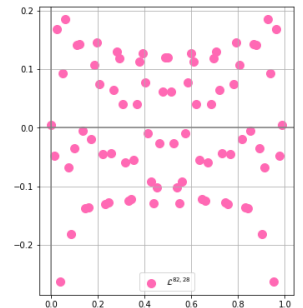
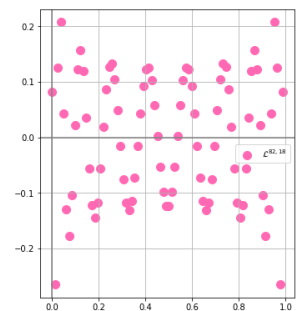


BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

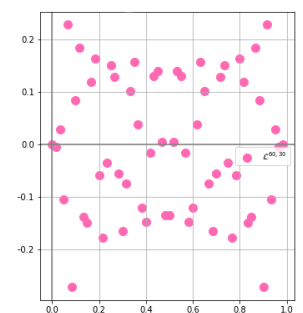


Estudio y análisis espectral de los polinomios discretos de Legendre



TESIS
que para obtener el grado de
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS
presenta
DENISSE AMÉLIE SOPHIE BERNÈS CARMONA

Directores de tesis:
DR. MOISÉS SOTO BAJO
DR. JAVIER HERRERA VEGA



Puebla, Pue. Junio del 2023

Gracias

- al Dr. Moisés Soto Bajo, por la gran oportunidad que me brindó al permitirme trabajar bajo su tutela, por brindarme su tiempo, apoyo y confianza durante todo el proceso, y por ser un ejemplo a seguir,
- a mi co-asesor, el Dr. Javier Herrera Vega, por la ayuda brindada para la realización de la parte computacional de este trabajo,
- a mis sinodales, el Dr. Andrés Fraguera Collar, el Dr. Jorge Bustamante González y la Dra. Alina Santillán Guzmán, por el valioso tiempo dedicado para leer y comentar este trabajo,
- a todos los que comparten libremente el conocimiento (y a los que permiten encontrarlo),
- a mi familia, por todo.

—Ves, Momo —le decía, por ejemplo—, las cosas son así: a veces tienes ante ti una calle larguísima. Te parece tan terriblemente larga, que nunca crees que podrás acabarla.

Miró un rato en silencio a su alrededor; entonces siguió:

—Y entonces te empiezas a dar prisa, cada vez más prisa. Cada vez que levantas la vista, ves que la calle no se hace más corta. Y te esfuerzas más todavía, empiezas a tener miedo, al final estás sin aliento. Y la calle sigue estando por delante. Así no se debe hacer.

Pensó durante un rato. Entonces siguió hablando:

—Nunca se ha de pensar en toda la calle de una vez, ¿entiendes? Sólo hay que pensar en el paso siguiente, en la inspiración siguiente, en la siguiente barrida. Nunca nada más que en el siguiente.

Volvió a callar y reflexionar, antes de añadir:

—Entonces es divertido; eso es importante, porque entonces se hace bien la tarea. Y así ha de ser.

Después de una nueva y larga interrupción, siguió:

—De repente se da uno cuenta de que, paso a paso, se ha barrido toda la calle. Uno no se da cuenta cómo ha sido, y no se está sin aliento.

Asintió en silencio y dijo, poniendo punto final:

—Eso es importante.

Michael Ende
Momo

Abstract

Motivados por la búsqueda de un sistema de representación de \mathbb{R}^n adecuado para el estudio morfológico de señales finitas (c.f. lista de deseos 1.2.1), para cada $n \in \mathbb{N}$ mayor a uno definimos (c.f. capítulo 2) n vectores de \mathbb{R}^n , que llamamos -respetando el nombre original de estos objetos que, como comentamos en 1.4, ya habían sido estudiados y aplicados- **polinomios discretos de Legendre** (aka PDL), cada uno asociado a un grado entero k de 0 a $n - 1$, que juntos conforman una base ortonormal de \mathbb{R}^n , la **base de Legendre discreta n -dimensional**, y que, como mostramos en el capítulo 5, cumple satisfactoriamente los requisitos explicados en la lista 1.2.1.

Hacemos también un estudio de simetrías de los PDL (c.f. capítulo 3) que, junto con las fórmulas dadas en [NS74], será usado para definir algoritmos (c.f. capítulo 4.3) para programar a los PDL de cualquier dimensión n .

Se realizó además, con una metodología propuesta por nosotros (c.f. sección 6.4), un análisis espectral de los PDL (c.f. capítulos 7) que nos llevó a plantear una conjetura en la que establecemos una relación entre frecuencias y polinomios discretos de Legendre que depende sólo de los parámetros de dimensión n y frecuencia k de este último, y que es estudiada numéricamente para algunas dimensiones.

Para que los conceptos y herramientas que usamos a lo largo del desarrollo de este trabajo queden claras, incluimos al final un apéndice de teoría en el que plasmamos algunos resultados o definiciones que son estrictamente necesarios para el desarrollo de este trabajo de tesis. Preferimos no limitarnos a citar referencias que abordan estos temas, pues definiciones presentes en unas son diferentes a las usadas por otras; además, para algunos resultados clásicos (como el teorema de Gram-Schmidt) necesitábamos dar formulaciones distintas a las canónicas pero útiles para nosotros.

Este trabajo fue escrito en L^AT_EX. El lenguaje de programación de nuestra elección para el desarrollo de la parte computacional fue Python. Los códigos a los que se hace referencia en este trabajo pueden encontrarse en el repositorio <https://github.com/AmelieBernes/tesis-licenciatura/tree/main>. La mayoría de las imágenes aquí presentadas fueron, a su vez, programadas en Python y, en algunas ocasiones, retocadas (o dibujadas completamente) en Krita. El formato adoptado se basa en el diseño de los libros de Edward Tufte.

Contents

1	Introducción	1
1.1	Bases ortonormales de espacios vectoriales finito dimensionales	2
1.2	Lista de deseos	3
1.3	Polinomios de Legendre de variable continua	5
1.4	Sobre los polinomios discretos de Legendre en la literatura	9
I	Definición y estudio de los polinomios discretos de Legendre	10
2	Construcción de las bases de Legendre discretas	11
2.1	Discretización puntual, polinomios discretos y espacios asociados	11
2.2	Una definición del concepto de grado para señales finitas	17
2.3	Construcción canónica de las bases de Legendre discretas	20
2.4	Sobre formas alternativas de definición de la base \mathcal{L}^n	23
2.4.1	Construcción generalizada de los PDL usando la discretización Ω_n	23
2.4.2	Construcción de \mathcal{L}^n en base a discretizaciones integrales	30
3	Sobre simetrías en las entradas de los polinomios de Legendre discretos	35
3.1	Estudio para dimensiones impares	37
3.2	Estudio para dimensiones pares	39
4	Cálculo de los PDL	41
4.1	Revisión de literatura	41
4.1.1	Uso de polinomios discretos en problemas de ajuste de datos	41
4.1.2	Polinomios discretos de Legendre en la literatura	43
4.2	Expresión analítica de los PDL	44
4.2.1	Fórmulas explícitas para los primeros vectores (máximo hasta el cuarto) de la base \mathcal{L}^n	47
4.3	Implementación computacional de las bases discretas de Legendre	49
4.3.1	Análisis de la expresión de los PDL	50
4.4	Pseudocódigos algoritmos usados para calcular las BDL	51
5	Análisis de señales en base a coeficientes respecto a las BLDs	56
5.1	Expresiones de señales finitas respecto a BLDs	56
5.2	Caracterización de morfología en base a coeficientes respecto a las BLDs	59

5.3	Determinando el grado de una señal finita a partir de sus coeficientes respecto a \mathcal{L}^n	66
5.4	Relación entre proyecciones a espacios de polinomios discretos y aproximaciones por mínimos cuadrados	68
II Análisis espectral de los PDL		72
6	Análisis espectral de señales finitas	73
6.1	Motivación para realizar un estudio espectral de los PDL	73
6.2	Hipótesis sobre las oscilaciones de los PDL	76
6.3	La transformada discreta de Fourier	77
6.3.1	La exponencial compleja y raíces n -ésimas de la unidad	77
6.3.2	La transformada discreta de Fourier	79
6.3.3	Versión real de la TDF	83
6.4	Metodología para realizar un análisis espectral que considere frecuencias arbitrarias	88
6.4.1	Espacios monofrecuenciales	89
6.4.2	Fórmulas para el coseno del ángulo de un punto a un plano	92
6.4.3	Estudio espectral basado en ángulos a espacios monofrecuenciales	94
6.5	Desfase de la proyección de una señal a espacios monofrecuenciales	97
6.6	Algunas propiedades de Σ_x	99
6.6.1	Periodicidad	99
6.6.2	Simetría	100
6.6.3	Continuidad	101
6.6.4	Operador de alternancia	101
6.6.5	Límites de la función Σ_x en 0 y $n/2$	104
6.7	Definición del espectro de una señal basado en espacios monofrecuenciales	111
6.7.1	Propiedades importantes del espectro Σ_x de una señal finita	115
6.7.2	Sobre la interpretación de los valores de Σ_x	116
6.8	Relación entre los espectros basados en la TDF y en espacios monofrecuenciales	117
6.8.1	Adaptación del análisis espectral a señales reales con una frecuencia de muestreo dada	125
7	Análisis espectral numérico de los PDL	128
7.1	Preguntas a responder numéricamente sobre las oscilaciones de los PDL	128
7.2	Gráficas y comentarios	131
7.3	Conclusiones del análisis espectral de los PDL	154
A	Apéndice: teoría	156
A.1	Polinomios y teorema fundamental del álgebra	156
A.2	Definiciones básicas de espacios de Hilbert	158
A.3	Hiperplanos de espacios con producto punto de dimensión finita	160
A.4	El teorema de la proyección ortogonal	161
A.5	El teorema de Gram-Schmidt	163
A.6	El concepto de ángulo en un espacio de Hilbert	165
A.6.1	Ángulo entre elementos de un espacio con producto punto	165
A.6.2	Definición de ángulo entre un punto y un subespacio cerrado de un espacio euclideo	166
A.6.3	Similitud coseno	168

Chapter 1

Introducción

Durante todo este trabajo trataremos con señales finitas (digamos, de longitud n , con n un entero positivo), y las pensaremos como elementos de \mathbb{R}^n . En la práctica, por lo general una señal es un conjunto de mediciones tomadas a intervalos regulares de tiempo; dicha información perfectamente puede expresarse como una n -tupla. En lo que sigue, a menos que se diga lo contrario, usaremos indistintamente los nombres “vector” y “señal”.

Es costumbre empezar a enumerar las entradas de un vector de $x \in \mathbb{R}^n$ a partir de uno, pero para nuestros fines, como se verá más adelante, es más conveniente empezar desde el cero. Adoptamos pues esta convención.

Definición 1.0.1

Por la **gráfica de una señal** $x = (x_j)_{j=0}^{n-1}$ de dimensión n entenderemos el siguiente subconjunto de \mathbb{R}^2 :

$$G_x := \{(j, x_j) : 0 \leq j \leq n - 1 \text{ entero}\}.$$

Si G_x está contenida en la gráfica de una recta, diremos que la señal es **afín** (en el caso particular en el que la ecuación de la recta en cuestión sea de la forma $y = h$, con h una constante, diremos que la señal es **constante**). Si G_x está contenida en una parábola de eje vertical, o sea, en una gráfica de ecuación cartesiana $y = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, diremos que la señal es **cuadrática**.

Preferimos usar el nombre “afín” en lugar de “lineal”, pues en el contexto de funciones de \mathbb{R} a \mathbb{R} el primero hace referencia a funciones de la forma $f(t) = at + b$, mientras que el segundo se refiere al caso específico de funciones de la forma $f(t) = at$.

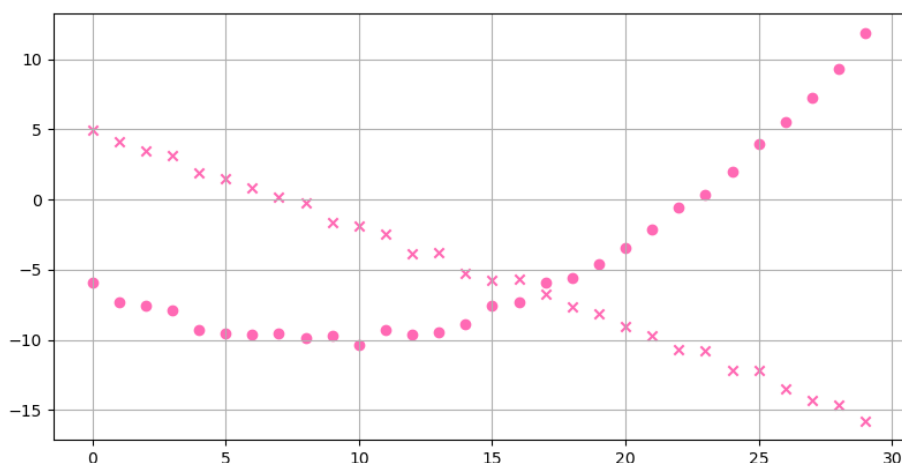


Figure 1.1: En la figura se pintan las gráficas de dos señales de dimensión 30. La gráfica de cruces (resp. la de puntos) sugiere la forma de una recta (resp. una parábola). Tomamos a las formas de una parábola como cánones de curvas (y no, por ejemplo, trozos de circunferencias) sólo porque son buenos ejemplos de curvas con una sola convexidad.

1.1 Bases ortonormales de espacios vectoriales finito dimensionales

Sea $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. En general, dado un F -espacio vectorial V de dimensión finita, uno siempre cuenta con bases para este espacio, es decir, con subconjuntos de V que son tanto linealmente independientes (término abreviado como “l.i.”) como generadores de todo el espacio. La importancia de estas es obvia, ya que una base permite representar de forma única a cualquier elemento $v \in V$ por medio de una colección finita de escalares. Es por eso que, en ocasiones, usamos el nombre “sistema de representación” para referirnos a ¹ una base $\{v_k : k \in I\}$ del espacio V .

A lo largo de este trabajo nos limitaremos a usar

- los \mathbb{R} -espacios vectoriales \mathbb{R}^n , con $n \geq 1$, y
- los \mathbb{C} -espacios vectoriales \mathbb{C}^n , con $n \geq 1$,

todos estos de dimensión finita, por lo tanto, todos ellos espacios de Hilbert (c.f. apéndice A.2).

El tener además en V definido un **producto punto** (c.f. apéndice A.2) dota de estructura extra al espacio. En particular, en este contexto podemos también hablar del ángulo entre vectores del espacio (c.f. A.6.1) - en particular, se tiene una noción de ortogonalidad de vectores (c.f. definición A.6.1)- y de la norma de estos (c.f. A.2.2).

Proposición 1.1.1

(La ortogonalidad implica independencia lineal) Si V es un F -espacio vectorial finito dimensional y $W := \{v_k : 0 \leq k \leq j\}$ es un subconjunto ortogonal de V , con ningún v_k igual a cero, entonces W es linealmente independiente.

Demostración. Sea $\{a_k\}_{k=0}^j \subseteq F$ una colección de escalares para los que se tenga la siguiente igualdad en V .

$$\sum_{k=0}^j a_k v_k = 0.$$

Sea un índice $0 \leq k' \leq j$. Calculando el producto punto de ambos lados de la ecuación anterior con el vector $v_{k'}$ resulta, por la hipótesis de ortogonalidad, la siguiente ecuación en F .

$$0 = \langle 0, v_{k'} \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^j a_k v_k, v_{k'} \right\rangle = \sum_{k=0}^j a_k \langle v_k, v_{k'} \rangle = a_{k'} \|v_{k'}\|^2;$$

puesto que $v_{k'}$ no es cero, se tiene que $\|v_{k'}\|^2 \neq 0$. De esto y la igualdad $0 = a_{k'} \|v_{k'}\|^2$ se deduce la igualdad a cero del escalar $a_{k'}$. \square

En particular, todo subconjunto ortogonal de cardinalidad $\dim(V)$ es una base del espacio V ; si además todos los elementos de una tal base tienen norma uno, llamamos a esta una **base ortonormal** del espacio V . ²

Nota 1.1.2

(Sobre la identidad de Parseval) Digamos que $\dim(V) = n$; si $\mathcal{E} := \{e_k : 0 \leq k \leq n-1\}$ es una BON del espacio de Hilbert V , es fácil comprobar que,

¹ El orden de los elementos en una base es importante; nosotros no denotamos esto en la notación para bases, pero suponemos que el orden en el que se enlistan los elementos es el orden en el que deben usarse.

² Abreviamos “base ortonormal” como “BON”.

para todo $x \in V$, se tiene que

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, e_k \rangle e_k \quad (1.1)$$

y además

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, e_k \rangle^2 \quad (\text{Identidad de Parseval}). \quad (1.2)$$

Así, si se usa a una BON \mathcal{E} del espacio como sistema de representación (o sea, si se representa a todo x del espacio por medio de sus n coeficientes respecto a \mathcal{E}), se tiene que

- tales coeficientes son de hecho los productos punto entre x y los elementos de la base \mathcal{E} (c.f. (1.1)), y
- se tiene una relación lineal muy sencilla entre el cuadrado de la norma de x y el cuadrado de los coeficientes de la representación (c.f. (1.2)).

Estos dos hechos permiten **usar la magnitud de un coeficiente en (1.1) para valorar la contribución del respectivo elemento de la base \mathcal{B} para sintetizar a x** , i.e. para reconstruir a x a partir de sus coeficientes $\langle x, e_k \rangle$ respecto a la base \mathcal{E} . En efecto, si, por ejemplo, el coeficiente $\langle x, e_{k_1} \rangle$ es “muy cercano a cero”, digamos $|\langle x, e_{k_1} \rangle| = \epsilon$, entonces el vector $x_{k_1} := \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq k_1}}^{n-1} \langle x, e_k \rangle e_k$ es, en la misma medida, cercano al vector inicial x , pues

$$\|x - x_{k_1}\| = \|\langle x, e_{k_1} \rangle e_{k_1}\| = |\langle x, e_{k_1} \rangle| = \epsilon.$$

En concordancia con la terminología usual empleada en el área de procesamiento de señales, llamaremos al proceso de calcular los coeficientes de una señal x respecto a una base ortonormal (i.e. el calcular los productos punto de x con los elementos de la base) **análisis**, y al proceso de recuperar a la señal via la identidad 1.1 **síntesis**.

