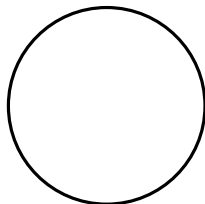
Los conjuntos $\sigma(e)$, $\overline{\Delta(p)}$ y $\overline{\Delta(q)}$ solo se intersecan en el punto X . De esta manera, podemos establecer un modelo para el hiperespacio de conjuntos de no corte del arco, tal como se representa en la figura siguiente.



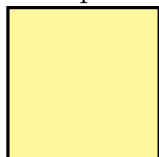
Observación. 4.24. El hiperespacio de conjuntos de no corte del arco es un continuo.

Modelo para el hiperespacio de no corte de la curva cerrada simple

Tomemos la circunferencia unitaria en el plano cartesiano, representada en la figura de abajo.



En el caso de una curva cerrada simple, identificamos una arista sin puntos de ramificación y no tiene subgráficas de aristas. Del inciso (2.1) del Lema 4.15 y del Lema 4.3 se obtiene que, un modelo para el hiperespacio de conjuntos de no corte la una curva cerrada simple es la 2-celda.



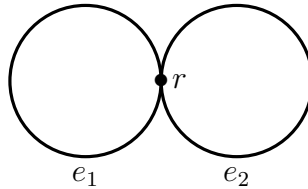
Un punto en el contorno de la 2-celda representa un conjunto unipuntual de la circunferencia. La descomposición

dada por el conjunto $\sigma(e)$, donde e es la única arista que forma la curva cerrada simple, es una descomposición en celdas.

Observación. 4.25. El hiperespacio de conjuntos de no corte de la curva cerrada simple es un continuo.

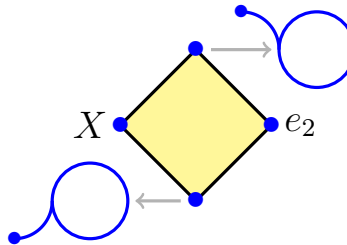
Modelo para el hiperespacio de no corte del ocho

Sea X la gráfica finita ilustrada en la figura siguiente.



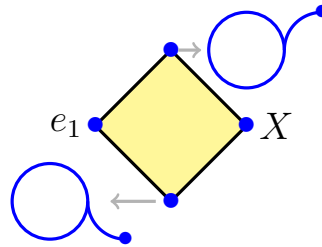
Identificamos dos aristas y tres subgráficas de aristas. Denotamos a las aristas como e_1 y e_2 . Las subgráficas de aristas son los conjuntos e_1 , e_2 y $\{r\}$.

Empezamos examinando el espacio $\sigma(e_1)$. El conjunto $\sigma(e_1)$ es la colección de todos los subcontinuos que contienen a e_2 . Por el inciso 3 de la Proposición 4.20, se tiene que $\sigma(e_1)$ es homeomorfo a una 2-celda. Los subcontinuos que tiene al punto r en la frontera y contienen a e_2 quedan representados en la frontera de la 2-celda. Esto se ilustra en la figura siguiente.

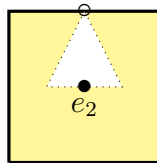


Por el inciso (3) de la Proposición 4.20, se tiene que $\sigma(e_2)$ es homeomorfo a una 2-celda. Los subcontinuos que

tienen al punto r en la frontera y contienen a e_1 quedan representados en la frontera de la 2-celda. Esto se ilustra en la figura siguiente.

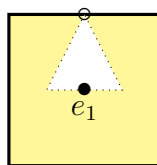


A continuación, analizamos los espacios $\overline{\Delta(e_1)}$ y $\overline{\Delta(e_2)}$. La gráfica de aristas e_1 tiene una única arista adjunta, e_2 , la cual es un bucle de e_1 . Sea h el encaje construido en la demostración de la Proposición 4.22, el cual va de $\overline{\Delta(e_1)}$ en Q . Dicho encaje no es un homeomorfismo, ya que no existe $F \in \overline{\Delta(e_1)}$ tal que $h(F) = (\frac{1}{2}, 1)$. La imagen de $\overline{\Delta(e_1)}$ bajo h es Q_0 unión el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, se ilustra en la siguiente figura.



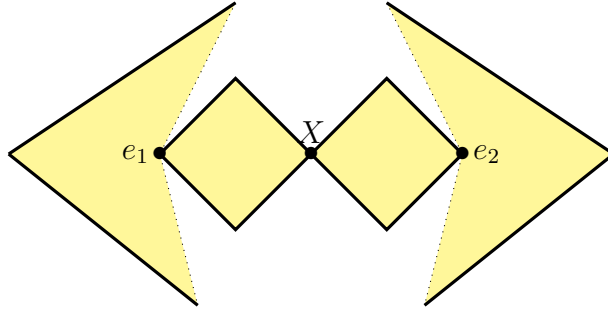
El punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ representa a e_2 , cada uno de los puntos restantes representa a un continuo que no contiene a r . Cada punto con una coordenada igual a 0 o a 1, representa un conjunto unipuntual de X .

Análogamente, $\overline{\Delta(e_2)}$ es homeomorfo a Q_0 unión el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, se ilustra en la siguiente figura.



Por último, analizamos el espacio $\overline{\Delta(r)}$. La gráfica de aristas $\{r\}$, tiene dos aristas adjuntas y ambas son bucles de $\{r\}$. Sea h el encaje construido en la demostración de la Proposición 4.22, el cual va de $\overline{\Delta(r)}$ en Q^2 . Dicho encaje no es un homeomorfismo, ya que no existe $F \in \overline{\Delta(r)}$ tal que $h(F) = \left(\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right)$. La imagen de $\overline{\Delta(r)}$ bajo h es $(Q_0 \times Q_0) \cup \left(\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\} \times Q_1\right) \cup \left(Q_1 \times \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}\right)$. Como la dimensión de $\overline{\Delta(r)}$ es mayor que 3, resulta imposible representar visualmente el espacio de manera efectiva.

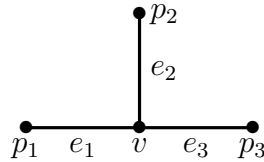
La intersección de $\overline{\Delta(r)}$ con $\sigma(e_1) \cup \sigma(e_2) \cup \overline{\Delta(e_1)} \cup \overline{\Delta(e_2)}$ es el conjunto $A = \{C \in NC(X) : A \in C(e_1, X) \cup C(e_2, X)\}$. El único elemento de A que pertenece a $\overline{\Delta(e_1)}$ es e_2 . El único elemento de A que pertenece a $\overline{\Delta(e_2)}$ es e_1 . Los elementos de A que están $\sigma(e_1)$ son los elementos de $C(e_2, X)$ que contiene a r en su frontera. Los elementos de A que están $\sigma(e_2)$ son los elementos de $C(e_1, X)$ que contiene a r en su frontera. A continuación damos un modelo para $\sigma(e_1) \cup \sigma(e_2) \cup \overline{\Delta(e_1)} \cup \overline{\Delta(e_2)}$.



La descomposición dada por los conjuntos $\sigma(e_1), \sigma(e_2)$ y $\overline{\Delta(e_1)}, \overline{\Delta(e_2)}$ y $\overline{\Delta(r)}$, no es una descomposición en celdas.

Modelo para el hiperespacio de no corte del triodo simple

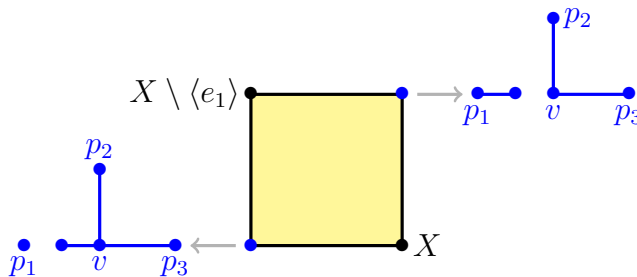
Sea X el triodo simple formado por las aristas e_1, e_2 y e_3 . Ilustrado en la figura siguiente.



