



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análisis de la reducibilidad en teorías topológicas

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Juan Manuel Badillo Serrano

Asesorado por

Dra. Iraís Rubalcava García

Puebla Pue.
Junio de 2022



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Análisis de la reducibilidad en teorías topológicas

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Juan Manuel Badillo Serrano

Asesorado por

Dra. Iraís Rubalcava García

Puebla Pue.
Junio de 2022

Título: Análisis de la reducibilidad en teorías topológicas
Estudiante: JUAN MANUEL BADILLO SERRANO

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Dr. Alberto Escalante Hernández
Secretario

Dr. Héctor Novales Sánchez
Vocal

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Vocal

Dra. Iraís Rubalcava García
Asesora

Índice general

Agradecimientos	IX
Resumen	XI
Introducción	XII
1. Algoritmo de Dirac-Bergmann	1
1.1. Sistemas clásicos singulares	1
1.2. Restricciones primarias	3
1.3. Condiciones de regularidad	4
1.4. Ecuaciones débiles y fuertes	5
1.5. Hamiltoniana canónica y primaria	6
1.6. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias	7
1.7. Condiciones sobre los multiplicadores y la hamiltoniana total	11
1.8. Restricciones de primera y segunda clase	12
1.9. Transformaciones de norma	14
1.10. Reducibilidad	15
1.11. Grados de libertad	16
1.12. La hamiltoniana y la acción extendidas	17
1.13. Paréntesis de Dirac	18
1.14. Observables	19
2. Sistemas continuos regulares	20
2.1. Formulación lagrangiana	22
2.2. Formulación hamiltoniana	23
2.3. Paréntesis de Poisson	24
3. Pontryagin abeliano	25
3.1. La acción	25
3.2. Matriz hessiana	27
3.3. Restricciones primarias	27
3.4. Condiciones de regularidad	28
3.5. Hamiltoniana canónica y primaria	28
3.6. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias	30
3.7. Restricciones de primera y segunda clase	31
3.8. Grados de libertad	32
3.9. Hamiltoniana y acción extendida	33
3.10. Transformaciones de norma	34
4. Pontryagin: Reducible vs Irreducible	36
4.1. Comparación Pontryagin	36

5. Teorías BF abelianas	44
5.1. Teoría BF	44
5.1.1. La acción	44
5.1.2. Matriz hessiana	46
5.1.3. Restricciones primarias	46
5.1.4. Condiciones de regularidad	47
5.1.5. Hamiltoniana canónica y primaria	47
5.1.6. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias	48
5.1.7. Restricciones de primera y segunda clase	52
5.2. Observaciones	55
5.2.1. Conjetura	55
5.2.2. Elección de las variables canónicas convenientes	56
5.3. Teoría BF particular	58
5.3.1. La acción	58
5.3.2. Matriz hessiana	59
5.3.3. Restricciones primarias	60
5.3.4. Condiciones de regularidad	60
5.3.5. Hamiltoniana canónica y primaria	61
5.3.6. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias	61
5.3.7. Restricciones de primera y segunda clase	63
5.3.8. Grados de libertad	65
5.3.9. Hamiltoniana y acción extendida	65
5.3.10. Transformaciones de norma	66
5.4. Conclusiones	68
A. Elementos matemáticos	71
A.1. Cálculo de variaciones	71
A.1.1. Propiedades	71
A.2. Descomposición 3+1	72
A.3. Delta de Dirac	72
A.3.1. Propiedades	72
Bibliografía	74

Índice de tablas

4.1. Hamiltoniana canónica	38
4.2. Restricciones secundarias	38
4.3. Restricciones de primera y segunda clase	39
4.4. Grados de libertad y reducibilidad	39
4.5. Hamiltoniana extendida	40
4.6. Ecuaciones de movimiento	40
4.7. Generador de transformaciones de norma	41
4.8. Transformaciones de norma	41
4.9. Invarianza bajo difeomorfismos	42
4.10. Comparación entre los resultados principales de $\mathcal{Po}_{(R)}$ y $\mathcal{Po}_{(I)}$	43
5.1. Pontryagin y BF: Formas diferentes de representar la hamiltoniana canónica	57

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia. A mi mamá Nely, por todo el apoyo que me ha brindado a lo largo de estos años, por esas palabras de ánimos que me hicieron superar la angustia o el temor y enfocarme en superar mis objetivos, por la paciencia y comprensión que me tuvo en mis momentos de más estrés, por todo el amor y compañía que me brindaste cuando más triste y solo me sentía, pero sobre todo, porque debido a ella pude tener y terminar mi carrera profesional. A mi papá Jashiel, porque a pesar de todo, sus palabras siempre llegaron en los momentos que más las necesitaba y porque siempre fue una de mis motivaciones para superar cada adversidad que se me presentaba. Por todo esto y muchísimas cosas más, gracias a ambos.

A mis hermanos L. Jashiel y Amir F., por todos esos momentos de diversión mientras veíamos películas, que me ayudaban a relajarme y aclarar mis ideas, por la paciencia que me tuvieron durante cada una de mis frustraciones, las cuales no fueron pocas y por la confianza que me han brindado, ya que con ustedes siempre pude expresar cualquier pensamiento sin miedo alguno.

A a mis tíos, tías, primos y primas, por esas reuniones familiares tan divertidas que me hacían olvidar por unos momentos el trabajo. En particular, quiero agradecer a mi prima Alejandra, por cada uno de sus consejos personales y profesionales; y a mi primo Jonathan, por todo el tiempo que siempre me brindó, a pesar de que también tenía trabajo qué hacer, por cada una de las pláticas serias que teníamos, las cuales eran como un consejo de vida y por compartir conmigo su pasión por la investigación, al igual que otras aficiones.

A todos mis amigos y amigas. A Fernando, Irving y Gustavo, por esas breves conversaciones que siempre me han hecho sentir en confianza. A Aylin, por compartir conmigo gran parte de esta etapa educativa y profesional, por escuchar cada una de mis angustias, las cuales a veces compartíamos, y por darme esos ánimos para poder superar algunos complejos que a veces me detenían al realizar mis labores estudiantiles. A Guri, por sus mensajes que siempre llegaron cuando más necesitaba desahogarme y por ser directa al expresarme los errores que cometía. A Jenifer, Adriana, Mildred, Hugo y Cazú, por formar parte de mi vida universitaria, por escuchar varias de mis angustias respecto a las clases o a qué área de la física me podría dedicar, por los momentos de diversión que me ayudaron a despejarme y relajarme cuando lo necesitaba, y por compartir conmigo su gusto por la física.

A Margarita, por su amistad y confianza incondicional que me brindó desde que nos conocimos, por apoyarme en cada una de mis decisiones, por levantarme los ánimos cuando me sentía decepcionado y afligido, por escuchar cada una de mis angustias respecto a la carrera profesional y por todas esas palabras que me hicieron superarlas, por todas esas divertidas y relajantes salidas a comer, a la laguna, a la biblioteca central, a la fondita verde, a cualquier lugar en realidad. Pero sobre todo, gracias por ser mi motivación principal para llegar a ser un muy buen físico e investigador.

A cada uno de los profesores que me impartieron clases durante mi educación profesional, ya que gracias a ellos pude desarrollar las habilidades que fueron empleadas a lo largo de este trabajo y que seguiré empleando a lo largo de mi vida profesional como físico.

A mi asesora, la Dra. Iraís Rubalcava, por darme la oportunidad de trabajar con ella, por toda la paciencia y comprensión que me tuvo a lo largo de este trabajo, por orientarme en cada decisión profesional y sobre todo, por fomentar en mí la pasión por la física y la investigación.

Finalmente, agradezco a mis sinodales, por su disponibilidad para participar como parte del jurado y por cada uno de sus comentarios u observaciones que me hicieron esforzarme más en este trabajo y que me servirán en mi futura carrera profesional.

Resumen

En este trabajo de tesis se emplea el Algoritmo de Dirac-Bergmann para analizar la presencia de reducibilidad en tres teorías topológicas abelianas: Pontryagin, BF y una teoría tipo BF; donde esta característica (la reducibilidad) significa, en general, que de todas las restricciones que llegue a presentar un sistema singular, algunas no van a ser independientes. Para la teoría de Pontryagin, se muestra que eligiendo las variables canónicas adecuadas, por medio de la definición de los momentos, para construir la hamiltoniana canónica, la teoría deja de presentar reducibilidad, a diferencia de lo que ocurre en la literatura [15] donde sí hay. Por otro lado, para la teoría BF, se muestra que a pesar de que se elija un conjunto de variables canónicas diferentes a las empleadas en la literatura [16] (donde hay reducibilidad) para definir la hamiltoniana canónica, por medio de la definición de los momentos, la teoría va a seguir presentando reducibilidad. Finalmente, a partir de lo que sucede en las dos teorías anteriores, se propone una conjetura para teorías topológicas que va a permitir identificar cuándo es posible eliminar la reducibilidad mediante una elección conveniente de variables canónicas de la definición de los momentos. Como complemento, se presenta un ejemplo, donde se analiza una teoría topológica tipo BF particular, para mostrar que la conjetura se cumple en esta teoría.

Introducción

Desde finales del siglo XVII, los conceptos y desarrollos de la mecánica clásica estuvieron fundamentados por las leyes de Newton [1, págs. 200-218], no fue hasta 1788 que la mecánica newtoniana se reformuló en lo que se conoce como mecánica (o formulación) lagrangiana, propuesta por Joseph-Louis de Lagrange [1, págs. 332-349], donde por medio de la función lagrangiana (que puede definirse como $T-V$, llamada lagrangiana natural), se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange, mediante las cuales es posible determinar la dinámica de un sistema físico, aunque para ello es necesario que las variables dinámicas, coordenadas y velocidades, que van a describir al sistema sean independientes. Más adelante, siguiendo el enfoque de la mecánica lagrangiana, en 1834 fue presentada la mecánica (o formulación) hamiltoniana por William Rowan Hamilton [1, págs. 390-401], donde las variables dinámicas ahora estaban dadas por las coordenadas y momentos canónicos, definiendo una nueva función para el estudio de la dinámica de los sistemas, la hamiltoniana. En principio, las funciones lagrangiana y hamiltoniana se relacionan por medio de una transformada de Legendre, sin embargo, para que se pueda realizar la transición entre ambas formulaciones, se requiere que las velocidades se puedan expresar en términos de las coordenadas y los momentos, lo cual se hace por medio de la definición de los momentos canónicos. Cabe notar que no todos los sistemas físicos cumplen con esta característica y se dice entonces que son singulares, lo cual va a indicar que la teoría estudiada, en la formulación hamiltoniana, presenta restricciones.

Una de las principales razones para fijarse en los sistemas singulares es que las teorías que corresponden a las 4 fuerzas fundamentales de la naturaleza son de este tipo. Aún así, no fue hasta mediados del siglo XX cuando se presentaron los primeros estudios exhaustivos de los sistemas singulares, [2, 3]. Por una parte, durante los años 50's Peter G. Bergmann y colaboradores determinaron la conexión que existe entre restricciones y propiedades de invarianza que presentan estas teorías, [4, 5]. Más adelante, en 1964 Paul Dirac presentó un formalismo para poder analizar los sistemas singulares (con número finito de grados de libertad) de forma autoconsistente, [6]. Así, a partir de los trabajos de Bergmann y Dirac, se estableció lo que ahora se conoce como “Algoritmo de Dirac-Bergmann”, un procedimiento general para conocer la estructura hamiltoniana y las simetrías de este tipo de teorías. En principio, el estudio realizado por Dirac estaba enfocado a poder, en un futuro, cuantizar los sistemas singulares, recordando que la hamiltoniana corresponde al generador de evolución temporal, pero se obtuvo un algoritmo que también permite identificar y determinar ciertas propiedades presentes en el sistema, como: el número total de restricciones, su clasificación entre de primera y segunda clase, lo cual permite identificar las transformaciones de norma o en su caso, construir el paréntesis de Dirac, y como uno de los resultados más relevantes, proporciona el número total de grados de libertad.

Cabe mencionar que la mayoría de los sistemas de partículas puntuales que son singulares suelen carecer de relevancia física, algunas veces simplemente se construyen para destacar particularidades que podrían surgir en ciertas partes del algoritmo [7], sabiendo que por medio de los sistemas discretos los conceptos se podrán comprender con mayor claridad o sencillez. Por otro lado, en teorías de campo clásicas, el hecho de que un sistema sea singular tiene mayor interés, puesto que las funciones lagrangianas de varias teorías de trascendencia física son singulares, como: Maxwell [21], Yang-Mills [22, 23], Relatividad General [26, 27, 28], etc. También existen otra clase de teorías (de igual manera singulares) que en parte, permiten entender con mayor facilidad dos propiedades

que presenta RG, la independencia del espacio-tiempo de fondo y la invarianza bajo difeomorfismos, las cuales son: Chern-Simons, Pontryagin [15] y la teoría BF [16]; siendo las primeras dos, Chern-Simons y Pontryagin, un caso particular de la teoría BF. Estas tres teorías se caracterizan por ser teorías topológicas, es decir, no tienen de grados de libertad locales, lo cual indica que no hay dinámica en cada una de las teorías. Y por otra parte, comparten una característica que no es tan común en otras teorías, pero que es relevante cuando está presente: la reducibilidad. La razón de prestarle atención a esta característica se debe a que corresponde a relaciones que pueden existir entre las restricciones que tiene una teoría, pero estas relaciones o la forma de encontrarlas, no las propone el mismo algoritmo de Dirac-Bergmann, a pesar de la generalidad con la que cuenta, por lo cual, para poder encontrarlas es necesario proponerlas “a mano”, lo que en cierto punto resulta un conflicto cuando las teorías son más complejas estructuralmente. Es importante notar que para poder calcular correctamente los grados de libertad, se requiere el número total de restricciones independientes, una cualidad que la reducibilidad dificulta, de otra manera el resultado va a ser inconsistente.

Tomando en cuenta lo dicho anteriormente, en este trabajo de tesis se estudia la reducibilidad en teorías tipo BF, por medio del Algoritmo de Dirac-Bergmann, con el objetivo de identificar y proponer un camino por medio del cual se pueda evitar la reducibilidad en teorías de campo similares, es decir, teorías topológicas.

Así, la estructura de esta tesis es como sigue:

- 1.- En el capítulo 1 se realiza una revisión del Algoritmo de Dirac-Bergmann, definiendo y explicando cada uno de los conceptos que serán empleados a lo largo de los siguientes capítulos.
- 2.- En el capítulo 2 se da una breve introducción a la teoría clásica de campos, presentando las herramientas principales de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana, puesto que los sistemas singulares a estudiar son teorías de campo.
- 3.- En el capítulo 3 se realiza el análisis hamiltoniano de la teoría de Pontryagin, donde se muestra que a partir de una elección adecuada de variables canónicas, para definir la hamiltoniana canónica, es posible evitar la reducibilidad en la teoría, a diferencia de lo que sucede en la literatura [15], donde la reducibilidad está presente; la elección de variables se realiza a partir de las relaciones que se obtienen al definir los momentos canónicos.
- 4.- En el capítulo 4 se realiza una comparación entre los resultados del estudio de la teoría de Pontryagin obtenidos en el capítulo 3 y los que se presentan en la literatura [15]. Durante la comparación, se hace notar el hecho de que, a pesar de haber elegido unas variables canónicas diferentes a las empleadas en la literatura, para definir la hamiltoniana canónica y así realizar el análisis hamiltoniano de Pontryagin, la dinámica de la teoría no se modifica, es decir, por ambos caminos se obtiene la misma información física, aunque algunas expresiones matemáticas se vean parcialmente distintas. Por otra parte, también se observa que al estudiar la teoría de Pontryagin por medio de las variables canónicas propuestas en este trabajo de tesis (las empleadas en el capítulo anterior), además de permitir evitar la reducibilidad, se simplifican los desarrollos y las ecuaciones resultantes, a diferencia de lo que sucede en la literatura [15], de manera que es más sencillo interpretar la dinámica de la teoría.
- 5.- Finalmente, en el capítulo 5 se realiza el análisis hamiltoniano de la teoría BF abeliana y se muestra que a pesar de elegir un conjunto de variables dinámicas diferente al que se emplea en la literatura [16], para definir la hamiltoniana canónica, no es posible evitar la reducibilidad, es decir, no hay un conjunto de variables canónicas adecuadas (elegidas por medio de la definición de los momentos) que permitan eludir la reducibilidad en la teoría BF. Entonces, a partir de lo que sucede en las teorías de Pontryagin y BF, se propone una conjetura para teorías topológicas que va a permitir identificar cuándo es posible evitar la reducibilidad mediante una elección conveniente de variables canónicas de la definición de los momentos.

Además, como complemento, se construye y analiza una teoría tipo BF abeliana particular, donde se verifica que la conjetura propuesta se cumple para esta teoría topológica específica.

Capítulo 1

Algoritmo de Dirac-Bergmann

En mecánica elemental, se define el número de *grados de libertad* de un sistema físico como el número de *coordenadas generalizadas*¹ independientes necesarias para describir por completo al sistema. Debido a esto, cuando se desea estudiar alguna teoría o sistema físico, se debe tener cuidado al elegir las variables dinámicas que van a permitir describirlo, esto es, se debe tomar en cuenta el hecho de que puedan existir relaciones entre las variables elegidas, ya que esto provocaría que algunas pasen a ser dependientes de las otras, de manera que el número de grados de libertad será menor al número de variables dinámicas empleadas inicialmente. A este tipo de relaciones entre las variables dinámicas se les conoce como *restricciones* y en principio, para poder estudiar algún sistema físico que las presente, será necesario realizar algunos pasos extra, con respecto al procedimiento habitual, introduciendo nuevos conceptos y herramientas matemáticas.

De los métodos que existen para estudiar un sistema que presenta restricciones, se encuentra el de los multiplicadores de Lagrange en la formulación lagrangiana², como resultado, las ecuaciones de movimiento quedan expresadas en términos de las variables del espacio de configuración ampliado $(q, \dot{q})$ y los multiplicadores de Lagrange λ . Por otra parte, recordando la estrecha relación que existe entre las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana, uno se puede preguntar ¿qué sucede en el enfoque hamiltoniano cuando hay restricciones? Para responder a la pregunta, a lo largo de este capítulo se presenta un método en la formulación hamiltoniana desarrollado para estudiar teorías físicas que presentan restricciones (siendo un breve resumen de los resultados principales que se encuentran en [7] y [8]), conocido como *Algoritmo de Dirac-Bergmann*, que comparte cierta analogía con el método de los multiplicadores de Lagrange, pero se distingue por tener un procedimiento más amplio y por la cantidad de resultados que proporciona. En general, este algoritmo se emplea en la formulación hamiltoniana cuando un sistema físico resulta ser *singular*, donde tal característica se definirá con detalle a continuación.

Cabe mencionar que en este capítulo y los siguientes se empleará la convención de suma de Einstein, donde el símbolo de sumatoria se suprime y se toma en cuenta que cuando aparece un índice repetido dos veces significa suma con respecto a ese índice.

1.1. Sistemas clásicos singulares

Con la finalidad de comenzar el estudio de los *sistemas singulares* en una manera sencilla, se van a realizar todos los desarrollos en el caso discreto, es decir, considerando sistemas puntuales con un número finito de variables dinámicas. Además, el punto de partida empleado será el principio de Hamilton en la formulación lagrangiana, el cual establece lo siguiente: de todas las trayectorias

¹También conocidas como variables dinámicas. En la mecánica lagrangiana corresponden a q y $\dot{q}$, mientras que en la mecánica hamiltoniana a q y p .

²Para más información sobre este método, consultar [9, págs. 45-50].

CAPÍTULO 1. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

1.1. SISTEMAS CLÁSICOS SINGULARES

a lo largo de las cuales puede evolucionar un sistema clásico para pasar de una configuración a otra en un intervalo de tiempo dado $[t_1, t_2]$, la que en realidad sigue el sistema es aquella que minimiza (o hace que tenga valor estacionario³) la integral de acción,

$$S[q^a] = \int_{t_1}^{t_2} L(q^a(t), \dot{q}^a(t)) dt, \quad (1.1.1)$$

donde $q^a(t)$ son las coordenadas generalizadas, $\dot{q}^a(t) = \frac{dq^a}{dt}$ sus respectivas velocidades generalizadas y L es la llamada función Lagrangiana. También, al parámetro t que usualmente se le asocia con el tiempo en mecánica elemental, se le conoce como parámetro de evolución temporal.

Una manera para poder encontrar de entre todas las trayectorias aquella que minimiza la acción S , es introducir el concepto de variación de una funcional⁴, con el cual el principio de Hamilton será equivalente a hallar las q^a 's tales que la variación de S con respecto a las $q^a(t)$ sea igual a cero, es decir:

$$\delta S[q^a(t)] = 0. \quad (1.1.2)$$

Así, a partir de (1.1.1) y (1.1.2), se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange⁵:

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) = 0, \quad (1.1.3)$$

donde $a = 1, \dots, N$, siendo N el número de coordenadas generalizadas del sistema. Entonces, se tienen N ecuaciones diferenciales acopladas; desarrollando la derivada total en (1.1.3)⁶

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{\partial}{\partial q^b} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \frac{dq^b}{dt} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^b} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \frac{d\dot{q}^b}{dt} = 0,$$

y reescribiendo como,

$$\dot{q}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a} = \frac{\partial L}{\partial q^a} - \dot{q}^b \frac{\partial^2 L}{\partial q^b \partial \dot{q}^a}, \quad (1.1.4)$$

se puede identificar al elemento $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a} = H_{ba}$ como las componentes de una matriz H , la cual en realidad corresponde a la matriz hessiana de L con respecto a las velocidades generalizadas $\dot{q}^a$. Entonces, a partir esta matriz hessiana uno puede fijarse en los siguientes dos casos:

- Si $\det(H) \neq 0$, entonces H es una matriz invertible y por tanto las $\ddot{q}^a$'s quedan determinadas de manera única en términos de las q^i 's y $\dot{q}^i$'s, esto es,

$$\ddot{q}^b = (H_{ba})^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \dot{q}^c \frac{\partial^2 L}{\partial q^c \partial \dot{q}^a} \right). \quad (1.1.5)$$

³Por "valor estacionario" de una integral curvilínea se quiere decir que, a lo largo del camino dado, la integral tiene el mismo valor, salvo infinitésimos de primer orden, que a lo largo de todos los caminos vecinos (es decir, los que difieren de él en desplazamientos infinitesimales).

⁴Este concepto enfocado a la física se puede revisar de manera más extensa en [18].

⁵Cabe notar que, como condición extra para obtener estas ecuaciones, se debe suponer que la integral $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b} \delta q^b \right) dt$ se anula, lo cual se cumple siempre y cuando las variaciones infinitesimales $\delta q^a(t)$ se anulen en t_1 y t_2 .

⁶Debido a que se están considerando sistemas tales que su lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, $L = L(q^a(t), \dot{q}^a(t))$, al realizar la derivada total $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right)$, el término $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) = 0$, puesto que la expresión $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right)$ tampoco va a depender explícitamente del tiempo.

- Si $\det(H) = 0$, se tiene que H ya no es una matriz invertible y en consecuencia no se podrán determinar las $\ddot{q}^a$'s de manera única. No obstante, si la matriz H tiene rango igual a $R < N$, entonces va a ser posible resolver el sistema de ecuaciones (1.1.4) para al menos R aceleraciones $\ddot{q}$'s. En otras palabras, se van a poder despejar $\ddot{q}^i$'s de (1.1.4), con $i = 1, \dots, R$, en términos de las aceleraciones restantes y todas las coordenadas y velocidades. Es decir,

$$\ddot{q}^i = \ddot{q}^i(q^i, \dot{q}^i, q^j, \dot{q}^j, \ddot{q}^j), \quad (1.1.6)$$

donde las $\ddot{q}^j$'s, con $j = R + 1, \dots, N$, son las velocidades que no se pudieron despejar de (1.1.4). De esta manera, las ecuaciones (1.1.6) quedan determinadas hasta $N - R$ funciones arbitrarias e independientes $q^{R+1}, \dots, q^N$.

Para este tipo de sistemas, donde el determinante de la matriz hessiana H es cero, se dice que su función lagrangiana L es *singular* y por tanto el sistema estudiado es singular. En lo siguiente, se verá que, para los sistemas singulares, pasar de su formulación lagrangiana a la hamiltoniana no es tan directo como el procedimiento habitual. En general, se tienen que introducir nuevos conceptos y realizar pasos extra para poder estudiar de manera eficiente la dinámica de este tipo de teorías en la formulación hamiltoniana.

1.2. Restricciones primarias

Como se ha comentado anteriormente, realizar la transición de la mecánica lagrangiana a la hamiltoniana, cuando un sistema es singular, no va a ser un resultado directo y para mostrar por qué es así, será necesario recapitular cómo se efectúa tal transición entre ambas formulaciones. Comúnmente, lo primero que se hace para pasar de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana es definir los momentos canónicos,

$$p_a := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}, \quad (1.2.1)$$

y a partir de estas ecuaciones despejar todas las $\dot{q}^a$'s en términos de q^a 's y p_a 's. Si ahora se toma en cuenta lo visto anteriormente y por la definición de los momentos, la matriz hessiana H se podrá escribir como,

$$H = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \right) = \left(\frac{\partial p_a}{\partial \dot{q}^b} \right) = J, \quad (1.2.2)$$

donde se observa que corresponde a la matriz jacobiana, J , entre los momentos y las velocidades generalizadas. De manera que, si el determinante de $H = J$ es distinto de cero, por el teorema de la función inversa, se podrán encontrar todas las $\dot{q}^a$'s en términos de las p_a 's por medio de (1.2.1). Por otro lado, si el determinante de H es igual a cero, no todas las $\dot{q}^a$'s podrán ser expresadas en términos de las q^a 's y p_a 's a partir de (1.2.1). En consecuencia, de la definición de los momentos se van a obtener M relaciones entre algunas variables canónicas,

$$p_a := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \Rightarrow p_m := f_m(q^a, p_k), \quad (1.2.3)$$

con $m = 1, \dots, M$ y $k = M + 1, \dots, N$, siendo $M \leq N$. Así, a partir de estas relaciones, se van a definir las siguientes funciones:

$$\phi^m(q, p) := p_m - f_m(q^a, p_k) = 0, \quad (1.2.4)$$

las cuales se llaman *restricciones primarias*⁷.

⁷Para obtener estas restricciones no se requiere de las ecuaciones de movimiento, son resultado directo de (1.2.1) cuando el $\det H = 0$. Además, las ϕ 's no necesariamente tienen que depender funcionalmente de las q 's.

CAPÍTULO 1. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

1.3. CONDICIONES DE REGULARIDAD

Una primera observación sobre estas restricciones (1.2.4) es que, en principio, no se espera que todas sean independientes entre sí, por lo que en general $M' \leq M$, donde M' es el número de ecuaciones independientes de la forma (1.2.4). Cabe notar que, esto también indicará que sólo M' $\dot{q}$'s no se podrán escribir en términos de las p 's y q 's.

Ahora, para conocer el número M' , es decir, para saber con certeza cuántas restricciones independientes (1.2.4) se esperan, uno se puede fijar en el rango de la matriz hessiana H , que estará dado por $N - M'$, de manera que la nulidad de H corresponde a M' y con ello se encuentra el número total de restricciones primarias independientes $\phi^{m'}$'s. Por simplicidad, se supone que el rango de la matriz H es constante en el espacio de configuración ampliado $(q^a, \dot{q}^a)$, es decir, que el número de restricciones primarias independientes no varía, de manera que la superficie que van a definir las restricciones primarias será una hipersuperficie de dimensión $2N - M'$ del espacio fase, conocida como *superficie de restricciones primarias*.

Fijándose ahora en las $\phi^{m'}$'s, un aspecto importante a notar sobre estas restricciones, es que no tienen por qué ser resultado directo de (1.2.1), sino que pueden ser combinaciones lineales de las ϕ^m 's. Una forma de obtenerlas es fijarse en los vectores nulos $V^{m'}$ de H , cuyas componentes están dadas por $V_m^{m'}$, de manera que las restricciones independientes que se esperan se podrán calcular realizando la contracción,

$$\phi^{m'} = V_m^{m'} \phi^m. \quad (1.2.5)$$

Como una última observación, debido a la existencia de las restricciones $\phi^{m'}$ (o a que no fue posible despejar M' $\dot{q}$'s en términos de las p 's y q 's), se está realizando un mapeo a un espacio de dimensión menor (se partió de un espacio de dimensión $2N$, el espacio de configuración ampliado, a uno de dimensión $2N - M'$, la superficie de restricciones primarias), es decir, la transformación entre $\dot{q}$'s y p 's es multivaluada. Por lo tanto, es necesario introducir M' parámetros extra, de forma que esta transformación se mantenga univaluada. Estos parámetros son llamados *multiplicadores de Lagrange* y comunmente se denotan por $\lambda_{m'}$.

1.3. Condiciones de regularidad

Existen varias maneras equivalentes de representar una superficie dada por ecuaciones de la forma (1.2.4), por ello es necesario imponer algunas condiciones en la elección de las funciones ϕ^m , las cuales representan la superficie de restricciones primarias. A estas se les conoce como *condiciones de regularidad*.

Una forma sencilla de introducir tales condiciones, es por medio del siguiente razonamiento: se considera una restricción dada por $\phi^m = 0$, en principio, se espera que cualquier función variante de esta, por ejemplo $f^m = (\phi^m)^2$, siga siendo cero en la hipersuperficie definida por las ϕ^m y por lo tanto siga siendo restricción. Sin embargo, para que las funciones (1.2.4) puedan definir una hipersuperficie de dimensión M' constante, se necesita que el rango de la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial \phi^m}{\partial (q^a, p_a)} \right) = \left(\frac{\partial f^m}{\partial (q^a, p_a)} \right)$ sea constante e igual a M' , donde M' es el número de restricciones primarias independientes. De no ser el caso, si se eligiera $f^m = (\phi^m)^2$, por ejemplo, se tendrían elementos como $\frac{\partial f^i}{\partial (q^a, p_a)} = 2\phi^i \frac{\partial \phi^i}{\partial (q^a, p_a)} \approx 0$ en la matriz jacobiana, con lo cual, su rango sería distinto de M' . Es por esta razón que se necesita exigir tales condiciones sobre las restricciones primarias $\phi^{m'}$. Visto desde un enfoque más abstracto, estas condiciones de regularidad garantizan que la superficie de restricciones primarias defina una subvariedad del espacio fase [13, pág. 11], recordando que el espacio fase tiene estructura de variedad⁸. De esta manera, la hipersuperficie que van a definir las restricciones primarias independientes en el espacio fase, corresponde a una subvariedad del espacio fase.

⁸Para información más detallada sobre los conceptos de variedades diferenciables y sus aplicaciones en la física, consultar [13]

Cabe notar que las condiciones de regularidad también se pueden interpretar de la siguiente manera [7, pág. 7]: la superficie de restricciones puede ser cubierta por regiones abiertas, donde en cada una, localmente, las funciones ϕ^m pueden separarse en las restricciones independientes, $\phi^{m'} = 0$ con $m' = 0, \dots, M'$, tales que $\left(\frac{\partial \phi^{m'}}{\partial (q^a, p_a)} \right)$ tiene rango igual a M' y las restricciones dependientes, $\phi^{\tilde{m}'} = 0$ con $\tilde{m}' = M' + 1, \dots, M$, que son consecuencia directa de las primeras.

1.4. Ecuaciones débiles y fuertes

Llegado a este punto, conviene introducir los conceptos de igualdad débil e igualdad fuerte, que se definen formalmente como sigue.

Definición: Una funcional F en el espacio fase es *débilmente* igual a cero si,

$$F|_{\Sigma_1} = 0, \quad (1.4.1)$$

donde Σ_1 es la hipersuperficie del espacio fase definida por las restricciones primarias (1.2.4). Esta igualdad es denotada usualmente con el símbolo “ $\approx$ ”, $F \approx 0$. Por otra parte, es *fuertemente* igual a cero si,

$$F|_{\Sigma_1} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) |_{\Sigma_1} = 0, \quad (1.4.2)$$

con $i = 1, \dots, N$. Esta igualdad se denota con el símbolo usual “ $=$ ”, $F = 0$.