Esta última nota da fuertes razones sobre la utilidad de las bases ortonormales como sistema de representación en espacios de Hilbert de dimensión finita cuando lo que se quiere es usar los coeficientes de un vector respecto a la base para obtener información geométrica del vector (concretamente, sobre la norma).

1.2 Lista de deseos

Puesto que el espacio subyacente de la teoría de este trabajo es el \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^n , tenemos la ventaja de contar con bases (subconjuntos de \mathbb{R}^n linealmente independientes y generadores de todo el espacio), que pensamos en este contexto como sistemas de representación; si

$$\mathcal{B} = \{v_k \mid 0 \leq k \leq n-1\} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

es base del espacio, entonces, dado $x \in \mathbb{R}^n$, **existen únicos**³ escalares $a_k \in \mathbb{R}$, con $0 \leq k \leq n-1$ tales que

³ Así, elegida una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n , podemos elegir no trabajar directamente con una señal $x \in \mathbb{R}^n$, sino con sus n coeficientes (que son números reales) respecto a \mathcal{B} .

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k v_k; \quad (1.4)$$

observe entonces que x queda completamente determinado por los números a_k . Si lo que nos interesa es la forma de la gráfica de x , es natural buscar un sistema de representación para el que sea posible establecer criterios relativamente sencillos que relacionen 1. los coeficientes de un $x \in V$ respecto a \mathcal{B} con 2. la forma de la gráfica de x (interesándonos particularmente por los patrones descritos en 1.0.1).

Esto motiva la creación de la siguiente lista de deseos.

Lista de deseos 1.2.1

Fijada una dimensión n , busquemos una base

$$\mathcal{L}^n = \{\mathcal{L}^{n,k} \mid 0 \leq k \leq n-1\} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

del espacio vectorial \mathbb{R}^n “adecuada” para la representación de señales $x \in \mathbb{R}^n$, en el sentido que satisfaga las siguientes condiciones:

1. que sea ortonormal, para poder hacer uso de todas las bondades que conlleva trabajar con tales bases (c.f. nota 1.1.2), bondades entre las que se encuentran las que a continuación citamos.
 - **(Los coeficientes de x respecto a \mathcal{B} son muy fáciles de calcular, ...)** El poder no sólo dar explícitamente los coeficientes de un vector respecto a la base, sino poder calcular a estos de forma relativamente sencilla (a saber, vía productos punto, c.f. nota 1.1.2); si (1.5) es ortonormal, entonces

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathcal{L}^{n,k}, \quad \text{donde } a_k = \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle. \quad (1.6)$$

- **(... dan información sobre el tamaño (norma) de x ...)** El tener disponible una igualdad de tipo Parseval, igualdad que relaciona de manera sencilla (de hecho, lineal) el cuadrado de la magnitud de una señal $x \in \mathbb{R}^n$ (magnitud dada gracias al producto punto definido en \mathbb{R}^n) con el cuadrado de las magnitudes de sus coeficientes respecto a la base;

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2.$$

Esto es útil al momento de intentar determinar (de forma intuitiva) la importancia de cierto vector de la base para describir a x . También es bueno contar con esta igualdad al momento de hacer procesos de síntesis, es decir, de modificación de la señal vía cambios en sus coeficientes respecto a un sistema de representación; si un coeficiente a_k es pequeño en magnitud, retirando el sumando $a_k \mathcal{L}^{n,k}$ de (1.6), estamos seguros de obtener un vector x' similar al vector original x en magnitud.

Si $x \in \mathbb{R}^n$ y \mathcal{L}^n como en (1.5) es BON de \mathbb{R}^n , entonces identificamos a x con los n números $a_k := \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle$, $0 \leq k \leq n-1$.

Si $x' := \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq k'}}^{n-1} a_k \mathcal{L}^{n,k}$ y $|a_{k'}|$ es un número “cercano a cero”, entonces $\|x'\| \approx \|x\|$. Pensando en la norma de x como la cantidad de información que tenía, parafraseamos esto como “quitar coeficientes pequeños no hace que se pierda mucha información”.

2. (...y sobre la forma de la gráfica de x .) El que, dada la expresión (1.6), sea posible establecer una relación sencilla entre los coeficientes a_k (en base a su tamaño y signo) y la forma de la gráfica de la señal. En particular, nos gustaría encontrar condiciones sencillas, necesarias y suficientes en términos de los coeficientes a_k para determinar si la gráfica de x es afín o cuadrática. Queremos pues que los coeficientes a_k reflejen atributos geométricos de x ; de esta forma, **con herramientas del álgebra lineal lograremos cuantificar la propiedad geométrica intuitiva de “parecerse a” una recta o una parábola.** También nos gustaría poder ampliar el rango de respuestas, y no sólo poder tratar con eventos binarios del tipo “ x es o no es afín”, sino también tener alguna forma de medir qué tanto se aproxima x a la propiedad de ser afín.

En general, una base de un F -espacio vectorial V de dimensión finita n es utilizada para, en vez de tratar directamente con los elementos abstractos del espacio, usar n elementos de F para representar unívocamente a cada objeto. En nuestro caso, trabajamos ya con n -tuplas de números reales, lo que en realidad equivale a representar elementos del espacio con la base canónica de \mathbb{R}^n (c.f. [Fri02], p.43), pero, como explicamos en la lista de deseos 1.2.1, nosotros estamos buscando una base \mathcal{L}^n de \mathbb{R}^n tal que sea posible, a partir de representaciones de una señal n -dimensional x respecto a esta, dar criterios para determinar si x es afín, lineal o cuadrática. Como se menciona, también nos gustaría poder dar medidas de qué tanto tiende la gráfica de x a parecerse a alguna de estas formas.

1.3 Polinomios de Legendre de variable continua

Puesto que son las formas básicas de recta y parábola las que nos interesa capturar, consideramos a las gráficas de las potencias básicas

$$f_i(t) = t^i, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad i \in \overline{\mathbb{N}}; \quad (1.7)$$

restringiendo su dominio al intervalo $[-1, 1]$, las funciones resultantes son elementos del espacio de Hilbert $L^2[-1, 1]$.⁴

Notación 1.3.1

Sea $k \geq 0$ entero. Denotaremos por

- $\mathbb{R}_{-1,1}[t]$ al subespacio de $L^2[-1, 1]$ que consta de los polinomios restringidos al intervalo $[-1, 1]$,
- $\mathbb{R}_{k,-1,1}[t]$ al subespacio de $\mathbb{R}_{-1,1}[t]$ que consta de los polinomios restringidos a $[-1, 1]$ y grado a lo más k .

Dos observaciones se siguen de inmediato:

- si $k_1 \leq k_2$ se tiene trivialmente la contención $\mathbb{R}_{k_1,-1,1} \subseteq \mathbb{R}_{k_2,-1,1}$, o sea, la familia $\{\mathbb{R}_{k,-1,1}\}_{k \in \overline{\mathbb{N}}}$ de subespacios de $L^2[-1, 1]$ está anidada; además,
- la unión de la familia $\{\mathbb{R}_{k,-1,1}\}_{k \in \overline{\mathbb{N}}}$ es todo $\mathbb{R}_{-1,1}[t]$.

⁴ Puede consultar la definición del espacio de Hilbert $L^2[a, b]$, con $a < b$ cualesquiera números reales, en [Kre91], p. 132.

Se comprueba trivialmente que, si los polinomios f_i son como en (1.7), entonces, para toda $k \geq 0$, $\{f_i(t) : 0 \leq i \leq k\}$ es una base del espacio $\mathbb{R}_{k,-1,1}[t]$, luego, con el método de Gram-Schmidt (c.f. A.5) esta puede ortonormalizarse; haciendo esto para toda k , se obtiene la colección de polinomios mutuamente ortogonales

$$\{P_k(t) \in \mathbb{R}_{k,-1,1}\}_{k \in \overline{\mathbb{N}}}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad k \in \overline{\mathbb{N}}, \quad (1.8)$$

estando cada polinomio P_k determinado unívocamente por las k condiciones de ortogonalidad

$$\forall 0 \leq m \leq k-1 : \int_{-1}^1 P_k(t)P_m(t)dt = 0$$

y por la condición de normalización

$$\int_{-1}^1 P_k(t)^2 dt = 1. \quad (1.9)$$

A los polinomios (1.8) se les conoce como **polinomios de Legendre** (c.f. [Fri02] p.346 y [DPK22] p.390).

Se calcula fácilmente que los primeros cuatro polinomios de Legendre son

$$P_0(t) = 1/\sqrt{2},$$

$$P_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t,$$

$$P_2(t) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3t^2 - 1),$$

y

$$P_3(t) = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right).$$

Nota 1.3.2

En algunas ocasiones la condición de normalización pedida no es la misma que la dada en (1.9); algunos autores prefieren tomar como condiciones de normalización a

$$\int_{-1}^1 P_k(t)P_m(t)dt = \frac{2\delta_{km}}{2n+1}.$$

Por eso las fórmulas que usualmente uno encuentra para los polinomios de Legendre (por ejemplo, en [Leg]) son distintas a las presentadas aquí. Sin embargo, según el resultado 1.4.2.2. de [AN91], salvo un múltiplo escalar, los polinomios de Legendre obtenidos con estas otras condiciones de normalización son los mismos que los obtenidos usando (1.9), esto porque el intervalo de integración y la función peso $((-1, 1)$ y la función constante uno en $(-1, 1)$, respectivamente) son los mismos para estas construcciones.

En esta discusión tenemos ya involucrada una base ortogonal (en el espacio de funciones $L^2[-1, 1]$); si planeamos, de alguna forma, usar a estos polinomios para el estudio morfológico de señales, por la naturaleza discreta de estos últimos objetos, será inevitable realizar, en algún punto del argumento, un proceso de discretización (por ejemplo, via una discretización puntual, c.f definición 2.1.1), es decir, pasar del “contexto continuo” en el que se han definido los polinomios de Legendre a uno

discreto.

Para partir de objetos en el espacio ambiente \mathbb{R}^n de nuestro interés, también tiene sentido primero realizar un proceso de discretización (por ejemplo, puntual) y luego realizar un proceso de ortogonalización. La figura de abajo ilustra, para el caso $n = 4$, estos dos caminos, o sea, el que consiste en primero ortonormalizar polinomios en el espacio $L^2[-1, 1]$ y luego discretizarlos, y en el que consiste en primero discretizar polinomios para obtener vectores de \mathbb{R}^n que pueden ortonormalizarse en este espacio. Observe que sólo usando este segundo camino obtenemos con seguridad un subconjunto ortonormal de \mathbb{R}^n , pero no se puede asegurar lo mismo usando el primer camino (c.f. [bn]). Puesto que lo que interesa es tener condiciones de ortogonalidad en el espacio \mathbb{R}^n , es obvio que el camino a seguir debe ser pues uno parecido al segundo.

Escogida pues la opción de primero discretizar polinomios para posteriormente ortonormalizar, queda todavía abierta la decisión de qué método de discretización usar.

Elegimos empezar con discretizaciones puntuales de polinomios. En base a estos objetos lograremos definir una base ortonormal de \mathbb{R}^n que cumple satisfactoriamente los requisitos explicados en la lista de deseos 1.2.1, y a la que llamaremos la **base de Legendre discreta de dimensión n** . A sus elementos los llamaremos los **polinomios de Legendre discretos de dimensión n** .

Un segundo punto de vista, basado en discretizaciones por promedios integrales, se presentará después en 2.4.2; como demostraremos a lo largo del capítulo 2, ambas alternativas de discretización, igual de naturales la una que la otra, nos conducen a la misma base ortonormal de \mathbb{R}^n , que, como se ilustra en el capítulo 5, resulta ser un sistema de representación realmente útil para el estudio morfológico de señales finitas.

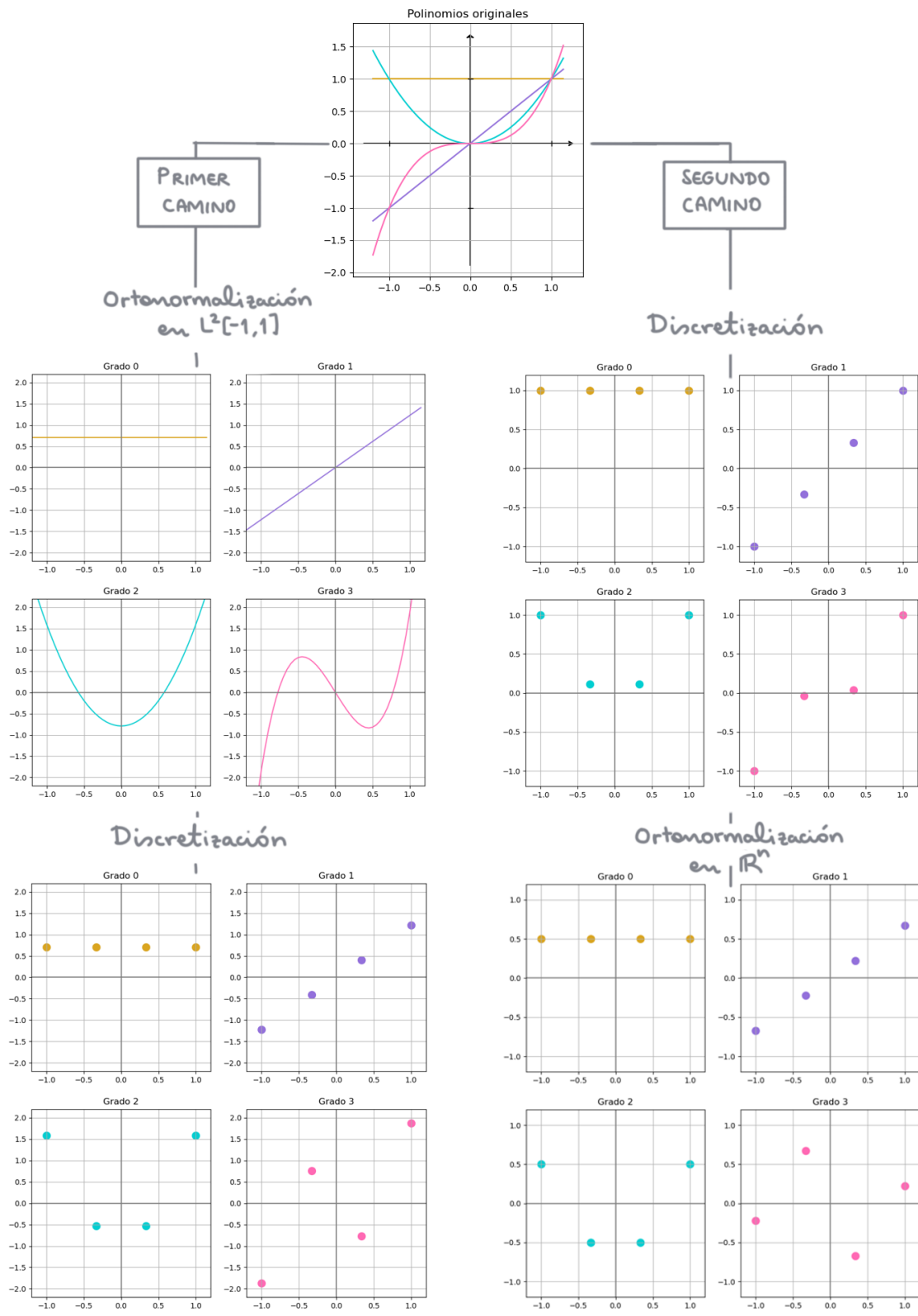


Figure 1.2: Como se aprecia, las operaciones de ortogonalización y discretización no conmutan.

1.4 Sobre los polinomios discretos de Legendre en la literatura

Después de revisar la literatura, encontramos que las funciones que llamamos “polinomios discretos de Legendre de dimensión n ”, y que denotamos por $\mathcal{L}^{n,k}$ con $0 \leq k \leq n - 1$, ya se han estudiado.

En [Nik91] se desarrolla la teoría de los polinomios ortogonales de variable discreta en un contexto más general, y se refieren a los que resultan ser los polinomios discretos $\mathcal{L}^{n,k}$ que definimos en este trabajo como “polinomios de Chebyshev de variable discreta”, siendo estos un caso particular de los polinomios de Hahn de variable discreta. Se menciona que estos polinomios fueron introducidos por P.L. Chebyshev en 1858, y redescubiertos por Gram en 1915 (véase [Tch58], [NS74]).

Para una discusión histórica muy completa sobre el desarrollo de los polinomios ortogonales discretos, véase [Roy93]. Como ahí se explica, esta noción fue desarrollada por Chebyshev a partir de estudios de probabilidad y de ajuste de datos por mínimos cuadrados. Explicamos con más detalle las ideas contenidas en el artículo [Forne] sobre esta última aplicación en la subsección (4.1.1).

Otras fuentes más modernas no usan el nombre de “polinomios de Chebyshev de variable discreta”, sino que adoptan el nombre de “polinomios ortogonales discretos de Legendre” (“Discrete Legendre Orthogonal Polynomials” en inglés, por lo tanto abreviados como “DLOPs”), pues, como se nota en [NS74], los coeficientes de estos polinomios son, exceptuando cambios de signo, los coeficientes de los polinomios de Legendre de variable continua definidos en $[0, 1]$. La referencia [NS74] es un compendio de fórmulas -que serán utilizadas más adelante en nuestro trabajo- de estos polinomios ampliamente citado.

