



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"BÚSQUEDA DE LAS ESCALERAS DE  
WANNIER EN SISTEMAS ELÁSTICOS 1D  
GOBERNADOS POR LA ECUACIÓN DE  
TIMOSHENKO-EHRENFEST"**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS  
(FÍSICA)**

PRESENTA

**WILLIAM JAVIER RODRÍGUEZ CRUZ**

DIRECTORES DE TESIS  
**DR. ALFREDO DÍAZ DE ANDA**

No. de CVU: 709848

**JULIO**

**Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Instituto de Física «Luis Rivera Terrazas»**

**«Búsqueda de las escaleras de Wannier en  
sistemas elásticos 1D gobernados por la ecuación  
de Timoshenko-Ehrenfest»**

Tesis presentada por

**William Javier Rodríguez Cruz**

para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias  
(Física)**

Director de tesis

**Dr. Alfredo Díaz de Anda**

Puebla, México

Mayo 2021.

©2021. - William Javier Rodríguez Cruz

Derechos Reservados

# Agradecimientos

*Más que un cliché los agradecimientos son una manifestación humana de sosiego. Desde mi perspectiva no existen logros individuales, siempre estamos impregnados de la sociedad más cercana con la que convivimos, la cual de forma directa desde el mundo inteligible y sensible nos inspira a crear nuevas ideas. En ese mundo inteligible, manifiesto mi más sincero agradecimiento a:*

*El Dr. Alfredo Díaz de Anda, un excelente ser humano e investigador, dispuesto a la propuesta de nuevas ideas y nuevas formas de investigar, propiciando la ciencia desde nuevas perspectivas.*

*El Dr. José Concepción Torres, un investigador crítico y minucioso en el desarrollo de la investigación.*

*El comité de sinodales por sus comentarios y sugerencias.*

*Mi novia, Diana, por sus sugerencias o críticas académicas, siempre disponibles.*

*En el mundo sensible destaco mi agradecimiento:*

*A mis padres, de su ahínco impetuoso surge este investigador, que nacido en el barrio, hoy demuestra que en el arrabal también se forjan intelectuales, cuyo conocimiento será usado en pro de la sociedad.*

*Una vez más a «la Dianita». Siempre presente en las circunstancias más difíciles, que nos acarreo la odisea de estudiar un posgrado en tierras prestadas, como lo especifica la visa.*

*Sin embargo, el alma no requiere de visa. Ejemplo de ello, son las magnificas amistades que forjé en México, con las que siempre disfruté el momento por medio de tertulias evanescentes.*

*Finalmente, un agradecimiento a todo el pueblo mexicano que con sus impuestos, gestionados por el CONACyT, habilitan la posibilidad de que gentes de otros países, como yo, puedan llevar a cabo sus estudios de posgrado.*

*Dedicado a la juventud colombiana  
que con su lucha colectiva  
forjará un mejor país*

# Búsqueda de las escaleras de Wannier en sistemas elásticos 1D gobernados por la ecuación de Timoshenko-Ehrenfest

## Resumen

En este trabajo se presenta un análogo del fenómeno cuántico de las Escaleras de Wannier-Stark (EWS), mas brevemente escaleras de Wannier, en sistemas elásticos 1D, vigas de aluminio, gobernados por la ecuación de Timoshenko-Ehrenfest. Nuestra investigación inicialmente se enfoca en el estudio de las ondas torsionales, cuyo Modelo de Viga Independiente (MVI) es medular para el diseño de las estructuras 1D. Con un razonamiento similar al utilizado en ondas torsionales, abordamos las ondas flexionales, cuyo formalismo es descrito por dos ecuaciones diferenciales acopladas de segundo grado, en contraste con las vibraciones torsionales que se rigen por la ecuación de onda. El comportamiento exótico del espectro de frecuencias como función de la longitud, en una viga con sección transversal rectangular uniforme y la naturaleza de la ecuación de Timoshenko-Ehrenfest ponen de manifiesto el reto que constituye la observación de las EWS en ondas flexionales, el cual en este trabajo es resuelto de forma teórica y experimental. En este sentido y por primera vez, un espectro de frecuencias con espaciamiento constante y sus eigenfunciones asociadas bien localizadas emerge de forma natural en un sistema que no es gobernado por la ecuación de onda.

# Search for the Wannier ladders in 1D elastic systems governed by the Timoshenko-Ehrenfest equation

## Abstract

This thesis presents an analogous of quantum phenomenon of Wannier-Stark Ladders (WSL), more briefly Wannier ladders, in 1D elastic systems, aluminium beams, governed by the Timoshenko-Ehrenfest equation. Our research initially focuses on the study of extorsiona waves, whose independent beam model is core to the design of beams with 1D structure. With a similar approach to that used for torsional waves, we approach bending waves, whose formalism is described by two coupled second-degree differential equations, unlike with torsional waves that are governed by wave equation. The exotic behavior of the frequency spectrum as a function of the length, in a beam with uniform rectangular cross section and the nature of the Timoshenko-Ehrenfest equation reveals the challenger which constitutes the observation of the WSL in bending waves, which is solved theoretically and experimentally in this research. In this regard, for first time, a frequency spectrum with constant spacing and its well-localized eigenfunctions emerges naturally in a system that is not governed by the wave equation.

## Publicaciones

- W. Rodríguez-Cruz, J. C. Torres-Guzmán and A. Díaz-de-Anda, “Wannier-Stark ladders in free oscillations of Timoshenko-Ehrenfest beams”, EPL, **133**, 64001 (2021). (**Publicado**)
- W. Rodríguez-Cruz, J. C. Torres-Guzmán and A. Díaz-de-Anda, “Correction in the continuity conditions for beams with structured governed by the Timoshenko-Ehrenfest equation,” European Physical Journal Plus (2021). (**Enviado**)
- W. Rodríguez-Cruz, J. C. Torres-Guzmán and A. Díaz-de-Anda, “Correction in the continuity conditions for beams with structured governed by the Timoshenko-Ehrenfest equation,” (2021). (**Proceso de envío**)
- W. Rodríguez-Cruz, J. C. Torres-Guzmán and A. Díaz-de-Anda, “Behavior of transverse displacement close of cut-off frequency in beams governed by Timoshenko-Ehrenfest equation,” (2021). (**Proceso de envío**)

## Participación en eventos

- “Ground and Underground States.” William Javier Rodríguez Cruz. Chaos, quantum chaos and more (gathering in memory of Boris Chirikov on his 90th birthday), June 2018, Cuernavaca, México. (Ponencia)
- “Escaleras de Wannier-Stark en sistemas elásticos 1D” William Javier Rodríguez Cruz. Seminario de Eco-campus Valsequillo, Noviembre de 2018, Puebla, México. (Conferencia)
- “Oscilaciones de Rabi en sistemas elásticos 1D” William Javier Rodríguez Cruz. Octava reunión Anual de la División de Estado Sólido, Mayo de 2019, Puebla, México. (Poster)
- “Estados subterráneos” William Javier Rodríguez Cruz. Seminario de Eco-campus Valsequillo, Agosto de 2019, Puebla, México. (Conferencia)
- “Localización y repulsión de niveles en sistemas elásticos 1D” William Javier Rodríguez Cruz. Seminario de Eco-campus Valsequillo, Noviembre de 2019, Puebla, México. (Conferencia)



# Contenido

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
Lista de Figuras . . . . .	xi
<b>Lista de Tablas</b>	<b>xvi</b>
Lista de Tablas . . . . .	xvii
<b>Acrónimos</b>	<b>1</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>2</b>
1.1 Antecedentes . . . . .	2
1.2 Organización del trabajo . . . . .	5
<b>2 Ondas torsionales en vigas 1D con sección transversal uniforme</b>	<b>7</b>
2.1 Ecuación de movimiento . . . . .	7
2.1.1 Solución y condiciones de frontera de extremos libres . . . . .	9
2.2 Modelo de viga independiente . . . . .	9
2.3 Eigenfrecuencias y eigenfunciones para vigas de sección transversal circular y rectangular uniformes . . . . .	10
<b>3 Fenómenos ondulatorios 1D en vigas con estructura excitadas con ondas torsionales</b>	<b>13</b>
3.1 Cruces evitados de niveles . . . . .	13
3.2 Sistemas localmente periódicos . . . . .	21
3.3 Sistemas localmente periódicos con dos impurezas . . . . .	25
3.4 Análogo de las Escaleras de Wannier-Stark . . . . .	27
<b>4 Ondas flexionales en vigas 1D con sección transversal uniforme</b>	<b>35</b>
4.1 Ecuación de movimiento . . . . .	35
4.1.1 Relación de dispersión . . . . .	38
4.1.2 Solución y condiciones de frontera de extremos libres . . . . .	40
4.2 Eigenfrecuencias y Eigenfunciones . . . . .	42

<b>5</b>	<b>Análogo de las escaleras de Wannier-Stark en ondas flexionales</b>	<b>46</b>
5.1	Eigenfrecuencias y eigenfunciones . . . . .	46
5.2	Modelo de viga independiente . . . . .	48
5.3	Estructura de Wannier-Stark . . . . .	51
5.4	Resultados . . . . .	54
5.4.1	Eigenfrecuencias y eigenfunciones . . . . .	54
5.4.2	Error relativo . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Estudio experimental</b>	<b>61</b>
6.1	Configuración experimental . . . . .	61
6.2	EMAT y transductor piezoeléctrico . . . . .	62
6.3	Espectros de frecuencia experimentales . . . . .	66
6.3.1	Parámetros elásticos . . . . .	66
6.3.2	Análogos: Cruces evitados y EWS . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>70</b>
<b>A</b>	<b>Método de la Matriz de Transferencia en ondas torsionales</b>	<b>72</b>
A.1	Espectro de frecuencia . . . . .	72
A.2	Eigenfunciones . . . . .	74
<b>B</b>	<b>Viga con sección transversal uniforme usando la teoría de Timoshenko-Ehrenfest</b>	<b>75</b>
B.1	Ecuaciones desacopladas . . . . .	75
B.2	Determinante de eigenfrecuencias . . . . .	76
B.3	Coefficientes $A_\mu$ del desplazamiento transversal . . . . .	77
<b>C</b>	<b>Método de la Matriz de Transferencia en ondas flexionales</b>	<b>78</b>
C.1	Condiciones de continuidad . . . . .	78
C.1.1	Procedimiento 1 . . . . .	78
C.1.2	Procedimiento 2 . . . . .	79
C.2	Matriz de Transferencia . . . . .	80
C.3	Determinante de eigenfrecuencias . . . . .	81
C.4	Eigenfunciones . . . . .	82
	<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>

# Lista de Figuras

2.1	a) Deformación de una barra circular bajo la aplicación de torcas en los extremos, b) Deformación del elemento diferencial $dz$ para la viga bajo torsión. . . . .	8
2.2	Vigas de sección transversal rectangular y circular con longitud $L$ . aquí $h$ , $w$ y $r$ , etiquetan la altura, el ancho y el radio, respectivamente. . . . .	11
2.3	Eigenfrecuencias y eigenfunciones para dos vigas simples con secciones transversales circular (curva verde) y rectangular (curva negra). En el panel superior izquierdo se muestra la frecuencia en función del número de nodos $j$ , mientras en el panel inferior izquierdo se presentan las frecuencias de forma vertical. En el panel del lado derecho están graficadas las eigenfunciones para los primeros cuatro modos. Las viga tienen una longitud $L = 0.5$ m, $\sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3077.03$ m/s, el radio de la sección transversal circular es $r = 0.006425$ m, y las dimensiones de la sección transversal rectangular son $h = 0.01$ m y $w = 0.0129$ m. . . . .	11
3.1	Sistemas elásticos, maquinados en una sola pieza, para el estudio del análogo de cruces evitados. Los resonadores, barras de los extremos, tienen longitudes $l_1$ y $l_3$ , ambos tienen la misma sección transversal con $h = 0.0252$ m y $w = 0.0125$ m. El cuerpo que une a los resonadores es un cubo perfecto de lado $l_2 = 0.005$ m. Se han estudiado diferentes sistemas, donde la diferencia en longitud $\Delta = (l_3 - l_2)/2$ , toma los valores mostrados en: a) $\Delta = 0$ m, b) $\Delta = 0.028$ m, c) $\Delta = 0.033$ m y d) $\Delta = 0.038$ m. El modulo de corte, el modulo de Young y la densidad de masa medidos en el laboratorio, ver sección 6.3.1, son $G = 27.41$ Gpa, $E = 66.4$ Gpa y $\rho = 2690.647$ kg/m <sup>3</sup> , respectivamente. . . . .	14
3.2	Frecuencia de los modos normales para el sistema de dos resonadores con sección transversal rectangular en función del parámetro de longitud $\Delta$ . La región enmarcada muestra una repulsión, localizada en $\Delta_2 \approx 0.033$ m. Los parámetros empleados son los mismos de la Fig. 3.1	17

- 3.3 Configuración experimental usada para medir las frecuencias de los modos normales de vibración torsionales y las correspondientes amplitudes de onda. En la esquina del extremo derecho de la viga se localiza el excitador piezoeléctrico mientras en el extremo opuesto se localiza el Electromagnetic Acoustic Transducer (EMAT) detector, que se desliza a lo largo de la viga para medir las amplitudes de onda. . . . . 19
- 3.4 a) Ampliación del cruce evitado encerrado por el rectángulo en la Fig. 3.2. Los puntos azules corresponden a la frecuencia medida experimentalmente y la curva verde corresponde al cálculo con el MMT. b) Amplitudes de onda de los seis estados mostrados en a), calculados numéricamente usando MMT (curva negra) y obtenidas experimentalmente (curva magenta). La estructura naranja en los seis paneles inferiores ilustra el sistema de dos resonadores. La barra de escala indica las deformaciones, azul indica una deformación mínima, mientras el color rojo indica una máxima deformación. . . . . 20
- 3.5 Esquema de un sistema localmente periódico 1D. En la parte superior se muestra la celda unitaria conformada por un cilindro, de longitud  $l$ , y dos muescas, de longitud  $\epsilon/2$ , localizadas en los extremos del cilindro. El sistema está constituido por  $N$  celdas, y por tanto, la longitud total es  $L = N(l + \epsilon)$ . Los subíndices  $2j - 1$  y  $2j$  etiquetan a las muescas y barras, respectivamente, con  $j = 1, 2, \dots, N$ . . . . . 22
- 3.6 Frecuencia de los modos normales de vibración en función del número de celdas unitarias, reproducción teórica de los resultados reportados en [55]. Aquí  $\sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3104.7 \text{ m/s}$ , los radios de la muesca y el cilindro son  $r_1 = 0.15 \text{ mm}$  y  $r_2 = 6.35 \text{ mm}$ , respectivamente. . . . . 23
- 3.7 Frecuencia de los modos normales de vibración para una viga localmente periódica compuesta por 12 celdas unitarias. Los parámetros empleados son los mismos de la Fig. 3.6. . . . . 24
- 3.8 Amplitudes de onda para los 12 niveles de la segunda banda presentada en la Fig. 3.7. Las líneas verticales rojas especifican la posición de las muescas a lo largo de la estructura localmente periódica, la letra  $J$  corresponde al número de nodos que exhibe la eigenfunción y el subíndice 1 especifica el número de nodos que exhibe la amplitud de onda local en cada uno de los 12 cuerpos. . . . . 24
- 3.9 Sistemas localmente periódicos con dos impurezas, dispuestas de forma simétrica respecto al centro geométrico de la estructura; cuya sección transversal es circular. En la parte superior derecha se ilustran las dimensiones de los dos cuerpos que componen la estructura para  $\Delta = 0$ . La velocidad de propagación es  $\sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3104.7 \text{ m/s}$ . . . . . 25

3.10	Eigenfrecuencias en función del parámetro de longitud $\Delta$ . El cálculo del panel del lado izquierdo corresponde al sistema I) y el del panel del lado derecho corresponde al sistema II). Los parámetros empleados son los mismos de la Fig. 3.9. . . . . .	26
3.11	Eigenfunciones asociadas a los modos de vibración localizados en la primera banda prohibida y especificados por el parámetro de longitud $\Delta$ en la Fig. 3.10. . . . .	27
3.12	Estructura de la viga con sección transversal circular, utilizada para obtener el análogo de las EWS a partir de la variación selectiva de las longitudes $l_n = l/(1 + n\gamma)$ , $n = 1, \dots, 14$ , con $l = 10.8$ cm, $\gamma = 0.091$ , $\epsilon = 2.51$ mm y $\sqrt{G/\rho} = 3104.7$ m/s. Aquí $G$ , $\rho$ y $\epsilon$ etiquetan el modulo de corte, la densidad del material y la longitud de las muescas, respectivamente. Los radios de la muesca y la barra son ilustrados en la parte superior y sus valores son $r = 2.414$ mm y $R = 6.425$ mm. . .	30
3.13	Reproducción del espectro de frecuencias, calculado en [27], como función del parámetro sin dimensión $\gamma$ para una viga con sección transversal circular conformada por 14 cuerpos. . . . .	32
3.14	Reproducción teórica del espectro de frecuencias, reportado en [27], para las primeras tres escaleras análogas al fenómeno de Wannier-Stark. En el recuadro se muestran dos amplitudes de onda asociadas al primer y quinto nivel de la segunda banda. La primera banda de frecuencias, $j = 0$ , correspondiente a amplitudes de onda no localizadas es omitida en esta gráfica. . . . .	33
3.15	Reproducción teórica de las amplitudes de onda, reportadas en [27]. En los paneles superiores, de izquierda a derecha, se presentan los modos $J = 19, 23$ y en los dos paneles inferiores se muestran los modos $J = 33, 38$ etiquetados con las letras (c) y (d), respectivamente. Las líneas verticales indican la ubicación de las muescas a lo largo de la viga. . . . .	33
4.1	Esquema de una viga flexionada, donde se ilustran los desplazamientos transversal, $\xi$ , y angular, $\Psi$ . Figura adaptada de la Ref. [50]. . . . .	36
4.2	a) Vista lateral de la viga antes y después de flexionarse y b) diagrama de cuerpo libre del elemento $dz$ de la viga bajo flexión. . . . .	37

- 4.3 Reproducción teórica de la relación de dispersión para una viga simple en aluminio de sección transversal rectangular reportada en [51], cuya altura y ancho son  $h = 2.52$  cm,  $w = 5.04$  cm, respectivamente. La línea continua indica que la raíz es real, mientras las líneas discontinuas indican que las raíces son imaginarias. La línea vertical punteada de color rojo corresponde a la frecuencia crítica ( $f_c = 31.845$  kHz). El modulo de Young, el modulo de corte, la densidad del material y el coeficiente de corte de Timoshenko son:  $E = 67.421$  GPa,  $G = 26.919$  GPa,  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup> y  $\kappa = 0.850$ , respectivamente. . . . . 39
- 4.4 Reproducción del determinante de frecuencias, reportado en [51]. Las líneas verticales de color azul corresponden a las raíces de la ecuación trascendente (4.28) y la línea discontinua indica la frecuencia de corte. En el panel inferior se muestra una ampliación, donde se ha reducido la escala vertical. . . . . 43
- 4.5 Reproducción del espectro de frecuencias como función de la longitud de la viga. La línea vertical discontinua indica el espectro de frecuencias para la viga analizada de forma experimental y teórica en [51]. La línea horizontal corresponde a la frecuencia de corte. . . . . 44
- 4.6 Reproducción teórica de las primeras doce eigenfunciones para una viga de sección transversal rectangular, de longitud  $L = 0.5$  m. La primera eigenfunción está ubicada en el extremo izquierdo, mientras la última eigenfunción se ubica en el extremo inferior derecho. Las intersecciones de la línea horizontal con la amplitud de onda indican el número de nodos que exhibe el desplazamiento transversal. . . . . 45
- 5.1 Eigenfrecuencias en función de la longitud para una viga de sección transversal rectangular uniforme como función de la longitud  $l$ . Experimentalmente determinamos la densidad del material  $\rho$ , los módulos  $G$  y  $E$ , cuyos valores son  $\rho = 2690.47$  kg/m<sup>3</sup>,  $G = 27.4096$  Gpa y  $E = 66.4026$  Gpa, ver sección 6.3.1. El ancho y la altura de la viga son  $h = 1.25$  cm,  $w = 2.53$  cm, respectivamente, y el coeficiente de corte de de Timoshenko es  $\kappa = 0.861$ . En el panel inferior se muestra una ampliación del espectro de frecuencias. . . . . 49
- 5.2 Ajuste numérico, curva discontinua negra, del primer modo de vibración flexional, curva de color rojo, para una viga de sección transversal rectangular uniforme. . . . . 50

5.3	a) Viga con estructura usada para obtener el análogo de las EWS con celdas de longitud variable $l_n = \frac{l_0}{(1+n\delta)^{1/\alpha_j}}$ , $n = 1, 2, \dots, N$ , con $l_0 = 0.13$ m, $\delta = 0.61$ y $\alpha_1 = 1.523$ . El sistema tiene una longitud total de 1.5529 m correspondiente a $N = 13$ . Los demás parámetros son idénticos a los descritos en la Fig. 5.1. b) Esquema de la configuración experimental. El detector es un EMAT, mientras el excitador es un transductor piezoeléctrico. . . . .	51
5.4	Frecuencias de los modos normales para un sistema conformado por $N = 13$ como función del parámetro sin dimensión $\delta$ , calculado con la TVTE. En el panel superior se muestran las cinco bandas que emergen aunque la primera no es distinguible del eje horizontal. Por tal motivo, una ampliación de las dos primeras bandas es mostrada en el panel inferior. . . . .	52
5.5	Sistema muesca-barra. Los anchos de la barra y la muesca son etiquetados con las letras $w$ y $w'$ , respectivamente. . . . .	53
5.6	Frecuencias de los modos normales como función de la longitud de la muesca $\epsilon$ , para el sistema descrito en la Fig. 5.3. Los puntos de color rojo corresponden el espectro de frecuencias calculado con el MVI. . .	53
5.7	Frecuencias de los modos normales para la estructura de Wannier-Stark. Para cada valor de $j$ y comenzando de izquierda a derecha, las columnas corresponden a las predicciones numéricas usando MVI, TVTE y MEF, respectivamente, la última columna (color rojo) corresponde a las mediciones experimentales. En los tres recuadros, localizados en medio, se comparan las amplitudes de onda teóricas utilizando TVTE con las mediciones experimentales para tres estados alrededor del centro de la primera EWS. Los segmentos verticales en el eje horizontal especifican la estructura de la viga. . . . .	55
5.8	Amplitudes de onda calculadas con MEF. De abajo hacia arriba, las eigenfunciones corresponden a los modos séptimo, octavo y noveno, respectivamente. El color azul oscuro especifica deformaciones mínimas, mientras el color rojo indica máximas deformaciones. . . . .	57
5.9	Comparación de los tres modelos teóricos con las mediciones experimentales, puntos de color rojo, para las amplitudes de onda correspondientes a los tres modos presentados en la Fig. 5.7. De izquierda a derecha, las columnas corresponden a las predicciones numéricas obtenidas usando MVI, TVTE y MEF, respectivamente. . . . .	57
5.10	Predicción teórica para tres amplitudes de onda correspondientes a la segunda EWS. Los círculos y la línea continua corresponden al MEF y la TVTE, respectivamente. . . . .	58

5.11	Error relativo entre los resultados teóricos y experimentales para cada uno de los modos de vibración correspondientes a la primera EWS. Los colores verde, negro y azul corresponden a los cálculos desarrollados con los modelos MVI, TVTE y MEF, respectivamente. . . . .	59
5.12	Error relativo entre los resultados teóricos y experimentales para las EWS correspondientes al primer estado $j = 1$ . En el panel superior mostramos los errores correspondientes al sistema flexional [73], mientras en el panel inferior se muestran los resultados asociados al sistema torsional [27]. Los colores verde, negro y azul corresponden a los cálculos desarrollados con los modelos MVI y MMT, respectivamente.	60
6.1	Configuración experimental para la medición de oscilaciones flexionales. En la parte superior se muestra una viga con estructura maquinada en una sola pieza. En el extremo izquierdo de la viga se localiza el EMAT, mientras en el extremo derecho se posiciona el piezoeléctrico excitador.	62
6.2	Disposición de las bobinas e imanes, EMATs, en una viga de aluminio para excitar y detectar ondas: compresionales, $C_1$ y $C_2$ , torsionales, $T_1$ y $T_2$ , y flexionales, $F_1$ y $F_2$ . . . . .	63
6.3	Ilustración del Electromagnetic Acoustic Transducer (EMAT) como detector. . . . .	65
6.4	Espectros de frecuencias experimentales, para una viga de sección transversal rectangular uniforme. En el panel superior se muestran las frecuencias de resonancia torsionales, en la ampliación se muestra el primer modo de vibración. En el panel inferior se muestran las frecuencias resonantes compresionales y una ampliación para el segundo modo de vibración. . . . .	66
6.5	Gráfica de la frecuencias resonantes para los modos de vibración torsionales y compresionales, capturadas del espectro de frecuencias experimental. Fig. 6.4. Las líneas continuas indican un ajuste numérico, mientras los círculos y cuadrados corresponden a las mediciones experimentales. . . . .	67
6.6	Espectro de frecuencias experimental, para el sistema análogo al fenómeno de cruces evitados, estudiado en el capítulo 3. La curva de color azul corresponde al estudio experimental y las líneas verticales corresponden al estudio teórico desarrollado con el MMT. . . . .	69
6.7	Espectro de frecuencias flexional, para el sistema análogo a las EWS, estudiado en el capítulo anterior. Las curvas rojas corresponden a las mediciones experimentales y las líneas discontinuas a las predicciones teóricas proporcionadas por la TVTE . . . . .	69

# Lista de Tablas

3.1	Longitud del cilindro para determinado número de celdas. La letra $l$ etiqueta la longitud del cuerpo, la longitud de las muescas siempre es constante $\epsilon = 0.275$ mm. . . . .	22
4.1	Raíces $g_\mu$ de acuerdo al régimen especificado. En la primera columna reposan los regímenes pautados por la frecuencia crítica y en la segunda columna registramos la raíces asociadas a cada uno de los regímenes.	40
4.2	Desplazamiento transversal para los tres regímenes especificados por la frecuencia de corte. . . . .	41
5.1	Error relativo promedio para la primera EWS. En la columna del lado izquierdo se especifican los métodos y en la columna derecha se muestra el error relativo promedio, $\bar{E}_r$ . . . . .	59
5.2	Error relativo promedio para las EWS asociadas al primer estado, $j = 1$ . los subíndices <i>tors</i> y <i>flex</i> , etiquetan los errores relativos promedio torsional y flexional, respectivamente. . . . .	60
6.1	Equipo de laboratorio y su modelo correspondiente. . . . .	62
6.2	Parámetros para una viga con sección transversal uniforme rectangular	68

# Acrónimos

**EMAT** Electromagnetic Acoustic Transducer. x, xii, xv, xvi, 4, 19, 21, 51, 61–65, 68

**EWS** Escaleras de Wannier-Stark. v, x, xiii, xv–xvii, 2, 4–7, 9, 12, 13, 28–32, 40, 41, 43, 44, 46, 48, 50–52, 54–56, 58–60, 68–70

**MEF** Método de Elemento Finito. xv, xvi, 21, 55–59

**MMT** Método de la Matriz de Transferencia. xii, xvi, 6, 13, 14, 20, 21, 23, 25, 31, 46, 52, 60, 68, 69, 72

**MVI** Modelo de Viga Independiente. v, xv, xvi, 5, 6, 10, 16, 17, 19, 25, 26, 29, 31, 44, 50, 51, 53–57, 59, 60, 70, 71

**TVTE** Teoría de Vigas de Timoshenko-Ehrenfest. xv, xvi, 6, 35, 39, 43, 48, 52, 53, 55–60, 68, 69, 78

**WSL** Wannier-Stark Ladders. vi

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Antecedentes

Un electrón inmerso en un potencial periódico bajo la influencia de una fuerza estática externa experimenta oscilaciones temporales y espaciales denominadas oscilaciones de Bloch [1], en honor a Felix Bloch quien en 1929 estudió el movimiento de electrones en estructuras cristalinas, bajo la acción de un campo eléctrico estático externo [2–4]. Dicha teoría fue confirmada experimentalmente 60 años después de su surgimiento en estructuras periódicas semiconductoras. Posteriormente, se observaron oscilaciones de Bloch en súper-redes periódicas semiconductoras, ver por ejemplo [5,6], tal fenómeno también se evidenció en átomos ultra fríos [7–9], condensados de Bose-Einstein unidimensionales [10], física óptica [11–14], guías de onda [15–18] y más recientemente en ondas torsionales a partir de vigas con una estructura bien definida [19].

Un antecedente fundamental que garantiza la observación de las oscilaciones de Bloch son las EWS. Estas escaleras, se caracterizan por un espectro de energías con espaciamiento constante y sus correspondientes autoestados bien localizados [20]. En el dominio del tiempo, es decir, la evolución de un pulso a lo largo del sistema desordenado, las EWS dan lugar a las oscilaciones de Bloch [21–24]. En efecto, las EWS fueron observadas de forma numérica 40 años antes de la demostración experimental de las oscilaciones de Bloch [25] y posteriormente de forma experimental [26]. El comportamiento ondulatorio del fenómeno de las oscilaciones de Bloch, habilita la posibilidad de observar este fenómeno en el régimen de la física clásica, prueba de ello son las publicaciones [27–30]. Donde los autores detectan las frecuencias de resonancia en estructuras unidimensionales, cuyo desorden selectivo permite observar las EWS. Es preciso mencionar que en física clásica los eigenvalores corresponden a las frecuencias, mientras en física cuántica los eigenvalores se identifican con las energías.

En la década de los años 60 Gregory H. Wannier influenciado por su profesor Eugene Wigner se interesó por el estudio de la física del estado sólido [31]. Su principal motivación física involucró la localización de las funciones asociadas con una banda

de energía, en si, el propósito inicial era permitir maniobrar con problemas en los que hubiera localización de las funciones de onda. Sin embargo, como valor agregado esta localización resultó fundamental para el problema de los campos homogéneos; en palabras de Wannier «es relativamente fácil predecir el efecto de un campo sobre una función localizada».

El comportamiento de un electrón inmerso en un cristal es descrito por las eigenfunciones de onda asociadas al Hamiltoniano del sistema periódico, denominadas funciones de Bloch [32], donde por interferencia constructiva y destructiva surge el reconocido espectro de bandas de energía, permitidas y prohibidas [35]. La inclusión del cristal en un campo eléctrico homogéneo modifica la estructura periódica, destrozando el patrón de bandas que ahora es relegado a estados localizados de Wannier quien descubrió que el sistema del electrón inmerso en el cristal bajo la influencia del campo eléctrico homogéneo arroja un espectro de energías uniformemente espaciado y proporcional a la intensidad del campo externo homogéneo, como a continuación lo mostramos.

La ecuación de Schrödinger unidimensional independiente del tiempo, para un electrón de carga  $e$  inmerso en un potencial periódico bajo la influencia de un campo eléctrico externo homogéneo  $\varepsilon$  en unidades atómicas es,

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (1.1)$$

El potencial  $V(x)$  está dado como,

$$V(x) = V_p(x) + e\varepsilon x, \quad (1.2)$$

aquí el subíndice  $p$  etiqueta el potencial periódico debido a los átomos del cristal,  $V_p(x) = V_p(x + np)$ , donde  $n$  es un número entero arbitrario. El segundo término corresponde al potencial eléctrico cuyo caso límite  $\varepsilon = 0$  nos regresa el resultado predicho por los estados de Bloch, estados extendidos con la misma probabilidad para un electrón en cualquier sitio equivalente [33, 34]. Sin embargo, cuando  $\varepsilon \neq 0$ , la periodicidad es destruida y el potencial adquiere la propiedad  $V(x + np) = V(x) + ne\varepsilon p$ . Haciendo el cambio de variable  $x' = x + np$  y sustituyendo en la ecuación (1.1), obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\psi''(x') + V(x' + np)\psi(x') &= E\psi(x') \\ -\frac{1}{2}\psi''(x') + V(x')\psi(x') &= (E - ne\varepsilon p)\psi(x'). \end{aligned} \quad (1.3)$$

En la última ecuación se observa que los eigenvalores,  $E - ne\varepsilon p$ , están desplazados por el valor  $ne\varepsilon p$  respecto a los provistos por la ecuación (1.1). Tal desplazamiento indica que los niveles de energía contiguos exhiben un espaciamiento uniforme cuyas eigenfunciones son bien localizadas. La derivación matemática que hemos presentado,

es descrita con minucioso detalle en los artículos publicados por Wannier, Zak y Rabinovitch a lo largo de las décadas de los años 60 y 70, donde surgieron debates acalorados respecto al rigor de las demostraciones [36–39].

El fenómeno de las *EWS*, de forma original, corresponde al régimen de la física cuántica, y por tanto, es gobernado por la ecuación de onda de Schrödinger; una gran variedad de publicaciones han sido desarrolladas con éxito gracias al acceso a sistemas periódicos. Por ejemplo, en un trabajo relativamente reciente [40], los investigadores obtienen un espectro equiespaciado a partir del modelo de amarre fuerte aplicado a una monocapa de grafeno inmersa en un campo eléctrico intenso. En el régimen de la física clásica los modos de vibración compresionales y torsionales se rigen por la ecuación de onda, en este sentido el análogo de las *EWS* resulta algo familiar. No obstante, los modos de vibración flexionales se rigen por dos ecuaciones diferenciales de segundo orden que acoplan el desplazamiento del eje neutro y el ángulo de desviación de la sección transversal en la flexión de las vigas, el desacople de estas variables nos conduce a la ecuación diferencial de cuarto orden de Timoshenko-Ehrenfest [43–45]. La naturaleza de esta ecuación constituye un desafío para observar un análogo de las *EWS* en la flexión de vigas.

Los modos de vibración flexionales de una viga a pesar de ser un fenómeno físico antiguo, aún contienen varios aspectos poco explorados en lo que se refiere a oscilaciones flexionales de sistemas estructurados. La teoría de Euler-Bernoulli, pionera en el estudio de vibraciones flexionales, predice resultados satisfactorios a frecuencias muy bajas. Por tanto, resulta insuficiente para describir las oscilaciones flexionales cuando la frecuencia de oscilación se incrementa [46], debido a que en la ecuación de movimiento Euler-Bernoulli se omiten dos correcciones: el efecto de la inercia de rotación propuesto por Rayleigh y las deformaciones de la sección transversal de la viga, debida a los esfuerzos de corte planteada por Timoshenko y Ehrenfest [43–45,47].

La teoría de Timoshenko-Ehrenfest explicaba apropiadamente las mediciones experimentales realizadas más precisas hasta mediados del siglo pasado y principios de este, que tanto mediciones experimentales [48] como estudios teóricos y numéricos cuestionaban la validez de la teoría 1D de Timoshenko-Ehrenfest, y es que la teoría 1D planteaba una serie de características inusuales de las oscilaciones elásticas, como la existencia de una frecuencia de corte más allá de la cual las ondas flexionales exhiben una doble periodicidad espacial. Aunque esta teoría deja de ser válida a frecuencias muy por encima de la frecuencia de corte [49]. Se debe reconocer, que esta teoría arroja predicciones sorprendentes antes de la frecuencia de corte y en la vecindad cercana después de la frecuencia de corte [50,51].