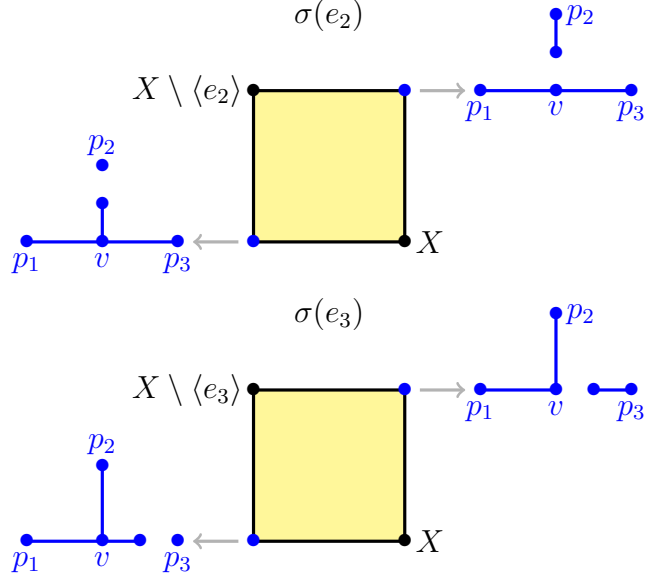
Las subgráficas de aristas del triodo simple son: $G_0 = \{v\}$, $G_1 = \{p_1\}$, $G_2 = \{p_2\}$, $G_3 = \{p_3\}$, $G_4 = e_1$, $G_5 = e_2$, $G_6 = e_3$, $G_7 = e_1 \cup e_2$, $G_8 = e_1 \cup e_3$, $G_9 = e_2 \cup e_3$.

Empezamos examinando los espacios $\sigma(e_1)$, $\sigma(e_2)$ y $\sigma(e_3)$.

El conjunto $\sigma(e_1)$ es la colección de todos los subconjuntos cerrados que pueden escribirse como la unión de $X \setminus \langle e_1 \rangle$ con un subcontinuo de e_1 que tiene a v y con un subcontinuo de e_1 que tiene a p_1 . Por el inciso (1) de la Proposición 4.20, sabemos que $\sigma(e_1)$ es homeomorfo a una 2-celda. El conjunto X queda representado en el punto $(1, 0)$, el conjunto $X \setminus \langle e_1 \rangle$ queda representado en el punto $(0, 1)$. Un punto en el conjunto $([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$ representa un cerrado que se puede escribir como la unión de $X \setminus \langle e_1 \rangle$ con un subcontinuo que tiene a v . Un punto en el conjunto $([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times (0, 1])$ representa un cerrado que se puede escribir como la unión de $X \setminus \langle e_1 \rangle$ con un subcontinuo que tiene a p_1 . Cualquier otro punto en la 2-celda representa un cerrado que se puede escribir como la unión de $X \setminus \langle e_1 \rangle$ con un continuo que tiene a p en su interior y con un continuo que tiene a q en su interior. Esto se ilustra en la figura siguiente.



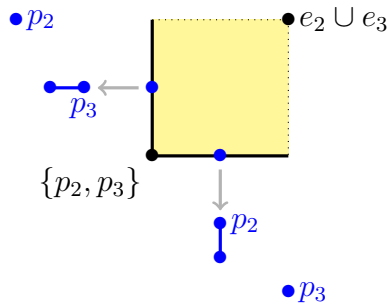
Análogamente, $\sigma(e_2)$ y $\sigma(e_3)$ son homeomorfos a una 2-celda, se ilustran en las siguiente figura.



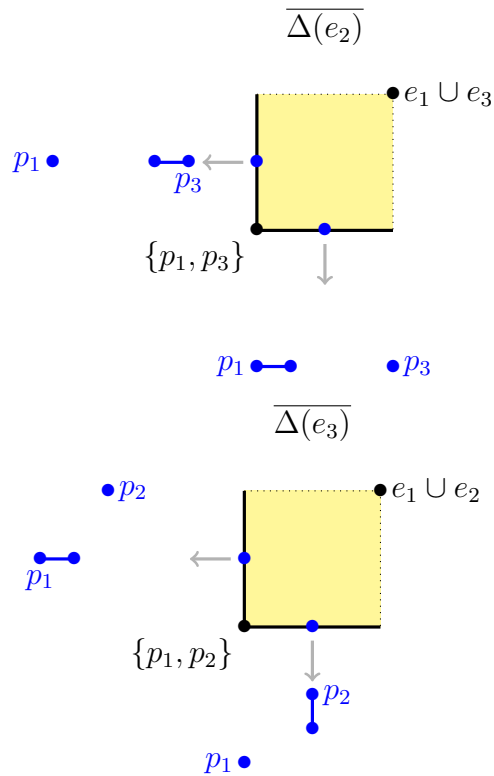
A continuación analizamos los espacios $\overline{\Delta(e_1)}$, $\overline{\Delta(e_2)}$ y $\overline{\Delta(e_3)}$.

La gráfica de aristas e_1 tiene dos aristas adjuntas, las cuales son aristas simples de e_1 . Sea h el encaje construido en la demostración de la Proposición 4.22, el cual va de $\overline{\Delta(e_1)}$ en $[0, 1]^2$. Dicho encaje no es un homeomorfismo, ya que no existe $F \in \overline{\Delta(e_1)}$ tal que $h(F) = (1, 0)$. La imagen de $\overline{\Delta(e_1)}$ bajo h es $([0, 1) \times [0, 1)) \cup \{1, 1\}$. El punto $(1, 1)$ representa a $e_2 \cup e_3$. El punto $(0, 0)$ representa a $\{p_2, p_3\}$. Cada punto en $\{0\} \times [0, 1)$ representa un conjunto cerrado que se puede escribir como la unión de $\{p_2\}$ con un subcontinuo propio de e_3 que contiene a p_3 . Cada punto en $[0, 1) \times \{0\}$ representa un conjunto cerrado que se puede escribir como la unión de $\{p_3\}$ con un subcontinuo propio de e_2 que tiene a p_2 . Cada uno de los puntos restantes representa a un conjunto cerrado que se puede escribir como la unión de subcontinuo propio de e_2 que tiene a p_2 en su interior con un subcontinuo propio

de e_3 que tiene a p_3 en su interior. Esto se ilustra en la figura siguiente.

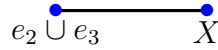


Análogamente, $\overline{\Delta(e_2)}$ y $\overline{\Delta(e_3)}$ son homeomorfos a $([0, 1) \times [0, 1)) \cup \{1, 1\}$, se ilustran en las siguientes figuras.

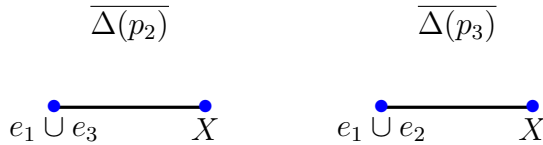


Ahora, analizamos los espacios $\overline{\Delta(p_1)}$, $\overline{\Delta(p_2)}$ y $\overline{\Delta(p_3)}$.

La gráfica de aristas p_1 tiene una arista adjunta, la cual es una arista simple de p_1 . Sea h el encaje construido en la demostración de la proposición 4.22, el cual va de $\overline{\Delta(p_1)}$ en $[0, 1]$. Dicho encaje es un homeomorfismo. Cualquier punto en $[0, 1]$ representa un elemento de $C(e_2 \cup e_3, X)$. El punto 0 representa al conjunto $e_2 \cup e_3$ y el punto 1 representa a X . Como se muestra en la siguiente figura.

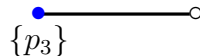


Análogamente, $\overline{\Delta(p_2)}$ y $\overline{\Delta(p_3)}$ son homeomorfos a $[0, 1]$, se ilustran en las siguientes figuras.

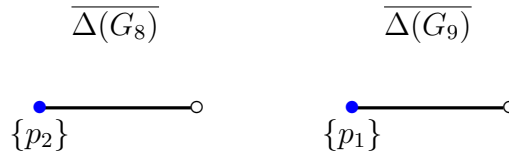


A continuación analizamos los espacios $\overline{\Delta(G_7)}$, $\overline{\Delta(G_8)}$ y $\overline{\Delta(G_9)}$.