En general, uno puede hablar de igualdad débil o fuerte entre funciones del espacio fase de la siguiente manera. Dos funciones F y G que coinciden en Σ_1 se dice que son débilmente iguales, es decir,

$$F \approx G.$$

Mientras que, una ecuación $F = G$ que se satisface en todo el espacio fase y no sólo en Σ_1 es llamada fuertemente igual, puesto que, en particular, siempre se va a cumplir lo siguiente,

$$(F - G)|_{\Sigma_1} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial (F - G)}{\partial q^i}, \frac{\partial (F - G)}{\partial p_i} \right) |_{\Sigma_1} = 0.$$

A partir de estas dos igualdades, se tienen dos propiedades resultantes,

- Si una función G es débilmente cero, entonces puede ser escrita como combinación lineal de las restricciones, esto es: $G \approx 0 \Leftrightarrow G = g_j(p, q)\phi^j$, con $g_j(q, p)$ funciones del espacio fase.
- $F \approx G \Leftrightarrow F - G = C_j(q, p)\phi^j$, con $C_j(q, p)$ funciones del espacio fase.

Donde la demostración de la primer propiedad se puede consultar en [7], mientras que la segunda propiedad es un resultado directo de la primera.

Finalmente, al introducir estos dos conceptos, es necesario enfatizar lo siguiente. En general, para cualquier funcional $F \approx 0$, aunque F es cero cuando se evalúa sobre la superficie de restricciones (cuando se satisfacen las restricciones), no tiene por qué ser cero cuando se evalúa sobre todo punto del espacio fase, es decir, su forma funcional no tiene que ser idénticamente igual a cero. Tomando en cuenta esto, cuando se desea realizar alguna operación con cualquier funcional F , tal que $F(q, p) \approx 0$, como por ejemplo, un paréntesis de Poisson, lo primero que se hace es realizar la operación del paréntesis de Poisson necesaria y al final ocupar el hecho de que F es una funcional débilmente igual a cero.

1.5. Hamiltoniana canónica y primaria

Hasta ahora, de lo único que se ha hablado sobre la formulación hamiltoniana en las teorías singulares, es que no va a ser posible despejar todas las velocidades generalizadas $\dot{q}$'s en términos de los momentos p 's y coordenadas q 's, por medio de la definición de los momentos canónicos, de manera que no se podrá realizar la transición de la función lagrangiana a la hamiltoniana, mediante la transformada de Legendre. A pesar de este inconveniente, se puede definir una función hamiltoniana de forma similar a la de los sistemas regulares, conocida como *hamiltoniana canónica* H_C , esto es

$$H_C := \dot{q}^a p_a - L, \quad (1.5.1)$$

cuya variación es,

$$\begin{aligned} \delta H_C &= \delta \dot{q}^a p_a + \dot{q}^a \delta p_a - \frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta \dot{q}^a \\ &= \dot{q}^a \delta p_a - \frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a, \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

lo que muestra que la variación δH_C depende únicamente de las variaciones δq^a 's y δp_a 's, y no depende de las variaciones de las velocidades $\dot{q}$'s, lo cual asegura que H_C no va a ser una función de las velocidades, a pesar que $\dot{q}^a$ aparezca explícitamente en esta variación⁹. Ahora, debido a la existencia de las ecuaciones $\phi^m(q, p) \approx 0$, algunas de las variables canónicas (q^a, p^a) ya no van a ser independientes entre sí en el espacio fase, de modo que H_C sólo estará bien definida en la hipersuperficie de restricciones primarias¹⁰ (subvariedad) y para poder extender esta hamiltoniana sobre todo el espacio fase, lo que se hace es agregar una combinación lineal de restricciones primarias,

$$H_C \longrightarrow H_1 = H_C + \lambda_m \phi^m, \quad (1.5.3)$$

siendo λ_m los multiplicadores de Lagrange. Esto se debe a que, en principio, por medio de (1.5.3) el formalismo se debe mantener invariante, ya que cualquier combinación lineal de restricciones es débilmente igual a cero, esto es, en la superficie de restricciones H_C y H_1 son equivalentes. Además, debido a que en (1.5.3) se introducen los multiplicadores λ_m , esta hamiltoniana H_1 ya va a estar definida en todo el espacio fase, puesto que ya considera todas las variables canónicas q 's y p 's del espacio, que están sujetas a las restricciones $\phi^m \approx 0$. Así, remplazando a H_C por H_1 , al realizar la variación de la acción

$$S[q^a, p_a] = \int (\dot{q}^a p_a - H_C - \lambda_m \phi^m) dt, \quad (1.5.4)$$

e igualar a cero, se tendrán las ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} \dot{q}^a &= \frac{\partial H_C}{\partial p_a} + \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_a} + \frac{\partial \lambda_m}{\partial p_a} \phi^m, \\ \dot{p}_a &= -\frac{\partial H_C}{\partial q^a} - \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^a} - \frac{\partial \lambda_m}{\partial q^a} \phi^m, \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

⁹Este resultado se podrá ver de manera explícita en los siguientes capítulos, para las teorías que se analizan en este trabajo de tesis.

¹⁰Debido a que H_C sólo va a estar bien definida sobre la superficie de restricciones primarias Σ_1 , su dependencia funcional se verá reducida a las variables canónicas que conforman Σ_1 . Además, si a partir de la definición de los momentos (1.2.1) se obtienen estrictamente relaciones entre algunos momentos y coordenadas, se podrá elegir entre distintas formas para definir a H_C , a partir de variables específicas. Este resultado se podrá visualizar de manera más detallada en los siguientes capítulos, durante el análisis de tres teorías de campo singulares.

CAPÍTULO 1. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN
1.6. CONDICIONES DE CONSISTENCIA Y RESTRICCIONES SECUNDARIAS

y al tomar en cuenta que $\phi^m \approx 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\dot{q}^a &\approx \frac{\partial H_C}{\partial p_a} + \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_a}, \\ \dot{p}_a &\approx -\frac{\partial H_C}{\partial q^a} - \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^a},\end{aligned}\tag{1.5.6}$$

lo cual es equivalente a escribir,

$$\begin{aligned}\dot{q}^a &= \frac{\partial H_C}{\partial p_a} + \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_a}, \\ \dot{p}_a &= -\frac{\partial H_C}{\partial q^a} - \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^a}, \\ \phi^m(q, p) &= 0.\end{aligned}\tag{1.5.7}$$

Entonces, se puede notar que si se conocen los momentos p_a y los multiplicadores λ_m , a partir de la primer relación de (1.5.7) se podrán determinar las velocidades $\dot{q}^a$. Además, de esta misma primer relación, uno podrá despejar los λ_m como función de las coordenadas y velocidades, lo cual se hace resolviendo las ecuaciones:

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H_C}{\partial p_a}(q, p(q, \dot{q})) + \lambda_m(q, \dot{q}) \frac{\partial \phi^m}{\partial p_a}(q, p(q, \dot{q})).\tag{1.5.8}$$

A una hamiltoniana de la forma (1.5.3) se le llamará *hamiltoniana primaria* y se define formalmente como,

$$H_1 := H_C + \lambda_m \phi^m,\tag{1.5.9}$$

la cual contiene toda la información del sistema que se ha encontrado hasta el momento, a diferencia de H_C .

Como un punto importante a notar, si ahora se define la transformada de Legendre del espacio de configuración ampliado $(q, \dot{q})$, de dimensión $2N$, a la superficie $\phi^m \approx 0$ del espacio fase (q, p, λ) , también de dimensión $2N$, dado por

$$\begin{aligned}q^a &= q^a, \\ p_a &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}(q, \dot{q}), \\ \lambda_m &= \lambda_m(q, \dot{q}),\end{aligned}\tag{1.5.10}$$

se puede ver que la transformación entre espacios de la misma dimensión $2N$ es invertible, ya que

$$\begin{aligned}q^a &= q^a, \\ \dot{q}^a &= \frac{\partial H_C}{\partial p_a} + \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_a}, \\ \phi^m(q, p) &= 0,\end{aligned}\tag{1.5.11}$$

de este modo, las ecuaciones (1.5.10) implican (1.5.11) y viceversa. Es decir, la invertibilidad de la transformada de Legendre cuando el determinante de la matriz hessiana H es cero se puede recuperar agregando variables extras, los multiplicadores de Lagrange.

1.6. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias

En mecánica elemental, al trabajar en la formulación hamiltoniana, se introduce el operador $\{, \}$ que representa el Paréntesis de Poisson. En general, dadas dos funciones arbitrarias $f = f(q, p)$ y $g = g(q, p)$ en el espacio fase, el Paréntesis de Poisson entre ellas se define como,

CAPÍTULO 1. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN
1.6. CONDICIONES DE CONSISTENCIA Y RESTRICCIONES SECUNDARIAS

$$\{f, g\} := \sum_{a=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q^a} \right] \quad (1.6.1)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q^a}, \quad (1.6.2)$$

que además, cumple con las siguientes propiedades (donde $h = h(q, p)$ también es una función arbitraria en el espacio fase):

- 1 Antisimetría: $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
- 2 Linealidad: $\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1 \{f, h\} + c_2 \{g, h\}$, con c_1 y c_2 constantes.
- 3 Regla del producto: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$.
- 4 Identidad de Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$,
- 5 Paréntesis de Poisson fundamentales:
 - $\{q^j, q^k\} = 0 = \{p_j, p_k\}$
 - $\{q^j, p_k\} = \delta_k^j$

La razón de introducir el paréntesis de Poisson en el estudio de los sistemas singulares, es que además de permitir expresar la evolución temporal de cualquier función en el espacio fase de una manera más compacta y hacer notar cuál es la función generadora de evolución temporal, van a ser útiles en desarrollos posteriores, que servirán para estudiar ciertas características sobre las restricciones. Entonces, haciendo uso de las ecuaciones (1.5.7) y de la definición del paréntesis de Poisson, se tiene que para una función arbitraria $F = F(q, p)$ en el espacio fase, su derivada temporal, $\frac{dF}{dt} := \dot{F}$, puede escribirse como,

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial q^a} \dot{q}^a + \frac{\partial F}{\partial p_a} \dot{p}_a \\ &= \frac{\partial F}{\partial q^a} \left(\frac{\partial H_C}{\partial p_a} + \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_a} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_a} \left(\frac{\partial H_C}{\partial q^a} + \lambda_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^a} \right) \\ &= \{F, H_C\} + \lambda_m \{F, \phi^m\}, \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

obteniendo una expresión que permite relacionar la evolución temporal de una función F con las funciones H_C , ϕ^m y λ_m . Si ahora se emplea la linealidad y la regla del producto del paréntesis de Poisson, junto con el hecho de que $\phi^m \approx 0$, la ecuación (1.6.3) toma la forma,

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \{F, H_C\} + \lambda_m \{F, \phi^m\} \\ &= \{F, H_C\} + \{F, \lambda_m \phi^m\} - \{F, \lambda_m\} \phi^m \\ &\approx \{F, H_C + \lambda_m \phi^m\} \\ &= \{F, H_1\}, \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

donde se observa una relación directa entre $\dot{F}$ y H_1 , similar a que se encuentra en los sistemas regulares, de manera que H_1 se puede interperetar como la función generadora de evolución temporal en la superficie de restricciones primarias, es decir, a partir de H_1 uno puede obtener la evolución temporal, sobre Σ_1 , de cualquier funcional en el espacio fase (q^a, p_a) . Cabe notar que las ecuaciones (1.5.7) son un caso particular de (1.6.4) cuando $F = q$ ó $F = p$, respectivamente.

Una vez que se cuenta con una expresión para la evolución temporal de cualquier función en el espacio fase por medio del paréntesis de Poisson, se revisará una condición más para las restricciones primarias. En principio, cuando en mecánica clásica elemental se analizan sistemas que presentan

CAPÍTULO 1. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

1.6. CONDICIONES DE CONSISTENCIA Y RESTRICCIONES SECUNDARIAS

ligaduras (restricciones), se espera que éstas no cambien con el tiempo, un ejemplo claro es el del péndulo simple, donde la longitud de la cuerda no va a cambiar en ningún momento. Entonces, de manera similar, en este caso se va a exigir que las restricciones primarias se preserven en el tiempo, es decir, $\dot{\phi}^m \approx 0$. Estas condiciones se llaman *condiciones de consistencia* y se pueden expresar como un caso particular de (1.6.3) cuando $F = \phi^l$, es decir,

$$\dot{\phi}^l = \{\phi^l, H_C\} + \lambda_m \{\phi^l, \phi^m\} \approx 0, \quad (1.6.5)$$

que corresponden a un sistema de M' ecuaciones lineales acopladas para los M' multiplicadores de Lagrange. Para analizar este sistema de ecuaciones, por simplicidad se van a definir las siguientes matrices: $h = (h^l) = (\{\phi^l, H_C\})$, $\lambda = (\lambda_m)$ y $W = (W^{lm}) = (\{\phi^l, \phi^m\})$, con h y λ matrices columna $M' \times 1$, mientras que W es una matriz cuadrada y antisimétrica de orden M' . Entonces, las ecuaciones (1.6.5) se escriben en forma matricial como sigue,

$$h + W\lambda \approx 0. \quad (1.6.6)$$

Así, el comportamiento de esta ecuación se resume en los siguientes casos.

Caso I: $h \neq 0$ (no todas las $h^l \approx 0$) y $\det W \neq 0$.

Como el $\det W \neq 0$, W es invertible, entonces todos los multiplicadores de Lagrange podrán ser determinados, puesto que

$$W\lambda + h \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \approx -W^{-1}h \quad (1.6.7)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_m \approx -(W^{lm})^{-1} \{\phi^l, H_C\} = -W_{ml}^{-1} \{\phi^l, H_C\}, \quad (1.6.8)$$

de modo que la evolución temporal para cualquier función en el espacio fase, (1.6.3), se puede escribir como,

$$\dot{F} \approx \{F, H_C\} - \{F, \phi^m\} W_{ml}^{-1} \{\phi^l, H_C\} := \{F, H_C\}_D, \quad (1.6.9)$$

que corresponde a la definición del *Paréntesis de Dirac*. Este resultado quiere decir que dadas las condiciones iniciales para un sistema, las ecuaciones (1.6.9) determinan una evolución única. Además, al igual que sucedió con la ecuación (1.6.4), se observa que la expresión (1.6.9) es análoga a la que se encuentra en mecánica elemental, pero se sustituye la hamiltoniana usual por la hamiltoniana canónica y el paréntesis de Poisson por el de Dirac, del cual se hablará más adelante.

Caso II: $h \neq 0$ (no todas las $h^l \approx 0$) y $\det W = 0$.

Ya que el $\det W = 0$, sólo $M' - K$ multiplicadores de Lagrange podrán ser despejados y K (nulidad de W) quedarán indeterminados, de modo que la teoría seguirá conteniendo funciones arbitrarias. Ahora, fijándose en que la Nulidad(W) = K , entonces van a existir K vectores nulos V^j (matrices renglón $1 \times M'$) de W , con $j = 1, \dots, K$, que por definición deben cumplir lo siguiente,

$$V^j W \approx 0. \quad (1.6.10)$$

Así, usando esta propiedad al multiplicar por V^j la ecuación (1.6.6), se tiene,

CAPÍTULO 1. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN
1.6. CONDICIONES DE CONSISTENCIA Y RESTRICCIONES SECUNDARIAS

$$\begin{aligned}
 V^j 0 &\approx V^j(h + W\lambda) \\
 &= V^j h + (V^j W)\lambda \\
 &= V^j h \\
 \Rightarrow \quad V^j h &\approx 0 \\
 \Rightarrow \quad V_l^j h^l &\approx 0
 \end{aligned} \tag{1.6.11}$$

y dado que $h \neq 0$, estas ecuaciones definen K nuevas funciones del espacio fase, independientes de los multiplicadores de Lagrange, que deben ser debilmente igual a cero, en otras palabras, habrá un número extra de restricciones, $\psi^j := V_l^j h^l \approx 0$, las cuales van a llamarse *restricciones secundarias*.

Caso III: $h = 0$ y $\det W \neq 0$.

La ecuación (1.6.6) se reduce a,

$$W\lambda \approx 0, \tag{1.6.12}$$

un sistema de ecuaciones homogéneo para λ . Y teniendo el $\det W \neq 0$, por los teoremas de sistemas de ecuaciones lineales, la única solución es la trivial, esto es, todos los multiplicadores de Lagrange van a ser débilmente igual a cero, $\lambda_m \approx 0$.

Caso IV: $h = 0$ y $\det W = 0$.

Para este último caso, (1.6.6) es como en III,

$$W\lambda \approx 0, \tag{1.6.13}$$

un sistema de ecuaciones homogéneo. Pero, debido a que el $\det W = 0$, si el rango de W es igual a R , sólo $M' - R$ multiplicadores de Lagrange van a poder ser débilmente determinados.

Una vez conocida toda la información proporcionada por (1.6.5) o (1.6.6), se analizará con más detalle el **Caso II**. En esta situación, debido a que existen K restricciones extra,

$$\psi^j(q, p) \approx 0, \tag{1.6.14}$$

se tiene que comprobar que estas restricciones secundarias cumplan también con las condiciones de consistencia, pero para ello es necesario construir una nueva hamiltoniana, ya que ahora la función H_1 carece de información respecto a las nuevas restricciones¹¹. Esta nueva hamiltoniana se llamará *hamiltoniana secundaria* y se construye a partir de H_1 y de una combinación lineal de las funciones ψ^j 's (restricciones secundarias),

$$H_2 := H_1 + \lambda_j \psi^j, \tag{1.6.15}$$

siendo $\lambda_j = \lambda_j(q, p)$ nuevos multiplicadores de Lagrange. Entonces, ahora es H_2 la hamiltoniana que contiene toda la información que se ha obtenido sobre el sistema hasta el momento. En consecuencia, las ecuaciones de movimiento (1.6.4) pasarán a ser,

$$\dot{F} = \{F, H_1 + \lambda_j \psi^j\} = \{F, H_2\}, \tag{1.6.16}$$

¹¹Esta nueva hamiltoniana H_2 (hamiltoniana secundaria), ya tomará en cuenta el hecho de que la evolución del sistema se va a restringir a una hipersuperficie de dimensión $2N - M' - K$. Y además, se extiende fuera de la superficie de restricciones secundarias Σ_2 .

CAPÍTULO 1. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

1.7. CONDICIONES SOBRE LOS MULTIPLICADORES Y LA HAMILTONIANA TOTAL

y por medio de este resultado, se realiza el cálculo de las condiciones de consistencia para las ψ^j 's,

$$\dot{\psi}^i = \{\psi^i, H_C\} + \lambda_m \{\psi^i, \phi^m\} + \lambda_j \{\psi^i, \psi^j\} \approx 0. \quad (1.6.17)$$

Si para estas condiciones (1.6.17), al realizar un análisis similar al que se hizo previamente para las relaciones de consistencia sobre las restricciones primarias, se obtienen nuevamente más restricciones, que en principio se llamarán terciarias, el proceso debe repetirse de nuevo, construyendo ahora una hamiltoniana terciaria y aplicando una vez más las condiciones de consistencia a estas restricciones terciarias. Este proceso se va a repetir cíclicamente hasta que dejen de aparecer nuevas restricciones y, por simplicidad, en lo siguiente se denominará a todo el conjunto de restricciones secundarias, terciarias y subsecuentes simplemente como restricciones secundarias.

1.7. Condiciones sobre los multiplicadores y la hamiltoniana total

Suponiendo que se ha encontrado el conjunto completo de restricciones que presenta el sistema, se puede pasar a analizar ciertas condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange. Para ello, primero es necesario notar que las condiciones de consistencia ahora para todas las restricciones, están dadas por,

$$\dot{\phi}^\alpha = \{\phi^\alpha, H_T\} = \{\phi^\alpha, H_C\} + \lambda_\beta \{\phi^\alpha, \phi^\beta\} \approx 0, \quad (1.7.1)$$

donde ϕ^α ahora representa a las restricciones primarias y secundarias, de manera que $\alpha, \beta = 1, \dots, J$, siendo J el número total de restricciones encontradas (primarias y secundarias), además se ha definido la *hamiltoniana total*, $H_T := H_C + \lambda_\beta \phi^\beta$

Las ecuaciones (1.7.1) representan un sistema de J ecuaciones lineales acopladas, cuya solución general para los multiplicadores λ_β es de la forma,

$$\lambda_\beta = U_\beta + V_\beta, \quad (1.7.2)$$

donde U_β es una solución particular del sistema inhomogéneo y V_β es la solución más general del sistema homogéneo, dado por,

$$V_\beta \{\phi^\alpha, \phi^\beta\} \approx 0. \quad (1.7.3)$$

Puesto que V_β es la solución más general del sistema homogéneo, se podrá escribir como una combinación lineal de soluciones independientes V_β^i , es decir, $V_\beta = v_i V_\beta^i$, donde $i = 1, \dots, I$, con I el número de soluciones independientes del sistema homogéneo. Entonces, las soluciones (1.7.2) para los multiplicadores de Lagrange pasan a escribirse como,

$$\lambda_\beta \approx U_\beta + v_i V_\beta^i. \quad (1.7.4)$$

siendo las funciones $v_i = v_i(q, p)$ totalmente arbitrarias. Así, por medio de (1.7.4) se puede hacer notar que las λ_β están separadas en dos partes: una que se fija, U^β , mediante las condiciones de consistencia y otra que permanece indeterminada, $v_i V_\beta^i$.

Haciendo uso de esta separación, es posible escribir la hamiltoniana total como,

$$\begin{aligned} H_T &:= H_C + \lambda_\beta \phi^\beta \\ &= H_C + (U_\beta + v_i V_\beta^i) \phi^\beta \\ &= (H_C + U_\beta \phi^\beta) + v_i V_\beta^i \phi^\beta \\ &:= H' + v_i \phi^i, \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

definiendo,

CAPÍTULO 1. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

1.8. RESTRICCIONES DE PRIMERA Y SEGUNDA CLASE

$$H' := H_C + U_\beta \phi^\beta, \quad (1.7.6)$$

$$\phi^i := V_\beta^i \phi^\beta. \quad (1.7.7)$$

Por otro lado, la evolución temporal de cualquier función $F(q, p)$ en el espacio fase (de dimensión $2N$), se podrá escribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \{F, H_T\} \\ &= \{F, H' + v_i \phi^i\} \\ &= \{F, H'\} + \{F, v_i \phi^i\} \\ &= \{F, H'\} + v_i \{F, \phi^i\} \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

Donde estas ecuaciones están determinadas hasta I funciones arbitrarias y son equivalentes, por construcción, a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (1.1.3). Una consecuencia fundamental de que las funciones v_i estén presentes en (1.7.8), es que la evolución de F no será única, por lo cual se tendrán que fijar las v_i en algún momento para poder especificar claramente la evolución.

1.8. Restricciones de primera y segunda clase

Hasta ahora se ha hecho distinción entre restricciones primarias y secundarias, sin embargo, este tipo de clasificación resulta ser más una etiqueta (que una propiedad) para las restricciones que aparecen antes y después de las condiciones de consistencia. Es por ello que será preferente separar nuevamente las restricciones fijándose en una característica particular, mediante la cual se podrán obtener dos propiedades fundamentales del sistema¹². Así, la separación se realiza por medio de la siguiente definición,

Definición: Sea $F = F(q, p)$ una funcional del espacio fase (q^n, p_n) , se dice que es de *primera clase* si su paréntesis de Poisson con todas las restricciones es débilmente igual a cero,

$$\{F, \phi^\alpha\} \approx 0, \quad (1.8.1)$$

en caso contrario, se dice que F es de *segunda clase*.

Una propiedad directa a partir de la definición anterior, es que si F es de primera clase, entonces $\{F, \phi^\alpha\}$ tiene que ser fuertemente igual a una combinación lineal de las ϕ^α 's¹³. Es decir,

$$\{F, \phi^\alpha\} = f_\beta^\alpha \phi^\beta, \quad (1.8.2)$$

resultado que servirá de ayuda para probar lo siguiente.

Teorema: El paréntesis de Poisson de dos funcionales de primera clase, es también de primera clase.

Demostración: Sean F y S de primera clase, entonces $\{F, \phi^\alpha\} = f_\beta^\alpha \phi^\beta$ y $\{S, \phi^\alpha\} = s_\beta^\alpha \phi^\beta$. Utilizando la identidad de Jacobi,

¹²El hecho de que esta separación sea más relevante que la otra, se debe a que va a permitir identificar aquellas restricciones que son generadoras de transformaciones de norma y de aquellas que permiten construir el paréntesis de Dirac.

¹³Esto se debe a que cualquier funcional que es débilmente cero es fuertemente igual a una combinación lineal de las restricciones ϕ^α 's, ya que estas son las únicas cantidades independientes que son débilmente cero.

CAPÍTULO 1. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN
1.8. RESTRICCIONES DE PRIMERA Y SEGUNDA CLASE

$$\begin{aligned}
\{\{F, S\}, \phi^\alpha\} &= -\{\{\phi^\alpha, F\}, S\} - \{\{S, \phi^\alpha\}, F\} \\
&= \{\{F, \phi^\alpha\}, S\} - \{\{S, \phi^\alpha\}, F\} \\
&= \{f_\beta^\alpha \phi^\beta, S\} - \{s_\beta^\alpha \phi^\beta, F\} \\
&= f_\beta^\alpha \{\phi^\beta, S\} + \{f_\beta^\alpha, S\} \phi^\beta - s_\beta^\alpha \{\phi^\beta, F\} - \{s_\beta^\alpha, F\} \phi^\beta \\
&= -f_\beta^\alpha s_\rho^\beta \phi^\rho + s_\beta^\alpha f_\rho^\beta \phi^\rho + \{f_\beta^\alpha, S\} \phi^\beta - \{s_\beta^\alpha, F\} \phi^\beta \\
&= (s_\beta^\alpha f_\rho^\beta - f_\beta^\alpha s_\rho^\beta) \phi^\rho + (\{f_\beta^\alpha, S\} - \{s_\beta^\alpha, F\}) \phi^\beta \approx 0. \quad \blacksquare
\end{aligned} \tag{1.8.3}$$

Otro resultado a partir de este concepto es el hecho de que H' y ϕ^i van a ser funcionales de primera clase. Recordando que $H' := H_C + U_\beta \phi^\beta$ y $\phi^i := V_\beta^i \phi^\beta$, esto se prueba de la siguiente manera. Para las ϕ^i , su paréntesis de Poisson con cualesquiera de las restricciones está dado por,

$$\begin{aligned}
\{\phi^i, \phi^\alpha\} &= \{V_\beta^i \phi^\beta, \phi^\alpha\} \\
&= V_\beta^i \{\phi^\beta, \phi^\alpha\} + \{V_\beta^i, \phi^\alpha\} \phi^\beta \\
&\approx V_\beta^i \{\phi^\beta, \phi^\alpha\},
\end{aligned} \tag{1.8.4}$$

donde se ha empleado que las $\phi^\beta \approx 0$, y como V_β^i es solución del sistema de ecuaciones homogéneo para los multiplicadores de Lagrange, satisface que $V_\beta^i \{\phi^\beta, \phi^\alpha\} \approx 0$, con lo cual se llega a,

$$\{\phi^i, \phi^\alpha\} \approx 0, \tag{1.8.5}$$

por lo tanto las ϕ^i son restricciones de primera clase.

Para el caso de H' , calculando su paréntesis de Poisson con cualesquiera de las restricciones, se tiene,

$$\begin{aligned}
\{H', \phi^\alpha\} &= \{H_C + U_\beta \phi^\beta, \phi^\alpha\} \\
&= \{H_C, \phi^\alpha\} + U_\beta \{\phi^\beta, \phi^\alpha\} + \{U_\beta, \phi^\alpha\} \phi^\beta \\
&\approx \{H_C, \phi^\alpha\} + U_\beta \{\phi^\beta, \phi^\alpha\} \\
&\approx \{H_C, \phi^\alpha\} + U_\beta \{\phi^\beta, \phi^\alpha\} + v_i \{\phi^i, \phi^\alpha\} \\
&= \{H_C + U_\beta \phi^\beta + v_i \phi^i, \phi^\alpha\} \\
&= \{H_T, \phi^\alpha\} \\
&= -\{\phi^\alpha, H_T\} \\
&\approx 0,
\end{aligned} \tag{1.8.6}$$

donde en la segunda igualdad débil se sumó un cero débil, consecuencia del hecho de que ϕ^i sea de primera clase y de última igualdad a la tercera igualdad débil se toma en cuenta que se satisfacen las condiciones de consistencia. Además, se han empleado la linealidad y la regla del producto del paréntesis de Poisson y que las ϕ 's son débilmente igual a cero. Por lo tanto, H' es de primera clase.

A partir de estos últimos dos resultados, se puede notar que la hamiltoniana total H_T es la suma de una hamiltoniana de primera clase H' y una combinación lineal de las restricciones de primera clase ϕ^i , sin embargo, también es necesario enfatizar que la descomposición de H_T en H' y ϕ^i no es única, puesto que U_β es cualquier solución del sistema inhomogéneo.

Un resultado más, que será fundamental para identificar las restricciones de primera y segunda clase que se esperan, se obtiene a partir de la siguiente matriz. Sea W' una matriz $J \times J$ cuyas entradas son,

$$W'^{\alpha\beta} = \{\phi^\alpha, \phi^\beta\}, \tag{1.8.7}$$

CAPÍTULO 1. ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN
1.9. TRANSFORMACIONES DE NORMA

donde las ϕ^α representan todas las restricciones (primarias y secundarias) encontradas y J es el número total de estas. La matriz W' tiene la siguiente propiedad.

Proposición: Si $\det W' \approx 0$, entonces hay K' restricciones de primera clase (con K' la nulidad de la matriz W').

Demostración. Si $\det W' = 0$ (en la hipersuperficie definida por las restricciones), entonces el $\text{Rango}(W') = R' < J$ y la Nulidad(W') = $(J - R') = K' \neq 0$. Es decir, se pueden encontrar $K' = (J - R')$ vectores nulos, w^i , con $i = 1, \dots, J - R'$, tales que,

$$w_\alpha^i \{\phi^\alpha, \phi^\beta\} \approx 0, \quad (1.8.8)$$

esto por la definición de vectores nulos, de manera que,

$$\{w_\alpha^i \phi^\alpha, \phi^\beta\} \approx 0, \quad \forall \phi^\beta \quad (1.8.9)$$

Se ve entonces que las restricciones $w_\alpha^i \phi^\alpha$ forman un conjunto de $K' = (J - R')$ restricciones de primera clase (puesto que su paréntesis de Poisson es cero con todas las restricciones). Así, las restricciones de primera clase de la teoría son:

$$\gamma^i := w_\alpha^i \phi^\alpha. \quad \blacksquare \quad (1.8.10)$$

Con esto queda probada la proposición y además, se muestra una forma en que se pueden encontrar las restricciones de primera clase de la teoría, mediante el cálculo de los vectores nulos de W' .

La razón de que esta separación entre las restricciones sea fundamental, se debe a que, como se verá a continuación, si una restricción es de primera clase, va a ser generadora de transformaciones de norma y si es de segunda clase, va a permitir construir el paréntesis de Dirac. Entonces, debido a que la separación de restricciones entre de primera y segunda clase contempla características importantes para la teoría, conviene introducir una notación para poder diferenciarlas. Siendo así, las restricciones de primera clase se denotarán por la letra griega γ y las de segunda clase por χ . Una vez hecha la separación, la matriz W' definida anteriormente toma la forma,

$$\begin{aligned} W' &= \begin{matrix} & \phi^1(y) & \phi^2(y) & \dots & \phi^J(y) \\ \begin{matrix} \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \\ \vdots \\ \phi^J(x) \end{matrix} & \begin{pmatrix} \{\phi^1, \phi^1\} & \{\phi^1, \phi^2\} & \dots & \{\phi^1, \phi^J\} \\ \{\phi^2, \phi^1\} & \{\phi^2, \phi^2\} & \dots & \{\phi^2, \phi^J\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi^J, \phi^1\} & \{\phi^J, \phi^2\} & \dots & \{\phi^J, \phi^J\} \end{pmatrix} \end{matrix} \\ &\rightarrow \begin{matrix} & \gamma^i(y) & \chi^k(y) \\ \begin{matrix} \gamma^j(x) \\ \chi^l(x) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^{lk} \end{pmatrix} \end{matrix} \end{aligned} \quad (1.8.11)$$

con C^{lk} una matriz $R' \times R'$ par, antisimétrica e invertible sobre la superficie de restricciones, de la cual se hablará más adelante.

1.9. Transformaciones de norma

Anteriormente se encontró que los multiplicadores de Lagrange están determinados hasta v_i funciones arbitrarias (o indeterminadas). Este hecho provoca que las ecuaciones de movimiento y sus soluciones no estén determinadas de manera única, puesto que, si se dan las condiciones iniciales del sistema $(q(t_0), p(t_0))$, su evolución, dada por las ecuaciones (1.7.8), estará determinada hasta I funciones arbitrarias. En otras palabras, la presencia de funciones arbitrarias en la hamiltoniana total, indica que no todas las $q(t)$'s y $p(t)$'s son observables, esto es, hay más de un conjunto de

valores de las variables canónicas que representan el mismo estado físico. Por otra parte, considerando que la mecánica clásica es una teoría determinista, es decir, tomando en cuenta que el sistema físico estará bien determinado por las condiciones iniciales dadas, entonces dos estados que compartan las mismas condiciones iniciales no tienen porqué ser físicamente diferentes, en su caso se dirá que son equivalentes de norma.