Recientemente se han desarrollado una serie de transductores electromagnéticos acústicos *EMATs*, por sus siglas en inglés, con características selectivas y una alta sensibilidad que los convierten en excelentes excitadores y sensores de vibraciones flexionales. Tales dispositivos han permitido medir con una alta precisión tanto frecuencias como amplitudes de onda, con lo cual se logró demostrar por primera vez y casi un siglo después de su surgimiento, la existencia de la frecuencia de corte y

la relación de dispersión de los modos de vibración flexionales que demuestran la doble periodicidad espacial [51]. Esto ha permitido profundizar en el estudio experimental de las vibraciones flexionales y poner a prueba las implicaciones de la teoría de Timoshenko-Ehrenfest. Cabe mencionar, que bajo ciertos ajustes la teoría de Timoshenko-Ehrenfest es válida para vigas con estructuras, cuyas frecuencias son superiores a la frecuencia crítica [52].

El siguiente paso natural es la extensión del formalismo para estudiar vigas con estructura compleja. Al introducir una estructura a una viga pueden aparecer múltiples frecuencias, como ya se ha observado en el terreno experimental. En este sentido, resulta imprescindible estudiar desde la teoría de vigas de Timoshenko-Ehrenfest, cómo afecta la existencia de diferentes bandas de frecuencia delimitadas en la observación de algunos fenómenos como las EWS. Desde el punto de vista experimental, este fenómeno puede ser estudiado en el dominio temporal o de frecuencia, lo que proporcionaría suficientes datos de dispositivos de interés como el planteado en la referencia [53], donde se propone un dispositivo basado en el fenómeno de las oscilaciones de Bloch para transmitir información entre dos regiones diferentes de una línea de transmisión. En este sentido, debido al gran auge y las muchas aplicaciones que se pueden tener en esta área de la acústica, resulta apropiado estudiar las oscilaciones de Bloch en el ámbito de la física acústica. Así la amplia gama de aplicaciones modernas en el estudio de sistemas cuánticos y ópticos, que incluyen telecomunicaciones, detección, láser, interferometría y amplificación resonante. Resultan difíciles de transponer y muestran un desafío fundamental que abre una abundancia de nuevas oportunidades en el manejo del ruido, imágenes médicas, sistemas de comunicación subacuática, detección y actuadores acústicos.

## 1.2 Organización del trabajo

En el capítulo 2, se estudia la ecuación que gobierna las ondas torsionales en vigas con sección transversal uniforme, cuya solución bajo la imposición de modos normales y condiciones de frontera de extremos libres arroja el espectro de frecuencias con sus eigenfunciones asociadas el cual corresponde al MVI. Se analizan vigas con sección transversal circular y rectangular, donde se observa que para las vigas de geometría circular la velocidad de propagación no es afectada por el área de la sección transversal, mientras las dimensiones de la sección transversal rectangular modifican la velocidad de propagación. En el capítulo 3, se estudian vigas con estructura, excitadas con ondas torsionales. El primer sistema elástico estudiado corresponde a dos resonadores unidos por una muesca, este sistema es un análogo de dos niveles cuánticos 1D acoplados, donde se observa que el cruce de niveles no es posible como lo especifica el teorema de Von Neumann-Wigner. Posteriormente, se estudian sistemas localmente periódicos en los cuales se introducen defectos que rompen la periodicidad local del sistema. A partir de un rompimiento selectivo y nada trivial en la periodicidad local de la

viga se observa cómo emerge el análogo de las EWS. Estos sistemas son estudiados desde un enfoque teórico, excepto por el primer sistema que también es estudiado experimentalmente.

En el capítulo 4, se estudian las ondas flexionales en vigas con sección transversal rectangular uniforme. Se inicia con un análisis de la ecuación de Timoshenko-Ehrenfest y su solución bajo la imposición de modos normales y condiciones de frontera de extremos libres. Se estudia la relación de dispersión en la cual la frecuencia de corte divide el comportamiento en tres regímenes, para los cuales la solución a la ecuación de Timoshenko-Ehrenfest adopta formas diferentes, todas contenidas en la solución más general, que está dada como la suma de cuatro términos exponenciales. En el capítulo 5, a partir de la Teoría de Vigas de Timoshenko-Ehrenfest (TVTE) y el Método de la Matriz de Transferencia (MMT) se estudia la viga con estructura que permite observar el análogo del fenómeno de las EWS. Antes de mostrar que en ondas flexionales un espectro equiespaciado con sus eigenfunciones bien localizadas es posible, se presenta el método ideado para el diseño de la estructura de las EWS, donde el MVI es imprescindible y la longitud de las muescas juega un papel decisivo. Este estudio se ha desarrollado tanto teórica como experimentalmente. Finalmente, en el capítulo 6 mostramos el estudio experimental llevado a cabo en los laboratorios de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Sede Ecocampus Valsequillo .

# Capítulo 2

## Ondas torsionales en vigas 1D con sección transversal uniforme

En vibraciones elásticas de vigas existen tres tipos de vibraciones: compresionales, torsionales y flexionales. Los dos primeros tipos de vibraciones se rigen por la ecuación de onda, mientras las vibraciones flexionales son gobernadas por la ecuación de Timoshenko-Ehrenfest. Por un lado, las vibraciones compresionales tienen lugar cuando se propaga una extensión o una compresión a través de la viga. Por otro lado, las vibraciones torsionales se caracterizan por una torsión en la sección transversal de la viga que se propaga a lo largo de esta. Nuestra principal motivación recae en observar las EWS en vibraciones flexionales; como punto de partida estudiamos la obtención del análogo de las EWS en vibraciones torsionales desarrollado por Gutiérrez et al. [27] donde emerge la necesidad de estudiar los modos de vibración torsionales en una viga de sección transversal constante

### 2.1 Ecuación de movimiento

En la Fig. 2.1 mostramos una viga uniforme de sección transversal circular, su eje neutro coincide con el eje  $z$ , sujeta a una torsión uniforme por unidad de longitud. Aplicando la segunda ley de Newton, se obtiene

$$\frac{\partial \aleph(z, t)}{\partial z} = \rho I \frac{\partial^2 \theta(z, t)}{\partial t^2}. \quad (2.1)$$

Donde  $I$  y  $\rho$  corresponden al momento polar de inercia y la densidad del material, respectivamente. La torca  $\aleph$  está dada en función de la derivada espacial del ángulo de giro multiplicado por la constante de rigidez torsional [41],

$$\aleph = C \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z}, \quad (2.2)$$

que depende de las propiedades de la sección transversal de la viga y el modulo de corte,  $G$ , del material. Sustituyendo (2.2) en (2.1), obtenemos la ecuación que gobierna las vibraciones torsionales,

$$\frac{\partial^2 \theta(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \theta(z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad \text{donde} \quad c_T = \sqrt{\frac{C}{\rho I}}. \quad (2.3)$$

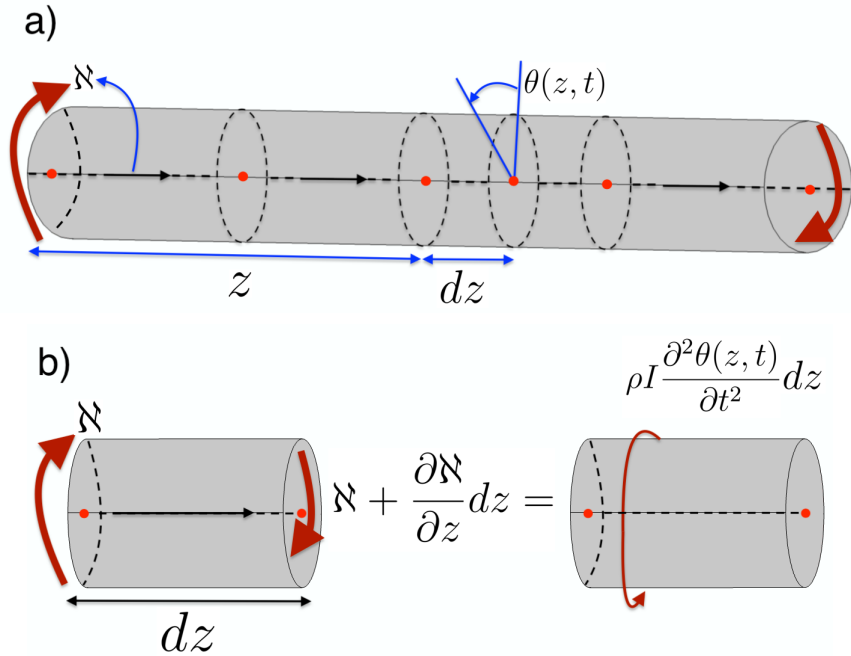


Figura 2.1: a) Deformación de una barra circular bajo la aplicación de torcas en los extremos, b) Deformación del elemento diferencial  $dz$  para la viga bajo torsión.

Aquí el subíndice  $T$  indica que son vibraciones torsionales. La velocidad de propagación en el material, está conectada con la constante de rigidez. En el caso de vigas con sección transversal circular, la constante de rigidez está dada como  $C = IG$ . Por tanto, la velocidad de propagación  $c_T$  resulta independiente del radio de la sección transversal circular, es decir,

$$c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (2.4)$$

Mientras en vigas con sección transversal rectangular la constante de rigidez:  $C = \alpha G$ , ocasiona que la velocidad de propagación,

$$c_T = \sqrt{\frac{\alpha G}{\rho I}}, \quad (2.5)$$

dependa de las dimensiones de la sección transversal. El coeficiente  $\alpha$  es provisto por una solución en serie desarrollada por Navier en 1827 [54],

$$\alpha = \frac{256}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2(2p+1)^2} \frac{(hw)^3}{w^2(2m+1)^2 + h^2(2p+1)^2}, \quad (2.6)$$

donde  $h$  y  $w$ , etiquetan la altura y ancho de la sección transversal, respectivamente. Es importante mencionar, que el valor de  $\alpha$  converge con veinte términos de la serie. El momento polar de inercia para esta geometría está dado como

$$I = \frac{hw^3 + wh^3}{12}. \quad (2.7)$$

### 2.1.1 Solución y condiciones de frontera de extremos libres

Para la solución de la ecuación de movimiento (2.3) aplicamos el método de separación de variables e imponemos condiciones de modos normales, es decir,

$$\theta(z, t) = \phi(z)e^{i\omega t}. \quad (2.8)$$

Sustituyendo la ecuación (2.8) en la ecuación (2.3), obtenemos,

$$\phi''(z) + k^2\phi(z) = 0, \quad \text{donde} \quad k = \frac{\omega}{c_T}; \quad (2.9)$$

cuya solución más general es

$$\phi(z) = Ae^{ikz} + Be^{-ikz} \quad (2.10)$$

Considerando una viga de longitud  $L$  imponemos condiciones de frontera de extremos libres, dado a que estas condiciones son fáciles de obtener en el estudio experimental. La imposición de estas condiciones de frontera en  $z = 0$  y  $z = L$  nos da el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \phi'(z = 0) = 0 &\Rightarrow A = B, \\ \phi'(z = L) = 0 &\Rightarrow Ae^{ikL} - Be^{-ikL} = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

## 2.2 Modelo de viga independiente

Este modelo es de suma importancia para el diseño de los sistemas con estructura que permiten emular el análogo de las EWS [27] y otros tipos de análogos que se pretendan simular en ondas torsionales. Resolviendo el sistema de ecuaciones (2.11) obtenemos el espectro de frecuencias para una viga simple [41],

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow f_j = \frac{c_T}{2L}j, \quad (2.12)$$

o MVI para ondas torsionales, donde  $j$  etiqueta el número de modo. En este modelo se observa que las frecuencias son directamente proporcionales a la velocidad de propagación e inversamente proporcionales a la longitud de la viga. En todos los trabajos desarrollados con vigas solo se hace mención a geometrías de la sección transversal circular y rectangular; por lo cual, es importante comprender cómo se comporta el espectro de frecuencias bajo la influencia de estas dos geometrías de la sección transversal.

En la sección 2.1 se concluyó que la velocidad de propagación  $c_T$  es independiente del área de la sección transversal circular, mientras las dimensiones  $h$  y  $w$  de la sección transversal rectangular modifican la velocidad de propagación. Por tanto, el espectro de frecuencias para secciones transversales rectangulares se modifica tanto por la variación en la longitud de las vigas como por la alteración en las dimensiones de la sección transversal, mientras en las vigas de sección transversal circular la única opción de modificar el espectro de frecuencias recae en la variación de la longitud de las vigas. En este sentido, las vigas con sección transversal rectangular resultan ser más completas para el diseño de estructuras que posibiliten el análogo de fenómenos ondulatorios. No obstante, la independencia de la velocidad de propagación en vigas con sección transversal circular facilitan el análisis matemático y numérico.

## 2.3 Eigenfrecuencias y eigenfunciones para vigas de sección transversal circular y rectangular uniformes

Calculamos el espectro de frecuencia y sus correspondientes eigenfunciones para dos vigas, una con sección transversal circular y la otra con sección transversal rectangular, ambas vigas tienen una longitud  $L = 0.5$  m y las áreas de las secciones transversales son idénticas, ver Fig 2.2. La ecuación (2.12) nos provee del espectro de frecuencias cuya velocidad  $c_T$  para las secciones transversales circular y rectangular, está dadas por las ecs. (2.4) y (2.5), respectivamente. Explícitamente las eigenfrecuencias para estas dos secciones transversales adoptan la forma

$$f_{Cir} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{G}{\rho}} j, \quad f_{Rec} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \sqrt{\frac{\alpha}{I}} j, \quad (2.13)$$

los subíndices *Cir* y *Rec* corresponden a la geometría de las secciones transversales circular y rectangular, respectivamente. Por un lado, la viga con sección transversal circular resuena a frecuencias mayores en comparación con las frecuencias de resonancia de la viga con sección transversal rectangular, debido a que en esta geometría el espectro de frecuencias está multiplicado por un factor adicional  $\sqrt{\alpha/I} < 1$ . Por otro lado, las eigenfunciones bajo la imposición de condiciones de frontera de extremos

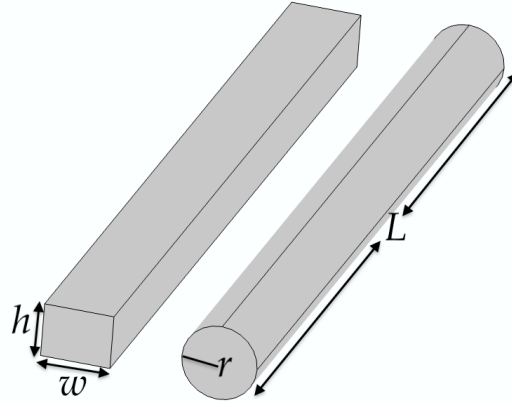


Figura 2.2: Vigas de sección transversal rectangular y circular con longitud  $L$ . aquí  $h$ ,  $w$  y  $r$ , etiquetan la altura, el ancho y el radio, respectivamente.

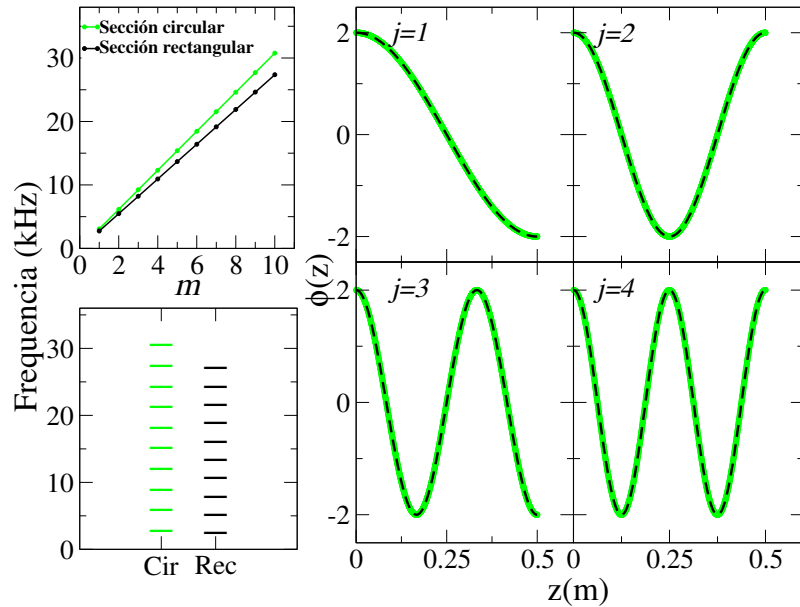


Figura 2.3: Eigenfrecuencias y eigenfunciones para dos vigas simples con secciones transversales circular (curva verde) y rectangular (curva negra). En el panel superior izquierdo se muestra la frecuencia en función del número de nodos  $j$ , mientras en el panel inferior izquierdo se presentan las frecuencias de forma vertical. En el panel del lado derecho están graficadas las eigenfunciones para los primeros cuatro modos. Las viga tienen una longitud  $L = 0.5$  m,  $\sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3077.03$  m/s, el radio de la sección transversal circular es  $r = 0.006425$  m, y las dimensiones de la sección transversal rectangular son  $h = 0.01$  m y  $w = 0.0129$  m.

libres, para ambas geometrías, con la amplitud  $A$  normalizada a 1 están dadas por

$$\phi(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(kz), \quad k = \frac{j\pi}{L}, \quad (2.14)$$

donde se aprecia que las eigenfunciones son independientes de la geometría de la sección transversal, lo cual no es sorprendente, ya que trabajamos con sistemas 1D y por tanto, las eigenfunciones solo deben depender de la longitud  $L$  de las vigas. En la Fig. 2.3 se constata lo mencionado respecto a las eigenfunciones y frecuencias cuyo espaciamiento es equidistante, pero evidentemente no corresponde a una EWS, pues no existe ninguna estructura que emule el rompimiento de la periodicidad ocasionado por la presencia del campo eléctrico uniforme, de este modo las eigenfunciones siempre se extienden a lo largo de la viga con sección transversal uniforme y exhiben las condiciones de frontera impuestas, puesto que la pendiente de la curva es nula en ambos extremos de las vigas. En efecto, en la ecuación (2.14) la función trigonométrica coseno nos anticipa que la amplitud de onda, asociada a cualquier frecuencia de resonancia, será una función extendida.

# Capítulo 3

## Fenómenos ondulatorios 1D en vigas con estructura excitadas con ondas torsionales

Los fenómenos ondulatorios, a diferentes escalas, están presentes tanto en el régimen de la física clásica como en el régimen de la física cuántica. Los análogos bien establecidos en sistemas elásticos de fenómenos cuánticos, cuyo nivel de abstracción es elevado y de difícil acceso en el terreno experimental, amplían la comprensión de los conceptos involucrados al tiempo que tienen distintas interpretaciones en las diferentes áreas de la física. En física acústica las diferentes estructuras 1D maquinadas en una sola pieza de aluminio y excitadas con modos de vibración torsionales han permitido desarrollar diferentes análogos de fenómenos y efectos cuánticos, tales como las [EWS](#), sistemas localmente periódicos y las oscilaciones de Bloch, [19, 27, 29, 55]. Para el estudio de estos sistemas acústicos resulta apropiado utilizar el [MMT](#) que arroja resultados consistentes con lo observado en el experimento, como se puede constatar en [27, 29]. Con el objetivo de entender cómo surge el análogo de las [EWS](#) en vibraciones torsionales, iniciamos estudiando dos sistemas 1D acústicos, uno análogo al cruce evitado de niveles y el otro análogo a las estructuras localmente periódicas, cuyo desorden selectivo nos permite emular el análogo de las [EWS](#) [27].

### 3.1 Cruces evitados de niveles

Los sistemas de dos niveles cuánticos son versátiles, pues a partir de un modelo matemático simple y analítico es posible extraer algunas ideas físicas generales e importantes que se pueden extrapolar a sistemas más complejos [56]. En un sistema cuántico 1D de dos niveles el Hamiltoniano arroja dos eigenvalores, que de ser degenerados ocasionan un cruce de niveles. La degeneración del sistema se destruye al acoplar el sistema, como ocurre en el sistema unidimensional de dos niveles cuánticos

presentado en Cohen et al. [56]. En estricto rigor el fenómeno de cruces evitados se rige por el teorema desarrollado por von Neumann y Wigner, el cual establece que se requiere la variación de tres parámetros para obtener un cruce de niveles. Sin embargo, en un sistema unidimensional solo es posible variar uno o dos parámetros, máximo. Por tanto, no es posible lograr la intersección de los valores propios [57,58]. Cabe aclarar que este teorema fue originalmente enunciado para sistemas cuánticos. No obstante, en esta sección presentamos un análogo, en el régimen de la física clásica, del fenómeno de cruces evitados, excitando con ondas torsionales un sistema unidimensional de dos resonadores que emulan un sistema cuántico 1D de dos niveles, como se muestra en la Fig.3.1. La limitación de solo poder variar un parámetro, la longitud del sistema, nos conduce a obtener un auténtico análogo del fenómeno cuántico de cruces evitados.

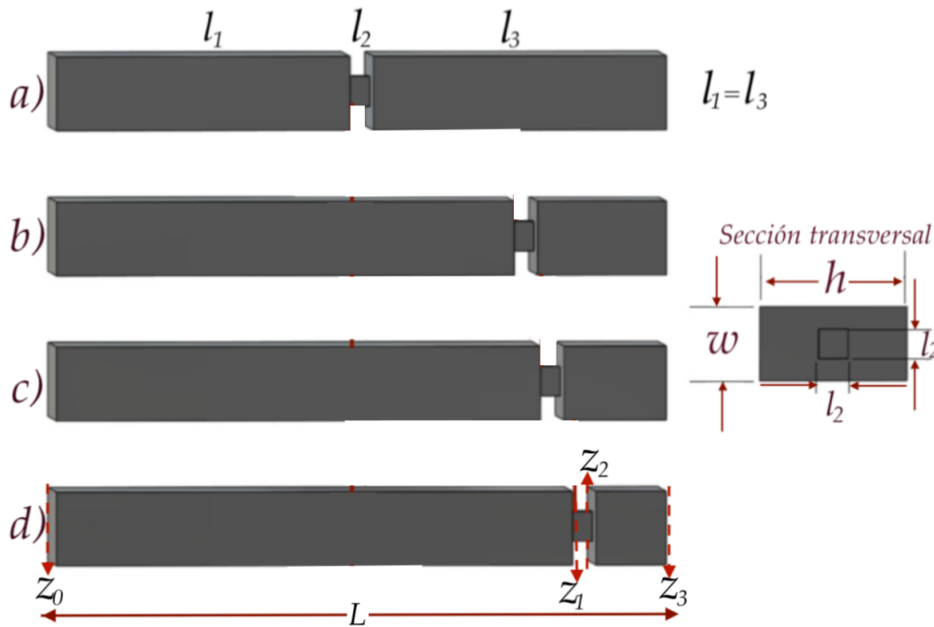


Figura 3.1: Sistemas elásticos, maquinados en una sola pieza, para el estudio del análogo de cruces evitados. Los resonadores, barras de los extremos, tienen longitudes  $l_1$  y  $l_3$ , ambos tienen la misma sección transversal con  $h = 0.0252$  m y  $w = 0.0125$  m. El cuerpo que une a los resonadores es un cubo perfecto de lado  $l_2 = 0.005$  m. Se han estudiado diferentes sistemas, donde la diferencia en longitud  $\Delta = (l_3 - l_2)/2$ , toma los valores mostrados en: a)  $\Delta = 0$  m, b)  $\Delta = 0.028$  m, c)  $\Delta = 0.033$  m y d)  $\Delta = 0.038$  m. El módulo de corte, el módulo de Young y la densidad de masa medidos en el laboratorio, ver sección 6.3.1, son  $G = 27.41$  Gpa,  $E = 66.4$  Gpa y  $\rho = 2690.647$  kg/m<sup>3</sup>, respectivamente.

El sistema de dos resonadores, Fig. 3.1, tiene dos secciones transversales rectangulares de dimensiones diferentes, barra y muesca, de modo que se tienen dos números de onda,  $k_1 = k_3 = k$  y  $k_2$ , respectivamente; cuyas velocidades deben ser calculadas con la ecuación (2.5). Ahora, en virtud de que el sistema está compuesto por tres cuerpos es factible resolverlo de forma analítica empleando el MMT, el cual se detalla

en el apéndice A. Por comodidad y notación, iniciamos reescribiendo la solución de la ecuación de movimiento para vibraciones torsionales, ecuación (2.10), en términos de coordenadas locales,

$$\phi_j(z) = A_j e^{ik(z-z_{j-1})} + B_j e^{-ik(z-z_{j-1})}, \quad (3.1)$$

donde  $z_{j-1} < z < z_j$ ,  $j$  representa la interfaz en la que se establece continuidad,  $j = 1, 2, \dots, N-1$ , y  $N$  etiqueta el número total de cuerpos que conforma la estructura. El sistema contiene dos interfaces,  $j = 1, 2$ , por tanto, para obtener la Matriz de Transferencia se deben multiplicar dos matrices de la forma (A.5), obteniendo

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\Gamma_1 + \Gamma_2)W_- + 2W_+ & (\Gamma_2 - \Gamma_1)W_- \\ (\Gamma_2 - \Gamma_1)W_-^* & (\Gamma_1 + \Gamma_2)W_-^* + 2W_+^* \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

con

$$\Gamma_j = \frac{k_j}{k_{j+1}} \left( \frac{S_j}{S_{j+1}} \right)^2, \quad W_- = ie^{ikl_1} \sin(k_2 l_2), \quad W_+ = e^{ikl_1} \cos(k_2 l_2), \quad l_j = z_{j-1} - z_j.$$

El resultado (3.2) y las condiciones de frontera de extremos libres nos permiten resolver el sistema de ecuaciones proporcionado por la ecuación (A.7), cuya solución está dada por la ecuación (A.11) consignada en el apéndice A y con la cual el determinante de eigenfrecuencias para el sistema de tres cuerpos, después de un poco de manipulación algebraica, adopta la forma,

$$\begin{aligned} & [\cos(k_2 l_2) \cos(kl_1) - \Gamma_1 \sin(k_2 l_2) \sin(kl_1)] \sin(kl_3) \\ & + [\sin(kl_1) \cos(k_2 l_2) + \Gamma_2 \sin(k_2 l_2) \cos(kl_1)] \cos(kl_3) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

En el caso límite de la viga con sección transversal uniforme,  $k_1 = k_2$ , recuperamos el espectro de frecuencias presentado en el capítulo 2, ecuación (2.12). Donde la longitud total,  $L$ , estará dada como la suma de las tres longitudes de los cuerpos que conforman la estructura.

La suma de las longitudes de los dos resonadores mostrados en la Fig. 3.1 se mantiene constante  $l_1 + l_3 = L - l_2 = 0.2$  m. Por tanto, la longitud total de la viga  $L$ , también es constante. Inicialmente, ambos resonadores tienen la misma longitud,  $\Delta = 0$ , posteriormente las longitudes de los resonadores son diferentes y obedecen a la regla:

$$\Delta = \frac{l_1 - l_3}{2}. \quad (3.4)$$

De modo que, el incremento de longitud  $l_1$  corresponde a un decrecimiento de longitud  $l_3$ , y viceversa. En la Fig. 3.2, usando la ecuación (3.3), calculamos el espectro de frecuencias como función del parámetro  $\Delta$ , donde se aprecia que el incremento o decrecimiento del parámetro de longitud  $\Delta$ , ocasiona que algunas frecuencias aumenten mientras otras disminuyen, propiciando que en algunas regiones estas frecuencias

sean muy cercanas, dando lugar al análogo del fenómeno de cruces evitados. Por ejemplo, el rectángulo con líneas discontinuas encierra la zona en la que se observa una repulsión, donde las frecuencias asociadas a los dos resonadores, considerados independientemente, se cruzan, como manifestación del teorema de Von Neumann-Wigner [57].

El MVI,  $f_{m_j}^{(j)} = \frac{c_j}{2l_j} m_j$ , es fundamental para el estudio de vigas con estructura, cuyo acoplamiento es débil. Aquí  $m_j$  etiqueta el número de nodos y  $j$  especifica el número de cuerpo. Recordemos que en este modelo las eigenfrecuencias son inversamente proporcionales a la longitud de la barra. En este sentido, al incremento en longitud del primer resonador,  $j = 1$ , le corresponden las frecuencias que decrecen, mientras las frecuencias crecientes corresponden al segundo resonador,  $j = 3$ . Este decrecimiento y crecimiento en las frecuencias de los dos resonadores, respectivamente, genera una repulsión de niveles. Por ejemplo, si el primer nivel,  $m_3 = 1$ , del segundo resonador,  $f_1^{(3)}$ , y el segundo nivel,  $m_1 = 2$ , del primer resonador,  $f_2^{(1)}$ , son aproximadamente iguales, entonces

$$\frac{c_T}{2l_3} = \frac{c_T}{l_1} \Rightarrow l_1 = 2l_3, \quad (3.5)$$

con lo que se obtiene que

$$l_1 = 0.2 \text{ m} - l_3 \Rightarrow l_3 = \frac{0.2}{3} \text{ m}, \quad (3.6)$$

y por tanto, el correspondiente cruce evitado se observa aproximadamente en  $\Delta = 0.033 \text{ m}$ , como se muestra en la zona encerrada por el rectángulo discontinuo en la Fig. 3.2 para una frecuencia aproximada de 17.5 kHz, donde el valor de  $\Delta = 0.033 \text{ m}$ , es indicado por la línea vertical.

Para explicar el fenómeno análogo de los cruces evitados se usa un razonamiento similar al desarrollado en [56] para el sistema unidimensional de dos niveles cuánticos. Sustituyendo los elementos matriciales  $M_{uv}$ , la ecuación trascendente (3.3) adopta la forma

$$\tan(kl_1) + \tan(kl_3) + \tan(k_2l_2) \left( \frac{1}{\Gamma} - \Gamma \tan(kl_1) \tan(kl_3) \right) = 0, \quad \Gamma = \Gamma_1. \quad (3.7)$$

Por un lado, si los resonadores están débilmente acoplados, entonces  $\Gamma \gg 1$ . En el límite de acoplamiento nulo,  $\Gamma \rightarrow \infty$ , y la ecuación (3.7), se convierte en

$$\tan(kl_1) \tan(kl_3) = 0, \quad (3.8)$$

de modo que recuperamos el espectro de frecuencias para cada resonador:  $\tan(kl_1) = 0$  y  $\tan(kl_3) = 0$ , lo cual coincide con el MVI. Por otro lado, si la longitud de la muesca se hace nula,  $l_2 \rightarrow 0$ , los dos resonadores se convierten en un solo resonador de longitud total  $l_1 + l_3$ , cuyo espectro de frecuencias, después de utilizar identidades trigonométricas bien conocidas, nos da  $(1 - \tan(kl_1) \tan(kl_3)) \tan(kl_1 + kl_3) = 0$ , que

se reduce a  $\tan k(l_1 + l_3) = 0$ , resultado que coincide de nuevo con el proporcionado por el MVI para una viga de longitud  $l_1 + l_3$ .