Los polinomios ortogonales de variable discreta ya han sido estudiados y utilizados en la práctica, no sólo para optimizar el proceso de ajuste de datos por mínimos cuadrados (c.f. [Forne]), sino más recientemente como una herramienta en el área de procesamiento de señales. Por ejemplo, en [Col97] se utilizan los polinomios discretos de Legendre (bajo el nombre de “Discrete Legendre Transform”, abreviado DLT) para la compresión de datos de electrocardiogramas y, más recientemente, se han relacionados los polinomios discretos de Legendre con un tipo de redes neuronales, a saber, las “Legendre Delay Networks” (c.f. [bn]). En [Fur22] se continúa esta línea y se introduce el algoritmo de aprendizaje “Learned Legendre Predictor” (LLP), basado en redes neuronales, para la predicción de datos en tiempo real.

Por ser objetos tan usados en las aplicaciones, no es de extrañarse que se hayan estudiado ya algoritmos para el cálculo eficiente de los polinomios discretos de Legendre (c.f. [NS74], [Abu93], [Abu96], [Dri97], [Muk04])

Sin embargo, no encontramos en la literatura un uso de los polinomios discretos de Legendre para el estudio morfológico de señales finitas como el que proponemos (después de construir cuidadosamente estos objetos en el capítulo 2) en el capítulo 5. Dedicamos la segunda parte de esta tesis, con una metodología definida por nosotros, a realizar un análisis espectral de las gráficas de estos polinomios discretos.

Part I

Definición y estudio de los polinomios discretos de Legendre

Chapter 2

Construcción de las bases de Legendre discretas

En este capítulo vamos a construir, para toda dimensión $n \geq 2$, una base ortonormal de \mathbb{R}^n , que llamaremos “base de Legendre discreta”, y que en principio se basa en discretizaciones puntuales de polinomios de ciertos grados y ortonormalizaciones de las colecciones de vectores de \mathbb{R}^n que de esto resulta. A lo largo del capítulo daremos construcciones alternativas de esta base.

Comenzamos planteando algunas definiciones.

2.1 Discretización puntual, polinomios discretos y espacios asociados

Definición 2.1.1

(Operador de discretización $\Omega_{n,\mathcal{P}}$) Sea \mathcal{P} una malla uniforme de n puntos

$$\mathcal{P} := \{t_j := t_0 + hj : 0 \leq j \leq n-1\},$$

donde $h \in \mathbb{R}^+$ es una constante fija (que llamamos el **paso** de la malla). Nuestra primera forma de discretizar a una función f cuyo dominio contenga a los puntos de la malla \mathcal{P} consistirá en evaluarla en cada uno de los puntos de la malla:

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) := (f(t_j))_{j=0}^{n-1}.$$

$\Omega_{n,\mathcal{P}}$ puede pensarse como una aplicación con dominio $\mathcal{C}[t_0, t_{n-1}]$, el espacio de funciones continuas en $[t_0, t_{n-1}]$, y con codominio \mathbb{R}^n , pero conviene identificar al resultado de la acción de $\Omega_{n,\mathcal{P}}$ sobre una función f con la restricción $f|_{\mathcal{P}}$ de f al conjunto discreto \mathcal{P} , es decir, con la función

$$\begin{aligned} f|_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t_j &\longmapsto f(t_j). \end{aligned}$$

Definición 2.1.2

En el caso en el que f sea elemento de $\mathbb{R}[t]$, nos referiremos al vector $\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) \in \mathbb{R}^n$ como un **polinomio discreto de dimensión n con dominio uniforme**

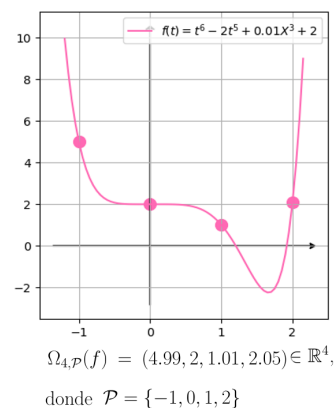


Figure 2.1: Ejemplo concreto con $n = 4$.

\mathcal{P} .

Mostraremos en la subsección 2.2 que, de hecho, **todo** $x \in \mathbb{R}^n$ es un polinomio discreto de dimensión n , y propondremos una definición del grado de este. Ya podríamos dar algunos resultados en esta dirección, pero preferimos esperar hasta tener las herramientas para justificar detalles como la buena definición de nuestra propuesta de grado (c.f. 2.2).

Por la forma en que se definen la suma y la multiplicación por escalares en los espacios vectoriales $\mathbb{R}[t]$ y \mathbb{R}^n , la siguiente observación es clara.

Observación 2.1.3

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{P} = \{t_j : 0 \leq j \leq n-1\}$ una malla uniforme de n puntos. La función $\Omega_{n,\mathcal{P}}$ definida en 2.1.1 es una transformación lineal de $\mathcal{C}[t_0, t_{n-1}]$ a \mathbb{R}^n .

El siguiente resultado, que es una consecuencia directa del Teorema fundamental del álgebra, se usará en repetidas ocasiones.

Proposición 2.1.4

Sean $n \geq 2$ y $\mathcal{P} = \{t_j := t_0 + hj : 0 \leq j \leq n-1\}$ una malla uniforme de n puntos. Si $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ es un polinomio de grado menor a n y $\Omega_{n,\mathcal{P}}(f)$ es el vector cero de \mathbb{R}^n , entonces f es el polinomio cero.

Demostración. El que $\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = (f(t_j))_{j=0}^{n-1}$ sea el vector cero significa que los n elementos de la malla \mathcal{P} son raíces del polinomio f ; puesto que, por hipótesis, $\partial(f) < n$, por la proposición A.1.6 concluimos que f es el polinomio cero. \square

Notación 2.1.5

Sean $n \in \mathbb{N}$ y k un entero no negativo. Denotaremos por $\mathbb{R}_k[t]$ al subespacio de $\mathbb{R}[t]$ que consta de los polinomios de grado a lo más k . Escribiremos como f_k a las potencias básicas, es decir, a los polinomios

$$f_k(t) := t^k. \quad (2.1)$$

Denotaremos por \mathcal{P}_n a la siguiente malla uniforme:

$$\mathcal{P}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (2.2)$$

A la discretización puntual del polinomio f_k en la malla \mathcal{P}_n la denotaremos por v_k ;

$$v_k := \Omega_{n,\mathcal{P}_n}(f_k) = (f_k(j))_{j=0}^{n-1} = (j^k)_{j=0}^{n-1}. \quad (2.3)$$

Definición 2.1.6

Sean $n \geq 2$ y $0 \leq i \leq n-1$ enteros. Definimos al subespacio $W_{n,i}$ de \mathbb{R}^n como sigue:

$$W_{n,i} := \text{span}\{v_k : 0 \leq k \leq i\} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

donde los vectores v_k son como en 2.3.

En la ecuación (2.4) con la que se define al espacio $W_{n,i}$, siempre conviene pensar al primer subíndice n como el **índice de dimensión**, pues corresponde a la dimensión del espacio ambiente \mathbb{R}^n , y al subíndice i como **índice de grado**; más adelante (c.f. tercer punto del teorema 2.1.14) se verá por qué este es un buen nombre.

En lo que sigue, siempre que se hable de un polinomio discreto se supondrá que la malla \mathcal{P} a partir de la que se obtuvo es uniforme.

Observación 2.1.7

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $i \in \overline{\mathbb{N}}$, entonces los $i + 1$ polinomios f_k con $0 \leq k \leq i$ entero constituyen una base para el espacio $\mathbb{R}_i[t]$.

Proposición 2.1.8

Sea $n \in \mathbb{N}$. Una señal $x = (x_k)_{k=0}^{n-1}$ de dimensión n es elemento del espacio $W_{n,i}$ definido en (2.4) si y sólo si x es la discretización en \mathcal{P}_n de un polinomio de grado a lo más i .

Demostración. En efecto, según la definición del espacio $W_{n,i}$ y la linealidad del operador de discretización Ω establecida en la observación 2.1.3, tenemos que $x \in \mathbb{R}^n$ es elemento de $W_{n,i}$ si y sólo si existen números reales a_k con $0 \leq k \leq i$ tales que

$$x = \sum_{k=0}^i a_k v_k = \sum_{k=0}^i a_k \Omega_{n, \mathcal{P}_n}(f_k) = \Omega_{n, \mathcal{P}_n} \left(\sum_{k=0}^i a_k f_k \right) = \Omega_{n, \mathcal{P}_n}(g),$$

con $g := \sum_{k=0}^i a_k f_k \in \mathbb{R}_i[t]$ (c.f. observación 2.1.7). □

De las definiciones de señales constantes, afines y cuadráticas (c.f. 1.0.1) y la proposición 2.1.8 se sigue de inmediato el siguiente resultado.

Corolario 2.1.9

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ una señal de dimensión n cualquiera.

- La señal x es constante si y sólo si $x \in W_{n,0}$,
- es afín si y sólo si $x \in W_{n,1}$, y
- es cuadrática si y sólo si $x \in W_{n,2}$ y $x \notin W_{n,1}$.

La importancia del corolario 2.1.9 es que en él se explica cómo **cuestiones de morfología de la señal x se reducen a cuestiones de pertenencia a los espacios $W_{n,i}$** . Parece pues que los espacios $W_{n,i}$ son un buen lugar en el que buscar una base ortonormal con las propiedades descritas en la lista de objetivos 1.2.1.

Demostremos ahora que, en la proposición 2.1.8, poco importa la malla sobre la que se discretice, siempre y cuando esta sea uniforme.

Proposición 2.1.10

Si \mathcal{P} es una malla uniforme cualquiera de n puntos, digamos

$$\mathcal{P} = \{t_j := t_0 + h : 0 \leq l \leq n - 1\},$$

con h una constante positiva, y f es un polinomio de grado i (con $0 \leq i \leq n - 1$), entonces el vector $\Omega_{n, \mathcal{P}}(f)$ de \mathbb{R}^n es elemento del espacio $W_{n,i}$ definido en (2.4).

Demostración. Según la observación 2.1.7, existen (únicos) números reales c_k , con $0 \leq k \leq i$ tales que $f = \sum_{k=0}^i c_k f_k$. Sean los intervalos

$$I_n = [0, n - 1], \quad I = [t_0, t_{n-1}].$$

Sea $\phi : I_n \rightarrow I$ la función cuya gráfica es el segmento de recta con puntos extremos

$$(0, t_0) \text{ y } (n-1, t_{n-1});$$

la ecuación de tal ϕ es

$$\phi(t) = ht + t_0;$$

observe que ϕ es una recta con pendiente h positiva. Como tanto \mathcal{P}_n como \mathcal{P} son mallas uniformes,

$$\forall 0 \leq j \leq n-1 : \phi(j) = t_j.$$

Así, la $(j+1)$ -ésima entrada del vector $\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = (f(t_j))_{j=0}^{n-1}$ es

$$f(t_j) = f(\phi(j)) = f(hj + t_0) = \sum_{k=0}^i c_k f_k(hj + t_0) = \sum_{k=0}^i c_k (hj + t_0)^k.$$

Reconocemos al lado derecho de la igualdad como un polinomio de grado a lo más i , a saber,

$$h(t) := \sum_{k=0}^i c_k (ht + t_0)^k,$$

evaluado en el $(j+1)$ -ésimo elemento de la malla uniforme \mathcal{P}_n (o sea, en j). Según la observación 2.1.8 de esto podemos concluir la pertenencia de $\Omega_{n,\mathcal{P}}(f)$ a $W_{n,i}$. \square

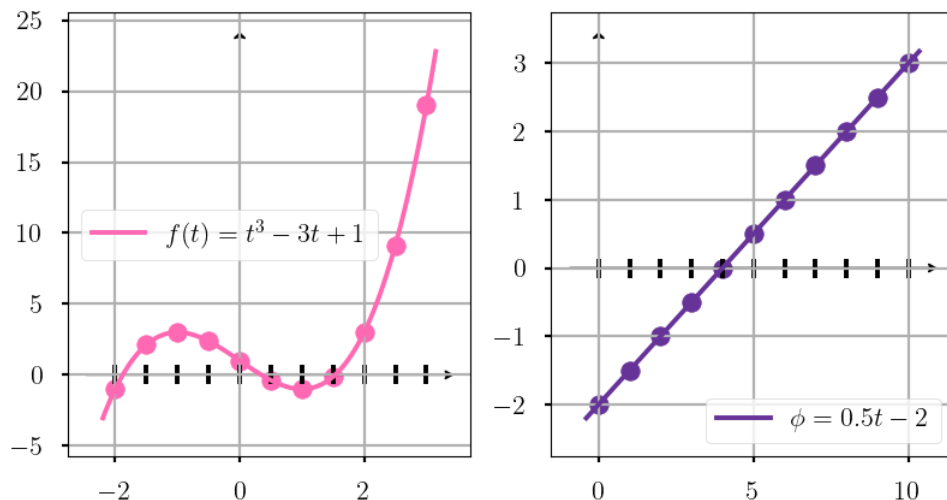


Figure 2.2: Ejemplo haciendo $n = 11$, \mathcal{P} la malla uniforme de 11 puntos con punto inicial -2 y paso $h = 0.5$. A la izquierda se dibuja la gráfica de $f(t) = t^3 - 3t + 1$ y su discretización puntual en \mathcal{P} . A la derecha, la gráfica de $\phi(t) = 0.5t - 2$. A una tal función lineal ϕ le llamaremos, en este contexto, **función de cambio de malla**.

Corolario 2.1.11

Sean $n \geq 2$, $0 \leq i \leq n-1$ enteros, \mathcal{P} una malla uniforme de n puntos. Sea

$$W_{n,i} = \text{span}\{v_k : 0 \leq k \leq i\},$$

el subespacio de \mathbb{R}^n definido en (2.4). La señal $x \in \mathbb{R}^n$ es elemento de $W_{n,i}$ si y sólo si existe $g(t) \in \mathbb{R}[t]$ un polinomio de grado a lo más i tal que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(g)$.

Demostración. En efecto, según la proposición 2.1.8, x es elemento de $W_{n,i}$ si y sólo si existe $g(t)$ polinomio de grado a lo más i tal que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}_n}(g)$. Usando una función de cambio de malla, se puede obtener a partir de g , componiendo con el cambio de malla, un polinomio $g(t)$ tal que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(f)$. \square

Proposición 2.1.12

(**Caracterización de las bases de los espacios $W_{n,i}$**) Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $0 \leq i \leq n - 1$ es un entero y

$$\{p_k = p_k(t) : 0 \leq k \leq i\}$$

es una colección de polinomios con

$$\partial(p_k) = k, \quad 0 \leq k \leq i$$

y

$$\mathcal{P} = \{t_j = t_0 + hj : 0 \leq j \leq n - 1\}$$

es una malla uniforme cualquiera de n puntos, entonces los $i + 1$ vectores de \mathbb{R}^n

$$w_k := \Omega_{n,\mathcal{P}}(p_k), \quad 0 \leq k \leq i \quad (2.5)$$

conforman una base del espacio $W_{n,i}$.

Recíprocamente, si \mathcal{P} es una malla uniforme de n puntos y $\mathcal{B}_i := \{w_k\}_{k=0}^i$ es una base de $W_{n,i}$, entonces

- a) todo w_k es un polinomio discreto de dimensión n , es decir, existe un polinomio p_k de grado k tal que $w_k = \Omega_{n,\mathcal{P}}(p_k)$, y
- b) para cada $0 \leq k' \leq i$, uno y sólo uno de los polinomios p_k tiene grado k' .

Demostración. Según el corolario 2.1.11, $\{w_k : 0 \leq k \leq i\}$ es un subconjunto de $W_{n,i}$ de cardinalidad $i + 1$; si demostramos que es linealmente independiente, puesto que por definición $W_{n,i}$ es generado por $i + 1$ vectores, podremos concluir, como se quiere, que $\{w_k : 0 \leq k \leq i\}$ es base de $W_{n,i}$. Sean b_k con $0 \leq k \leq i$ escalares para los que se tenga la siguiente igualdad en \mathbb{R}^n :

$$\sum_{k=0}^i b_k w_k = 0. \quad (2.6)$$

Según la linealidad establecida en la observación 2.1.3 y la definición (2.5) de los vectores w_k , si $p = p(t)$ es el polinomio definido como

$$p := \sum_{k=0}^i b_k p_k, \quad (2.7)$$

la ecuación (2.6) puede reescribirse como

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(p) = 0; \quad (2.8)$$

por la proposición 2.1.4 podemos inferir de esto que p es el polinomio cero, o sea, que $\sum_{k=0}^i b_k p_k$ es el polinomio cero, y de esto, por la independencia lineal de los polinomios p_i en el espacio $\mathbb{R}[t]$ (que se tiene por las condiciones impuestas por hipótesis en los grados de estos), la igualdad a cero de los escalares b_k .

Recíprocamente, sea $\mathcal{B}_i := \{w_k\}_{k=0}^i$ una base de $W_{n,i}$. Del corolario 2.1.11 se sigue el punto a); sean pues p_k , con $0 \leq k \leq i - 1$, polinomios de grado a lo más i

tales que $\Omega_{n,\mathcal{P}}(p_k) = w_k$. Supongamos que existe $0 \leq k' \leq i$ tal que ninguno de los polinomios p_k tiene grado k' .

Sea $g_{k'}$ un polinomio cualquiera de grado k' . Según el corolario 2.1.11, $z_{k'} := \Omega_{n,\mathcal{P}}(g_{k'})$ es elemento de $W_{n,i}$; como $\mathcal{B}_i := \{w_k\}_{k=0}^i$ es base de este espacio, existen escalares a_k (no todos cero, pues $z_{k'} \neq 0$) tales que

$$z_{k'} = \sum_{k=0}^i a_k w_k;$$

evaluando el operador $\Omega_{n,\mathcal{P}}$ en ambos lados de la igualdad y usando su linealidad (c.f. observación 2.1.3), obtenemos que

$$\Omega_{n,\mathcal{P}} \left(g_{k'} - \sum_{k=0}^i a_k p_k \right) = 0.$$

Según la proposición 2.1.4, de esto se deduce que $g_{k'}$, un polinomio de grado k' , es igual a $\sum_{k=0}^i a_k p_k$, donde ninguno de los polinomios p_k tiene grado k' . Esto contradice la independencia lineal establecida en la observación 2.1.7. \square

Corolario 2.1.13

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para todo entero $0 \leq i \leq n-1$, $\{v_k : 0 \leq k \leq i\}$ es una base del espacio $W_{n,i}$ definido en (2.4).