Para poder representar la idea previa, se consideran dos estados, F y $\bar{F}$, de una variable canónica, con las mismas condiciones iniciales al tiempo t_0 , pero que su evolución dinámica difiere en el valor de los multiplicadores de Lagrange indeterminados, v^i . Usando el desarrollo en serie de Taylor a primer orden en ambos estados $F(t)$ y $\bar{F}(t)$, se tiene,

$$\begin{aligned} F(t) &= F(t_0) + \dot{F}\delta t \\ &= F(t_0) + \{F(t_0), H_T\}\delta t \\ &= F(t_0) + (\{F(t_0), H'\} + v_i\{F(t_0), \phi^i\})\delta t, \end{aligned} \tag{1.9.1}$$

y

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &= F(t_0) + \dot{\bar{F}}\delta t \\ &= F(t_0) + \{\bar{F}(t_0), H_T\}\delta t \\ &= F(t_0) + (\{F(t_0), H'\} + \bar{v}_i\{F(t_0), \phi^i\})\delta t \end{aligned} \tag{1.9.2}$$

restando la primera expresión a la segunda,

$$\begin{aligned} \delta F(t) &= \bar{F}(t) - F(t) \\ &= (\bar{v}_i - v_i)\{F(t_0), \phi^i\}\delta t \\ &=: \delta v_i\{F(t_0), \phi^i\} \end{aligned} \tag{1.9.3}$$

donde $\delta v_i := (\bar{v}_i - v_i)\delta t$. Así, se observa que bajo las transformaciones (1.9.3) el estado físico del sistema permanece inalterado. Además, notando que $\delta F(t) =: \delta v_i\{F(t_0), \phi^i\} \approx \{F(t_0), \delta v_i\phi^i\}$, se tiene que el cambio en las variables canónicas va a consistir en aplicar una transformación infinitesimal con una función generadora $\delta v_i\phi^i$, llegando así a la conclusión de que las restricciones de primera clase ϕ^i son *funciones generadoras de transformaciones de norma*, las cuales corresponden a cambios en las q 's y p 's que no afectan al estado físico del sistema.

Por último, a partir de los resultados previos, se van a tener las dos propiedades siguientes:

- 1 El paréntesis de Poisson $\{\phi^i, \phi^j\}$ de cualesquiera dos restricciones de primera clase genera una transformación de norma.
- 2 El paréntesis de Poisson $\{\phi^i, H'\}$ de cualquier restricción de primera clase ϕ^i con la hamiltoniana de primera clase H' genera una transformación de norma.

donde la demostración de ambas propiedades se puede consultar en [7, pág. 17 y 18].

1.10. Reducibilidad

En secciones posteriores, se toma en cuenta el hecho de que se está trabajando con M' restricciones primarias independientes y K restricciones secundarias independientes, que en general se denotan por ϕ^α . Además, al realizar la separación de restricciones entre de primera y segunda clase, lo que se desea es que las restricciones resultantes γ^a y χ^b , que no necesariamente tienen que ser las ϕ^α , también sean independientes. En resumen, uno de los propósitos ha sido encontrar todas las restricciones independientes (sean de primera o segunda clase) que presenta el sistema. Sin embargo, a pesar de que se haya realizado correctamente la separación entre las restricciones y se haya encontrado la cantidad esperada de restricciones de primera y segunda clase, lo cual se verifica por medio de la nulidad y el rango de la matriz W' definida anteriormente, aún puede

ocurrir que no todas las restricciones γ^a y χ^b sean independientes entre sí, es decir, que unas se puedan obtener a partir de otras. Cuando ocurre esta situación, se dice que las restricciones son reducibles o que la teoría presenta *reducibilidad*, de otro modo se dice que uno está en el caso *irreducible*.

Uno de los principales problemas que ocurre debido a la existencia de la reducibilidad, es que el conteo de grados de libertad no será consistente, puesto que para realizar el cálculo correctamente, es necesario contar con el número exacto de restricciones de primera y segunda clase independientes. De manera que, si hay presencia de reducibilidad, será necesario encontrar aquellas restricciones que no son independientes, lo cual se realiza “buscando” la expresión matemática que permite relacionar aquellas restricciones dependientes, puesto que el análisis de Dirac-Bergmann no proporciona tales expresiones, esto es, uno debe proponerlas por su cuenta. Cabe notar que, la separación entre restricciones dependientes e independientes nunca es una tarea fácil, incluso algunas veces puede ser globalmente imposible debido a obstrucciones topológicas, por lo cual sería preferente poder evitar que aparezca esta característica en el análisis del sistema. En caso de que sí se encuentren las restricciones dependientes y por tanto, el número exacto de restricciones independientes de primera y segunda clase, lo que se hace es omitir las restricciones que sean dependientes en el conteo de grados de libertad, ya que siempre se puede considerar que localmente se está trabajando con el caso irreducible.

1.11. Grados de libertad

A partir de los conceptos de mecánica elemental, el número de grados de libertad de un sistema físico se define como el número de coordenadas generalizadas independientes necesarias para describir por completo al sistema.

Una característica principal de este algoritmo es que, como ya se han encontrado e identificado (como de primera y segunda clase) todas las restricciones independientes que presenta el sistema, ahora será posible determinar cuál es en realidad su número total de grados de libertad.

En principio, para realizar el conteo de grados de libertad, lo que se hace es restarle al número total de variables canónicas (q^n, p_n) la cantidad de restricciones que se han obtenido, de esta manera, lo que se va a obtener es el número de variables canónicas independientes. Cabe notar que, en caso de que el sistema presente transformaciones de norma, también será necesario restar el número de condiciones de norma, esto se debe a la redundancia que va a existir entre los estados asociados por las transformaciones de norma. Entonces, el cálculo se expresa como sigue:

$$\begin{aligned}
 2 \times GL &= 2 \times \left(\begin{array}{c} \text{Número de grados} \\ \text{de libertad} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Número de variables} \\ \text{canónicas independientes} \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones} \\ \text{de primera clase} \end{array} \right) \\
 &\quad - \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones de} \\ \text{segunda clase originales} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de condiciones} \\ \text{de norma} \end{array} \right) \quad (1.11.1) \\
 &= \left(\begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{array} \right) - 2 \times \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones} \\ \text{de primera clase} \end{array} \right) \\
 &\quad - \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones de} \\ \text{segunda clase originales} \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$GL = \frac{1}{2} \left[\left(\begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{array} \right) - 2 \times \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones} \\ \text{de primera clase} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones de} \\ \text{segunda clase originales} \end{array} \right) \right]. \quad (1.11.2)$$

El factor de $\frac{1}{2}$ global se debe a que los grados de libertad comúnmente se refieren a las coordenadas generalizadas, q 's, y como se consideran todas las variables canónicas, q 's y p 's, se está realizando un doble conteo, $2N$. Por otro lado, el factor de 2 que ahora acompaña al número de restricciones de primera clase es consecuencia de que tienen dos funciones: son restricciones y generadoras de transformaciones de norma, recordando que estas transformaciones permiten relacionar dos estados físicamente equivalentes.

1.12. La hamiltoniana y la acción extendidas

Hasta este momento, la hamiltoniana total H_T se ha considerado como la función generadora de evolución temporal en el sistema, sin embargo, esta hamiltoniana aún carece de información, puesto que no se hace una distinción explícita de la separación entre restricciones de primera y segunda clase¹⁴. Debido a esto, se construye la *hamiltoniana extendida*,

$$H_E = H_C + U_b \chi^b + v_a \gamma^a = H' + v_a \gamma^a. \quad (1.12.1)$$

en la cual se ha integrado esta separación entre las restricciones, es decir, ya considera la existencia de transformaciones de norma y el hecho de que se puedan construir los paréntesis de Dirac. En conclusión, ahora es H_E la función que genera la evolución dinámica del sistema, por medio de las ecuaciones de movimiento¹⁵,

$$\dot{F} := \{F, H_E\}. \quad (1.12.2)$$

Cabe notar que, estrictamente, la necesidad de una hamiltoniana extendida no es algo que se derive de la formulación lagrangiana, es más bien la hamiltoniana primaria aquella que genera las ecuaciones de movimiento lagrangianas originales, ya que H_E contiene más funciones arbitrarias que las que contiene H_1 . La introducción de H_E es una nueva característica del esquema hamiltoniano, que extiende a la formulación lagrangiana al poner de manifiesto la invarianza de norma.

Por otra parte, las ecuaciones de movimiento (1.12.2) también se pueden obtener a partir de la siguiente acción,

$$S_E[q, p, v, U] = \int (p_n \dot{q}^n - H' - v_a \gamma^a) dt = \int (p_n \dot{q}^n - H_E) dt, \quad (1.12.3)$$

que se llamará *acción extendida*, la cual ya incluye toda la información del sistema, es decir, ya considera la separación de restricciones entre de primera y segunda clase, contiene la información de la libertad de norma y realizando su variación e igualando a cero, da como ecuaciones de movimiento:

$$\dot{q}^n \approx \{q^n, H_E\} \quad (1.12.4)$$

$$\dot{p}_n \approx \{p_n, H_E\} \quad (1.12.5)$$

¹⁴Es importante comentar que en esta tesis se toma como válida la conjetura de Dirac, la cuál propone que las restricciones secundarias que son de primera clase, también van a ser generadoras de transformaciones de norma.

¹⁵En particular, para las variables dinámicas invariantes de norma (variables tales que su paréntesis de Poisson con los generadores de norma γ^a es débilmente cero), la evolución dada por H' , H_T y H_E es la misma, mientras que para cualesquiera otras variables se debe usar H_E , que toma en cuenta toda la libertad de norma del sistema.

y

$$\gamma^a = 0, \quad (1.12.6)$$

$$\chi^b = 0. \quad (1.12.7)$$

Y en general, para cualquier funcional $F = F(q, p)$ en el espacio fase (q^n, p_n) se tendrá que,

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial q^n} \dot{q}^n + \frac{\partial F}{\partial p_n} \dot{p}_n \\ &\approx \frac{\partial F}{\partial q^n} \{q^n, H_E\} + \frac{\partial F}{\partial p_n} \{p_n, H_E\} \\ &= \frac{\partial F}{\partial q^n} \frac{\partial H_E}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial H_E}{\partial q^n} \\ &= \{F, H_E\}. \end{aligned} \quad (1.12.8)$$

1.13. Paréntesis de Dirac

Cuando se realizó la separación de restricciones entre de primera y segunda clase, se obtuvo una matriz (C^{lk}) cuyas componentes corresponden a los paréntesis de Poisson de las restricciones de segunda clase χ^b . Además, esta matriz resulta invertible (su determinante es distinto de cero), de manera que existe su inversa $(C^{lk})^{-1} = (C_{lk})$, tal que:

$$(C^{ls})(C_{sk}) = (\delta_k^l). \quad (1.13.1)$$

La matriz (C^{lk}) resulta de vital importancia, puesto que por medio de ésta se puede definir el *Paréntesis de Dirac*, como,

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} + \{F, \chi^\mu\} C_{\mu\nu} \{\chi^\nu, G\}, \quad (1.13.2)$$

con $\{, \}$ el paréntesis de Poisson. Que satisface las siguientes propiedades:

$$\{F, G\}_D = -\{G, F\}_D, \quad (1.13.3)$$

$$\{F, GR\}_D = \{F, G\}_D R + G \{F, R\}_D, \quad (1.13.4)$$

$$\{\{F, G\}_D, R\}_D + \{\{R, F\}_D, G\}_D + \{\{G, R\}_D, F\}_D = 0, \quad (1.13.5)$$

$$\{\chi^\beta, F\}_D = 0, \quad \forall F, \quad (1.13.6)$$

$$\{F, G\}_D \approx \{F, G\}, \quad G \text{ de primera clase y } F \text{ arbitraria}, \quad (1.13.7)$$

$$\{R, \{F, G\}_D\}_D \approx \{R, \{F, G\}\}, \quad F \text{ y } G \text{ de primera clase y } R \text{ arbitraria}. \quad (1.13.8)$$

La demostración de todas las propiedades anteriores es directa a partir de la definición del paréntesis de Dirac, a excepción de la identidad de Jacobi, aunque en estos momentos no es de principal interés para esta tesis.

Por otro lado, debido a la propiedad (1.13.7) y sabiendo que H_E es de primera clase, las ecuaciones de movimiento (1.12.8) se pueden reescribir como,

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\} \approx \{F, H_E\}_D, \quad \forall F, \quad (1.13.9)$$

y en particular, el efecto de una transformación de norma se podrá escribir como,

$$\{F, \gamma^\alpha\} \approx \{F, \gamma^\alpha\}_D, \quad \forall F. \quad (1.13.10)$$

Así, la situación general hasta este punto es la siguiente. El paréntesis de Poisson, que en un principio ayudó a realizar la separación entre restricciones de primera y segunda clase, se generalizó al paréntesis de Dirac, en términos del cual se pueden escribir las ecuaciones más importantes del formalismo, (1.13.9) y (1.13.10). Además, las restricciones de segunda clase se convierten simplemente en identidades que expresan algunas variables canónicas en términos de otras (ecuaciones fuertes).

1.14. Observables

Una *observable* (clásica) es, por definición, una función en la superficie de restricciones que es invariante de norma, o en otras palabras, una observable es una función, $\mathcal{O}$, cuyo paréntesis de Dirac con las restricciones de primera clase es débilmente cero,

$$\{\mathcal{O}, \gamma^\alpha\}_D \approx 0. \quad (1.14.1)$$

A pesar de que a estas funciones $\mathcal{O}$ se les llamó observables, la definición es puramente teórica, el significado experimental va más allá de lo presentado aquí. Otro aspecto importante a señalar es que las observables clásicas, podrían no serlo a nivel cuántico.

Capítulo 2

Sistemas continuos regulares

El estudio de la dinámica de sistemas físicos usualmente se resume en el análisis de un conjunto de ecuaciones diferenciales (ecuaciones de movimiento). En principio, existen distintas maneras de encontrar tales ecuaciones, para los sistemas mecánicos compuestos por partículas puntuales (sistemas discretos), son las Leyes de Newton aquellas que determinan sus ecuaciones de movimiento, aunque no es el único camino orientado a la obtención de tales ecuaciones, otros dos enfoques bastante conocidos son los presentados por las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana, que además están estrechamente relacionadas por una transformada de Legendre y tienen la ventaja de proporcionar resultados más generales. Sin embargo, no todos los sistemas físicos se pueden examinar o describir mediante configuraciones discretas, por lo que es necesario introducir una estructura nueva, donde la dinámica ahora estará descrita por medio de *campos físicos*¹, los cuales representarán distribuciones de magnitudes físicas sobre el espacio-tiempo (para 4 dimensiones), se dice entonces que el sistema es continuo. Este nuevo enfoque se conoce como *Teoría Clásica de Campos* (ver [11]) y es por medio del cual se analizan varias teorías de suma importancia, tales como: Electromagnetismo, Relatividad General, etc.

Como ejemplo para introducir los sistemas continuos y su relación con los sistemas discretos [9], considere una cuerda elástica unidimensional formada por n partículas puntuales de masa m , conectadas mediante resortes uniformes sin masa de longitud l y constante de rigidez k , las cuales se desplazan únicamente de forma horizontal.

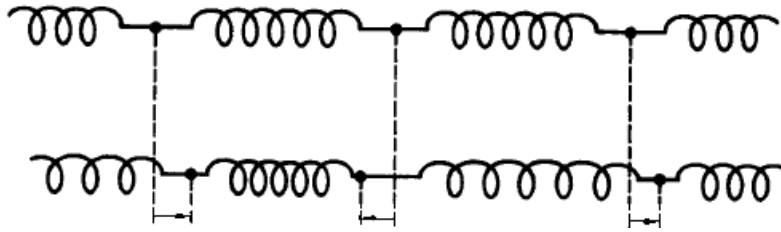


Figura 2.1: Sistema discreto de masas puntuales iguales conectadas por resortes

Tomando en cuenta un desplazamiento infinitesimal (pequeña vibración longitudinal) ζ_i respecto a los puntos de equilibrio de cada masa, no importando la dirección de movimiento de cada una, ver Figura 2.1². Si ζ_j representa el desplazamiento de la j -ésima masa respecto a su posición de

¹Los campos físicos se representan matemáticamente por medio de funciones, con valores reales o complejos, que están bien definidas en cada punto de su dominio, su estructura se elige dependiendo del sistema a estudiar, los campos pueden ser funciones escalares, vectoriales o tensoriales, entre otras.

²Imagen extraída del capítulo 13 de [9].

CAPÍTULO 2. SISTEMAS CONTÍNUOS REGULARES

equilibrio. Calculando la energía cinética T y potencial V ,

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{\zeta}_j^2 \quad y \quad V = \sum_j \frac{1}{2} k (\zeta_j - \zeta_{j-1})^2 \quad (2.0.1)$$

se tiene la función Lagrangiana,

$$L = \sum_j \frac{1}{2} \left[m \dot{\zeta}_j^2 - k (\zeta_j - \zeta_{j-1})^2 \right] = \sum_j \frac{1}{2} l \left[\frac{m}{l} \dot{\zeta}_j^2 - kl \left(\frac{\zeta_j - \zeta_{j-1}}{l} \right)^2 \right]. \quad (2.0.2)$$

Ahora, para este sistema en particular, es posible pasar de la estructura discreta a la continua, una de las principales razones para realizar tal transición se debe al hecho de que si $n \rightarrow \infty$, mientras $l \rightarrow 0$, se tendrá un número infinito de ecuaciones diferenciales a resolver, por lo cual, es más sencillo considerar una sola función que describa el movimiento de todo el sistema. Entonces, si se tiene un número no finito de coordenadas generalizadas ζ_j 's, donde el índice discreto j indica el número de la variable dinámica, es posible remplazar este índice j por un parámetro continuo x , en consecuencia, todas las coordenadas $\zeta_j(t)$ pasan a ser una función o campo dado por $\zeta(x, t)$. De igual manera, tomando tales consideraciones, algunos elementos pasarán a ser operadores continuos. En resumen, la transición se ve como sigue:

$$\begin{aligned} j &\rightarrow x, \\ \zeta_j(t) &\rightarrow \zeta(x, t), \\ \frac{\zeta_j - \zeta_{j-1}}{l} &\rightarrow \frac{\zeta(x, t) - \zeta(x - l, t)}{l}, \\ \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\zeta_j - \zeta_{j-1}}{l} &\rightarrow \frac{d\zeta(x, t)}{dx}, \\ \lim_{l \rightarrow 0} \sum_j l &\rightarrow \int dx. \end{aligned}$$

De manera que,

$$L = \frac{1}{2} \sum_j l \left[\frac{m}{l} \dot{\zeta}_j^2 - kl \left(\frac{\zeta_j - \zeta_{j-1}}{l} \right)^2 \right] \rightarrow L = \frac{1}{2} \int dx \left[\mu \dot{\zeta}^2 - Y \left(\frac{d\zeta}{dx} \right)^2 \right],$$

donde se observa que habrá una sola ecuación de movimiento correspondiente al campo $\zeta(x, t)$, la cual generaliza la dinámica de la cuerda elástica para todo el espacio unidimensional, además, $\mu = \frac{m}{l}$ se identifica como la masa por unidad de longitud y $Y = kl$ como el módulo de Young. Así, por medio de este breve ejemplo se pueden comparar ambas estructuras, discreta y continua, sobre todo porque para este sistema existe la posibilidad de estudiarlo mediante los dos enfoques.

En lo que sigue, se dará una breve introducción a la teoría clásica de campos o sistemas continuos. Se presentarán algunos de los elementos más importantes en las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana para este tipo de sistemas, analizados más detalladamente en [9], [10] y [14].

Y a pesar de que en los siguientes capítulos se va a emplear el algoritmo de Dirac-Bergmann para analizar teorías de campos singulares, no se hará un análisis previo del algoritmo para esta clase de sistemas, como en el capítulo anterior para sistemas discretos singulares, es decir, todos los conceptos y resultados que se presentan en este capítulo son para teorías de campos regulares. En principio, esto se debe a que el procedimiento a seguir va a ser análogo al caso discreto singular, de manera que, los resultados presentados en el Capítulo 1 van a seguir siendo aplicables, sólo que ahora tomando en cuenta que se está en sistemas continuos (con sus correspondientes definiciones). Así, introducir los siguientes conceptos y resultados de teorías de campos regulares, va a servir después para el estudio de la formulación hamiltoniana de teorías de campos singulares.

Finalmente, como comentario adicional, a lo largo de este capítulo y los siguientes, el análisis de las teorías de campos se va a restringir a espacios-tiempo de 4 dimensiones.

2.1. Formulaci3n lagrangiana

Iniciando con la formulaci3n lagrangiana, se considera un sistema f3sico (cont3nuo) que puede ser descrito por medio de n variables dinámicas, las cuales est3n dadas por un conjunto de campos f3sicos Φ^I independientes, con $I = 1, \dots, n$, es decir, el índice I va a indicar sobre qu3 campo se est3 hablando. Adem3s, debido a que el sistema cont3nuo se encuentra definido en un espacio-tiempo de 4 dimensiones ($\mathcal{M}$), los campos van a depender de 4 par3metros³: la coordenada temporal x^0 (par3metro de evoluci3n temporal) y las coordenadas espaciales x^j , con $j = 1, 2, 3$, por lo que, $\Phi^I = \Phi^I(x^0, x^j)$. En general, las coordenadas espacio-temporales se etiquetarán por $x^\alpha = (x^0, x^j) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, de manera que los campos son tales que, $\Phi^I = \Phi^I(x^\alpha)$. Tambi3n, por simplicidad, se har3 uso de la notaci3n $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \equiv \partial_\alpha$ y de la convenci3n de suma de Einstein.

Entonces, tomando en cuenta las consideraciones anteriores, lo primero a mencionar es que la funcional de acci3n S ahora est3 dada por:

$$S[\Phi^I] = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}(\Phi^I, \partial_\alpha \Phi^I; x^\alpha) d^4V, \quad (2.1.1)$$

se puede identificar a la funci3n lagrangiana como,

$$L = \int_{\Sigma} \mathcal{L} d^3V. \quad (2.1.2)$$

A esta nueva funci3n $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi^I, \partial_\alpha \Phi^I; x^\alpha)$ se le conoce como *densidad lagrangiana*, lo cual se debe principalmente a que en la ecuaci3n (2.1.2), L se expresa como la integral de $\mathcal{L}$ sobre un dominio Σ contenido en la parte espacial tridimensional del espacio-tiempo. Cabe notar que d^4V corresponde al elemento de volumen del espacio-tiempo, el cual se define como $d^4V = \sqrt{|\det g|} d^4x$, donde g es el tensor métrico escrito con respecto a una base de coordenadas espacio-temporales x^α y $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$. De manera an3loga, d^3V corresponde al elemento de volumen de la parte espacial tridimensional del espacio-tiempo, que se define como $d^3V = \sqrt{|\det g'|} d^3x$, donde g' es el tensor métrico escrito con respecto a una base de coordenadas espaciales x^j y $d^3x = dx^1 dx^2 dx^3$. Realizando la variaci3n de la acci3n (2.1.1) e igualando a cero,

$$\delta S[\Phi^I] = 0, \quad (2.1.3)$$

desarrollando,

$$\begin{aligned} \delta S[\Phi^I] &= \delta \left(\int_{\mathcal{M}} \mathcal{L} d^4x \right) = \int_{\mathcal{M}} \delta \mathcal{L}(\Phi^I, \partial_\alpha \Phi^I; x^\alpha) d^4V \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^J} \delta \Phi^J + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \Phi^J)} \delta (\partial_\alpha \Phi^J) \right) d^4V \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^J} \delta \Phi^J + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \Phi^J)} \partial_\alpha (\delta \Phi^J) \right] d^4V \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^J} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \Phi^J)} \right) \right) \delta \Phi^J + \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \Phi^J)} \delta \Phi^J \right) \right] d^4V \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^J} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \Phi^J)} \right) \right] \delta \Phi^J d^4V + \int_{\partial \mathcal{M}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \Phi^J)} \delta \Phi^J \right) dS_\alpha \\ &= 0, \end{aligned}$$

³Note que a diferencia de los sistemas discretos, donde las coordenadas generalizas dependen de un único par3metro, el de evoluci3n temporal t , en los sistemas cont3nuos, definidos en un espacio-tiempo de 4 dimensiones, los campos (que ahora actúan como variables dinámicas) dependen de 3 par3metros extra, las coordenadas espaciales x^j , adem3s del par3metro de evoluci3n temporal x^0 .

CAPÍTULO 2. SISTEMAS CONTÍNUOS REGULARES

2.2. FORMULACIÓN HAMILTONIANA

y recordando que los campos Φ^I son independientes, además de imponer las condiciones de frontera $\delta\Phi^J|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ (como es estándar), de manera que el término de frontera se anula. Entonces, las ecuaciones de movimiento en la formulación lagrangiana para sistemas continuos van a ser:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi^I} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\Phi^I)} \right) = 0, \quad (2.1.4)$$

siendo un conjunto de n ecuaciones diferenciales, también conocidas como *ecuaciones de Euler-Lagrange para campos*, que son parecidas a las que se obtienen en el formalismo discreto, con la diferencia de que en (2.1.4) hay más términos debido a que los campos Φ^I no sólo dependen de la coordenada temporal x^0 , sino que también dependen de las coordenadas espaciales x^j . Por otro lado, se observa que tanto la acción (2.1.1) como las ecuaciones de movimientos (2.1.4) están dadas a partir de la densidad lagrangiana y no por la lagrangiana, esto se debe a que $\mathcal{L}$ va a remplazar a L en el sentido de que ahora es la función por medio de la cual se obtendrá la dinámica del sistema.

Ahora que se tienen algunos de los conceptos importantes de la formulación lagrangiana en sistemas continuos regulares, se pasará a revisar la formulación hamiltoniana para este mismo tipo de sistemas.

2.2. Formulación hamiltoniana

En esta sección se dará una breve introducción a la formulación hamiltoniana para sistemas continuos regulares, con el objetivo de que algunos de los conceptos introducidos aquí sirvan después para el estudio de la formulación hamiltoniana de sistemas continuos singulares. Entonces, siguiendo nuevamente la analogía con el caso discreto regular, primero se definen los *momentos canónicos* asociados a los campos físicos Φ^I 's como,

$$\Pi_I \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi^I)}, \quad (2.2.1)$$

por consiguiente, ahora es posible definir una nueva cantidad,

$$\mathcal{H} = (\partial_0\Phi^I)\Pi_I - \mathcal{L}, \quad (2.2.2)$$

que se conoce como *densidad hamiltoniana*⁴, cuya relación con la función Hamiltoniana está dada por,

$$H = \int_{\Sigma} \mathcal{H}(\Phi^I, \Pi_I, \partial_i\Phi^J; x^\alpha) d^3V. \quad (2.2.3)$$

Cabe notar que $\mathcal{H}$ no depende de las derivadas parciales de los campos Φ^I 's respecto al parámetro de evolución temporal x^0 , lo cual se debe al hecho de que $\mathcal{H}$ se define como una transformada de Legendre de $\mathcal{L}$, donde lo que se pretende es invertir las velocidades $(\partial_0\Phi^I)$'s en función de los campos Φ^I 's y momentos Π_I 's, un procedimiento que se realiza por medio de las ecuaciones (2.2.1). En principio, esto es posible ya que se considera que la teoría es regular.

Haciendo uso de la ecuación (2.2.2) en (2.1.1), ahora la acción S está dada por,

$$S[\Phi^I, \Pi_I] = \int_{\mathcal{M}} [(\partial_0\Phi^I)\Pi_I - \mathcal{H}] d^4V. \quad (2.2.4)$$

Así, realizando la variación de (2.2.4) e igualando a cero,

$$\delta S[\Phi^I, \Pi_I] = 0, \quad (2.2.5)$$

⁴Observe que la transición entre las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana ahora está dada a través de la transformada de Lagrange entre las densidades $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ y no entre las funciones L y H .

CAPÍTULO 2. SISTEMAS CONTÍNUOS REGULARES

2.3. PARÉNTESIS DE POISSON

donde, recordando que los campos Φ^I 's y momentos Π_I 's son independientes, además de que los términos de superficie se anulan en la frontera, se obtienen las ecuaciones de movimiento en la formulación hamiltoniana para sistemas continuos:

$$\dot{\Phi}^I = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi_I} \quad y \quad \dot{\Pi}_I = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Phi^I} \quad (2.2.6)$$

siendo un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales, también conocidas como *ecuaciones de Hamilton para campos*⁵, que son parecidas a las que se obtienen en el formalismo discreto, con la diferencia de que en (2.2.6) aparecen derivadas funcionales en vez de derivadas parciales. Nuevamente se observa que tanto la acción (2.2.4) como las ecuaciones de movimiento (2.2.6) están dadas a partir de la densidad hamiltoniana y no por la hamiltoniana, esto es, $\mathcal{H}$ reemplaza a H en el sentido de que ahora es la función por medio de la cual se estudia la dinámica del sistema.

2.3. Paréntesis de Poisson

Un elemento más que se va a necesitar al momento de aplicar el algoritmo de Dirac-Bergmann a los sistemas continuos y que también va ligado a la formulación hamiltoniana, son los paréntesis de Poisson. Debido a esto, se presentan como sigue.

Definición: Sean F y G dos funcionales en el espacio fase definido por $(\Phi^I(x^\alpha), \Pi_I(x^\alpha))$, su paréntesis de Poisson está dado por:

$$\begin{aligned} & \{F[\Phi^I(x^0, \vec{x}), \Pi_I(x^0, \vec{x})], G[\Phi^J(x^0, \vec{y}), \Pi_J(x^0, \vec{y})]\} \\ &= \int_{\Sigma} d^3z \left(\frac{\delta F[\Phi^I(x^0, \vec{x}), \Pi_I(x^0, \vec{x})]}{\delta \Phi^K(x^0, \vec{z})} \frac{\delta G[\Phi^J(x^0, \vec{y}), \Pi_J(x^0, \vec{y})]}{\delta \Pi_K(x^0, \vec{z})} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\delta G[\Phi^J(x^0, \vec{y}), \Pi_J(x^0, \vec{y})]}{\delta \Phi^K(x^0, \vec{z})} \frac{\delta F[\Phi^I(x^0, \vec{x}), \Pi_I(x^0, \vec{x})]}{\delta \Pi_K(x^0, \vec{z})} \right), \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

donde las funcionales están evaluadas al mismo parámetro de evolución temporal x^0 . Por simplicidad en la notación, la expresión anterior se va a denotar como,

$$\{F(\vec{x}), G(\vec{y})\} = \int_{\Sigma} d^3z \left(\frac{\delta F(\vec{x})}{\delta \Phi^K(\vec{z})} \frac{\delta G(\vec{y})}{\delta \Pi_K(\vec{z})} - \frac{\delta G(\vec{y})}{\delta \Phi^K(\vec{z})} \frac{\delta F(\vec{x})}{\delta \Pi_K(\vec{z})} \right), \quad (2.3.2)$$

donde se observa que la estructura de (2.3.2) es similar a los paréntesis de Poisson que se definen para los sistemas discretos, con la diferencia de que ahora aparecen derivadas funcionales en vez de derivadas parciales y además se está integrando sobre un dominio Σ contenido en la parte espacial tridimensional del espacio-tiempo. Ahora, si se eligen F y G como los campos Φ^I y sus momentos canónicos asociados Π_J , se tiene como resultado los paréntesis de Poisson fundamentales:

$$\{\Phi^I(x^0, \vec{x}), \Pi_J(x^0, \vec{y})\} = \delta_J^I \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.3.3)$$

$$\{\Phi^I(x^0, \vec{x}), \Phi^J(x^0, \vec{y})\} = 0, \quad (2.3.4)$$

$$\{\Pi_I(x^0, \vec{x}), \Pi_J(x^0, \vec{y})\} = 0. \quad (2.3.5)$$

⁵Note que en las ecuaciones se ha denotado a $\partial_0 \Phi^I \equiv \dot{\Phi}^I$ y $\partial_0 \Pi_I \equiv \dot{\Pi}_I$. En los capítulos siguientes se seguirá usando esta notación.