Aplicando una expansión en serie de Taylor a primer orden para las funciones trigonométricas  $\tan(kl_1)$  y  $\tan(kl_3)$  de la ecuación (3.7) en la vecindad de las eigenfrecuencias asociadas a los dos resonadores,  $f_{m_1}^{(1)}$  y  $f_{m_3}^{(3)}$ , respectivamente; y dado que nuestro interés es analizar el cruce evitado, asumimos que las frecuencias en ese punto de inflexión son muy cercanas para una elección particular de los valores de  $m_1$  y  $m_3$ . Adicionalmente, suponemos que la  $\tan(k_2 l_2)$  permanece casi constante cuando la frecuencia del sistema es cercana a  $f_{m_1}^{(1)}$  o  $f_{m_3}^{(3)}$ , por lo que la frecuencia de la muesca,  $j = 2$ , es evaluada en cualquiera de las dos frecuencias asociadas a los resonadores,  $j = 1, 3$ . Entonces se obtiene

$$\frac{2\pi(l_1 + l_3)}{c_1} f - (m_1 + m_3)\pi + \tan\left(\frac{2\pi f_0 l_2}{c_2}\right) \left[ \frac{1}{\Gamma} - \Gamma \left( \frac{2\pi f l_1}{c_1} - m_1 \pi \right) \left( \frac{2\pi f l_3}{c_1} - m_3 \pi \right) \right] \approx 0. \quad (3.9)$$

Para la evaluación de las funciones trigonométricas correspondientes a los resonadores

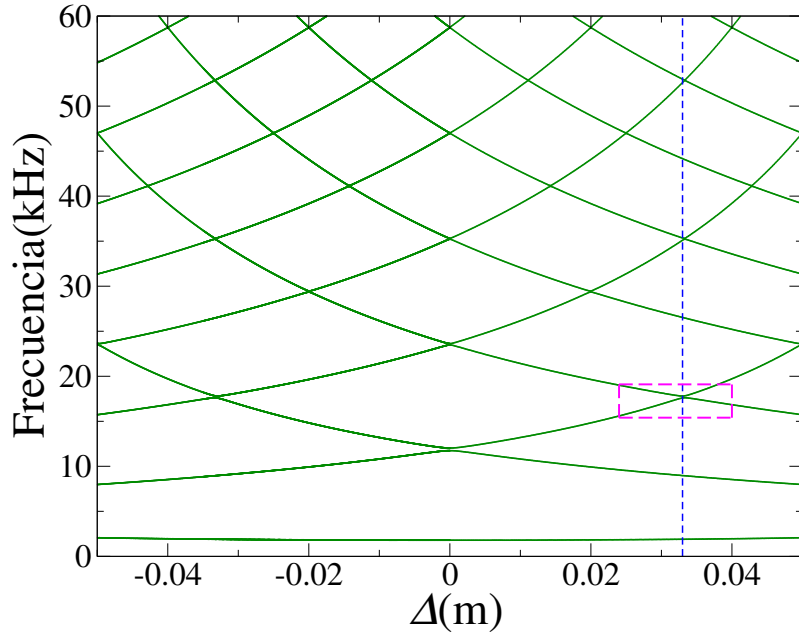


Figura 3.2: Frecuencia de los modos normales para el sistema de dos resonadores con sección transversal rectangular en función del parámetro de longitud  $\Delta$ . La región enmarcada muestra una repulsión, localizada en  $\Delta_2 \approx 0.033$  m. Los parámetros empleados son los mismos de la Fig. 3.1

usamos  $k_{m_1,3}^{(1,3)} l_{1,3} = \pi m_{1,3}$ . Como era de esperarse la ecuación obtenida corresponde a una ecuación cuadrática para la frecuencia  $f$ , cuyas soluciones son

$$f_{\pm} = \frac{1}{2}(f_{m_1}^{(1)} + f_{m_3}^{(3)} + W_1 + W_3) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(f_{m_3}^{(3)} - f_{m_1}^{(1)} + W_3 - W_1)^2 + 4W_{13}^2}, \quad (3.10)$$

donde por comodidad se ha definido

$$W_1 = \frac{c_1}{2\pi\Gamma l_1} \cot\left(\frac{2\pi f_{m_1}^{(1)} l_2}{c_2}\right), \quad (3.11)$$

$$W_3 = \frac{c_1}{2\pi\Gamma l_3} \cot\left(\frac{2\pi f_{m_3}^{(3)} l_2}{c_2}\right), \quad (3.12)$$

$$W_{13}^2 = \frac{c_1^2}{4\pi^2\Gamma^2 l_1 l_3} \csc\left(\frac{2\pi f_{m_1}^{(1)} l_2}{c_2}\right) \csc\left(\frac{2\pi f_{m_3}^{(3)} l_2}{c_2}\right). \quad (3.13)$$

Con el objetivo de comparar las cantidades involucradas en el análogo del fenómeno de cruces evitados con las obtenidas en el sistema cuántico de dos niveles por Cohen et al. [56] se definen los parámetros  $\tilde{f}$  y  $\tilde{\Delta}$ ,

$$\tilde{f} = \frac{1}{2}(f_{m_1}^{(1)} + f_{m_3}^{(3)} + W_1 + W_3) \quad (3.14)$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{2}(f_{m_3}^{(3)} - f_{m_1}^{(1)} + W_3 - W_1) \quad (3.15)$$

los cuales son análogos a las ecuaciones obtenidas para el sistema cuántico,

$$E_m = \frac{1}{2}(E_2 + E_2) \quad (3.16)$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(E_1 - E_2), \quad (3.17)$$

con la salvedad de que en los sistemas elásticos los eigenvalores corresponden a las frecuencias naturales, mientras en mecánica cuántica, dichos eigenvalores son las energías asociadas a los dos niveles. El paso natural con las ecuaciones (3.14) y (3.15) es analizar la gráfica de  $f_{\pm}$  como función de  $\Delta$ . Sin embargo, como se ha podido observar los parámetros mas fáciles de variar son la longitud de los resonadores. Ya se ha definido el parámetro de longitud  $\Delta$ , aquí definimos  $l = (l_1 + l_3)/2$ . Por tanto,  $\tilde{\Delta}$ , puede ser escrita como

$$\tilde{\Delta} = \frac{c_2\beta l\Delta + c_2l(m_3 - m_1)}{2(l^2 - \Delta^2)}, \quad (3.18)$$

con

$$\beta = m_3 + m_1 + \frac{1}{\pi\Gamma} \cot\left(\frac{2\pi f_0 l_2}{v_T}\right). \quad (3.19)$$

En la ecuación (3.18), si se toma un valor relativamente pequeño de  $\Delta$  en comparación con  $l$  el denominador cambia sutilmente, de modo que el parámetro  $\tilde{\Delta}$  se comporta casi de forma lineal. Esto significa que un cambio sutil en  $\Delta$  afecta de forma proporcional a  $\tilde{\Delta}$ . En este sentido, la gráfica presentada en el recuadro superior de

la Fig. 3.4 exhibe un comportamiento similar al del sistema cuántico [56–58]. Cabe resaltar que para resonadores idénticos,  $l_1 = l_3$ , el cruce evitado resulta simétrico respecto a  $\Delta = 0$ , ver Fig. 3.2. En síntesis, la expresión para las eigenfrecuencias en sistemas elásticos, alrededor del cruce evitado, resulta idéntica a la obtenida para las eigenenergías en un sistema de dos niveles cuántico 1D [56–58]. En ambos regímenes se define el parámetro  $\hat{\Delta}$  para el cual la degeneración en los eigenvalores arroja un cruce o un acoplamiento nulo  $W_{uv} = 0$ .

Antes de presentar el estudio experimental es importante entender la localización de las amplitudes de onda en el sistema de dos resonadores. De acuerdo con el MVI, deberíamos esperar que para las frecuencias más bajas, la amplitud de onda  $\lambda$  sea aproximadamente del orden de longitud total del sistema de los dos resonadores, de modo que, la amplitud de onda no se localiza en ningún resonador sino que se extiende a lo largo de la estructura. Conforme la frecuencia incrementa, la longitud de onda disminuye y pasa a ser del orden de la longitud del resonador más largo,  $l_1$ . Este resonador debería excitarse en un estado equivalente a su modo normal más bajo  $m_1$ , exhibiendo un solo nodo a lo largo de la barra, mientras los dos cuerpo restantes estarían fuera de resonancia, por lo que la amplitud de onda debería disminuir en esta región. Por lo tanto, el estado debería localizarse alrededor del resonador más largo. Manteniendo la elección del parámetro  $\Delta$  y ascendiendo en frecuencia, el segundo resonador con longitud  $l_3$ , ahora será excitado y los cuerpos restantes estarán fuera de resonancia con una amplitud de onda muy tenue. En este sentido la amplitud de onda ahora estará localizada en el segundo resonador con su modo normal más bajo  $m_3 = 1$  y un solo nodo a lo largo de su barra. En nuestro análisis experimental utilizamos la

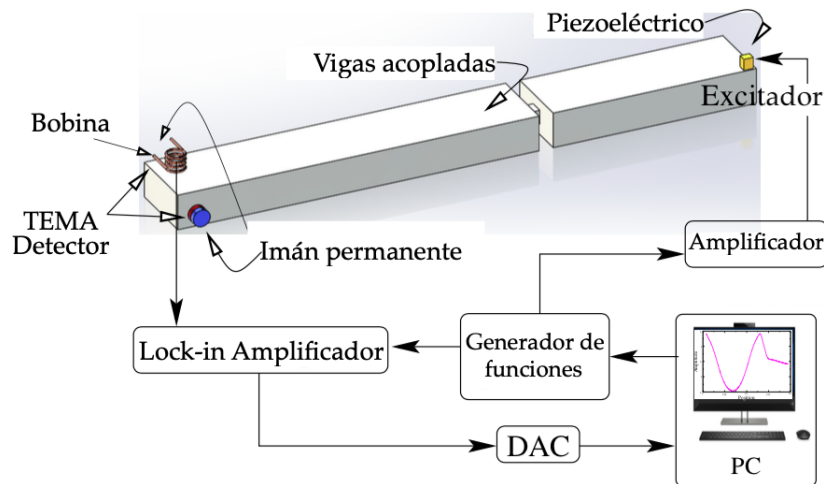


Figura 3.3: Configuración experimental usada para medir las frecuencias de los modos normales de vibración torsionales y las correspondientes amplitudes de onda. En la esquina del extremo derecho de la viga se localiza el excitador piezoeléctrico mientras en el extremo opuesto se localiza el Electromagnetic Acoustic Transducer (EMAT) detector, que se desliza a lo largo de la viga para medir las amplitudes de onda.

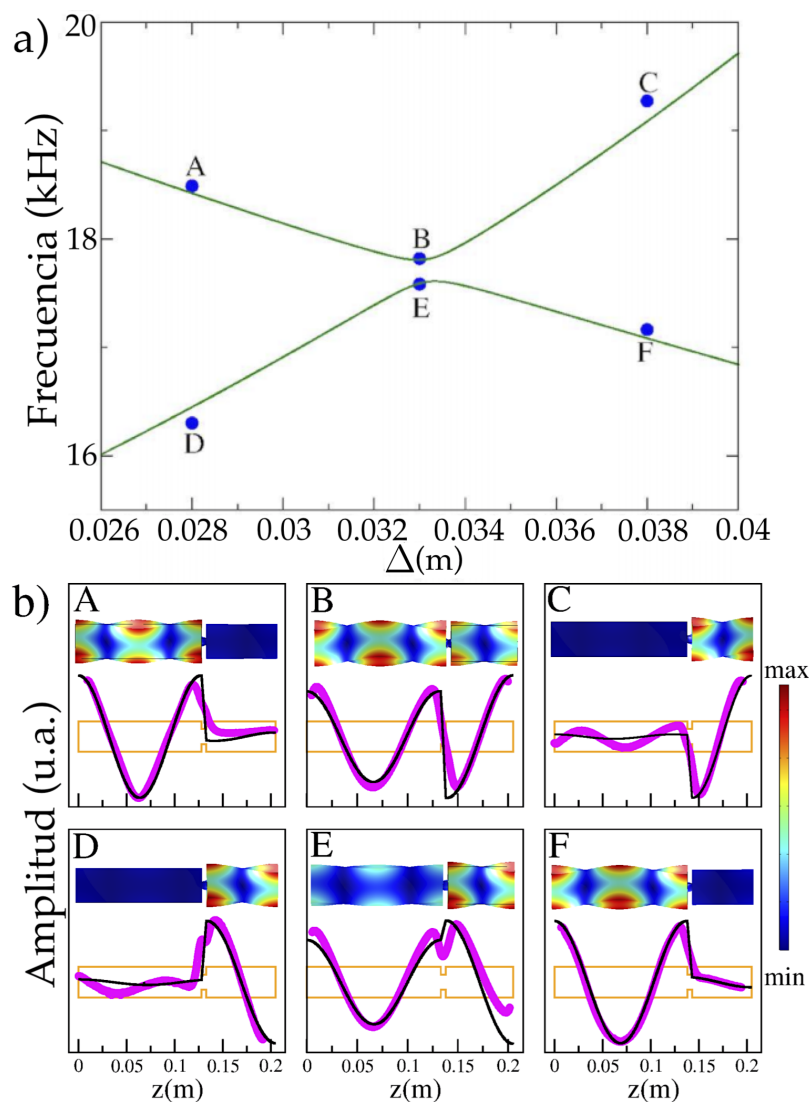


Figura 3.4: a) Ampliación del cruce evitado encerrado por el rectángulo en la Fig. 3.2. Los puntos azules corresponden a la frecuencia medida experimentalmente y la curva verde corresponde al cálculo con el MMT. b) Amplitudes de onda de los seis estados mostrados en a), calculados numéricamente usando MMT (curva negra) y obtenidas experimentalmente (curva magenta). La estructura naranja en los seis paneles inferiores ilustra el sistema de dos resonadores. La barra de escala indica las deformaciones, azul indica una deformación mínima, mientras el color rojo indica una máxima deformación.

configuración mostrada en la Fig. 3.3, con la cual medimos las oscilaciones torsionales de manera efectiva. En la parte superior de esta figura se muestra la viga de aluminio soportada por dos hilos de nailon. Para excitar las oscilaciones torsionales utilizamos un transductor piezoeléctrico ubicado en una esquina del extremo derecho de la viga, la excitación torsional se produce enviando una señal sinusoidal con un generador de

señales controlado desde la computadora. La señal que se propaga a través de la vigas es amplificada y detectada por un EMAT. El funcionamiento de estos dispositivos se explica en la referencia [50] y se detalla en el capítulo 6. En nuestro caso agregamos dos imanes permanentes al EMAT con su eje perpendicular al eje de la bobina cuyo propósito es mitigar las oscilaciones compresionales y flexionales, y por tanto, tener la certidumbre de solo medir vibraciones torsionales. Finalmente, la señal detectada por el EMAT es enviada a un amplificador Lock-in el cual filtra el ruido de la señal, después esta señal es enviada a un DAC que convierte la señal analógica en una señal digital que es procesada por la computadora.

Para demostrar el efecto de los cruces evitados, maquinamos tres sistemas, mostrados en la Fig. 3.1. Dos sistemas corresponden a  $\Delta = 0.028$  m y  $\Delta = 0.038$  m, es decir, antes y después del cruce, mientras que el tercer sistema corresponde al valor de  $\Delta = 0.033$  m, donde se produce el cruce evitado. Aplicando el procedimiento descrito medimos de forma experimental las seis frecuencias (puntos de color azul) y sus amplitudes de onda asociadas, como se muestra en la Fig. 3.4. Dichos resultados experimentales son comparados con el MMT y el Método de Elemento Finito (MEF). Las eigenfunciones antes y después de la repulsión se caracterizan por sufrir un cruce. En efecto, en la Fig. 3.4, se observa que la eigenfunción correspondiente al punto A se localiza en el primer cuerpo de la estructura, como se aprecia en el recuadro A del panel b), adicionalmente esta eigenfunción se cruza al punto F, sexto recuadro del panel inferior, donde la eigenfunción resulta ser la misma con la excepción que la longitud de los cuerpos 1 y 3 ha aumentado y decrecido un valor de longitud  $\Delta$ , respectivamente. Esta misma situación es observada en las eigenfunciones correspondientes a los puntos D y C, donde ambas eigenfunciones se localizan en el tercer cuerpo. En contraste las eigenfunciones de los puntos más cercanos a la repulsión, puntos B y E, están deslocalizadas y corresponden a una combinación lineal de las eigenfunciones correspondientes a los puntos A y C, y B y E, respectivamente. Finalmente, podemos concluir que los resultados experimentales exhiben un alto grado de coincidencia con los obtenidos por el MMT, lo cual nos da confianza para avanzar en el estudio de vigas con estructura.

## 3.2 Sistemas localmente periódicos

La física del estado sólido en un alto porcentaje se concentra en el estudio de cristales cuya principal característica recae en las estructuras infinitamente periódicas que exhiben a determinadas escalas. Por un lado, El teorema de *Bloch* [59] resulta fundamental en el análisis de sistemas periódicos, tal teorema establece que las eigenfunciones de la ecuación de onda para un potencial periódico están dadas por el producto de una onda plana  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  multiplicada por la función periódica  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ , la cual contiene la misma periodicidad de la red cristalina. Este teorema facilita el análisis del movimiento de los electrones, pues en virtud de la periodicidad, es suficiente es-

tudiar el movimiento de un solo electrón [59]. Por otro lado, el modelo de *Kronig y Penney* [60] 1D funciona para entender algunas características del comportamiento de los electrones inmersos en un potencial periódico cuyo espectro de energías corresponde a la reconocida denominación de bandas de energía permitidas y prohibidas.

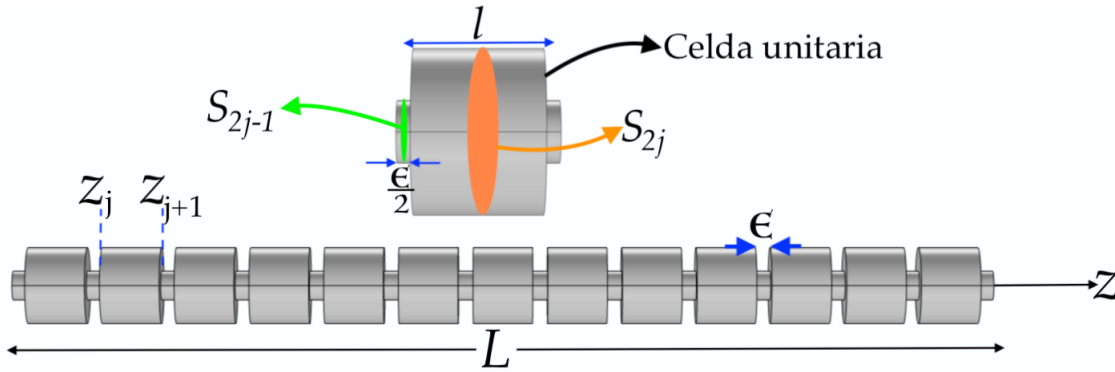


Figura 3.5: Esquema de un sistema localmente periódico 1D. En la parte superior se muestra la celda unitaria conformada por un cilindro, de longitud  $l$ , y dos muescas, de longitud  $\epsilon/2$ , localizadas en los extremos del cilindro. El sistema está constituido por  $N$  celdas, y por tanto, la longitud total es  $L = N(l + \epsilon)$ . Los subíndices  $2j - 1$  y  $2j$  etiquetan a las muescas y barras, respectivamente, con  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Celdas	$l$ (m)
1	1.000225
2	0.4997
4	0.249575
6	0.1662
8	0.1245125
10	0.0995
12	0.082825

Tabla 3.1: Longitud del cilindro para determinado número de celdas. La letra  $l$  etiqueta la longitud del cuerpo, la longitud de las muescas siempre es constante  $\epsilon = 0.275$  mm.

Las bandas de energía, ya mencionadas, también son observadas como un análogo en ondas flexionales [51] y en ondas torsionales como se aprecia en la publicación [55], de la cual reproducimos algunos resultados numéricos. En la Fig. 3.5 se ilustra un sistema localmente periódico conformado por  $N$  celdas unitarias, compuestas de un cilindro y una muesca en cada extremo. Con el propósito de observar la aparición de las bandas permitidas y prohibidas, se calcula el espectro de frecuencias para el número de celdas registrado en la Tabla 3.1; precisando en que la longitud de la celda unitaria disminuye conforme aumenta el número de celdas en la viga, cuya longitud

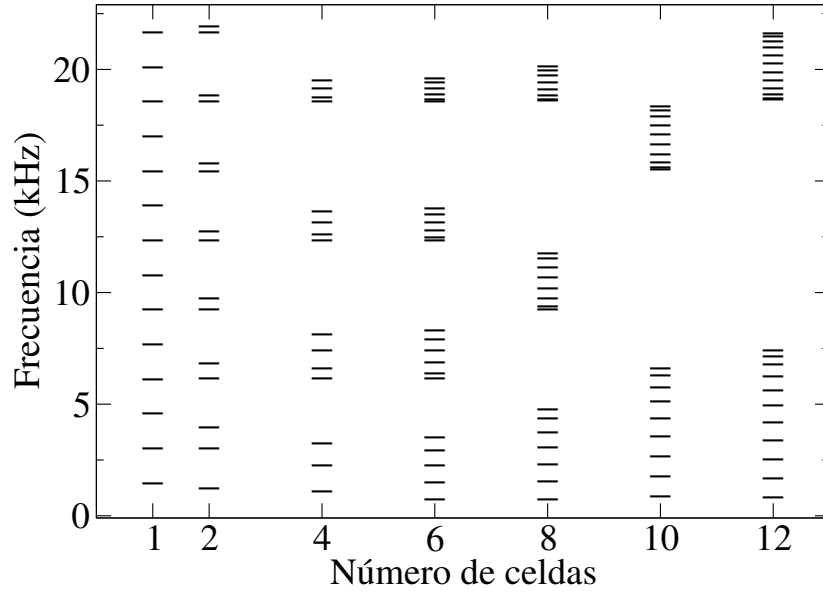


Figura 3.6: Frecuencia de los modos normales de vibración en función del número de celdas unitarias, reproducción teórica de los resultados reportados en [55]. Aquí  $\sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3104.7 \text{ m/s}$ , los radios de la muesca y el cilindro son  $r_1 = 0.15 \text{ mm}$  y  $r_2 = 6.35 \text{ mm}$ , respectivamente.

total  $L$  se mantiene constante. En la Fig. 3.6 se observa la aparición de bandas conforme el número de celdas aumenta. Donde siempre la primera banda permitida contiene  $N - 1$  frecuencias, mientras a partir de la segunda banda el número de frecuencias se corresponde con el número total de celdas unitarias que conforman la estructura. El crecimiento del número de celdas unitarias ocasiona que el ancho de las bandas prohibidas aumente, en contraste con la compresión que experimentan las bandas permitidas.

El patrón de bandas permitidas y prohibidas se observa con mayor claridad en la Fig. 3.7, donde se han graficado las eigenfrecuencias como función del número de modo para un sistema compuesto por  $N = 12$ . En efecto, las bandas permitidas contienen a un número finito  $N$  de niveles, muy cercanos con frecuencias que experimentan una cusidegeneración conforme la frecuencia aumenta. Esta situación también es observada en un cristal real [61] cuyas bandas permitidas están compuestas por una sucesión infinita de niveles discretos, muy cercanos entre si, donde las bandas prohibidas se producen cuando la condición de Bragg  $kl = j\pi$  se satisface. En el sistema localmente periódico  $l$  corresponde a la longitud de la celda unitaria y  $j$  es un entero que etiqueta el número de nodos que exhibe la eigenfunción [55].

Aplicando el MMT descrito en el apéndice A, calculamos las eigenfunciones,

$$\Phi_j^J(z) = \sum_{j=1}^N \phi_j(z), \quad (3.20)$$

correspondientes a la segunda banda permitida,  $\Phi_1^J(z)$ , para el sistema compuesto por

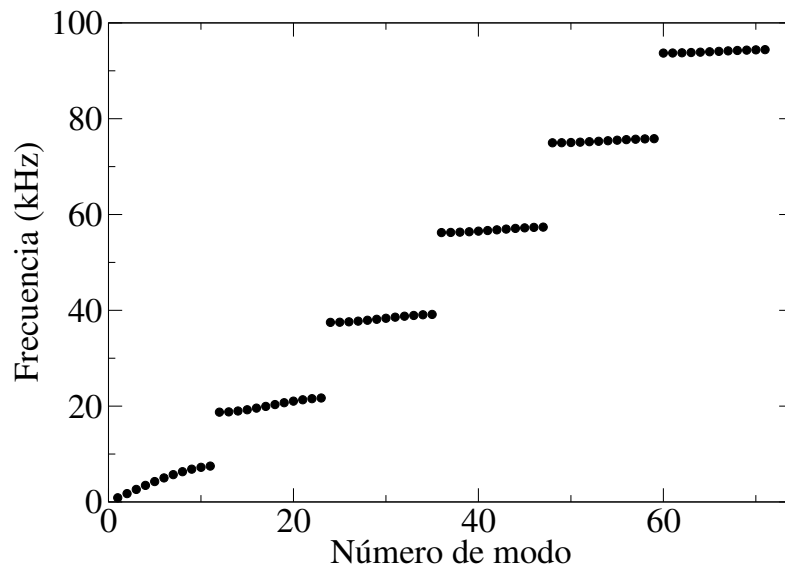


Figura 3.7: Frecuencia de los modos normales de vibración para una viga localmente periódica compuesta por 12 celdas unitarias. Los parámetros empleados son los mismos de la Fig. 3.6.

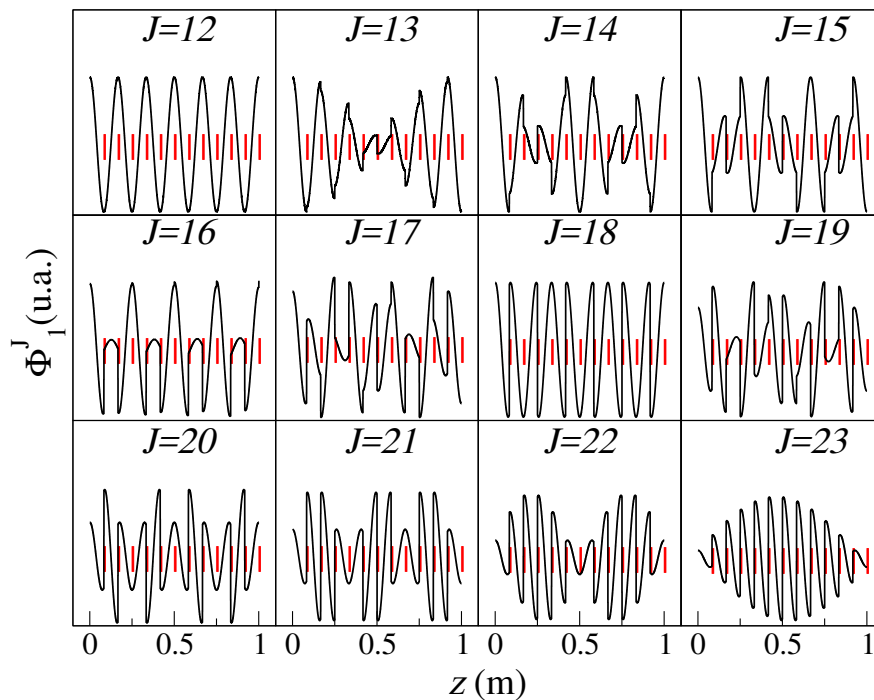


Figura 3.8: Amplitudes de onda para los 12 niveles de la segunda banda presentada en la Fig. 3.7. Las líneas verticales rojas especifican la posición de las muescas a lo largo de la estructura localmente periódica, la letra  $J$  corresponde al número de nodos que exhibe la eigenfunción y el subíndice 1 especifica el número de nodos que exhibe la amplitud de onda local en cada uno de los 12 cuerpos.

12 celdas unitarias. Aquí  $J$  corresponde al número de nodos que exhibe la amplitud de onda en toda la estructura, mientras el subíndice  $j$  proviene del MVI, y por tanto, especifica el número de nodos que exhibe cada uno de los cuerpos que conforma la viga cuya amplitud de onda «local»,  $\phi_1(z)$ , está dada por la ecuación (A.15). La cuasidegeneración en las eigenfrecuencias ocasiona que la amplitud de onda se extienda a lo largo de la estructura localmente periódica; por tanto, las eigenfunciones no se localizan en ninguna región. Este efecto característico de sistemas localmente periódicos se observa en la Fig. 3.8 y se constata que cada una de las eigenfunciones exhiben el número de nodos correspondiente a su modo de vibración  $J$ .

### 3.3 Sistemas localmente periódicos con dos impurezas

A través de simulaciones y cálculos numéricos desarrollados con el MMT estudiamos la influencia en las eigenfrecuencias y sus correspondientes eigenfunciones por la disposición de dos impurezas, localizadas de forma simétrica, ver Fig. 3.9, respecto al centro geométrico de una estructura localmente periódica. En el sistema I) las dos impurezas aumentan la misma longitud  $\Delta$ , por lo que la longitud total de la viga no es constante, mientras en el sistema II) la longitud total de la estructura es constante, pues el aumento de longitud  $\Delta$  de la impureza localizada en el cuerpo 4 es compensado con el decrecimiento de longitud  $\Delta$  en la impureza restante.

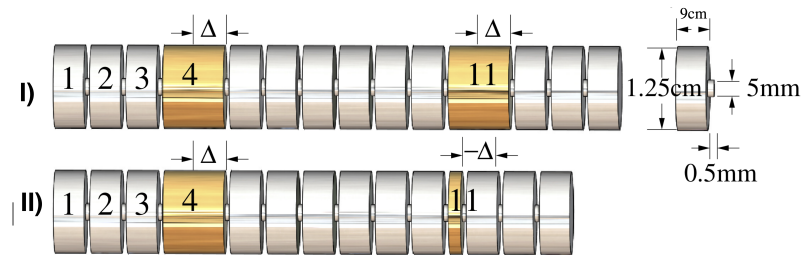


Figura 3.9: Sistemas localmente periódicos con dos impurezas, dispuestas de forma simétrica respecto al centro geométrico de la estructura; cuya sección transversal es circular. En la parte superior derecha se ilustran las dimensiones de los dos cuerpos que componen la estructura para  $\Delta = 0$ . La velocidad de propagación es  $\sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3104.7$  m/s.

Para el estudio de estos dos sistemas iniciamos calculando las eigenfrecuencias en función del parámetro de longitud  $\Delta$ , como se muestra en la Fig. 3.10. En ambos sistemas las frecuencias de resonancia correspondientes a las dos impurezas migran a las bandas prohibidas, efecto análogo al observado en cristales [59, 60]. La disposición de las dos impurezas en ambos sistemas, localmente periódicos, además de romper con la estructura de bandas permitidas y prohibidas, también ocasiona que los niveles de las bandas permitidas experimenten repulsiones materializadas en las ondulaciones

que exhiben los niveles, como se puede apreciar en la segunda banda permitida de ambos sistemas.

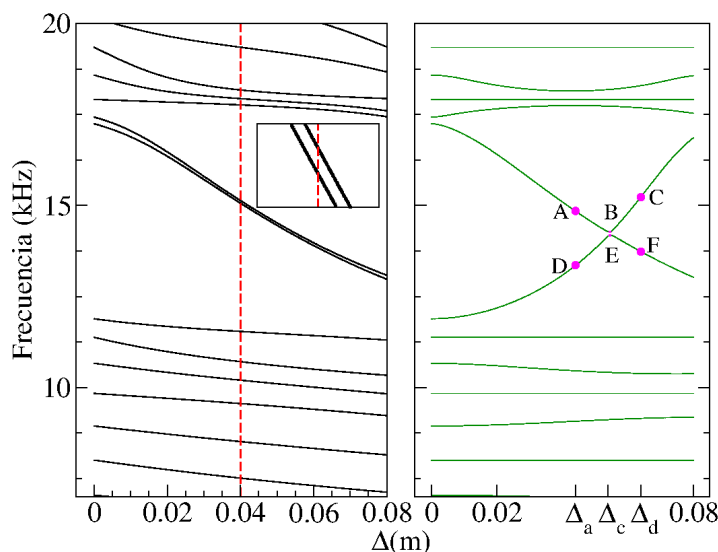


Figura 3.10: Eigenfrecuencias en función del parámetro de longitud  $\Delta$ . El cálculo del panel del lado izquierdo corresponde al sistema I) y el del panel del lado derecho corresponde al sistema II). Los parámetros empleados son los mismos de la Fig. 3.9.

La migración de estas frecuencias de resonancia a la banda prohibida exhibe un comportamiento bien diferenciado en cada uno de los sistemas. En la Fig. 3.10, se observa, para el sistema I) que el crecimiento simultaneo y de igual longitud en las dos impurezas ocasiona que la diferencia en frecuencia de los dos niveles localizados en la banda prohibida sea mínima. En efecto, la intersección de la línea vertical roja con los dos niveles, asociados a las dos impurezas, especifica la región en la que estos dos niveles son muy cercanos, como se puede confirmar en la ampliación de esta región, mostrada en el lado derecho del primer panel. En el sistema II) el crecimiento y decrecimiento simultaneo de la longitud en las dos impurezas propicia que los dos niveles fugados experimenten el fenómeno de cruces evitados, estudiado en la sección 3.1.

Para el sistema I) calculamos las eigenfunciones asociadas a las dos frecuencias ubicadas en la primera banda prohibida con  $\Delta = 0.04$  m. Una vez más apelando al MVI, tenemos que para las frecuencias más bajas, primera banda permitida, la longitud de onda  $\lambda$  no percibe la estructura de la viga, y por tanto, la amplitud de onda se extiende a lo largo de toda la estructura. A medida que la frecuencia incrementa, la longitud de onda llega a ser del orden de la longitud de las dos impurezas, de modo que solo estas dos impurezas entran en resonancia de forma simultanea mientras en las barras restantes la amplitud de onda exhibe deformaciones sutiles, es decir, la amplitud de onda se localiza en los dos defectos, como se observa en la Fig 3.11a. Cabe resaltar, que las frecuencias de resonancia para estos dos cuerpos no son idénticas, pero

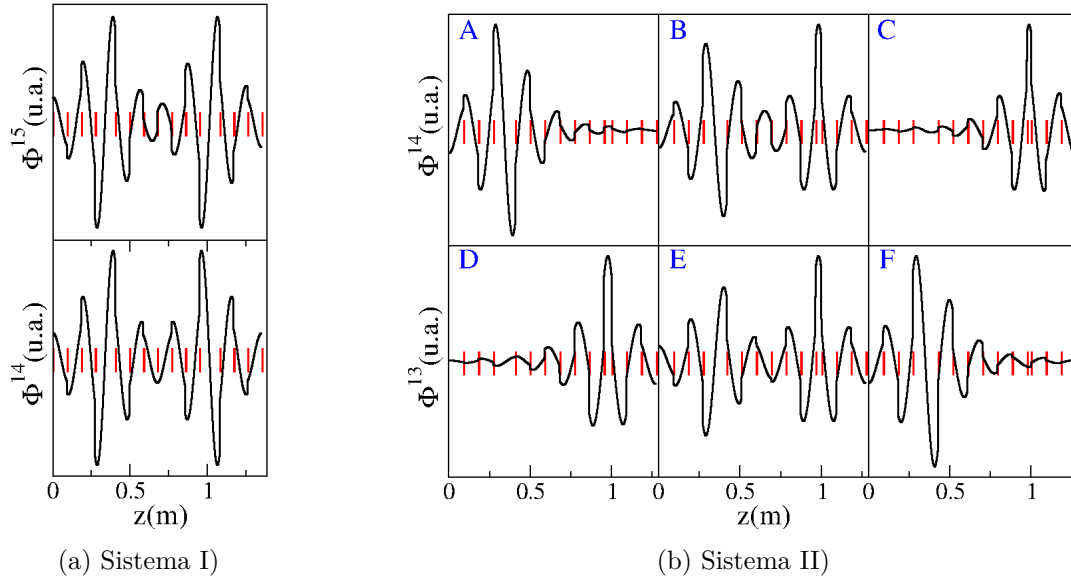


Figura 3.11: Eigenfunciones asociadas a los modos de vibración localizados en la primera banda prohibida y especificados por el parámetro de longitud  $\Delta$  en la Fig. 3.10.

si muy similares, en virtud del acoplamiento cuerpo-muesca, emulando una especie de tunelamiento entre los dos defectos [62] o el fenómeno de amarre fuerte entre electrones en un cristal, si en vez de crecer las impurezas se disminuye su longitud y se mantiene constante la longitud de la celda unitaria [63]. Para el sistema II) calculamos las eigenfunciones asociadas a las frecuencias ubicadas en la primera banda prohibida para los seis puntos etiquetados con las primeras seis letras del alfabeto latino en la Fig. 3.10 y cuyas longitudes del parámetro  $\Delta$ , antes, después y en el cruce son:  $\Delta_a = 0.044$  m,  $\Delta_d = 0.064$  m,  $\Delta_c = 0.054$  m, respectivamente. En la Fig. 3.11b, se observa que el comportamiento que exhiben las eigenfunciones es igual al explicado en la sección 3.1, lo que ratifica que este sistema también es un análogo del fenómeno de cruces evitados con el valor agregado de que nos permite ampliar la comprensión de sistemas periódicos con impurezas.

### 3.4 Análogo de las Escaleras de Wannier-Stark

Después de la segunda guerra mundial el estudio de estados localizados en sólidos fue retomado por los físicos [31]. Slater [64] demostró que el movimiento de un electrón inmerso en un potencial periódico bajo la influencia de una perturbación puede deducirse de la energía en la red periódica como función del momento o número de onda. Dicha teoría resulta útil para discutir el espectro de niveles de energía en cristales con impurezas. Un enfoque diferente surgió con Gregory H. Wannier quien adicionó un campo homogéneo externo al Hamiltoniano que describe a un cristal en ausen-

cia de campos. La adición de dicho campo destruye la periodicidad del cristal, y la solución analítica y exacta, demostrada en primera instancia por Wannier y sometida a revisiones detalladas por Zak y Rabinovitch [20, 31, 36–39], arroja las denominadas EWS cuyas principales características constituyen un espectro de energías con espaciamiento uniforme y sus correspondientes autofunciones localizadas en un orden prescrito por la intensidad de la energía.