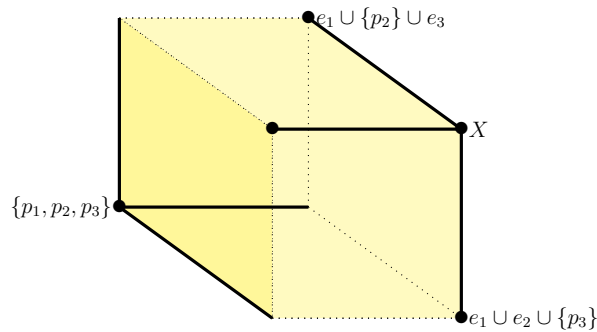
La gráfica de aristas G_7 tiene una arista adjunta, la cual es una arista simple de G_7 . Sea h el encaje construido en la demostración de la Proposición 4.22, el cual va de $\overline{\Delta(G_7)}$ en $[0, 1]$. Dicho encaje no es un homeomorfismo, ya que no existe $F \in \overline{\Delta(G_7)}$ tal que $h(F) = 1$. La imagen de $\overline{\Delta(G_7)}$ bajo h es $[0, 1)$. Cualquier punto en $[0, 1)$ representa un subcontinuo propio de e_3 que contiene a p_3 . El punto 0 representa al conjunto $\{p_3\}$. Como se muestra en la siguiente figura.



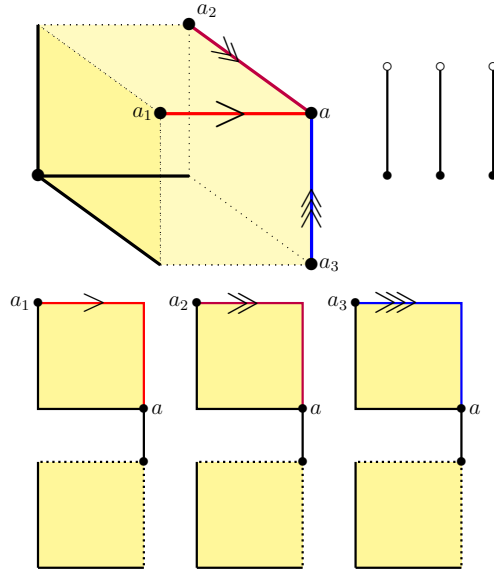
Análogamente, $\overline{\Delta(G_8)}$ y $\overline{\Delta(G_9)}$ son homeomorfos a $[0, 1)$, se ilustran en la siguiente figura.



Por último, analizamos el espacio $\overline{\Delta(v)}$. La gráfica de aristas $\{v\}$, tiene tres aristas adjuntas y las tres son aristas simples de $\{v\}$. Sea h el encaje construido en la demostración de la Proposición 4.22, el cual va de $\overline{\Delta(v)}$ en $[0, 1]^3$. Dicho encaje no es un homeomorfismo, ya que no existe $F \in \overline{\Delta(v)}$ tal que $h(F) = (1, 0, 0)$. La imagen de $\overline{\Delta(r)}$ bajo h es $[0, 1]^3 \cup (\{(1, 1)\} \times [0, 1]) \cup (\{1\} \times [0, 1] \times \{1\}) \cup ([0, 1] \times \{(1, 1)\})$. El punto $(1, 1, 1)$ representa a X . El punto $(0, 0, 0)$ representa a $\{p_1, p_2, p_3\}$. Cada punto en el conjunto $(\{(1, 1)\} \times [0, 1]) \cup (\{1\} \times [0, 1] \times \{1\}) \cup ([0, 1] \times \{(1, 1)\})$ representa un cerrado que puede escribirse como la unión de de $X \setminus \langle e_i \rangle$ con un subcontinuo que tiene a p_i , para algún i en $\{1, 2, 3\}$. Cada uno de los puntos restantes representa a un conjunto cerrado que no tiene a v y se puede escribir como la unión de un subcontinuo que tiene a p_1 con un subcontinuo que tiene a p_2 y un subcontinuo que tiene a p_3 . Esto se ilustra en la figura siguiente.

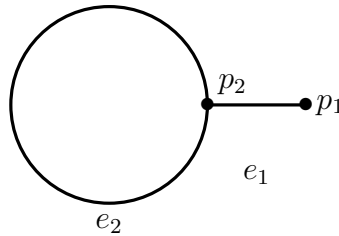


Habiendo identificado los conjuntos $\sigma(e_i)$ y $\overline{\Delta(G_j)}$, estamos en posición de presentar un modelo para el hiperespacio de conjuntos de no corte del triodo simple. Se obtiene a partir del espacio mostrado en la siguiente imagen, realizando el pegado de los arcos $a_i a$.



Modelo para el hiperespacio de no corte de la paleta

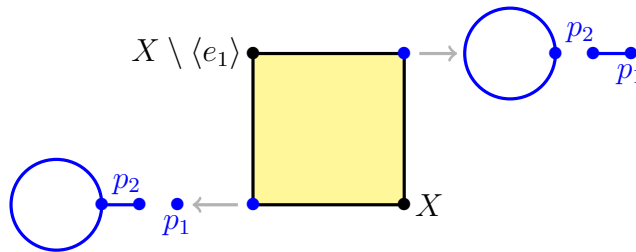
Sea X la gráfica finita ilustrada en la figura siguiente.



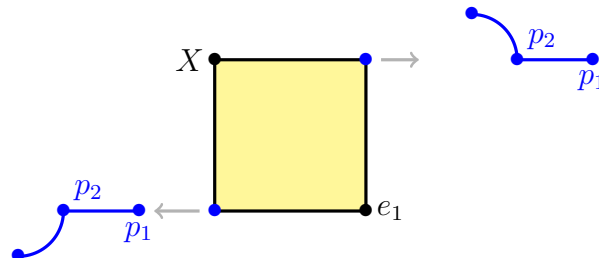
Denotamos a las aristas como e_1 y e_2 , al punto extremo por p_1 y al punto de ramificación por p_2 .

Identificamos cuatro subgráficas de aristas y dos aristas. Las subgráficas de aristas son los conjuntos e_1 , e_2 , $\{p_1\}$ y $\{p_2\}$.

Empezamos examinando el espacio $\sigma(e_1)$. Por el inciso (1) de la Proposición 4.20, se tiene que $\sigma(e_1)$ es homeomorfo a una 2-celda. El conjunto X queda representado en el punto $(1, 0)$, el conjunto $X \setminus \langle e_1 \rangle$ queda representado en el punto $(0, 1)$. Un punto en el conjunto $([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$ representa un cerrado que se puede escribir como la unión de $X \setminus \langle e_1 \rangle$ con un subcontinuo que tiene a p_2 . Un punto en el conjunto $([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times (0, 1])$ representa un cerrado que se puede escribir como la unión de $X \setminus \langle e_1 \rangle$ con un subcontinuo que tiene a p_1 . Cualquier otro punto en la 2-celda representa un cerrado que se puede escribir como la unión de $X \setminus \langle e_1 \rangle$ con un continuo que tiene a p_2 en su interior y con un continuo que tiene a p_1 en su interior. Esto se ilustra en la figura siguiente.

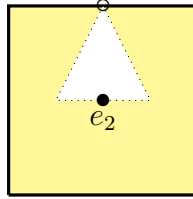


Por el inciso (3) de la Proposición 4.20, se tiene que $\sigma(e_2)$ es homeomorfo a una 2-celda. El conjunto e_1 queda representado en el punto $(1, 0)$, el conjunto X queda representado en el punto $(0, 1)$. Los subcontinuos que tienen al punto p_2 en la frontera y contienen a e_1 quedan representados en frontera de la 2-celda. Esto se ilustra en la siguiente figura.

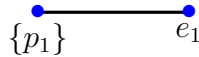


A continuación analizamos los espacios $\overline{\Delta}(e_1)$ y $\overline{\Delta}(e_2)$.

La gráfica de aristas e_1 tiene una arista adjunta, la cual es un bucle de e_1 . Sea h el encaje construido en la demostración de la Proposición 4.22, el cual va de $\overline{\Delta}(e_1)$ en Q . Dicho encaje no es un homeomorfismo, ya que no existe $F \in \overline{\Delta}(e_1)$ tal que $h(F) = (\frac{1}{2}, 1)$. La imagen de $\overline{\Delta}(e_1)$ bajo h es Q_0 unión el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. El punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ representa a e_2 , cada uno de los puntos restantes representa a un continuo que no tiene a p_2 y está contenido en e_2 . Cada punto con una coordenada igual a 0 o a 1, representa un conjunto unipuntual de X . Esto se ilustra en la siguiente figura.