Las propiedades más importantes de los espacios $W_{n,i}$ (y que se desprenden de los argumentos anteriores) se resumen en el siguiente teorema. Sólo del notar que las dimensiones de \mathbb{R}^n y su subespacio $W_{n,n-1}$ coinciden se deduce el cuarto punto.

Teorema 2.1.14

Sea $n \in \mathbb{N}$. Sean, para cada $0 \leq i \leq n-1$, los espacios $W_{n,i}$ como se definieron en (2.4).

- Para toda i , $W_{n,i}$ es un subespacio de \mathbb{R}^n de dimensión $i+1$. De hecho, $\{v_k : 0 \leq k \leq i\}$, con v_k definido como en (2.3), es base de $W_{n,i}$.
- La familia $(W_{n,i})_{i=0}^{n-1}$ de subespacios de \mathbb{R}^n está estrictamente anidada, es decir

$$\forall i = 0, \dots, n-2 : W_{n,i} \subsetneq W_{n,i+1}. \quad (2.9)$$

- Fijada una malla uniforme de n puntos \mathcal{P} , para toda $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $x \in W_{n,i}$ si y sólo si existe $g = g(x)$ un polinomio de grado a lo más i tal que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(g)$.
- $\mathbb{R}^n = W_{n,n-1}$.

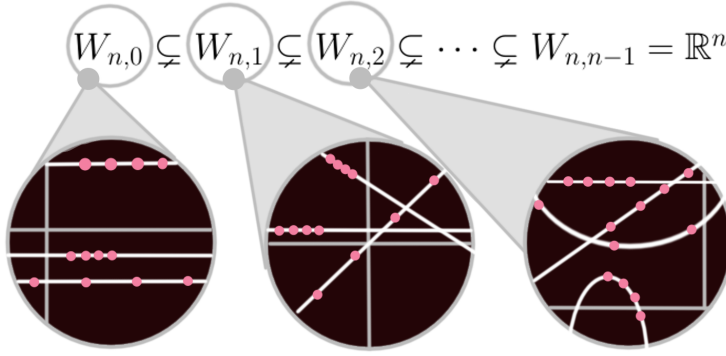


Figure 2.3: En la figura se dibujan las gráficas de algunos de los elementos de los tres primeros espacios de polinomios discretos $W_{n,0}$, $W_{n,1}$ y $W_{n,2}$ (en la figura se ha fijado $n = 4$). Observe que estas son las formas de recta y parábola de nuestro interés. Queremos hacer énfasis en que, tomando cualquier malla uniforme y cualquier polinomio f de grado $0 \leq i \leq n - 1$, estamos seguros de que la discretización $\Omega_{n,\mathcal{P}}(f)$ es elemento del subespacio $W_{n,i}$ de \mathbb{R}^n ; reciprocamente, el saber que un $x \in \mathbb{R}^n$ sea elemento de algún espacio $W_{n,i}$ (hecho que, en vistas de que la familia $(W_{n,i})_{i=0}^{n-1}$ “cubre de manera ascendente a todo el espacio \mathbb{R}^n ” - c.f. puntos dos y cuatro del teorema 2.1.14- seguro ocurrirá), nos permite hacer inferencias sobre la forma de la gráfica de x .

2.2 Una definición del concepto de grado para señales finitas

Revise nuevamente el último punto del teorema 2.1.14; según este, como se anticipó en la subsección 2.1, toda señal finita $x \in \mathbb{R}^n$ es elemento de $W_{n,n-1}$, es decir, es un polinomio discreto de dimensión n y grado menor a n .

Podemos dar una demostración alternativa, directa y sencilla de este hecho.

Proposición 2.2.1

Sean $n \in \mathbb{N}$ y \mathcal{P} una malla uniforme de n puntos. La restricción del operador $\Omega_{n,\mathcal{P}}$ al espacio $\mathbb{R}_{n-1}[t]$ de polinomios de grado a lo más $n - 1$, es decir, la función

$$\Omega_{n,\mathcal{P}} : \mathbb{R}_{n-1}[t] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.10)$$

es un isomorfismo de \mathbb{R} -espacios vectoriales. En particular, para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ existe un único polinomio f de grado menor a n tal que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(f)$.

Demostración. Puesto que tanto $\mathbb{R}_{n-1}[t]$ como \mathbb{R}^n son \mathbb{R} -espacios vectoriales de dimensión n , para ver que la función definida en (2.10) (que, según la observación 2.1.3, es lineal) es un isomorfismo, basta demostrar que es inyectiva (c.f. teorema 2.5 [Fri02]). Esto último es una consecuencia directa del teorema fundamental del álgebra, pues, $f \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ es elemento del kernel de $\Omega_{n,\mathcal{P}}$ si y sólo si $\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = 0$, o, equivalentemente, si y sólo si cada uno de los n puntos que componen la malla \mathcal{P} es una raíz de f ; según la proposición 2.1.4, esto último ocurre si y sólo si f es el polinomio cero. Con esto comprobamos que el kernel de la aplicación es trivial, luego, la inyectividad de esta. \square

La proposición 2.2.1 parece sugerir una forma en la que podríamos definir el grado de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ (“dado $x \in \mathbb{R}^n$, definimos el grado de este como el grado

del único polinomio $f \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ tal que $\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x$); no hay que apresurarse, pues en la formulación de la proposición 2.2.1 se tuvo que fijar de antemano una malla uniforme. *A priori*, no podríamos descartar la existencia de mallas uniformes $\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{P}}$ de n puntos y de polinomios f, \tilde{f} de grados menores a n (pero no iguales entre sí), tales que $\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f})$. Comprobamos que esto no ocurre en la siguiente proposición.

Ejemplo 1. *Lo que sí es seguro es que la unicidad establecida en la proposición 2.2.1 no es válida si se quita la restricción en los grados de los polinomios a discretizar.*

Considere, por ejemplo a la señal

$$x = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3.$$

Los polinomios $f(t) = 1$, $g(t) = 1 - 5t(t - 0.4)(t - 0.8)(t - 1)(t - 2)$ y $h(t) = 1 + 3t(t - 1)(t - 2)$, de grados 0, 5 y 3, respectivamente, son tales que al ser evaluados en el operador Ω_{3,\mathcal{P}_3} dan lugar a la señal x .

La señal

$$x = (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$$

puede obtenerse como la discretización del polinomio de grado 3 $p(t) = 1 + t(t - 1)(t - 2.5)$ en la malla uniforme \mathcal{P}_3 , pero también como la discretización del polinomio de grado 2 $q(t) = 0.625 + t - 0.5t^2$ en la malla uniforme $\mathcal{P} = \{0.5, 1.5, 2.5\}$.

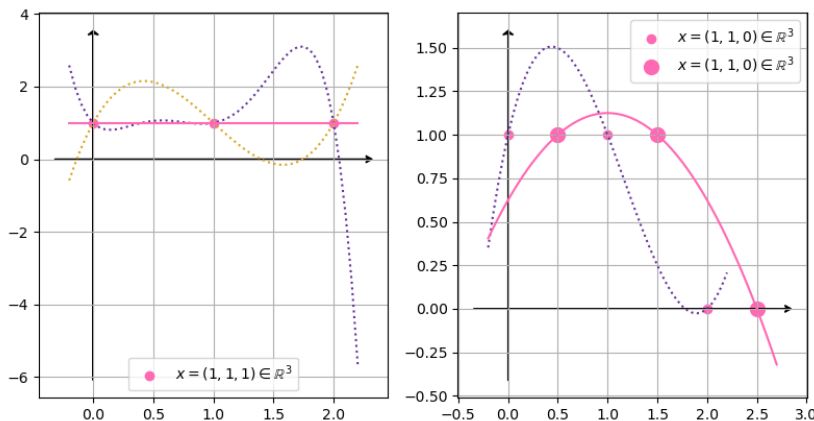


Figure 2.4: Gráficas de los polinomios y señales de \mathbb{R}^3 expuestas en el ejemplo.

◇

Proposición 2.2.2

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{P}}$ son mallas uniformes de n puntos y $\tilde{f}, f \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ son tales que

$$\Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f}) = x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(f), \quad (2.11)$$

entonces $\partial(\tilde{f}) = \partial(f)$.

Demostración. Digamos que

$$\mathcal{P} = \{t_j := t_0 + hj : 0 \leq j \leq n - 1\}, \quad \tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{t}_j := \tilde{t}_0 + \tilde{h}j : 0 \leq j \leq n - 1\}.$$

Sea

$$\phi(t) = \frac{h}{\tilde{h}}t + \left(t_0 - \frac{h}{\tilde{h}}\tilde{t}_0\right)$$

la función de cambio de malla (de $\tilde{\mathcal{P}}$ a \mathcal{P}); esta función es tal que

$$\forall j = 0, \dots, n-1, \quad \phi(\tilde{t}_j) = t_j;$$

podemos reescribir entonces la hipótesis (2.11) como

$$\begin{aligned} (\tilde{f}(\tilde{t}_0), \dots, \tilde{f}(\tilde{t}_{n-1})) &= x \\ &= (f(t_0), \dots, f(t_{n-1})) \\ &= ((f \circ \phi)(\tilde{t}_0), \dots, (f \circ \phi)(\tilde{t}_{n-1})), \end{aligned}$$

o sea, como $\Omega_{n, \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f}) = \Omega_{n, \tilde{\mathcal{P}}}(f \circ \phi)$; por linealidad del operador $\Omega_{n, \tilde{\mathcal{P}}}$ (c.f. observación 2.1.3) tenemos entonces que $\Omega_{n, \tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f} - f \circ \phi) = 0$. Como $\tilde{f} - f \circ \phi$ es un polinomio de grado menor a n , de esta última igualdad podemos concluir, según la proposición 2.1.4, que $\tilde{f} - f \circ \phi$ es el polinomio cero, por lo tanto

$$\tilde{f} = f \circ \phi.$$

Puesto que el componer a f con el polinomio lineal ϕ no altera su grado (i.e. f y $f \circ \phi$ son polinomios del mismo grado), concluimos que

$$\partial(\tilde{f}) = \partial(f \circ \phi) = \partial(f).$$

□

Con todo esto demostrado, podemos definir el grado de una señal finita como sigue.

Definición 2.2.3

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Si $f \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ es un polinomio de grado menor a n y \mathcal{P} es una malla uniforme de n puntos tales que $x = \Omega_{n, \mathcal{P}}(f)$, entonces el **grado de x** es

$$\partial(x) := \partial(f).$$

Nótese que el f de la definición 2.2.3, según la proposición 2.2.1, siempre existe.

Es fácil determinar el grado de una señal de dimensión n en términos de pertenencia a los espacios $W_{n,i}$; mostramos a continuación que el grado i de un polinomio discreto es el índice del menor subespacio $W_{n,i}$ en el que está contenido.

Proposición 2.2.4

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ una señal de dimensión n .

- x tiene grado cero si y sólo si $x \in W_{n,0}$.
- Para toda $1 \leq i \leq n-1$, x tiene grado i si y sólo si $x \in W_{n,i}$ pero $x \notin W_{n,i-1}$.

Demostración. La veracidad del primer punto de la demostración es obvia (pues $W_{n,0}$ consta exactamente de las discretizaciones puntuales de polinomios constantes, c.f. teorema 2.1.14). Demostremos pues el segundo punto.

\Rightarrow) Supongamos que $\partial(x) = i$ con $1 \leq i \leq n-1$; por definición, esto significa que existen \mathcal{P} una malla uniforme de n puntos y f un polinomio tales que

$$\partial(f) = i \text{ y } x = \Omega_{n, \mathcal{P}}(f). \quad (2.12)$$

Según la proposición 2.1.10, esto implica la pertenencia de x a $W_{n,i}$. Además, x no puede ser elemento de $W_{n,i-1}$, pues esto, según el tercer punto del teorema 2.1.14, implicaría la existencia de una malla uniforme $\tilde{\mathcal{P}}$ de n puntos y un polinomio g tales que

$$\partial(g) \leq i - 1 \text{ y } x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(g); \quad (2.13)$$

según la proposición 2.2.2, (2.12) y (2.13) no pueden ser ambas verdaderas.

⇐) Sea $1 \leq i \leq n - 1$ tal que $x \in W_{n,i}$ pero $x \notin W_{n,i-1}$. Según el teorema 2.1.14, existen \mathcal{P} malla uniforme de n puntos y f polinomio de grado a lo más i tales que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(f)$; según este mismo teorema, el que el grado de f fuese menor a i implicaría que x también fuese elemento del espacio $W_{n,i-1}$. Como esto no ocurre, concluimos que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(f)$ con $\partial(f) = i$, luego, según la definición 2.2.3, x tiene grado i . \square

Terminamos con una definición, que queda justificada por lo establecido en la proposición 2.2.4.

Definición 2.2.5

Sean $n \geq 2$, $0 \leq i \leq n - 1$ enteros. Al subespacio $W_{n,i}$ definido en (2.4) se le denominará el **espacio de señales n -dimensionales de grado a lo más i** .

2.3 Construcción canónica de las bases de Legendre discretas

Ahora, con el algoritmo de Gram-Schmidt (descrito en la proposición A.5.2) vamos a normalizar a la base $\{v_k : 0 \leq k \leq n - 1\}$ de $W_{n,n-1}$, o sea, de \mathbb{R}^n (c.f. cuarto punto del teorema 2.1.14). Por la naturaleza del proceso, durante este se obtienen bases ortonormales para cada uno de los espacios $W_{n,i}$, pues los espacios $W_{n,i}$ están anidados y dos consecutivos de estos difieren por uno en dimensión; en este contexto, realizar el k -ésimo paso en el algoritmo de ortonormalización de Gram-Schmidt lleva a calcular una base ortonormal para el k -ésimo espacio $W_{n,i}$.

Definición 2.3.1

A la base ortonormal de \mathbb{R}^n

$$\mathcal{L}^n = \{\mathcal{L}^{n,k} = (\mathcal{L}_m^{n,k})_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq k \leq n - 1\} \quad (2.14)$$

que resulta de ortonormalizar con G-S a la base

$$\{v_k \in \mathbb{R}^n : 0 \leq k \leq n - 1\}$$

de \mathbb{R}^n la llamaremos la **base de Legendre discreta de dimensión n** .

Denominaremos a la señal $\mathcal{L}^{n,k}$ el **polinomio discreto de Legendre de dimensión n y grado k** .

Nota 2.3.2

A partir de ahora, abreviaremos el nombre “polinomio discreto de Legendre” como “PDL” y “base de Legendre discreta” como “BLD”.

Corolario 2.3.3

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para todo $0 \leq k \leq n - 1$, los vectores

$$\mathcal{L}^{n,l}, \quad 0 \leq l \leq k$$

conforman una BON del espacio $W_{n,k}$.

Corolario 2.3.4

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si k es un entero con $1 \leq k \leq n - 1$, entonces

$$\forall 0 \leq l \leq k - 1 : \mathcal{L}^{n,k} \in W_{n,l}^\perp,$$

o sea, $\mathcal{L}^{n,k}$ es ortogonal a todo polinomio discreto de grado menor a k .

Demostración. En efecto, según la definición 2.3.1, $\mathcal{L}^{n,k}$ es ortogonal a todos los vectores $\mathcal{L}^{n,l}$ con $0 \leq l \leq k - 1$, luego, según el corolario 2.3.3, es ortogonal a todos los elementos de una base del espacio $W_{n,l}$, por lo tanto, a todo elemento de este. \square

$$\mathcal{L}^{n,k} = \left(\mathcal{L}_m^{n,k} \right)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$$

Figure 2.5: Dado el polinomio discreto de Legendre $\mathcal{L}^{n,k} = (\mathcal{L}_m^{n,k})$, n es la variable de **dimensión**, $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ la de **grado** y m es el índice de **posición**. Procuraremos usar siempre esta notación.

Nota 2.3.5

Observe la analogía entre nuestra construcción de la BLD con la esbozada en el capítulo 1 sobre la construcción usual de los polinomios de Legendre (de variable continua); en ambos casos partimos de familias anidadas de espacios de polinomios (discretos o continuos, dependiendo del caso);

$$\{W_{n,k}\}_{k=0}^{n-1}$$

para el caso discreto, y

$$\{\mathbb{R}_{k,-1,1}\}_{k \in \bar{\mathbb{N}}}$$

para el caso continuo (c.f. 1.3.1), y, con el método de Gram-Schmidt, ortonormalizamos estas bases para obtener una BON del espacio ambiente que contiene a la familia (que es \mathbb{R}^n en el primer caso y $L^2[-1, 1]$ en el segundo).

Observe sin embargo que, en el caso discreto, además del parámetro de grado k se tiene también un parámetro n de dimensión. Otra diferencia es que, en el caso continuo, se trataba con una familia anidada numerable, mientras que en el caso n -dimensional la familia anidada consta de n miembros.

Ejemplo 2. A continuación, mostramos las gráficas de los elementos de las bases \mathcal{L}^2 y \mathcal{L}^3 .