Es preciso reiterar que la conjunción entre un espectro equiespaciado y sus autofunciones asociadas bien localizadas definen a las EWS. En efecto, existen espectros equiespaciados carentes de eigenfunciones localizadas, como es el caso de la viga con sección transversal uniforme, excitada con modos de vibración torsionales, estudiada en la sección 2.3 y el oscilador finito en el diseño espectral de guías de onda dobladas [65]. En contraparte, también existen sistemas desordenados tales como el reconocido fenómeno de localización de Anderson [66, 67], en los que las eigenfunciones son bien localizadas pero el espectro de frecuencias no es equiespaciado. En este sentido, el desorden que admita el fenómeno de las EWS resulta selectivo y nada trivial.

En el régimen de la física cuántica las EWS han sido un fenómeno ampliamente investigado, y por tanto, plasmado en un sin número de publicaciones, de las cuales algunas han sido mencionadas en la introducción de este trabajo. La naturaleza ondulatoria del fenómeno de las oscilaciones de Bloch habilita el estudio de las EWS mediante sistemas análogos clásicos gobernados por la ecuación de onda, ejemplos de ello, son el trabajo presentado por G. Monsivais, pionero en el estudio de las EWS en sistemas clásicos, donde estudia el análogo de la formación de las EWS en la propagación de ondas electromagnéticas en un medio dieléctrico que varía en función de la coordenada espacial  $z$  [68] y el estudio desarrollado por Gutiérrez et al. [27] en vigas con estructura excitadas con ondas torsionales, cuyos resultados reproducimos en esta sección.

El principal objetivo para obtener el análogo de las EWS consiste en desordenar un sistema localmente periódico, como el presentado en la sección 3.2, de modo que dicho desorden, no trivial, emule el rompimiento de la periodicidad ocasionado por el campo eléctrico homogéneo externo en una estructura cristalina generándose un espectro de frecuencias equiespaciado con sus correspondientes autofunciones bien localizadas. En ondas torsionales dicho desorden, no trivial, se puede obtener a partir de la variación en la longitud de los cuerpos o la velocidad de propagación, como se muestra a continuación.

Las ondas torsionales se rigen por la ecuación de onda [41],

$$\frac{\partial^2 \theta(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta(z, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.21)$$

Imponiendo condiciones de modos normales,  $\theta(z, t) = \phi(z)e^{i\omega t}$ , en la ecuación anterior, se obtiene

$$\phi''(z) + (k_j^{(n)})^2 \phi(z) = 0, \quad (3.22)$$

cuya relación de dispersión está dada, como se sigue,

$$k_j^{(n)} = \frac{\omega_j^{(n)}}{c_n} = \frac{2\pi}{\lambda_j^{(n)}}. \quad (3.23)$$

Los índices  $j$  y  $n$  etiquetan el número de nodos y la  $n$ -ésima barra,  $n = 1, 2, \dots, N$ , en la viga con estructura, respectivamente. Por otra parte,  $\lambda_n = \frac{2l_n}{j}$  se identifica con la longitud de onda. Sustituyendo este resultado en la ecuación (3.23), obtenemos

$$\omega_j^{(n)} = \frac{\pi c_n}{l_n} j \quad \text{con} \quad \omega_j^{(n)} = 2\pi f_j^{(n)} \quad (3.24)$$

El último resultado, denominado modelo de viga independiente MVI, revela que es posible obtener un conjunto de frecuencias equidistantes por medio de un conjunto selectivo de velocidades  $\{c_n\}$  o longitudes  $\{l_n\}$ . En vigas con sección transversal rectangular cualquiera de los dos conjuntos modifica la frecuencia, mientras en vigas con sección transversal circular la frecuencia solo es sensible a la variación de la longitud. Es importante informar que se denomina MVI debido a que cada uno de los cuerpos que conforman la viga, se considera que, oscila independiente de los demás cuerpos. La versatilidad de este modelo, ecuación (3.24), permite dilucidar el espectro de frecuencias en un sistema de cuerpos separados, entre si, por muescas. Gutiérrez et al. [27] demuestran que en ambas geometrías el análogo de las EWS es posible. En este sentido, varían de forma selectiva la longitud en vigas con geometría cilíndrica, y la velocidad en vigas con geometría rectangular, una explicación más detallada de la geometría rectangular es presentada en [29].

La ecuación (3.24) puede ser escrita como

$$f_j^{(n)} = \frac{c_n}{2l_n} j, \quad (3.25)$$

donde se aprecia que la frecuencia es directamente proporcional a la variación de la velocidad  $c_n$  e inversamente proporcional a la variación de la longitud  $l_n$ . En este sentido, el conjunto selectivo de velocidades o longitudes se puede obtener, respectivamente, por medio de las siguientes propuestas:

$$c_n = (1 + n\gamma_0)c, \quad (3.26)$$

$$l_n = \frac{l}{1 + n\gamma}. \quad (3.27)$$

Aquí  $\gamma$  o  $\gamma_0$  son cantidades análogas a la intensidad del campo eléctrico y han sido diferenciadas, ya que el valor para el que se observa un espectro de frecuencias equidistante resulta diferente en cada una de las propuestas. Las letras  $c$  y  $l$  etiquetan un valor arbitrario para la velocidad o la longitud de la barra.

Ahora, como el objetivo radica en observar un espectro de frecuencias con espaciamiento constante, la cantidad que contiene esta información es la diferencia de frecuencias entre niveles contiguos,

$$\Delta f_j^{(n)} = f_j^{(n+1)} - f_j^{(n)}, \quad (3.28)$$

cuyo resultado al sustituir la ecuación(3.26) o (3.27) es el mismo excepto por las cantidades  $\gamma$  y  $\gamma_0$ , es decir,

$$\Delta f_j^{(n)} = \frac{c\gamma_0}{2l} j \quad \text{y} \quad \Delta f_j^{(n)} = \frac{c\gamma}{2l} j. \quad (3.29)$$

En la primera expresión  $l_n = l$ , dado que las longitudes de todas las barras son

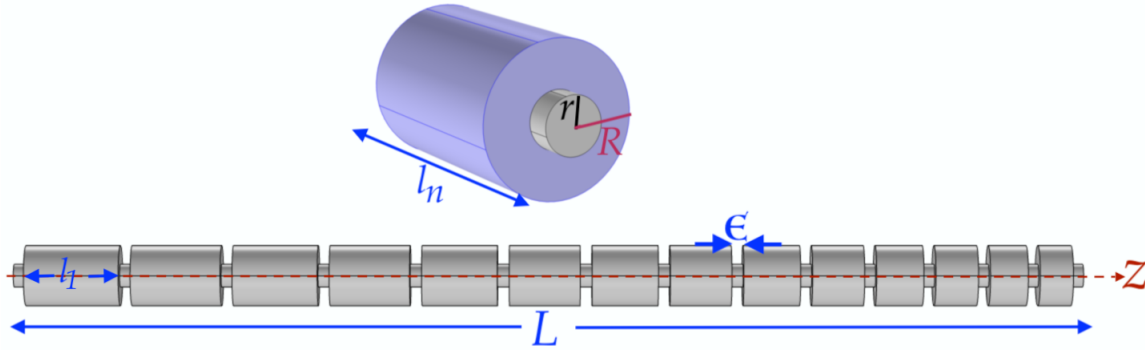


Figura 3.12: Estructura de la viga con sección transversal circular, utilizada para obtener el análogo de las EWS a partir de la variación selectiva de las longitudes  $l_n = l/(1 + n\gamma)$ ,  $n = 1, \dots, 14$ , con  $l = 10.8$  cm,  $\gamma = 0.091$ ,  $\epsilon = 2.51$  mm y  $\sqrt{G/\rho} = 3104.7$  m/s. Aquí  $G$ ,  $\rho$  y  $\epsilon$  etiquetan el modulo de corte, la densidad del material y la longitud de las muescas, respectivamente. Los radios de la muesca y la barra son ilustrados en la parte superior y sus valores son  $r = 2.414$  mm y  $R = 6.425$  mm.

idénticas, mientras en la segunda expresión  $c_n = c$ , ya que la velocidad de propagación es independiente de la variación de la longitud. La estructura de estas dos ecuaciones, anticipa que el espaciamiento entre niveles contiguos es proporcional al numero de nodos,  $j$ , es decir, por ejemplo, la segunda y tercera escalera,  $j = 2$  y  $j = 3$ , exhiben el doble y triple del espaciamiento de la primera escalera, respectivamente, [27, 29].

La ecuación (3.26) está conectada con la variación de la velocidad. Este requisito, como se ha mencionado en líneas previas, se satisface al variar las dimensiones de la sección transversal rectangular, haciendo uso de la expresión de Navier, presentada al final de la sección 2.1, donde la longitud  $l$  es una cantidad constante. Por otra parte, la ecuación (3.27) funciona para ambas secciones transversales, rectangular o circular. No obstante, en la geometría circular el análisis teórico, específicamente las simulaciones numéricas, se simplifican de forma considerable en virtud de que la velocidad de propagación es independiente de las dimensiones de la sección transversal circular, en contraste con la geometría rectangular donde surgen dos velocidades

asociadas a la muesca y la barra. En este sentido, elegimos la segunda propuesta y reproducimos numéricamente algunos de los resultados presentados en Gutiérrez et al. [27] los cuales nos servirán como punto de partida para obtener el análogo de las EWS en ondas flexionales, estudiado en el capítulo 5 .

El parámetro sin dimensión  $\gamma$ , análogo al campo eléctrico en el fenómeno cuántico de las EWS arroja un espectro característico de sistemas localmente periódico cuando  $\gamma = 0$  [55]. Y por tanto, cuando  $\gamma \neq 0$  la periodicidad es destruida, y se observa un espectro completamente diferente. En efecto, para un intervalo selectivo de  $\gamma$  el análogo del fenómeno de las EWS es observado. Antes de calcular el espectro de frecuencias como función del parámetro  $\gamma$  y capturar el rango en el que se observa el análogo de las EWS. Es importante entender desde un enfoque cualitativo el espectro de frecuencias que predice el MVI. Inicialmente, a bajas frecuencias la longitud de onda  $\lambda$  es aproximadamente del mismo orden que la longitud total de la viga  $L \approx \sum_{n=1}^N l_n$ , por lo que, todos los autoestados correspondientes a la primera banda serán extendidos o no localizados. No obstante, bajo el incremento de frecuencias la longitud de onda decrece, y es así, que a partir de la segunda banda de estados  $\lambda$  es aproximadamente del orden de la longitud de cada uno de los 14 cuerpos que conforman la viga. Por ejemplo, para la primera frecuencia natural de la segunda banda, la longitud de onda asociada es aproximadamente del mismo orden de la longitud del primer cuerpo,  $l_1 = l/(1 + \gamma)$ , de modo que, este primer cuerpo entra en resonancia mientras los 13 cuerpos restantes manifiestan mínimas deformaciones. En este sentido, la autofunción asociada, a la eigenfrecuencia en cuestión, se localiza alrededor del primer cuerpo, y no sólo en el primer cuerpo, por el efecto del acoplamiento entre los primeros vecinos. Para la segunda frecuencia de la segunda banda, la longitud de onda asociada coincide con la longitud correspondiente al segundo cuerpo,  $l_2 = l/(1 + 2\gamma)$ , por tanto, la amplitud de onda, ahora es localizada alrededor de este cuerpo, y decrece a medida que abandona las inmediaciones del segundo cuerpo. Este mismo argumento aplica para entender la localización de las autofunciones en los 12 cuerpos restantes en un orden prescrito por el aumento de las frecuencias. Es importante mencionar que aunque las autofunciones se comprimen, por el hecho de que la longitud de los cuerpos disminuye conforme la frecuencia incrementa, la forma de dichas eigenfunciones es semejante.

Para el sistema mostrado en la Fig. 3.12 se ha calculado el espectro de frecuencias y sus autofunciones asociadas aplicando el MMT e imponiendo condiciones de frontera de extremos libres. El formalismo es detallado en el apéndice A. En la Fig. 3.13 se muestra el espectro de frecuencias en función del parámetro sin dimensión  $\gamma$ . Como se mencionó en líneas anteriores, un espectro característico de sistemas localmente periódicos es observado en  $\gamma = 0$ . No obstante, a medida que el parámetro  $\gamma$  se incrementa el mencionado patrón de bandas es destruido y en la vecindad de  $\gamma = 0.091$ , línea vertical azul, un espectro de frecuencias con espaciamiento uniforme en la segunda banda es observado, excepto por los niveles de los extremos,  $n = 1, 14$ , cuyo espaciamiento, debido a los efectos de borde en los extremos de la viga, es mayor respecto a los demás niveles de la segunda banda. El espectro de frecuencias

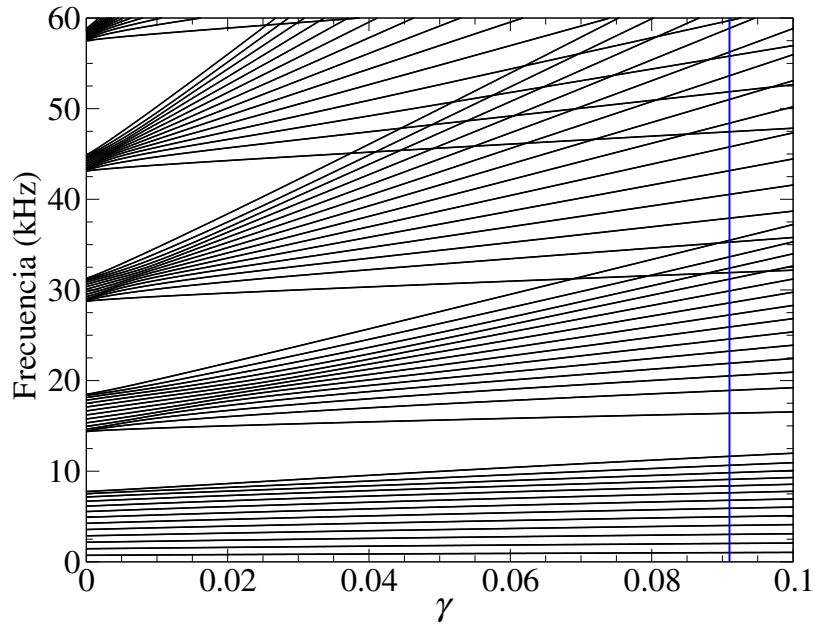


Figura 3.13: Reproducción del espectro de frecuencias, calculado en [27], como función del parámetro sin dimensión  $\gamma$  para una viga con sección transversal circular conformada por 14 cuerpos.

proporcionado en  $\gamma = 0.091$  revela que se ha obtenido un análogo en sistemas elásticos del fenómeno cuántico de las EWS. Con este valor de  $\gamma$  se calcula la longitud de los cuerpos que conforman la viga, la cual es maquinada en una sola pieza. Los autores Gutiérrez et al. [27] demuestran una buena concordancia entre los resultados experimentales y teóricos.

En la Fig. 3.14 reproducimos el cálculo teórico del espectro de frecuencias para las dos primeras escaleras,  $j = 1, 2$ , y los primeros 5 peldaños de la tercera escalera. En el recuadro se muestran las amplitudes de onda asociadas al primer y quinto estado de la segunda escalera, paneles inferior y superior, respectivamente. Por un lado, la amplitud de onda correspondiente al primer estado resulta incompleta en comparación con la amplitud de onda del quinto estado. Esta alteración es atribuida al efecto de borde el cual es inevitable en el régimen de la física clásica, dado que el acceso a estructuras infinitas es imposible, en contraste con el régimen de la física cuántica donde el acceso a dichas estructuras es natural. Por otro lado, el espaciamiento entre las resonancias contiguas de la segunda y tercera escalera,  $j = 2, 3$ , corresponden al doble y el triple del espaciamiento de la primera escalera, respectivamente. Esto significa que el espaciamiento del análogo de las EWS en sistemas elásticos depende de la banda  $j$  de excitación, mientras en física cuántica el espaciamiento entre resonancias contiguas para cualquier escalera es constante.

Por último, reproducimos el cálculo de las amplitudes de onda asociadas a los modos 6 y 10 de la primera escalera, y el sexto y décimo primer estado de la segunda escalera. En la publicación de Gutiérrez et al. [27] se observa una buena concordancia

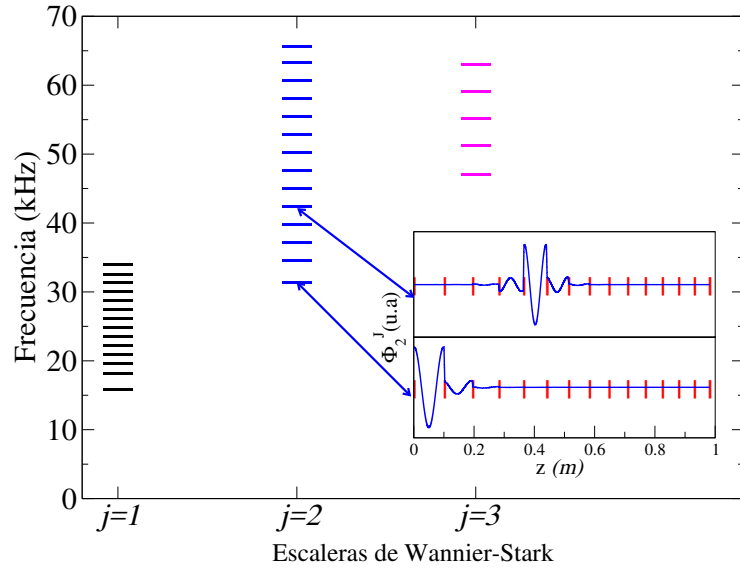


Figura 3.14: Reproducción teórica del espectro de frecuencias, reportado en [27], para las primeras tres escaleras análogas al fenómeno de Wannier-Stark. En el recuadro se muestran dos amplitudes de onda asociadas al primer y quinto nivel de la segunda banda. La primera banda de frecuencias,  $j = 0$ , correspondiente a amplitudes de onda no localizadas es omitida en esta gráfica.

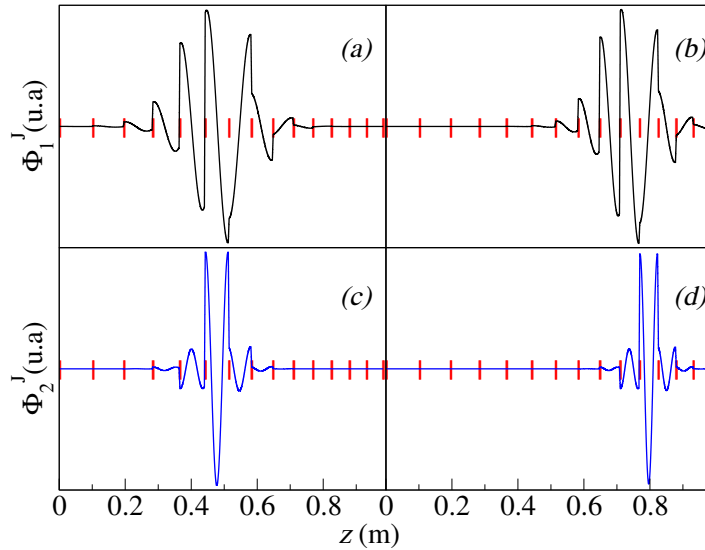


Figura 3.15: Reproducción teórica de las amplitudes de onda, reportadas en [27]. En los paneles superiores, de izquierda a derecha, se presentan los modos  $J = 19, 23$  y en los dos paneles inferiores se muestran los modos  $J = 33, 38$  etiquetados con las letras (c) y (d), respectivamente. Las líneas verticales indican la ubicación de las muescas a lo largo de la viga.

entre los resultados teóricos y experimentales. Es evidente que la localización de las amplitudes de onda es mejor lograda en la segunda escalera, las curvas en color azul de la Fig. 3.15 confirman lo mencionado, ahí se observa que los cuerpos  $n = 6$  y  $n = 11$

son los que resuenan con mayor intensidad bajo la excitación de las frecuencias de resonancia respectivas, mientras en el caso de la primera escalera, las amplitudes de onda no se localizan de forma contundente. En efecto, los primeros vecinos de los cuerpos  $n = 6$  y  $n = 10$  deberían exhibir deformaciones sutiles. Sin embargo, sus deformaciones son considerables y en cierta medida conmensurables con la amplitudes de los cuerpos en resonancia.

# Capítulo 4

## Ondas flexionales en vigas 1D con sección transversal uniforme

El estudio de vibraciones flexionales se remonta al año 1750. En ese entonces Jacob Bernoulli y Leonhard Euler propusieron una ecuación diferencial que funciona satisfactoriamente a frecuencias muy bajas. Por tanto, resulta insuficiente para describir las vibraciones flexionales conforme la frecuencia incrementa. En 1877 Rayleigh refinó la teoría de Bernoulli-Euler introduciendo el movimiento rotatorio de los elementos de la viga, además de los traslacionales. Finalmente, en 1921 Stephen Timoshenko y Paul Ehrenfest desarrollaron una teoría más robusta al considerar el efecto de los esfuerzos de corte [42–44, 69]. En este capítulo estudiamos la Teoría de Vigas de Timoshenko-Ehrenfest (TVTE) para una viga con sección transversal uniforme.

### 4.1 Ecuación de movimiento

Antes de iniciar con la deducción de la ecuación de movimiento, informamos que se ha agregado el apellido del científico Paul Ehrenfest a la teoría de vigas de Timoshenko con base en la referencia [44]. Donde se hace una investigación exhaustiva de los autores de la teoría de vigas en ondas flexionales. En efecto, se menciona que el importante trabajo que trata del efecto de inercia de rotación y de la deformación por cizallamiento no lleva el nombre de Ehrenfest como coautor. Para mayor detalle además del trabajo desarrollado por I. Elishakoff [44] se puede consultar la obra biográfica de Timoshenko escrita por Grigolyuk [45], donde se revela una carta recién descubierta de Timoshenko a Ehrenfest. En este sentido, por razones justas y en pro del reconocimiento a Paul Ehrenfest, denominamos a esta teoría como la teoría de vigas de Timoshenko-Ehrenfest ¡De hecho, así debería denominarse!

En esta sección se deduce la ecuación que describe el movimiento de flexión para una viga con sección transversal uniforme como la que se muestra en la Fig. 4.1, donde se ilustra la flexión que experimenta la viga medida desde el eje neutro. En la

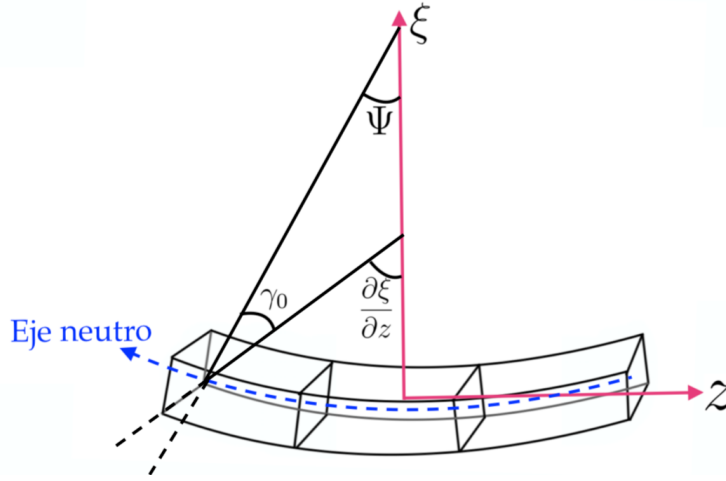


Figura 4.1: Esquema de una viga flexionada, donde se ilustran los desplazamientos transversal,  $\xi$ , y angular,  $\Psi$ . Figura adaptada de la Ref. [50].

teoría de vigas de Timoshenko-Ehrenfest la pendiente respecto al eje neutro de una viga con sección transversal uniforme, como la mostrada en la Fig. 4.1, consta de dos contribuciones, la primera se relaciona con la rotación  $\Psi(z, t)$  que sufre la sección transversal de una viga simple y la segunda corresponde a los efectos de corte medidos por el parámetro  $\gamma_0$ , es decir,

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \Psi + \gamma_0, \quad \xi = \xi(z, t), \quad \Psi = \Psi(z, t). \quad (4.1)$$

Cabe señalar que Timoshenko asume que las secciones transversales planas permanecen planas, aunque ya no son perpendiculares al eje neutro. Es decir, la deformación de la sección transversal es ignorada en esta cinemática [42].

Con el argumento de que la igualdad entre el momento de flexión  $M$  y la curvatura que exhibe la viga flexionada se mantienen, podemos escribir

$$\frac{M}{EI} = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (4.2)$$

En la coordenada angular  $\Psi(z, t)$  es primordial calcular la deformación  $\gamma_0$  ocasionada por la fuerza de corte, la cual no es constante a lo largo de la sección transversal de la viga. Sin embargo, un factor de corrección  $\kappa$  es introducido por Timoshenko, de tal manera que la fuerza de corte  $V$  puede ser escrita como,

$$V = \int_S \tau dS = (G\gamma_0 S)\kappa. \quad (4.3)$$

Donde  $\tau$  corresponde a la tensión de corte y  $\kappa$  es denominado el coeficiente de corte de Timoshenko; su valor depende, principalmente, de la geometría de la sección transversal [42, 70].

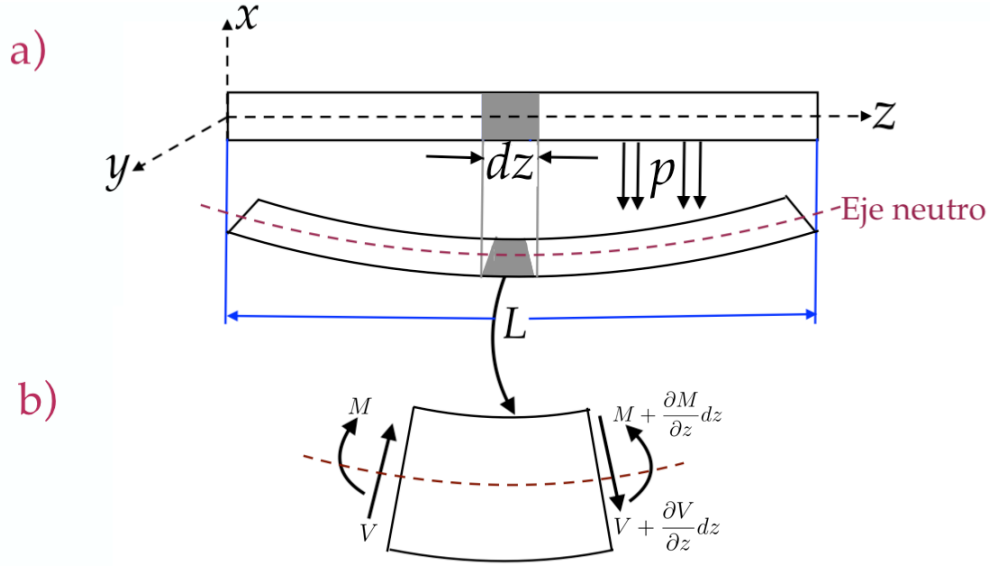


Figura 4.2: a) Vista lateral de la viga antes y después de flexionarse y b) diagrama de cuerpo libre del elemento  $dz$  de la viga bajo flexión.

Despejando a  $\Psi$  de la ecuación (4.1) y sustituyéndola en (4.3), obtenemos

$$V = SG\kappa \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \Psi \right). \quad (4.4)$$

Aplicando la segunda ley de Newton y del diagrama de cuerpo libre del segmento  $dz$  mostrado en la Fig. 4.2, tenemos

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -V + \left( V + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) + pdz = \rho S dz \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \\ \sum M_y &= M - \left( M + \frac{\partial M}{\partial z} dz \right) + \frac{1}{2} V dz + \frac{1}{2} \left( V + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = \rho I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Las últimas dos ecuaciones se reducen, respectivamente, a

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} + p &= \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ V - \frac{\partial M}{\partial z} &= \rho I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.2) y (4.3) en las dos últimas ecuaciones, con  $p = 0$ ,

$$GS\kappa \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.7)$$

$$GS\kappa \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \Psi \right) + EI \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \rho I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (4.8)$$

obtenemos las ecuaciones acopladas en los desplazamientos transversal  $\xi$  y angular  $\Psi$  que rigen la teoría de vigas de Timoshenko-Ehrenfest.

Las últimas dos ecuaciones pueden ser escritas en términos del desplazamiento transversal, calculando las derivadas  $\frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3}$ ,  $\frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^2 \partial z}$  y sustituyéndolas en la primera derivada espacial de la ecuación (4.8), es decir,

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{I}{S} \left( 1 + \frac{E}{G\kappa} \right) \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\rho I}{GS\kappa} \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4} = 0. \quad (4.9)$$

Con un procedimiento análogo, detallado en el apéndice B.1, obtenemos una ecuación diferencial de cuarto orden en términos del desplazamiento angular,

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4} - \frac{I}{S} \left( 1 + \frac{E}{G\kappa} \right) \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{\rho I}{GS\kappa} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial t^4} = 0. \quad (4.10)$$

Estas dos ecuaciones desacopladas se conocen como las ecuaciones de Timoshenko-Ehrenfest. En virtud de que ambas igualdades tienen la misma forma, basta con resolver una de las dos ecuaciones y relacionar los cuatro coeficientes de ambas soluciones.

### 4.1.1 Relación de dispersión

Imponiendo condiciones de modos normales,  $\xi(z, t) = e^{i\omega t} \chi(z)$ , en la ecuación diferencial (4.9), obtenemos

$$\chi''''(z) + \frac{\rho\omega^2}{M_r} \chi''(z) + \frac{\rho^2\omega^2}{\kappa GE} (\omega^2 - \omega_c^2) = 0. \quad (4.11)$$

Donde por comodidad hemos definido

$$\frac{1}{M_r} = \frac{1}{E} + \frac{1}{\kappa G}, \quad \omega = 2\pi f, \quad \omega_c = \sqrt{\frac{\kappa GS}{\rho I}}. \quad (4.12)$$

El subíndice  $c$  etiqueta la frecuencia de corte que en la actualidad genera controversia. Algunos autores niegan la existencia del espectro de frecuencias por encima de la frecuencia de corte [48], mientras otros autores han corroborado su existencia a partir de mediciones experimentales del espectro de frecuencias, por encima de la frecuencia de corte en una viga con sección transversal uniforme que obedece condiciones de frontera de extremos libres [71].

La ecuación característica asociada a la ecuación (4.11),

$$g^4(\omega) + \frac{\rho\omega^2}{M_r} g^2(\omega) + \frac{\rho^2\omega^2}{\kappa GE} (\omega^2 - \omega_c^2) = 0, \quad (4.13)$$

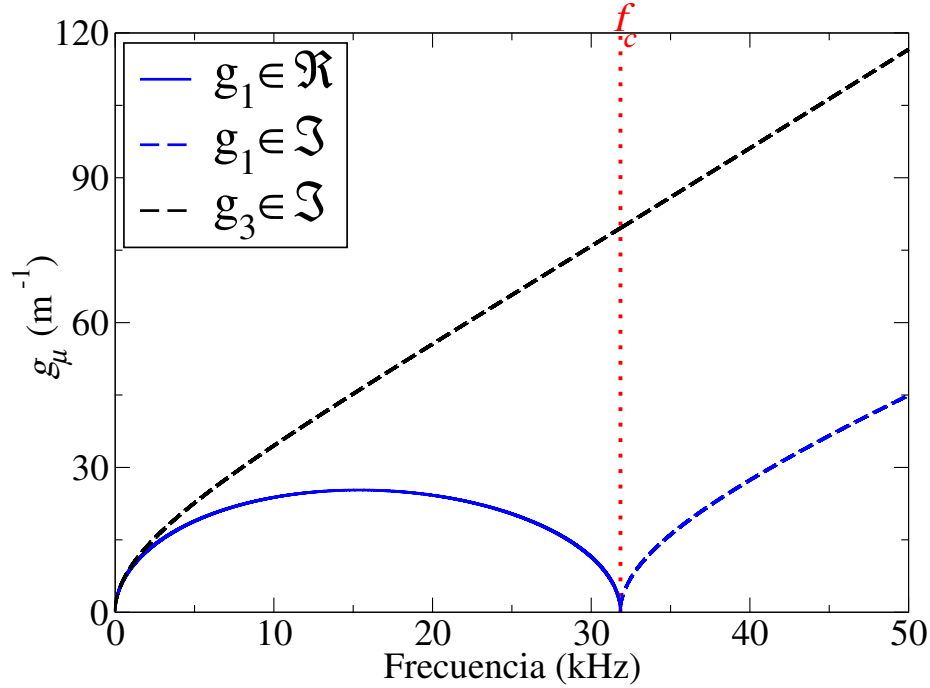


Figura 4.3: Reproducción teórica de la relación de dispersión para una viga simple en aluminio de sección transversal rectangular reportada en [51], cuya altura y ancho son  $h = 2.52$  cm,  $w = 5.04$  cm, respectivamente. La línea continua indica que la raíz es real, mientras que las líneas discontinuas indican que las raíces son imaginarias. La línea vertical punteada de color rojo corresponde a la frecuencia crítica ( $f_c = 31.845$  kHz). El módulo de Young, el módulo de corte, la densidad del material y el coeficiente de corte de Timoshenko son:  $E = 67.421$  GPa,  $G = 26.919$  GPa,  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup> y  $\kappa = 0.850$ , respectivamente.

es la denominada *relación de dispersión* para vibraciones flexionales; cuya solución

$$g_\mu(\omega) = \pm \omega \sqrt{-\frac{\rho}{2M_r} \pm \rho \sqrt{\frac{1}{4M_r^2} - \frac{1}{\kappa GE} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)}}, \quad (4.14)$$

nos proporciona cuatro raíces,  $\mu = 1, 2, 3, 4$ . La frecuencia de corte divide el comportamiento de las raíces en tres regímenes. En la tabla 4.1 se presenta el valor de dichas raíces de acuerdo al régimen especificado. Esta tabla nos permite concluir que en todos los regímenes el conjunto de raíces corresponden al conjunto de números imaginarios, excepto por las raíces  $g_1$  y  $g_2$  en el primer régimen,  $\omega < \omega_c$ .

La relación de dispersión proporcionada por la TVTE arroja resultados consistentes con lo observado experimentalmente. Prueba de ello, es el trabajo reportado por Monsivais et al. [51], donde miden, por primera vez, de forma experimental la relación de dispersión para una viga de sección transversal rectangular uniforme de longitud  $L = 0.5$  m. Demostrando que los resultados teóricos, proporcionados por

la ecuación (4.14) y reproducidos en la Fig. 4.3, ajustan en excelente medida con sus mediciones experimentales. El comportamiento exótico que exhibe la relación de dispersión pone en evidencia el desafío que constituye obtener un análogo de las EWS en vibraciones flexionales, cuya relación de dispersión resulta dispersiva en contraste con las relaciones de dispersión no dispersivas que rigen las ondas torsionales y compresionales.