Capítulo 3

Pontryagin abeliano

La teoría de Pontryagin se caracteriza por ser una teoría topológica, es decir, carece de grados de libertad locales. En principio, este hecho se puede ver directamente de su correspondiente acción, ya que se puede escribir como una derivada exterior, por lo cual sus ecuaciones de movimiento van a ser identidades y por tanto no habrá dinámica. De los motivos por los cuales anteriormente se ha analizado la teoría de Pontryagin, están las dos características que comparte con Relatividad General, la invarianza bajo difeomorfismos y la independencia del espacio-tiempo de fondo. En este capítulo se estudia la teoría de Pontryagin mediante el algoritmo de Dirac-Bergmann y a pesar de que en la literatura dicha teoría ya ha sido estudiada, véase [15], la diferencia con el análisis presentado en este capítulo radica en las variables dinámicas que se eligen para definir la hamiltoniana canónica H_C del sistema, ya que al realizar este cambio el análisis de la teoría se simplifica y como se verá a continuación, deja de presentar reducibilidad. Cabe mencionar que el hecho de que uno pueda elegir entre distintos conjuntos variables canónicas para representar a H_C , se debe a las relaciones entre las variables que se obtienen cuando se definen y calculan los momentos.

3.1. La acción

La acción correspondiente a la teoría de Pontryagin abeliana en cuatro dimensiones es

$$S_{Po}[A] = \kappa \int_{\mathcal{M}} (F \wedge F), \quad (3.1.1)$$

donde $\mathcal{M}$ es una variedad¹ globalmente hiperbólica² de 4 dimensiones, $A = A_\alpha dx^\alpha$ es una 1-forma y $F = dA$ es su correspondiente forma de curvatura abeliana. Considerando que en la variedad $\mathcal{M}$ se tiene definida una conexión ∇_α y además es libre de torsión, realizando el siguiente cálculo,

¹Para más información sobre tópicos de geometría diferencial y sus aplicaciones en la física teórica, consultar [13].

²El concepto de variedad globalmente hiperbólica se puede consultar con más detalle en el Apéndice A.

$$\begin{aligned}
 F &= dA = d(A_\beta dx^\beta) = dA_\beta \wedge dx^\beta + A_\beta d^2x^\beta \\
 &= (\nabla_\alpha A_\beta) dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
 &= \frac{1}{2}(\nabla_\alpha A_\beta + \nabla_\beta A_\alpha) dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
 &= \frac{1}{2}(\nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha) dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
 &= \frac{1}{2}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) dx^\alpha \wedge dx^\beta \\
 &= \frac{1}{2}F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta,
 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

se hace notar que F es una 2-forma, con $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, de manera que la acción se puede expresar como

$$S_{Po}[A] = \frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{3.1.3}$$

$$= \frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} d^4x, \tag{3.1.4}$$

con $d^4x := dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ y $\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} = (-1)^{\tilde{s}} \sqrt{|\det g|} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$, siendo $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ el símbolo de Levi-Civita, completamente antisimétrico, y $\tilde{s}$ la signatura de la métrica g empleada³.

Realizando la variación de la acción $S_{Po}[A]$ (3.1.4) e igualando a cero,

$$\begin{aligned}
 \delta S_{Po}[A] &= \delta \left[\frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} d^4x \right] \\
 &= \frac{\kappa}{4} \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} \delta(F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}) \\
 &= \frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \delta F_{\alpha\beta} \\
 &= \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \delta(-\partial_\beta A_\alpha) \\
 &= -\kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \partial_\beta (\delta A_\alpha) \\
 &= -\kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\beta (\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \delta A_\alpha) + \kappa \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} [\partial_\beta F_{\mu\nu}] \delta A_\alpha \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

y tomando en cuenta que los términos de superficie se anulan, se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\beta F_{\mu\nu} = 0, \tag{3.1.5}$$

que en realidad corresponden a las identidades de Bianchi, las cuales se satisfacen trivialmente, esto es, para cualesquiera A_α . Cabe notar que el comportamiento de estas ecuaciones hace evidente

³La signatura de un tensor métrico g comunmente se define como $s = (v, p, r)$, donde v , p , r son los números (contando con multiplicidad) de valores propios positivos, negativos y cero, respectivamente, de la matriz simétrica $(g_{\alpha\beta})$ del tensor métrico con respecto a una base. Sin embargo, en esta ocasión se usa otra definición de signatura, siendo $\tilde{s} = v - p$, donde v y p son como anteriormente. Por ejemplo, para el espacio-tiempo de Minkowski, donde se denota $g = \eta$, se tiene que $\tilde{s} = \pm 2$, el signo “+” corresponde a $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y el signo “-” a $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Una propiedad extra es que $n = v + p$, con n la dimensión de la variedad.

el hecho de que la teoría no presenta dinámica, lo cual se verá con más detalle en el análisis hamiltoniano al momento de calcular los grados de libertad.

Por otra parte, si se considera que la variedad $\mathcal{M}$ puede ser foliada en superficies Σ tridimensionales a lo largo de un intervalo temporal I , es posible realizar la descomposición 3+1 de la acción

$$\begin{aligned}
 S_{Po}[A] &= \frac{\kappa}{4} \int_I \int_{\Sigma} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} d^3x dx^0 \\
 &= \frac{\kappa}{4} \int_I \int_{\Sigma} (F_{0\beta} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{0\beta\mu\nu} + F_{i\beta} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{i\beta\mu\nu}) d^3x dx^0 \\
 &= \frac{\kappa}{4} \int_I \int_{\Sigma} (F_{0i} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{0i\mu\nu} + F_{i0} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{i0\mu\nu} + F_{jk} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{jk\mu\nu}) d^3x dx^0 \\
 &= \frac{\kappa}{4} \int_I \int_{\Sigma} (2F_{0i} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} + F_{jk} F_{0i} \tilde{\varepsilon}^{jk0i} + F_{jk} F_{i0} \tilde{\varepsilon}^{jk i0}) d^3x dx^0 \\
 &= \kappa \int_I \int_{\Sigma} F_{0i} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} d^3x dx^0 \\
 &= \kappa \int_I \int_{\Sigma} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} d^3x dx^0,
 \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

donde se identifica a la densidad lagrangiana de la teoría,

$$\mathcal{L}_{Po} = \kappa (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}, \tag{3.1.7}$$

siendo A_0 y A_i las 4 variables dinámicas.

3.2. Matriz hessiana

Una vez que se cuenta con la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_{Po}$ (3.1.7), se procede a revisar si la teoría es singular o no, para ello se calcula la matriz hessiana,

$$H = (H^{\alpha\beta}) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{Po}}{\partial(\partial_0 A_\alpha) \partial(\partial_0 A_\beta)} \right) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{Po}}{\partial \dot{A}_\alpha \partial \dot{A}_\beta} \right), \tag{3.2.1}$$

cuyas componentes, explícitamente, se resumen en los siguientes términos,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{Po}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{Po}}{\partial \dot{A}_\alpha \partial \dot{A}_0} = 0 \tag{3.2.2}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{Po}}{\partial \dot{A}_l} = \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \quad \implies \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{Po}}{\partial \dot{A}_\alpha \partial \dot{A}_l} = 0, \tag{3.2.3}$$

los cuales indican que H es la matriz cuadrada cero de orden 4, de manera que la teoría es singular y por consiguiente, se realizará el análisis hamiltoniano mediante el algoritmo de Dirac-Bergmann.

3.3. Restricciones primarias

Como $H = 0_{4 \times 4}$, se tiene que el $\text{Rango}(H) = 0$ y la $\text{Nulidad}(H) = 4$, por lo cual se esperan 4 restricciones primarias. Calculando los momentos canónicos,

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_{Po}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad (3.3.1)$$

y

$$\Pi^l = \frac{\partial \mathcal{L}_{Po}}{\partial \dot{A}_l} = \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk}, \quad (3.3.2)$$

se observa que no es posible despejar ninguna de las $\dot{A}_\alpha$ en términos de los campos y momentos, no obstante el hecho de que existan este tipo de relaciones permite definir las siguientes expresiones

$$\phi^0 := \Pi^0 \approx 0 \quad (3.3.3)$$

y

$$\phi^l := \Pi^l - \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \approx 0, \quad (3.3.4)$$

que corresponden a las 4 restricciones primarias esperadas.

3.4. Condiciones de regularidad

Ahora que se cuenta con las restricciones primarias ϕ^0 y ϕ^l , se requiere que cumplan con las condiciones de regularidad. Fijándose en la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial \phi^\mu}{\partial (A_\nu, \Pi^\nu)} \right)$, se necesita entonces que su rango sea constante e igual al número de restricciones primarias independientes. De forma explícita, la matriz jacobiana es

$$\left(\frac{\partial (\phi^0, \phi^l)}{\partial (A_\nu, \Pi^\nu)} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.4.1)$$

que, en efecto, tiene rango constante e igual a 4, la misma cantidad de restricciones primarias encontradas. Así, se concluye que ϕ^0 y ϕ^l , dadas por (3.3.3) y (3.3.4) respectivamente, van a definir una subvariedad de dimensión 4 en el espacio fase (A_α, Π^α) .

3.5. Hamiltoniana canónica y primaria

A pesar de que ninguna $\dot{A}_\alpha$ pudo ser despejado en términos de los campos y momentos, del Capítulo 1 se sabe que es posible definir la función hamiltoniana canónica

$$H_C := \int \left(\Pi^\alpha \dot{A}_\alpha - \mathcal{L}_{Po} \right) d^3x, \quad (3.5.1)$$

donde, aunque H_C se construye de manera similar a la hamiltoniana de los sistemas regulares, esta nueva función sólo está bien definida en la superficie de restricciones primarias.

En este análisis, antes de calcular a H_C explícitamente, primero será necesario observar lo siguiente. En principio, se puede suponer que la hamiltoniana canónica tiene la siguiente dependencia funcional $H_C = H_C[A_0, A_i, \Pi^0, \Pi^i]$, pero al momento de sustituir $\mathcal{L}_{Po}$ (3.1.7) en (3.5.1) y emplear las definiciones de los momentos, (3.3.1) y (3.3.2), para simplificar, se tendrá que H_C sólo depende explícitamente de algunas variables canónicas.

CAPÍTULO 3. PONTRYAGIN ABELIANO

3.5. HAMILTONIANA CANÓNICA Y PRIMARIA

En particular, debido a la segunda relación (3.3.2), $\Pi^l = \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} = 2\kappa \partial_j A_k \tilde{\varepsilon}^{0ljk}$, H_C se podrá expresar por medio de dos conjuntos de variables canónicas distintos, dependiendo si uno elige quedarse con los momentos Π^l o con los campos A_k . Por lo que se tendrán dos hamiltonianas canónicas equivalentes dependiendo de la elección realizada (tomando en cuenta también que por la relación (3.3.1), $\Pi^0 = 0$):

1. **Eligiendo Π^i :** $H_C[A_0, A_i, \Pi^0, \Pi^i] \rightarrow \bar{H}_C[A_0, \Pi^i]$ con

$$\bar{H}_C[A_0, \Pi^i] = \int (\partial_i A_0) \Pi^i d^3x = - \int A_0 (\partial_i \Pi^i) d^3x, \quad (3.5.2)$$

la cual corresponde a la hamiltoniana canónica reportada en la literatura [15]. Y donde se muestra que la teoría presenta reducibilidad.

2. **Eligiendo A_i :** $H_C[A_0, A_i, \Pi^0, \Pi^i] \rightarrow H_C[A_0, A_i]$ con

$$\begin{aligned} H_C[A_0, A_i] &= \int \left[\Pi^0 \dot{A}_0 + \Pi^i \dot{A}_i - \kappa (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right] d^3x \\ &= \int \left[\Pi^0 \dot{A}_0 + (\Pi^i - \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}) \dot{A}_i + \kappa (\partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right] d^3x \\ &= \kappa \int (\partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} d^3x, \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

esta segunda elección de las variables canónicas, a partir de la definición de los momentos, es la propuesta en este trabajo de tesis. A estas variables se les llamará: *variables canónicas propuestas* para diferenciarlas de las reportadas en la literatura [15]. Y como se verá más adelante en este capítulo, con esta elección de variables la teoría de Pontryagin ya no presenta reducibilidad; así como también se tendrá una simplificación en los cálculos.

Cabe recordar que estas dos formas diferentes de representar a H_C existen debido a la ecuación (3.3.2), $\Pi^l = \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} = 2\kappa \partial_j A_k \tilde{\varepsilon}^{0ljk}$, también es importante aclarar que la elección entre los dos distintos conjuntos de variables canónicas que pueden representar a H_C no va a modificar la dinámica del sistema, esto es, los resultados finales serán equivalentes, lo cual se verá con más detalle en el capítulo siguiente. Además, las diferencias significativas que van a existir al elegir unas variables antes que otras, tienen que ver con evitar (o agregar) ciertas características que surgen durante el procedimiento, como por ejemplo, la reducibilidad en la teoría.

Con base en el razonamiento previo, en este análisis hamiltoniano de la teoría de Pontryagin se van a realizar los cálculos posteriores considerando la hamiltoniana canónica como en (3.5.3), y más adelante se hará una comparación con los resultados presentados en [15], donde se hace uso de (3.5.2). En otras palabras, en este capítulo se realiza el estudio de la teoría de Pontryagin eligiendo el conjunto de variables canónicas (A_0, A_i) que es distinto al que se ha empleado en la literatura (A_0, Π^i) para definir a la hamiltoniana canónica. Entonces, una vez que se ha calculado $H_C = H_C[A_0, A_i]$, se define la hamiltoniana primaria

$$H_1 := H_C[A_0, A_i] + \int [u_0 \phi^0 + u_i \phi^i] d^3x \quad (3.5.4)$$

$$= \int [\kappa (\partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} + u_0 \Pi^0 + u_i (\Pi^i - \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk})] d^3x, \quad (3.5.5)$$

con (u_0, u_i) los multiplicadores de Lagrange y (ϕ^0, ϕ^i) las restricciones primarias. Note que una vez construido H_1 , en los cálculos posteriores ya no será posible realizar cambios entre las variables canónicas que definen a H_C , es decir, H_C se debe mantener fija con respecto a las variables elegidas para representarla.

3.6. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias

Ya que se ha obtenido la hamiltoniana primaria, el siguiente paso es comprobar que las restricciones primarias satisfacen las condiciones de consistencia, esto es, que no cambien con el tiempo,

$$\dot{\phi}^\mu = \{\phi^\mu, H_1\} \approx 0. \quad (3.6.1)$$

Cabe notar que al realizar el cálculo directo de las ecuaciones (3.6.1), se podrán encontrar de forma explícita las restricciones secundarias, en caso de que las haya. Entonces, tomando en cuenta que los paréntesis de Poisson fundamentales para esta teoría están dados por⁴

$$\{A_\mu(x^0, \vec{x}), \Pi^\nu(x^0, \vec{y})\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = \delta_\mu^\nu \delta^3(x - y), \quad (3.6.2)$$

$$\{A_\mu(x^0, \vec{x}), A_\nu(x^0, \vec{y})\} = 0, \quad (3.6.3)$$

$$\{\Pi^\mu(x^0, \vec{x}), \Pi^\nu(x^0, \vec{y})\} = 0. \quad (3.6.4)$$

Para la primer restricción primaria

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^0(x) &= \{\phi^0(x), H_1\} = \int_\Sigma d^3y \{\phi^0(x), \mathcal{H}_1(y)\} \\ &= \int_\Sigma d^3y \{\phi^0, \mathcal{H}_C\} + \int_\Sigma d^3y u_0 \{\phi^0, \phi^0\} + \int_\Sigma d^3y u_i \{\phi^0, \phi^i\} \\ &= \int_\Sigma d^3y \{\Pi^0, \kappa(\partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}\} \\ &= \kappa \int_\Sigma d^3y F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \{\Pi^0, \partial_i A_0\} \\ &= \kappa \int_\Sigma d^3y F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_i \delta^3(x - y) \\ &= \kappa \partial_i F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} = 0, \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

se tienen las conocidas identidades de Bianchi, que son idénticamente igual a cero. En este resultado, si en vez de usar (3.5.3), se hace uso de (3.5.2) para definir a H_C , se obtiene una restricción secundaria, ver [15]. De manera que, esta primer condición de consistencia permite observar que la elección de variables dinámicas, para definir la hamiltoniana canónica, no sólo modifica H_C , sino también los resultados que se van a obtener durante el análisis hamiltoniano. No obstante, aunque en este análisis de Pontryagin no se haya obtenido una restricción secundaria y en la literatura [15] sí, la dinámica de la teoría de Pontryagin va a seguir siendo la misma. En general, aunque algunas de las expresiones que se obtengan en este análisis hamiltoniano de Pontryagin se vean modificadas, con respecto a las que se obtienen en [15], los resultados fundamentales que presenta la teoría de Pontryagin no van a cambiar, lo cual se podrá ver con más detalle en el capítulo siguiente.

⁴Estos paréntesis de Poisson fundamentales se obtienen empleando la definición dada en el capítulo 2 para los paréntesis de Poisson en sistemas continuos, (2.3.1) o (2.3.2), siendo ahora A_α y Π^α las variables canónicas.

Para las siguientes tres restricciones primarias

$$\begin{aligned}
\phi^l(x) &= \{\phi^l(x), H_1\} = \int_{\Sigma} d^3y \{\phi^l(x), \mathcal{H}_1(y)\} \\
&= \int_{\Sigma} d^3y \{\phi^l, \mathcal{H}_C\} + \int_{\Sigma} d^3y u_0 \{\phi^l, \phi^0\} + \int_{\Sigma} d^3y u_i \{\phi^l, \phi^i\} \\
&= \int_{\Sigma} d^3y \{\Pi^l - \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk}, \kappa (\partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} + u_i \Pi^i - \kappa u_i F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}\} \\
&= \int_{\Sigma} d^3y [\{\Pi^l, F_{jk}\} \kappa \tilde{\varepsilon}^{0ijk} (\partial_i A_0 - u_i) - \{F_{jk}, \Pi^i\} \kappa u_i \tilde{\varepsilon}^{0ljk}] \\
&= \kappa \int_{\Sigma} d^3y [2\tilde{\varepsilon}^{0ijk} (\partial_i A_0 - u_i) \partial_j \delta_k^l \delta^3(x-y) - 2u_i \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \partial_j \delta_k^i \delta^3(x-y)] \\
&= \kappa \int_{\Sigma} d^3y 2\tilde{\varepsilon}^{0lij} [(\partial_i A_0 - u_i) \partial_j \delta^3(x-y) + u_i \partial_j \delta^3(x-y)] \\
&= 2\kappa \tilde{\varepsilon}^{0lij} \partial_j \partial_i A_0 = 0,
\end{aligned} \tag{3.6.6}$$

el resultado también es igual a cero, lo cual se debe al hecho de que $\tilde{\varepsilon}^{0lij}$ es completamente antisimétrico y a que las derivadas parciales conmutan. En este cálculo, aunque se hayan elegido otras variables canónicas para definir a la hamiltoniana H_C , el resultado sigue siendo igual al que se obtiene en la literatura (tomando el caso abeliano), ver [15].

Como se cumplen las condiciones de consistencia de manera directa, se concluye que el sistema no presenta restricciones secundarias. También se observa que ningún multiplicador de Lagrange pudo ser determinado, lo cual es un primer indicio de que la teoría presenta transformaciones de norma.

3.7. Restricciones de primera y segunda clase

Ahora que se han encontrado todas las restricciones, 4 primarias y ninguna secundaria, un total de 4 restricciones, se procede a separarlas entre de primera y segunda clase. Haciendo uso de los paréntesis de Poisson fundamentales, dados por (3.6.2), (3.6.3) y (3.6.4), los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones están dados como sigue:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \{\phi^0, \phi^0\} \approx 0, \text{ ya que } \phi^0 \text{ sólo depende de } \Pi^0. \\
b) \quad & \{\phi^0, \phi^l\} \approx 0, \text{ ya que } \phi^0 \text{ sólo depende de } \Pi^0 \text{ y } \phi^l \text{ de } (A_i, \Pi^j). \\
c) \quad & \{\phi^l, \phi^k\} = \{\Pi^l - \kappa F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{0lij}, \Pi^k - \kappa F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{0kij}\} \\
&= \{\Pi^l, -\kappa F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{0kij}\} + \{-\kappa F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{0lij}, \Pi^k\} \\
&= -\kappa \{\Pi^l, F_{ij}\} \tilde{\varepsilon}^{0kij} - \kappa \{F_{ij}, \Pi^k\} \tilde{\varepsilon}^{0lij} \\
&= -2\kappa \tilde{\varepsilon}^{0kij} \partial_i \delta_j^l \delta^3(x-y) - 2\kappa \tilde{\varepsilon}^{0lij} \partial_i \delta_j^k \delta^3(x-y) \\
&= -2\kappa [\tilde{\varepsilon}^{0kil} + \tilde{\varepsilon}^{0lik}] \partial_i \delta^3(x-y) \\
&\approx 0.
\end{aligned}$$

De manera que, al construir la matriz W cuyas componentes corresponden a los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones,

$$W = (W^{\mu\nu}) = (\{\phi^\mu, \phi^\nu\}), \tag{3.7.1}$$

y recordando que la nulidad y el rango de W van a indicar el número de restricciones de primera y segunda clase que se esperan, respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{matrix} & \phi^0(y) & \phi^1(y) & \phi^2(y) & \phi^3(y) \\ \begin{matrix} \phi^0(x) \\ \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \\ \phi^3(x) \end{matrix} & \begin{pmatrix} \{\phi^0, \phi^0\} & \{\phi^0, \phi^1\} & \{\phi^0, \phi^2\} & \{\phi^0, \phi^3\} \\ \{\phi^1, \phi^0\} & \{\phi^1, \phi^1\} & \{\phi^1, \phi^2\} & \{\phi^1, \phi^3\} \\ \{\phi^2, \phi^0\} & \{\phi^2, \phi^1\} & \{\phi^2, \phi^2\} & \{\phi^2, \phi^3\} \\ \{\phi^3, \phi^0\} & \{\phi^3, \phi^1\} & \{\phi^3, \phi^2\} & \{\phi^3, \phi^3\} \end{pmatrix} \end{matrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

Así, a partir de (3.7.2), se tiene que el $\text{Rango}(W) = 0$ y la $\text{Nulidad}(W) = 4$, por lo cual todas las restricciones que se esperan son de primera clase. Además, fijándose en las componentes de W ,

$$\{\phi^\mu(x), \phi^\nu(y)\} \approx 0, \quad \forall \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \tag{3.7.3}$$

se concluye que las 4 restricciones de primera clase están dadas por las 4 restricciones primarias,

$$\gamma^0 := \Pi^0 \approx 0 \tag{3.7.4}$$

y

$$\gamma^l := \Pi^l - \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \approx 0, \tag{3.7.5}$$

lo cual se puede comprobar al calcular los vectores nulos de W , que corresponden a los vectores

$$\begin{aligned}
 V^1 &= (1, 0, 0, 0)\delta^3(x - y), & V^2 &= (0, 1, 0, 0)\delta^3(x - y), \\
 V^3 &= (0, 0, 1, 0)\delta^3(x - y), & V^4 &= (0, 0, 0, 1)\delta^3(x - y),
 \end{aligned} \tag{3.7.6}$$

y realizar las contracciones con el vector de restricciones primarias $\Phi = (\phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3)$, de manera que se obtendrán las restricciones de primera clase (3.7.4) y (3.7.5).

Cabe mencionar que, debido a que en este análisis hamiltoniano de Pontryagin no se obtuvieron restricciones secundarias, los únicos paréntesis de Poisson a calcular son los de las restricciones primarias $(\{\phi^\mu, \phi^\nu\})$. Entonces, a diferencia de lo que sucede en la literatura [15] tomando en cuenta el caso abeliano, donde hay una restricción secundaria, en esta situación no es necesario realizar otros cálculos, como por ejemplo, los paréntesis de Poisson de las restricciones primarias con la secundarias, puesto que no hay restricciones secundarias.

3.8. Grados de libertad

Una vez hecha la separación de restricciones correctamente, se procede a realizar el conteo de grados de libertad, que recordando del Capítulo 1, se calcula como sigue

$$\begin{aligned}
 GL &= \frac{1}{2} \left[\left(\begin{matrix} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{matrix} \right) - 2 \times \left(\begin{matrix} \text{Número de restricciones} \\ \text{de primera clase} \end{matrix} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\begin{matrix} \text{Número de restricciones de} \\ \text{segunda clase originales} \end{matrix} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{3.8.1}$$

Entonces, para la teoría de Pontryagin abeliano,

$$GL_{Po} = \frac{1}{2} [8 - 2(4) - 0] = 0, \quad (3.8.2)$$

un resultado que manifiesta el hecho de que la teoría es topológica y por ende no presenta dinámica. Además, con este resultado se puede concluir que la teoría no presenta reducibilidad, es decir, todas las restricciones obtenidas son independientes entre sí. Cabe notar que una de las razones por las cuales no hay reducibilidad se debe al hecho de que no hubo ninguna restricción secundaria, algo que sí ocurre en la literatura [15] (tomando el caso abeliano), donde hay una restricción secundaria y reducibilidad, de manera que la razón por la cual existe tal diferencia entre ambos análisis se puede asociar a la forma en que se define H_C , esto es, a la distinta elección del conjunto de variables canónicas empleadas para representar a H_C , ya que las restricciones secundarias son consecuencia de que se cumplan las condiciones de consistencia, donde se emplea explícitamente la hamiltoniana canónica.

3.9. Hamiltoniana y acción extendida

Como siguiente paso, se van a definir y calcular la acción y hamiltoniana extendidas, que dan la evolución dinámica completa del sistema hasta cuatro funciones arbitrarias, debido a los cuatro multiplicadores de Lagrange que no pudieron ser determinados. La acción extendida es por definición

$$\begin{aligned} S_E[A_\alpha, \Pi^\alpha, \lambda_0, \lambda_i] &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left(\Pi^0 \dot{A}_0 + \Pi^i \dot{A}_i - \mathcal{H}_C - \lambda_0 \gamma^0 - \lambda_i \gamma^i \right) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left(\Pi^0 \dot{A}_0 + \Pi^i \dot{A}_i - \kappa (\partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} - \lambda_0 \gamma^0 - \lambda_i \gamma^i \right), \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

donde se indentifica a la hamiltoniana extendida

$$H_E = \int_{\Sigma} d^3x \left(\kappa (\partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} + \lambda_0 \gamma^0 + \lambda_i \gamma^i \right). \quad (3.9.2)$$

Cabe notar que, si se integra por partes el primer término de (3.9.2) y se toma en cuenta que los términos de superficie se anulan, entonces,

$$\begin{aligned} H_E &= - \int_{\Sigma} d^3x \left(\kappa A_0 \partial_i F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} - \lambda_0 \gamma^0 - \lambda_i \gamma^i \right) + \int_{\Sigma} d^3x \partial_i \left(\kappa A_0 F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right) \\ &= \int_{\Sigma} d^3x \left(\lambda_0 \gamma^0 + \lambda_i \gamma^i \right), \end{aligned} \quad (3.9.3)$$

observando así que H_E se compone únicamente por una combinación lineal de restricciones de primera clase.

Realizando la variación de la acción (3.9.1) e igualando a cero,

$$\begin{aligned} \delta S_E &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[\Pi^0 \delta \dot{A}_0 + \delta \Pi^0 \dot{A}_0 + \Pi^i \delta \dot{A}_i + \delta \Pi^i \dot{A}_i - \kappa \delta (\partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right. \\ &\quad \left. - \kappa (\partial_i A_0) \delta F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} - \lambda_0 \delta \gamma^0 - \delta \lambda_0 \gamma^0 - \lambda_i \delta \gamma^i - \delta \lambda_i \gamma^i \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

desarrollando las variaciones, agrupando términos semejantes e integrando por partes, tomando en cuenta que los términos de superficie se anulan, se tiene,

$$\begin{aligned} \delta S_E = \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[\left(\kappa \partial_i F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} - \dot{\Pi}^0 \right) \delta A_0 + \left(2\kappa \partial_i \lambda_j \tilde{\varepsilon}^{0ijk} - \dot{\Pi}^k \right) \delta A_k \right. \\ \left. + \left(\dot{A}_0 - \lambda_0 \right) \delta \Pi^0 + \left(\dot{A}_k - \lambda_k \right) \delta \Pi^k - \gamma^0 \delta \lambda_0 - \gamma^k \delta \lambda_k \right] \\ = 0, \end{aligned} \quad (3.9.5)$$

así, las ecuaciones de movimiento son:

$$\delta A_0 : \dot{\Pi}^0 = \kappa \partial_i F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \quad (3.9.6)$$

$$\delta A_k : \dot{\Pi}^k = 2\kappa \partial_i \lambda_j \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \quad (3.9.7)$$

$$\delta \Pi^0 : \dot{A}_0 = \lambda_0 \quad (3.9.8)$$

$$\delta \Pi^k : \dot{A}_k = \lambda_k \quad (3.9.9)$$

$$\delta \lambda_0 : \gamma^0 = 0 \quad (3.9.10)$$

$$\delta \lambda_k : \gamma^k = 0, \quad (3.9.11)$$

que en principio, aunque son matemáticamente distintas a las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.1.5), son físicamente equivalentes, es decir, la interpretación de ambos conjuntos de ecuaciones proporciona la misma información sobre la dinámica que la teoría de Pontryagin. En el capítulo siguiente se realizará una breve comparación entre las ecuaciones de movimiento obtenidas en esta sección, donde se emplea (3.5.3) y las que se obtienen en la literatura [15], donde se emplea (3.5.2), observando que la principal diferencia se deberá a la restricción secundaria que se obtiene en [15].

3.10. Transformaciones de norma

Encontradas las ecuaciones de movimiento, el último paso es calcular las transformaciones de norma que mantienen invariantes estas ecuaciones. Haciendo uso del formalismo de Castellani⁵, se puede definir el generador de estas transformaciones, en términos de las restricciones de primera clase, como sigue,

$$G := \int_{\Sigma} d^3y [\varepsilon_{\alpha}(y) \gamma^{\alpha}(y)] = \int_{\Sigma} d^3y [\varepsilon_0(y) \gamma^0(y) + \varepsilon_i(y) \gamma^i(y)] \quad (3.10.1)$$

$$= \int_{\Sigma} d^3y [\varepsilon_0 \Pi^0 + \varepsilon_i (\Pi^i - \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk})]. \quad (3.10.2)$$

De manera que, las transformaciones de norma son,

$$A_{\alpha} \rightarrow A'_{\alpha} = A_{\alpha} + \delta A_{\alpha}, \quad (3.10.3)$$

$$\Pi^{\alpha} \rightarrow \Pi'^{\alpha} = \Pi^{\alpha} + \delta \Pi^{\alpha}, \quad (3.10.4)$$

donde

$$\delta A_0(x) = \{A_0(x), G\} = \int_{\Sigma} d^3y \varepsilon_0 \{A_0(x), \Pi^0(y)\} = \varepsilon_0(x) = \varepsilon_0 \quad (3.10.5)$$

$$\delta A_j(x) = \{A_j(x), G\} = \int_{\Sigma} d^3y \varepsilon_i \{A_j(x), \Pi^i(y)\} = \varepsilon_j(x) = \varepsilon_j \quad (3.10.6)$$

$$\delta \Pi^0(x) = \{\Pi^0(x), G\} = 0 \quad (3.10.7)$$

$$\delta \Pi^j(x) = \{\Pi^j(x), G\} = \int_{\Sigma} d^3y \varepsilon_i \{\Pi^j(x), -\kappa F_{lk}(y) \tilde{\varepsilon}^{0ilk}\} = 2\kappa \tilde{\varepsilon}^{0jlk} \partial_l \varepsilon_k. \quad (3.10.8)$$

⁵Para más información ver [19].

CAPÍTULO 3. PONTRYAGIN ABELIANO

3.10. TRANSFORMACIONES DE NORMA

Si ahora se define,

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &:= \partial_0 \varepsilon = \partial_0 \varepsilon \\ \varepsilon_j &:= \partial_j \varepsilon,\end{aligned}$$

entonces, a partir de (3.10.5) y (3.10.6), los campos A_α se van a transformar como

$$A_\alpha \rightarrow A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \varepsilon. \quad (3.10.9)$$

Note que este cambio también hace que $\delta \Pi^\alpha = 0$, es decir, $\Pi'^\alpha = \Pi^\alpha$.