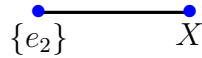
La gráfica de aristas e_2 tiene una única arista adjunta, la cual es una arista simple de e_2 . Sea h el encaje construido en la demostración de la Proposición 4.22, el cual va de $\overline{\Delta}(e_2)$ en $[0, 1]$. El encaje h es un homeomorfismo. Cualquier punto en $[0, 1]$ representa un elemento de $C(p_1, e_1)$. El punto 0 representa al conjunto $\{p_1\}$ y el punto 1 representa a e_1 . Se ilustra en la siguiente figura.



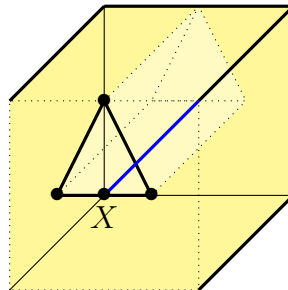
Ahora, analizamos los espacios $\overline{\Delta}(p_1)$ y $\overline{\Delta}(p_2)$.

La gráfica de aristas p_1 tiene una arista adjunta, la cual es una arista simple de p_1 . Sea h el encaje construido en la demostración de la Proposición 4.22, el cual va de $\overline{\Delta}(p_1)$ en $[0, 1]$. Dicho encaje es un homeomorfismo. Cualquier punto en $[0, 1]$ representa un elemento de $C(e_2, X)$. El punto 0

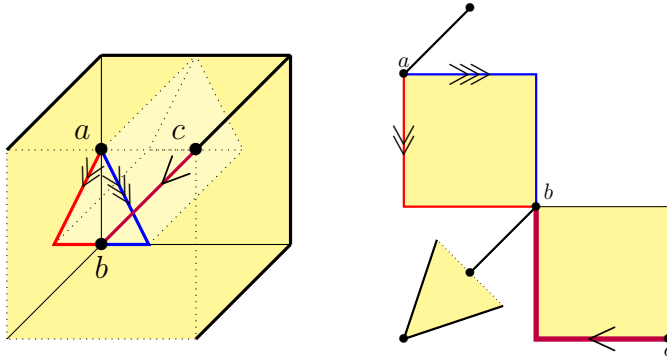
representa al conjunto e_2 y el punto 1 representa a X . Se ilustra en la siguiente figura.



La gráfica de aristas p_2 tiene dos aristas adjuntas, una es una arista simple y la otra es un bucle de p_2 . Sea h el encaje construido en la demostración de la Proposición 4.22, el cual va de $\overline{\Delta(p_1)}$ en $[0, 1] \times Q$. Dicho encaje no es un homeomorfismo, ya que no existe $F \in \overline{\Delta(p_2)}$ tal que $h(F) = (0, (\frac{1}{2}, 1))$. La imagen de $\overline{\Delta(p_2)}$ bajo h es $([0, 1] \times Q_0)$ unión $(\{1\} \times Q_1) \cup ([0, 1] \times \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\})$. El punto $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ representa a X . Cada punto en el conjunto $\{1\} \times Q_1$ representa un elemento de $C(e_1)$ que contiene a p_2 en la frontera. Cada punto en el conjunto $[0, 1] \times \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ representa un conjunto cerrado que se puede escribir como la unión de e_2 con un subcontinuo que contiene a p_1 . Cada uno de los puntos restantes representa a un conjunto cerrado que no contiene a p_2 y se puede escribir como la unión de un subcontinuo que contiene a p_1 con un subcontinuo contenido en e_2 . Se ilustra en la siguiente figura.



Habiendo identificado los conjuntos $\sigma(e_i)$ y $\overline{\Delta(G_j)}$, estamos en posición de presentar un modelo para el hiperespacio de conjuntos de no corte de la paleta. Se obtiene a partir del espacio mostrado en la siguiente imagen, realizando el pegado de los arcos indicados en la misma.



4.4. Dimensión

En esta sección, nos enfocamos en determinar la dimensión del hiperspacio de conjuntos de no corte. Comenzamos definiendo el concepto de dimensión y presentando tres resultados conocidos que serán fundamentales para nuestro análisis.

Definición. 4.26. [10, Definición III.1, p. 24] Un espacio X tiene *dimensión 0 en un punto p* , si p tiene vecindades arbitrariamente pequeñas con frontera vacía, es decir, para cada vecindad abierta, U , de p existe una vecindad, V , de p tal que V está contenida en U y tiene frontera vacía. El conjunto vacío y solo el conjunto vacío tiene dimensión -1 . Un espacio no vacío X tiene *dimensión 0* si X tiene dimensión 0 en cada uno de sus puntos. Dado un entero positivo n , decimos que un espacio X tiene *dimensión $\leq n$ en el punto p* si p tiene vecindades arbitrariamente pequeñas cuya frontera tiene dimensión $\leq n - 1$. Un espacio X tiene *dimensión $\leq n$* , denotado por $\dim(X) \leq n$, si X tiene dimensión $\leq n$ en cada uno de sus puntos. Un espacio X *tiene dimensión n en un punto p* , si se cumple que X tiene dimensión $\leq n$ en p y es

falso que X tiene dimensión $\leq n - 1$ en p . Un espacio X tiene dimensión n , denotado por $\dim(X) = n$, si se cumple que $\dim(X) \leq n$ y es falso que $\dim(X) \leq n - 1$.

Teorema. 4.27. [10, Teorema III 1, p.26] *Un subespacio de un espacio de dimensión $\leq n$ tiene dimensión $\leq n$*

Teorema. 4.28. [10, Teorema III 2, p. 30] *Un espacio que es la unión contable de subconjuntos cerrados de dimensión $\leq n$ tiene dimensión $\leq n$.*

Teorema. 4.29. [10, Teorema IV 3, p. 44] *Una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto de \mathbb{R}^n tenga dimensión n es que contenga un subconjunto que es abierto en \mathbb{R}^n .*

La siguiente proposición establece la dimensión de ciertos conjuntos que hemos estado estudiando.

Lema. 4.30. *Si G es una subgráfica de aristas de X , entonces $\dim(\overline{\Delta(G)}) = l + 2n$, donde, l es el número aristas simples de G , y n el número de aristas múltiples de G .*

Demostración. Sean m el número de aristas dobles de G y k el número de bucles de G . Por la Proposición 4.22 existe un encaje $h : \overline{\Delta(G)} \rightarrow [0, 1]^{l+2m} \times Q^k$ tal que $((0, 1)^{l+2m} \times Q_0^k) \subset h(\overline{\Delta(G)})$. Del teorema 4.29, se sigue que la dimensión de $h(\overline{\Delta(G)})$ es $l + 2(m + k)$. Así, $\dim(\overline{\Delta(G)}) = l + 2n$. \square

A continuación, presentamos un teorema que determina la dimensión del hiperespacio de conjuntos de no corte de una gráfica finita distinta de una curva cerrada simple.

Teorema. 4.31. *Si X es una gráfica finita distinta de una curva cerrada simple, entonces $\dim(NC(X)) = \max\{2, n\}$, donde $n = \max\{\dim(\overline{\Delta(G)}) : G \text{ es una subgráfica de aristas de } X\}$.*

Demostración. Del Lema 4.30, la Proposición 4.20 y los Teoremas 4.23 y 4.29, se sigue que $\dim(NC(X)) \leq \max\{2, n\}$. Si el $\max\{2, n\} = 2$, por el Corolario 4.21, se tiene que $\dim(NC(X)) = 2$. Supongamos que $2 < \max\{2, n\}$. Existe G subgráficas de aristas tal que $\dim(\overline{\Delta(G)}) = \max\{2, n\}$. Como consecuencia del Teorema 4.27, se tiene que, $\dim(\overline{\Delta(G)}) \leq \dim(NC(X))$. Así, $\dim(NC(X)) = \max\{2, n\}$. \square

El teorema que sigue establece una condición necesaria y suficiente para que el hiperespacio de conjuntos de no corte tenga dimensión 2.

Teorema. 4.32. *Para una gráfica finita X , las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (1) *El hiperespacio de conjuntos de no corte de X tiene dimensión 2.*
- (2) *La gráfica finita X es el arco o la curva cerrada simple.*

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Probaremos que si X tiene un punto de ramificación, entonces X tiene dimensión mayor que 2. Si r es un punto de ramificación de X , la gráfica de aristas, $\{r\}$, de X tiene al menos dos aristas adjuntas. Observe que si $\{r\}$ tiene exactamente dos aristas adjuntas, al menos una de ellas es un bucle de $\{r\}$ y si $\{r\}$ no tiene bucles, entonces tiene al menos tres aristas simples. Sean l el número de aristas simples de $\{r\}$ y n el número de aristas múltiples de $\{r\}$. Por el Lema 4.30, se tiene que $\dim(\overline{\Delta(r)}) = l + 2n$. Así, $3 \leq \dim(NC(X))$. Esto prueba que si $\dim(NC(X)) = 2$ entonces X no tiene puntos de ramificación. Lo que implica que, X es un arco o una curva cerrada simple.