Régimen	Raíces
$\omega < \omega_c$	$g_2 = -g_1, \quad g_1 = q_1^+$
	$g_4 = -g_3, \quad g_3 = iq_3^+$
$\omega = \omega_c$	$g_2 = g_1 = 0$
	$g_4 = -g_3, \quad g_3 = iq_c, \quad q_c = \omega_c \sqrt{\left  \frac{-\rho}{M_r} \right }$
$\omega > \omega_c$	$g_2 = -g_1, \quad g_1 = iq_1^-$
	$g_4 = -g_3, \quad g_3 = iq_3^-$

Tabla 4.1: Raíces  $g_\mu$  de acuerdo al régimen especificado. En la primera columna reposan los regímenes pautados por la frecuencia crítica y en la segunda columna registramos la raíces asociadas a cada uno de los regímenes.

Con

$$\begin{aligned}
 q_1^\pm(\omega) &= \omega \sqrt{\left| -\frac{\rho}{2M_r} + \rho \sqrt{\frac{1}{4M_r^2} \pm \frac{1}{\kappa GE}} \left| 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right| \right|} \\
 q_3^\pm(\omega) &= \omega \sqrt{\left| -\frac{\rho}{2M_r} - \rho \sqrt{\frac{1}{4M_r^2} \pm \frac{1}{\kappa GE}} \left| 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right| \right|}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

### 4.1.2 Solución y condiciones de frontera de extremos libres

Como se ha mencionado, basta con encontrar la solución a una de las dos ecuaciones desacopladas. En ese sentido, elegimos trabajar con la ecuación diferencial en términos del desplazamiento transversal, la cual bajo la imposición de modos normales, adopta la forma

$$\chi''''(z) + \frac{\rho\omega^2}{M_r} \chi''(z) + \frac{\rho^2\omega^2}{\kappa GE} (\omega^2 - \omega_c^2) = 0, \tag{4.16}$$

cuya solución más general es

$$\chi(z) = \sum_{\mu=1}^4 \mathbb{A}_\mu e^{g_\mu z}. \tag{4.17}$$

Ahora, sustituyendo en la ecuación (4.17) los valores de  $g_\mu$  registrados en la tabla 4.1 y bajo manipulaciones algebraicas sencillas, obtenemos las soluciones correspondientes a cada régimen, como se puede apreciar en la siguiente tabla:

Régimen	Desplazamiento transversal $\chi(z)$
$\omega < \omega_c$	$A_1 \sinh(q_1^+ z) + A_2 \cosh(q_1^+ z) + A_3 \sin(q_3^+ z) + A_4 \cos(q_3^+ z)$
$\omega = \omega_c$	$A_1 + A_2 + A_3 \sin(q_c z) + A_4 \cos(q_c z)$
$\omega > \omega_c$	$A_1 \cos(q_1^- z) + iA_2 \sin(q_1^- z) + A_3 \sin(q_3^- z) + A_4 \cos(q_3^- z)$

Tabla 4.2: Desplazamiento transversal para los tres regímenes especificados por la frecuencia de corte.

Cuyos coeficientes están dados, como se sigue,

$$A_1 = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2, \quad A_2 = \mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2, \quad A_3 = i(\mathbb{A}_3 - \mathbb{A}_4), \quad A_4 = \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4 \quad (4.18)$$

Las tres soluciones, registradas en la tabla 4.2, permiten enfocar de forma contundente el análisis que se pretenda desarrollar, dependiendo del régimen que se pretenda estudiar. En nuestro caso, el primer régimen,  $\omega < \omega_c$ , suple nuestras necesidades para obtener el análogo de EWS, con el valor agregado de que su manipulación tanto analítica como numérica ofrece grandes bondades. Por ejemplo, en las simulaciones desarrolladas, en el lenguaje de programación FORTRAN, el tiempo de cálculo se optimiza de forma considerable, dado que dos de los términos exponenciales asociados a la solución general son relevados por dos términos trigonométricos.

Dado a las facilidades en el experimento, usamos condiciones de frontera de extremos libres. Lo que significa que imponemos que el momento de flexión y la fuerza de corte se anulen en los extremos de la viga, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=0,L} &= 0 \\ \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \Psi \right) \Big|_{z=0,L} &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Imponiendo condiciones de modos normales,  $\xi(z) = \chi(z)e^{i\omega t}$ ,  $\Psi(z) = \psi(z)e^{i\omega t}$ , en el último par de ecuaciones, obtenemos,

$$\psi'(z)|_{z=0,L} = 0 \quad (4.20)$$

$$(\chi'(z) - \psi(z))|_{z=0,L} = 0. \quad (4.21)$$

Aquí, nuestro objetivo consiste en obtener las dos condiciones en términos del desplazamiento transversal. Para tal fin, también imponemos condiciones de modos normales en las dos ecuaciones acopladas de Timoshenko-Ehrenfest, ecuaciones (4.7) y (4.8), obteniendo, respectivamente,

$$\psi'(z) - \chi''(z) - \frac{\rho\omega^2}{\kappa G} \chi(z) = 0 \quad (4.22)$$

$$GS\kappa(\chi'(z) - \psi(z)) + EI\psi''(z) + \rho I\omega^2\psi(z) = 0. \quad (4.23)$$

Evaluando la ecuación (4.22) en los extremos de la viga y sustituyendo la ecuación (4.20), obtenemos la primera condición de frontera

$$\left[ \chi''(z) + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G}\chi(z) \right]_{z=0,L} = 0. \quad (4.24)$$

Para la segunda condición, evaluamos la ecuación (4.23) en los extremos de la viga y sustituimos la ecuación (4.21), obteniendo la segunda condición en términos del desplazamiento angular,

$$\left[ \psi''(z) + \frac{\rho\omega^2}{E}\psi(z) \right]_{z=0,L} = 0. \quad (4.25)$$

Finalmente, derivando la ecuación (4.22), evaluando en los extremos de la viga y sustituyendo las ecuaciones (4.20) y (4.24), obtenemos la segunda condición de frontera, en términos del desplazamiento transversal, es decir

$$\left[ \chi'''(z) + \frac{\rho\omega^2}{M_r}\chi'(z) \right]_{z=0,L} = 0 \quad (4.26)$$

## 4.2 Eigenfrecuencias y Eigenfunciones

En esta sección estudiamos el espectro de frecuencias y sus correspondientes amplitudes de onda, para una viga de sección transversal uniforme rectangular que obedece condiciones de frontera de extremos libres. En efecto, reproducimos los resultados reportados en [51]. Previamente se demostró que en el régimen  $\omega < \omega_c$  la solución a la ecuación diferencial de cuarto orden de Timoshenko-Ehrenfest está dada como,

$$\chi(z) = A_1 \sinh(q_1^+ z) + A_2 \cosh(q_1^+ z) + A_3 \sin(q_3^+ z) + A_4 \cos(q_3^+ z). \quad (4.27)$$

Sustituyendo las derivadas correspondientes de tal solución en las condiciones de frontera de extremos libres, ecuaciones (4.24) y (4.26), y resolviendo el determinante de frecuencias, ver apéndice B.2, obtenemos la ecuación trascendente,

$$2 \left( 1 - \cosh(q_1^+ L) \cos(q_3^+ L) \right) - \left( \frac{\Lambda_1 \Lambda_4}{\Lambda_2 \Lambda_3} - \frac{\Lambda_2 \Lambda_3}{\Lambda_1 \Lambda_4} \right) \sinh(q_1^+ L) \sin(q_3^+ L) = 0, \quad (4.28)$$

con

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= q_1^{+2} + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G}, & \Lambda_2 &= -q_3^{+2} + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G} \\ \Lambda_3 &= q_1^{+3} + \frac{\rho\omega^2}{M_r} q_1^+, & \Lambda_4 &= -q_3^{+3} + \frac{\rho\omega^2}{M_r} q_3^+. \end{aligned} \quad (4.29)$$

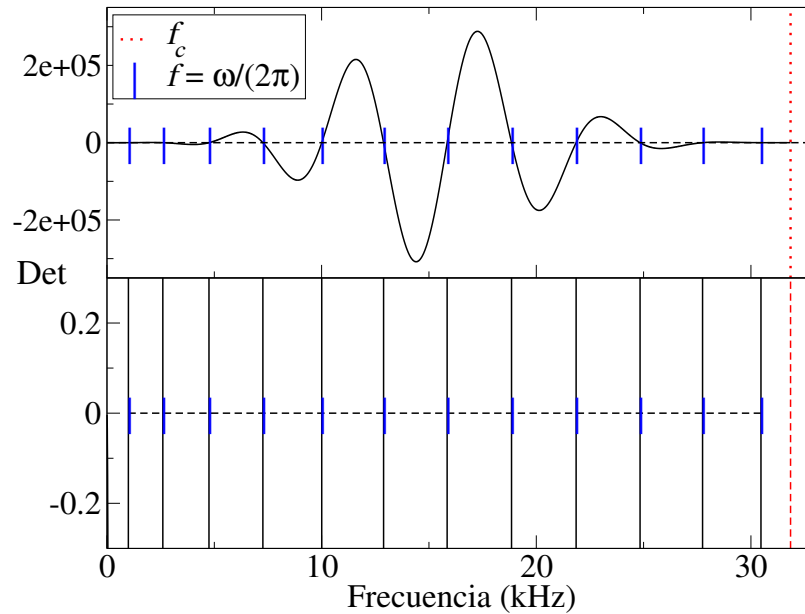


Figura 4.4: Reproducción del determinante de frecuencias, reportado en [51]. Las líneas verticales de color azul corresponden a las raíces de la ecuación trascendente (4.28) y la línea discontinua indica la frecuencia de corte. En el panel inferior se muestra una ampliación, donde se ha reducido la escala vertical.

Las raíces de la ecuación (4.28) corresponden a las eigenfrecuencias para cualquier viga de sección transversal uniforme, de longitud  $L$ , que obedezca las condiciones de frontera de extremos libres. Adicionalmente, las eigenfunciones asociadas son calculadas con la ecuación (4.27), cuyos coeficientes  $A_\mu$  son calculados en el apéndice B.3.

Como punto de partida en la búsqueda del análogo de las EWS en sistemas que se rigen por la TVTE, reproducimos algunos resultados presentado en Monsivais et al. [51], esta reproducción de resultados garantiza que nuestro análisis matemático programado en el lenguaje de programación FORTRAN, arroje resultados confiables. Por tanto, usando la ecuación (4.28) calculamos el determinante de eigenfrecuencias para una viga de sección transversal rectangular uniforme de longitud  $L = 0.5$  m. Los cruces por cero de tal determinante corresponden al espectro de eigenfrecuencias que calculamos fusionando el método de Newton-Raphson con el método de bisección, esta combinación optimiza el cálculo de las raíces y hace más fino el cálculo numérico [72]. En la Fig. 4.4 las líneas verticales azules indican el espectro de frecuencias calculado con los métodos numéricos mencionados, la correspondencia con los cruces por cero del determinante es excelente lo que significa que, hasta el momento, el cálculo numérico es exitoso.

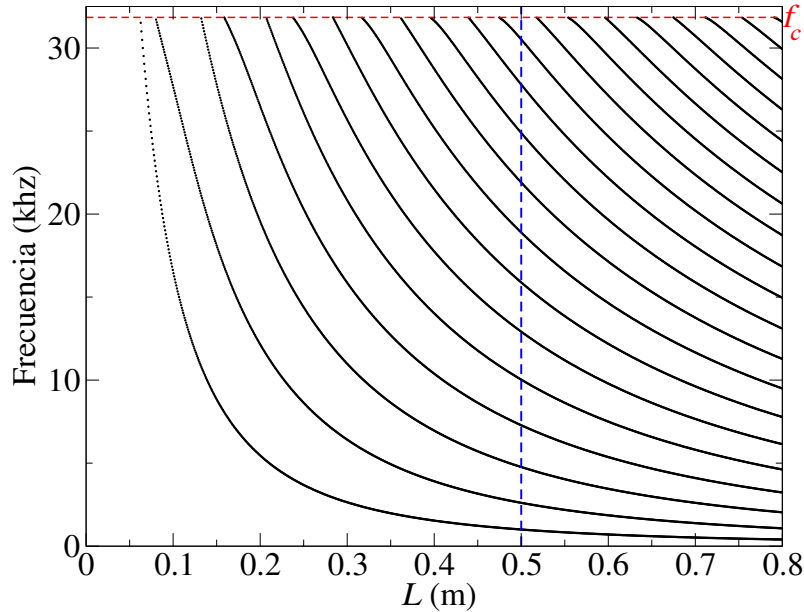


Figura 4.5: Reproducción del espectro de frecuencias como función de la longitud de la viga. La línea vertical discontinua indica el espectro de frecuencias para la viga analizada de forma experimental y teórica en [51]. La línea horizontal corresponde a la frecuencia de corte.

Ahora, calculamos el espectro de frecuencias como función de la longitud de la viga bajo estudio. Este resultado ratifica el comportamiento exótico que exhiben las vibraciones flexionales. En la Fig. 4.5, se observa que conforme la longitud de la viga aumenta la frecuencia disminuye de una forma no lineal en contraste con las vibraciones torsionales o compresionales, cuyo comportamiento es lineal y bien descrito por el MVI. En ondas flexionales, la teoría de Euler-Bernoulli aporta una expresión analítica que predice las frecuencias de los modos normales a frecuencias muy bajas y longitudes relativamente largas,

$$f_j = \frac{\pi(2j+1)}{8l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}. \quad (4.30)$$

Sin embargo, no existe un MVI que describa el comportamiento de la frecuencia como función de la longitud, en ondas flexionales, para longitudes relativamente cortas de la viga. Diferentes enfoques pueden ser aplicados para predecir el comportamiento de la frecuencia en función de la longitud de la viga; una alternativa es mostrada en el capítulo posterior. De hecho, a partir de esa propuesta se logra obtener un análogo de las EWS en sistemas gobernados por la ecuación de Timoshenko-Ehrenfest.

Finalmente, calculamos las eigenfunciones asociadas a las frecuencias indicadas con la línea vertical en la Fig. 4.5, antes de la frecuencia crítica. En la Fig. 4.6 se observa que para cada modo de vibración  $j$  la eigenfunción exhibe  $j+1$  nodos. En comparación con las vibraciones compresionales y torsionales, donde el número de nodos se corresponde con el número de modo de vibración.

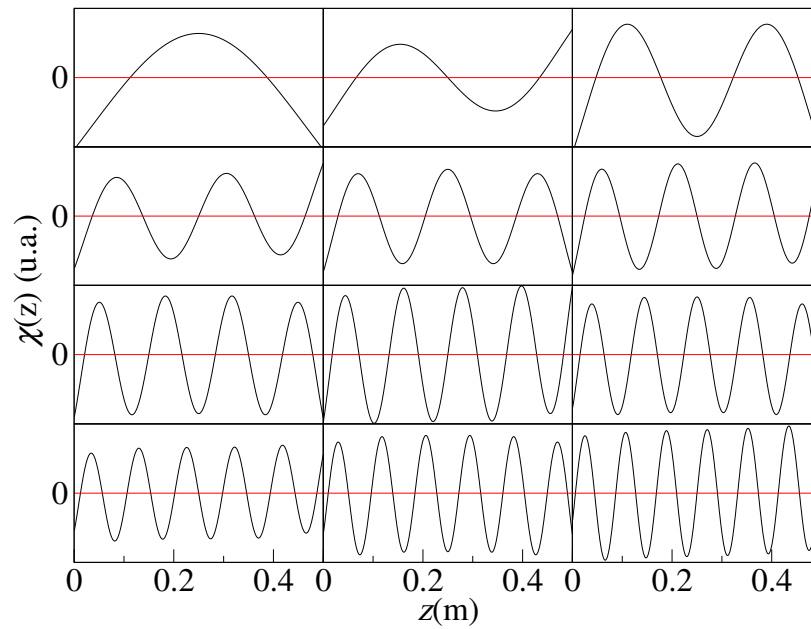


Figura 4.6: Reproducción teórica de las primeras doce eigenfunciones para una viga de sección transversal rectangular, de longitud  $L = 0.5$  m. La primera eigenfunción está ubicada en el extremo izquierdo, mientras la última eigenfunción se ubica en el extremo inferior derecho. Las intersecciones de la línea horizontal con la amplitud de onda indican el número de nodos que exhibe el desplazamiento transversal.

# Capítulo 5

## Análogo de las escaleras de Wannier-Stark en ondas flexionales

Análogos de las **EWS** han sido observados en sistemas gobernados por la ecuación de onda [27–29]. No obstante, nunca se ha observado tal análogo en ecuaciones diferenciales de ordenes mayores. En sistemas elásticos las ondas flexionales son gobernadas por dos ecuaciones diferenciales de cuarto orden, que describen los desplazamientos transversal y angular. Utilizando la teoría de vigas de Timoshenko-Ehrenfest desarrollamos un modelo de viga independiente con el que determinamos la longitud de cada uno de las barras que conforman la viga con estructura, los cuales al ser unidos por muescas y excitados con vibraciones flexionales exhiben un espectro de frecuencias equiespaciado con sus correspondientes autofunciones localizadas en un orden prescrito por la intensidad de la frecuencia resonante. En este sentido, por primera vez, obtenemos de forma exitosa un análogo de las **EWS** en un sistema que no es gobernado por la ecuación de onda.

### 5.1 Eigenfrecuencias y eigenfunciones

Antes de entrar en materia con la búsqueda del análogo de las **EWS** en sistemas gobernados por la ecuaciones de Timoshenko-Ehrenfest, presentamos el formalismo teórico para obtener las eigenfrecuencias y eigenfunciones asociadas a cualquier viga con estructura 1D. Para resolver la ecuación de Timoshenko-Ehrenfest, en una viga con estructura, empleamos el **MMT**. Bajo la imposición de modos normales exigimos continuidad en la  $j$ -ésima interfaz para los desplazamientos transversal y angular, el momento de flexión y la fuerza de corte, es decir,

$$\chi_j(z_j) = \chi_{j+1}(z_j) \quad (5.1)$$

$$\psi_j(z_j) = \psi_{j+1}(z_j) \quad (5.2)$$

$$I_j \psi'(z_j) = I_{j+1} \psi'_{j+1}(z_j) \quad (5.3)$$

$$S_j[\chi'(z_j) - \psi_j(z_j)] = S_{j+1}[\chi'_{j+1}(z_j) - \psi_{j+1}(z_j)]. \quad (5.4)$$

Donde los desplazamientos transversal y angular en términos de coordenadas locales adoptan la forma

$$\chi_j(z) = A_{1,j} \sinh(q_{1,j}^+ \tilde{z}_j) + A_{2,j} \cosh(q_{1,j}^+ \tilde{z}_j) + A_{3,j} \sin(q_{3,j}^+ \tilde{z}_j) + A_{4,j} \cos(q_{3,j}^+ \tilde{z}_j) \quad (5.5)$$

$$\psi_j(z) = \bar{A}_{1,j} \sinh(q_{1,j}^+ \tilde{z}_j) + \bar{A}_{2,j} \cosh(q_{1,j}^+ \tilde{z}_j) + \bar{A}_{3,j} \sin(q_{3,j}^+ \tilde{z}_j) + \bar{A}_{4,j} \cos(q_{3,j}^+ \tilde{z}_j), \quad (5.6)$$

con

$$\tilde{z}_j = z - z_{j-1} \quad \text{y} \quad z_{j-1} < z < z_j.$$

Las soluciones  $\chi_j(z)$  y  $\psi_j(z)$  son idénticas en forma. No obstante, es importante precisar que no son exactamente iguales, los coeficientes  $A_{\mu,j}$  y  $\bar{A}_{\mu,j}$  codifican la diferencia entre las dos soluciones. Para aplicar las condiciones de continuidad es necesario conocer los factores de peso que relacionan los coeficientes de ambas soluciones, de tal modo, que el conjunto de condiciones quede en términos de un solo desplazamiento. Esto se puede lograr a partir de las dos ecuaciones acopladas de Timoshenko-Ehrenfest o utilizando las soluciones para los desplazamientos transversal y angular junto con la segunda ecuación acoplada de Timoshenko-Ehrenfest, ver apéndice C.1.2. El segundo procedimiento [74] arroja las relaciones,

$$\bar{A}_{1,j} = \zeta_j A_{2,j}, \quad \bar{A}_{2,j} = \zeta_j A_{1,j}, \quad \bar{A}_{3,j} = -\beta_j A_{4,j}, \quad \bar{A}_{4,j} = \beta_j A_{3,j}. \quad (5.7)$$

Donde por comodidad hemos definido

$$\zeta_j = \frac{GS_j \kappa q_{1,j}^+}{GS_j \kappa - \rho I_j \omega^2 - EI_j q_{1,j}^+}, \quad \beta_j = \frac{GS_j \kappa q_{3,j}^+}{GS_j \kappa - \rho I_j \omega^2 + EI_j q_{3,j}^+} \quad (5.8)$$

Con la información de las relaciones (5.7) y las derivadas correspondientes; las condiciones de continuidad, ecuaciones (5.1)-(5.4), pueden ser escritas en términos del desplazamiento transversal, cuyo resultado final bajo manipulaciones algebraicas, nos da la forma de la Matriz de Transferencia

$$\mathcal{M}_{j \rightarrow j+1} = \begin{pmatrix} \frac{P_{1,j}}{d_{1,j}} \cosh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{1,j}}{d_{1,j}} \sinh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{2,j}}{d_{1,j}} \cos(q_{3,j}^+ l_j) & -\frac{P_{2,j}}{d_{1,j}} \sin(q_{3,j}^+ l_j) \\ \frac{P_{3,j}}{d_{2,j}} \sinh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{3,j}}{d_{2,j}} \cosh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{4,j}}{d_{2,j}} \sin(q_{3,j}^+ l_j) & \frac{P_{4,j}}{d_{2,j}} \cos(q_{3,j}^+ l_j) \\ \frac{P_{5,j}}{d_{1,j}} \cosh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{5,j}}{d_{1,j}} \sinh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{6,j}}{d_{1,j}} \cos(q_{3,j}^+ l_j) & -\frac{P_{6,j}}{d_{1,j}} \sin(q_{3,j}^+ l_j) \\ \frac{P_{7,j}}{d_{2,j}} \sinh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{7,j}}{d_{2,j}} \cosh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{8,j}}{d_{2,j}} \sin(q_{3,j}^+ l_j) & \frac{P_{8,j}}{d_{2,j}} \cos(q_{3,j}^+ l_j) \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

los factores que multiplican a las funciones trigonométricas en la matriz  $\mathcal{M}_{j \rightarrow j+1}$  y la descripción del procedimiento son presentados en el apéndice C.2

Con la información de la Matriz de Transferencia y exigiendo que el momento de flexión y la fuerza de corte se anulen en los extremos de la viga obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones, cuyo determinante, ecuación (C.29), nos proporciona

las frecuencias de los modos normales para los cuales las eigenfunciones asociadas están dadas, como se sigue,

$$\hat{\chi}_j^J = \sum_{j=1}^N \chi_j(z). \quad (5.10)$$

Finalmente, el cálculo de las eigenfrecuencias y eigenfunciones es programado en FORTRAN, donde es necesario usar precisión arbitraria, dado que los dos términos exponenciales que contiene la ecuación (5.5) son susceptibles al redondeo de las cifras significativas el cual es incorrecto en las precisiones doble y cuádruple. Con la excepción que estas dos últimas precisiones arrojan resultados correctos para vigas que no excedan la longitud de  $L = 1$  m, como puede corroborarse en la reproducción de los cálculos teóricos presentados en la última sección del capítulo anterior. Respecto a vigas con estructura las precisiones doble y cuádruple arrojan resultados correctos para un número máximo de 4 celdas unitarias, que en conjunto no excedan 1 m de longitud.

## 5.2 Modelo de viga independiente

Usando la TVTE calculamos el espectro de frecuencias como función de la longitud para una viga de sección transversal rectangular uniforme. En la Fig. 5.1 se observa que la frecuencia decrece conforme la longitud de la viga incrementa. No obstante, el comportamiento no es, para nada, trivial y no existe una expresión analítica que lo describa, para longitudes de la viga relativamente pequeñas. En el panel inferior se muestra una ampliación del espectro de frecuencias, los vértices de las rectas de color azul capturan tres puntos en el primer modo de vibración,  $j = 1$ , para los que las longitudes  $l_1, l_2, l_3$  resuenan a tres frecuencias equidistantes,  $f_1, f_2, f_3$ , con una diferencia constante,  $\Delta f_1 = 0.5$  kHz. Este procedimiento puede ser generalizado, hasta obtener un número suficiente de coordenadas que permitan el diseño de una viga con estructura cuyo desorden selectivo admita al análogo de las EWS [73].

Dado que no existe una ecuación analítica para las frecuencias de los modos normales de vibraciones flexionales, en vigas con longitudes relativamente pequeñas, como función de la longitud, se usa una función matemática,

$$f_j = c_j + b_j l^{-\alpha_j}. \quad (5.11)$$

ajustada a la  $j$ -ésima frecuencia, obtenida numéricamente como función de la longitud  $l$ . Las longitudes  $l_n$  de cada uno de las  $N$ -barras que conforman la viga varían de acuerdo a la regla

$$l_n = \frac{l_0}{(1 + n\delta)^{1/\alpha_j}}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (5.12)$$

Aquí  $l_0$  es una longitud arbitraria fija. Sustituyendo la ecuación (5.12) en la ecuación (5.11), obtenemos la frecuencia del  $j$ -ésimo estado asociado a la  $n$ -ésima barra, es

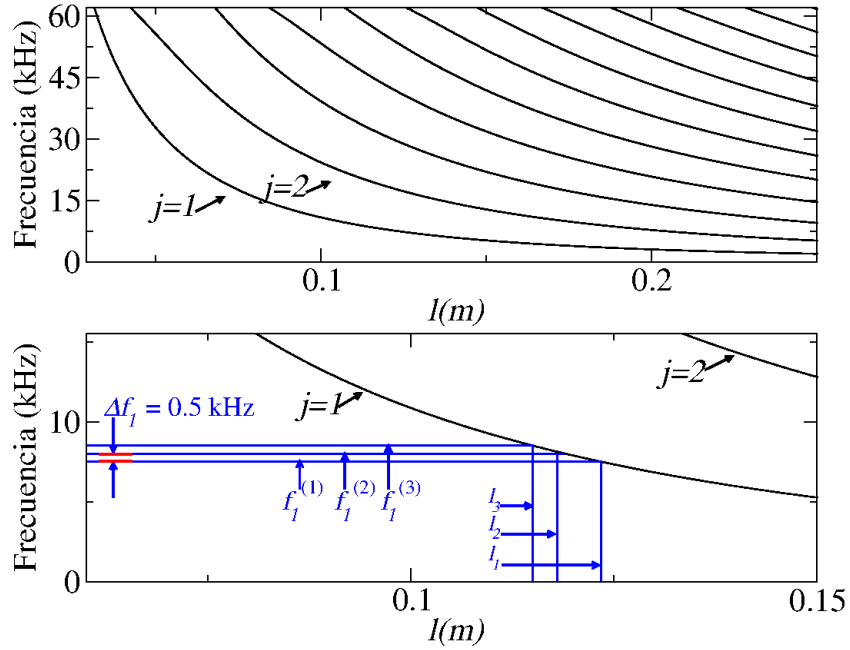


Figura 5.1: Eigenfrecuencias en función de la longitud para una viga de sección transversal rectangular uniforme como función de la longitud  $l$ . Experimentalmente determinamos la densidad del material  $\rho$ , los módulos  $G$  y  $E$ , cuyos valores son  $\rho = 2690.47 \text{ kg/m}^3$ ,  $G = 27.4096 \text{ Gpa}$  y  $E = 66.4026 \text{ Gpa}$ , ver sección 6.3.1. El ancho y la altura de la viga son  $h = 1.25 \text{ cm}$ ,  $w = 2.53 \text{ cm}$ , respectivamente, y el coeficiente de corte de de Timoshenko es  $\kappa = 0.861$ . En el panel inferior se muestra una ampliación del espectro de frecuencias.

decir,

$$f_j^{(n)} = c_j + b_j l_0^{-\alpha_j} (1 + n\delta), \quad (5.13)$$

y las diferencias entre frecuencias  $\Delta f_j^{(n)} = f_j^{(n+1)} - f_j^{(n)}$  para barras consecutivas del mismo modo de vibración son

$$\Delta f_j^{(n)} = b_j l_0^{-\alpha_j} \delta, \quad (5.14)$$

independiente del índice  $n$ .

Trabajando para el primer modo de vibración  $j = 1$  en el intervalo de longitud comprendido entre 0.06 m y 0.15 m. El ajuste numérico mostrado en la Fig. 5.2 nos arroja los coeficientes  $\alpha_1 = 1.523$  y  $b_1 = 0.387$ , con los cuales se observa una excelente concordancia entre la curva de color rojo asociada al primer modo de vibración, y el ajuste numérico, curva negra.

La elección del intervalo de longitud no es al azar y se justifica en dos argumentos:

1. Las frecuencias de vibración asociadas al primer modo de vibración no se mezclan con las frecuencias de los demás modos.
2. La longitud total de la viga con estructura, que en nuestro caso está conformada por trece barras, no excede los 2 m de longitud.

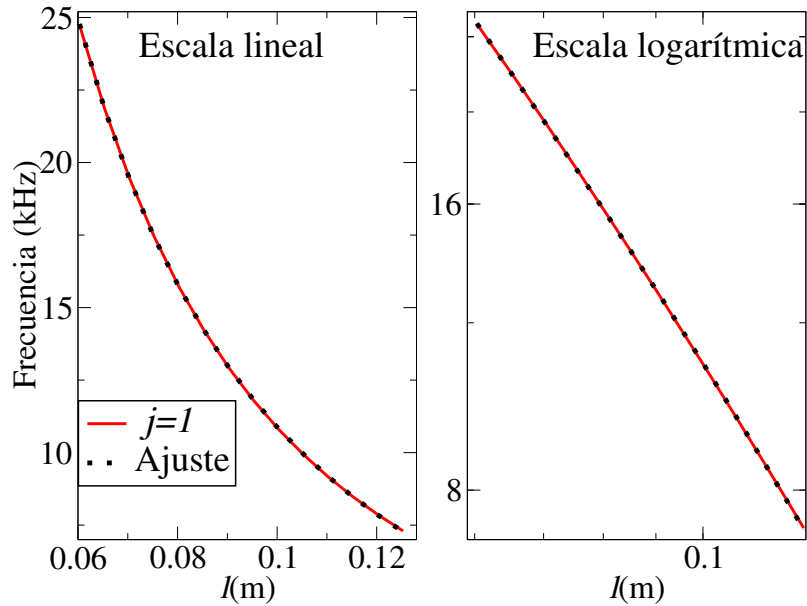


Figura 5.2: Ajuste numérico, curva discontinua negra, del primer modo de vibración flexional, curva de color rojo, para una viga de sección transversal rectangular uniforme.

El último argumento es un requisito indispensable para el estudio experimental, pues vigas con longitudes mayores a 2 m implican complicaciones en las mediciones, mientras que el primer argumento es una ventaja que facilita y optimiza el análisis, tanto teórico como experimental.

Es importante resaltar que el MVI obtenido es el principal responsable para el diseño de la estructura unidimensional, que tanto en el ámbito experimental como en el ámbito teórico permite observar el análogo de las EWS. Esto no significa que esta sea la única opción para observar un análogo de las EWS. En efecto, se podría aplicar un análisis netamente teórico, partiendo de un razonamiento bastante similar al aplicado en la ecuación de onda que gobierna el fenómeno cuántico de las EWS. No obstante, es imprescindible reconocer la naturaleza de la ecuación de Timoshenko-Ehrenfest y en este sentido vislumbrar las diferencias, tales como la relación de dispersión que exhibe un comportamiento bastante interesante, donde surge una frecuencia de corte que divide el espectro de frecuencias en dos regímenes.

Precisamente, se puede considerar la relación de dispersión, en el buen sentido de la palabra, como el principal obstáculo para obtener una expresión analítica exacta, como la obtenida en ondas torsionales. En este sentido, implementamos el modelo descrito en esta sección, en el cual explotamos las simulaciones numéricas y partir de ellas obtenemos la ecuación (5.14), en la cual el valor del coeficiente  $\alpha_j$  es susceptible al modo de vibración en el que se pretenda diseñar la viga con estructura que admita el análogo del fenómeno de las EWS. Lo anterior se puede identificar como una limitación, donde es necesario un diseño diferente en la estructura de la viga para observar un espectro equiespaciado en cada uno de los modos de vibración. No

Obstante, en intervalos de longitudes grandes,  $l > 1$ , m el comportamiento de todos los modos es muy parecido. Y por tanto, aplicando el modelo de viga independiente es posible que con un único valor de  $\alpha_j$  se obtenga un espectro de frecuencias equidistantes, en el régimen  $\omega < \omega_c$ , para cada uno de los modos de vibración, es más, en este intervalo un análisis teórico puede arrojar expresiones analíticas que permitan mayor control sobre el problema. Sin embargo, la realización experimental tendría grandes complicaciones por la longitud total de la viga con estructura, la cual excedería los diez metros de longitud.

### 5.3 Estructura de Wannier-Stark

En el MVI el parámetro sin dimensión  $\delta$  es análogo al campo eléctrico en el fenómeno cuántico de las EWS. En nuestro sistema elástico de  $N$  barras que interactúan débilmente, la frecuencia de estados localizados en cada uno de las barras depende, aproximadamente, de forma lineal del gradiente  $\frac{\partial\omega}{\partial z}$ , cuya pendiente está dada por

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} \approx 2\pi b_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{l^{\alpha_1}} \right) \quad (5.15)$$

para  $j = 1$ . Entonces, una variación lineal de frecuencia es obtenida para un gradiente

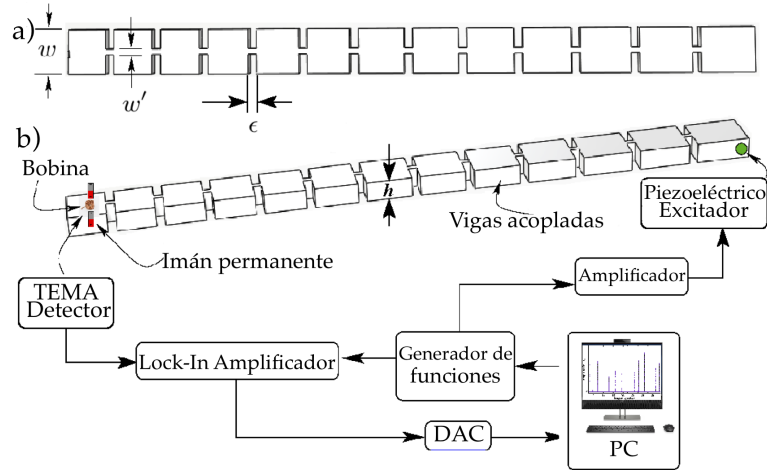


Figura 5.3: a) Viga con estructura usada para obtener el análogo de las EWS con celdas de longitud variable  $l_n = \frac{l_0}{(1+n\delta)^{1/\alpha_j}}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , con  $l_0 = 0.13$  m,  $\delta = 0.61$  y  $\alpha_1 = 1.523$ . El sistema tiene una longitud total de 1.5529 m correspondiente a  $N = 13$ . Los demás parámetros son idénticos a los descritos en la Fig. 5.1. b) Esquema de la configuración experimental. El detector es un EMAT, mientras el excitador es un transductor piezoeléctrico.

constante de  $l^{-\alpha_1}$ :  $\Delta\omega = \omega(l_n) - \omega(l_{n-1}) = 2\pi b_1 \Delta(l^{-\alpha_1})$ . Así, la ecuación (5.14) para el estado  $j = 1$  se recupera cuando se usa la variación de longitud  $l_n$  de la ecuación (5.12).