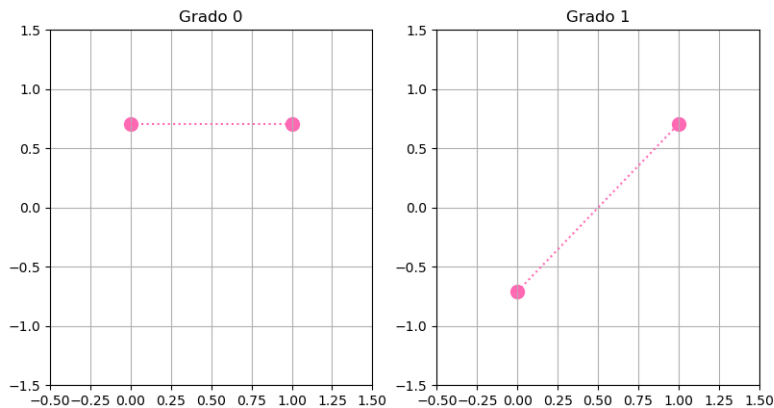


Figure 2.6: Gráficas de los elementos de $\mathcal{L}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

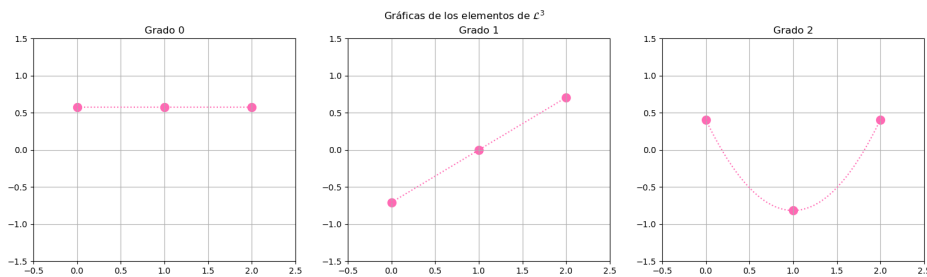


Figure 2.7: Gráficas de los elementos de $\mathcal{L}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$.

En el caso $n = 2$, el único subespacio de polinomios discretos no trivial es

$$\begin{aligned}
 W_{2,0} &= \text{span} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\
 &= \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\},
 \end{aligned}$$

pues

$$W_{2,1} = \mathbb{R}^2.$$

En el caso $n = 3$, calculamos que

$$\begin{aligned}
 W_{3,0} &= \text{span} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} \\
 &= \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{3,1} &= \text{span} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\
 &= \{(x, y, 2y - x) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\},
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

y

$$W_{3,2} = \mathbb{R}^3.$$

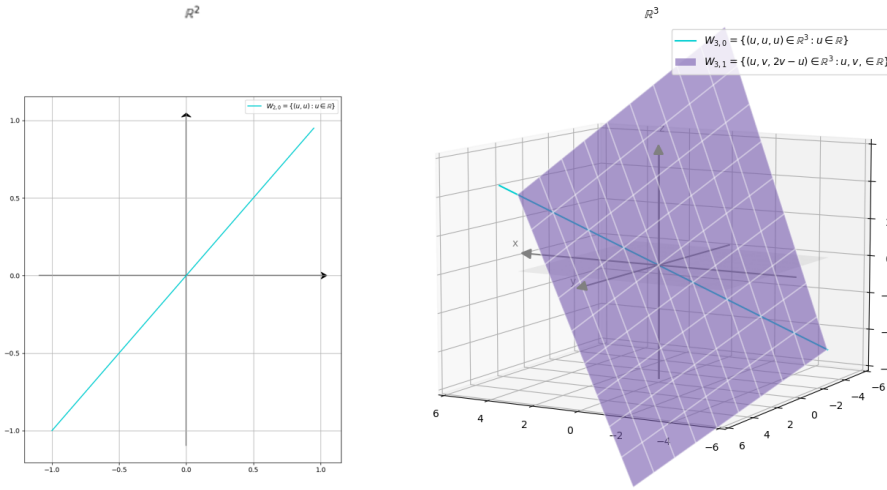


Figure 2.8: Gráficas de $W_{2,0} \subseteq \mathbb{R}^2$ y de los subespacios $W_{3,0}$ y $W_{3,1}$ de \mathbb{R}^3 que son, respectivamente, una recta y un plano; observe que $W_{3,0} \subseteq W_{3,1}$ y que tanto $W_{2,0}$ como $W_{3,1}$ dividen en dos regiones ajenas a sus correspondientes espacios ambiente.

◇

2.4 Sobre formas alternativas de definición de la base \mathcal{L}^n

Fijada una dimensión n , vamos a generalizar los tipos de objetos usados en el método por medio del cual se definió a la base de Legendre discreta \mathcal{L}^n (en la subsección 2.4.1), y además, como prometimos en la introducción, vamos a dar una segunda forma natural de abordar el problema, cambiando el método de discretización (en la subsección 2.4.2), llegando, como se anticipó, a la base \mathcal{L}^n .

2.4.1 Construcción generalizada de los PDL usando la discretización Ω_n

Recuerde que, al definir a los espacios de polinomios discretos $W_{n,i}$ en (2.1.11), consideramos a las funciones polinomiales $f_k(t) = t^k$, con $0 \leq k \leq n - 1$, que después discretizamos en la malla uniforme $\mathcal{P}_n = \{j : 0 \leq j \leq n - 1\}$ para obtener los vectores v_k ; nos disponemos a probar que, si hubiésemos escogido

- funciones polinomiales

$$g_k(t) \in \mathbb{R}[t], \quad \text{con} \quad 0 \leq k \leq n - 1 \text{ entero,}$$

donde el grado de g_k es k y su coeficiente principal c_k es positivo, y

- cualquier malla uniforme de n puntos

$$\mathcal{P} = \{t_j : 0 \leq j \leq n - 1\},$$

si

$$w_k := \Omega_{n,\mathcal{P}}(g_k) = (g_k(t_j))_{j=0}^{n-1}, \quad 0 \leq k \leq n - 1, \quad (2.16)$$

entonces estos vectores w_k generan a los mismos espacios $W_{n,i}$ de antes y, después de ortonormalizar con el método de Gram-Schmidt al subconjunto $\{w_k : 0 \leq k \leq n-1\}$ de \mathbb{R}^n , obtendríamos la base de Legendre discreta \mathcal{L}^n definida en (2.14).

Ejemplo 3. Sea $n = 3$; sean las colecciones de polinomios

$$\{f_0(t), f_1(t), f_2(t)\}, \quad (2.17)$$

con los polinomios f_k como se definieron en (2.1), y

$$\left\{g_0(t) := 3, g_1(t) := \frac{1}{2}t + 1, g_2(t) := t^2 + 2t + 3\right\}. \quad (2.18)$$

Las colecciones (2.17) y (2.18) tienen en común que contienen, por cada $0 \leq k \leq 2$, un polinomio de grado k y coeficiente principal positivo. Sean \mathcal{P}_3 la malla dada por (2.2) con $n = 3$, o sea, sea $\mathcal{P}_3 = \{0, 1, 2\}$, y sea $\mathcal{P} := \{-2, -\frac{1}{2}, 1\}$ otra malla uniforme de tres puntos.

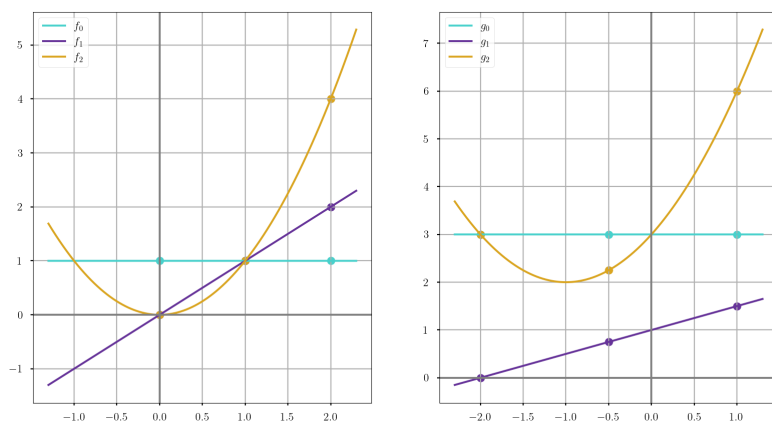


Figure 2.9: Ejemplo concreto del proceso tomando las dos colecciones de polinomios (2.17) y (2.18), discretizándolas, respectivamente, en las mallas uniformes \mathcal{P}_3 y $\mathcal{P} = \{-2, -\frac{1}{2}, 1\}$.

Afirmamos que, si

- (Discretización) consideramos, para $0 \leq k \leq 2$, a los vectores

$$v_k := \Omega_{3, \mathcal{P}_3}(f_k) \text{ y } w_k := \Omega_{3, \mathcal{P}}(g_k),$$

- (Ortogonalización) en base a estos definimos a los vectores

$$\bar{\xi}_0 := v_0, \quad \bar{\eta}_0 := w_0,$$

$$\bar{\xi}_k := v_k - \Pi_{W_{k-1}}(v_k), \quad \bar{\eta}_k := w_k - \Pi_{W_{k-1}}(w_k) \text{ para } k = 1, 2,$$

y, finalmente,

- (Normalización) definimos, para toda $0 \leq k \leq 2$, a los vectores

$$\xi_k := \frac{\bar{\xi}_k}{\|\bar{\xi}_k\|}, \quad \eta_k := \frac{\bar{\eta}_k}{\|\bar{\eta}_k\|},$$

entonces, ocurre que

$$\forall 0 \leq k \leq 2 : \xi_k = \eta_k.$$

◇

Paso I Se sigue directamente de la proposición (2.1.12) que los vectores w_k así construidos forman bases para los espacios de polinomios discretos. Dejamos esto por escrito en el siguiente resultado.

Proposición 2.4.1

Sea

$$\{g_k : 0 \leq k \leq n-1\} \quad (2.19)$$

una colección de polinomios, con g_k un polinomio de grado k y coeficiente principal positivo. Sean \mathcal{P} una malla uniforme de n puntos y considere a los vectores w_k definidos en (2.16). Para toda $0 \leq i \leq n-1$, los vectores

$$w_k \text{ con } 0 \leq k \leq i$$

conforman una base del espacio $W_{n,i}$.

Paso II Tenemos entonces dos bases de $W_{n,n-1} = \mathbb{R}^n$:

$$\{v_i : 0 \leq i \leq n-1\} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ y } \{w_i : 0 \leq i \leq n-1\} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (2.20)$$

donde, recuerde, los vectores v_i se definen como en (2.3) y los w_i son las discretizaciones definidas en (2.16). Sean

$$\{\bar{\xi}_i : 0 \leq i \leq n-1\} \text{ y } \{\bar{\eta}_i : 0 \leq i \leq n-1\} \quad (2.21)$$

las bases que resultan de ortogonalizar a las bases dadas en (2.20) el algoritmo de Gram-Schmidt (c.f. proposición A.5.2) y

$$\{\xi_i : 0 \leq i \leq n-1\}, \quad \{\eta_i : 0 \leq i \leq n-1\} \quad (2.22)$$

a las normalizaciones de las bases dadas en (2.21), o sea, a las bases cuyos elementos son, respectivamente,

$$\xi_i := \frac{\bar{\xi}_i}{\|\bar{\xi}_i\|} \text{ y } \eta_i := \frac{\bar{\eta}_i}{\|\bar{\eta}_i\|} \quad (2.23)$$

con $0 \leq i \leq n-1$.

De la definición de los vectores (2.23) y la proposición 2.4.1 se sigue inmediatamente lo siguiente:

Observación 2.4.2

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $0 \leq i \leq n-1$, los vectores ξ_i y η_i definidos en (2.23) son elementos del subespacio $W_{n,i}$ de \mathbb{R}^n .

La importancia del **Paso I** es que, para efectuar los dos procesos de Gram-Schmidt necesarios para construir las bases (2.21), a pesar de que trabajaremos con dos bases distintas de \mathbb{R}^n , vamos a estar proyectando siempre sobre los mismos espacios $W_{n,i}$. Esta observación es clave para la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 2.4.3

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $0 \leq i \leq n-1$, sean los vectores ξ_i y η_i como en (2.22). Para toda i , $\xi_i = \pm \eta_i$.

Demostración. La clave de la demostración radicar  en ‘‘atrapar’’ en un mismo espacio de dimensi3n uno a los vectores unitarios ξ_i y η_i de \mathbb{R}^n .

Sea $i = 0$. Seg3n el teorema de Gram-Schmidt A.5.2, $\bar{\xi}_0 = v_0$ y $\bar{\eta}_0 = w_0$; además, por definici3n, v_0 es el vector constante uno, y w_0 es la discretizaci3n (en una malla uniforme \mathcal{P}) de un polinomio constante $g(t) = c_0$ con $c_0 > 0$. Usando esto y la definici3n (2.23) tenemos que

$$\xi_0 = \frac{\bar{\xi}_0}{\|\bar{\xi}_0\|} = \frac{v_0}{\|v_0\|} = \frac{(1, \dots, 1)}{\sqrt{n}} = \frac{(c_0, \dots, c_0)}{c_0\sqrt{n}} = \frac{w_0}{\|w_0\|} = \frac{\bar{\eta}_0}{\|\bar{\eta}_0\|} = \eta_0,$$

o sea, la veracidad de la proposici3n para $i = 0$.

Sea ahora $1 \leq i \leq n - 1$. Seg3n la definici3n de los espacios $W_{n,i}$ dada en (2.4) y lo notado en el **Paso I**,

$$\text{span}\{v_k : 0 \leq k \leq i\} = W_{n,i} = \text{span}\{w_k : 0 \leq k \leq i\},$$

luego, seg3n la definici3n de las bases (2.22) el teorema de Gram-Schmidt A.5.1,

$$\text{span}\{\xi_k : 0 \leq k \leq i\} = W_{n,i} = \text{span}\{\eta_k : 0 \leq k \leq i\}.$$

Similarmente,

$$\text{span}\{\xi_k : 0 \leq k \leq i - 1\} = W_{n,i-1} = \text{span}\{\eta_k : 0 \leq k \leq i - 1\}.$$

Recuerde ahora que el espacio $W_{n,i-1}$ está contenido en $W_{n,i}$ (c.f. teorema 2.1.14); si por $V_{n,i}$ denotamos al complemento ortogonal de $W_{n,i-1}$ no respecto a \mathbb{R}^n , sino respecto a $W_{n,i}$, i.e. si

$$V_{n,i} := W_{n,i} \ominus W_{n,i-1}, \quad (2.24)$$

entonces, como $\dim(W_{n,i}) = i + 1$ y $\dim(W_{n,i-1}) = i$ (c.f. teorema 2.1.14), $V_{n,i}$ es un espacio vectorial de dimensi3n uno. Ahora bien,

- como se not3 en la observaci3n 2.4.2, ξ_i es un elemento de $W_{n,i}$ que, seg3n el teorema de Gram-Schmidt A.5.1, es ortogonal a ξ_0, \dots, ξ_{i-1} , luego, seg3n la ecuaci3n (2.24), $\xi_i \in V_{n,i}$.
- Análogamente, $\eta_i \in V_{n,i}$.

En conclusi3n, ξ_i y η_i son vectores unitarios ambos pertenecientes al espacio uno-dimensional $V_{n,i}$; de esto concluimos, como queríamos, que $\xi_i = \pm\eta_i$. \square

Del razonamiento de la demostraci3n anterior se sigue una propiedad importante de los vectores ξ_i y η_i , a saber, su pertenencia a los espacios $V_{n,i}$ definidos en (2.24).

Corolario 2.4.4

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para toda $1 \leq i \leq n - 1$, los vectores ξ_i y η_i definidos en (2.23) son ortogonales a todo polinomio discreto de dimensi3n n de grado menor a i

(i.e. a todo elemento del espacio $W_{n,k}$ con $k < i$).

Paso III Para demostrar que de hecho el signo correcto en la proposición 2.4.3 es siempre positivo, será conveniente establecer antes el siguiente

Lema 2.4.5

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para toda $1 \leq i \leq n-1$, sean w_i , $\bar{\eta}_i$ y η_i los vectores de \mathbb{R}^n definidos como en (2.16), (2.22) y (2.21). Los números reales

$$\langle \bar{\eta}_i, w_i \rangle \text{ y } \langle \eta_i, w_i \rangle$$

son ambos positivos.

Demostración. Puesto que estos números difieren por la multiplicación de una constante positiva (a saber, el recíproco de la norma del vector $\bar{\eta}_i$; recuerde que η_i se definió como la normalización del vector $\bar{\eta}_i$), basta demostrar que ocurre $\langle \bar{\eta}_i, w_i \rangle > 0$.

Recuerde que, según la versión del teorema de Gram-Schmidt dada en A.5.2,

$$w_i = \bar{\eta}_i + \Pi_{W_{n,i-1}}(w_i);$$

puesto que los vectores $\bar{\eta}_i$ y $\Pi_{W_{n,i-1}}(w_i)$ de \mathbb{R}^n son ortogonales entre sí, podemos aplicar la identidad de Parseval (c.f. nota 1.1.2) para establecer la siguiente igualdad en \mathbb{R} :

$$\|w_i\|^2 = \|\bar{\eta}_i\|^2 + \|\Pi_{W_{n,i-1}}(w_i)\|^2;$$

como el vector $\bar{\eta}_i$ no es cero (ya lo hemos exhibido en (2.21) como elemento de una base de un espacio), de esta última ecuación obtenemos la desigualdad

$$\|\Pi_{W_{n,i-1}}(w_i)\| < \|w_i\|;$$

multiplicando ambos lados de la desigualdad por el real positivo $\|w_i\|$ y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz A.4.5, llegamos a que

$$\langle w_i, \Pi_{W_{n,i-1}}(w_i) \rangle \leq |\langle w_i, \Pi_{W_{n,i-1}}(w_i) \rangle| \leq \|w_i\| \cdot \|\Pi_{W_{n,i-1}}(w_i)\| < \|w_i\|^2,$$

o sea, a que

$$\|w_i\|^2 - \langle w_i, \Pi_{W_{n,i-1}}(w_i) \rangle > 0.$$

Concluimos gracias a esta desigualdad que el número real

$$\begin{aligned} \langle \bar{\eta}_i, w_i \rangle &= \langle w_i - \Pi_{W_{n,i-1}}(w_i), w_i \rangle \\ &= \langle w_i, w_i \rangle - \langle \Pi_{W_{n,i-1}}(w_i), w_i \rangle \\ &= \|w_i\|^2 - \langle w_i, \Pi_{W_{n,i-1}}(w_i) \rangle \end{aligned}$$

es mayor a cero. □

Estamos listos para demostrar la igualdad entre los vectores ξ_i y η_i .