(2) \Rightarrow (1) Se sigue de los lemas 4.15 y 4.3 y del teorema 4.31. \square

Corolario. 4.33. *Para un árbol X , las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (1) El hiperespacio de conjuntos de no corte de X tiene dimensión 2.
- (2) X es un arco.

A continuación, presentamos tres definiciones clave y un teorema conocido que serán relevantes para nuestro análisis.

Definición. 4.34. Decimos que una subgráfica de aristas, G , de X es una *subgráfica de aristas maximal* si no contiene curvas cerradas simples, contiene a todos los puntos de ramificación de X y no contiene puntos extremos de X .

Observación. 4.35. Si G es una subgráfica de aristas maximal de X , entonces G es un árbol.

Observación. 4.36. Si X es un arco o una curva cerrada simple, entonces X no tiene subgráficas de aristas maximales.

Definición. 4.37. Dada una gráfica finita X y un entero no negativo n , decimos que el *grado de conectividad de X* es n si se cumple que existen n aristas de X , e_1, \dots, e_n , tales que $X \setminus \cup\{\langle e_i \rangle : 1 \leq i \leq n\}$ es conexo y es falso que existen $n + 1$ aristas de X , a_1, \dots, a_{n+1} , tales que $X \setminus \cup\{\langle a_i \rangle : 1 \leq i \leq n + 1\}$ es conexo.

Teorema. 4.38. [3, Ejercicio 3, p. 90] *El grado de conectividad de una gráfica finita X es $1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$.*

Demostración. Sea X una gráfica finita. Para demostrar que el grado de conectividad de X es $1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$, procederemos mediante las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. Si X es un árbol, entonces $|\text{edge}(X)| = |V(X)| - 1$.

En efecto. Fijamos un punto extremo p de X . Sea $E = E(X) \setminus \{p\}$. Para cada q en E , sea e_q la arista que tiene a q y r_q el otro punto extremo de e_q . Definimos

$$X_1 = X \setminus \bigcup\{e_q \setminus \{r_q\} : q \in E\}.$$

Si X_1 es distinto de $\{p\}$, podemos definir $E_1 = E(X_1) \setminus \{p\}$. Procediendo con el conjunto X_1 como se hizo con X , definimos

$$X_2 = X_1 \setminus \bigcup \{e_q \setminus \{r_q\} : q \in E_1\}.$$

Si X_2 es distinto de $\{p\}$, podemos proceder de manera similar. Este proceso finaliza ya que el conjunto X_{n+1} se obtiene al retirar aristas del conjunto X_n . Por lo tanto, existe un número positivo k tal que $X_k = \{p\}$. Para pasar del conjunto X al conjunto X_k , hemos retirado una arista por cada vértice de X distinto de p . Por lo tanto $|\text{edge}(X)| = |V(X)| - 1$.

Afirmación 2. Si k es un entero positivo y existen k aristas de X , e_1, \dots, e_k , tales que $Y = X \setminus \cup \{\langle e_i \rangle : 1 \leq i \leq k\}$ es un árbol, entonces $k = 1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$.

En efecto. Para cada i en $\{1, \dots, k\}$, sean a_i y b_i los extremos de e_i y a'_i y b'_i elementos de $\langle e_i \rangle$ tales que $a_i a'_i$ y $b_i b'_i$ son disjuntos, donde $a_i a'_i$ es el arco que va de a_i a a'_i en e_i y $b_i b'_i$ es el arco que va de b_i a b'_i en e_i . Tomamos $T = Y \cup \{a_i a'_i \cup b_i b'_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$. Por construcción de T se tiene que T es un árbol, $V(T) = V(X) \cup \{\{a'_i, b'_i\} : i \in \{1, \dots, k\}\}$ y $|\text{edge}(X)| = |\text{edge}(T)| - k$. Por la Afirmación 1, $|\text{edge}(T)| = (|V(X)| + 2k) - 1$. Por lo tanto $|\text{edge}(X)| = |V(X)| + k - 1$, de donde $k = 1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$.

Afirmación 3. Si X no es un árbol, entonces existen $n = 1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$ aristas, e_1, \dots, e_n , tales que $X \setminus \cup \{\langle e_i \rangle : 1 \leq i \leq n\}$ es conexo.

En efecto. Como X no es un árbol, X contiene una curva cerrada simple S . Sea o un punto en $S \cap O(X)$ y e_1 la arista de X que tiene al punto o . El conjunto $X_1 = X \setminus \langle e_1 \rangle$ es conexo. Si X_1 no es un árbol, procediendo con el conjunto X_1 como se hizo con X , encontramos una arista e_2 de X tal que $X_2 = X_1 \setminus \langle e_2 \rangle$ es conexo. Si X_2 no es un árbol, podemos

proceder de manera similar. Este proceso finaliza porque el conjunto X_{m+1} se obtiene al retirar aristas del conjunto X_m . Por lo tanto, existe un número positivo k tal que X_k es un árbol. Por la Afirmación 2, $k = 1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$.

Afirmación 4. Si X no es un árbol y existen n aristas, e_1, \dots, e_n , tales que $Y = X \setminus \cup\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ es conexo, entonces n es menor o igual a $1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$.

En efecto. Si Y es un árbol, por la Afirmación 2, $n = 1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$. Supongamos que Y no es un árbol. Como Y no es un árbol, Y contiene una curva cerrada simple S . Sea o un punto en $S \cap O(X)$ y e_{n+1} la arista de X que tiene al punto o . El conjunto $Y_1 = Y \setminus \langle e_{n+1} \rangle$ es conexo. Si Y_1 no es un árbol, procediendo con el conjunto Y_1 como se hizo con Y , encontramos una arista e_{n+2} de X tal que $Y_2 = Y_1 \setminus \langle e_{n+2} \rangle$ es conexo. Si Y_2 no es un árbol, podemos proceder de manera similar. Este proceso finaliza ya que el conjunto Y_{m+1} se obtiene al retirar aristas del conjunto Y_m . Por lo tanto, existe un número positivo k tal que Y_k es un árbol. Por construcción de Y_k , se tiene que $Y_k = X \setminus \cup\{e_i : 1 \leq i \leq n + k\}$. Por la Afirmación 2, $n + k = 1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$. Por lo tanto, n es menor que $1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$.

Si X es un árbol, para cualquier punto o en $O(X)$, $X \setminus \{o\}$ no es conexo. Por lo tanto, el grado de conectividad de X es 0. Por la Afirmación 1, $0 = 1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$. Si X no es un árbol, por la Afirmación 3, existen $n = 1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$ aristas, e_1, \dots, e_n , tales que $X \setminus \cup\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ es conexo. Por la Afirmación 4, no existen $n + 1$ aristas de X , a_1, \dots, a_{n+1} , tales que $X \setminus \cup\{a_i : 1 \leq i \leq n + 1\}$ es conexo. Por lo tanto el grado de conectividad de X es $1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$. \square

Observación. 4.39. Una gráfica finita es un árbol si y solo si su grado de conectividad es 0.

Observación. 4.40. Si X es un árbol, entonces $|V(X)| = |\text{edge}(X)| + 1$.

Definición. 4.41. Dada una subgráfica de aristas, G , de X se define $N(G) = k + 2l$, donde, k es el número de aristas simples de G y l es el número de aristas múltiples de G .

Para calcular la dimensión del hiperespacio de conjuntos de no corte, introducimos dos lemas clave.

Lema. 4.42. Si G es una subgráfica de aristas maximal de X , entonces $N(G)$ es igual a $2d + |E(X)|$, donde d es el grado de conectividad de X .