Adicionalmente, como se desea hacer evidente el hecho de que la teoría es invariante bajo difeomorfismos, los parámetros de norma se pueden definir directamente como,

$$\varepsilon_0 := \mathcal{L}_\vartheta A_0 \quad (3.10.10)$$

$$\varepsilon_j := \mathcal{L}_\vartheta A_j, \quad (3.10.11)$$

siendo $\mathcal{L}_\vartheta$ la derivada de Lie a lo largo de un campo vectorial ϑ arbitrario. Entonces, las transformaciones de norma de los campos A_α toman la forma,

$$A_\alpha \rightarrow A'_\alpha = A_\alpha + \mathcal{L}_\vartheta A_\alpha, \quad (3.10.12)$$

con lo cual se puede concluir que los difeomorfismos son una simetría intrínseca de la teoría de Pontryagin, característica que comparte con la teoría de Chern-Simons y, aún mas, con Relatividad General. En el capítulo siguiente se verá que a pesar de que en la literatura [15] se obtiene una restricción secundaria, que también es de primera clase y por lo cual el generador de las transformaciones de norma tendrá una restricción extra, las transformaciones de norma que se encuentran en esta sección van a ser iguales a las que se obtienen en [15] (tomando en cuenta el caso abeliano), debido a que uno puede redefinir los parámetros de norma a conveniencia.

Capítulo 4

Pontryagin: Reducible vs Irreducible

En este capítulo se va a realizar una comparación entre los resultados principales del análisis hamiltoniano de Pontryagin reportado en [15], tomando en cuenta que se está en el caso abeliano, y los obtenidos en el Capítulo 3 de esta tesis. Ya que ambos análisis corresponden a la teoría de Pontryagin, para poder diferenciarlos se les llamará “Pontryagin reducible” ($\mathcal{P}o_{(R)}$) y “Pontryagin irreducible” ($\mathcal{P}o_{(I)}$), respectivamente. Tales etiquetas se deben a la característica de principal interés en esta tesis, es decir, si la teoría presenta o no reducibilidad.

4.1. Comparación Pontryagin

En un comienzo, los resultados de ambos desarrollos son similares. Partiendo de la acción de Pontryagin abeliana en 4 dimensiones

$$S_{Po}[A] = \kappa \int_{\mathcal{M}} (F \wedge F), \quad (4.1.1)$$

se puede obtener su correspondiente densidad lagrangiana, que una vez realizada la descomposición 3+1, está dada por:

$$\mathcal{L}_{Po} = \kappa (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}. \quad (4.1.2)$$

Siguiendo con el cálculo de la matriz hessiana,

$$H = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{Po}}{\partial(\partial_0 A_\alpha) \partial(\partial_0 A_\beta)} \right) = 0_{4 \times 4}, \quad (4.1.3)$$

se llega a la conclusión de que dicha teoría es singular. Además, observando que la Nulidad(H) = 4, entonces se esperan 4 restricciones primarias, que al obtener los momentos canónicos,

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_{Po}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0 \quad (4.1.4)$$

y

$$\Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}_{Po}}{\partial(\partial_0 A_i)} = \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}, \quad (4.1.5)$$

se pueden definir como:

$$\phi^0 := \Pi^0 \approx 0 \quad (4.1.6)$$

y

$$\phi^i := \Pi^i - \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \approx 0, \quad (4.1.7)$$

las cuales cumplen con las condiciones de regularidad,

$$\text{Rango} \left(\frac{\partial \phi^\mu}{\partial (A_\nu, \Pi^\nu)} \right) = cte = 4. \quad (4.1.8)$$

Obtenidas las restricciones primarias, se procede a definir la hamiltoniana canónica

$$H_C[A_0, A_i, \Pi^0, \Pi^i] := \int_{\Sigma} d^3x \left(\Pi^\alpha \dot{A}_\alpha - \mathcal{L}_{Po} \right). \quad (4.1.9)$$

donde, sustituyendo la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_{Po}$ (4.1.2) en (4.1.9) y haciendo uso de las definiciones de los momentos, (4.1.4) y (4.1.5), para simplificar, se tendrá que la función H_C sólo va a depender explícitamente de algunas variables canónicas.

En particular, cuando se emplea la segunda relación (4.1.5), $\Pi^i = \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} = 2\kappa \partial_j A_k \tilde{\varepsilon}^{0ijk}$, H_C (4.1.9) se podrá expresar por medio de dos conjuntos de variables canónicas distintos, dependiendo si uno elige quedarse con los momentos Π^i o con los campos A_k . Por lo que se tendrán dos hamiltonianas canónicas equivalentes dependiendo de la elección realizada (tomando en cuenta también que por la relación (4.1.4), $\Pi^0 = 0$):

1. **Eligiendo Π^i :** $H_C[A_0, A_i, \Pi^0, \Pi^i] \rightarrow H_C[A_0, \Pi^i]$ con

$$\bar{H}_C[A_0, \Pi^i] = \int_{\Sigma} d^3x (\partial_i A_0) \Pi^i = - \int_{\Sigma} d^3x A_0 (\partial_i \Pi^i), \quad (4.1.10)$$

la cual corresponde a la hamiltoniana canónica reportada en la literatura [15]. Y donde se muestra que la teoría presenta reducibilidad. Como se comentó inicialmente, el análisis de la teoría de Pontryagin realizado a partir de esta elección de variables canónicas, es decir, el reportado en la literatura [15], se denominará “**Pontryagin reducible**”, $\mathcal{Po}_{(R)}$.

2. **Eligiendo A_i :** $H_C[A_0, A_i, \Pi^0, \Pi^i] \rightarrow H_C[A_0, A_i]$ con

$$\begin{aligned} H_C[A_0, A_i] &= \int_{\Sigma} d^3x \left[\Pi^0 \dot{A}_0 + \Pi^i \dot{A}_i - \kappa (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right] \\ &= \int_{\Sigma} d^3x \left[\Pi^0 \dot{A}_0 + (\Pi^i - \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}) \dot{A}_i + \kappa (\partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right] \\ &= \kappa \int_{\Sigma} d^3x (\partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}, \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

donde esta segunda elección de las variables canónicas, a partir de la definición de los momentos, es la propuesta en este trabajo de tesis. A estas variables se les llamará: *variables canónicas propuestas* para diferenciarlas de las reportadas en la literatura [15]. De manera similar, como se comentó inicialmente, el análisis de la teoría de Pontryagin realizado a partir de esta elección de variables canónicas, es decir, el que se realizó en el capítulo anterior, se denominará “**Pontryagin irreducible**”, $\mathcal{Po}_{(I)}$.

La razón por la cual es necesario enfatizar qué variables se eligen para definir a H_C en cada uno de los dos análisis de Pontryagin ($\mathcal{Po}_{(R)}$ y $\mathcal{Po}_{(I)}$), ver Tabla 4.1, se debe a que por medio de esta elección de variables, el estudio de la teoría va a presentar cambios relevantes que en principio no

CAPÍTULO 4. PONTRYAGIN: REDUCIBLE VS IRREDUCIBLE

4.1. COMPARACIÓN PONTRYAGIN

modifican la dinámica del sistema, es decir, los resultados físicos de ambos desarrollos van a ser equivalentes, como se verá a continuación, y la diferencia significativa se va a presentar en ciertas características que pueden o no aparecer en la teoría, como la reducibilidad, lo cual únicamente ayuda a simplificar el análisis hamiltoniano y las expresiones resultantes.

Pontryagin reducible $\mathcal{P}o_{(R)}$	Pontryagin irreducible $\mathcal{P}o_{(I)}$
$H_C[A_0, \Pi^i] = - \int_{\Sigma} d^3x A_0 (\partial_i \Pi^i)$	$H_C[A_0, A_i] = \kappa \int_{\Sigma} d^3x (\partial_i A_0) F_{jk} \varepsilon^{0ijk}$

Tabla 4.1: Hamiltoniana canónica

Entonces, considerando las dos formas que puede tomar H_C , para cada análisis se define su correspondiente hamiltoniana primaria, dada por:

$$H_1 := H_C + \int_{\Sigma} d^3x [u_0 \phi^0 + u_i \phi^i], \quad (4.1.12)$$

recordando que para cada uno de los análisis, $\mathcal{P}o_{(R)}$ y $\mathcal{P}o_{(I)}$, la hamiltoniana canónica se mantiene fija respecto a las variables canónicas que la definen. Así, construida la función H_1 , se procede a verificar las condiciones de consistencia

$$\dot{\phi}^\alpha = \{\phi^\alpha, H_1\} \approx 0. \quad (4.1.13)$$

Con base en los resultados presentados en [15], se obtiene que en $\mathcal{P}o_{(R)}$ hay una restricción secundaria, mientras que en $\mathcal{P}o_{(I)}$ no hay, ver ecuación (3.6.5). Asimismo, ningún multiplicador de Lagrange pudo ser determinado en los dos casos. A partir de estos resultados se tiene la primer diferencia relevante entre ambos desarrollos, consecuencia de la elección de variables canónicas para definir a H_C en cada caso, ver Tabla 4.2. Cabe notar que, como en $\mathcal{P}o_{(R)}$ hay una restricción secundaria ψ , es necesario definir la hamiltoniana secundaria $H_2 := H_1 + \int_{\Sigma} d^3x u\psi$ y comprobar que ψ cumple con las condiciones de consistencia¹, además de que, en general, se agrega una restricción más al sistema². Por otro lado, en $\mathcal{P}o_{(I)}$ ya no es necesario realizar más cálculos, puesto que las condiciones de consistencia para las restricciones primarias ϕ^0 y ϕ^i se satisfacen directamente, de manera que no hay restricciones secundarias.

Pontryagin reducible $\mathcal{P}o_{(R)}$	Pontryagin irreducible $\mathcal{P}o_{(I)}$
$\psi := \partial_i \Pi^i \approx 0$	Ninguna

Tabla 4.2: Restricciones secundarias

Una vez que se ha comprobado que todas las restricciones (primarias y secundarias que se hayan encontrado) cumplen con las condiciones de consistencia, se prosigue a separarlas entre de primera y segunda clase, ver Tabla 4.3. A pesar de que en $\mathcal{P}o_{(R)}$ se obtuvo una restricción secundaria, mientras que en $\mathcal{P}o_{(I)}$ no hay, ambos análisis concuerdan en que todas sus restricciones son de primera clase, es decir, todas van a ser generadoras de transformaciones de norma. Cabe notar que al no haber podido determinar ningún multiplicador de Lagrange, ya se podía intuir que la teoría no iba a presentar restricciones de segunda clase.

¹En [15] se puede ver que la restricción secundaria ψ cumple con las condiciones de consistencia de manera directa, es decir, no se determinan multiplicadores de Lagrange ni se encuentran más restricciones secundarias.

²Aunque en $\mathcal{P}o_{(R)}$ aparezcan más restricciones, puede que estas no sean independientes de las primeras.

CAPÍTULO 4. PONTRYAGIN: REDUCIBLE VS IRREDUCIBLE

4.1. COMPARACIÓN PONTRYAGIN

Pontryagin reducible $\mathcal{P}o_{(R)}$	Pontryagin irreducible $\mathcal{P}o_{(I)}$
Restricciones de primera clase	
$\gamma^0 = \phi^0$ $\gamma^i = \phi^i$ $\gamma = \psi$	$\gamma^0 = \phi^0$ $\gamma^i = \phi^i$
Restricciones de segunda clase	
Ninguna	

Tabla 4.3: Restricciones de primera y segunda clase

Hecha la separación entre las restricciones, es posible realizar un conteo preliminar de los grados de libertad. Como se observa en la Tabla 4.4, en $\mathcal{P}o_{(R)}$ el conteo preliminar resulta inconsistente, lo cual quiere decir que las 5 restricciones obtenidas no son del todo independientes, en otras palabras, el sistema presenta reducibilidad, por lo cual es necesario buscar aquellas restricciones que dependen funcionalmente de las demás. En general, la reducibilidad es un problema difícil de resolver cuando está presente en cualquier teoría, ya que el algoritmo de Dirac-Bergmann no determina cómo está dada la relación entre las restricciones dependientes e independientes que provocan esta característica, sino que tales relaciones se buscan “a mano”, con el riesgo de que puedan no encontrarse debido a la complejidad de la teoría estudiada, por lo cual es preferente evitar que el sistema presente este tipo de característica. En caso de que se encuentren tales relaciones, como ocurre en $\mathcal{P}o_{(R)}$ donde se tiene que la restricción dependiente es la restricción secundaria $\psi =: \gamma$, al realizar el conteo de grados de libertad no se toma en cuenta el número de restricciones dependientes; sin embargo, en caso de que no se encuentren las relaciones entre restricciones que provocan la reducibilidad, el conteo de grados de libertad no podrá ser determinado correctamente, puesto que se requiere determinar todas las restricciones de primera y segunda clase independientes.

Fijándose ahora en $\mathcal{P}o_{(I)}$, la reducibilidad no está presente, lo cual en principio es consecuencia de que no hubieran restricciones secundarias durante el cálculo de las condiciones de consistencia, y este hecho inicialmente se debe a la forma en que se definió la hamiltoniana canónica, pues al elegir las variables adecuadas para presentarla, (A_0, A_i) , la teoría ya no presenta tal característica. Este es uno de los resultados que más beneficia al análisis seguido por este camino, ya que no es necesario buscar de entre todas las restricciones aquellas que sean dependientes, es decir, presenta ventaja frente al análisis $\mathcal{P}o_{(R)}$ que se realiza definiendo a la hamiltoniana canónica por medio de las variables (A_0, Π^i) .

Pontryagin reducible $\mathcal{P}o_{(R)}$	Pontryagin irreducible $\mathcal{P}o_{(I)}$
Conteo de grados de libertad preliminar	
$D.O.F. = \frac{1}{2} (8 - 2(5) - 0) = -1$	$D.O.F. = \frac{1}{2} (8 - 2(4) - 0) = 0$
Reducibilidad	
$\gamma = \partial_i \gamma^i$	No hay
Conteo de grados de libertad	
$D.O.F. = \frac{1}{2} (8 - 2(4) - 0) = 0$	

Tabla 4.4: Grados de libertad y reducibilidad

Para continuar, una vez que el conteo de grados de libertad resulta consistente, se procede a definir la hamiltoniana extendida del sistema, que en ambos desarrollos se encuentra compuesta

CAPÍTULO 4. PONTRYAGIN: REDUCIBLE VS IRREDUCIBLE

4.1. COMPARACIÓN PONTRYAGIN

por su correspondiente hamiltoniana canónica y una combinación lineal de sus correspondientes restricciones de primera clase,

$$H_E := H_C + \int_{\Sigma} d^3x [\lambda_{\mathcal{I}} \gamma^{\mathcal{I}}]. \quad (4.1.14)$$

Cabe notar que en ambos casos, al integrar por partes la hamiltoniana canónica H_C y tomar en cuenta que en la frontera de la variedad los términos de superficie se anulan, se puede observar que H_E se expresa como la integral de una combinación lineal de restricciones de primera clase, ver Tabla 4.5. De igual manera, se observa que la diferencia entre ambas hamiltonianas extendidas tiene que ver con las variables que se eligieron para definir a H_C y con la restricción secundaria que se encontró en $\mathcal{P}o_{(R)}$, mientras que en $\mathcal{P}o_{(I)}$ no hubo ninguna.

Pontryagin reducible $\mathcal{P}o_{(R)}$	Pontryagin irreducible $\mathcal{P}o_{(I)}$
$H_E = \int_{\Sigma} d^3x [-A_0 \gamma + \lambda_0 \gamma^0 + \lambda_i \gamma^i + \lambda \gamma]$	$H_E = \int_{\Sigma} d^3x [\lambda_0 \gamma^0 + \lambda_i \gamma^i]$

Tabla 4.5: Hamiltoniana extendida

Entonces, a partir de la hamiltoniana extendida, recordando que es la función generadora de evolución temporal, o ya sea realizando la variación de la acción extendida,

$$S_E[A_{\alpha}, \Pi^{\alpha}, \lambda's] = \int_{\mathcal{M}} [\dot{A}_{\alpha} \Pi^{\alpha} - \mathcal{H}_E], \quad (4.1.15)$$

e igualando a cero, se obtienen las ecuaciones de movimiento de la teoría para los dos caminos $\mathcal{P}o_{(R)}$ y $\mathcal{P}o_{(I)}$, ver Tabla 4.6, que son bastante similares. Una ventaja a destacar por parte de $\mathcal{P}o_{(I)}$, es que a partir de las ecuaciones de movimiento es más evidente el hecho de que la teoría no presenta dinámica, ya que la evolución temporal de las variables canónicas A_{α} está dada directamente por los multiplicadores de Lagrange λ_{α} , que son funciones arbitrarias, lo cual también hace notar el hecho de que la teoría presenta transformaciones de norma, de manera que si no se hubiera realizado el conteo de grados de libertad explícitamente, aún así se hubiera llegado al mismo resultado $D.O.F. = 0$ por medio de las ecuaciones de movimiento. Por otro lado, aunque ambos conjuntos de ecuaciones de movimiento resulten parcialmente distintos, la dinámica no deja de ser la misma, es decir, a partir de las ecuaciones de movimiento obtenidas en $\mathcal{P}o_{(R)}$ y $\mathcal{P}o_{(I)}$ se puede llegar a la misma conclusión de que la teoría de Pontryagin no presenta dinámica, simplemente que en $\mathcal{P}o_{(I)}$ es más sencillo de ver por lo comentado anteriormente.

Pontryagin reducible $\mathcal{P}o_{(R)}$	Pontryagin irreducible $\mathcal{P}o_{(I)}$
$A_0 : \quad \dot{\Pi}^0 = \gamma$	$A_0 : \quad \dot{\Pi}^0 = \kappa \partial_i F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}$
$A_k : \quad \dot{\Pi}^k = 2\kappa \partial_i \lambda_j \tilde{\varepsilon}^{0ijk}$	$A_k : \quad \dot{\Pi}^k = 2\kappa \partial_i \lambda_j \tilde{\varepsilon}^{0ijk}$
$\Pi_0 : \quad \dot{A}_0 = \lambda_0$	$\Pi_0 : \quad \dot{A}_0 = \lambda_0$
$\Pi_k : \quad \dot{A}_k = \partial_k (A_0 - \lambda) + \lambda_k$	$\Pi_k : \quad \dot{A}_k = \lambda_k$
$\lambda_0 : \quad \gamma^0 = 0$	$\lambda_0 : \quad \gamma^0 = 0$
$\lambda_k : \quad \gamma^k = 0$	$\lambda_k : \quad \gamma^k = 0$
$\lambda : \quad \gamma = 0$	

Tabla 4.6: Ecuaciones de movimiento

CAPÍTULO 4. PONTRYAGIN: REDUCIBLE VS IRREDUCIBLE

4.1. COMPARACIÓN PONTRYAGIN

Como se ha ido comentando, debido a que todas las restricciones que presenta la teoría son de primera clase, entonces son funciones generadoras de transformaciones de norma, de manera que se puede definir el generador de tales transformaciones por medio del formalismo de Castellani. Entonces, a partir de la Tabla 4.7 se puede observar que los generadores G de ambos desarrollos difieren por la restricción secundaria γ encontrada en $Po_{(R)}$ y por el parámetro de norma que acompaña a la restricción γ^0 . Por otra parte, aunque la restricción γ no es independiente de las demás restricciones y al momento de realizar el conteo de grados de libertad no se toma en cuenta, para definir el generador G sí se considera.

Pontryagin reducible $\mathcal{P}o_{(R)}$	Pontryagin irreducible $\mathcal{P}o_{(I)}$
$G = \int_{\Sigma} d^3x [\partial_0 \varepsilon_0 \gamma^0 + \varepsilon_i \gamma^i + \varepsilon \gamma]$	$G = \int_{\Sigma} d^3x [\varepsilon_0 \gamma^0 + \varepsilon_i \gamma^i]$

Tabla 4.7: Generador de transformaciones de norma

Debido a las diferencias que existe entre los generadores G , las transformaciones de norma en $Po_{(R)}$ y $Po_{(I)}$ resultan parcialmente diferentes para los campos A_0 y A_i , sin embargo, como los parámetros de norma se pueden redefinir a conveniencia, se puede llegar a una expresión igual para las transformación de norma en ambos desarrollos, ver Tabla 4.8, además de hacer notar que estas transformaciones son muy similares a las que se encuentran en la teoría de Chern-Simons y Electrodinámica.

Pontryagin reducible $\mathcal{P}o_{(R)}$	Pontryagin irreducible $\mathcal{P}o_{(I)}$
Transformaciones de norma	
$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \delta A_\mu$ $\Pi^\mu \rightarrow \Pi'^\mu = \Pi^\mu + \delta \Pi^\mu$	
$\delta A_0 = \partial_0 \varepsilon_0$ $\delta A_i = \varepsilon_i - \partial_i \varepsilon$ $\delta \Pi^0 = 0$ $\delta \Pi^i = 2\kappa \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_j \varepsilon_k$	$\delta A_0 = \varepsilon_0$ $\delta A_i = \varepsilon_i$ $\delta \Pi^0 = 0$ $\delta \Pi^i = 2\kappa \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_j \varepsilon_k$
Elección de parámetros de norma	
$\varepsilon_0 = \varepsilon$ $\varepsilon_i = 2\partial_i \varepsilon$	$\varepsilon_0 = \partial_0 \varepsilon$ $\varepsilon_i = \partial_i \varepsilon$
Transformaciones de norma reescritas	
$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \varepsilon$ $\Pi^\mu \rightarrow \Pi'^\mu = \Pi^\mu$	

Tabla 4.8: Transformaciones de norma

Siguiendo la idea previa de redefinir los parámetros de norma a conveniencia, se hace notar que ambos desarrollos $Po_{(R)}$ y $Po_{(I)}$ también coinciden en que la teoría presenta invarianza bajo difeomorfismos, ver Tabla 4.9, característica que comparte con Chern-Simons y Relatividad General. Cabe notar que en $Po_{(I)}$ la redefinición de parámetros de norma es más sencilla, pues se eligen directamente los difeomorfismos, mientras que en $Po_{(R)}$ fue necesario buscar cómo redefinir los parámetros de norma, para que al sustituir en las transformaciones de norma para los campos A_0 y A_i se obtuvieran los difeomorfismos. Es decir, en $Po_{(R)}$ se requirió de más cálculos, a diferencia de $Po_{(I)}$ donde los resultados son directos.

CAPÍTULO 4. PONTRYAGIN: REDUCIBLE VS IRREDUCIBLE
4.1. COMPARACIÓN PONTRYAGIN

H

Pontryagin reducible $\mathcal{P}o_{(R)}$	Pontryagin irreducible $\mathcal{P}o_{(I)}$
$\delta A_0 = \partial_0 \varepsilon_0$	$\delta A_0 = \varepsilon_0$
$\delta A_i = \varepsilon_i - \partial_i \varepsilon$	$\delta A_i = \varepsilon_i$
$\delta \Pi^0 = 0$	$\delta \Pi^0 = 0$
$\delta \Pi^i = 2\kappa \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_j \varepsilon_k$	$\delta \Pi^i = 2\kappa \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_j \varepsilon_k$
Elección de parámetros de norma	
$\varepsilon_0 = \varepsilon$	$\varepsilon_0 = \mathcal{L}_\vartheta A_0$
$\varepsilon_i = \vartheta^\mu F_{\mu i}$	$\varepsilon_i = \mathcal{L}_\vartheta A_i$
$\varepsilon = -\vartheta^\mu A_\mu$	
Difeomorfismos	
$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \delta A_\mu = A_\mu + \mathcal{L}_\vartheta A_\mu$	

Tabla 4.9: Invarianza bajo difeomorfismos

A partir de estos últimos dos resultados, las ecuaciones de movimiento y las transformaciones de norma, se confirma lo que se comentó en el capítulo pasado, es decir, que a pesar de que en $\mathcal{P}o_{(I)}$ se definió la hamiltoniana canónica por medio de variables diferentes a las empleadas en $\mathcal{P}o_{(R)}$, y en consecuencia no se obtuvieron restricciones secundarias ni reducibilidad, la dinámica sigue siendo la misma en ambos desarrollos, la ventaja es que en $\mathcal{P}o_{(I)}$, además de no obtener reducibilidad, los resultados (ecuaciones de movimiento y transformaciones de norma) son más directos y quedan expresiones más simples que en $\mathcal{P}o_{(R)}$. Para finalizar, en la Tabla 4.10 se resumen todos los resultados anteriormente presentados y comentados, con el fin de que se pueda visualizar con detalle y de manera general cada una de las diferencias y similitudes representativas entre ambos análisis realizados $\mathcal{P}o_{(I)}$ y $\mathcal{P}o_{(R)}$ para estudiar la teoría de Pontryagin.

CAPÍTULO 4. PONTRYAGIN: REDUCIBLE VS IRREDUCIBLE

4.1. COMPARACIÓN PONTRYAGIN

	Pontryagin reducible $\mathcal{P}_{O(R)}$	Pontryagin irreducible $\mathcal{P}_{O(I)}$
Densidad lagrangiana	$\mathcal{L}_{Po} = \kappa (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}$	
Restricciones primarias	$\phi^0 := \Pi^0 \approx 0$ $\phi^i := \Pi^i - \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \approx 0$	
Hamiltoniana canónica	$H_C[A_0, \Pi^i] = - \int_{\Sigma} d^3x A_0 (\partial_i \Pi^i)$	$H_C[A_0, A_i] = \kappa \int_{\Sigma} d^3x (\partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}$
Restricciones secundarias	$\psi := \partial_i \Pi^i \approx 0$	Ninguna
Primera clase	$\gamma^0 = \phi^0$ $\gamma^i = \phi^i$ $\gamma = \psi$	$\gamma^0 = \phi^0$ $\gamma^i = \phi^i$
Segunda clase	Ninguna	
Reducibilidad	$\gamma = \partial_i \gamma^i$	No hay
Hamiltoniana extendida	$H_E = \int_{\Sigma} d^3x [-A_0 \gamma + \lambda_0 \gamma^0 + \lambda_i \gamma^i + \lambda \gamma]$	$H_E = \int_{\Sigma} d^3x [\lambda_0 \gamma^0 + \lambda_i \gamma^i]$
Ecuaciones de movimiento	$A_0 : \dot{\Pi}^0 = \gamma$ $A_k : \dot{\Pi}^k = 2\kappa \partial_i \lambda_j \tilde{\varepsilon}^{0ijk}$ $\Pi_0 : \dot{A}_0 = \lambda_0$ $\Pi_k : \dot{A}_k = \partial_k (A_0 - \lambda) + \lambda_k$ $\lambda_0 : \gamma^0 = 0$ $\lambda_k : \gamma^k = 0$ $\lambda : \gamma = 0$	$A_0 : \dot{\Pi}^0 = \kappa \partial_i F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}$ $A_k : \dot{\Pi}^k = 2\kappa \partial_i \lambda_j \tilde{\varepsilon}^{0ijk}$ $\Pi_0 : \dot{A}_0 = \lambda_0$ $\Pi_k : \dot{A}_k = \lambda_k$ $\lambda_0 : \gamma^0 = 0$ $\lambda_k : \gamma^k = 0$
Generador de transformaciones de norma	$G = \int_{\Sigma} d^3x [\varepsilon_0 \gamma^0 + \varepsilon_i \gamma^i + \varepsilon \gamma]$	$G = \int_{\Sigma} d^3x [\varepsilon_0 \gamma^0 + \varepsilon_i \gamma^i]$
Transformaciones de norma	$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \delta A_{\mu}$ $\Pi^{\mu} \rightarrow \Pi^{\mu} + \delta \Pi^{\mu}$ $\left. \begin{aligned} \delta A_0 &= \partial_0 \varepsilon_0 \\ \delta A_i &= \varepsilon_i - \partial_i \varepsilon \\ \delta \Pi^0 &= 0 \\ \delta \Pi^i &= 2\kappa \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_j \varepsilon_k \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varepsilon_0 &= \varepsilon \\ \varepsilon_i &= 2\partial_i \varepsilon \end{aligned}$ $A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu} \varepsilon$ $\Pi^{\mu} \rightarrow \Pi^{\mu}$	$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \delta A_{\mu}$ $\Pi^{\mu} \rightarrow \Pi^{\mu} + \delta \Pi^{\mu}$ $\left. \begin{aligned} \delta A_0 &= \varepsilon_0 \\ \delta A_i &= \varepsilon_i \\ \delta \Pi^0 &= 0 \\ \delta \Pi^i &= 2\kappa \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_j \varepsilon_k \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varepsilon_0 &= \partial_0 \varepsilon \\ \varepsilon_i &= \partial_i \varepsilon \end{aligned}$ $A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu} \varepsilon$ $\Pi^{\mu} \rightarrow \Pi^{\mu}$
Invarianza bajo difeomorfismos	$\left. \begin{aligned} \delta A_0 &= \varepsilon_0 \\ \delta A_i &= \varepsilon_i - \partial_i \varepsilon \\ \delta \Pi^0 &= 0 \\ \delta \Pi^i &= 2\kappa \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_j \varepsilon_k \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varepsilon_0 &= \varepsilon \\ \varepsilon_i &= \vartheta^{\mu} F_{\mu i} \\ \varepsilon &= -\vartheta^{\mu} A_{\mu} \end{aligned}$ $A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \mathcal{L}_{\vartheta} A_{\mu}$	$\left. \begin{aligned} \delta A_0 &= \varepsilon_0 \\ \delta A_i &= \varepsilon_i \\ \delta \Pi^0 &= 0 \\ \delta \Pi^i &= 2\kappa \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_j \varepsilon_k \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varepsilon_0 &= \mathcal{L}_{\vartheta} A_0 \\ \varepsilon_i &= \mathcal{L}_{\vartheta} A_i \end{aligned}$ $A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \mathcal{L}_{\vartheta} A_{\mu}$

Tabla 4.10: Comparación entre los resultados principales de $\mathcal{P}_{O(R)}$ y $\mathcal{P}_{O(I)}$

Capítulo 5

Teorías BF abelianas

Las teorías BF se caracterizan por ser teorías del tipo topológicas, en el sentido de que carecen de grados de libertad locales, además de que son las únicas teorías conocidas de este tipo que pueden ser definidas sobre una variedad $\mathcal{M}$ de dimensión arbitraria. Una de las razones por las cuales merece prestarles atención a estas teorías es su estrecha relación con otras teorías de campo bastante conocidas, en principio, porque varias pueden ser escritas como una de tipo BF, por ejemplo: Maxwell [20], Chern-Simons y Pontryagin [15], Yang-Mills [22, 23] y Relatividad General. Para esta última, además de poder escribirla como una teoría tipo BF, formulación de Plebanski [24] o de Macdowell-Mansouri [25], también comparte ciertas propiedades con las teorías BF, esto es, la invarianza bajo difeomorfismos y la independencia del espacio-tiempo de fondo, de manera que el estudio de las teorías BF puede ser usado para comenzar a entender dos simetrías fundamentales que presenta Relatividad General.

5.1. Teoría BF

En esta sección se va a estudiar la teoría BF siguiendo las ideas previas expuestas en el capítulo 3 con la teoría de Pontryagin. Es decir, a partir de las relaciones entre variables dinámicas, que se obtienen cuando se definen los momentos canónicos, se propone un nuevo conjunto de variables canónicas diferentes a las empleadas en la literatura [16] para definir a la hamiltoniana canónica, con el propósito de verificar si realizando este cambio la teoría BF deja de presentar reducibilidad, como sucedió en Pontryagin, o por el contrario, si tal característica se sigue presentando y analizar por qué es así.

5.1.1. La acción

La acción para la teoría BF abeliana en 4 dimensiones es, por definición

$$S[B, A] = \int_{\mathcal{M}} (B \wedge F), \quad (5.1.1)$$

donde $\mathcal{M}$ es una variedad globalmente hiperbólica de 4 dimensiones, B y A son las variables dinámicas, siendo $B = \frac{1}{2}B_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta$ una 2-forma y $A = A_\alpha dx^\alpha$ una 1-forma. Además, de manera similar a lo acontecido en el capítulo 3, F corresponde a la forma de curvatura abeliana de la 1-forma A , es decir,

$$F = dA = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad (5.1.2)$$

donde $F_{\alpha\beta} = (\nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha) = (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$, ya que se está considerando nuevamente que en la variedad $\mathcal{M}$ se tiene definida una conexión ∇_α y además es libre de torsión. Así, la acción para esta teoría se expresa como,

$$S[B, A] = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} B_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (5.1.3)$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} B_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} d^4x, \quad (5.1.4)$$

con $d^4x := dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ y $\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} = (-1)^{\tilde{s}} \sqrt{|\det g|} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$.