Proposición 2.4.6

Sea $n \in \mathbb{N}$. Sean

$$\{\xi_i : 0 \leq i \leq n-1\}, \quad \{\eta_i : 0 \leq i \leq n-1\}$$

las colecciones de vectores definidas en (2.22). Para toda $0 \leq i \leq n-1$,

$$\xi_i = \eta_i.$$

Demostración. Sea $0 \leq i \leq n-1$ entero. Ya vimos en la demostración de la proposición 2.4.3 que $\xi_0 = \eta_0$. Según esta misma proposición, si $i > 1$,

$$\xi_i = a_i \eta_i, \quad \text{con } a_i \in \{\pm 1\}. \quad (2.25)$$

Si demostramos que a_i es positivo, acabamos. Ahora bien, por ser η_i un vector unitario, $\langle \eta_i, \eta_i \rangle = 1$, luego, como

$$\xi_i = d_i(v_i - \Pi_{W_{n,i-1}}(v_i)), \quad \text{con } d_i = \frac{1}{\|v_i - \Pi_{W_{n,i-1}}(v_i)\|} > 0 \quad (2.26)$$

tenemos, por (2.25) y (2.26) que

$$\begin{aligned} a_i &= a_i \langle \eta_i, \eta_i \rangle = \langle a_i \eta_i, \eta_i \rangle \\ &= \langle \xi_i, \eta_i \rangle \\ &= \langle d_i(v_i - \Pi_{W_{n,i-1}}(v_i)), \eta_i \rangle \\ &= d_i (\langle v_i, \eta_i \rangle - \langle \Pi_{W_{n,i-1}}(v_i), \eta_i \rangle) \\ &= d_i \langle v_i, \eta_i \rangle, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por pertenecer la proyección $\Pi_{W_{n,i-1}}(v_i)$ al espacio $W_{n,i-1}$ y por ser η_i , según el corolario 2.4.4, ortogonal a cualquier elemento de este espacio.

Así, a_i es el producto del real positivo d_i con el producto punto $\langle v_i, \eta_i \rangle$, luego, el signo de a_i es el mismo que el de producto punto. En este punto del argumento, nos interesa pues conocer el signo de $\langle v_i, \eta_i \rangle$; como los vectores η_i se definieron a partir de los vectores w_i por el algoritmo de Gram-Schmidt, lo que sí sabemos, gracias al lema 2.4.5, es que

$$\langle w_i, \eta_i \rangle > 0. \quad (2.27)$$

Recuerde que, por hipótesis, g_i es un polinomio de grado i con coeficiente principal c_i positivo; digamos pues que $g_i(t) = \sum_{k=0}^i c_k t^k$, donde

$$c_i > 0. \quad (2.28)$$

Según el argumento dado en la demostración de la proposición 2.1.10, si

$$h > 0 \quad (2.29)$$

es el paso de la malla \mathcal{P} , entonces la función $\phi(t) := ht + t_0$ es tal que

$$\forall 0 \leq j \leq n-1: \quad t_j = \phi(j);$$

componiendo ambos lados de la igualdad con g_i (para alguna $0 \leq i \leq n-1$), llegamos a que

$$\forall 0 \leq j \leq n-1 : \quad g_i(t_j) = G_i(j), \quad (2.30)$$

donde

$$G_i(t) := (g_i \circ \phi)(t) = \sum_{k=0}^i c_k (ht + t_0)^k,$$

o sea,

$$G_i(t) = c_i h^i t^i + q_{i-1}(t) + \sum_{k=0}^{i-1} c_k (ht + t_0)^k, \quad (2.31)$$

donde $q_{i-1}(t) := c_i (ht + t_0)^i - c_i h^i t^i$ es un polinomio de grado a lo más $i-1$. De las igualdades (2.30) y (2.31) se deduce que

$$\begin{aligned} w_i &= (g_i(t_j))_{j=0}^{n-1} \\ &= (G_i(j))_{j=0}^{n-1} \\ &= \left(c_i h^i j^i + q_{i-1}(t) + \sum_{k=0}^{i-1} c_k (hj + t_0)^k \right)_{j=0}^{n-1} \\ &= (c_i h^i j^i)_{j=0}^{n-1} + \left(q_{i-1}(t) + \sum_{k=0}^{i-1} c_k (hj + t_0)^k \right)_{j=0}^{n-1} \\ &= c_i h^i (j^i)_{j=0}^{n-1} + \left(q_{i-1}(t) + \sum_{k=0}^{i-1} c_k (hj + t_0)^k \right)_{j=0}^{n-1}; \end{aligned}$$

según la notación 2.1.5, esta última igualdad puede escribirse como sigue:

$$w_i = c_i h^i v_i + z_{i-1}, \quad (2.32)$$

donde

$$z_{i-1} := \left(q_{i-1}(t) + \sum_{k=0}^{i-1} c_k (hj + t_0)^k \right)_{j=0}^{n-1};$$

como z_{i-1} es la discretización en una malla uniforme (a saber, \mathcal{P}_n) de un polinomio de grado a lo más $i-1$,

$$z_{i-1} \in W_{n,k} \quad \text{para alguna } k < i; \quad (2.33)$$

según el corolario 2.4.4, la relación (2.33) implica que

$$\langle z_{i-1}, \eta_i \rangle = 0. \quad (2.34)$$

Despejando a v_i de (2.32), llegamos a que

$$v_i = \frac{1}{c_i h^i} (w_i - z_{i-1}), \quad (2.35)$$

luego, por (2.34)

$$\langle v_i, \eta_i \rangle = \left\langle \frac{1}{c_i h^i} (w_i - z_{i-1}), \eta_i \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c_i h^i} \langle w_i, \eta_i \rangle - \frac{1}{c_i h^i} \langle z_{i-1}, \eta_i \rangle \\
&= \frac{1}{c_i h^i} \langle w_i, \eta_i \rangle.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Según (2.28) y (2.29), $\frac{1}{c_i h^i}$ es un número positivo, además, según (2.27), $\langle w_i, \eta_i \rangle$ también; así, (2.36) expone a $\langle v_i, \eta_i \rangle$ como el producto de números positivos. Concluimos así, como queríamos, que $\langle v_i, \eta_i \rangle > 0$. \square

2.4.2 Construcción de \mathcal{L}^n en base a discretizaciones integrales

Para terminar la sección de construcciones alternativas de la base de Legendre discreta, en esta subsección daremos una segunda forma natural de discretizar funciones continuas (esta basada en promedios integrales) a partir de la cual, con un proceso análogo al expuesto anteriormente, construiremos una base del espacio \mathbb{R}^n que, como probaremos, es \mathcal{L}^n .

Definición 2.4.7

(**Operador de discretización** $\Delta_{n,a,b}$) Dados dos números reales $a < b$, se divide regularmente al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $h = \frac{b-a}{n}$, es decir, consideramos la partición

$$\mathcal{P}_n = \{t_j\}_{j=0}^n, \quad \text{con } t_j = j \frac{b-a}{n} + a \quad \text{para } 0 \leq j \leq n. \tag{2.37}$$

Definimos entonces al operador $\Delta_{n,a,b}$ de $\mathcal{C}[a, b]$ en \mathbb{R}^n como

$$\Delta_{n,a,b}(f) = \frac{1}{h} (u_{n,j}(f))_{j=1}^n, \quad f \in \mathcal{C}[a, b],$$

donde, para toda $1 \leq j \leq n$,

$$u_{n,j} := \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t) dt.$$

Demostremos que, si escogemos

- para $0 \leq k \leq n-1$ funciones polinomiales $g_k(t) \in \mathbb{R}[t]$

$$g_k(t) = \sum_{i=0}^k c_{k,i} t^i, \quad c_{k,k} > 0, \tag{2.38}$$

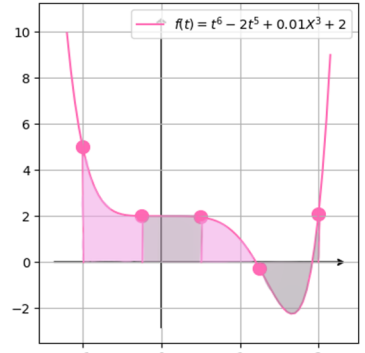
de grado k y coeficiente principal $c_{k,k}$ positivo,

- cualquier intervalo $[a, b]$ que partimos uniformemente con la malla de $n+1$ puntos $\mathcal{P}_n = \{t_j\}_{j=0}^n$ definida en (2.37),

y si definimos, para toda $0 \leq k \leq n-1$ al vector u_k en función de g_k como

$$u_k := \Delta_{n,a,b}(g_k) = \left(\frac{1}{h} \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_k(t) dt \right)_{j=1}^n, \tag{2.39}$$

entonces los primeros i vectores de la forma (2.39) generan a los espacios $W_{n,i}$ definidos antes en 2.1.6, son linealmente independientes y, después de ortonormalizarse con el proceso de G-S, obtenemos a los elementos de la base \mathcal{L}^n .



$$\Delta_{4,-1,2}(f) \approx \left(\frac{8}{3}, 2, \frac{6}{5}, -\frac{6}{5} \right) \in \mathbb{R}^4.$$

Figure 2.10: Ejemplo con $n = 4$, $a = -1$, $b = 2$ y $f(t) = t^6 - 2t^5 + 0.01t^3 + 2$

Comencemos demostrando la independencia lineal de los n vectores (2.39). Al igual que para la demostración de la proposición análoga 2.1.12, la prueba de este hecho se basa en el Teorema fundamental del álgebra.

Proposición 2.4.8

Sea $n \in \mathbb{N}$. El subconjunto $\{u_k : 0 \leq k \leq n-1\}$ de \mathbb{R}^n , con u_k los n vectores definidos en (2.39), es linealmente independiente.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existen números reales a_k , con $0 \leq k \leq n-1$, no todos cero tales que se tenga la siguiente igualdad en \mathbb{R}^n :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k = 0. \tag{2.40}$$

Desglosando la igualdad (2.40) entrada a entrada, descomponemos a esta en el siguiente sistema de n ecuaciones en \mathbb{R} :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{h} \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_k(t) dt = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Multiplicando este sistema por h , llegamos a las n igualdades

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_k(t) dt = 0, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{2.41}$$

Por la linealidad de la integral, el sistema (2.41) se reescribe como

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} p(t) dt = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{2.42}$$

donde p es el polinomio

$$p(t) := \sum_{k=0}^{n-1} a_k g_k(t). \tag{2.43}$$

Como todos los polinomios g_i son, por hipótesis, de grado menor a n y linealmente independientes (en el espacio $\mathbb{R}[t]$), y se ha supuesto que no todos los coeficientes a_i son cero, el polinomio p definido en (2.43) es no cero y de grado menor a n .

Según el sistema (2.42), en cada uno de los intervalos

$$I_j := [t_{j-1}, t_j], \quad 1 \leq j \leq n,$$

la función polinomial p , continua en todos ellos, integra cero.

Ahora bien, si en I_j la función p fuese siempre positiva, la integral de esta sería positiva; si fuese siempre negativa, la integral también. Existen entonces puntos a_j y b_j en I_j tales que

$$p(a_j) < 0 \quad \text{y} \quad p(b_j) > 0.$$

Aplicando el teorema del valor intermedio (c.f. [Spi08] p. 109) deducimos la existencia de un r_j entre a_j y b_j (y que entonces será punto interior de I_j) tal que $p(r_j) = 0$; así, para cada $1 \leq j \leq n$, hemos encontrado una raíz r_j de p en el interior de I_j ; por ser ajenos los interiores de los intervalos I_j , estamos seguros de que las n raíces r_j son distintas entre sí. Llegamos así a que el polinomio no cero p , cuyo grado es a lo más $n-1$, tiene al menos n raíces distintas; esto contradice la proposición A.1.6. □

Proposición 2.4.9

Sean $n \in \mathbb{N}$. Para toda $0 \leq k \leq n - 1$, si $g_k \in \mathbb{R}[t]$ es como en (2.38) y $u_k \in \mathbb{R}^n$ como en (2.39), entonces u_k es la discretización en una malla uniforme de n puntos de un polinomio de grado k y coeficiente principal positivo. En particular, $u_k \in W_{n,k}$.

Demostración. La j -ésima entrada del vector u_k (con $1 \leq j \leq n$) es, según la igualdad (2.39),

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h} \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_k(t) dt &= \frac{1}{h} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sum_{i=0}^k c_{k,i} t^i dt \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} c_{k,i} t^i dt \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \frac{c_{k,i}}{i+1} t^{i+1} \Big|_{t=t_{j-1}}^{t=t_j} \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \frac{c_{k,i}}{i+1} t^{i+1} \Big|_{t=t_{j-1}}^{t=t_{j-1} + \frac{b-a}{n}} \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \frac{c_{k,i}}{i+1} \left(t_{j-1} + \frac{b-a}{n} \right)^{i+1} - \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \frac{c_{k,i}}{i+1} t_{j-1}^{i+1};
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

esta última expresión, en principio, es un polinomio de grado a lo más $k + 1$, que denotaremos por q_k , evaluado en t_{j-1} , y que está dado por la expresión

$$q_k(t) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \frac{c_{k,i}}{i+1} \left(t + \frac{b-a}{n} \right)^{i+1} - \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \frac{c_{k,i}}{i+1} t^{i+1}. \tag{2.45}$$

- Note que las potencias de orden $k + 1$ del argumento t en la expresión (2.45) se dan cuando en la primera y segunda suma el índice i vale k ; tal parte de la suma es

$$\frac{1}{h} \frac{c_{k,k}}{k+1} \left(t + \frac{b-a}{n} \right)^{k+1} - \frac{1}{h} \frac{c_{k,k}}{k+1} t^{k+1} = \frac{1}{h} \frac{c_{k,k}}{k+1} t^{k+1} - \frac{1}{h} \frac{c_{k,k}}{k+1} t^{k+1} + (*) = (*), \tag{2.46}$$

donde $(*)$ denota un sumando que no contiene potencias de orden $k + 1$ de t (y que, por lo tanto, no interesa para conocer el coeficiente de t^{k+1}). Así, según (2.46), el grado de q_k es a lo más k .

- Busquemos ahora el coeficiente de q_k asociado a la potencia k ; aparece en el lado derecho de (2.45) la potencia k de t cuando en el primer sumando $i = k, k - 1$ y también cuando en el segundo sumando $i = k - 1$; así, el coeficiente buscado es

$$\frac{1}{h} \frac{c_{k,k}}{k+1} (k+1) \frac{b-a}{n} + \frac{1}{h} \frac{c_{k,k-1}}{k} - \frac{1}{h} \frac{c_{k,k-1}}{k} = \frac{c_{k,k}(b-a)}{hn}. \tag{2.47}$$

Puesto que, por hipótesis (c.f. condición (2.38)) el número $c_{k,k}$ es positivo, tenemos que el coeficiente principal 2.47 de q_k es positivo.

Según todo lo anterior, u_k es el polinomio discreto obtenido al evaluar al polinomio q_k (cuyo grado es k y tiene coeficiente principal (2.47), de hecho, es positivo) en la malla uniforme $\mathcal{P}_n = \{t_j\}_{j=0}^{n-1}$. De esto y el teorema 2.1.14 se deduce la pertenencia de u_k al espacio $W_{n,k}$. \square

Recapitulemos; hemos demostrado que el subconjunto

$$\{u_k : 0 \leq k \leq n-1\} \quad (2.48)$$

de \mathbb{R}^n

- es linealmente independiente (c.f. proposición 2.4.8), y que,
- para toda $0 \leq k \leq n-1$, u_k es la discretización en una malla uniforme de n puntos de un polinomio de grado k y coeficiente principal positivo (c.f. proposición 2.4.9), luego, $u_k \in W_{n,k}$ (c.f. teorema 2.1.14);

así, (2.48) es una colección de polinomios que satisface las condiciones pedidas en la subsección 2.4.1. Concluimos, según lo demostrado en esa subsección, que el resultado de ortonormalizar la base $\{u_k\}_{k=0}^{n-1}$ de \mathbb{R}^n (construida, recuerde, a partir del operador de discretización $\Delta_{n,a,b}$) es nuestra base de Legendre discreta definida en 2.3.1.