Demostración. Las aristas simples de G coinciden con las aristas de X que contienen un punto extremo de X . Observe que, $|\text{edge}(G)| = |R(X)| - 1$ y $|\text{edge}(X)| = |\text{edge}(G)| + |E(X)| + l$, donde l es el número de aristas múltiples de G . Así, $d = 1 - |V(X)| + |\text{edge}(G)| + |E(X)| + l = 1 - (|E(X)| + |R(X)|) + |R(X)| - 1 + |E(X)| + l = l$. Por lo tanto, $N(G) = 2d + |E(X)|$. \square

Lema. 4.43. Si d es el grado de conectividad de X y G una subgráfica de aristas de X , entonces $N(G)$ es menor o igual que $2d + |E(X)|$.

Demostración. Observe que el número de aristas múltiples de G es menor o igual que d . Denotamos por \mathcal{A}_1 a la colección de aristas simples de G que no contienen puntos extremos y por \mathcal{A}_2 al conjunto $\text{adj}(G) \setminus \mathcal{A}_1$. Si \mathcal{A}_1 es vacío, entonces el número de aristas simples de G es menor o igual que $|E(X)|$. Esto implica que $N(G)$ es menor o igual que $2d + |E(X)|$. Supongamos que \mathcal{A}_1 es no vacío. Denotamos por F al conjunto $G \cup \cup\{\langle e \rangle : e \in \mathcal{A}_1\} \cup \cup\{e : e \in \mathcal{A}_2\}$. Denotamos por \mathcal{C}_1 a la colección formada por las componentes de $X \setminus F$ tales que su cerradura interseca a F en un único punto. Denotamos por \mathcal{C}_2 a la colección formada por las componentes de $X \setminus F$ tales que su cerradura interseca a F en al menos dos puntos. Para

cada componente, K , de $X \setminus F$, existe un árbol formado por aristas de X , T_k , tal que $(R(X) \cap \bar{K}) \subset T_k \subset (\bar{K} \setminus E(X))$. Note que $T_K \cap F$ coincide con $K \cap F$. Para cada componente, K , de $X \setminus F$, sea e_K una arista en \mathcal{A}_1 que interseca a T_K . Por otro lado, existe un árbol formado por aristas de X , T , talque $(R(X) \cap G) \subset T \subset (G \setminus E(X))$. Observe que T interseca a cada arista adjunta de G . Sea $C = T \cup \bigcup \{T_K \cup e_k : K \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2\}$. Note que C es una subgráfica de aristas maximal de X . Por el Lema 4.42, se tiene que $N(C) = 2d + |E(X)|$. Por construcción de C , se tiene que cada arista simple de G que pertenezca al conjunto \mathcal{A}_2 es una arista simple de C , y cada arista múltiple de G que pertenezca al conjunto \mathcal{A}_2 es una arista múltiple de C . Cada arista simple de G que pertenece al conjunto $\mathcal{A}_1 \setminus \bigcup \{e_K : K \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2\}$ es una arista doble de C . Cada componente de K de $X \setminus F$ que pertenece al conjunto \mathcal{C}_1 contiene al menos dos puntos extremos de X o contiene una curva cerrada simple, pues $X \setminus K_i$ es conexo y ningún subconjunto conexo de X contiene todos los puntos de no corte. Esto implica que K contiene al menos dos aristas simples de C o al menos una arista doble de C . Se sigue que, $N(C) \geq N(G) - |\mathcal{A}_1| + 2(|\mathcal{A}_1| - |\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2|) + 2|\mathcal{C}_1| = N(G) + |\mathcal{A}_1| - 2|\mathcal{C}_2|$. Observe que, $0 \leq |\mathcal{C}_2| \leq \frac{1}{2}|\mathcal{A}_1|$. Por lo tanto, $N(C) \geq N(G)$. Lo que implica que $2d + |E(X)| \geq N(G)$. \square

Como resultado del teorema 4.31 y del lema 4.42, obtenemos el siguiente teorema que establece la dimensión del hiperespacio de conjuntos de no corte.

Teorema. 4.44. *Si X es una gráfica finita y d el grado de conectividad de X , entonces el hiperespacio de conjuntos de no corte tiene dimensión $2d + |E(X)|$.*

Del teorema anterior se deduce el siguiente corolario que proporciona una condición necesaria y suficiente para que el hiperespacio de conjuntos de no corte de un árbol tenga dimensión 3.

Corolario. 4.45. *Para un árbol X , las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (1) *El hiperespacio de conjuntos de no corte de X tiene dimensión 3.*
- (2) *X es un triodo simple.*

A continuación, presentamos un teorema establecido por R. Duda, el cual implica directamente el Teorema 4.47.

Teorema. 4.46. *[6, 7.4, p. 278] Si X es una gráfica finita, entonces el hiperespacio de subcontinuos de X tiene dimensión $2d + |E(X)|$, donde, d es el grado de conectividad de X .*

Teorema. 4.47. *Si X es una gráfica finita, entonces el hiperespacio de conjuntos de no corte y el hiperespacio de subcontinuos de X tienen la misma dimensión.*

Para concluir esta sección, presentamos un teorema que proporciona una fórmula para calcular la dimensión del hiperespacio de conjuntos de no corte en función del orden de los puntos de ramificación.

Teorema. 4.48. *Si X es una gráfica finita entonces la dimensión del hiperespacio de conjuntos de no corte es $2 + \sum_{r \in R(X)} (\text{ord}(r, X) - 2)$.*

Demostración. Sea d el grado de conectividad de X . Por el Teorema 4.44 se tiene que $\dim(NC(X)) = 2d + |E(X)|$. Del Teorema 4.38 se sigue que $d = 1 - |V(X)| + |\text{edge}(X)|$. se sigue que, $d = 1 - |R(X)| - |E(X)| + \frac{1}{2}|E(X)| + \frac{1}{2} \sum_{r \in R(X)} \text{ord}(r, X) = 1 - \frac{1}{2}|E(X)| + \frac{1}{2} \sum_{r \in R(X)} (\text{ord}(r, X) - 2)$. De donde, $\dim(NC(X)) = 2 + \sum_{r \in R(X)} (\text{ord}(r, X) - 2)$. \square

4.5. Árboles

En esta sección, exploramos el hiperespacio de conjuntos de no corte en árboles, demostrando que, para un árbol X ,

el hiperespacio de conjuntos que no cortan está contenido en $C_n(X)$, donde, n es el número de puntos extremos de X . Además, contamos el número de componentes y proporcionamos caracterizaciones del arco y del triodo simple. Comenzamos estableciendo resultados preliminares que prueben propiedades importantes de los conjuntos de no corte en árboles.

Proposición. 4.49. *Si F es un conjunto de no corte de X y K es una componente de F , entonces K es un conjunto de no corte de X .*

Demostración. Supongamos que $X \setminus K$ no es conexo. Existen subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos, U y V , de X tales que $X \setminus K = U \cup V$. Se sigue que U está contenido en F o V está contenido en F . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U está contenido en F . De la proposición 1.21, se sigue que $K \cup U$ es conexo. Lo cual es una contradicción. Lo que implica que, K es un conjunto de no corte de X . \square

Lema. 4.50. *Si F es un conjunto de no corte de un árbol X y K es una componente de F , entonces la frontera de K es un conjunto unipuntual.*

Demostración. Supongamos que existen puntos distintos, p y q , en la frontera de K . Existe un arco, α , de p a q en K . Observe que α interseca al interior de K . Por otro lado, existe un arco, β , de p a q en $\overline{X \setminus F}$. Se sigue que α es distinto de β . Esto es una contradicción. Así, la frontera de K es un conjunto unipuntual. \square

Lema. 4.51. *Si F es un conjunto de no corte de un árbol X , entonces F contiene al menos un punto extremo de X .*

Demostración. El complemento de F es un conjunto conexo. Como ningún subconjunto conexo propio de X contiene todos los puntos de no corte, se sigue que F contiene al menos un punto de no corte. Así, F contiene al menos un punto extremo de X . \square

Corolario. 4.52. *Si F es un conjunto de no corte de un árbol X , entonces cada componente de F contiene al menos un punto extremo de X .*

Presentamos ahora el teorema que establece la contención del hiperespacio de conjuntos de no corte en $C_n(X)$, el cual se sigue directamente del Corolario 4.52.

Teorema. 4.53. *Si X es un árbol entonces $NC(X)$ está contenido en $C_n(X)$, donde n es el número de puntos extremos de X .*

Componentes del hiperespacio de no corte en árboles

Nuestro objetivo ahora es determinar el número de componentes del hiperespacio de conjuntos de no corte en árboles. Comenzamos estableciendo una proposición que garantiza la existencia de ciertos arcos clave.