En analogía con los sistemas óptico y elástico de las referencias [75] y [27], respectivamente, el sistema elástico estudiado aquí es mostrado en la Fig. 5.3 y consiste de un conjunto de  $N$  barras de aluminio con sección transversal rectangular de altura  $h$ , ancho  $w$ , y longitud variable  $l_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , acoplados por muescas de longitud  $\epsilon \ll l_n$  y sección transversal rectangular de altura  $h$  y ancho  $w' \ll w$ . Para determinar las longitudes  $l_n$  es esencial definir el valor del parámetro sin dimensión  $\delta$ . En este sentido, calculamos las frecuencias de los modos normales, usando la TVTE y el MMT, para una viga con estructura compuesta de  $N = 13$  barras como función del parámetro  $\delta$ , ver Fig. 5.4. Cuando  $\delta = 0$ , tenemos un sistema localmente periódico, cuyo espectro de frecuencias es formado por el reconocido patrón de bandas y huecos [46]. Pero si,  $\delta \neq 0$ , esperamos un espectro muy diferente, uno que se asemeje al análogo de las EWS. En efecto, la línea vertical discontinua, localizada en  $\delta = 0.061$ , especifica el espectro correspondiente al sistema EWS de la Fig.5.3. Finalmente, es

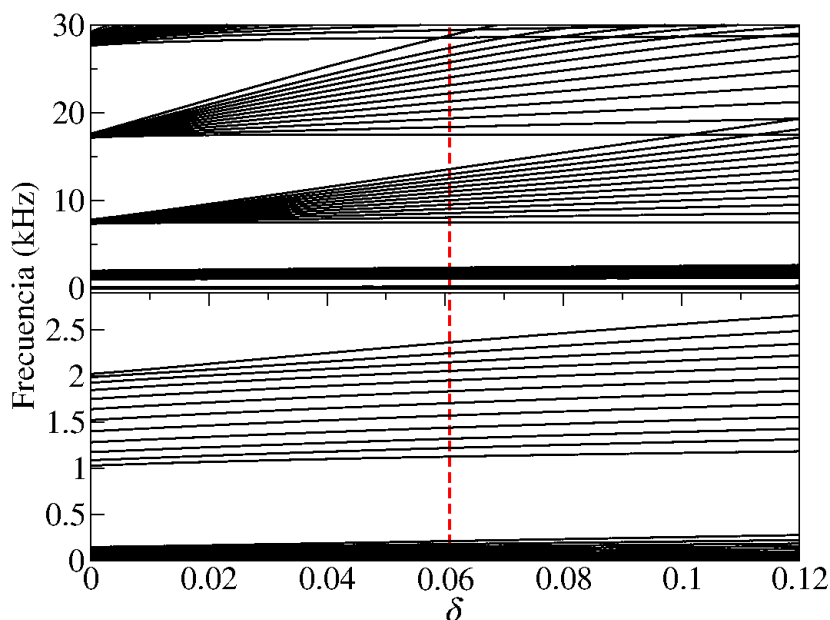


Figura 5.4: Frecuencias de los modos normales para un sistema conformado por  $N = 13$  como función del parámetro sin dimensión  $\delta$ , calculado con la TVTE. En el panel superior se muestran las cinco bandas que emergen aunque la primera no es distinguible del eje horizontal. Por tal motivo, una ampliación de las dos primeras bandas es mostrada en el panel inferior.

importante mencionar que la interfaz entre muesca y barra en nuestro sistema presenta dos novedades respecto a la viga con estructura diseñada en oscilaciones torsionales para observar el análogo del fenómeno de las EWS [27]:

1. La altura de la muesca es idéntica a la altura de la barra, en un modo similar al presentado por Jianfei Yin et al. [76], como se aprecia en la Fig.5.6. Esta modificación mitiga la posibilidad de que la viga con estructura sufra fracturas en el momento de ser manipulada en el estudio experimental y genera un mejor

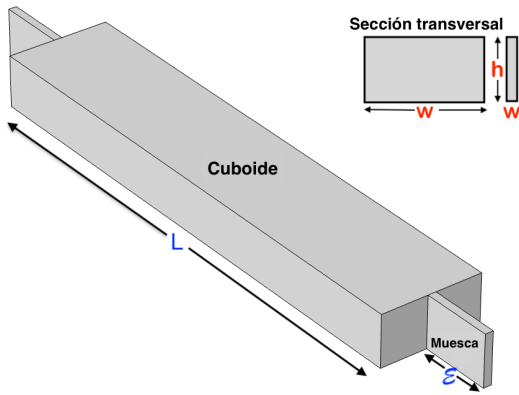


Figura 5.5: Sistema muesca-barra. Los anchos de la barra y la muesca son etiquetados con las letras  $w$  y  $w'$ , respectivamente.

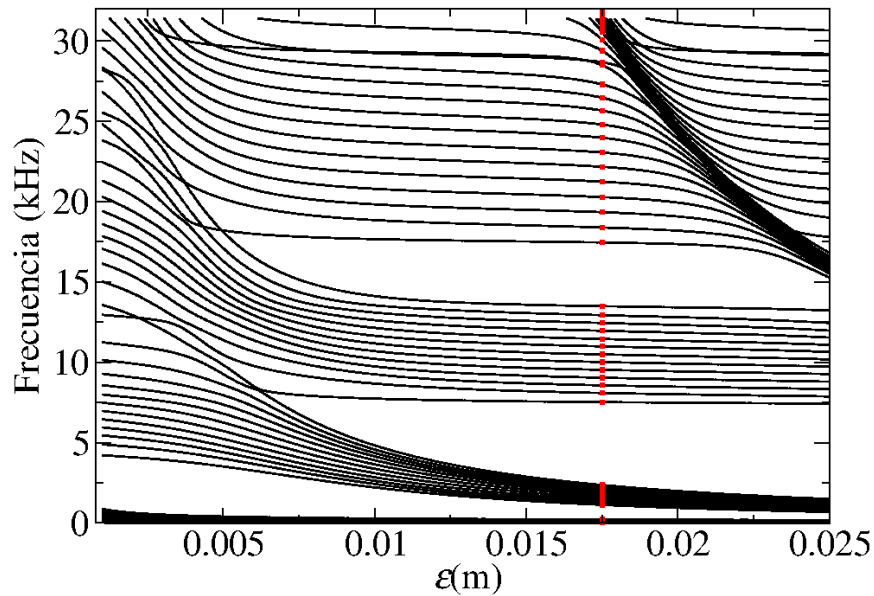


Figura 5.6: Frecuencias de los modos normales como función de la longitud de la muesca  $\epsilon$ , para el sistema descrito en la Fig. 5.3. Los puntos de color rojo corresponden el espectro de frecuencias calculado con el MVI.

acuerdo con las condiciones de continuidad impuestas en la TVTE. Las cuales, es bien sabido, son aproximadas, pues solo la porción de la sección transversal de la barra correspondiente al área de la sección transversal de la muesca está en contacto.

2. La longitud de la muesca,  $\epsilon$ , afecta el espectro de frecuencias pronosticado por el MVI. Para la viga con estructura presentada en la Fig. 5.3 calculamos el espectro de frecuencias como función de la longitud de la muesca  $\epsilon$ . En la Fig.

5.6 se observa que el espectro de frecuencias predicho por el MVI, columna roja, se recupera a partir de  $\epsilon \geq 0.0175$  m y será destruido para longitudes extremadamente largas de la muesca. Por lo anterior, señalamos que a diferencia de las ondas torsionales, en ondas flexionales existe un intervalo selectivo en la longitud de las muescas para el cual los resultados prescritos por el MVI son recuperados.

## 5.4 Resultados

Antes de iniciar con el análisis de los resultados teóricos y experimentales, presentamos un análisis cualitativo. De acuerdo al MVI, a frecuencias muy bajas la longitud de onda  $\lambda$ , es del mismo orden que la longitud total del sistema, de modo que toda la estructura, mostrada en la Fig. 5.3, es excitada y la amplitud de onda asociada es extendida. Conforme la frecuencia incrementa,  $\lambda$  disminuye y se vuelve del orden de  $l_1$ , la barra más larga, la cual entra en resonancia mientras las  $N - 1$  barras restantes sufren deformaciones tenues. En este sentido, el estado se localiza alrededor de la barra de mayor longitud. Este resultado era de esperarse, ya que estamos perturbando una estructura periódica para obtener un sistema desordenado, que muestre funciones de onda localizadas en vibraciones flexionales [67]. Incrementando la frecuencia de excitación por  $\Delta f_1$ , la segunda barra con longitud  $l_2$  y sus vecinos más cercanos ahora son excitados mientras las demás barras experimentan deformaciones mínimas. Por lo tanto, las amplitudes de las vibraciones disminuyen conforme la distancia a la segunda barra aumenta. La amplitud de onda es nuevamente localizada pero ahora en la segunda barra con una forma similar a la que tenía antes en la primera barra. El mismo argumento aplica cuando la  $n$ -ésima barra de longitud  $l_n$  es excitado. Por lo tanto, hemos producido una EWS finita, es decir,  $N$  estados localizados con diferencia constante  $\Delta f_1$  [73].

### 5.4.1 Eigenfrecuencias y eigenfunciones

Como se ha mencionado previamente, para  $\delta = 0$  aparece un espectro de bandas, característico de un sistema localmente periódico, el cual se destruye a medida que  $\delta$  crece. De hecho, a partir de la tercera banda, los niveles de cada banda se separan para formar una EWS. Cuando la longitud de onda es del mismo orden que la longitud total de la viga con estructura, todo el sistema se excita. Estos modos se agrupan en la primera banda como los reportados en vibraciones torsionales [19, 27]. Cuando se aumenta la frecuencia una segunda banda emerge, pero no corresponde a una EWS como en las oscilaciones torsionales [19, 27], sino que todo el sistema se excita de nuevo y las oscilaciones se producen de forma que cada una de las  $N$  barras exhibe un solo nodo. Es hasta la tercera banda que se reproduce la EWS. Obsérvese que una función  $\xi_0^*$  con un solo nodo,  $j = 0$ , es incompatible con una viga de sección transversal uni-

forme que obedece las ecuaciones diferenciales acopladas de Timoshenko-Ehrenfest, ecuaciones (4.7) y (4.8), y las condiciones de frontera de extremos libres, por lo que dicha función no corresponde al conjunto de funciones propias [73]. Sin embargo, este 0-ésimo estado,  $\xi_0^*$ , reaparece en todas las barras de la segunda banda, de acuerdo con la referencia [52], donde se reporta que la misma función  $\xi_0^*$  resurge para actuar como un estado Doorway a bajas frecuencias casi independiente de la longitud  $l$ , como se observa en la Fig. 5.4.

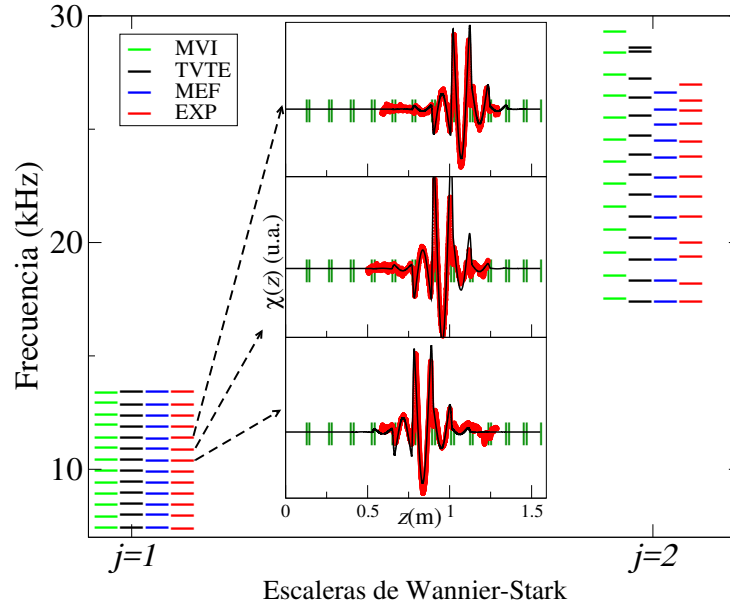


Figura 5.7: Frecuencias de los modos normales para la estructura de Wannier-Stark. Para cada valor de  $j$  y comenzando de izquierda a derecha, las columnas corresponden a las predicciones numéricas usando MVI, TVTE y MEF, respectivamente, la última columna (color rojo) corresponde a las mediciones experimentales. En los tres recuadros, localizados en medio, se comparan las amplitudes de onda teóricas utilizando TVTE con las mediciones experimentales para tres estados alrededor del centro de la primera EWS. Los segmentos verticales en el eje horizontal especifican la estructura de la viga.

Las frecuencias de los modos normales para la primera y segunda escalera del sistema de la Fig. 5.3 son mostrados en la Fig. 5.7. Primero se puede apreciar que los resultados teóricos exhiben un alto grado de concordancia con los resultados experimentales, para la primera escalera,  $j = 1$ . Además, la explicación cualitativa presentada en el primer párrafo de esta sección proporciona una buena aproximación de lo observado. Se puede ver en esta figura que los estados forman realmente un conjunto de EWS. Obsérvese que los espaciamentos en frecuencia en los extremos de la primera escalera son sutilmente diferentes a los estados del centro de la escalera. Esto se adjudica al efecto de borde en las amplitudes de onda localizadas cerca de los extremos libres, como se informa también en [27, 29].

A pesar de que la escalera fue diseñada para el primer estado,  $j = 1$ , una segunda

escalera para el segundo estado,  $j = 2$ , es parcialmente producida con un espaciado mayor y ligeramente variable en frecuencia. En esta segunda escalera parcialmente formada, las predicciones teóricas del MEF están en buen acuerdo con las experimentales, pero se observan algunas discrepancias entre los cálculos teóricos obtenidos con el MVI y la TVTE, como se muestra, para  $j = 2$ , en la Fig. 5.7. Estas discrepancias se deben a otros efectos que surgen posiblemente del acoplamiento, y se hacen más evidentes a medida que aumenta la frecuencia [46]. Obsérvese que si en la ecuación (5.13) se utiliza el valor de  $\alpha_1$  y se sustituye en la ecuación (5.12) con  $j = 2$ , se obtiene un espaciado de frecuencias  $\Delta f_2$ , aproximadamente independiente de  $n$  pero dependiente de la razón  $\alpha_2/\alpha_1$ , para valores pequeños de  $n\delta$ . Por tanto, sobrevive la segunda escalera para  $n = 1, 2, \dots, 6$ , como efectivamente se corrobora en la Fig. 5.7. Al aumentar  $n$ , el espaciado en frecuencia,  $\Delta f_2$ , ya no es independiente de  $n$ , sino que disminuye, como se observa una vez más en la Fig. 5.7 para  $n = 10$ .

Para obtener una segunda escalera bien formada, se debe utilizar la regla de construcción correspondiente al sistema para el segundo estado,  $j = 2$ . Es decir, se debe sustituir  $j = 2$  en la ecuación (5.13), y obtener los parámetros  $b_2$  y  $\alpha_2$  del ajuste numérico de la función  $f_2(l)$ , para el segundo estado, como puede verse en la ecuación (5.14). Más importante es el hecho de que para producir la segunda escalera, lamentablemente se debe maquinar otro sistema, ya que la regla de construcción de la ecuación (5.13) es sensible al modo de vibración  $j$ . Las amplitudes de onda para la segunda escalera, deben ser de nuevo localizadas y todas tienen una forma similar. Donde el espaciado entre resonancias consecutivas es constante, pero de mayor magnitud en comparación con la primera escalera. Por lo tanto, el espacio entre las resonancias consecutivas en las escaleras elásticas no es el mismo y depende del modo de vibración, en contraste con el régimen de la mecánica cuántica, donde el espaciado se mantiene inmutable [27].

En los tres recuadros localizados en medio de la la Fig. 5.7 también mostramos la comparación de las amplitudes de onda experimentales y las calculadas teóricamente. De abajo hacia arriba, las gráficas corresponden a los modos séptimo, octavo y noveno de la primera escalera, donde la amplitud de onda es localizada alrededor de la séptima, octava y novena barra, respectivamente. Los tres estados exhiben la misma forma correspondiente al primer estado,  $j = 1$ , en el que deben aparecer dos nodos en la barra donde se localiza la amplitud de onda a diferencia del análogo de las EWS en vibraciones torsionales [27], donde para el primer estado,  $j = 1$ , solo aparece un nodo en la barra donde se localiza la amplitud de onda. Obsérvese la excelente concordancia entre la teoría y el experimento. Usando el MEF, también calculamos las amplitudes de onda correspondientes a los tres modos bajo estudio, ver Fig. 5.8, donde se aprecia de forma inmediata la localización de las amplitudes de onda y las pequeñas deformaciones que sufren los primeros vecinos. Mientras las vigas restantes manifiestan deformaciones prácticamente imperceptibles, mas no nulas, pues no se debe olvidar la imposición de modos normales la cual nos lleva a admitir que todo el sistema está en resonancia. Adicionalmente, se ratifica que para  $j = 1$  la amplitud

de onda tiene dos nodos.

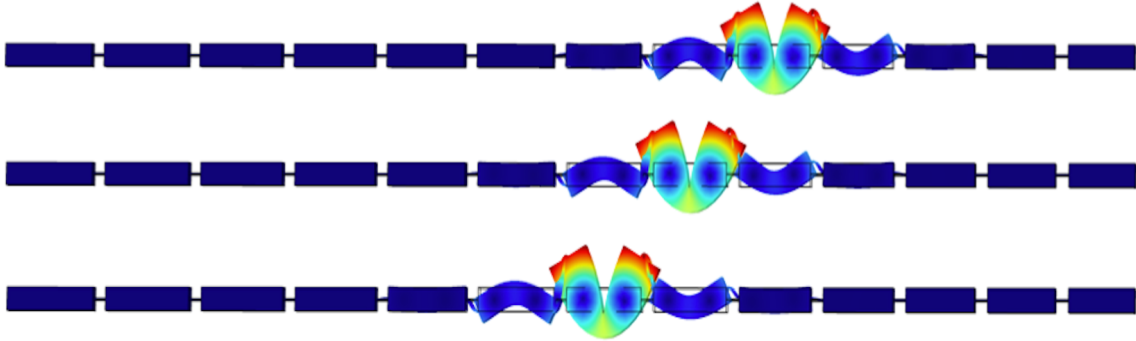


Figura 5.8: Amplitudes de onda calculadas con MEF. De abajo hacia arriba, las eigenfunciones corresponden a los modos séptimo, octavo y noveno, respectivamente. El color azul oscuro especifica deformaciones mínimas, mientras el color rojo indica máximas deformaciones.

En la Fig. 5.9 presentamos una comparación entre las amplitudes de onda calculadas con MEF y MVI, y las mediciones experimentales. Aquí se observa una excelente concordancia entre los tres modelos y los resultados experimentales para la amplitud de onda resonante. La predicción del MVI para los vecinos de la amplitud de onda localizada en la  $j$ -ésima viga son obviamente nulos y la concordancia entre las predicciones del MEF y la TVTE es muy buena.

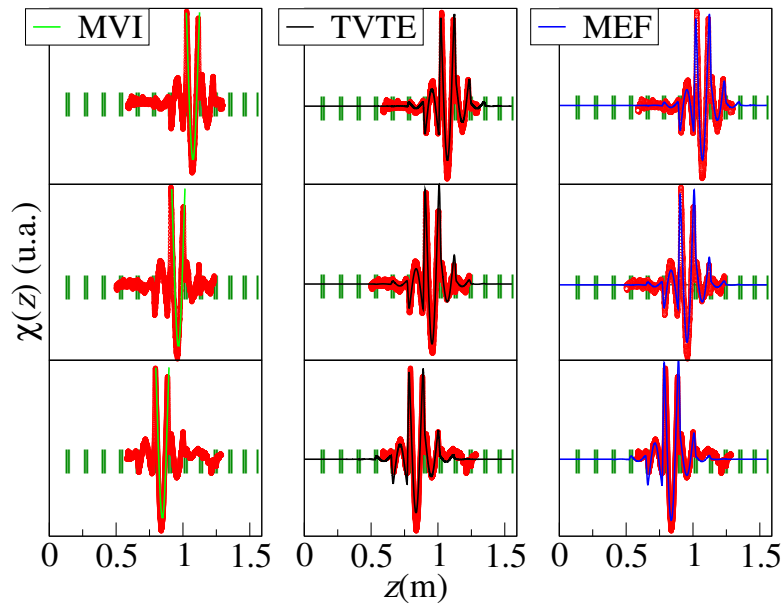


Figura 5.9: Comparación de los tres modelos teóricos con las mediciones experimentales, puntos de color rojo, para las amplitudes de onda correspondientes a los tres modos presentados en la Fig. 5.7. De izquierda a derecha, las columnas corresponden a las predicciones numéricas obtenidas usando MVI, TVTE y MEF, respectivamente.

En la Fig. 5.10 mostramos dos predicciones teóricas para las amplitudes de onda de varios estados asociados a la segunda EWS parcialmente formada. En los paneles superior y central la amplitud de onda se localiza en la primera y sexta barra. Ambos estados conservan la misma forma y exhiben tres nodos en la barra donde se localiza la amplitud de onda. Se observa de nuevo la localización, a pesar de que el sistema fue diseñado solo para el primer estado  $j = 1$ . Como se mencionó en líneas anteriores, para valores relativamente pequeños de  $n\delta$ , es decir,  $n = 1, 2, \dots, 6$ , se debe observar un espaciamiento en frecuencia, aproximadamente constante entre resonancias consecutivas, con sus respectivas amplitudes de onda localizadas. En contraparte, para valores de  $n$  tales que  $n\delta$  ya no es pequeño, por ejemplo para  $n = 11$ , el espaciamiento en frecuencia disminuye a medida que  $n$  crece, por lo que la amplitud de onda se localiza en diferentes barras para el estado  $j = 2$ . En este sentido, la localización se destruye a medida que ascendemos en frecuencia para esta segunda EWS, como se aprecia en el panel inferior de la Fig. 5.10, donde no solo la amplitud de onda se localiza en la undécima barra, sino que la magnitud de la amplitud de onda se reduce.

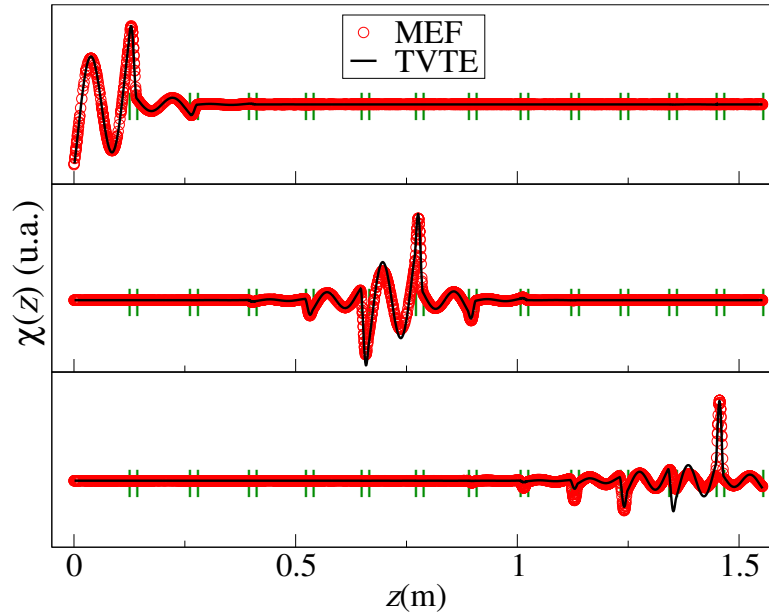


Figura 5.10: Predicción teórica para tres amplitudes de onda correspondientes a la segunda EWS. Los círculos y la línea continua corresponden al MEF y la TVTE, respectivamente.

### 5.4.2 Error relativo

Los tres modelos teóricos utilizados arrojan resultados consistentes con las mediciones experimentales, como se puede constatar en la sección anterior. Una mejor medición de la efectividad de los modelos teóricos es proporcionada calculando el

error relativo entre los valores experimentales y teóricos, etiquetados con  $v_E$  y  $v_T$ , respectivamente, es decir,

$$|E_r| = \left| \frac{v_E - v_T}{v_E} \right|. \quad (5.16)$$

En la Fig. 5.11, mostramos el error relativo como función del modo de vibración para la primera escalera,  $j = 1$ , donde se observa, para los tres modelos, que el error relativo es inferior al 1%. En efecto, los errores relativos promedio, registrados en

Método	$\bar{E}_r(\%)$
MVI	0.4122
TVTE	0.3052
MEF	0.1526

Tabla 5.1: Error relativo promedio para la primera EWS. En la columna del lado izquierdo se especifican los métodos y en la columna derecha se muestra el error relativo promedio,  $\bar{E}_r$ .

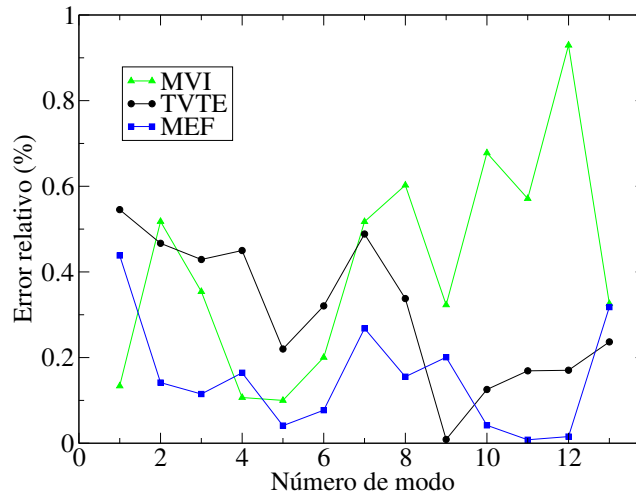


Figura 5.11: Error relativo entre los resultados teóricos y experimentales para cada uno de los modos de vibración correspondientes a la primera EWS. Los colores verde, negro y azul corresponden a los cálculos desarrollados con los modelos MVI, TVTE y MEF, respectivamente.

la tabla. 5.2, revelan que el MEF es el modelo que mejor ajusta con las mediciones experimentales, seguido de la TVTE, mientras el MVI resulta el método con mayor error. Sin embargo, el error relativo promedio correspondiente al MVI no excede el 0.5%, por tanto, este método resulta confiable para el diseño de cualquier estructura. No se debe olvidar que la estructura de Wannier-Stark mostrada en la Fig. 5.3 ha sido construida con base en el MVI. Como medida complementaria utilizando el programa WebPlotDigitizer extraemos los valores experimentales y teóricos de las frecuencias correspondientes a las primera EWS torsional reportada en [27]. Con dichas

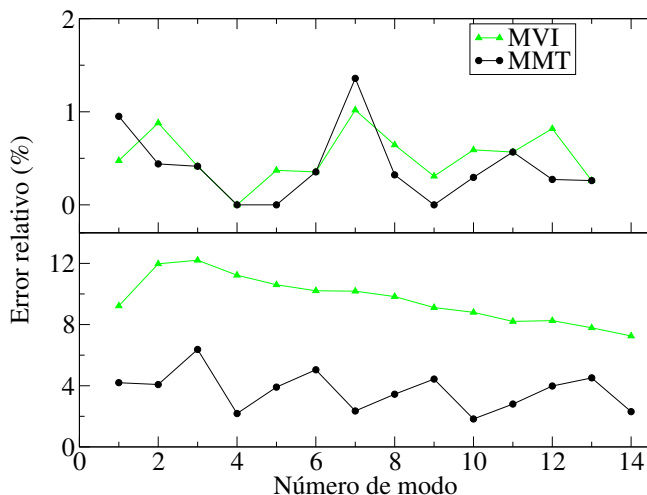


Figura 5.12: Error relativo entre los resultados teóricos y experimentales para las EWS correspondientes al primer estado  $j = 1$ . En el panel superior mostramos los errores correspondientes al sistema flexional [73], mientras en el panel inferior se muestran los resultados asociados al sistema torsional [27]. Los colores verde, negro y azul corresponden a los cálculos desarrollados con los modelos MVI y MMT, respectivamente.

Método	$E_{r,tors}(\%)$	$E_{r,flex}(\%)$
MVI	9.6327	0.5157
MMT	3.6747	0.4028

Tabla 5.2: Error relativo promedio para las EWS asociadas al primer estado,  $j = 1$ . los subíndices *tors* y *flex*, etiquetan los errores relativos promedio torsional y flexional, respectivamente.

frecuencias calculamos el error relativo mostrado en el panel inferior de la Fig. 5.12. Adicionalmente, en el panel superior aplicando el mismo procedimiento, también capturamos los valores experimentales y teóricos para la primera EWS flexional asociada al sistema mostrado en la Fig. 5.3 y reportada en [73]. Prescindimos de comparar los resultados de la EWS torsional con el cálculo presentado en la Fig. 5.11, pues para establecer una comparación objetiva es imprescindible que ambos errores relativos sean calculados bajo los mismos criterios.

En la Fig. 5.12 se observa que el error relativo de la EWS para el primer estado,  $j = 1$  correspondiente al sistema flexional, panel superior, presenta un error relativo menor comparado con el observado en el sistema torsional, panel inferior. Los errores relativos promedio asociados al sistema flexional resultan menores para ambos modelos teóricos, como se observa en la tabla. Hemos re-etiquetado la TVTE como MMT ya que tanto en esta teoría como en la teoría de vibraciones torsionales el MMT es utilizado para resolver las ecuaciones diferenciales.

# Capítulo 6

## Estudio experimental

Describimos el funcionamiento del sistema experimental que reposa en las instalaciones de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla Sede Ecocampus Valsequillo. Principalmente, explicamos el principio del funcionamiento del EMAT el cual ha sido empleado como detector. Asimismo, explicamos el funcionamiento del excitador el cual consiste de un transductor piezoeléctrico. Adicionalmente, presentamos la medición experimental de los módulos elásticos  $G$  y  $E$ , junto con la densidad,  $\rho$ , de la aleación de aluminio usada para la construcción de las vigas con estructura estudiadas, de forma experimental y teórica, en los capítulos 3 y 5.

### 6.1 Configuración experimental

En la Fig. 6.1 se muestra el esquema de la configuración experimental para detectar y excitar ondas elásticas. Esta configuración es desarrollada con base en los arreglos experimentales descritos en [50,77]. Un generador de funciones de onda envía una señal sinusoidal, a una frecuencia establecida, al amplificador de potencia y el amplificador sensible a la fase. Simultáneamente, un piezoeléctrico excitador transforma la señal eléctrica en mecánica, de modo que, una vibración se propaga en la viga a la frecuencia de excitación establecida. Dicha vibración es detectada y convertida en señal eléctrica por el EMAT. Posteriormente, el amplificador Lock-in filtra la señal, eliminando el ruido externo y garantizando que la señal detectada corresponda a la frecuencia de excitación establecida. Finalmente, la señal analógica es convertida en información digital a través de un convertidor digital analógico (DAC), por sus siglas en inglés, propiciando que todas las señales medidas puedan ser interpretadas por una computadora. Este procedimiento es aplicado a un rango de frecuencias, de modo que, la computadora muestra un espectro de frecuencias, cuyos picos bien definidos corresponden a las frecuencias de resonancias del sistema bajo estudio.

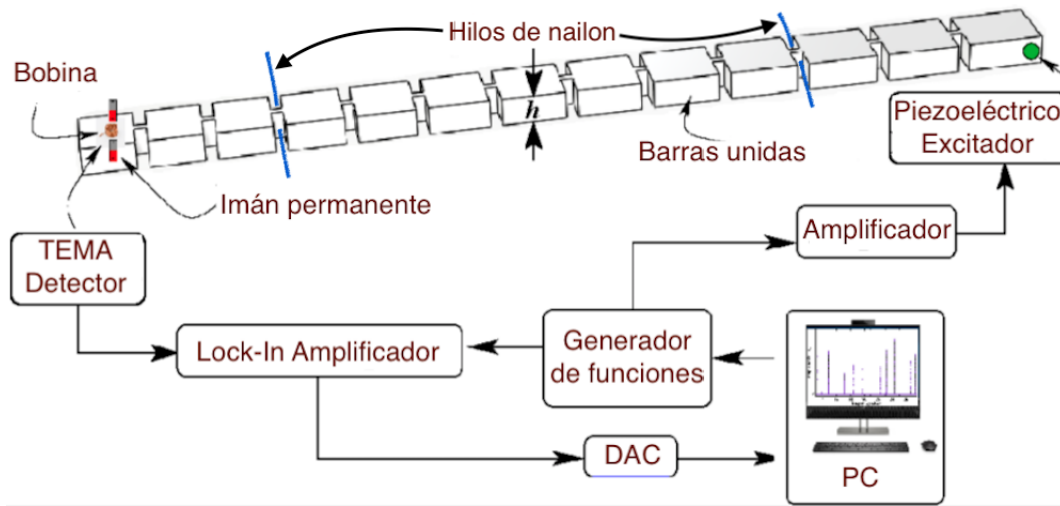


Figura 6.1: Configuración experimental para la medición de oscilaciones flexionales. En la parte superior se muestra una viga con estructura maquinada en una sola pieza. En el extremo izquierdo de la viga se localiza el EMAT, mientras en el extremo derecho se posiciona el piezoeléctrico excitador.

Las condiciones de frontera de extremos libres son sencillas de llevar a la práctica y se cumplen al no sujetar o empotrar la viga en los extremos. En este sentido, empleamos hilos de nailon, como se indica con las líneas azules en la Fig. 6.1, para sujetar la viga, estos hilos son localizados en los nodos de la amplitud de onda, de modo que no interfieran con la señal enviada por el generador de funciones; en contraparte el excitador y detector no debe localizarse en los nodos de la viga, pues las mediciones serian nulas. La amplitud de onda se mide deslizando el EMAT a lo largo de toda la viga o la región de interés, para que esta medición sea exitosa es imprescindible una alineación óptima de la viga, de modo que, en el caso de las ondas flexionales, el EMAT detecte la deformación transversal en el eje neutro de la viga. Las especificaciones del equipo de laboratorio son mostradas en la tabla 6.1.

Equipo	Modelo
Generador de señales	SRS SG380
Lock-in amplificador	SRS530
Amplificador	KROHN-HITE 7500

Tabla 6.1: Equipo de laboratorio y su modelo correspondiente.