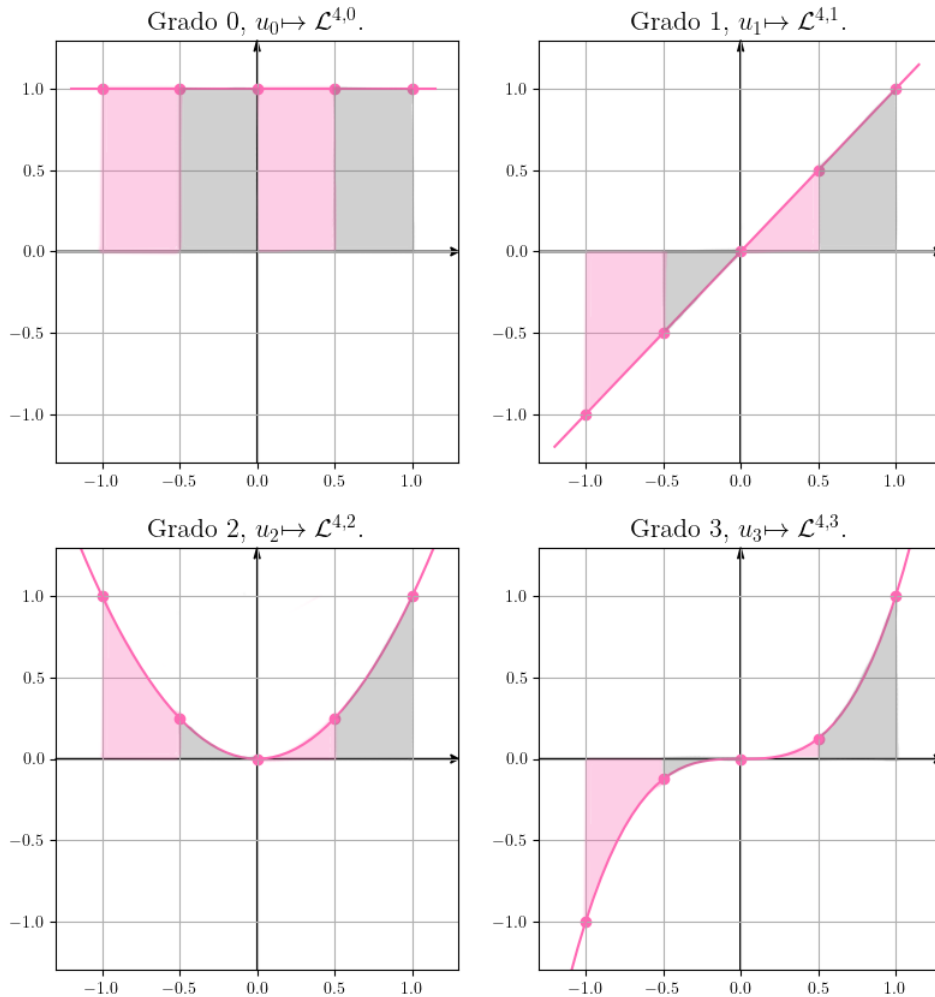


Figure 2.11: Según lo demostrado, podemos discretizar a los polinomios f_k , $0 \leq k \leq n-1$ con el operador $\Delta_{n,-1,1}$ para obtener una colección de vectores $\{u_k : 0 \leq k \leq n-1\}$ que, después de ortonormalizarse con el algoritmo de Gram-Schmidt, de lugar a la base \mathcal{L}^n . En la figura se ilustra este proceso para cuando $n = 4$.

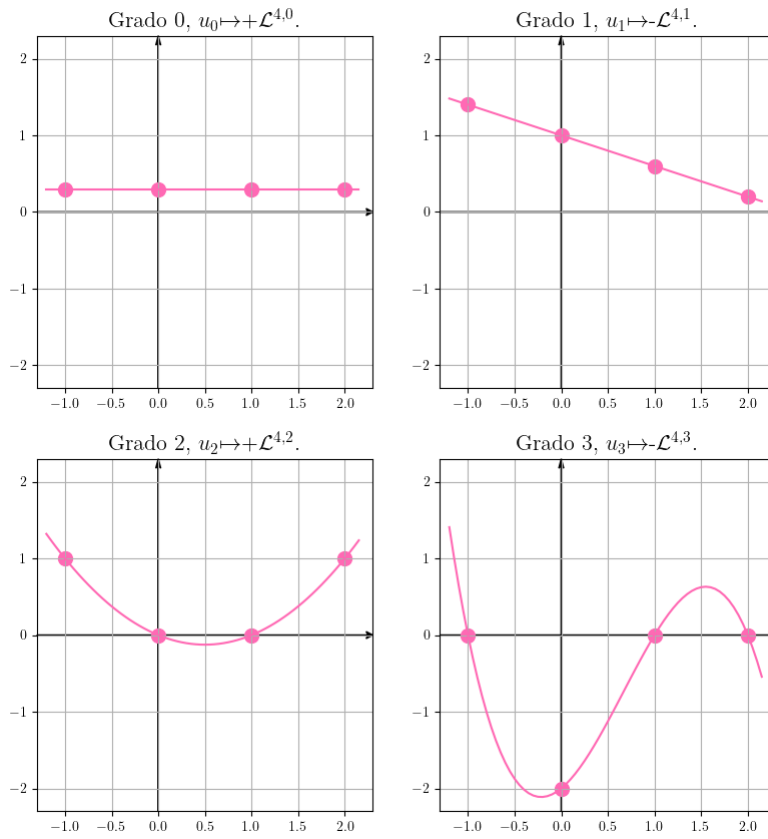


Figure 2.12: Según la teoría desarrollada, fijada una dimensión n podemos cambiar tanto la malla uniforme como el método de discretización; después de ortonormalizar, salvo por cambios de signo, llegaremos a la base \mathcal{L}^n . Es el coeficiente principal del polinomio que se discretizará el que determina el signo correcto. Para el ejemplo mostrado en la imagen (donde se ha fijado $n = 4$), se han considerado a los polinomios $h_0(t) = 0.3$, $h_1(t) = -0.4t + 1$, $h_2(t) = 0.5t^2 - 0.5t$ y $h_3(t) = -t^3 + 2t^2 + t - 2$. Como se destaca, los polinomios con coeficiente principal negativo dan lugar a los respectivos polinomios de Legendre discretos con signo negativo.

Chapter 3

Sobre simetrías en las entradas de los polinomios de Legendre discretos

Puesto que planeamos implementar computacionalmente las bases de Legendre discretas, es de utilidad buscar simetrías en las entradas de los vectores que las componen, pues esto puede reducir significativamente el número de operaciones requeridas para el cálculo de bases de este tipo. Podemos usar la construcción canónica (c.f. definición 2.3.1) para calcular las bases de Legendre discretas hasta dimensión 6; tabulamos los resultados a continuación.

k \ n	2	3	4
0	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
1	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$
2	----	$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
3	----	----	$\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{3}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$

k \ n	5	6
0	$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
1	$\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$	$\left(-\sqrt{\frac{5}{14}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}, -\frac{1}{\sqrt{70}}, \frac{1}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \sqrt{\frac{5}{14}}\right)$
2	$\left(\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$	$\left(\frac{5}{2\sqrt{21}}, -\frac{1}{2\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{2\sqrt{21}}, \frac{5}{2\sqrt{21}}\right)$
3	$\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, \frac{7}{6\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{7}{6\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$
4	$\left(\frac{1}{\sqrt{70}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{35}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{70}}\right)$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}, -\frac{3}{2\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{3}{2\sqrt{7}}, \frac{1}{2\sqrt{7}}\right)$
5	----	$\left(-\frac{1}{6\sqrt{7}}, \frac{5}{6\sqrt{7}}, -\frac{5}{3\sqrt{7}}, \frac{5}{3\sqrt{7}}, -\frac{5}{6\sqrt{7}}, \frac{1}{6\sqrt{7}}\right)$

Para las dimensiones n marcadas puede apreciarse que, en el vector, $\mathcal{L}^{n,k} = (\mathcal{L}_m^{n,k})_{m=0}^{n-1}$, las entradas a la derecha son iguales a las de la izquierda, con un cambio de signo que depende de la paridad del grado k del polinomio discreto de Legendre.

Para demostrar que en efecto se tienen las simetrías sugeridas por las tablas anteriores para cualquier n , conviene usar una de las múltiples definiciones iniciales

que dimos para la base \mathcal{L}^n , a saber, una que involucre discretizaciones puntuales de polinomios que dé lugar a vectores w_k que ya presenten este tipo de simetrías.

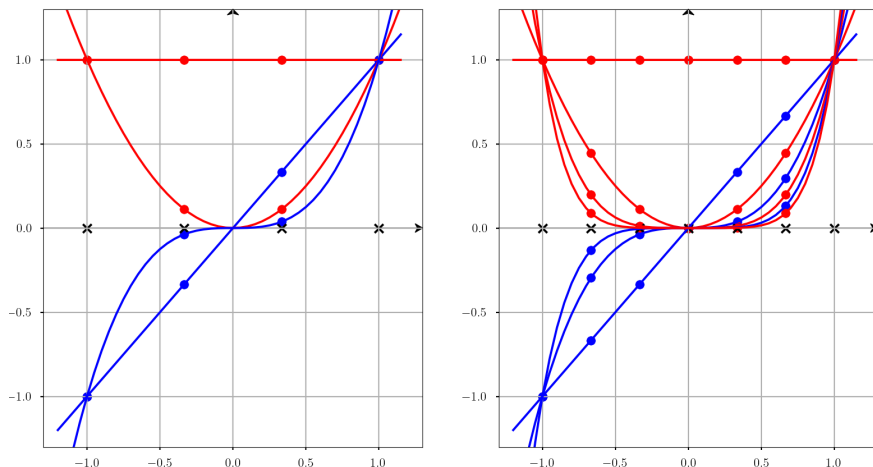


Figure 3.1: En la figura se ilustran los polinomios y las mallas uniformes que escogeremos cuando las dimensiones sean $n = 4$ (dimensión par) y $n = 7$ (dimensión impar). Observe que las discretizaciones obtenidas con estas elecciones tienen las simetrías presentes en las dos tablas de arriba.

Antes de empezar nuestro análisis, damos definiciones para las simetrías que parecen aparecer en las entradas de los polinomios discretos de Legendre.

Definición 3.0.1

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sea $M = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Definimos al **espacio de señales antisimétricas** $S_{n,-}$ como

$$S_{n,-} := \{x = (x_m)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n \mid \forall 0 \leq m \leq M-1 : x_m = -x_{n-m-1}\} \quad (3.1)$$

y, además, definimos al **espacio de señales simétricas** $S_{n,+}$ como

$$S_{n,+} := \{x = (x_m)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n \mid \forall 0 \leq m \leq M-1 : x_m = x_{n-m-1}\}, \quad (3.2)$$

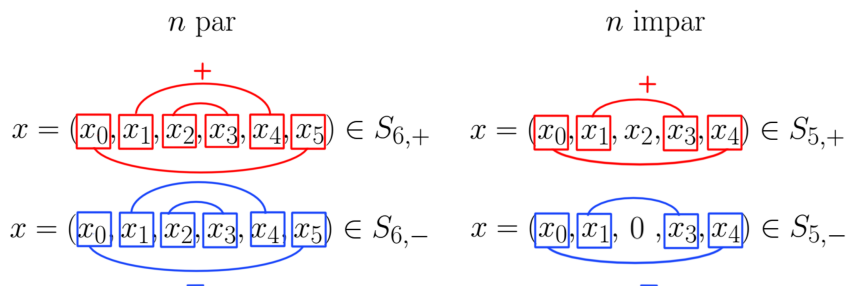
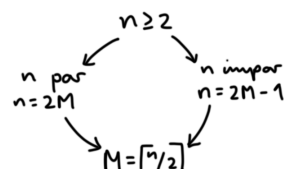


Figure 3.2: Figura que ilustra las definiciones de los espacios $S_{n,+}$ y $S_{n,-}$ para distintas paridades de n .

Las siguientes dos observaciones se siguen de inmediato.

Observación 3.0.2

Sea $n \geq 2$ entero. Los conjuntos $S_{n,+}$ y $S_{n,-}$ definidos como en 3.0.1. son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^n .

Observación 3.0.3

Sea $n \geq 2$ entero. Sea \mathcal{P} la malla uniforme de n puntos con puntos extremos

-1 y 1 . Para toda $0 \leq k \leq n-1$, sean las potencias básicas $f_k(t) = t^k$ y los vectores

$$w_k = (w_{k,m})_{m=0}^{n-1} := \Omega_{n,\mathcal{P}}(f_k), \quad (3.3)$$

donde $\Omega_{n,\mathcal{P}}$ es el operador definido en 2.1.1. Para toda $0 \leq k \leq n-1$ se tiene que

- $w_k \in S_{n,+}$ si k es par, y
- $w_k \in S_{n,-}$ si k es impar,

donde $S_{n,+}$ es como en (3.2) y $S_{n,-}$ es como en (3.1).

Es fácil establecer la perpendicularidad entre señales simétricas con señales antisimétricas. Hacemos esto a continuación.

Lema 3.0.4

Sea $n \geq 2$. Sean $S_{n,+}$ y $S_{n,-}$ como en la definición 3.0.1. Para cualesquiera $u \in S_{n,+}$ y $v \in S_{n,-}$ se tiene que $\langle u, v \rangle = 0$.

Demostración. Supongamos que n es impar; digamos entonces que $n = 2M - 1$,

$$u = (a_0, \dots, a_{M-2}, a_{M-1}, a_{M-2}, \dots, a_0),$$

y que

$$v = (b_0, \dots, b_{M-2}, 0, -b_{M-2}, \dots, -b_0).$$

Se calcula directamente que

$$\langle u, v \rangle = \sum_{m=0}^{M-2} a_m \cdot b_m + a_N \cdot 0 - \sum_{m=0}^{M-2} a_m \cdot b_m = 0.$$

El argumento para n par es análogo. □

3.1 Estudio para dimensiones impares

A lo largo de esta subsección vamos estudiar las simetrías presentes en las entradas de los PDL $\mathcal{L}^{n,k}$, con $0 \leq k \leq n-1$, cuando la dimensión n es impar; si $M := \lceil \frac{n}{2} \rceil$, entonces

$$n = 2M - 1. \quad (3.4)$$

Teorema 3.1.1

(Sobre simetrías en los polinomios discretos de Legendre de dimensión impar). Sea $n \in \mathbb{N}$ como en (3.4). Sea $0 \leq k \leq n-1$ y considere al vector $\mathcal{L}^{n,k} = (\mathcal{L}_m^{n,k})_{m=0}^{n-1}$ como se ha definido en 2.3.1. Se tiene que

- $\mathcal{L}^{n,k} \in S_{n,+}$ si k es par, y que
- $\mathcal{L}^{n,k} \in S_{n,-}$ si k es impar,

es decir, que para toda $0 \leq k \leq n-1$,

- para toda $0 \leq m \leq M-2$ se tiene que $\mathcal{L}_m^{n,k} = \mathcal{L}_{n-m-1}^{n,k}$ si k es par y

- para toda $0 \leq m \leq M - 2$ se tiene que $\mathcal{L}_m^{n,k} = -\mathcal{L}_{n-m-1}^{n,k}$ y $\mathcal{L}_{M-1}^{n,k} = 0$ si k es impar.

$$\mathcal{L}^{n,k} = \left(\mathcal{L}_0^{n,k}, \mathcal{L}_1^{n,k}, \dots, \mathcal{L}_{M-2}^{n,k}, \mathcal{L}_{M-1}^{n,k}, \mathcal{L}_M^{n,k}, \dots, \mathcal{L}_{n-2}^{n,k}, \mathcal{L}_{n-1}^{n,k} \right)$$

Figure 3.3: Fijadas una dimensión impar $n = 2M - 1$ y un grado $0 \leq k \leq n - 1$, el teorema 3.1.1 da una relación simple entre las parejas de entradas de $\mathcal{L}^{n,k}$ con índices m y $2n - m - 1$ (donde los índices $0 \leq m \leq M - 2$ son los de las primeras $M - 1$ entradas).

Demostración. Sean los vectores w_k como en la observación 3.0.3. Según lo demostrado en la subsección 2.4.1, si

$$\{\bar{\eta}_k : 0 \leq k \leq n - 1\}$$

es la base de \mathbb{R}^n que se obtiene al ortogonalizar con el proceso de Gram-Schmidt a la base

$$\{w_k : 0 \leq k \leq n - 1\}$$

de \mathbb{R}^n , o sea, si

$$\bar{\eta}_0 = w_0, \quad (3.5)$$

y si

$$\forall 1 \leq k \leq n - 1 : \bar{\eta}_k = w_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle w_k, \bar{\eta}_j \rangle}{\langle \bar{\eta}_j, \bar{\eta}_j \rangle} \bar{\eta}_j, \quad (3.6)$$

entonces, para toda $0 \leq k \leq n - 1$ tenemos la relación

$$\mathcal{L}^{n,k} = \frac{1}{\|\bar{\eta}_k\|} \cdot \bar{\eta}_k;$$

en particular, los vectores $\mathcal{L}^{n,k}$ y $\bar{\eta}_k$ son múltiplos escalares uno del otro.

Afirmamos que ocurre que $\bar{\eta}_k \in S_{n,+}$ (resp. que $\bar{\eta}_k \in S_{n,-}$) si k es par (resp. impar); por ser $S_{n,+}$ y $S_{n,-}$ cerrados bajo multiplicación por escalares (c.f. observación 3.0.2), si logramos demostrar esta afirmación podremos concluir lo deseado.

Procedemos a demostrar esto por inducción sobre k .

- (Base de inducción) según la igualdad (3.5) y la observación 3.0.3, la afirmación es trivialmente cierta para $k = 0$, el menor grado par. Considere ahora a $k = 1$, el menor grado impar. Según (3.6),

$$\bar{\eta}_1 = w_1 - \frac{\langle w_1, \bar{\eta}_0 \rangle}{\langle \bar{\eta}_0, \bar{\eta}_0 \rangle} \bar{\eta}_0. \quad (3.7)$$

De la observación 3.0.3 y el lema 3.0.4 se sigue que el producto punto $\langle w_1, \bar{\eta}_0 \rangle$ es cero; sustituyendo esto en (3.7) se infiere que

$$\bar{\eta}_1 = w_1 + 0 \cdot \bar{\eta}_0 = w_1 \in S_{n,-}.$$

La base de inducción queda así completa.

- (Paso inductivo) Sea $0 \leq k \leq n - 1$ par, y supongamos la afirmación cierta para todo polinomio de Legendre discreto de dimensión n y grado menor a k ; mostremos que $\bar{\eta}_k$ es elemento de $S_{n,+}$. La fórmula (3.6) nos da una expresión para $\bar{\eta}_k$. Puesto que para toda $0 \leq j \leq k - 1$ impar se tiene (por hipótesis de inducción) que $\bar{\eta}_j \in S_{n,-}$ y como $w_k \in S_{n,+}$ (c.f. observación 3.0.3), tenemos, según el lema 3.0.4, que para todo $0 \leq j \leq k - 1$ impar, $\langle w_k, \bar{\eta}_j \rangle = 0$; sustituyendo esto en la expresión para $\bar{\eta}_k$, llegamos a que

$$\bar{\eta}_k = w_k - \sum_{\substack{j=0, \\ j \text{ par}}}^{k-1} \frac{\langle w_k, \bar{\eta}_j \rangle}{\langle \bar{\eta}_j, \bar{\eta}_j \rangle} \bar{\eta}_j; \quad (3.8)$$

según la observación 3.0.3 y nuestra hipótesis de inducción, (3.8) expresa al vector $\bar{\eta}_k$ como combinación lineal de elementos de $S_{n,+}$, luego, lo expone como elemento de este espacio vectorial. De un argumento dual se sigue la veracidad de la afirmación también cuando se supone k impar.