Realizando la variación de la acción $S[B, A]$ e igualando a cero,

$$\begin{aligned} \delta S[B, A] &= \delta \left[\frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} B_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} d^4x \right] \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} \delta(B_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} [B_{\alpha\beta} \delta F_{\mu\nu} + \delta B_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}] \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} [B_{\alpha\beta} \delta (-2\partial_\nu A_\mu) + \delta B_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}] \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} [F_{\mu\nu} \delta B_{\alpha\beta} + 2\partial_\nu B_{\alpha\beta} \delta A_\mu] - \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\nu (2 \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} B_{\alpha\beta} \delta A_\mu) \\ &= 0, \end{aligned}$$

y tomando en cuenta que los términos de superficie se anulan, las ecuaciones de movimiento resultantes son:

$$\frac{1}{4} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0, \quad (5.1.5)$$

$$\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\nu B_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.1.6)$$

Observe que a diferencia de Pontryagin, *las ecuaciones de movimiento en la teoría BF no son identidades*.

Por otra parte, si se considera que la variedad $\mathcal{M}$ puede ser foliada en superficies Σ tridimensionales a lo largo de un intervalo I , es posible realizar la descomposición 3+1 de la acción,

$$\begin{aligned} S[B, A] &= \frac{1}{4} \int_I \int_{\Sigma} B_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} d^3x dx^0 \\ &= \frac{1}{4} \int_I \int_{\Sigma} B_{\alpha\beta} (F_{0\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta 0\nu} + F_{j\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta j\nu}) d^3x dx^0 \\ &= \frac{1}{4} \int_I \int_{\Sigma} B_{\alpha\beta} (2F_{0i} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta 0i} + F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta jk}) d^3x dx^0 \\ &= \frac{1}{4} \int_I \int_{\Sigma} (2B_{jk} F_{0i} \tilde{\varepsilon}^{jk 0i} + 2B_{0i} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0i jk}) d^3x dx^0 \\ &= \frac{1}{2} \int_I \int_{\Sigma} (B_{jk} F_{0i} + B_{0i} F_{jk}) \tilde{\varepsilon}^{0i jk} d^3x dx^0 \\ &= \frac{1}{2} \int_I \int_{\Sigma} [B_{0i} F_{jk} + B_{jk} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0)] \tilde{\varepsilon}^{0i jk} d^3x dx^0, \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

donde se identifica a la densidad lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [B_{0i}F_{jk} + B_{jk}(\partial_0 A_i - \partial_i A_0)] \varepsilon^{0ijk}. \quad (5.1.8)$$

A diferencia de lo visto en Pontryagin, donde las variables dinámicas se ven reflejadas directamente en las 4 componentes de una 1-forma A , A_0 y A_i , en esta teoría se incluyen nuevas variables dinámicas debido a la 2-forma B , que en principio cuenta con 16 componentes, $B_{\alpha\beta}$, pero como consecuencia de la antisimetría que presentan en sus índices, ya que son las componentes de una 2-forma, se ven reducidas a sólo 6 distintas de cero e independientes, B_{0j} y B_{ij} . Por lo que el número total de variables dinámicas en esta teoría es igual a 10: A_0 , A_i , B_{0j} y B_{ij} .

5.1.2. Matriz hessiana

Una vez obtenida la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$, (5.1.8), se procede a realizar el cálculo de la matriz hessiana H , con el propósito de ver si la teoría es singular o regular. Por simplicidad, se usa la siguiente notación,

$$Q \equiv \{Q_\Gamma\} = \{A_0, A_i, B_{0j}, B_{ij}\}, \quad (5.1.9)$$

esto es, Q representa el conjunto de las variables dinámicas en la teoría BF. Así, la matriz hessiana se puede escribir como

$$H = (H_{\Gamma\Upsilon}) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 Q_\Gamma) \partial (\partial_0 Q_\Upsilon)} \right), \quad (5.1.10)$$

siendo una matriz 10×10 . Observando que en $\mathcal{L}$, (5.1.8), sólo aparecen linealmente primeras derivadas de A_i con respecto al parámetro de evolución temporal x^0 y no aparece ninguna derivada de A_0 , B_{0j} y B_{ij} con respecto a este mismo parámetro, entonces todas las componentes de la matriz hessiana van a ser cero, es decir, H será la matriz cuadrada cero de orden 10 y por tanto, la teoría va a ser singular.

5.1.3. Restricciones primarias

Como la matriz hessiana $H = \mathbf{0}_{10 \times 10}$, se tiene que el $\text{Rango}(H) = 0$ y la $\text{Nulidad}(H) = 10$, por lo cual se esperan 10 restricciones primarias. Calculando los momentos canónicos conjugados

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_0)} = 0, \quad (5.1.11)$$

$$\Pi^l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_l)} = \frac{1}{2} B_{jk} \varepsilon^{0ljk}, \quad (5.1.12)$$

$$\Pi^{0j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 B_{0j})} = 0, \quad (5.1.13)$$

$$\Pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 B_{ij})} = 0, \quad (5.1.14)$$

se observa que en ninguna de las 10 ecuaciones (o relaciones entre variables canónicas) anteriores es posible despejar las velocidades¹ $\dot{A}_0$, $\dot{A}_i$, $\dot{B}_{0j}$ y $\dot{B}_{ij}$ en términos de los campos y momentos, de manera que pueden ser asociadas a las 10 restricciones primarias esperadas, es decir

¹Se ha definido $\dot{A}_\alpha := \partial_0 A_\alpha$ y $\dot{B}_{\alpha\beta} := \partial_0 B_{\alpha\beta}$.

$$\phi^0 := \Pi^0 \approx 0, \quad (5.1.15)$$

$$\phi^l := \Pi^l - \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \approx 0, \quad (5.1.16)$$

$$\phi^{0j} := \Pi^{0j} \approx 0, \quad (5.1.17)$$

$$\phi^{ij} := \Pi^{ij} \approx 0. \quad (5.1.18)$$

5.1.4. Condiciones de regularidad

Encontradas las restricciones primarias $\phi^0, \phi^i, \phi^{0j}$ y ϕ^{ij} , para ver que estas definen una subvariedad de dimensión constante sobre el espacio fase, se deben verificar las condiciones de regularidad, esto es, que el rango de la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial(\phi^\beta, \phi^{\rho\sigma})}{\partial(A_\alpha, B_{\mu\nu}, \Pi^\alpha, \Pi^{\mu\nu})} \right)$ sea constante. Por simplicidad en la notación, al igual que se hizo con Q_Γ , se define $P \equiv \{P^\Upsilon\} = \{\Pi^0, \Pi^i, \Pi^{0j}, \Pi^{ij}\}$ y $\Phi \equiv \{\Phi^\Xi\} = \{\phi^0, \phi^i, \phi^{0j}, \phi^{ij}\}$, con lo cual la matriz jacobiana se puede escribir como una matriz de bloques,

$$\left(\frac{\partial \Phi^\Xi}{\partial(Q_\Gamma, P^\Upsilon)} \right) = \begin{matrix} & A_0 & A_l & B_{0k} & B_{lk} & \Pi^0 & \Pi^l & \Pi^{0k} & \Pi^{lk} \\ \begin{matrix} \phi^0 \\ \phi^i \\ \phi^{0j} \\ \phi^{ij} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0ilk}) & 0 & (\delta_l^i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\delta_k^j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} (\delta_l^i \delta_k^j - \delta_l^j \delta_k^i) \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (5.1.19)$$

notando que su rango, en efecto, es constante e igual a 10, por lo que las restricciones primarias Φ^Ξ anteriormente encontradas van a definir una subvariedad de dimensión 10 en el espacio fase (Q_Γ, P^Υ) .

5.1.5. Hamiltoniana canónica y primaria

A pesar de no haber podido despejar ninguna de las velocidades $\dot{Q}_\Gamma$ en términos de los momentos P_Υ y campos asociados Q_Γ , donde se ha definido $\dot{Q} \equiv \{\dot{Q}_\Gamma\} = \{\dot{A}_0, \dot{A}_i, \dot{B}_{0j}, \dot{B}_{ij}\}$, es posible definir una nueva hamiltoniana H_C , que se construye de manera similar a la de los sistemas regulares, pero sólo está bien definida en la superficie de restricciones primarias, conocida como hamiltoniana canónica,

$$H_C := \int [\Pi^0(\partial_0 A_0) + \Pi^i(\partial_0 A_i) + \Pi^{0j}(\partial_0 B_{0j}) + \Pi^{ij}(\partial_0 B_{ij}) - \mathcal{L}] d^3x. \quad (5.1.20)$$

Ahora, de manera similar a lo que se hizo en el Capítulo 3, antes de calcular a H_C explícitamente, es necesario notar lo siguiente. En principio, se puede suponer que la hamiltoniana canónica tiene la dependencia funcional $H_C = H_C[Q_\Gamma, P^\Upsilon]$, pero al momento de sustituir $\mathcal{L}$ (5.1.8) en (5.1.20) y hacer uso de las definiciones de los momentos, (5.1.11) - (5.1.14), para simplificar, se podrá observar que la función hamiltoniana no va a depender explícitamente de todas las variables canónicas.

En particular, debido a la segunda relación (5.1.12), $\Pi^l = \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk}$, va a ser posible definir a H_C por medio de dos conjuntos de variables canónicas diferentes, dependiendo si uno elige quedarse con los momentos Π^l o con los campos B_{jk} . Por lo que se tendrán dos hamiltonianas canónicas equivalentes dependiendo de la elección realizada (tomando en cuenta también que por las demás relaciones (5.1.11), (5.1.13) y (5.1.14), se tiene $\Pi^0 = 0, \Pi^{0j} = 0, \Pi^{ij} = 0$):

1. **Eligiendo Π^i :** $H_C[A_0, A_i, B_{0j}, B_{ij}, \Pi^0, \Pi^i, \Pi^{0j}, \Pi^{ij}] \rightarrow \bar{H}_C[A_0, A_i, B_{0j}, \Pi^i]$ con,

$$\begin{aligned}\bar{H}_C[A_0, A_i, B_{0j}, \Pi^i] &= \int \left[-\frac{1}{2} B_{0i} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} + \Pi^i \partial_i A_0 \right] d^3x \\ &= - \int \left[\frac{1}{2} B_{0i} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} + A_0 \partial_i \Pi^i \right] d^3x,\end{aligned}\tag{5.1.21}$$

la cual corresponde a la hamiltoniana canónica reportada en la literatura [16]. Y donde se muestra que la teoría BF presenta reducibilidad.

2. **Eligiendo $\mathbf{B}_{ij}$:** $H_C[A_0, A_i, B_{0j}, \mathbf{B}_{ij}, \Pi^0, \Pi^i, \Pi^{0j}, \Pi^{ij}] \rightarrow H_C[A_0, A_i, B_{0j}, \mathbf{B}_{ij}]$ con

$$\begin{aligned}H_C[A_0, A_i, B_{0j}, \mathbf{B}_{ij}] &= \int \left[\Pi^0 (\partial_0 A_0) + \Pi^i (\partial_0 A_i) + \Pi^{0j} (\partial_0 B_{0j}) + \Pi^{ij} (\partial_0 B_{ij}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} B_{0i} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} - \frac{1}{2} B_{jk} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right] d^3x \\ &= \int \left[\Pi^0 (\partial_0 A_0) + \left(\Pi^i - \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right) (\partial_0 A_i) \right. \\ &\quad \left. + \Pi^{0j} (\partial_0 B_{0j}) + \Pi^{ij} (\partial_0 B_{ij}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} B_{0i} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} + \frac{1}{2} B_{jk} (\partial_i A_0) \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right] d^3x \\ &= \int \left[\frac{1}{2} (-B_{0i} F_{jk} + B_{jk} \partial_i A_0) \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right] d^3x,\end{aligned}\tag{5.1.22}$$

esta segunda elección de las variables canónicas, a partir de la definición de los momentos, es la propuesta en este trabajo de tesis. A estas variables se les llamará: *variables canónicas propuestas* para diferenciarlas de las reportadas en la literatura [16].

En general, se espera que la diferencia principal que pueda existir al momento de elegir unas variables canónicas antes que otras para representar a H_C , tenga que ver con ciertas características que se puedan evitar (o agregar) durante el estudio de la teoría por medio del algoritmo de Dirac-Bergmann, en particular, en este trabajo de tesis es de interés la reducibilidad. Cabe notar que, al igual que en Pontryagin, la diferente elección de las variables canónicas no afectará la dinámica del sistema.

Entonces, con base a lo comentado anteriormente, mientras que en los desarrollos hechos en la literatura, ver [16], se define la hamiltoniana canónica como en (5.1.21), en esta tesis se enfoca el estudio a la teoría BF definiendo a H_C como en (5.1.22), con el propósito de verificar si ocurre o no algo similar a lo sucedido en el capítulo 3 con la teoría de Pontryagin, esto es, ver si al construir a H_C en términos de ciertas variables canónicas apropiadas (y distintas a las empleadas en la literatura) desaparece la reducibilidad en la teoría BF.

Así, a partir de H_C dada por (5.1.22), se define la hamiltoniana primaria,

$$H_1 := H_C[A_0, A_i, B_{0j}, B_{ij}] + \int \left[u_0 \phi^0 + u_i \phi^i + u_{0j} \phi^{0j} + u_{ij} \phi^{ij} \right] d^3x,\tag{5.1.23}$$

con $(u_0, u_i, u_{0j}, u_{ij})$ los multiplicadores de Lagrange y $(\phi^0, \phi^i, \phi^{0j}, \phi^{ij})$ las restricciones primarias dadas por (5.1.15) - (5.1.18).

5.1.6. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias

Ahora que se cuenta con la hamiltoniana primaria, lo que sigue es comprobar que las restricciones primarias cumplan con las condiciones de consistencia, es decir, que no cambien con el tiempo,

$$\dot{\Phi}^\Xi = \{\Phi^\Xi, H_1\} \approx 0. \quad (5.1.24)$$

Un resultado directo que proporcionan las condiciones (5.1.24), es que se podrán identificar las restricciones secundarias, en caso de que las haya.

Por simplicidad, en los cálculos posteriores se hace uso de los paréntesis de Poisson fundamentales²,

$$\{A_\alpha(x^0, \vec{x}), \Pi^\beta(x^0, \vec{y})\} = \delta_\alpha^\beta \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = \delta_\alpha^\beta \delta^3(x - y), \quad (5.1.25)$$

$$\{B_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}), \Pi^{\rho\sigma}(x^0, \vec{y})\} = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma - \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma - \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho) \delta^3(x - y), \quad (5.1.26)$$

con el resto de los paréntesis de Poisson entre las variables dinámicas iguales a cero³. Entonces, las condiciones de consistencia para cada restricción están dadas como sigue.

Para la primer restricción primaria, ϕ^0 ,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^0 &= \{\phi^0(x), H_1\} = \int_\Sigma d^3y \{ \phi^0(x), \mathcal{H}_1(y) \} \\ &= \int_\Sigma d^3y \{ \Pi^0, \frac{1}{2} B_{jk} \partial_i A_0 \varepsilon^{0ijk} \} \\ &= \int_\Sigma d^3y \{ \Pi^0, \partial_i A_0 \} \frac{1}{2} B_{jk} \varepsilon^{0ijk} \\ &= \int_\Sigma d^3y \frac{1}{2} B_{jk} \varepsilon^{0ijk} \partial_i \delta^3(x - y) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} \partial_i B_{jk} \approx 0, \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

lo cual indica que existe una restricción secundaria definida por:

$$\psi = \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} \partial_i B_{jk} \approx 0. \quad (5.1.28)$$

Observe que la expresión $\frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} \partial_i B_{jk} \approx 0$ tiene la misma forma que una de las ecuaciones de Euler-Lagrange, (5.1.6) cuando $\mu = 0$, pero ahora se encuentra definida en el espacio fase. De manera que, si por ejemplo, las ecuaciones de movimiento (5.1.6) fueran identidades para los campos $B_{\alpha\beta}$, lo cual indicaría que la expresión $\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\nu B_{\alpha\beta} = 0$ al ser una identidad, se cumpliría de manera directa en el espacio de configuraciones y en el espacio fase, entonces no habría una restricción secundaria ψ , ya que en el cálculo de las condiciones de consistencia para la restricción primaria ϕ^0 , la expresión $\frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} \partial_i B_{jk}$ sería idénticamente igual a 0.

Continuando con las restricciones primarias ϕ^l ,

²Estos paréntesis de Poisson fundamentales se obtienen empleando la definición dada en el capítulo 2 para los paréntesis de Poisson en sistemas continuos, (2.3.1) o (2.3.2), siendo ahora Q_Γ y P^Υ las variables canónicas.

³Los siguientes paréntesis de Poisson fundamentales son iguales a cero:

$$\begin{aligned} \{A_\alpha(x^0, \vec{x}), A_\beta(x^0, \vec{y})\} &= 0 = \{\Pi^\alpha(x^0, \vec{x}), \Pi^\beta(x^0, \vec{y})\}, \\ \{B_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}), B_{\rho\sigma}(x^0, \vec{y})\} &= 0 = \{\Pi^{\mu\nu}(x^0, \vec{x}), \Pi^{\rho\sigma}(x^0, \vec{y})\}, \\ \{A_\alpha(x^0, \vec{x}), B_{\rho\sigma}(x^0, \vec{y})\} &= 0 = \{\Pi^\alpha(x^0, \vec{x}), \Pi^{\rho\sigma}(x^0, \vec{y})\}, \\ \{B_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}), \Pi^\beta(x^0, \vec{y})\} &= 0 = \{\Pi^{\mu\nu}(x^0, \vec{x}), A_\beta(x^0, \vec{y})\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}^l &= \{\phi^l(x), H_1\} = \int_{\Sigma} d^3y \{\phi^l(x), \mathcal{H}_1(y)\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \left\{ \Pi^l - \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk}, -\frac{1}{2} B_{0i} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} + u_{is} \Pi^{is} \right\} \\
 &= - \int_{\Sigma} d^3y \left[\frac{1}{2} B_{0i} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \{\Pi^l, F_{jk}\} + \frac{1}{2} u_{is} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \{B_{jk}, \Pi^{is}\} \right] \\
 &= - \int_{\Sigma} d^3y \left[B_{0i} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_j \delta_k^l \delta^3(x-y) + \frac{1}{4} u_{is} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} (\delta_j^i \delta_k^s - \delta_j^s \delta_k^i) \delta^3(x-y) \right] \\
 &= - \left(\partial_j B_{0i} + \frac{1}{2} u_{ij} \right) \tilde{\varepsilon}^{0ijl} \approx 0,
 \end{aligned} \tag{5.1.29}$$

se llega a que tres multiplicadores de Lagrange podrán ser determinados,

$$\frac{1}{2} u_{ij} \tilde{\varepsilon}^{0ijl} \approx \partial_i B_{0j} \tilde{\varepsilon}^{0ijl}. \tag{5.1.30}$$

Siguiendo con las restricciones primarias ϕ^{0k} ,

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}^{0k} &= \{\phi^{0k}(x), H_1\} = \int_{\Sigma} d^3y \{\phi^{0k}(x), \mathcal{H}_1(y)\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \left\{ \Pi^{0k}, -\frac{1}{2} B_{0l} F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{0lij} \right\} \\
 &= - \int_{\Sigma} d^3y \left\{ \Pi^{0k}, B_{0l} \right\} \frac{1}{2} F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{0lij} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \frac{1}{2} F_{ij} \tilde{\varepsilon}^{0lij} \delta_l^k \delta^3(x-y) \\
 &= \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0kij} F_{ij} \approx 0,
 \end{aligned} \tag{5.1.31}$$

lo cual indica que existen otras tres restricción secundarias definidas por:

$$\psi^l = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0lij} F_{ij} \approx 0. \tag{5.1.32}$$

Observe que ahora las expresiones $\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0kij} F_{ij} \approx 0$ tienen la misma forma que algunas de las ecuaciones de Euler-Lagrange, (5.1.5) cuando $\alpha = 0$ y $\beta = k$, pero estas se encuentran definidas en el espacio fase. De manera que, si por ejemplo, las ecuaciones de movimiento (5.1.5) fueran identidades para los campos A_μ , lo cual indicaría que la expresión $\frac{1}{4} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0$ al ser una identidad, se cumpliría de manera directa en el espacio de configuraciones y en el espacio fase, entonces no habrían tres restricciones secundarias ψ^l , ya que en el cálculo de las condiciones de consistencia para las restricciones primarias ϕ^{0k} , la expresión $\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0lij} F_{ij}$ sería idénticamente igual a 0 para todo l .

Finalmente, para las restricciones primarias ϕ^{lk} ,

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}^{lk} &= \{\phi^{lk}(x), H_1\} = \int_{\Sigma} d^3y \{\phi^{lk}(x), \mathcal{H}_1(y)\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \left\{ \Pi^{lk}, \frac{1}{2} B_{js} \partial_i A_0 \tilde{\varepsilon}^{0ijs} + u_i \left(\Pi^i - \frac{1}{2} B_{js} \tilde{\varepsilon}^{0ijs} \right) \right\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \left\{ \Pi^{lk}, B_{js} \right\} \frac{1}{2} (\partial_i A_0 - u_i) \tilde{\varepsilon}^{0ijs} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \frac{1}{4} (\partial_i A_0 - u_i) \tilde{\varepsilon}^{0ijs} (\delta_j^l \delta_s^k - \delta_j^k \delta_s^l) \delta^3(x - y) \\
 &= \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0ilk} (\partial_i A_0 - u_i) \approx 0,
 \end{aligned} \tag{5.1.33}$$

se llega a que otros tres multiplicadores de Lagrange podrán ser determinados,

$$\tilde{\varepsilon}^{0ilk} u_i \approx \tilde{\varepsilon}^{0ilk} \partial_i A_0. \tag{5.1.34}$$

Recapitulando, a partir de las 10 condiciones de consistencia se determinaron 6 multiplicadores de Lagrange y se obtuvieron 4 restricciones secundarias, donde estas últimas, al igual que las primarias, tienen que cumplir con las condiciones de consistencia,

$$\dot{\Psi}^{\Xi} = \{\Psi^{\Xi}, H_2\} \approx 0, \tag{5.1.35}$$

con

$$H_2 = H_1 + \int [v\psi + v_i \psi^i] d^3x, \tag{5.1.36}$$

siendo $\Psi = \{\Psi^{\Xi}\} = \{\psi, \psi^i\}$ y (v, v_i) multiplicadores de Lagrange.

Estas condiciones se verifican a continuación. Para la restricción secundaria ψ ,

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi} &= \{\psi(x), H_2\} = \int_{\Sigma} d^3y \{\psi(x), \mathcal{H}_2(y)\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_i B_{jk}, u_{ls} \Pi^{ls} \right\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} u_{ls} \{\partial_i B_{jk}, \Pi^{ls}\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \frac{1}{4} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} u_{ls} \partial_i (\delta_j^l \delta_k^s - \delta_j^s \delta_k^l) \delta^3(x - y) \\
 &= \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_i u_{jk} \approx 0,
 \end{aligned} \tag{5.1.37}$$

se tiene una relación entre los multiplicadores de Lagrange u_{jk} , pero haciendo uso de (5.1.30), tal relación en realidad es idénticamente igual a cero. De manera análoga, para las restricciones secundarias ψ^l ,

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}^l &= \{\psi^l(x), H_2\} = \int_{\Sigma} d^3y \{\psi^l(x), \mathcal{H}_2(y)\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} F_{jk}, u_i \left(\Pi^i - \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right) \right\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} u_i \{F_{jk}, \Pi^i\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \tilde{\varepsilon}^{0ljk} u_i \partial_j \delta_k^i \delta^3(x - y) \\
 &= \tilde{\varepsilon}^{0lji} \partial_j u_i \approx 0,
 \end{aligned} \tag{5.1.38}$$

se tiene ahora una relación entre los multiplicadores de Lagrange u_i , pero si se hace uso de (5.1.34), esta relación resulta ser también idénticamente igual a cero. Se concluye entonces que esta teoría ya no presenta más restricciones secundarias, por lo que el número total de restricciones obtenidas es $10 + 4 = 14$.

En principio, para asegurar que el número de multiplicadores de Lagrange determinados y restricciones secundarias encontradas anteriormente es el correcto, conviene fijarse en la matriz $W' = (\{\Phi^\Gamma, \Phi^\Upsilon\})$, cuyo rango es igual al número de multiplicadores de Lagrange que se van a poder determinar y la nulidad corresponde al número de restricciones secundarias esperadas. Entonces,

$$\begin{aligned}
 W' &= \begin{matrix} & \phi^0(y) & \phi^l(y) & \phi^{0k}(y) & \phi^{lk}(y) \\ \begin{matrix} \phi^0(x) \\ \phi^i(x) \\ \phi^{0j}(x) \\ \phi^{ij}(x) \end{matrix} & \begin{pmatrix} \{\phi^0, \phi^0\} & \{\phi^0, \phi^l\} & \{\phi^0, \phi^{0k}\} & \{\phi^0, \phi^{lk}\} \\ \{\phi^i, \phi^0\} & \{\phi^i, \phi^l\} & \{\phi^i, \phi^{0k}\} & \{\phi^i, \phi^{lk}\} \\ \{\phi^{0j}, \phi^0\} & \{\phi^{0j}, \phi^l\} & \{\phi^{0j}, \phi^{0k}\} & \{\phi^{0j}, \phi^{lk}\} \\ \{\phi^{ij}, \phi^0\} & \{\phi^{ij}, \phi^l\} & \{\phi^{ij}, \phi^{0k}\} & \{\phi^{ij}, \phi^{lk}\} \end{pmatrix} \end{matrix} \\
 &= \delta^3(x-y) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{0ilk} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{0ijl} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.1.39}
 \end{aligned}$$

con lo cual se observa que el rango y la nulidad de W' son 6 y 4 respectivamente. Así, se esperan 4 restricciones secundarias y 6 multiplicadores de Lagrange, lo cual es consistente con los resultados obtenidos anteriormente.

5.1.7. Restricciones de primera y segunda clase

Una vez obtenidas todas las restricciones que presenta la teoría, se procede a separarlas entre de primera y segunda clase, ya que tal clasificación distingue a las que son generadoras de transformaciones de norma y las que permiten construir el paréntesis de Dirac. Para realizar esta separación primero se procede a calcular los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones. A continuación, se presenta el cálculo de sólo aquellos paréntesis de Poisson que son distintos de cero,

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad \{\phi^l(x), \phi^{ij}(y)\} &= \{\Pi^l - \frac{1}{2}B_{ks} \tilde{\varepsilon}^{0lks}, \Pi^{ij}\} = -\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0lks} \{B_{ks}, \Pi^{ij}\} \\
 &= -\frac{1}{4} \tilde{\varepsilon}^{0lks} (\delta_k^i \delta_s^j - \delta_k^j \delta_s^i) \delta^3(x-y) \\
 &= -\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0lij} \delta^3(x-y), \\
 \text{b)} \quad \{\psi^l(x), \phi^i(y)\} &= \{\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} F_{jk}, \Pi^i - \frac{1}{2}B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}\} = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \{F_{jk}, \Pi^i\} \\
 &= -\tilde{\varepsilon}^{0lij} \partial_j \delta^3(x-y), \\
 \text{c)} \quad \{\psi(x), \phi^{li}(y)\} &= \{\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0jks} \partial_j B_{ks}, \Pi^{li}\} = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0jks} \{\partial_j B_{ks}, \Pi^{li}\} \\
 &= \frac{1}{4} \tilde{\varepsilon}^{0jks} (\delta_k^l \delta_s^i - \delta_k^i \delta_s^l) \partial_j \delta^3(x-y) \\
 &= \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0lij} \partial_j \delta^3(x-y),
 \end{aligned}$$

ahora conviene fijarse en la matriz W cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre todas las

restricciones⁴,

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{pmatrix} \{\Phi^\Gamma, \Phi^\Xi\} & \{\Phi^\Gamma, \Psi^\Theta\} \\ \{\Psi^\Upsilon, \Phi^\Xi\} & \{\Psi^\Upsilon, \Psi^\Theta\} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{0lij} & 0 & \tilde{\varepsilon}^{0lij}\partial_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{0lij} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{0lij}\partial_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^{0lij}\partial_j & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{\varepsilon}^{0lij}\partial_j & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y)
 \end{aligned} \tag{5.1.40}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2\partial_3 & 2\partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2\partial_3 & 0 & -2\partial_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\partial_2 & 2\partial_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\partial_3 & 2\partial_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\partial_3 & 0 & -2\partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\partial_2 & 2\partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\times \left(\delta^3(x-y) \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^{0123} \right).
 \end{aligned} \tag{5.1.41}$$

Así, esta matriz W tiene rango 6 y nulidad 8, lo cual implica que hay 8 restricciones de primera clase y 6 de segunda clase. Cabe recordar que las restricciones de primera y segunda clase no tienen porque ser directamente algunas de las restricciones primarias y secundarias, en la mayoría de los casos, y como sucede en la teoría presente, es que sean combinaciones de estas últimas. Por esta razón, es necesario calcular los vectores nulos $V^\Xi = (V_\Upsilon^\Xi)$ de la matriz W y contraer con las restricciones Φ^Υ , es decir,

$$\gamma^\Xi = \int_\Sigma V_\Upsilon^\Xi \Phi^\Upsilon d^3y. \tag{5.1.42}$$

Los 8 vectores nulos de la matriz W están dados por:

⁴Es importante mencionar que el orden de las restricciones es el siguiente:

$$(\phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^{01}, \phi^{02}, \phi^{03}, \phi^{12}, \phi^{31}, \phi^{23}, \psi, \psi^1, \psi^2, \psi^3).$$

$$\begin{aligned}
 V^1 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \delta^3(x-y), \\
 V^2 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \delta^3(x-y), \\
 V^3 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \delta^3(x-y), \\
 V^4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \delta^3(x-y), \\
 V^5 &= (0, \partial_1, \partial_2, \partial_3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \delta^3(x-y), \\
 V^6 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2\partial_2, 2\partial_3, 0, 0, 1, 0, 0) \delta^3(x-y), \\
 V^7 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2\partial_1, 0, -2\partial_3, 0, 0, 1, 0) \delta^3(x-y), \\
 V^8 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2\partial_1, 2\partial_2, 0, 0, 0, 1) \delta^3(x-y),
 \end{aligned}$$

y una vez realizada la contracción se obtienen las siguientes 8 restricciones de primera clase:

$$\gamma^0 := \Pi^0 \approx 0, \quad (5.1.43)$$

$$\gamma^{0l} := \Pi^{0l} \approx 0, \quad (5.1.44)$$

$$\gamma := \partial_k \Pi^k \approx 0, \quad (5.1.45)$$

$$\gamma^l := \frac{1}{2} \varepsilon^{0lij} F_{ij} + 2\partial_k \Pi^{kl} \approx 0, \quad (5.1.46)$$

mientras que las 6 restricciones de segunda clase son:

$$\chi^l := \Pi^l - \frac{1}{2} \varepsilon^{0lij} B_{ij} \approx 0, \quad (5.1.47)$$

$$\chi^{kl} := \Pi^{kl} \approx 0, \quad (5.1.48)$$

donde la validez de las restricciones se verifica calculando directamente todos los paréntesis de Poisson entre las restricciones. A continuación, se presenta únicamente el cálculo de los paréntesis de Poisson no triviales,

i)

$$\begin{aligned}
 \{\gamma^l(x), \gamma(y)\} &= \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^{0lij} F_{ij} + 2\partial_k \Pi^{kl}, \partial_k \Pi^k \right\} = \frac{1}{2} \varepsilon^{0lij} \{F_{ij}, \partial_k \Pi^k\} \\
 &= -\varepsilon^{0lij} \partial_i \partial_j \delta^3(x-y) \approx 0,
 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 \{\gamma^l(x), \chi^k(y)\} &= \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^{0lij} F_{ij} + 2\partial_s \Pi^{sl}, \Pi^k - \frac{1}{2} \varepsilon^{0kij} B_{ij} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0lij} \{F_{ij}, \Pi^k\} - \varepsilon^{0kij} \{\partial_s \Pi^{sl}, B_{ij}\} \\
 &= \varepsilon^{0lik} \partial_i \delta^3(x-y) + \frac{1}{2} \varepsilon^{0kij} (\delta_i^s \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^s) \partial_s \delta^3(x-y) \\
 &= \varepsilon^{0lik} \partial_i \delta^3(x-y) + \varepsilon^{0ksl} \partial_s \delta^3(x-y) \approx 0,
 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
 \{\chi^{ls}(x), \chi^k(y)\} &= \left\{ \Pi^{ls}, \Pi^k - \frac{1}{2} \varepsilon^{0kij} B_{ij} \right\} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{0kij} \{\Pi^{ls}, B_{ij}\} \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0kij} (\delta_i^l \delta_j^s - \delta_i^s \delta_j^l) \delta^3(x-y) \\
 &= \varepsilon^{0kls} \delta^3(x-y).
 \end{aligned}$$

5.2. Observaciones

Realizada la separación de restricciones correctamente, se puede concluir lo siguiente. En principio, la teoría BF sigue presentando reducibilidad,

$$\partial_l \gamma^l = 0, \quad (5.2.1)$$

por lo cual, haber definido a H_C por medio de las variables canónicas propuestas $(A_0, A_i, B_{0j}, B_{ij})$ no evita la presencia de esta característica y aún más, observando el conjunto final de restricciones, (5.1.43) - (5.1.48), se tiene que son las mismas que aparecen en [16] (tomando en cuenta el caso abeliano). Es decir, ya sea que se elija (5.1.22) o (5.1.21) para definir la hamiltoniana canónica, el análisis de la teoría BF se reduce al mismo número y mismas restricciones finales, lo cual implica la presencia de la reducibilidad en ambos casos. Entonces, se puede concluir que en esta teoría no es posible evitar la reducibilidad a partir de una elección conveniente de las variables canónicas que van a definir la hamiltoniana canónica, recordando que la elección de variables se realiza por medio de la definición de los momentos.