## 6.2 EMAT y transductor piezoeléctrico

El EMAT consta de una bobina de reloj y un imán permanente que genera un campo magnético no homogéneo  $\mathbf{B}$ . Diferentes disposiciones tanto del imán como de la bobina nos permiten configurar el EMAT para medir ondas compresionales,

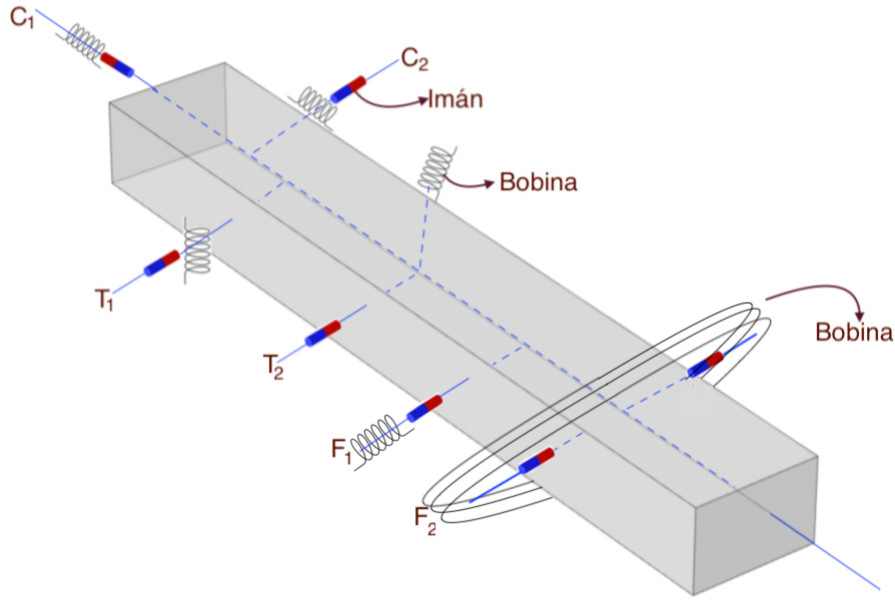


Figura 6.2: Disposición de las bobinas e imanes, EMATs, en una viga de aluminio para excitar y detectar ondas: compresionales,  $C_1$  y  $C_2$ , torsionales,  $T_1$  y  $T_2$ , y flexionales,  $F_1$  y  $F_2$ .

torsionales o flexionales [50, 77]. En la Fig. 6.2 se ilustran los tres casos, donde es preciso mencionar que el EMAT no está en contacto mecánico con la superficie de la viga. Discutimos el funcionamiento de este dispositivo cuando es empleado como detector y excitador de vibraciones elásticas, también incluimos una explicación sencilla en la que justificamos las ventajas que propicia el transductor piezoeléctrico para la medición de los desplazamientos transversales o amplitudes de onda.

El movimiento relativo entre el imán permanente y la superficie conductora ocasiona un flujo magnético,

$$\phi_B = \int_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da, \quad (6.1)$$

variable en el tiempo cuya circulación a través de cualquier lazo, como por ejemplo, el lazo  $c$  mostrado en la Fig. 6.3, genera una fuerza electromotriz inducida (FEM), tal como lo establece la Ley de inducción de Faraday [80–82]. Esta FEM inducida genera una corriente parásita en el material conductor proporcional a la variación del flujo magnético, es decir,

$$i \propto \frac{d\phi_B}{dt}. \quad (6.2)$$

En nuestros sistemas el flujo magnético básicamente es afectado por la distancia de separación  $z$  entre la superficie conductora y el imán. Entonces,

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{\partial \phi_B}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (6.3)$$

Ahora, si garantizamos que ambos, el imán permanente y el EMAT, estén muy cerca de la superficie conductora, podemos admitir que el campo magnético varía linealmente con  $z$ , y por tanto, asumir en una primera aproximación como constante a  $\partial\phi_B/\partial z$ . Desde esta perspectiva la corriente parásita es proporcional a la velocidad que experimenta la superficie conductora [78, 79],

$$i \propto \frac{dz}{dt}. \quad (6.4)$$

En efecto, esta corriente parásita alojada en la superficie conductora origina un campo magnético dependiente del tiempo,  $\mathbf{B}(t)$ , proporcional a la corriente eléctrica  $i$  que a su vez genera un flujo magnético variable en la bobina, y por tanto, una FEM inducida que da lugar a una corriente eléctrica  $i'$  que circula por las espiras de la bobina, cuyo voltaje proporciona la señal detectada por la oscilación [50]. De hecho, la FEM inducida corresponde al voltaje entre las terminales de la bobina, por tanto,

$$V_{bobina} = -\frac{d\phi_{bobina}}{dt}. \quad (6.5)$$

Lo que nos permite concluir en primera aproximación que

$$V_{bobina} \approx -\frac{d\phi_{bobina}}{dt} \propto \frac{di}{dt}. \quad (6.6)$$

Es decir, el voltaje de la bobina es proporcional a la aceleración que experimenta la superficie conductora [78], lo cual se obtiene de manera directa al sustituir la ecuación (6.4) en (6.6)

$$V_{bobina} \propto \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (6.7)$$

La superficie conductora oscila armónicamente con una frecuencia angular,  $\omega$ , cuya corriente eléctrica en la bobina es  $i \propto \omega^2 z$ . Es importante, hacer la salvedad, que el funcionamiento descrito para el EMAT detector corresponde a metales no ferromagnéticos [79].

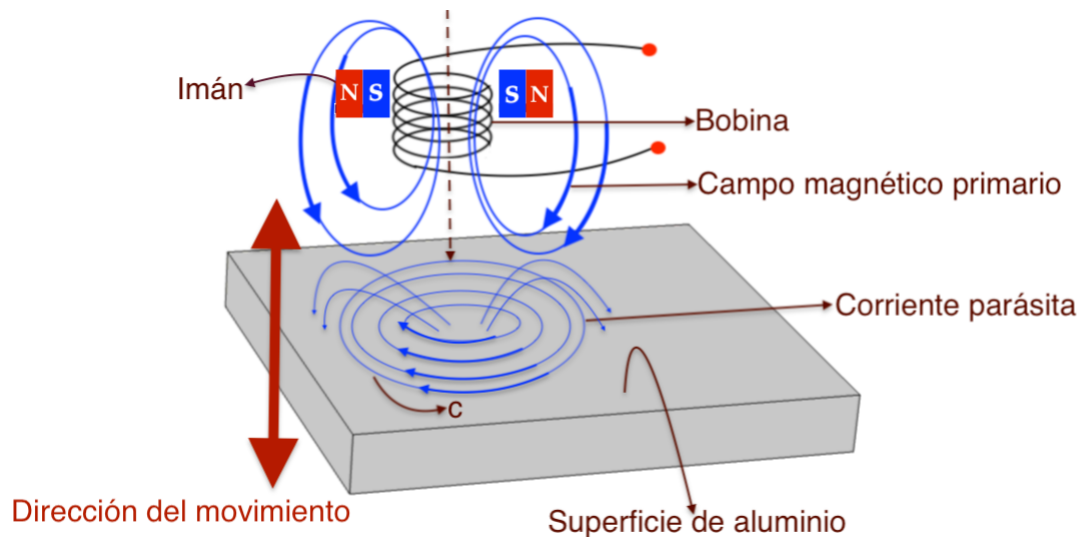


Figura 6.3: Ilustración del Electromagnetic Acoustic Transducer (EMAT) como detector.

Para la medición del espectro de frecuencia usamos como excitador un EMAT. En este caso el dispositivo es alimentado por un voltaje alterno externo a la bobina cuya corriente circulante genera un campo magnético alterno el cual ocasiona corrientes parásitas en la superficie conductora. Debido a la fuerza de Lorentz los electrones asociados a la corriente parásita experimentan una fuerza ocasionada por el campo magnético  $B$ . Esta fuerza perpendicular a la superficie conductora, es proporcional a  $v_e \times B$ , donde  $v_e$  indica la velocidad de los electrones y  $B_s$  la componente del campo magnético, paralela a la superficie conductora. Por tanto, los electrones experimentan una fuerza aplicada en la dirección perpendicular a  $v_e$ , dando como resultado una fuerza oscilante que se propaga en la dirección paralela al eje neutro de la bobina [50, 78].

La sección transversal rectangular facilita el estudio experimental en comparación con la sección transversal circular. En ondas flexionales la sección circular ocasiona que las frecuencia de los modos duros y blandos sean muy similares. En efecto, deberían ser idénticas, si la sección fuese una circunferencia perfecta. En este sentido, la geometría rectangular nos permite evadir dicha simetría y nos facilita la disposición de un transductor piezoeléctrico, el cual implementamos para la medición de las amplitudes de onda, dado que el funcionamiento de este dispositivo no genera campos magnéticos que pueden ser fácilmente percibidos por el EMAT detector, en contraste con EMAT excitador cuya bobina excitadora genera campos magnéticos que obstruyen las mediciones de la amplitud de onda.

## 6.3 Espectros de frecuencia experimentales

Aquí mostramos los espectros experimentales relacionados con la medición de los parámetros elásticos, correspondientes a la viga de sección transversal rectangular con la cual efectuamos el estudio experimental de los fenómenos análogos a los cruces evitados y las escaleras de Wannier-Stark. Estudiados de forma teórica y experimental en los capítulos 3 y 5, respectivamente.

### 6.3.1 Parámetros elásticos

Para la medición del modulo de Young,  $E$ , excitamos una viga de sección transversal rectangular con ondas compresionales y graficamos las frecuencias de resonancia, correspondientes a los picos mostrados en el panel inferior de la Fig. 6.4, como función del número de modo,  $j$ , lo cual nos da una recta, ver Fig. 6.5, cuya pendiente nos proporciona la velocidad de propagación compresional,  $C_{cp}$ , para la aleación de aluminio. En términos matemáticos tenemos:

$$\frac{f_{cp}}{j} = \frac{C_{cp}}{2L} \quad \text{y} \quad C_{cp} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (6.8)$$

$$\Rightarrow E = \rho C_{cp}^2.$$

Aquí el subíndice  $cp$  etiqueta a las ondas compresionales y  $L$  indica la longitud de la

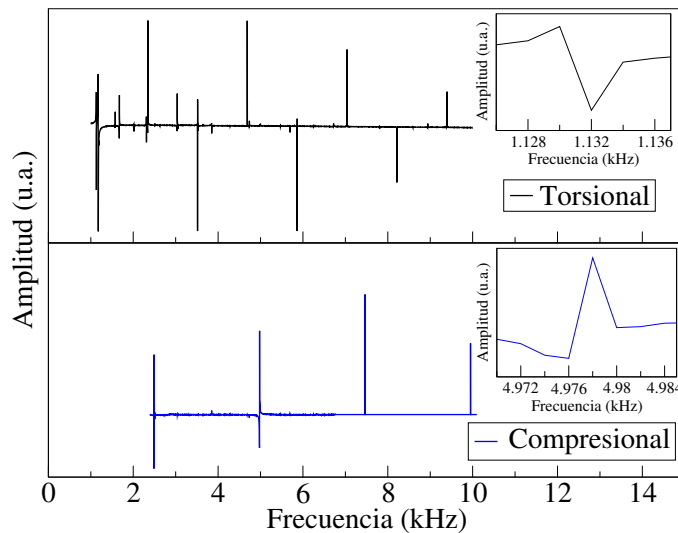


Figura 6.4: Espectros de frecuencias experimentales, para una viga de sección transversal rectangular uniforme. En el panel superior se muestran las frecuencias de resonancia torsionales, en la ampliación se muestra el primer modo de vibración. En el panel inferior se muestran las frecuencias resonantes compresionales y una ampliación para el segundo modo de vibración.

viga. El mismo procedimiento aplica para la medición del modulo de corte  $G$ , solo

que ahora se debe graficar las frecuencias de resonancia torsionales, correspondientes a los picos mostrados en el panel superior de la Fig. 6.4, como función del número de modo  $j$ . El resultado es nuevamente una recta, cuya pendiente,

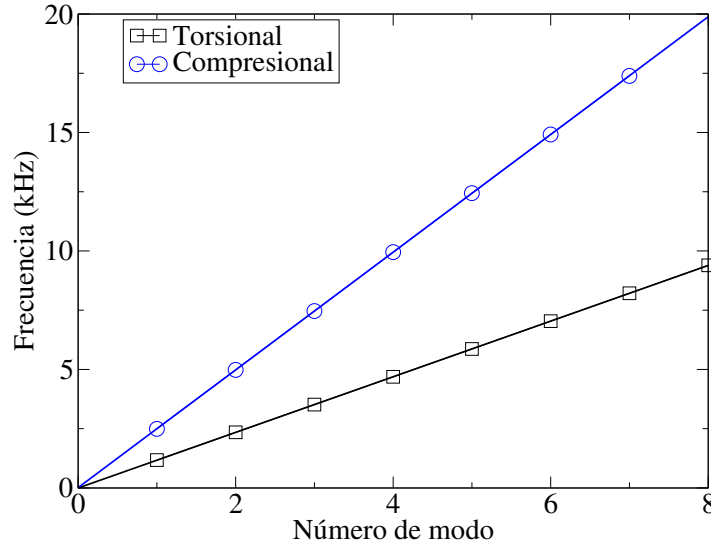


Figura 6.5: Gráfica de las frecuencias resonantes para los modos de vibración torsionales y compresionales, capturadas del espectro de frecuencias experimental. Fig. 6.4. Las líneas continuas indican un ajuste numérico, mientras los círculos y cuadrados corresponden a las mediciones experimentales.

$$\frac{f_t}{j} = \frac{C_t}{2L}, \quad (6.9)$$

menos inclinada respecto a la pendiente que exhiben las ondas compresionales, nos proporciona la velocidad torsional con la cual calculamos el módulo de corte,

$$G = \frac{\rho I C_t^2}{\alpha}, \quad (6.10)$$

con

$$I = \frac{hw^3 + wh^3}{12}, \quad \alpha = \sum_{m=0} \sum_{p=0} \frac{1}{(2m+1)^2(2p+1)^2} \frac{(hw)^3}{w^2(2m+1)^2 + h^2(2p+1)^2} \quad (6.11)$$

donde  $I$ ,  $h$  y  $w$ , corresponden al momento de inercia, el ancho y la altura de la viga, respectivamente. La densidad de la aleación de aluminio,  $\rho$ , también es medida en el laboratorio y su valor está registrado en la Tabla. 6.2 donde reposan los demás parámetros

$L$	1 m
$h$	0.0125 m
$w$	0.0253 m
$\rho$	2690.64747 kg/m <sup>3</sup>
$I$	$2.09868 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
$\alpha$	$1.13596 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
$C_c$	4967.8 m/s
$C_T$	2348.2 m/s
$E$	66.40258 GPa
$G$	27.4096 GPa
$\kappa$	0.861

Tabla 6.2: Parámetros para una viga con sección transversal uniforme rectangular

### 6.3.2 Análogos: Cruces evitados y EWS

Con la viga caracterizada maquinamos los sistemas que nos permitieron observar el análogo del fenómeno de cruces evitados y las EWS. Para el análogo de cruces evitados maquinamos tres vigas con el objeto de medir el espectro de frecuencias antes, cerca y después del primer «cruce». En la Fig. 6.6 mostramos las dos frecuencias asociadas a los puntos B y E de la Fig.3.4. Las líneas verticales de color verde corresponden al valor teórico predicho por el MMT y coinciden en un buen grado con los resultados experimentales, picos de las curvas de color azul. En las mediciones experimentales para el espectro de frecuencias y las amplitudes de onda de este sistema empleamos el excitador piezoeléctrico el cual arroja excelentes resultados.

Por otro lado, presentamos el espectro de frecuencias experimental para el sistema análogo a las EWS. En la Fig. 6.7 se muestran seis frecuencias resonantes para la primera escalera de Wannier-Stark, localizada en la tercera banda. La línea vertical discontinua corresponde al resultado teórico calculado con TVTE, el cual está muy cercano de la medición experimental y es consistente con el error relativo presentado en el capítulo anterior, en la Fig. 5.11, donde el menor error relativo corresponde al trigésimo tercer modo de vibración. Es importante mencionar que el diminuto ancho de longitud de la muesca,  $w = 2 \text{ mm}$ , exige una alineación de la viga casi perfecta, y por tanto, que la bobina del EMAT detector sea de dimensiones pequeñas y un buen número de vueltas que garanticen una sensibilidad óptima. En este sentido, la alineación de la viga resulta algo complicada por lo que el espectro de frecuencias, en este sistema, se midió en intervalos de longitud comprendidos por tres o cuatro barras con sus respectivas muescas. Por la razón expuesta en la Fig. 6.7 presentamos los picos resonantes en paneles diferentes. Además, que debido a la localización de las ondas es necesario cambiar de posición tanto el detector como el excitador, razón por la cual se deben medir diferentes espectros en diferentes intervalos de frecuencia.

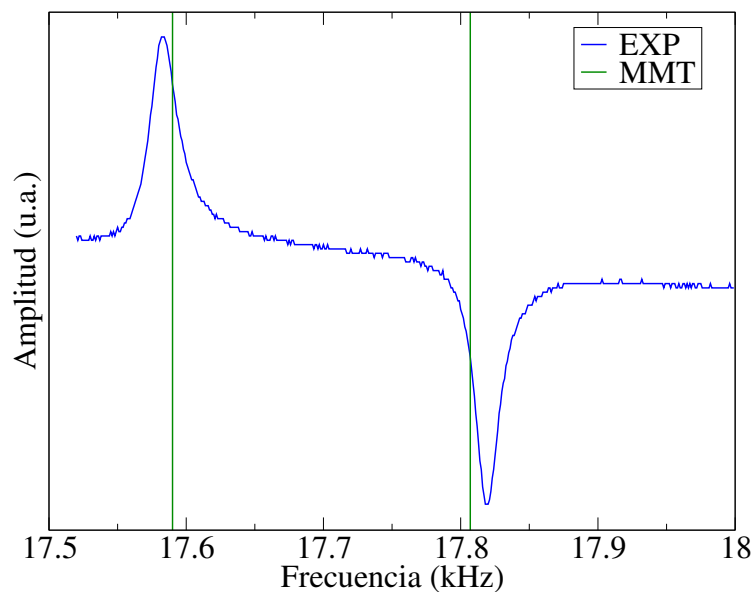


Figura 6.6: Espectro de frecuencias experimental, para el sistema análogo al fenómeno de cruces evitados, estudiado en el capítulo 3. La curva de color azul corresponde al estudio experimental y las líneas verticales corresponden al estudio teórico desarrollado con el MMT.

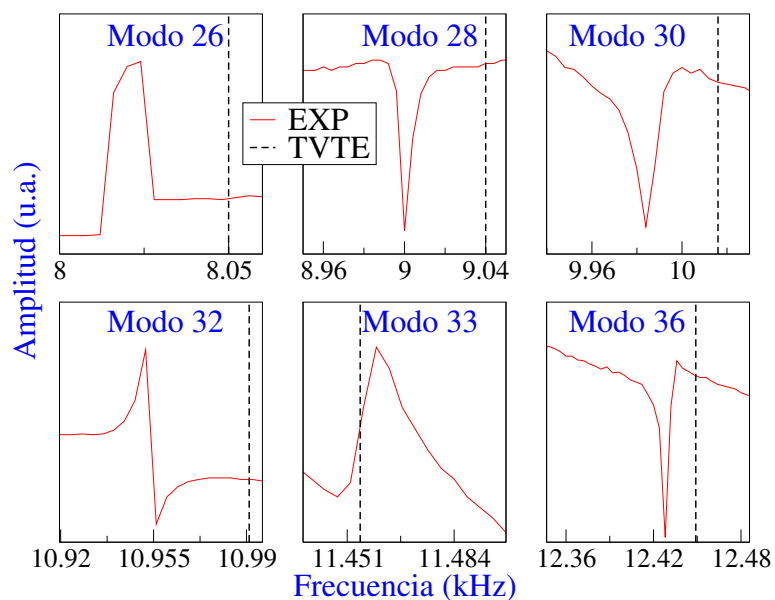


Figura 6.7: Espectro de frecuencias flexional, para el sistema análogo a las EWS, estudiado en el capítulo anterior. Las curvas rojas corresponden a las mediciones experimentales y las líneas discontinuas a las predicciones teóricas proporcionadas por la TVTE

# Capítulo 7

## Conclusiones

El comportamiento ondulatorio de los fenómenos cuánticos, gobernados por la ecuación de onda de Schrödinger, habilita la opción de desarrollar sistemas análogos que admitan la observación de ciertos fenómenos cuánticos en el régimen de la física clásica, sin perder de vista que la palabra análogo conlleva a admitir que el fenómeno observado en el régimen de la física clásica no es idéntico al observado a escalas cuánticas. En efecto, en sistemas elásticos las ondas torsionales y compresionales se rigen por la ecuación de onda al igual que los sistemas cuánticos no relativistas. Sin embargo, en el régimen de la física cuántica los eigenvalores determinan el espectro de energía, mientras en sistemas elásticos, incluyendo las vibraciones flexionales, los eigenvalores corresponden a las frecuencias naturales.

Utilizando las ondas torsionales estudiamos un sistema análogo al de dos niveles cuánticos 1D acoplados [56]. Este sistema tan sencillo y fácil de reproducir, nos permitió demostrar que el teorema para sistemas cuánticos 1D propuesto por Von Neumann y Wigner [57], también aplica para sistemas clásicos. En efecto, El tratamiento matemático para las eigenfrecuencias asociadas al análogo de la repulsión de niveles estudiadas en este trabajo y que en este momento se encuentra en proceso de publicación, ponen de manifiesto la gran similitud con las expresiones matemáticas de las dos energías asociadas al sistema cuántico de dos niveles [56, 57].

Hemos agregado otro análogo de las EWS, materializado en una segunda publicación [73]. Esta vez y a diferencia de los sistemas mecánico cuánticos y clásicos gobernados por la ecuación de onda. El sistema unidimensional, estudiado aquí, es gobernado por dos ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden. Como resultado de este acoplamiento la primera EWS, aparece en la tercera banda, en contraste con las EWS observadas en ondas torsionales, donde la primera escalera tiene lugar en la segunda banda. En la realización de este análogo el modelo de viga independiente, obtenido por medio de ajustes numéricos, es medular para la construcción de la estructura que admita el análogo de las EWS o cualquier otra estructura 1D que se pretenda estudiar. Es importante reconocer que las predicciones proporcionadas por el MVI son afectadas por la longitud de la muesca. No obstante,

existe un intervalo de longitudes de la muesca en el que los resultados predichos por el MVI son recuperados.

# Apéndice A

## Método de la Matriz de Transferencia en ondas torsionales

### A.1 Espectro de frecuencia

En la sección 2.1 se obtuvo la solución a la ecuación de movimiento que gobierna las ondas torsionales en una viga con sección transversal uniforme. En una viga con estructura es necesario escribir dicha solución en términos de coordenadas locales, es decir,

$$\phi_j(z) = A_j e^{ik_j(z-z_{j-1})} + B_j e^{-ik_j(z-z_{j-1})}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{A.1})$$

donde el subíndice  $j$  especifica el número de nodos que exhibe la amplitud de onda en cada uno de los cuerpos que conforman la viga. Para la aplicación del MMT exigimos continuidad en la  $j$ -ésima interfaz tanto en la función  $\phi_j(z)$  como en la torca  $S_j^2 \phi_j'(z)$ ,

$$\begin{aligned} \phi_j(z_j) &= \phi_{j+1}(z_j) \\ A_j e^{ik_j l_j} + B_j e^{-ik_j l_j} &= A_{j+1} + B_{j+1} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} S_j^2 \phi_j'(z_j) &= S_{j+1}^2 \phi_{j+1}'(z_j) \\ k_j S_j^2 (A_j e^{ik_j l_j} - B_j e^{-ik_j l_j}) &= k_{j+1} S_{j+1}^2 (A_{j+1} - B_{j+1}). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Escribiendo de forma matricial las ecuaciones (A.2) y (A.3)

$$\begin{pmatrix} e^{ik_j l_j} & e^{-ik_j l_j} \\ k_j S_j^2 e^{ik_j l_j} & -k_j S_j^2 e^{-ik_j l_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_{j+1} S_{j+1}^2 & -k_{j+1} S_{j+1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

y despejando la matriz columna del lado derecho, se obtiene

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} [1 + \Gamma_j] e^{ik_j l_j} & [1 - \Gamma_j] e^{-ik_j l_j} \\ [1 - \Gamma_j] e^{ik_j l_j} & [1 + \Gamma_j] e^{-ik_j l_j} \end{pmatrix}}_{\mathbb{M}_{j \rightarrow j+1}} \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

donde por comodidad se ha definido

$$l_j = z_j - z_{j-1} \quad y \quad \Gamma_j = \frac{k_j S_j^2}{k_{j+1} S_{j+1}^2}. \quad (\text{A.6})$$

La ecuación (A.5) nos proporciona las amplitudes de vibración,  $A_{j+1}$  y  $B_{j+1}$ , para el  $j + 1$ -ésimo cuerpo en términos de las amplitudes del  $j$ -ésimo cuerpo. La matriz  $\mathbb{M}_{j \rightarrow j+1}$  de la ecuación (A.5) debe ser multiplicada el número de veces que sea necesario establecer continuidad y de este modo se obtiene la Matriz de Transferencia

$$\begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = \mathbb{T} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

cuya información geométrica de la estructura unidimensional que se pretenda estudiar está codificada en las variables  $l_j$  y  $S_j$ .

La Matriz de Transferencia para vibraciones torsionales exhibe dos propiedades importantes,

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{22} &= \mathbb{T}_{11}^* \\ \mathbb{T}_{21} &= \mathbb{T}_{12}^* \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

que se pueden observar en la matriz  $M_{j \rightarrow j+1}$  de la ecuación (A.5) cuya estructura es independiente del producto entre las matrices que se identifican con cada una de las interfaces en las que se establece continuidad. Las propiedades (A.8) nos permiten escribir las dos ecuaciones que arroja la  $\mathbb{T}$  en términos de dos elementos matriciales

$$\begin{aligned} A_N &= A_1 \mathbb{T}_{11} + B_1 \mathbb{T}_{12} \\ B_N &= A_1 \mathbb{T}_{12}^* + B_1 \mathbb{T}_{11}^*. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Adicionalmente la aplicación de las condiciones de frontera de extremos libres nos da dos ecuaciones, ver subsección 2.1.1,

$$\begin{aligned} A_1 - B_1 &= 0 \\ A_N e^{ik_N l_N} - B_N e^{-ik_N l_N} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

que junto con la información de las ecuaciones (A.9), constituyen un sistema de ecuaciones homogéneo, cuya solución será no trivial si el determinante que arroja el espectro de frecuencias, raíces  $k$ , es igual a cero,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \mathbb{T}_{11} e^{ik_N l_N} - \mathbb{T}_{12}^* e^{-ik_N l_N} & \mathbb{T}_{12} e^{ik_N l_N} - \mathbb{T}_{11}^* e^{-ik_N l_N} \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Eigenfunciones

Las eigenfunciones se obtienen a partir de la superposición de las amplitudes de onda en cada uno de los cuerpos que conforman la viga, es decir,

$$\Phi_j^J(z) = \sum_{j=1}^N \phi_j(z), \quad (\text{A.12})$$

donde  $\phi_j(z)$  corresponde a la solución de la ecuación de movimiento para vibraciones torsionales, ecuación (A.1), el superíndice  $J$  etiqueta el número de modo en toda la viga con estructura. Las propiedades de la Matriz de Transferencia y el resultado obtenido de la imposición de las condiciones de frontera de extremos libres en  $z = 0$ , nos permiten escribir la ecuación (A.1) en términos de dos elementos matriciales y un solo coeficiente, respectivamente. Como se demostrará en las siguientes líneas.

Para la obtención de las eigenfunciones en cada uno de los cuerpos es primordial el cálculo de las amplitudes,  $A_{j+1}$  y  $B_{j+1}$ , en cada uno de los cuerpos que componen la estructura. Tal información, es proporcionada por la ecuación (A.5) donde se observa que dichas amplitudes siempre están en función de las amplitudes del extremo inicial de la viga,  $A_1$  y  $B_1$ , que además resultan ser idénticas bajo la imposición de condiciones de frontera de extremos libres. Por tanto, la ecuación (A.5) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} A_{j+1} &= A_1 \mathbb{M}_{11} + A_1 \mathbb{M}_{12} \\ B_{j+1} &= A_1 \mathbb{M}_{12}^* + A_1 \mathbb{M}_{11}^*. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

En virtud de que las amplitud  $A_{j+1}$  es el complejo conjugado de la amplitud  $B_{j+1}$ ,

$$\begin{aligned} Re[A_{j+1}] &= Re[B_{j+1}] \\ Im[A_{j+1}] &= -Im[B_{j+1}], \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

La ecuación (A.1) puede ser escrita en términos de una sola amplitud, es decir,

$$\phi_j(z) = 2Re[A_j] \cos[k(z - z_{j-1})] + 2iIm[A_j] \sin[k(z - z_{j-1})]. \quad (\text{A.15})$$

Lo cual optimiza el análisis numérico y matemático, pues para la obtención de las eigenfunciones basta con calcular solo un coeficiente y dos de los elementos matriciales de la matriz  $\mathbb{M}$  o la matriz  $\mathbb{T}$  si se captura la amplitud del último cuerpo que conforme la estructura.

# Apéndice B

## Viga con sección transversal uniforme usando la teoría de Timoshenko-Ehrenfest

### B.1 Ecuaciones desacopladas

Como se demostró en la sección 4.1 las vibraciones flexionales se rigen por dos ecuaciones acopladas en los desplazamientos transversal  $\xi(z, t)$  y angular  $\Psi(z, t)$ ,

$$G\kappa \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$GS\kappa \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \Psi \right) + EI \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \rho I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Si se desacoplan los desplazamientos  $\xi(z, t)$  y  $\Psi(z, t)$  se obtienen dos ecuaciones diferenciales de cuarto orden. Entonces, despejando  $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$  y  $\frac{\partial \xi}{\partial z}$  de las ecuaciones (B.1) y (B.2), respectivamente, es decir,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\rho}{G\kappa} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \Psi - \frac{EI}{GS\kappa} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\rho I}{GS\kappa} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (\text{B.4})$$

calculando las dos primeras derivadas espaciales y la segunda derivada temporal de la ecuación (B.3), se obtiene, respectivamente

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} - \frac{\rho}{G\kappa} \frac{\partial^3 \xi}{\partial z \partial t^2} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} = \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\rho}{G\kappa} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial t^2 \partial z} = \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^2 \partial z^2} - \frac{\rho}{G\kappa} \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4}. \quad (\text{B.7})$$

Aplicando el mismo procedimiento a la ecuación (B.4), obtenemos

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{EI}{GS\kappa} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} + \frac{\rho I}{GS\kappa} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z \partial t^2} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{EI}{GS\kappa} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4} + \frac{\rho I}{GS\kappa} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^2 \partial t^2} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial t^2 \partial z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{EI}{GS\kappa} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial t^2 \partial z^2} + \frac{\rho I}{GS\kappa} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial t^4} \quad (\text{B.10})$$

Ahora, por un lado, en la ecuación (B.8) sustituimos las ecuaciones (B.3), (B.5) y (B.7). Agrupando términos y dividiendo entre  $\rho S$ , obtenemos la ecuación desacoplada para el desplazamiento transversal,

$$\boxed{\frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{I}{A} \left(1 + \frac{E}{G\kappa}\right) \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\rho I}{GS\kappa} \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4} = 0}. \quad (\text{B.11})$$

Por otro lado, sustituyendo las ecuaciones (B.9) y (B.10) en la ecuación (B.5), simplificando y dividiendo entre  $\rho S$ , obtenemos la ecuación que describe desplazamiento angular

$$\boxed{\frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^4} - \frac{I}{A} \left(1 + \frac{E}{G\kappa}\right) \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{\rho I}{GS\kappa} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial t^4} = 0}. \quad (\text{B.12})$$

## B.2 Determinante de eigenfrecuencias

Iniciamos calculando las primeras tres derivadas de la solución a la ecuación diferencial desacoplada de Timoshenko-Ehrenfest, para el desplazamiento transversal, es decir

$$\begin{aligned} \chi(z) &= A_1 \sinh(q_1^+ z) + A_2 \cosh(q_1^+ z) + A_3 \sin(q_3^+ z) + A_4 \cos(q_3^+ z) \\ \chi'(z) &= q_1^+ [A_1 \cosh(q_1^+ z) + A_2 \sinh(q_1^+ z)] + q_3^+ [A_3 \cos(q_3^+ z) - A_4 \sin(q_3^+ z)] \\ \chi''(z) &= q_1^{+2} [A_1 \sinh(q_1^+ z) + A_2 \cosh(q_1^+ z)] - q_3^{+2} [A_3 \sin(q_3^+ z) + A_4 \cos(q_3^+ z)] \\ \chi'''(z) &= q_1^{+3} [A_1 \cosh(q_1^+ z) + A_2 \sinh(q_1^+ z)] - q_3^{+3} [A_3 \cos(q_3^+ z) - A_4 \sin(q_3^+ z)]. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Recordando que las condiciones de frontera de extremos libres, están dadas como,

$$\left[ \chi''(z) + \frac{\rho \omega^2}{\kappa G} \chi(z) \right]_{z=0,L} = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\left[ \chi'''(z) + \frac{\rho \omega^2}{M_r} \chi'(z) \right]_{z=0,L} = 0, \quad (\text{B.15})$$

sustituyendo las derivadas correspondientes y evaluando en los extremos de la viga, obtenemos las siguientes cuatro ecuaciones,

$$A_2\Lambda_1 + A_4\Lambda_2 = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\Lambda_1[A_1 \sinh(q_1^+ L) + A_2 \cosh(q_1^+ L)] + \Lambda_2[A_3 \sin(q_3^+ L) + A_4 \cos(q_3^+ L)] = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$A_1\Lambda_3 + A_3\Lambda_4 = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$\Lambda_3[A_1 \cosh(q_1^+ L) + A_2 \sinh(q_1^+ L)] + \Lambda_4[A_3 \cos(q_3^+ L) - A_4 \sin(q_3^+ L)] = 0, \quad (\text{B.19})$$

cuyo determinante, ecuación B.20, nos proporciona las eigenfrecuencias para una viga de sección transversal uniforme,

$$\begin{vmatrix} 0 & \Lambda_1 & 0 & \Lambda_2 \\ \Lambda_3 & 0 & \Lambda_4 & 0 \\ \Lambda_1 \sinh(q_1^+ L) & \Lambda_1 \cosh(q_1^+ L) & \Lambda_2 \sin(q_3^+ L) & \Lambda_2 \cos(q_3^+ L) \\ \Lambda_3 \cosh(q_1^+ L) & \Lambda_3 \sinh(q_1^+ L) & \Lambda_4 \cos(q_3^+ L) & -\Lambda_4 \sin(q_3^+ L) \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{B.20})$$

donde, por comodidad hemos definido

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= q_1^{+2} + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G}, & \Lambda_2 &= -q_3^{+2} + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G} \\ \Lambda_3 &= q_1^{+3} + \frac{\rho\omega^2}{M_r} q_1^+, & \Lambda_4 &= -q_3^{+3} + \frac{\rho\omega^2}{M_r} q_3^+. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

### B.3 Coeficientes $A_\mu$ del desplazamiento transversal

Las condiciones de frontera nos permiten determinar el valor de los cuatro coeficientes  $A_\mu$ . Despejando de las ecuaciones (B.16) y (B.18) a los coeficientes  $A_4$  y  $A_3$ , obtenemos, respectivamente,

$$A_4 = -\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} A_2 \quad (\text{B.22})$$

$$A_3 = -\frac{\Lambda_3}{\Lambda_4} A_1 \quad (\text{B.23})$$

Ahora, de la ecuación (B.17), despejamos el coeficiente  $A_2$ , obteniendo,

$$A_2 = \frac{\Lambda_1 A_1 \sinh(q_1^+ L) + \Lambda_2 A_3 \sin(q_3^+ L)}{\Lambda_1 [\cos(q_3^+ L) - \cosh(q_1^+ L)]} \quad (\text{B.24})$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (B.23) en la última ecuación y fijando el valor del coeficiente  $A_1$  se obtienen los tres coeficientes restantes para el desplazamiento transversal.