Proposición. 4.54. *Si F es un conjunto de no corte de un árbol X , entonces existe un arco de F a $F \cap E(X)$ en $NC(X)$.*

Demostración. Se presentan dos casos:

Caso 1: F es distinto de X . Hay dos subcasos a considerar:

Caso 1.1: La frontera de F está contenida en $V(X)$. Si F está contenido en $E(X)$, se define $\alpha : [0, 1] \rightarrow NC(X)$ como $\alpha(t) = F$ para todo t en $[0, 1]$. Supongamos que F no está contenido en $E(X)$. Sea $\mathcal{A} = \{e \in \text{edge}(X) : e \cap \text{fr}(F) \neq \emptyset \text{ y } e \subset F\}$. Para cada e en \mathcal{A} sean p_e el extremo de e que pertenece al interior F y q_e el extremo de e que es un elemento de la frontera de F . Definimos el conjunto F' como $F' = F \setminus \bigcup \{ \langle e \rangle \cup \{q_e\} : e \in \mathcal{A} \}$. Para cada e en \mathcal{A} existe un arco ordenado, α_e , de $\{p_e\}$ a e en $C(e)$. Observe que $e \setminus \alpha_e(t)$ es vacío si t es igual a 1 y es un conjunto conexo que contiene a q_e si t es distinto de 1. Se define $\alpha : [0, 1] \rightarrow NC(X)$ como $\alpha(t) = F' \cup \bigcup \{ \alpha_e(1-t) : e \in \mathcal{A} \}$. Note que, para cada t

en $[0, 1]$, $X \setminus \alpha(t) = (X \setminus F) \cup \bigcup \{e \setminus \alpha_e(1-t) : e \in \mathcal{A}\}$. Se sigue que, $\alpha(t)$ es conjunto de no corte de X para todo t en $[0, 1]$. Así, α es un arco de F a F' en $NC(X)$. Sea $F_1 = F'$. Si F_1 no está contenido en $E(X)$, podemos definir $\mathcal{A}_1 = \{e \in \text{edge}(X) : e \cap \text{fr}(F_1) \neq \emptyset \text{ y } e \subset F_1\}$. Procediendo con el conjunto F_1 como se hizo con el conjunto F , podemos encontrar un arco α_1 de F_1 a $F'_1 = F_1 \setminus \bigcup \{\langle e \rangle \cup \{q_e\} : e \in \mathcal{A}_1\}$ en $NC(X)$. Podemos definir $F_2 = F'_1$, y proceder de manera similar. Este proceso finaliza ya que el conjunto F_{n+1} se obtiene al retirar aristas del conjunto F_n . Esto finaliza la demostración del caso 1.1.

Caso 1.2: La frontera de F no está contenida en $V(X)$. Sea $O = \text{fr}(F) \cap O(X)$. Para cada punto, x , en O sean e_x la arista que contiene a x y p_x el extremo de e_x tal que $p_x x$ está contenido en F , donde, $p_x x$ denota el arco que va de p_x a x en e_x . Definimos el conjunto F' como $F' = F \setminus \bigcup \{p_x x \setminus \{p_x\} : x \in O\}$. Para cada x en O existe un arco ordenado, α_x , de $\{p_x\}$ a $p_x x$ en $C(e_x)$. Observe que $p_x x \setminus \alpha_x(t)$ es vacío si t es igual a 1 y es un conjunto conexo que contiene a x si t es distinto de 1. Se define $\alpha : [0, 1] \rightarrow NC(X)$ como $\alpha(t) = F' \cup \bigcup \{\alpha_x(1-t) : x \in O\}$. Note que, para cada t en $[0, 1]$, $X \setminus \alpha(t) = (X \setminus F) \cup \bigcup \{e_x \setminus \alpha_x(1-t) : x \in O\}$. Se sigue que, $\alpha(t)$ es conjunto de no corte de X para todo t en $[0, 1]$. Así, α es un arco de F a F' en $NC(X)$. Se tiene que $\text{fr}(F')$ está contenida en $V(X)$. Aplicando el caso 1.1 se concluye la demostración del caso 1.2.

Caso 2: F es igual a X . Sean p un punto ordinario de X , e la arista que contiene a p , q un punto extremo de e y qp el arco que va de q a p en e . Definimos el conjunto F' como $F' = (F \setminus qp) \cup \{q, p\}$. Existe un arco ordenado, α_e , de $\{q\}$ a qp en $C(e)$. Observe que, para cada t en $[0, 1]$, $qp \setminus \alpha_e(t)$ es un conjunto conexo. Se define $\alpha : [0, 1] \rightarrow NC(X)$ como $\alpha(t) = F' \cup \alpha_e(1-t)$. Note que, para cada t en $[0, 1]$, $X \setminus \alpha(t) = qp \setminus \alpha_e(1-t)$. Se sigue que, $\alpha(t)$ es conjunto de no corte de X

para todo t en $[0, 1]$. Así, α es un arco de X a F' en $NC(X)$. Note que $\text{fr}(F') = \{q, p\}$. Aplicando el caso 1.2 se concluye la demostración del caso 2. \square

A continuación, presentamos dos lemas que prueban que determinados conjuntos son componentes del hiperespacio de conjuntos de no corte.

Lema. 4.55. *Si X es un árbol y A es un subconjunto no vacío de $E(X)$ con a lo más $|E(X)| - 2$ elementos, entonces el conjunto $\{F \in NC(X) : F \cap E(X) = A\}$ es una componente de $NC(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{F \in NC(X) : F \cap E(X) = A\}$. Sean a un elemento de $E(X) \setminus A$ y $B = E(X) \setminus (A \cup \{a\})$. Para cada x en B , existe un arco, α_x , de a a x en X . Sea $C = \bigcup \{\alpha_x : x \in B\}$. Se define el conjunto U como $U = X \setminus C$.

Afirmación 1. Si F es un elemento de \mathcal{A} , entonces F está contenido en U .

En efecto. Supongamos que F interseca a C . Existe un punto x en B tal que F interseca a α_x . Se sigue que F contiene a a o F contiene a x . Por lo tanto, F no pertenece a \mathcal{A} . Lo cual es una contradicción. Esto prueba la afirmación 1.

Afirmación 2. \mathcal{A} es un subconjunto cerrado de $NC(X)$.

En efecto. Sea F un elemento de $\overline{\mathcal{A}}$. Existe una sucesión, $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$, de elementos en \mathcal{A} convergiendo a F . Como, $F_i \cap E(X) = A$, se sigue que A está contenido en F . Por la afirmación 1, se tiene que F está contenido en \overline{U} . Lo que implica que $F \cap E(X)$ coincide con A . Así, F es un elemento de \mathcal{A} .

Afirmación 3. \mathcal{A} es un subconjunto abierto de $NC(X)$.

En efecto. Para cada $x \in A$ sea e_x la arista que lo contiene. Se define el conjunto V como $V = \{F \in NC(X) : F \cap \text{int}(e_x) \neq \emptyset \text{ para cada } x \in A \text{ y } F \subset U\}$. El conjunto V es un abierto de $NC(X)$, Proposición 1.24. Mostraremos que \mathcal{A} coincide con V . De la Afirmación 1 se sigue que \mathcal{A} está contenido en V . Sea F un elemento de V . Para cada x en A , se tiene F interseca a $\text{int}(e_x)$ y F no contiene al punto a , por lo tanto, F contiene a x . Así, F es un elemento de \mathcal{A} . En consecuencia, \mathcal{A} coincide con V . Esto prueba la Afirmación 3.