5.2.1. Conjetura

A pesar de que en BF no haya sido posible evitar la reducibilidad por medio de una elección adecuada de variables canónicas para definir a H_C , si se analiza en conjunto lo sucedido en BF y Pontryagin, se pueden resaltar las siguientes características presentes durante el estudio hamiltoniano de las teorías:

- Recordando lo que se obtuvo en el capítulo 3, la teoría de Pontryagin no presenta reducibilidad cuando se define la hamiltoniana canónica $H_{C(Po)}$ por medio de las variables canónicas propuestas (A_0, A_i) , pero este hecho en realidad también es consecuencia de que las identidades de Bianchi se satisfacen para la curvatura F , ya que así la condición de consistencia para ϕ^0 se satisface idénticamente, de manera que no hay restricciones secundarias y por ende no hay reducibilidad. Además, se observa que estas identidades corresponden a las ecuaciones de movimiento de la teoría en la formulación lagrangiana, con lo cual uno podría intuir que, como las ecuaciones de movimiento de Pontryagin en la formulación lagrangiana resultan ser identidades, el sistema no presenta reducibilidad.
- En el análisis hamiltoniano de la teoría BF realizado en la sección previa, se obtuvo que no es posible evitar la reducibilidad a partir de una elección conveniente de las variables canónicas que van a definir la hamiltoniana canónica $H_{C(BF)}$ y también se observó que durante el cálculo de las condiciones de consistencia para las restricciones primarias, aparecieron expresiones que tienen la misma forma que las ecuaciones de Euler-Lagrange de la teoría, por ejemplo, para ϕ^0 y ϕ^{0k} (siendo las condiciones de consistencia de estas dos restricciones, las que provocan la existencia de las 4 restricciones secundarias). Pero a diferencia de lo que ocurre en Pontryagin, las ecuaciones de Euler-Lagrange de la teoría BF no son identidades, y por tanto tampoco son identidades las expresiones que aparecen en las condiciones de consistencia, que tienen la misma forma que las ecuaciones de E-L (recordando que, estrictamente, están definidas en espacios diferentes), por lo que se tienen restricciones secundarias. Con lo cual uno podría concluir que el hecho de que las ecuaciones de Euler-Lagrange de la teoría sean identidades o no, influye en la existencia de las restricciones que provocan reducibilidad.

Entonces, tomando en cuenta el razonamiento previo, se propone lo siguiente:

Conjetura: *Si las ecuaciones de movimiento en la formulación lagrangiana, correspondientes a una teoría de campos topológica, son identidades y en el análisis hamiltoniano se define su hamiltoniana canónica a partir de una “elección de variables canónicas conveniente”, la cual se realiza por medio de la definición de los momentos, entonces la teoría no presentará reducibilidad.*

Como se puede observar, esta conjetura sugiere que si una teoría de campos topológica cumple dos características específicas, entonces no presentará reducibilidad. La primera característica es consecuencia del razonamiento previo, exigiendo que las ecuaciones de movimiento de la teoría en la formulación lagrangiana sean identidades, mientras que la segunda característica tiene que ver con una elección adecuada de las variables canónicas que van a definir la hamiltoniana canónica, la cual se realiza por medio de la definición de los momentos.

5.2.2. Elección de las variables canónicas convenientes

En principio, pareciera que la conjetura deja al lector la elección conveniente de las variables canónicas, sin embargo, a continuación se dará a conocer cuál es esa elección idónea de las variables canónicas que se propone, la cual ha sido empleada a lo largo de esta tesis en la teoría de Pontryagin y BF (Capítulo 3 y sección previa), siendo una elección completamente distinta a la que se ha ido empleando en la literatura [15, 16]. Para ello, primero es necesario observar lo siguiente, cuando se definen y calculan los momentos canónicos de una teoría singular, en particular uno puede obtener los siguientes dos resultados característicos:

- i) Algunos momentos serán cero, lo cual será una restricción.
- ii) Habrá relaciones entre algunas variables canónicas (campos y momentos), las cuales serán restricciones.

Así, dependiendo de la teoría se puede llegar a tener ambos o sólo uno de estos dos resultados, mediante los cuales se va a construir la hamiltoniana canónica, tomando en cuenta que también puede ocurrir que algunas velocidades sí se puedan despejar en términos de campos y momentos. Ahora, como se ha comentado anteriormente, la hamiltoniana canónica en un inicio se puede suponer como funcionalmente dependiente de todas las variables canónicas, $H_C = H_C[A_\Gamma, \Pi^\Gamma]$; sin embargo, cuando se emplean los resultados obtenidos en la definición de los momentos, se tendrá que H_C sólo va a depender explícitamente de algunas variables canónicas.

En particular, cuando ocurre el caso ii), la hamiltoniana canónica podrá ser expresada de dos formas particulares distintas, lo cual se debe a que habrá relaciones entre algunas variables canónicas, de la forma,

$$\Pi^a = f^a(A_b, \Pi^b) \Rightarrow \phi^a := \Pi^a - f^a(A_b, \Pi^b) \approx 0, \quad (5.2.2)$$

entonces, uno podrá elegir entre definir a H_C empleando los campos A_a o los momentos Π^a . Debido a esto, se tendrán dos hamiltonianas canónicas equivalentes dependiendo de la elección realizada:

1. Eligiendo los campos A_a :

$$H_C[A_\mu, A_a, \Pi^\mu, \Pi^a] \rightarrow H_C[A_\mu, A_a, \Pi^\mu] \quad (5.2.3)$$

esta primera elección, es la que se propone como la “elección de variables canónicas conveniente”.

2. Eligiendo los momentos Π^a :

$$H_C[A_\mu, A_a, \Pi^\mu, \Pi^a] \rightarrow H_C[A_\mu, \Pi^a, \Pi^\mu] \quad (5.2.4)$$

esta segunda elección es la que se ha empleado en la literatura para estudiar algunas teorías topológicas [15, 16].

CAPÍTULO 5. TEORÍAS BF ABELIANAS

5.2. OBSERVACIONES

En ambos casos, los campos A_μ son los campos independientes de los resultados obtenidos en la definición de los momentos, mientras que los momentos Π^μ pueden ser momentos del tipo *i*) (que en realidad serían iguales a cero, por lo cual H_C no dependería explícitamente de estos) o momentos que permitieron despejar algunas velocidades.

Para ejemplificar la idea, véase la Tabla 5.1, donde se muestra parte de los resultados obtenidos anteriormente para las teorías de Pontryagin y BF, observando que ambas presentan resultados del tipo *i*) y *ii*), de manera que es posible definir a sus correspondientes hamiltonianas canónicas a partir de dos conjuntos diferentes de variables canónicas, ya que de la definición de los momentos del tipo *ii*) se podrá elegir entre los campos o los momentos.

- Para Pontryagin, al emplear la relación $\Pi^l = \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} = 2\kappa \partial_j A_k \tilde{\varepsilon}^{0ljk}$, uno puede elegir entre definir a la hamiltoniana canónica usando los campos A_i , $H_C = H_C[A_0, A_i]$, o usando los momentos Π^i , $H_C = H_C[A_0, \Pi^i]$.
- Mientras que para BF, al emplear la relación $\Pi^l = \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk}$, uno puede elegir entre definir a la hamiltoniana canónica usando los campos B_{ij} , $H_C = H_C[A_0, A_i, B_{0j}, B_{ij}]$, o usando los momentos Π^i , $H_C = H_C[A_0, A_i, B_{0j}, \Pi^i]$.

Pontryagin	BF
Densidad lagrangiana	
$\mathcal{L} = \kappa (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}$	$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [B_{0i} F_{jk} + B_{jk} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0)] \tilde{\varepsilon}^{0ijk}$
Momentos del tipo <i>i</i>)	
$\Pi^0 = 0$	$\Pi^0 = 0$ $\Pi^{0j} = 0$ $\Pi^{ij} = 0$
Momentos del tipo <i>ii</i>)	
$\Pi^l = \kappa F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} = 2\kappa \partial_j A_k \tilde{\varepsilon}^{0ljk}$	$\Pi^l = \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk}$
Dependencia inicial hamiltoniana canónica	
$H_C = H_C[A_0, A_i, \Pi^0, \Pi^i]$	$H_C = H_C[A_0, A_i, B_{0j}, B_{ij}, \Pi^0, \Pi^i, \Pi^{0j}, \Pi^{ij}]$
Hamiltoniana canónica eligiendo a los <i>campos</i> de la definición de los momentos tipo <i>ii</i>)	
$H_C = H_C[A_0, A_i]$	$H_C = H_C[A_0, A_i, B_{0j}, B_{ij}]$
$H_C = \kappa \int (\partial_i A_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} d^3x$	$H_C = \int \left[\frac{1}{2} (-B_{0i} F_{jk} + B_{jk} \partial_i A_0) \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right] d^3x$
Hamiltoniana canónica eligiendo a los <i>momentos</i> de la definición de los momentos tipo <i>ii</i>)	
$H_C = H_C[A_0, \Pi^j]$	$H_C = H_C[A_0, A_j, B_{0j}, \Pi^j]$
$H_C = \int A_0 (\partial_i \Pi^i) d^3x$	$H_C = - \int \left[\frac{1}{2} B_{0i} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} + A_0 \partial_i \Pi^i \right] d^3x$

Tabla 5.1: Pontryagin y BF: Formas diferentes de representar la hamiltoniana canónica

Entonces, para resumir, si de la definición de los momentos se obtienen resultados del tipo *ii*), se tendrán dos conjuntos diferentes de variables canónicas para definir a la hamiltoniana canónica, puesto que uno podrá elegir a los campos o elegir a los momentos para definir a H_C , lo cual se hace sustituyendo momentos en función de los campos o sustituyendo campos en función de los momentos, por medio de la definición de los momentos.

Teniendo estas dos opciones, es necesario aclarar nuevamente, que la “*elección conveniente de variables canónicas*” propuesta en este trabajo de tesis es la primera, es decir, a partir de la definición de los momentos (del tipo *ii*)) se eligen los campos en vez de los momentos, para definir

a la hamiltoniana canónica. Cabe recordar que esta elección de variables ha sido la empleada en el Capítulo 3, para la teoría de Pontryagin y en la sección previa, para la teoría BF, mientras que la segunda opción ha sido la empleada en la literatura para el estudio de ambas teorías [15, 16]. Por último, en el caso de que de la definición de los momentos, además de obtener resultados del tipo *i)* o *ii)*, también se puedan despejar algunas de las velocidades en términos de campos y momentos, las variables canónicas mediante las cuales se va a definir la hamiltoniana canónica, van a ser las variables canónicas convenientes (o propuestas en este trabajo de tesis) y los momentos que permitieron poder despejar algunas velocidades.

Finalmente, una vez presentada la conjetura anterior y dejar en claro cual es la “elección de variables canónicas conveniente” propuesta o las “variables canónicas convenientes” propuestas para definir H_C , lo que se presenta a continuación es el análisis hamiltoniano de una teoría tipo BF abeliana cuyas ecuaciones de movimiento resultan ser identidades, esto con el propósito de mostrar que la conjetura es válida para otro caso particular y no únicamente para la teoría de Pontryagin.

5.3. Teoría BF particular

En esta sección se va a estudiar una teoría tipo BF abeliana cuyas ecuaciones de movimiento en la formulación lagrangiana son identidades. Además, al realizar el análisis hamiltoniano de la teoría, se van a elegir las variables canónicas convenientes (propuestas en la sección anterior) para definir a la hamiltoniana canónica. De manera que, el propósito de la sección es verificar si la conjetura es válida para esta teoría en particular, es decir, puesto que esta teoría tipo BF va a cumplir con las dos condiciones que solicita la conjetura, entonces no tiene que haber reducibilidad en el análisis hamiltoniano.

5.3.1. La acción

Considere la siguiente acción para una teoría BF abeliana particular en 4 dimensiones,

$$S[A, b] = \int_{\mathcal{M}} B \wedge F, \quad (5.3.1)$$

donde $B = db$ y $F = dA$ son 2-formas que corresponden a las curvaturas abelianas de las 1-formas $b = b_\alpha dx^\alpha$ y $A = A_\alpha dx^\alpha$ respectivamente, siendo $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Cabe notar que esta acción $S[A, b]$ correspondiente a una teoría tipo BF abeliana, se ha propuesto por el hecho de que va a cumplir con las condiciones que solicita la conjetura, de manera que, el significado físico de que se tengan dos curvaturas en esta teoría, B y F , no va a ser de principal interés en este trabajo de tesis.

A partir de un desarrollo similar al realizado en el Capítulo 3, considerando que en la variedad $\mathcal{M}$ se tiene definida una conexión ∇_α y además es libre de torsión, se obtiene que B y F están dadas por

$$B = \frac{1}{2} B_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge x^\beta, \quad \text{con} \quad B_{\alpha\beta} := \partial_\alpha b_\beta - \partial_\beta b_\alpha \quad (5.3.2)$$

y

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge x^\beta, \quad \text{con} \quad F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha. \quad (5.3.3)$$

Así, la acción toma la siguiente forma,

$$S[A, b] = \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} B_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} d^4x. \quad (5.3.4)$$

Realizando la variación de la acción e igualando a cero,

$$\begin{aligned}
\delta S[A, b] &= \delta \left[\frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} B_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} d^4x \right] \\
&= \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} \delta (B_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} [B_{\alpha\beta} \delta F_{\mu\nu} + \delta B_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}] \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} [B_{\alpha\beta} \partial_\mu \delta A_\nu + \partial_\alpha \delta b_\beta F_{\mu\nu}] \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} [\partial_\mu (B_{\alpha\beta} \delta A_\nu) + \partial_\alpha (\delta b_\beta F_{\mu\nu}) - \partial_\mu B_{\alpha\beta} \delta A_\nu - \partial_\alpha F_{\mu\nu} \delta b_\beta] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

se tienen las siguientes ecuaciones de movimiento

$$-\frac{1}{2} \partial_\mu B_{\alpha\beta} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} = 0, \tag{5.3.6}$$

$$-\frac{1}{2} \partial_\alpha F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} = 0, \tag{5.3.7}$$

donde en (5.3.5) se toma en cuenta que los términos de superficie se anulan en la frontera de $\mathcal{M}$. Note que estas ecuaciones en realidad son las identidades de Bianchi para B y F , de manera que la teoría cumple con la primer condición que establece la conjetura propuesta, las ecuaciones de movimiento en la formulación Lagrangiana son identidades.

Por otro lado, considerando que la variedad $\mathcal{M}$ puede ser foliada en superficies Σ tridimensionales a lo largo de un intervalo I , es posible realizar la descomposición 3+1 de la acción,

$$\begin{aligned}
S[B, A] &= \frac{1}{4} \int_I \int_{\Sigma} B_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\mu\nu} d^3x dx^0 \\
&= \frac{1}{4} \int_I \int_{\Sigma} B_{\alpha\beta} (F_{0\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta 0\nu} + F_{j\nu} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta j\nu}) d^3x dx^0 \\
&= \frac{1}{4} \int_I \int_{\Sigma} B_{\alpha\beta} (2F_{0i} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta 0i} + F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta jk}) d^3x dx^0 \\
&= \frac{1}{4} \int_I \int_{\Sigma} (2B_{jk} F_{0i} \tilde{\varepsilon}^{jk0i} + 2B_{0i} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk}) d^3x dx^0 \\
&= \frac{1}{2} \int_I \int_{\Sigma} [B_{jk} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) + F_{jk} (\partial_0 b_i - \partial_i b_0)] \tilde{\varepsilon}^{0ijk} d^3x dx^0,
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

donde se identifica a la densidad lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [B_{jk} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) + F_{jk} (\partial_0 b_i - \partial_i b_0)] \tilde{\varepsilon}^{0ijk}. \tag{5.3.9}$$

Para esta teoría tipo BF particular, el número de variables dinámicas es 8, correspondientes al número de campos, b_α y A_α , siendo estos las componentes de las 1-formas b y A .

5.3.2. Matriz hessiana

Teniendo la densidad lagrangiana (5.3.9), para determinar si la teoría es singular o regular se calcula la matriz hessiana,

$$\mathbf{H} = (\mathbf{H}_{\Gamma\Upsilon}) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 Q_\Gamma) \partial (\partial_0 Q_\Upsilon)} \right), \tag{5.3.10}$$

donde nuevamente se ha usado la notación $Q \equiv \{Q_\Gamma\} = \{A_\alpha, b_\beta\}$, esto es, Q representa el conjunto de variables dinámicas en la teoría tipo BF particular. Ahora, observando que en $\mathcal{L}$ (5.3.9) sólo aparecen linealmente primeras derivadas de A_i y b_i respecto al parámetro de evolución temporal x^0 , entonces todas las componentes de la matriz hessiana van a ser cero, es decir, H será la matriz cuadrada cero de orden 8, se concluye así que la teoría es singular.

5.3.3. Restricciones primarias

Como $H = 0_{8 \times 8}$, el rango y la nulidad de la matriz hessiana son 0 y 8 respectivamente, por lo cual se esperan 8 restricciones primarias. Calculando los momentos canónicos conjugados,

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_0)} = 0, \quad (5.3.11)$$

$$\Pi^l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_l)} = \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk}, \quad (5.3.12)$$

$$\tilde{\Pi}^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 b_0)} = 0, \quad (5.3.13)$$

$$\tilde{\Pi}^l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 b_l)} = \frac{1}{2} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk}, \quad (5.3.14)$$

se tiene que en ninguna de las 8 ecuaciones anteriores es posible despejar las velocidades $\dot{A}_\alpha$ y $\dot{b}_\beta$ en términos de los campos y momentos, entonces tales ecuaciones, que en realidad también son relaciones entre variables canónicas, se pueden asociar a las 8 restricciones primarias esperadas, es decir,

$$\phi^0 := \Pi^0 \approx 0, \quad (5.3.15)$$

$$\phi^l := \Pi^l - \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \approx 0, \quad (5.3.16)$$

$$\tilde{\phi}^0 := \tilde{\Pi}^0 \approx 0, \quad (5.3.17)$$

$$\tilde{\phi}^l := \tilde{\Pi}^l - \frac{1}{2} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \approx 0. \quad (5.3.18)$$

5.3.4. Condiciones de regularidad

Una vez encontradas las restricciones primarias, $\phi^0, \phi^i, \tilde{\phi}^0$ y $\tilde{\phi}^i$, para ver que estas definen una subvariedad de dimensión constante sobre el espacio fase, se deben verificar las condiciones de

regularidad, esto es, que el rango de la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial (\phi^\rho, \tilde{\phi}^\sigma)}{\partial (A_\alpha, b_\beta, \Pi^\alpha, \tilde{\Pi}^\beta)} \right)$ sea constante.

Haciendo uso nuevamente de la notación $P \equiv \{P^\Upsilon\} = \{\Pi^\alpha, \tilde{\Pi}^\beta\}$ y $\Phi \equiv \{\Phi^\Xi\} = \{\phi^\rho, \tilde{\phi}^\sigma\}$, la matriz jacobiana se puede escribir como una matriz de bloques,

$$\left(\frac{\partial \Phi^\Xi}{\partial (Q_\Gamma, P^\Upsilon)} \right) = \begin{matrix} & A_0 & A_k & b_0 & b_k & \Pi^0 & \Pi^k & \tilde{\Pi}^0 & \tilde{\Pi}^k \\ \begin{matrix} \phi^0 \\ \phi^l \\ \tilde{\phi}^0 \\ \tilde{\phi}^l \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\delta_k^l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\delta_k^l) \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (5.3.19)$$

notando que su rango, en efecto, es constante e igual a 8, por lo que las restricciones anteriormente encontradas van a definir una subvariedad de dimensión 8 en el espacio fase (Q_Γ, P^Υ) .

5.3.5. Hamiltoniana canónica y primaria

Debido a que no fue posible despejar ninguna velocidad $\dot{Q}_\Gamma$ en términos de los campos y momentos, siendo $\dot{Q} = \{\dot{Q}_\Gamma\} = \{\dot{A}_\alpha, \dot{b}_\beta\}$, es necesario definir la función hamiltoniana canónica H_C , la cual se encuentra bien definida en la superficie de restricciones primarias,

$$H_C[A_\Gamma, \Pi_\Gamma] := \int \left[\Pi^0(\partial_0 A_0) + \Pi^i(\partial_0 A_i) + \tilde{\Pi}^0(\partial_0 b_0) + \tilde{\Pi}^i(\partial_0 b_i) - \mathcal{L} \right] d^3x. \quad (5.3.20)$$

Ahora, sustituyendo (5.3.9) en (5.3.20) y usando las definiciones de los momentos para simplificar, (5.3.11) - (5.3.14). En particular, debido a las relaciones (5.3.12), $\Pi^l = \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} = \partial_j b_k \tilde{\varepsilon}^{0ljk}$ y (5.3.14), $\tilde{\Pi}^l = \frac{1}{2} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} = \partial_j A_k \tilde{\varepsilon}^{0ljk}$, la hamiltoniana canónica se podrá definir por medio de dos conjuntos de variables canónicas distintos, dependiendo si uno elige quedarse con los campos b_k y A_k o con los momentos Π^l y $\tilde{\Pi}^l$. Entonces, una vez sabiendo cuales son las dos opciones de variables canónicas que se pueden emplear para definir a H_C , en este trabajo se van a elegir los campos, b_k y A_k , ya que como se vio en la sección anterior, esta es la *elección conveniente* de variables canónicas. De manera que, la hamiltoniana canónica va a estar dada como sigue:

$$\begin{aligned} H_C[A_0, A_j, b_0, b_j] &= \int \left[\Pi^0(\partial_0 A_0) + \Pi^i(\partial_0 A_i) + \tilde{\Pi}^0(\partial_0 b_0) + \tilde{\Pi}^i(\partial_0 b_i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} B_{jk} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) \tilde{\varepsilon}^{0ijk} - \frac{1}{2} F_{jk} (\partial_0 b_i - \partial_i b_0) \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right] d^3x \\ &= \int \left[\Pi^0(\partial_0 A_0) + \left(\Pi^i - \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right) (\partial_0 A_i) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\Pi}^0(\partial_0 b_0) + \left(\tilde{\Pi}^i - \frac{1}{2} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right) (\partial_0 b_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\partial_i A_0) B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} + \frac{1}{2} (\partial_i b_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right] d^3x \\ &= \int \left[\frac{1}{2} ((\partial_i A_0) B_{jk} + (\partial_i b_0) F_{jk}) \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right] d^3x. \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

Observe que llegado a este punto, la teoría tipo BF particular ya cumple con las dos condiciones que solicita la conjetura, puesto que como se vio al inicio de esta sección, las ecuaciones de Euler-Lagrange de esta teoría son identidades y además se ha realizado la *elección conveniente* de variables canónicas, por tanto, se espera que la teoría no presente reducibilidad.

Una vez que se tiene a $H_C[A_0, A_j, b_0, b_j]$, dada como en la expresión final de (5.3.21), se procede a definir la hamiltoniana primaria,

$$H_1 := H_C[A_0, A_j, b_0, b_j] + \int \left[u_0 \phi^0 + u_i \phi^i + \tilde{u}_0 \tilde{\phi}^0 + \tilde{u}_i \tilde{\phi}^i \right] d^3x, \quad (5.3.22)$$

siendo $(u_0, u_i, \tilde{u}_0, \tilde{u}_i)$ los multiplicadores de Lagrange y $(\phi^0, \phi^i, \tilde{\phi}^0, \tilde{\phi}^i)$ las restricciones primarias dadas por (5.3.15) - (5.3.18).

5.3.6. Condiciones de consistencia y restricciones secundarias

Construida la hamiltoniana primaria, el siguiente paso es comprobar que las restricciones primarias satisfacen las condiciones de consistencia, es decir, que las Φ 's no cambien con el tiempo,

$$\dot{\Phi}^\pm = \{\Phi^\pm, H_1\} \approx 0. \quad (5.3.23)$$

CAPÍTULO 5. TEORÍAS BF ABELIANAS
5.3. TEORÍA BF PARTICULAR

Uno de los resultados directos al momento de realizar estos cálculos, es que se podrán identificar de forma explícita las restricciones secundarias, en caso de que las haya. Como se ha hecho anteriormente, cabe recordar que para la teoría presente, los paréntesis de Poisson fundamentales están dados por⁵,

$$\{A_\mu(x^0, \vec{x}), \Pi^\nu(x^0, \vec{y})\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = \delta_\mu^\nu \delta^3(x - y), \quad (5.3.24)$$

$$\{b_\mu(x^0, \vec{x}), \tilde{\Pi}^\nu(x^0, \vec{y})\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = \delta_\mu^\nu \delta^3(x - y), \quad (5.3.25)$$

siendo el resto de los paréntesis de Poisson entre las variables dinámicas iguales a cero⁶.

Entonces, la condición de consistencia para la primer restricción primaria,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^0(x) &= \{\phi^0(x), H_1\} = \int_\Sigma d^3y \{\phi^0(x), \mathcal{H}_1(y)\} \\ &= \int_\Sigma d^3y \left\{ \Pi^0, \frac{1}{2} (\partial_i A_0) B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right\} \\ &= \int_\Sigma d^3y \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \{\Pi^0, \partial_i A_0\} \\ &= \int_\Sigma d^3y \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_i \delta^3(x - y) \\ &= \frac{1}{2} \partial_i B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} = 0, \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

se obtienen las identidades de Bianchi para B_{jk} , que son idénticamente iguales a cero. Observe que la expresión $\frac{1}{2} \partial_i B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} = 0$, además de ser una identidad de Bianchi, también tiene la misma forma que una de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la teoría, en particular (5.3.6) cuando $\nu = 0$, pero ahora se encuentra definida en el espacio fase.

Para las siguientes tres restricciones primarias,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^l(x) &= \{\phi^l(x), H_1\} = \int_\Sigma d^3y \{\phi^l(x), \mathcal{H}_1(y)\} \\ &= \int_\Sigma d^3y \left\{ \Pi^l - \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk}, \frac{1}{2} (\partial_i b_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} + \tilde{u}_i \tilde{\Pi}^i - \frac{1}{2} \tilde{u}_i F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right\} \\ &= \int_\Sigma d^3y \left[\frac{1}{2} (\partial_i b_0 - \tilde{u}_i) \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \{\Pi^l, F_{jk}\} - \frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \{B_{jk}, \tilde{\Pi}^i\} \right] \\ &= \int_\Sigma d^3x [(\partial_i b_0 - \tilde{u}_i) \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_j \delta_k^l \delta^3(x - y) - \tilde{u}_i \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \partial_j \delta_k^i \delta^3(x - y)] \\ &= \int_\Sigma d^3x \tilde{\varepsilon}^{0lij} [(\partial_i b_0 - \tilde{u}_i) \partial_j \delta^3(x - y) + \tilde{u}_i \partial_j \delta^3(x - y)] \\ &= \tilde{\varepsilon}^{0lij} \partial_j \partial_i b_0 = 0, \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

⁵Estos paréntesis de Poisson fundamentales se obtienen empleando la definición dada en el capítulo 2 para los paréntesis de Poisson en sistemas continuos, (2.3.1) o (2.3.2), siendo ahora Q_Γ y P^Υ las variables canónicas.

⁶Los siguientes paréntesis de Poisson fundamentales son iguales a cero:

$$\begin{aligned} \{A_\alpha(x^0, \vec{x}), A_\beta(x^0, \vec{y})\} &= 0 = \{\Pi^\alpha(x^0, \vec{x}), \Pi^\beta(x^0, \vec{y})\}, \\ \{b_\alpha(x^0, \vec{x}), b_\beta(x^0, \vec{y})\} &= 0 = \{\tilde{\Pi}^\alpha(x^0, \vec{x}), \tilde{\Pi}^\beta(x^0, \vec{y})\}, \\ \{A_\alpha(x^0, \vec{x}), b_\beta(x^0, \vec{y})\} &= 0 = \{\Pi^\alpha(x^0, \vec{x}), \tilde{\Pi}^\beta(x^0, \vec{y})\}, \\ \{b_\alpha(x^0, \vec{x}), \Pi^\beta(x^0, \vec{y})\} &= 0 = \{\tilde{\Pi}^\alpha(x^0, \vec{x}), A_\beta(x^0, \vec{y})\}. \end{aligned}$$

se llega a que el resultado también es igual a cero, puesto que $\tilde{\varepsilon}^{0lij}$ es completamente antisimétrico y las derivadas parciales conmutan.

Para la quinta restricción primaria,

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{\phi}}^0(x) &= \{\tilde{\phi}^0(x), H_1\} = \int_{\Sigma} d^3y \{\tilde{\phi}^0(x), \mathcal{H}_1(y)\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \left\{ \tilde{\Pi}^0, \frac{1}{2} (\partial_i b_0) F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \frac{1}{2} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \{ \tilde{\Pi}^0, \partial_i b_0 \} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \frac{1}{2} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_i \delta^3(x - y) \\
 &= \frac{1}{2} \partial_i F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \approx 0,
 \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

nuevamente se obtienen las identidades de Bianchi, ahora para F_{jk} , que son idénticamente iguales cero. Observe que la expresión $\frac{1}{2} \partial_i F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} = 0$, además de ser una identidad de Bianchi, también tiene la misma forma que una de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la teoría, en particular (5.3.7) cuando $\beta = 0$, pero ahora se encuentra definida en el espacio fase.

Y para las últimas tres restricciones primarias,

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{\phi}}^l(x) &= \{\tilde{\phi}^l(x), H_1\} = \int_{\Sigma} d^3y \{\tilde{\phi}^l(x), \mathcal{H}_1(y)\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \left\{ \tilde{\Pi}^l - \frac{1}{2} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk}, \frac{1}{2} (\partial_i A_0) B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} + u_i \Pi^i - \frac{1}{2} u_i B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right\} \\
 &= \int_{\Sigma} d^3y \left[\frac{1}{2} (\partial_i A_0 - u_i) \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \{ \tilde{\Pi}^l, B_{jk} \} - \frac{1}{2} u_i \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \{ F_{jk}, \Pi^i \} \right] \\
 &= \int_{\Sigma} d^3x [(\partial_i A_0 - u_i) \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \partial_j \delta_k^l \delta^3(x - y) - u_i \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \partial_j \delta_k^i \delta^3(x - y)] \\
 &= \int_{\Sigma} d^3x \tilde{\varepsilon}^{0lij} [(\partial_i A_0 - u_i) \partial_j \delta^3(x - y) + u_i \partial_j \delta^3(x - y)] \\
 &= \tilde{\varepsilon}^{0lij} \partial_j \partial_i A_0 \approx 0,
 \end{aligned} \tag{5.3.29}$$

el resultado también es cero, debido a que $\tilde{\varepsilon}^{0lij}$ es completamente antisimétrico y las derivadas parciales conmutan.

Finalmente, ya que las 8 condiciones de consistencia se cumplen de manera directa, se puede concluir que el sistema no presenta más restricciones, en otras palabras, no hay restricciones secundarias.