# Apéndice C

## Método de la Matriz de Transferencia en ondas flexionales

En la Teoría de Vigas de Timoshenko-Ehrenfest (TVTE) para cualquier viga con estructura se exige continuidad en la  $j$ -ésima interfaz, en los desplazamientos transversal y angular, el momento de flexión y la fuerza de corte. Estas cuatro condiciones de continuidad bajo la imposición de modos normales adoptan la forma

$$\chi_j(z_j) = \chi_{j+1}(z_j) \quad (\text{C.1})$$

$$\psi_j(z_j) = \psi_{j+1}(z_j) \quad (\text{C.2})$$

$$I_j \psi'_j(z_j) = I_{j+1} \psi'_{j+1}(z_j) \quad (\text{C.3})$$

$$S_j[\chi'(z_j) - \psi_j(z_j)] = S_{j+1}[\chi'_{j+1}(z_j) - \psi_{j+1}(z_j)], \quad (\text{C.4})$$

cuyos desplazamientos transversal y angular, evaluados en la  $j$ -ésima interfaz, en términos de coordenadas locales están dados, como se sigue,

$$\chi_j(z_j) = A_{1,j} \sinh(q_{1,j}^+ l_j) + A_{2,j} \cosh(q_{1,j}^+ l_j) + A_{3,j} \sin(q_{3,j}^+ l_j) + A_{4,j} \cos(q_{3,j}^+ l_j) \quad (\text{C.5})$$

$$\psi_j(z_j) = \bar{A}_{1,j} \sinh(q_{1,j}^+ l_j) + \bar{A}_{2,j} \cosh(q_{1,j}^+ l_j) + \bar{A}_{3,j} \sin(q_{3,j}^+ l_j) + \bar{A}_{4,j} \cos(q_{3,j}^+ l_j), \quad (\text{C.6})$$

con

$$l_j = z_j - z_{j-1} \quad \text{y} \quad z_{j-1} < z < z_j$$

### C.1 Condiciones de continuidad

#### C.1.1 Procedimiento 1

Partiendo de las dos ecuaciones acopladas de Timoshenko-Ehrenfest, bajo la imposición de modos normales,

$$G\kappa(\psi'_j(z) - \chi(z)) - \rho\omega^2\chi_j(z) = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$GS_j\kappa(\chi'_j(z) - \psi_j(z)) + E_j I_j \psi''_j(z) + \rho I_j \omega^2 \psi_j(z) = 0. \quad (\text{C.8})$$

Despejando  $\psi'_j(z)$  de la ecuación (C.7), obtenemos

$$\psi'_j(z) = \chi''_j(z) + \frac{\rho\omega^2}{G\kappa} \chi_j(z). \quad (\text{C.9})$$

Ahora, derivando la última expresión, sustituyendo este resultado en la ecuación (C.8) y despejando a  $\psi_j(z)$ , obtenemos

$$\psi_j(z) = \frac{E_j I_j}{GS_j\kappa - \rho I_j \omega^2} \left[ \left( \frac{\rho\omega^2}{G\kappa} + \frac{GS_j\kappa}{E_j I_j} \right) \chi'_j(z) + \chi''_j(z) \right]. \quad (\text{C.10})$$

Sustituyendo los resultados de las últimas dos ecuaciones en las condiciones de continuidad, obtenemos el conjunto de condiciones en términos de la solución  $\chi_j(z)$ , es decir,

$$\begin{aligned} \chi_j(z_j) &= \chi_{j+1}(z_j) \\ \Pi_j [\sigma_j \chi'_j(z_j) + \chi''_j(z_j)] &= \Pi_{j+1} [\sigma_{j+1} \chi'_{j+1}(z_j) + \chi''_{j+1}(z_j)] \\ I_j \left[ \frac{\rho\omega^2}{G\kappa S_j} \chi_j(z_j) + \chi''_j(z_j) \right] &= I_{j+1} \left[ \frac{\rho\omega^2}{G\kappa S_{j+1}} \chi_{j+1}(z_j) + \chi''_{j+1}(z_j) \right] \\ S_j \Pi_j [\eta_j \chi'_j(z_j) + \chi''_j(z_j)] &= S_{j+1} \Pi_{j+1} [\eta_{j+1} \chi'_{j+1}(z_j) + \chi''_{j+1}(z_j)] \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Con

$$\Pi_j = \frac{I_j}{G\kappa S_j - \rho\omega^2 I_j}, \quad \sigma_j = \frac{G\kappa S_j}{EI_j} + \frac{\rho\omega^2}{G\kappa}, \quad \eta_j = \frac{\rho\omega^2}{M_r} \quad (\text{C.12})$$

### C.1.2 Procedimiento 2

Siguiendo un razonamiento similar al presentado en [74]. Escribimos la ecuación (C.8), de modo que al sustituir  $\psi''(z)$ , los coeficientes  $A_\mu$  y  $\bar{A}_\mu$  se puedan relacionar, es decir,

$$(\rho I_j \omega^2 - GS_j \kappa) \psi_j(z) + E_j I_j \psi''_j(z) = -GS_j \kappa \chi'_j(z) \quad (\text{C.13})$$

Sustituyendo  $\psi(z)$ ,  $\chi'(z)$ ,  $\psi''(z)$  y relacionando los términos, obtenemos

$$\bar{A}_{1,j} = \zeta_j A_{2,j}, \quad \bar{A}_{2,j} = \zeta_j A_{1,j}, \quad \bar{A}_{3,j} = -\beta_j A_{4,j}, \quad \bar{A}_{4,j} = \beta_j A_{3,j}, \quad (\text{C.14})$$

con

$$\zeta_j = \frac{GS_j \kappa q_{1,j}^+}{GS_j \kappa - \rho I_j \omega^2 - EI_j q_{1,j}^+}, \quad \beta_j = \frac{GS_j \kappa q_{3,j}^+}{GS_j \kappa - \rho I_j \omega^2 + EI_j q_{3,j}^+} \quad (\text{C.15})$$

Finalmente, usando las relaciones (C.14) las condiciones de continuidad pueden ser escritas en términos de un solo desplazamiento.

## C.2 Matriz de Transferencia

Escribiendo las condiciones de continuidad de forma explícita, usando cualquiera de los dos métodos, obtenemos una matriz de dimensión 4 de cada lado del igual. La matriz del lado izquierdo del igual  $\mathbf{B}(l_j)$ , corresponde al cuerpo del lado izquierdo de la  $j$ -ésima interfaz, mientras la matriz del lado derecho del igual  $\mathbf{B}(l_{j+1}) = \mathbf{B}(0)$  está asociada al cuerpo del lado derecho de la interfaz. Cada una de estas matrices está multiplicada por sus respectivos coeficientes, es decir,

$$\mathbf{B}(l_j)\mathbf{w}_j = \mathbf{B}(0)\mathbf{w}_{j+1}, \quad \mathbf{w}_j = (A_{1,j}, A_{3,j}, A_{3,j}, A_{4,j})^T \quad (\text{C.16})$$

Despejando la matriz columna  $\mathbf{w}_{j+1}$ , obtenemos

$$\mathbf{w}_{j+1} = \underbrace{\mathbf{B}^{-1}(0)\mathbf{B}(l_j)}_{\mathcal{M}_{j \rightarrow j+1}} \mathbf{w}_j. \quad (\text{C.17})$$

Donde la matriz

$$\mathcal{M}_{j \rightarrow j+1} = \begin{pmatrix} \frac{P_{1,j}}{d_{1,j}} \cosh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{1,j}}{d_{1,j}} \sinh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{2,j}}{d_{1,j}} \cos(q_{3,j}^+ l_j) & -\frac{P_{2,j}}{d_{1,j}} \sin(q_{3,j}^+ l_j) \\ \frac{P_{3,j}}{d_{2,j}} \sinh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{3,j}}{d_{2,j}} \cosh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{4,j}}{d_{2,j}} \sin(q_{3,j}^+ l_j) & \frac{P_{4,j}}{d_{2,j}} \cos(q_{3,j}^+ l_j) \\ \frac{P_{5,j}}{d_{1,j}} \cosh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{5,j}}{d_{1,j}} \sinh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{6,j}}{d_{1,j}} \cos(q_{3,j}^+ l_j) & -\frac{P_{6,j}}{d_{1,j}} \sin(q_{3,j}^+ l_j) \\ \frac{P_{7,j}}{d_{2,j}} \sinh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{7,j}}{d_{2,j}} \cosh(q_{1,j}^+ l_j) & \frac{P_{8,j}}{d_{2,j}} \sin(q_{3,j}^+ l_j) & \frac{P_{8,j}}{d_{2,j}} \cos(q_{3,j}^+ l_j) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.18})$$

corresponde a la forma de la matriz de transferencia en vibraciones flexionales, con

$$\begin{aligned} P_{1,j} &= \beta_{j+1} (S_{j+1} - S_j) \zeta_j + \beta_{j+1} q_{1,j}^+ S_j - \zeta_j q_{3,j+1}^+ S_{j+1} \\ P_{2,j} &= \beta_{j+1} (S_{j+1} - S_j) \beta_j + \beta_{j+1} q_{3,j}^+ S_j - \beta_j q_{3,j+1}^+ S_{j+1} \\ P_{3,j} &= -\beta_{j+1} I_{j+1} q_{3,j+1}^+ - \zeta_j I_j q_{1,j}^+ \\ P_{4,j} &= -\beta_{j+1} I_{j+1} q_{3,j+1}^+ + \beta_j I_j q_{3,j}^+ \\ P_{5,j} &= -\zeta_{j+1} (S_{j+1} - S_j) \zeta_j - \zeta_{j+1} q_{1,j}^+ S_j + \zeta_j q_{1,j+1}^+ S_{j+1} \\ P_{6,j} &= -\zeta_{j+1} (S_{j+1} - S_j) \beta_j - \zeta_{j+1} q_{3,j}^+ S_j + \beta_j q_{1,j+1}^+ S_{j+1} \\ P_{7,j} &= -\zeta_{j+1} I_{j+1} q_{1,j+1}^+ + \zeta_j I_j q_{1,j}^+ \\ P_{8,j} &= -\zeta_{j+1} I_{j+1} q_{1,j+1}^+ - \beta_j I_j q_{3,j}^+ \\ d_{1,j} &= S_{j+1} (\beta_{j+1} q_{1,j+1}^+ - \zeta_{j+1} q_{3,j+1}^+) \\ d_{2,j} &= -I_{j+1} (\beta_{j+1} q_{3,j+1}^+ + \zeta_{j+1} q_{1,j+1}^+) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

La matriz  $\mathcal{M}_{j \rightarrow j+1}$  se debe multiplicar  $N - 1$  veces, para conseguir la matriz de transferencia  $\mathcal{T}$ , cuya principal característica es la conexión entre los coeficientes de los extremos de la viga, es decir

$$\begin{pmatrix} A_{1,N} \\ A_{2,N} \\ A_{3,N} \\ A_{4,N} \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ A_{3,1} \\ A_{4,1} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.20})$$

### C.3 Determinante de eigenfrecuencias

Imponiendo condiciones de frontera de extremos libres para una viga de longitud total  $L$  y aplicando el mismo método descrito en el apéndice B.2 obtenemos un conjunto de cuatro ecuaciones,

$$A_{2,1}\Lambda_{1,1} + A_{4,1}\Lambda_{2,1} = 0 \quad (\text{C.21})$$

$$A_{1,1}\Lambda_{3,1} + A_{3,1}\Lambda_{4,1} = 0 \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{aligned} & [A_{1,N} \sinh(q_{1,n}^+ l_N) + A_{2,n} \cosh(q_{1,N}^+ l_N)] \Lambda_{1,N} \\ & + [A_{3,N} \sin(q_{3,N}^+ l_N) + A_{4,N} \cos(q_{3,N}^+ l_N)] \Lambda_{2,N} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

$$\begin{aligned} & [A_{1,N} \cosh(q_{1,N}^+ l_N) + A_{2,n} \sinh(q_{1,N}^+ l_N)] \Lambda_{3,N} \\ & + [A_{3,N} \cos(q_{3,N}^+ l_N) - A_{4,N} \sin(q_{3,N}^+ l_N)] \Lambda_{4,N} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

con

$$l_N = l - z_{N-1}, \quad (\text{C.25})$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,j} &= q_{1,j}^{2+} + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G}, & \Lambda_{2,j} &= -q_{3,j}^{3+} + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G} \\ \Lambda_{3,j} &= q_{1,j}^{3+} + \frac{\rho\omega^2}{M_r} q_{1,j}^+, & \Lambda_{4,j} &= -q_{3,j}^{3+} + \frac{\rho\omega^2}{M_r} q_{3,j}^+. \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Para resolver el sistema de ecuaciones sustituimos la información de los coeficientes  $A_{\mu,N}$ , proporcionada por la ecuación (C.20) en las ecuaciones (C.23) y (C.24), obteniendo

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^4 A_{\mu,1} [\Lambda_{1,N} (\mathcal{T}_{1\mu} \sinh(q_{1,N}^+ l_N) + \mathcal{T}_{2\mu} \cosh(q_{1,N}^+ l_N)) \\ & + \Lambda_{2,N} (\mathcal{T}_{3\mu} \sin(q_{3,N}^+ l_N) + \mathcal{T}_{4\mu} \cos(q_{3,N}^+ l_N))] = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=1}^4 A_{\mu,1} [\Lambda_{3,N} (\mathcal{T}_{1\mu} \cosh(q_{1,N}^+ l_N) + \mathcal{T}_{2\mu} \sinh(q_{1,N}^+ l_N)) \\ & + \Lambda_{4,N} (\mathcal{T}_{3\mu} \cos(q_{3,N}^+ l_N) - \mathcal{T}_{4\mu} \sin(q_{3,N}^+ l_N))] = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Finalmente, las ecuaciones (C.21), (C.22), (C.27) y (C.28) nos proporcionan el determinante de eigenfrecuencias

$$\begin{vmatrix} 0 & \Lambda_{1,1} & 0 & \Lambda_{2,1} \\ \Lambda_{3,1} & 0 & \Lambda_{4,1} & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{C.29})$$

donde

$$\begin{aligned} D_{3\mu} &= A_{\mu,1} [\Lambda_{1,N} (\mathcal{T}_{1\mu} \sinh(q_{1,N}^+ l_N) + \mathcal{T}_{2\mu} \cosh(q_{1,N}^+ l_N)) \\ & + \Lambda_{2,N} (\mathcal{T}_{3\mu} \sin(q_{3,N}^+ l_N) + \mathcal{T}_{4\mu} \cos(q_{3,N}^+ l_N))] \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

$$D_{4\mu} = A_{\mu,1}[\Lambda_{3,N}(\mathcal{T}_{1\mu} \cosh(q_{1,N}^+ l_N) + \mathcal{T}_{2\mu} \sinh(q_{1,N}^+ l_N)) + \Lambda_{4,N}(\mathcal{T}_{3\mu} \cos(q_{3,N}^+ l_N) - \mathcal{T}_{4\mu} \sin(q_{3,N}^+ l_N))]. \quad (\text{C.31})$$

## C.4 Eigenfunciones

Las eigenfunciones se obtienen a partir de la superposición de los desplazamientos transversales  $\chi_j(z)$  en cada uno de los cuerpos que conforman la estructura

$$\hat{\chi}_j^J(z) = \sum_{j=1}^N \chi_j(z). \quad (\text{C.32})$$

Las amplitudes  $A_{\mu,j}$  son proporcionadas por la Matriz de Transferencia y por las condiciones de frontera de extremos libres. De las condiciones de frontera evaluadas en  $z = 0$ , se obtiene

$$A_{3,1} = -\frac{\Lambda_{3,1}}{\Lambda_{4,1}} A_{11} \quad (\text{C.33})$$

$$A_{4,1} = -\frac{\Lambda_{1,1}}{\Lambda_{2,1}} A_{21}. \quad (\text{C.34})$$

Expandiendo la ecuación (C.23) y sustituyendo las ecuaciones (C.33) y (C.34),

$$\begin{aligned} & -A_{1,1} \left[ \Lambda_{1,N} \left( \mathcal{T}_{11} - \frac{\Lambda_{3,1}}{\Lambda_{4,1}} \mathcal{T}_{13} \right) \sinh(q_{1,N}^+ l_N) + \left( \mathcal{T}_{21} - \frac{\Lambda_{3,1}}{\Lambda_{4,1}} \mathcal{T}_{23} \right) \cosh(q_{1,N}^+ l_N) \right. \\ & \quad \left. + \Lambda_{2,N} \left( \mathcal{T}_{31} - \frac{\Lambda_{3,1}}{\Lambda_{4,1}} \mathcal{T}_{33} \right) \sin(q_{3,N}^+ l_N) + \left( \mathcal{T}_{41} - \frac{\Lambda_{3,1}}{\Lambda_{4,1}} \mathcal{T}_{43} \right) \cos(q_{3,N}^+ l_N) \right] \\ & = A_{2,1} \left[ \Lambda_{1,N} \left( \mathcal{T}_{12} - \frac{\Lambda_{1,1}}{\Lambda_{2,1}} \mathcal{T}_{14} \right) \sinh(q_{1,N}^+ l_N) + \left( \mathcal{T}_{22} - \frac{\Lambda_{1,1}}{\Lambda_{2,1}} \mathcal{T}_{24} \right) \cosh(q_{1,N}^+ l_N) \right. \\ & \quad \left. + \Lambda_{2,N} \left( \mathcal{T}_{32} - \frac{\Lambda_{1,1}}{\Lambda_{2,1}} \mathcal{T}_{34} \right) \sin(q_{3,N}^+ l_N) + \left( \mathcal{T}_{42} - \frac{\Lambda_{1,1}}{\Lambda_{2,1}} \mathcal{T}_{44} \right) \cos(q_{3,N}^+ l_N) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Fijando el coeficiente  $A_{1,1}$ , obtenemos la terna restante de los coeficientes asociados al primer cuerpo. El cálculo de los coeficientes  $A_{\mu,j}$  para los desplazamientos transversales en cada uno de los cuerpos, a excepción del cuerpo 1, se reduce a evaluar la matriz  $\mathcal{M}_{j \rightarrow j+1}$  en la interfaz correspondiente y sustituir los valores respectivos de los coeficientes  $A_{\mu,1}$ .

# Bibliografía

- [1] C. Denz, S. Flach and Y. S. Kivshar. *Springer series in optical sciences 150, (Nonlinear in Periodic Structures and Metamaterials)*. Berlin: Springer-Verlag, 2010.
- [2] F. Bloch, “Bemerkung zur Elektronentheorie des Ferromagnetismus und der elektrischen Leitfähigkeit,” *Z. Phys.* **52**, 555 (1929).
- [3] C.F. Hart and D. Emin, “Time evolution of a Bloch in a constant electric field,” *Phys. Rev. B*, **37**, 6100 (1988); J. Zak, “Comment on the existences of the Wannier-Stark ladder,” *Phys. Rev. B*, **43**, 4519 (1991).
- [4] C. Zener, “A theory of the electrical breakdown of solid dielectrics,” *Proc. R. Soc. A*, **145**, 523 (1934).
- [5] J. Feldman, K. Leo, J. Shah, D. A. B. Miller, J. E. Cunningham, T. Meier, G. von Plessen, A. Schulze, P. Thomas, and S. Schmitt-Rink, “Optical investigation of Bloch oscillations in a semiconductors superlattice,” *Phys. Rev B*, **46**, 7252 (1992).
- [6] C. Waschke, H. G Roskos, R. Schwedler, K. Leo, H. Kurz, and K. köhler, “Coherent Submillimeter-Wave Emission from Bloch Oscillations in a Semiconductor Superlattice,” *Phys. Rev. Lett*, **70**, 3319 (1993).
- [7] Q. Niu, X.-G. Zhao, G.A. Georgakis, and M.G. Raizen, “Atomic Landau-Zener Tunneling and Wannier-Stark Ladders in Optical Potentials,” *Phys. Rev. Lett*, **76**, 4504 (1996).
- [8] M. B. Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, “Bloch Oscillations of Atoms in an Optical potential,” *Phys. Rev. Lett*, **76**, 4508 (1996).
- [9] M. Raizen, C. Salomon, and Q. Niu, “New Light on Quantum Transport,” *Phys. Today*, **50**, 30 (1997).
- [10] O. Morsch, J. H. Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo, “Bloch Oscillations and Mean-Field Effects of Bose-Einstein Condensates in 1D Optical Lattices,” *Phys. Rev. Lett*, **87**, 140402-1 (2001).

- 
- [11] G. Corrielli, A. Crespi, G. Della Valle, S. Longhi, and R. Osellame, “Fractional Bloch oscillations in photonic lattices,” *Nature Communications*, **4**, 1555 (2013).
- [12] R. Sapienza, P. Constantino, D. Wiersma, M. Ghulinyan, C. J. Oton, and L. Pavesi, “Optical Analogue of Electronic Bloch Oscillations,” *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 26 (2003).
- [13] Y. Zhang, R. Wang, H. Zhong, J. Zhang, M. R. Belic, and Y. Zhang, “Optical Bloch oscillations and Zener tunneling in the fractional Schrödinger equation,” *Scientific Reports*, **7**, 7872 (2017).
- [14] M. Wimmer, M. Miri, D. Christodoulides, and U. Peschel, “Observation of Bloch oscillations in complex PT-symmetric photonic lattices,” *Scientific Reports*, **5**, 17760 (2015).
- [15] T. Pertsch, P. Dannberg, W. Elflein, A. Bräuer, and F. Lederer, “Optical Bloch Oscillations in Temperature Tuned Waveguide Arrays,” *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4752 (1999).
- [16] R. Morandotti, U. Peschel, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg, and Y. Silberberg, “Experimental Observation of Linear and Nonlinear Optical Bloch Oscillations,” *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4756 (1999).
- [17] G. Lenz, I. Talanina, and C. Martijn-de-Sterke “Bloch Oscillations in Array of Curved Optical Waveguides,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5 (1999).
- [18] A. Block, C. Etrich, T. Limboeck, F. Bleckmann, E. Soergel, C. Rockstuhl, and S. Linden, “Bloch Oscillations in plasmonic waveguide arrays,” *Nature Communications*, **5**, 3843 (2014).
- [19] A. Arreola-Lucas, G. Báez, F. Cervera, A. Climente, R.A. Méndez-Sánchez & J. Sánchez-Dehesa, “Experimental evidence of Rainbow Trapping and Bloch Oscillations of Torsional Waves in Chirped Metallic Beams”, *Scientific Reports*, **9**, 1860 (2018).
- [20] G. H. Wannier, “Wave Functions and effective Hamiltonian for Bloch Electrons in a Electric Field, *Phys. Rev. Lett.*, **117**, 432 (1960); *Elements of Solid State Theory*, Cambridge University Press, Cambridge England, 1959), p. 190; A. G Chynoweth, G. H. Wannier, R. A. Logan, and D. E. Thomas, “Observation of Stark Splitting of energy Bands by Means of Tunneling Transitions,” *Phys. Rev. Lett.* **5**, 57 (1960).
- [21] H. Fukuyama, R.A. Bari, and H.C, Fogedby, “Tightly Bound Electrons in a Uniform Electric Field,” *Phys. Rev. B* **31**, 5579 (1973).

- [22] A. Rabinovitch. “Stark ladders in finite crystals,” *Phys. Lett. A* **59**:6, 475-477 (1977).
- [23] J.R. Banavar and D. D. Coon, “Widths and spacing of Stark ladders levels,” *Phys. rev. B*, **17**, 3744 (1978).
- [24] T. Ogawa and Y. Kanemitsu. *Optical Properties of Low-Dimensional Materials*. Singapore, World Scientific, 1995.
- [25] S. Nagai and J. Kondo, “Electrons in Infinite One-Dimensional Crystals in a Uniform Electric Field,” *J. Phys. Soc. Jpn*, **49**, 1255 (1988).
- [26] E. E. Mendez, F. Agulló-Rueda And J. M. Hong , “Stark Localization in GaAs-GaAlAs Superlattices Under Electric Field,” *Phys. Rev. Lett*, **60**, 2426 (1988); J. Bleuse, G, and P. Voisin, “Electric-Field-induced localization and oscillatory electro-optical properties of semiconductors superlattices”, *Phis. Rev. Lett*, **60**, 220 (1988).
- [27] L. Gutierrez, A. Díaz-de-Anda, J. Flores, R. A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, and A. Morales, “Wannier-Stark Ladders in One-Dimensional Elastic Systems”, *Phys. Rev. Lett*, **97**, 114201-1 (2006).
- [28] Z. Lazcano, J. Arriaga, and G. N. Aliev “Experimental and theoretical demonstration of acoustic Bloch oscillations in porous silicon structures,” *Journal of Applied Physics*, **115**, 154505 (2014).
- [29] G. Monsivais, R. A. Méndez-Sánchez, A. Díaz-de-Anda, J. Flores, L. Gutiérrez y A. Morales “Elastic Wannier-Stark Ladders in Torsional Waves,” *Journal of Mechanics of Materials and structures*, **2**, 8 (2007).
- [30] M.M de Lima, Jr., Yu. A. Kosevich, P. V. Santos, and A. Cantarero, “Surface Acoustic Bloch Oscillations, the Wannier-Stark Ladder, and Landau-Zener Tunneling in a Solid,” *Phys. Rev. Lett*, **104**, 165502 (2010).
- [31] G. H. Wannier. “Dynamics of Band Electrons in Electric and Magnetic Fields”, *Phys. Rev. Lett*, **34**: 4 (1962).
- [32] J. P. McKelvey, *Solid state and semiconductor physics*. (Robert E. Krieger Publishing Company, Inc, 1984), pp. 208.
- [33] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*. (John Wiley & Sons, Inc, 2005), pp. 672.
- [34] F. Duang and J. Guojun, *Introduction to Condensed Matter Physics, Volume I*. (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2005), pp. 242.

- [35] Brillouin. *Waveguide propagation in periodic structures; electric filters and crystal lattices*, McGraw Hill, New York, 1946. Reprinted Dover, New York, 1953.
- [36] J. Zak. “Stark ladder in solids?,” *Phys. Rev. Lett*, **20**:26, 1477-1481 (1968).
- [37] G. H. Wannier “Stark ladder in solids? A reply,” *Phys. Rev. Lett*, **181**:3, 1364-1365 (1969).
- [38] J. Zak. “Stark ladder in solids? A reply to reply,” *Phys. Rev. Lett*, **181**:3, 1366-1367 (1969).
- [39] A. Rabinovitch and J. Zak. “Electrons in crystals in a finite-range electric field,” *Phys. Rev. B* **4**:8, 2358-2370 (1971).
- [40] H. K. Kelardeh, V. Apalkov And M. I. Stockman, “Wannier-Stark states of graphene in strong electric field,” *Phys. Rev. B* **90**, 085313 (2014).
- [41] K.F. Graff, *Wave motion in elastic Solids*. (Dover Books in Physics, New york 1991), pp. 180.
- [42] K.F. Graff, *Wave motion in elastic Solids*. (Dover Books in Physics, New york 1991), pp. 125.
- [43] S.P. Timoshenko, “On the correction of shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars,” *Philosophical Magazine* **41** (1921).
- [44] I. Elishakoff. “Who developed the so-called Timoshenko beam Theory?,” *MMS* **1**, 20 (2019).
- [45] Grigolyuk, EI. S.P. *Timoshenko: life and destiny*. (St. Petesburg: Krylov State Research Centre, 2000).
- [46] A. Díaz-de-Anda, A. Pimentel, J. Flores, A. Morales, L. Gutiérrez, and R. A. Méndez-Sánchez, “Locally periodic Timoshenko rod: experiment and theory”, *Journal of the acoustical Society of America*, **117**, 2814-2819 (2005).
- [47] S. K. Clark. *Dynamics of Continuous Elements*. (Prentice-Hall, New Jersey, 1972), 2nd ed.
- [48] N.G. Stephen, S. Puchegger, “On the valid frequency range of Timoshenko beam theory”, *Journal of sound and vibration*, **297**, 1082-1087 (2006).
- [49] N.G. Stephen, “The second spectrum of Timoshenko beam theory-Further assessment”, *Journal of sound and vibration* **292**, 372-389 (2006) .

- [50] A. Díaz-de-Anda, J. Flores, L. Gutiérrez, R.A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, and A. Morales, “Experimental Study of the Timoshenko beam theory predictions,” *Journal of Sound and Vibration*, **331**, 5732-5744 (2012).
- [51] G. Monsivais, A. Díaz-de-Anda, J. Flores, L. Gutiérrez, A. Morales, “Experimental study of the Timoshenko beam theory predictions: Further results”, *JSV*, **375**,187-199 (2016).
- [52] J. C. Torres-Guzmán, A. Díaz-de-Anda, J. Flores, G. Monsivais, L. Gutiérrez, and A. Morales, “Doorway states in flexural oscillations,” *EPL*, **114**, 54001 (2016).
- [53] D. Tamascelli, S. Olivares, S. Rossotti, R. Osellame, and Matteo G. A., “Quantum state transfer via Bloch oscillations”, *Scientific Reports*, **6**: 26054 (2016).
- [54] Byskov. E. *Unconstrained torsion and finite element analysis. Preliminary*. Aalborg University, Denmark. September 30, 2004.
- [55] A. Morales, J. Flores, L. Gutiérrez and, R. A. Méndez-Sánchez, “Compressional and torsional wave amplitudes in rods with periodic structures”, *JASA*. **112**, 1962 (2002).
- [56] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics, VoI I*. (Wiley-Interscience, 1977), pp. 406.
- [57] J. Von Neumann and E. P. Wigner, “Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen,” *Phys. Z.* **30**, 467-470 (1929).
- [58] L.D Landau, and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory)*. 3a ed. (Great Britain: Pergamon Press,1977), pp. 304.
- [59] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*. (John Wiley & Sons, Inc, 2005), pp. 167.
- [60] J. P. McKelvey, *Solid state and semiconductor physics*. (Robert E. Krieger Publishing Company, Inc, 1984), pp. 208-212.
- [61] L. de la Peña, *Introducción a la Mecánica Cuántica*. (Ediciones científicas universitarias, UNAM, 2014), pp. 170.
- [62] F. Ramírez-Ramírez, R. A. Méndez-Sánchez, G. Báez, A. Morales, L. Gutiérrez, and J. Flores, “Emulating Tunneling with Elastic Vibration Beams,” *Progress In Electromagnetic Research System (PIERS-Toyama)*, Japan, (2018).

- [63] F. Ramírez-Ramírez, E. Flores-Olmedo, G. Báez, E. Sadurní and R. A. Méndez-Sánchez, “Emulating tightly bound electrons in crystalline solids using mechanical waves,” Progress In Electromagnetic Research System (PIERS-Toyama), Japan, (2018).
- [64] J. C. Slater, “Electrons in Perturbed Periodic Lattices,” Phys. Rev. **6**, 1592 (1949).
- [65] E. Rivera-Mociños, R, 2017. *Propagación y transporte en guías de onda desordenadas con esquinas*. Phd. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Instituto de Física «Luis Rivera Terrazas». pp 65-69.
- [66] P. W Anderson “Absence of Diffusion in Certain Random Lattices”. Phys. Rev, **109**, 1492–1505 (1958).
- [67] J. Calleja-Ángel, J. C. Torres-Guzmán & A. Díaz -de-Anda, “Anderson localization of flexural waves in disordered elastic beams,” Scientific Reports. **9**, 3572 (2019).
- [68] G. Monsivais, M. del-Castillo-Mussot, and F. Claro “Stark-Ladder in the Propagation of Electromagnetic Waves,” Phys. Rev. Lett. **12**, 1433-1436 (1990).
- [69] G.B. warburton, *The Dynamical of behavior of structures*. (Pergamon Press, Oxford, 1991).
- [70] N.G. Stephen and M. Levinson, “A second order beam theory,” Journal of Sound and Vibration. **67**, 293-305 (1979).
- [71] J. Calleja-Ángel, J. C. Torres-Guzmán, J. Arriaga, A. Díaz-de-Anda. “Experimental measurement of the flexural spectrum of a vibrating beam above the critical frequency,” Journal of Vibration and Acoustics. **141**, 061010 (2019).
- [72] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *NUMERICAL RECIPES: The Art of Scientific Computing*. (Cambridge University Press, 2007), pp. 460.
- [73] W. Rodríguez-Cruz, J. C. Torres-Guzmán and A. Díaz-de-Anda, “Wannier-Stark ladders in Free oscillations of Timoshenko-Ehrenfest Beams,” EPL, **133**, 64001 (2021).
- [74] J. S. Wu, *Analytical and numerical Methods for vibration analyses*. (Singapore Wiley, 2013), pp. 101.
- [75] T. Pertsch, P. Dannberg, W. Elflein, A. Braüer, and F. Lederer. “Optical Bloch Oscillations in Temperature Tuned Waveguide Arrays,” Phys. Rev. Lett, **83**, 4752 (1999).

- 
- [76] Jianfei Yin, Massimo Ruzzene, Jihong Wen, Dianlong Yu, Li Cai & Linfeng yue. “Band transition and topological interface modes in 1D elastic phononic crystals,” *Scientific Reports*, **8**, 6806 (2018).
- [77] A. Morales, L. Gutiérrez, and J. Flores. “Improved eddy current driver-detector for elastic vibrations,” *Am. J. Phys*, **4**, 517 (2001).
- [78] L. Gutiérrez, 2009. *Escaleras de Wannier-Stark en sistemas elásticos unidimensionales*. Maestría. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [79] J. A. Franco Villafañe, 2014. *Nuevos modelos ondulatorios para sistemas elásticos en una y dos dimensiones y su comparación con el experimento*. Phd. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [80] A. Sepúlveda Soto (2008). *Electromagnetismo*. (Editorial Universidad de Antioquia), pp 252.
- [81] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. (John Wiley & Sons, Inc,1999), pp. 208.
- [82] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. (Prentice Hall, 1999), pp 301.