Finalmente, de la Proposición 4.54, se tiene que \mathcal{A} es conexo. Por las afirmaciones 2 y 3, la proposición está probada. \square

Lema. 4.56. *Si X es un árbol, entonces el conjunto $\{F \in NC(X) : |F \cap E(X)| \geq |E(X)| - 1\}$ es una componente de $NC(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{F \in NC(X) : |F \cap E(X)| \geq |E(X)| - 1\}$. Observe que $NC(X) \setminus \mathcal{A}$ coincide con el conjunto $\{F \in NC(X) : |F \cap E(X)| \leq |E(X)| - 2\}$. De las Afirmaciones 2 y 3 en la demostración del Lema 4.55 se sigue que el conjunto $NC(X) \setminus \mathcal{A}$ es un abierto y cerrado de $NC(X)$. En consecuencia, \mathcal{A} es un subconjunto abierto y cerrado de $NC(X)$. Para ver que \mathcal{A} es conexo, se mostrará que si F es un elemento de \mathcal{A} , entonces existe un arco de F a X en \mathcal{A} . De la Proposición 4.54, se sigue que si $F \cap E(X)$ coincide con $E(X)$, existe un arco de F a X en \mathcal{A} . Supongamos que $F \cap E(X)$ tiene $|E(X)| - 1$ elementos. Sean p el único elemento de $E(X) \setminus F$, e la arista que tiene a p y q el otro extremo de e . Se define el conjunto F' como $F' = (X \setminus e) \cup \{q\}$. Por la Proposición 4.54, existe un arco de F a F' en \mathcal{A} . Para concluir la demostración se dará un arco de F' a X en \mathcal{A} . Existe un arco ordenado, α_p , de $\{q\}$ a e en $C(e)$. Note que $e \setminus \alpha_p(t)$ es vacío si t es igual a 1 y es un conjunto conexo que contiene a p si t es distinto de 1. Se define $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}$ como $\alpha(t) = F' \cup \alpha_p(t)$. Note que, para cada t en $[0, 1]$, $X \setminus \alpha(t) = e \setminus \alpha_p(t)$. Así, α es un arco de F' a X en \mathcal{A} . Esto concluye la demostración del lema. \square

La proposición que sigue muestra que el hiperespacio de conjuntos de no corte es la unión de los conjuntos descritos en los lemas precedentes.

Proposición. 4.57. *Si X es un árbol, entonces $NC(X)$ puede escribirse como la unión $NC(X) = \bigcup\{F \in NC(X) : F \cap E(X) = A\}$, donde A corre sobre todos los subconjuntos no vacíos de $E(X)$.*

Demostración. Sea F un conjunto de no corte de X . Por el Lema 4.51, se tiene que $F \cap E(X)$ es distinto del vacío. Sea $A = F \cap E(X)$. Se tiene que, F es un elemento de $\{F \in NC(X) : F \cap E(X) = A\}$. Por lo tanto, $NC(X) = \bigcup\{F \in NC(X) : F \cap E(X) = A\}$, donde A corre sobre todos los subconjuntos no vacíos de $E(X)$. \square

El teorema que sigue establece el número exacto de componentes que tiene el hiperespacio de conjuntos de no corte.

Teorema. 4.58. *Si X es un árbol, entonces $NC(X)$ tiene $2^n - 1 - n$ componentes, donde n es el número de puntos extremos de X .*

Demostración. Por el Lema 4.55, se tiene que si A es un subconjunto no vacío de $E(X)$ con a lo más $n - 2$ elementos, entonces $\{F \in NC(X) : F \cap E(X) = A\}$ es una componente de $NC(X)$. Hay $2^n - n - 2$ subconjuntos no vacíos de $E(X)$ con a lo más $n - 2$ elementos. Por el Lema 4.56, el conjunto $\{F \in NC(X) : |F \cap E(X)| \geq |E(X)| - 1\}$ es una componente de $NC(X)$. Por la Proposición 4.57 se tiene que $NC(X) = \bigcup\{F \in NC(X) : F \cap E(X) = A\}$, donde A corre sobre todos los subconjuntos no vacíos de $E(X)$. Así, $NC(X)$ tiene $2^n - n - 1$ componentes. \square

Los dos teoremas siguientes son consecuencia directa del Teorema 4.58 y proporcionan caracterizaciones importantes del arco y del triodo simple en términos del número de componentes del hiperespacio de conjuntos de no corte.

Teorema. 4.59. *Para un árbol X , las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (1) *El hiperespacio de conjuntos de no corte de X es conexo.*
- (2) *El árbol X es un arco.*

Teorema. 4.60. *Para un árbol X , las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (1) *El hiperespacio de conjuntos de no corte de X tiene exactamente 4 componentes.*
- (2) *El árbol X es un triodo simple.*

Conclusiones

En esta tesis, se estudian los hiperespacios de conjuntos que no desconectan un continuo, específicamente los hiperespacios de: conjuntos de conexidad colocal, conjuntos de no corte débil, conjuntos que no bloquean a los unipuntuales, conjuntos que no bloquean a algún punto, conjuntos orilla y conjuntos de no corte.

Se destacan los siguientes resultados:

- (1) La determinación de condiciones necesarias y suficientes para que el hiperespacio de conjuntos de conexidad colocal coincida con el hiperespacio de conjuntos de no corte débil (Corolario 2.20).
- (2) El establecimiento de condiciones suficientes y necesarias para que el hiperespacio de conjuntos de no corte débil coincida con el hiperespacio de conjuntos que no bloquean a los unipuntuales (Corolario 2.28).
- (3) La determinación de la dimensión del hiperespacio de conjuntos de no corte de una gráfica finita (Teorema 4.44).
- (4) El conteo del número de componentes del hiperespacio de conjuntos de no corte de un árbol (Teorema 4.58).
- (5) La presentación de caracterizaciones de la conexidad local (Teorema 3.5).

- (6) La prueba de que los únicos continuos localmente conexos para los cuales el hiperespacio de conjuntos de no corte es compacto son el arco y la curva cerrada simple (Teorema 3.22).
- (7) La caracterización de curva cerrada simple como el único continuo para el cual sus hiperespacios de conjuntos que no desconectan coinciden con su hiperespacio de subcontinuos (Teorema 3.56).

Estos resultados aportan nuevas perspectivas sobre la estructura de los hiperespacios de conjuntos que no desconectan y abren posibilidades para futuras investigaciones en topología y teoría de continuos. Como parte de la difusión de este trabajo, se ha enviado un manuscrito con algunos de estos resultados ([9]) a la revista *Integración, temas de matemáticas*.

Bibliografía

- [1] I.-G. Bautista-Callejas, M. Chacón-Tirado y R. Escobedo. Non-weak cut, shore and non-cut points in Whitney levels. *Topology Appl.* 283 (2020), 107335.
- [2] R. Bing. Some characterizations of arcs and simple closed curves. *Amer. J. Math.* 70.3 (1948), 497-506.
- [3] J. S. Birman y J. Eisner. *Seifert and Threlfall, A Textbook of Topology*. Vol. 89. Academic Press, 1980.
- [4] J. Bobok, P. Pyrih y B. Vejnar. Non-cut, shore and non-block points in continua. *Glas. Mat.* 51.1 (2016), 237-253.
- [5] J. Camargo, D. Maya y P. Pellicer-Covarrubias. Noncut subsets of the hyperspace of subcontinua. *Topology Appl.* 305 (2022), 107867.
- [6] R. Duda. On the hyperspace of subcontinua of a finite graph I. *Fundam. Math.* 62.3 (1968), 265-286.
- [7] R. Engelking. General topology (Revised and complete edition), Sigma Ser. *Pure Math* 6 (1989).
- [8] R. Escobedo, C. Estrada-Obregón y J. Sánchez-Martínez. On hyperspaces of non-cut sets of continua. *Topology Appl.* 217 (2017), 97-106.
- [9] R. Escobedo, E. García-Muñoz y J. E. Vega. Characterizing local connectedness by non-cut sets in continua. *Revista Integración* (2025). (Enviado).

- [10] W. Hurewicz y H. Wallman. *Dimension theory*. Vol. 4. Princeton University Press, 2015.
- [11] A. Illanes y P. Krupski. Blockers in hyperspaces. *Topology Appl.* 158.5 (2011), 653-659.
- [12] A. Illanes Mejía. *Hiperespacios de continuos*. Vol. 28. Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, 2004.
- [13] F. B. Jones. Concerning non-aposyndetic continua. *Amer. J. Math.* 70.2 (1948), 403-413.
- [14] J. Krasinfiewicz y P. Minc. Continua and their open subsets with connected complements. *Fund. Math.* 102 (1979), 129-136.
- [15] S. Macías. *Topics on continua*. Vol. 275. Springer, 2005.
- [16] L. Mohler. A characterization of local connectedness for generalized continua. *Colloq. Math.* 21 (1970), 81-85.
- [17] R. L. Moore. Concerning the cut-points of continuous curves and of other closed and connected point-sets. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 9.4 (1923), 101-106.
- [18] S. B. Nadler Jr. *Continuum Theory: An introduction*. Vol. 158. Marcel Dekker, 1992.
- [19] S. Willard. *General Topology*. Courier Corporation, 2012.