5.3.7. Restricciones de primera y segunda clase

Una vez obtenidas todas las restricciones que presenta la teoría, se procede a calcular la matriz $W = (W^{\Gamma\Upsilon}) = (\{\Phi^{\Gamma}, \Phi^{\Upsilon}\})$, donde la nulidad y el rango de W van a indicar el número de restricciones de primera y segunda clase que se esperan, respectivamente. Considerando a W como una matriz en bloques,

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{pmatrix} \phi^0(x) \\ \phi^i(x) \\ \tilde{\phi}^0(x) \\ \tilde{\phi}^i(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^0(y) & \phi^j(y) & \tilde{\phi}^0(y) & \tilde{\phi}^j(y) \\ \{\phi^0, \phi^0\} & \{\phi^0, \phi^j\} & \{\phi^0, \tilde{\phi}^0\} & \{\phi^0, \tilde{\phi}^j\} \\ \{\phi^i, \phi^0\} & \{\phi^i, \phi^j\} & \{\phi^i, \tilde{\phi}^0\} & \{\phi^i, \tilde{\phi}^j\} \\ \{\tilde{\phi}^0, \phi^0\} & \{\tilde{\phi}^0, \phi^j\} & \{\tilde{\phi}^0, \tilde{\phi}^0\} & \{\tilde{\phi}^0, \tilde{\phi}^j\} \\ \{\tilde{\phi}^i, \phi^0\} & \{\tilde{\phi}^i, \phi^j\} & \{\tilde{\phi}^i, \tilde{\phi}^0\} & \{\tilde{\phi}^i, \tilde{\phi}^j\} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.3.30}
 \end{aligned}$$

donde la validez de esta matriz se justifica por medio de los siguientes resultados, tomando en cuenta que se han empleado los paréntesis de Poisson fundamentales,

- I) $\{\phi^0, \phi^0\} = \{\Pi^0, \Pi^0\} \approx 0$
- II) $\{\phi^0, \phi^i\} = \{\Pi^0, \Pi^i - \frac{1}{2}B_{jk} \varepsilon^{0ijk}\} \approx 0$
- III) $\{\phi^0, \tilde{\phi}^0\} = \{\Pi^0, \tilde{\Pi}^0\} \approx 0$
- IV) $\{\phi^0, \tilde{\phi}^i\} = \{\Pi^0, \tilde{\Pi}^i - \frac{1}{2}F_{jk} \varepsilon^{0ijk}\} \approx 0$
- V) $\{\tilde{\phi}^0, \tilde{\phi}^0\} = \{\tilde{\Pi}^0, \tilde{\Pi}^0\} \approx 0$
- VI) $\{\tilde{\phi}^0, \phi^i\} = \{\tilde{\Pi}^0, \Pi^i - \frac{1}{2}B_{jk} \varepsilon^{0ijk}\} \approx 0$
- VII) $\{\tilde{\phi}^0, \tilde{\phi}^i\} = \{\tilde{\Pi}^0, \tilde{\Pi}^i - \frac{1}{2}F_{jk} \varepsilon^{0ijk}\} \approx 0$
- VIII) $\{\phi^l, \phi^i\} = \{\Pi^l - \frac{1}{2}B_{jk} \varepsilon^{0ljk}, \Pi^i - \frac{1}{2}B_{jk} \varepsilon^{0ijk}\} \approx 0$
- IX) $\{\phi^l, \tilde{\phi}^i\} = \{\tilde{\Pi}^l - \frac{1}{2}F_{jk} \varepsilon^{0ljk}, \tilde{\Pi}^i - \frac{1}{2}F_{jk} \varepsilon^{0ijk}\} \approx 0$
- X) $\begin{aligned} \{\phi^l, \tilde{\phi}^i\} &= \{\Pi^l - \frac{1}{2}B_{jk} \varepsilon^{0ljk}, \tilde{\Pi}^i - \frac{1}{2}F_{jk} \varepsilon^{0ijk}\} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} \{\Pi^l, F_{jk}\} - \frac{1}{2} \varepsilon^{0ljk} \{B_{jk}, \tilde{\Pi}^i\} \\ &= -\frac{1}{2} [\varepsilon^{0ijl} \partial_j \delta^3(x-y) + \varepsilon^{0lji} \partial_j \delta^3(x-y)] \approx 0 \end{aligned}$

De esta manera, se tiene que el $\text{Rango}(W) = 0$ y la $\text{Nulidad}(W) = 8$, por consiguiente, todas las restricciones que se esperan son de primera clase, las cuales estarán dadas directamente por las restricciones primarias, (5.3.15) - (5.3.18), esto se verifica calculando los 8 vectores nulos, V^Ξ , de la matriz W y realizando las contracciones con las restricciones Φ^Υ ,

$$\gamma^\Xi = \int_{\Sigma} V_{\Upsilon}^\Xi \Phi^\Upsilon d^3y. \tag{5.3.31}$$

Así, se tienen las 8 restricciones de primera clase:

$$\gamma^0 := \Pi^0 \approx 0, \quad (5.3.32)$$

$$\gamma^l := \Pi^l - \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \approx 0, \quad (5.3.33)$$

$$\tilde{\gamma}^0 := \tilde{\Pi}^0 \approx 0, \quad (5.3.34)$$

$$\tilde{\gamma}^l := \tilde{\Pi}^l - \frac{1}{2} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ljk} \approx 0. \quad (5.3.35)$$

5.3.8. Grados de libertad

Hecha la separación entre restricciones de primera y segunda clase correctamente, es posible realizar un conteo certero de los grados de libertad, que recordando del Capítulo 1, se calculan como sigue:

$$GL = \frac{1}{2} \left[\left(\begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{array} \right) - 2 \times \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones} \\ \text{de primera clase} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de restricciones de} \\ \text{segunda clase originales} \end{array} \right) \right], \quad (5.3.36)$$

así, para esta teoría en particular,

$$GL = \frac{1}{2} [16 - 2(8) - 0] = 0, \quad (5.3.37)$$

lo que indica que es del tipo topológica. Además, este resultado finalmente asegura que la teoría no presenta reducibilidad, en principio porque no hubo restricciones secundarias y todas las primarias correspondieron a las 8 restricciones de primera clase esperadas, que al ser idenpendientes entre sí, el cálculo de los grados de libertad es consistente. Entonces, la conjetura es válida, es decir, se cumple para este ejemplo en particular, de manera que Pontryagin no es la única teoría donde se satisface la conjetura.

5.3.9. Hamiltoniana y acción extendida

Ya identificadas todas las restricciones en la teoría y hecha la separación correspondiente entre estas mismas, se construyen la acción y hamiltoniana extendidas, que van a proporcionar la dinámica completa del sistema. La acción extendida es por definición,

$$\begin{aligned} S_E [A_\alpha, \Pi^\alpha, b_\beta, \tilde{\Pi}^\beta, \lambda_\mu, \tilde{\lambda}_\nu] &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left(\Pi^\alpha \dot{A}_\alpha + \tilde{\Pi}^\beta \dot{\tilde{A}}_\beta - \mathcal{H}_C - \lambda_\mu \gamma^\mu - \tilde{\lambda}_\nu \tilde{\gamma}^\nu \right) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left(\Pi^\alpha \dot{A}_\alpha + \tilde{\Pi}^\beta \dot{\tilde{A}}_\beta - \frac{1}{2} ((\partial_i A_0) B_{jk} + (\partial_i b_0) F_{jk}) \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right. \\ &\quad \left. - \lambda_0 \gamma^0 - \lambda_i \gamma^i - \tilde{\lambda}_0 \tilde{\gamma}^0 - \tilde{\lambda}_i \tilde{\gamma}^i \right), \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

donde se puede identificar la hamiltoniana extendida⁷,

⁷Si se toma en cuenta que explícitamente, $B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} = 2\partial_j b_k \tilde{\varepsilon}^{0ijk}$ y $F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} = 2\partial_j A_k \tilde{\varepsilon}^{0ijk}$, al integrar por partes los primeros dos términos de (5.3.39) y considerando que en la frontera de la variedad $\mathcal{M}$ los términos de superficie se anulan, la hamiltoniana extendida toma la siguiente forma:

$$H_E = \int_{\Sigma} d^3x \left[\lambda_0 \gamma^0 + \lambda_i \gamma^i + \tilde{\lambda}_0 \tilde{\gamma}^0 + \tilde{\lambda}_i \tilde{\gamma}^i \right],$$

es decir, H_E se puede escribir en términos de una combinación lineal de restricciones de primera clase.

$$H_E = \int_{\Sigma} d^3x \left[\frac{1}{2} ((\partial_i A_0) B_{jk} + (\partial_i b_0) F_{jk}) \tilde{\varepsilon}^{0ijk} + \lambda_0 \gamma^0 + \lambda_i \gamma^i + \tilde{\lambda}_0 \tilde{\gamma}^0 + \tilde{\lambda}_i \tilde{\gamma}^i \right]. \quad (5.3.39)$$

Realizando la variación de la acción extendida e igualando a cero, se obtienen las ecuaciones de movimiento de esta teoría tipo BF,

$$\delta A_0 : \quad \dot{\Pi}^0 = \frac{1}{2} \partial_i B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \quad (5.3.40)$$

$$\delta \Pi^0 : \quad \dot{A}_0 = \lambda_0 \quad (5.3.41)$$

$$\delta A_k : \quad \dot{\Pi}^k = \partial_i \tilde{\lambda}_j \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \quad (5.3.42)$$

$$\delta \Pi^k : \quad \dot{A}_k = \lambda_k \quad (5.3.43)$$

$$\delta b_0 : \quad \dot{\tilde{\Pi}}^0 = \frac{1}{2} \partial_i F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \quad (5.3.44)$$

$$\delta \tilde{\Pi}^0 : \quad \dot{b}_0 = \tilde{\lambda}_0 \quad (5.3.45)$$

$$\delta b_k : \quad \dot{\tilde{\Pi}}^k = \partial_i \lambda_j \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \quad (5.3.46)$$

$$\delta \tilde{\Pi}^k : \quad \dot{b}_k = \tilde{\lambda}_k \quad (5.3.47)$$

$$\delta \lambda_0 : \quad \gamma^0 = 0 \quad (5.3.48)$$

$$\delta \lambda_k : \quad \gamma^k = 0 \quad (5.3.49)$$

$$\delta \tilde{\lambda}_0 : \quad \tilde{\gamma}^0 = 0 \quad (5.3.50)$$

$$\delta \tilde{\lambda}_k : \quad \tilde{\gamma}^k = 0, \quad (5.3.51)$$

En principio, estas ecuaciones representan la evolución dinámica completa del sistema. Pero, al realizar el conteo de grados de libertad, (5.3.37), este resultó ser 0, lo cual quiere decir que en realidad no hay dinámica en el sistema. Entonces, a partir de las ecuaciones de movimiento, este hecho se intuye observando que la evolución temporal de las variables dinámicas $A_0, A_k, b_0, b_k, \Pi^k$ y $\tilde{\Pi}^k$ está dada por multiplicadores de Lagrange, que son funciones indeterminadas, mientras que para Π^0 y $\tilde{\Pi}^0$ su evolución dinámica está dada directamente por las identidades de Bianchi para B_{jk} y F_{jk} respectivamente.

5.3.10. Transformaciones de norma

Encontradas las ecuaciones de movimiento, lo que resta es calcular las transformaciones de norma, que mantienen invariantes estas ecuaciones. Al igual que se hizo en el Capítulo 3, usando el formalismo de Castellani se puede definir el generador de estas transformaciones en términos de las restricciones de primera clase, esto es,

$$G := \int_{\Sigma} d^3y \left[\varepsilon_0(y) \gamma^0(y) + \varepsilon_i(y) \gamma^i(y) + \tilde{\varepsilon}_0(y) \tilde{\gamma}^0(y) + \tilde{\varepsilon}_i(y) \tilde{\gamma}^i(y) \right] \quad (5.3.52)$$

$$= \int_{\Sigma} d^3y \left[\varepsilon_0 \Pi^0 + \varepsilon_i \left(\Pi^i - \frac{1}{2} B_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right) + \tilde{\varepsilon}_0 \tilde{\Pi}^0 + \tilde{\varepsilon}_i \left(\tilde{\Pi}^i - \frac{1}{2} F_{jk} \tilde{\varepsilon}^{0ijk} \right) \right]. \quad (5.3.53)$$

Siendo $Q'_{\Upsilon} = Q_{\Upsilon} + \delta Q_{\Upsilon}$ y $P'^{\Upsilon} = P^{\Upsilon} + \delta P_{\Upsilon}$ las transformaciones de norma para las variables canónicas del espacio fase, se tiene que,

$$\delta A_0(x) = \{A_0(x), G\} = \int_{\Sigma} d^3y \varepsilon_0 \{A_0(x), \Pi^0(y)\} = \varepsilon_0(x) = \varepsilon_0 \quad (5.3.54)$$

$$\delta A_j(x) = \{A_j(x), G\} = \int_{\Sigma} d^3y \varepsilon_i \{A_j(x), \Pi^i(y)\} = \varepsilon_j(x) = \varepsilon_j \quad (5.3.55)$$

$$\delta b_0(x) = \{b_0(x), G\} = \int_{\Sigma} d^3y \tilde{\varepsilon}_0 \{b_0(x), \tilde{\Pi}^0(y)\} = \tilde{\varepsilon}_0(x) = \tilde{\varepsilon}_0 \quad (5.3.56)$$

$$\delta b_j(x) = \{b_j(x), G\} = \int_{\Sigma} d^3y \tilde{\varepsilon}_i \{b_j(x), \tilde{\Pi}^i(y)\} = \tilde{\varepsilon}_j(x) = \tilde{\varepsilon}_j \quad (5.3.57)$$

$$\delta \Pi^0(x) = \{\Pi^0(x), G\} = 0 \quad (5.3.58)$$

$$\delta \Pi^j(x) = \{\Pi^j(x), G\} = \int_{\Sigma} d^3y \tilde{\varepsilon}_i \{\Pi^j(x), -\frac{1}{2} F_{lk}(y) \tilde{\varepsilon}^{0ilk}\} = \tilde{\varepsilon}^{0jlk} \partial_l \tilde{\varepsilon}_k \quad (5.3.59)$$

$$\delta \tilde{\Pi}^0(x) = \{\tilde{\Pi}^0(x), G\} = 0 \quad (5.3.60)$$

$$\delta \tilde{\Pi}^j(x) = \{\tilde{\Pi}^j(x), G\} = \int_{\Sigma} d^3y \varepsilon_i \{\tilde{\Pi}^j(x), -\frac{1}{2} B_{lk}(y) \varepsilon^{0ilk}\} = \varepsilon^{0jlk} \partial_l \varepsilon_k. \quad (5.3.61)$$

Definiendo,

$$\varepsilon_0 := \partial_0 \varepsilon = \partial_0 \varepsilon,$$

$$\varepsilon_j := \partial_j \varepsilon,$$

$$\tilde{\varepsilon}_0 := \partial_0 \tilde{\varepsilon} = \partial_0 \tilde{\varepsilon},$$

$$\tilde{\varepsilon}_j := \partial_j \tilde{\varepsilon},$$

a partir de (5.3.54) - (5.3.57), se tiene que las variables canónicas Q_{Υ} se transforman como,

$$A'_{\alpha} = A_{\alpha} + \partial_{\alpha} \varepsilon, \quad (5.3.62)$$

$$b'_{\alpha} = b_{\alpha} + \partial_{\alpha} \tilde{\varepsilon}, \quad (5.3.63)$$

además, esta redefinición de los parámetros de norma también afecta las transformaciones de los momentos canónicos, siendo $\delta \Pi^{\alpha} = 0$ y $\delta \tilde{\Pi}^{\alpha} = 0$. Por otro lado, si ahora los parámetros de norma se definen como,

$$\varepsilon_0 := \mathcal{L}_{\vartheta} A_0,$$

$$\varepsilon_i := \mathcal{L}_{\vartheta} A_i,$$

$$\tilde{\varepsilon}_0 := \mathcal{L}_{\vartheta} b_0,$$

$$\tilde{\varepsilon}_i := \mathcal{L}_{\vartheta} b_i,$$

siendo $\mathcal{L}_{\vartheta}$ la derivada de Lie a lo largo de un campo vectorial ϑ arbitrario. Entonces las transformaciones de norma para los campos A_{α} y b_{α} toman la siguiente forma:

$$A_{\alpha} \rightarrow A'_{\alpha} = A_{\alpha} + \mathcal{L}_{\vartheta} A_{\alpha}, \quad (5.3.64)$$

$$b_{\alpha} \rightarrow b'_{\alpha} = b_{\alpha} + \mathcal{L}_{\vartheta} b_{\alpha}. \quad (5.3.65)$$

Se concluye así, que los difeomorfismos son una simetría intrínseca de esta teoría BF particular, característica que comparte con Pontryagin, la teoría BF y Relatividad General, siendo esta una de las razones por las cuales merece prestarle atención a las teorías topológicas.

5.4. Conclusiones

A partir del análisis hamiltoniano realizado para la teoría BF abeliana, se observó que la presencia de reducibilidad no se puede evitar al momento de definir la hamiltoniana canónica de la teoría con las variables canónicas propuestas, lo cual en principio indicaría que la teoría de Pontryagin abeliano es un caso especial, donde es posible evitar la reducibilidad a partir de una elección adecuada de las variables canónicas. Sin embargo, analizando algunas características de ambas teorías, se sugiere una propiedad extra (además de la elección de variables canónicas que se emplean para definir a H_C) por la cual la reducibilidad no aparece, esta es que las ecuaciones de movimiento en la formulación Lagrangiana sean identidades, un hecho que la teoría BF no cumple, ya que ambos conjuntos de ecuaciones de movimiento no son identidades.

Entonces, siguiendo las ideas previas, se propuso una conjetura que garantiza la no presencia de reducibilidad para teorías topológicas, siempre y cuando las ecuaciones de movimiento en la formulación Lagrangiana sean identidades y se empleen las variables canónicas convenientes para definir a H_C , además se presenta un ejemplo que ciertamente satisface la conjetura y muestra que Pontryagin no es el único caso donde la reducibilidad puede ser evitada. Cabe aclarar que el hecho de que la conjetura sea válida para dos teorías de campos topológicas particulares, no asegura que será válida para cualquier teoría de campos topológica, por el momento es una nueva herramienta que puede ser utilizada, con el riesgo de que aún pueda llegar a ser inválida y la razón de que se presente para teorías de tipo abelianas, se debe a que por el momento lo que se desea es convencer su validez misma sin necesidad de introducir desarrollos más complejos; de hecho, los resultados que se obtuvieron en este trabajo de tesis, para Pontryagin, BF y la teoría tipo BF, serán válidos independientemente de si se consideran las tres teorías en su forma abeliana o no abeliana, de manera que la conjetura se podrá aplicar a teorías abelianas o no abelianas. Lo que sí debe tomarse en cuenta es que la conjetura aplica únicamente para teorías topológicas y ciertamente el hecho de que se pida que las ecuaciones de movimiento sean identidades, restringe aún más el conjunto de teorías singulares donde se pueda emplear, en otras palabras, la conjetura no es aplicable a cualquier teoría singular.

Por otra parte, recordando que la conjetura propuesta fue resultado de analizar características particulares presentes en las teorías de Pontryagin y BF, uno podría seguir ideas similares a las presentes en este trabajo de tesis, analizando otras teorías topológicas, para indagar si los resultados previos se pueden extender u obtener algo similar para otras teorías singulares (ya sea que no satisfagan los requisitos de la conjetura como la teoría BF o que no sean teorías topológicas).

Finalmente, la razón principal de proponer la conjetura previa, es presentar una estrategia que permita evitar la reducibilidad en el análisis hamiltoniano, siendo esta una característica problemática que puede encontrarse en las teorías de campos topológicas o en cualquier otra teoría singular, puesto que, como ya se ha comentado en el Capítulo 1, las relaciones que permiten identificar aquellas restricciones que son dependientes no las proporciona el algoritmo, uno las debe proponer “a mano”, de manera que es mejor tener un método a partir del cual no se tenga que lidiar con la reducibilidad.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se realizó el análisis hamiltoniano de tres teorías topológicas abelianas: Pontryagin, BF y una teoría tipo BF, con el propósito de encontrar aquellas características que permitan evitar la reducibilidad en el análisis hamiltoniano de cualquier teoría topológica.

En la teoría de Pontryagin se obtuvo que eligiendo las variables dinámicas apropiadas (A_0, A_i) para definir a la hamiltoniana canónica, por medio de la definición de los momentos, es posible evitar la reducibilidad, a diferencia de lo reportado en la literatura [15], donde se emplean distintas variables canónicas (A_0, Π^i) para definir a H_C y hay reducibilidad. Además, se mostró que la dinámica de la teoría no se ve modificada cuando hay o no reducibilidad, o cuando se eligen distintos conjuntos de variables canónicas para definir a H_C , es decir, se pudo observar que las ecuaciones de movimiento y transformaciones de norma, obtenidas en la literatura [15] y en este trabajo de tesis, son equivalentes. Como un dato extra, también se hizo notar que el análisis hamiltoniano de Pontryagin se simplifica al emplear las variables canónicas propuestas en este trabajo de tesis.

Por otra parte, en la teoría BF se obtuvo que la elección de variables canónicas para definir a la hamiltoniana canónica, por medio de la definición de los momentos, no cambia el hecho de que la teoría presente reducibilidad, puesto que al realizar el análisis hamiltoniano y elegir un conjunto de variables canónicas distinto al empleado en la literatura [16] (donde hay reducibilidad) para definir a H_C , se obtienen las mismas restricciones finales que en [16] y por tanto, la teoría BF sigue presentando reducibilidad. Así, no hay un conjunto de variables dinámicas, para definir la hamiltoniana canónica, que permita evitar la reducibilidad en la teoría BF.

A partir de lo sucedido en BF, se verificó que no basta con una elección conveniente de las variables canónicas, por medio de la definición de los momentos, para definir a la hamiltoniana canónica, de manera que se pueda evitar la reducibilidad, un resultado que en principio se generaliza para cualquier teoría singular. A pesar de esto, al fijarse en ciertas características presentes en las dos teorías anteriores, como por ejemplo, el hecho de que en Pontryagin las ecuaciones de movimiento son identidades, mientras que en BF no es así y que en ambas teorías aparecen expresiones similares a las ecuaciones de movimiento en los cálculos realizados para las condiciones de consistencia. Entonces, uno puede restringirse a un conjunto específico de teorías topológicas que cumplan ciertas propiedades, de forma que esto permita a las teorías eludir la reducibilidad. Por lo tanto, se propuso la siguiente conjetura:

Conjetura: *Si las ecuaciones de movimiento en la formulación lagrangiana, correspondientes a una teoría de campos topológica, son identidades y en el análisis hamiltoniano se define su hamiltoniana canónica a partir de una “elección de variables canónicas conveniente”⁸, la cual se realiza por medio de la definición de los momentos, entonces la teoría no presentará reducibilidad.*

Además, se mostró que una teoría tipo BF particular cumple con dicha conjetura, esto es, la teoría de Pontryagin no es un caso único donde es posible evitar reducibilidad. Cabe notar que, al exigir que las ecuaciones de movimiento de las teorías topológicas sean identidades, la validez de la

⁸Para más información sobre la “elección de variables canónicas conveniente”, consultar el Capítulo 5, sección 5.2.2.

conjetura se reduce a un conjunto de teorías topológicas y en general, no será aplicable a cualquier teoría singular. Es importante aclarar, nuevamente, que esta conjetura es una propuesta, ya que no se ha realizado una demostración rigurosa y la razón principal de hacer tal proposición, es presentar una estrategia que permita evitar la reducibilidad en el análisis hamiltoniano, aunque sea para un conjunto específico de teorías topológicas, siendo esta una característica problemática, sobre todo si las teorías son más complejas. Además, recordando que la conjetura propuesta fue resultado de analizar características particulares presentes en el análisis hamiltoniano de teorías topológicas particulares, el trabajo de tesis y las ideas presentadas en el mismo, pueden ser utilizadas como motivación para que se realicen análisis similares para otras teorías topológicas o simplemente singulares, de manera que se indague si los resultados previos se pueden extender u obtener algo similar para otras teorías singulares (ya sea que no satisfagan los requisitos de la conjetura como la teoría BF o que no sean teorías topológicas), con el propósito de que se encuentren nuevas estrategias que permitan evitar la reducibilidad en el análisis hamiltoniano, de manera general o para un conjunto específico de teorías singulares.

Apéndice A

Elementos matemáticos

En este apéndice se presenta un resumen de algunos elementos y propiedades matemáticas que fueron utilizadas durante el desarrollo de esta tesis.

A.1. Cálculo de variaciones

Las funcionales usualmente se expresan como integrales definidas, es decir,

$$F[f] = \int_a^b F[f(x)] dx, \quad (\text{A.1.1})$$

mientras que, su correspondiente derivada funcional, conocida también como derivada de Gâteaux, se define como sigue,

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f} = \int_a^b \frac{\delta F}{\delta f}(x) u(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f + \epsilon u] - F[f]}{\epsilon} = \left[\frac{d}{d\epsilon} F[f + \epsilon u] \right]_{\epsilon=0}, \quad (\text{A.1.2})$$

donde u es una función arbitraria.

Una manera alternativa en que se puede definir la derivada funcional, es por medio del siguiente límite,

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(x) + \epsilon \delta(x - y)] - F[f(x)]}{\epsilon}, \quad (\text{A.1.3})$$

que involucra la Delta de Dirac; observando que,

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x - y). \quad (\text{A.1.4})$$

A.1.1. Propiedades

A partir de (A.1.3), se siguen las siguientes propiedades para la suma y producto de funcionales,

$$\frac{\delta}{\delta f(y)} (F_1[f] + F_2[f]) = \frac{\delta F_1[f]}{\delta f(y)} + \frac{\delta F_2[f]}{\delta f(y)} \quad (\text{A.1.5})$$

y

$$\frac{\delta}{\delta f(y)} (F_1(f)F_2(f)) = \frac{\delta F_1[f]}{\delta f(y)} F_2[f] + F_1[f] \frac{\delta F_2[f]}{\delta f(y)}. \quad (\text{A.1.6})$$

A.2. Descomposición 3+1

El término globalmente hiperbólico describe la estructura causal de una variedad diferenciable que representa el espacio-tiempo en la teoría general de la relatividad de Einstein. De manera formal, una variedad M es globalmente hiperbólica si satisface las siguientes dos condiciones:

- Para cada par de puntos $p, q \in M$, $I^-(p) \cap I^+(q)$ es compacto y subconjunto de M . Donde, $I^\pm(S)$ representa el futuro (pasado) de un subconjunto S de M , es decir, es el conjunto de todos los puntos a los que se puede llegar desde S por medio de las curvas de futuro (pasado).
- La condición de “Causalidad” se satisface sobre M (no existe ninguna curva espacio-temporal cerrada que pase por la variedad). Anteriormente se imponía una condición más restrictiva, llamada “Causalidad fuerte”, la cual quiere decir que no existen curvas causales espacio-temporales “casi cerradas”; pero se probó en [17] que es suficiente con que se cumpla causalidad.

Un resultado directo de la hiperbolicidad global es que existe una familia de superficies de Cauchy para M (superficies que no se intersectan entre sí). Entonces, una variedad espacio-tiempo M globalmente hiperbólica es isomorfa a $I \times \Sigma$ para algunas superficies de Cauchy Σ y algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tal isomorfismo es conocido como la “descomposición 3+1”; en general, la estructura métrica no necesita respetar dicha descomposición.

A.3. Delta de Dirac

La función Delta de Dirac es una distribución o “función generalizada”, definida mediante la siguiente fórmula integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x) dx = f(a), \quad (\text{A.3.1})$$

donde se siguen directamente los resultados posteriores,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1, \quad (\text{A.3.2})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x) dx = f(0), \quad (\text{A.3.3})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-b)\delta(a-x) dx = \delta(a-b). \quad (\text{A.3.4})$$

En algunos casos, se representa la Delta de Dirac como una función definida a trozos,

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.3.5})$$

conocida como “expresión informal”.

A.3.1. Propiedades

A continuación, se enlistan algunas propiedades de la Delta de Dirac que se utilizaron en la presente tesis, principalmente en los cálculos de los paréntesis de Poisson,

$$\delta(x) = \delta(-x) \tag{A.3.6}$$

$$\delta(x - a) = \delta(a - x) \tag{A.3.7}$$

$$f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a) \tag{A.3.8}$$

$$\delta'(-x) = -\delta'(x) \tag{A.3.9}$$

$$f(x)\delta'(x) = -f'(x)\delta(x), \tag{A.3.10}$$

las cuales se pueden demostrar utilizando directamente la definición (A.3.1) de la Delta de Dirac.

Bibliografía

- [1] R. DUGAS, *A History of Mechanics*, New York: Dover Publications, (1988).
- [2] P.A.M. DIRAC, *Homogeneous variables in classical dynamics*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **29**(03), 389-400 (1933).
- [3] P.A.M. DIRAC, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Canadian Journal of Mathematics, **2**(0), 129-148 (1950).
- [4] J.L. ANDERSON AND P.G. BERGMANN, *Constraints in Covariant Field Theories*, Physical Review, **83**(5), 1018-1025 (1951).
- [5] P.G. BERGMANN, I. GOLDBERG, A. JANIS AND E. NEWMAN, *Canonical Transformations and Commutators in the Lagrangian Formalism*, Physical Review, **103**(8), 807-813 (1956).
- [6] P.A.M. DIRAC, *Lectures on Quantum Mechanics*, New York: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University. Monographs Series, No. **2**, (1964).
- [7] M. HENNEAUX AND C. TEITELBOIM, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, (1991).
- [8] K. SUNDERMEYER, *Constrained Dynamics*, Lecture Notes in Physics, **169**, Springer-Verlag, (1982).
- [9] H. GOLDSTEIN, C.P. POOLE AND J.L. SAFKO, *Classical Mechanics*, 3rd ed., Pearson, (2011).
- [10] J.V. JOSÉ AND E.J. SALETAN, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*, Cambridge University Press, (1998).
- [11] L.D. LANDAU AND E.M. LIFSHITZ, *The Classical Theory of Fields*, 4th rev. ed., Butterworth-Heinemann, (1987).
- [12] G.F. TORRES DEL CASTILLO, *An Introduction to Hamiltonian Mechanics*, Birkhäuser, (2018).
- [13] G.F. TORRES DEL CASTILLO, *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach*, 2nd ed., Birkhäuser, (2020).
- [14] G.F. TORRES DEL CASTILLO, *Estructuras hamiltonianas para campos clásicos*, Rev. Mex. Fís. **37**, 165-185 (1991).
- [15] A. ESCALANTE AND L. CARBAJAL, *Hamiltonian study for Chern-Simons and Pontryagin theories*, Annals of Physics, **326**, 323-339 (2011).
- [16] A. ESCALANTE AND I. RUBALCAVA, *A pure Dirac's canonical analysis for four-dimensional BF theories*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. **9**, No. **7** (2012).

- [17] A.N. BERNAL AND M. SÁNCHEZ, *Globally hyperbolic spacetimes can be defined as “causal” instead of “strongly causal”*, Classical and Quantum Gravity, Vol. **24**, No. **3**, 745 (2007).
- [18] M. BURGESS, *Classical Covariant Fields*, Cambridge University Press, (2002).
- [19] L. CASTELLANI, *Symmetries in Constrained Hamiltonian Systems*, Annals of Physics, **143**, 357-371 (1982).
- [20] J. BERRA-MONTIEL, *Notas sobre el Formalismo Hamiltoniano de Teorías con Simetrías de Norma y sus Aplicaciones*, UASLP, (2017).
- [21] A. ESCALANTE AND O. RODRIGUEZ-TZOMPANTZI, *Hamiltonian Dynamics for an alternative action describing Maxwell’s equations*, Int. J. Pure. Appl. Math. **81**, 701-713 (2012).
- [22] A. ESCALANTE AND J. BERRA-MONTIEL, *A pure Dirac’s method for Yang-Mills theory expressed as constrained BF-like theory*, Int. J. Pure Appl. Math. **79**, 405-423 (2012).
- [23] A. ESCALANTE AND J. LÓPEZ-OSIO, *Hamiltonian analysis for topological and Yang-Mills theories expressed as a constrained BF-like theory*, Int. J. Pure Appl. Math. **75**, 339-352 (2012).
- [24] J.F. PLEBAŃSKI, *On the separation of Einsteinian substructures*, Journal of Mathematical Physics, **18**(12), 2511–2520 (1977).
- [25] D.K. WISE, *MacDowell-Mansouri gravity and Cartan geometry*, Classical and Quantum Gravity, Vol. **27**, (2010).
- [26] F. A. E. PIRANI AND A. SCHILD, *On the Quantization of Einstein’s Gravitational Field Equations*, Physical Review, **79**(6), 986-991 (1950).
- [27] F. A. E. PIRANI, A. SCHILD AND R. SKINNER, *Quantization of Einstein’s Gravitational Field Equations. II.*, Physical Review, **87**(3), 452-454 (1952)
- [28] M. BOJOWALD, *Canonical Gravity and Applications*, Cambridge University Press, (2010).
- [29] I. RUBALCAVA, *Análisis hamiltoniano de teorías tipo BF*. FCFM, BUAP. Tesis de maestría, (2010).