□

3.2 Estudio para dimensiones pares

Una discusión análoga a la desarrollada en la subsección anterior se sigue para cuando la dimensión n del espacio es par; la única diferencia es que los vectores discretos de Legendre de una tal dimensión no tienen entrada central, pero los argumentos de simetría y antisimetría se siguen igualmente.

Establecemos pues, sin demostración, la contraparte del teorema 3.1.1 correspondiente a dimensiones pares.

Teorema 3.2.1

(Sobre simetrías en los polinomios discretos de Legendre de dimensión par). Sea $n \in \mathbb{N}$ par, digamos, $n = 2M$, con $M \geq 1$. Sea $0 \leq k \leq n - 1$ y considere al vector $\mathcal{L}^{n,k} = (\mathcal{L}_m^{n,k})_{m=0}^{n-1}$ como se ha definido en 2.3.1. Se tiene que

- $\mathcal{L}^{n,k} \in S_{n,+}$ si k es par, y que
- $\mathcal{L}^{n,k} \in S_{n,-}$ si k es impar,

es decir, que para toda $0 \leq k \leq n - 1$

- para toda $0 \leq m \leq M - 1$ se tiene que $\mathcal{L}_m^{n,k} = \mathcal{L}_{n-m-1}^{n,k}$ si k es par y
- para toda $0 \leq m \leq M - 1$ se tiene que $\mathcal{L}_m^{n,k} = -\mathcal{L}_{n-m-1}^{n,k}$ si k es impar.

$$\mathcal{L}^{n,k} = \left(\mathcal{L}_0^{n,k}, \mathcal{L}_1^{n,k}, \dots, \mathcal{L}_{M-1}^{n,k}, \mathcal{L}_M^{n,k}, \dots, \mathcal{L}_{n-2}^{n,k}, \mathcal{L}_{n-1}^{n,k} \right)$$

Figure 3.4: Fijadas una dimensión par $n = 2M$ y un grado $0 \leq k \leq n-1$, en esta proposición se da una relación simple entre las parejas de entradas de $\mathcal{L}^{n,k}$ con índices m y $n-m-1$ (donde los índices $0 \leq m \leq M-1$ son los de las primeras M entradas).

Chapter 4

Cálculo de los PDL

4.1 Revisión de literatura

Después de revisar la literatura, encontramos que otros autores ya han considerado polinomios discretos ortogonales antes, principalmente en áreas de ingeniería. Los libros y artículos más relevantes que encontramos son [NS74], [KK96], [Forne], [Him70] y [RR78].

4.1.1 Uso de polinomios discretos en problemas de ajuste de datos

Toda la literatura citada al inicio introduce la noción de “polinomios discretos ortogonales” con una misma motivación; facilitar la resolución de problemas de ajuste de datos basados en mínimos cuadrados.

Vamos a esbozar las ideas explicadas en [Forne] en esta dirección. Usamos para esto la notación empleada en el artículo.

El problema central que se desea resolver es el siguiente: fijada una familia de polinomios $\{p_i(x)\}_{i=0}^k$ tales que

$$\partial(p_i) = i \text{ para toda } 0 \leq i \leq k \quad (4.1)$$

y dados m puntos de observaciones

$$(x_1, f_1), \dots, (x_m, f_m),$$

con los x_i distintos entre sí y

$$k + 1 < m, \quad (4.2)$$

se desea encontrar ⁵ constantes $s_i^{(k)}$, con $0 \leq i \leq k$, tales que el polinomio definido como

$$y_k(x) = s_0^{(k)} p_0(x) + \dots + s_k^{(k)} p_k(x)$$

sea tal que la función de $k + 1$ variables

$$\Phi(s_0^{(k)}, \dots, s_k^{(k)}) := \sum_{\mu=1}^m (f_\mu - \sum_{h=0}^k s_h^{(k)} p_h(x_\mu))^2$$

⁵ Como se explica en el artículo [Forne], se pide la condición (4.1) para que cualquier polinomio de grado a lo más k pueda representarse como combinación lineal de los polinomios p_i .

$$= \sum_{\mu=1}^m (f_{\mu} - y_k(x_{\mu}))^2 \quad (4.3)$$

alcance su mínimo para esta elección de constantes $s_i^{(k)}$.

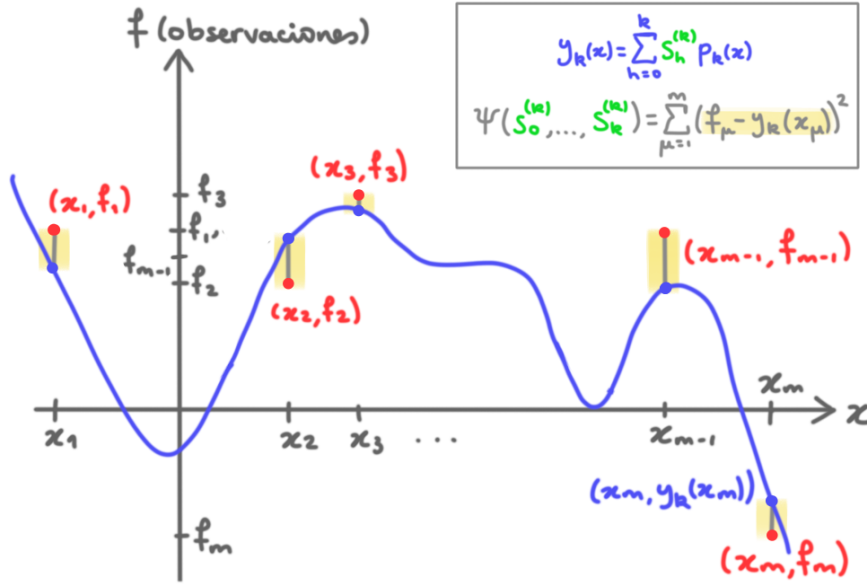


Figure 4.1: El problema consiste entonces en buscar a un polinomio $y_k(x)$ de grado a lo más k o, equivalentemente, determinar a las constantes $s_0^{(k)}$, de tal forma que la suma de los cuadrados de las diferencias entre 1. las mediciones reales f_{μ} y 2. los valores $y_k(x_{\mu})$ dados por el modelo polinomial sea mínima.

Adoptando las abreviaciones

$$w_{ij} = \sum_{\mu=1}^m p_i(x_{\mu}) p_j(x_{\mu}) \quad (4.4)$$

y

$$w_i = \sum_{\mu=1}^m f_{\mu} p_i(x_{\mu}),$$

como se discute en [Forne], del usar que el mínimo o máximo de una función de varias variables $\Phi = \Phi(s_0^{(k)}, \dots, s_k^{(k)})$ de clase C^{∞} (como lo es y_k , por ser combinación lineal de polinomios) sea tal que las derivadas parciales de la función evaluadas en ese punto sean cero, se deduce el siguiente sistema de ecuaciones:⁶

$$\begin{cases} w_{00} s_0^{(k)} + \dots + w_{0k} s_k^{(k)} = w_0, \\ \dots & \dots \\ w_{k0} s_0^{(k)} + \dots + w_{kk} s_k^{(k)} = w_k. \end{cases}$$

En [Forne] se nota que “este sistema de ecuaciones es muy general, ya que, para resolverlo, sólo se ha fijado la restricción de grados (4.1) en los polinomios p_i ; para poder resolver con relativa facilidad el sistema de ecuaciones para valores altos de k , es suficiente que los elementos $w_{i,j}$ con $i \neq j$ (i.e. los coeficientes no pertenecientes a la diagonal) sean, en comparación a los coeficientes diagonales w_{ii} , pequeños. En la práctica, esto suele conseguirse seleccionando polinomios $p_i(x)$ que sean ortogonales respecto a una distribución”. Enseguida se nota que, pidiendo no sólo la restricción de grados (4.1), sino también el que

$$\forall i \neq j : w_{ij} = \sum_{\mu=1}^m p_i(x_{\mu}) p_j(x_{\mu}) = 0, \quad (4.5)$$

⁶ En [Forne] a tal sistema se le denomina el “sistema de ecuaciones normales del problema de ajuste de mínimos cuadrados”.

hecho que es descrito como el “pedir que los polinomios $p_i(x)$ sean mutuamente ortogonales sobre el conjunto de puntos x_1, \dots, x_m ”, permite reescribir el sistema de ecuaciones normales como

$$\begin{cases} w_{00}s_0^{(k)} \dots = w_0, \\ \dots \dots \\ \dots w_{kk}s_k^{(k)} = w_k, \end{cases}$$

luego, resolverlo se reduce a calcular k divisiones.

Nota 4.1.1

Lo único que debe comprobarse para asegurarse de que este último sencillo sistema tiene solución es que ninguno de los coeficientes w_{ii} es cero; usando la expresión (4.4), vemos que w_{ii} es cero si y sólo si para toda $1 \leq \mu \leq m$ ocurre que $p_i(x_\mu) = 0$. Como, según la condición (4.1), el grado de p_i es $i \leq k < m$ (c.f. (4.2)), es consecuencia del teorema fundamental del álgebra (c.f. proposición A.1.6) el que no pueda ocurrir que todo x_μ sea raíz de p , luego, aseguramos que para toda i se tiene que $w_{ii} \neq 0$.

La situación aquí descrita ilustra perfectamente por qué en la práctica es tan útil considerar colecciones de polinomios que cumplan una condición de ortogonalidad (como la propuesta en (4.5)) sobre un conjunto discreto. Las otras referencias citadas al inicio del capítulo tiene información sobre la implementación y fórmulas concretas de tales familias de polinomios. Nosotros nos concentramos a estudiar en particular la referencia [NS74], pues en este estudio se recopilan fórmulas que nosotros usaremos para derivar expresiones para los polinomios discretos de Legendre que hemos definido en el capítulo 2.

4.1.2 Polinomios discretos de Legendre en la literatura

La fuente más completa que encontramos fue [NS74], un estudio en el que se recopilan varias fórmulas (sin demostración) concernientes a polinomios ortogonales de variable discreta.

En [NS74], fijado un $N \geq 2$, tratan con funciones $P : \{0, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$ de variable discreta, y se interesan en los $N + 1$ “polinomios de variable discreta K ”

$$P_m(K, N), \quad K = 0, \dots, N,$$

donde $m \in \{0, \dots, N\}$ es llamado el “grado” del polinomio discreto, que quedan (afirman) unívocamente determinados por las condiciones de ortogonalidad

$$\sum_{m=0}^n P_k(m, n)P_l(m, n) = 0 \quad \text{si } m \neq l \tag{DLOP-1[n]}$$

y por la condición de normalización

$$\text{para toda } 0 \leq k \leq n, \quad P_k(0, n) = 1. \tag{DLOP-2[n]}$$

Para empezar a compaginar la notación del artículo con la nuestra, hagamos los cambios de variable $m = k$, $K = m$ y $N = n - 1$, siendo la variable de la izquierda la empleada originalmente en [NS74] y la de la derecha la que usamos nosotros.

Pensando en los $n + 1$ vectores de \mathbb{R}^{n+1} que resultan de evaluar estas funciones discretas en su rango, es decir, en los vectores

$$y_{n+1,k} := (P_k(m, n))_{m=0}^{m=n} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.6)$$

las condiciones (DLOP-1[n]) y (DLOP-2[n]) se reinterpretan como

$$\{y_{n+1,k} : 0 \leq k \leq n\} \text{ es una base ortogonal de } \mathbb{R}^{n+1} \quad (\text{DLOP}'\text{-1}[n])$$

y

$$\text{la primera entrada de todo } y_k \text{ es uno.} \quad (\text{DLOP}'\text{-2}[n])$$

Los autores de este estudio recopilan y derivan expresiones analíticas (que dependen de n y k) para estas funciones discretas $P_k(\cdot, n)$ y, del notar que los coeficientes numéricos de estos son, salvo por posibles cambios de signo, los de los polinomios de Legendre trasladados (c.f. [Leg]) se refieren a estos como **polinomios ortogonales discretos de Legendre** (“discrete Legendre orthogonal polynomials” en inglés), usando para designarlos la abreviatura “DLOP’s”.

Aparte de mencionar en la introducción que “variantes de estos polinomios fueron consideradas por primera vez por Chebyshev en 1858 y más tarde por Gram en 1915”, no se da un marco teórico como el desarrollado por nosotros, sólo se dan expresiones analíticas de estos. Los trabajos originales de Chebyshev y Gram no están citados en las referencias del artículo, y nosotros no fuimos capaces de encontrarlos. Nos limitamos pues a usar las fórmulas ofrecidas en [NS74] para, a continuación, derivar fórmulas para los polinomios discretos de Legendre $\mathcal{L}^{n,k}$ como los hemos definido en el capítulo 2.

4.2 Expresión analítica de los PDL

Fijada una dimensión n , planeamos usar las fórmulas dadas en [NS74] para establecer expresiones analíticas de los vectores de nuestra base \mathcal{L}^n ; queremos, pues, a partir de las expresiones dadas de los elementos de la base

$$\{y_{n,k} := (P_k(m, n-1))_{m=0}^{m=n-1} : 0 \leq k \leq n-1\} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (4.7)$$

obtener las de la base de Legendre discreta

$$\mathcal{L}^n = \{\mathcal{L}^{n,k} = (\mathcal{L}_m^{n,k})_{m=0}^{m=n-1} : 0 \leq k \leq n-1\} \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (4.8)$$

Lema 4.2.1

Sea $n \in \mathbb{N}$. Considere a las bases de \mathbb{R}^n

$$\{y_{n,k} := (P_k(m, n-1))_{m=0}^{m=n-1} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq k \leq n-1\}, \quad (4.9)$$

donde las funciones $P_k(\cdot, n-1) = P_k(m, n-1)$ de variable $0 \leq m \leq n-1$ son las únicas que satisfacen las condiciones (DLOP-1[n]) y (DLOP-2[n]), y la base de Legendre discreta de dimensión n

$$\mathcal{L}^n = \{\mathcal{L}^{n,k} = (\mathcal{L}_m^{n,k})_{m=0}^{m=n-1} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq k \leq n-1\}. \quad (4.10)$$

Para todo $0 \leq k \leq n-1$, los vectores $y_{n,k}$ y $\mathcal{L}^{n,k}$ son paralelos.

Demostración. Procedemos por inducción sobre k .

- (Base de inducción) ys habíamos calculado que $\mathcal{L}^{n,0} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$; según la ecuación (7) de [NS74], $P_0(\cdot, n-1)$ es función discreta constante uno, luego, $y_0 = (1, \dots, 1)$. Es claro entonces que $\mathcal{L}^{n,0}$ y y_0 son paralelos.
- (Paso inductivo) supongamos cierta la proposición para todo entero entre 0 y $k-1$ (inclusivo).
Según la fórmula (7) de [NS74], $y_{n,k}$ es un polinomio discreto con dominio uniforme, donde la máxima potencia del polinomio discretizado para obtenerse $y_{n,k}$ es k , luego,

$$y_{n,k} \in W_{n,k}.$$

Según la condición (DLOP'-1[n]), $y_{n,k}$ es ortogonal a los k vectores

$$y_{n,l}, \quad 0 \leq l \leq k-1;$$

como estos, según nuestra hipótesis de inducción, son paralelos (respectivamente) a los

$$\mathcal{L}^{n,l}, \quad 0 \leq l \leq k-1,$$

tenemos que $y_{n,k}$ es ortogonal a todos estos vectores, vectores que conforman una base del espacio $W_{n,k-1}$ (c.f. corolario 2.3.3); así,

$$y_{n,k} \in W_{n,k} \ominus W_{n,k-1} = \text{span}(\mathcal{L}^{n,k});$$

de esto se concluye, como queríamos, que los vectores $y_{n,k}$ y $\mathcal{L}^{n,k}$ son paralelos. \square

Del paralelismo establecido en este último lema 4.2.1 podemos establecer una igualdad entre los vectores $y_{n,k}$ y los $\mathcal{L}^{n,k}$.

Proposición 4.2.2

Sean $n \in \mathbb{N}$ y sean las bases (4.9) y (4.10) de \mathbb{R}^n . Para toda $0 \leq k \leq n-1$,

$$\mathcal{L}^{n,k} = (-1)^k \cdot \frac{y_{n,k}}{\|y_{n,k}\|}. \quad (4.11)$$

Demostración. Sea $0 \leq k \leq n-1$. Del lema 4.2.1 y el que el vector $\mathcal{L}^{n,k}$ sea unitario se deduce la existencia de un escalar a_k tal que

$$a_k \mathcal{L}^{n,k} = y_{n,k}, \quad \text{con } a_k \in \{\pm \|y_{n,k}\|\}. \quad (4.12)$$

Determinemos el signo de a_k .

Puesto que $\mathcal{L}^{n,k}$ es ortogonal a todos los polinomios discretos de grado menor a k (c.f. corolario 2.3.4), aplicando la bilinealidad del producto punto en \mathbb{R}^n y usando la fórmula (7) de [NS74], tenemos que

$$\begin{aligned} a_k &= a_k \cdot 1 = a_k \cdot \langle \mathcal{L}^{n,k}, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \\ &= \langle a_k \mathcal{L}^{n,k}, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \\ &= \langle y_{n,k}, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (P_k(m, n-1))_{m=0}^{n-1}, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \\
&= \left\langle \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{(n-1)^{\binom{k}{k}}} \cdot v_k, \mathcal{L}^{n,k} \right\rangle, \\
&= \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{(n-1)^{\binom{k}{k}}} \langle v_k, \mathcal{L}^{n,k} \rangle,
\end{aligned}$$

donde v_k es, como siempre, el vector dado por (2.3). En resumen, hemos llegado a que

$$a_k = (-1)^k \cdot \frac{\binom{2k}{k}}{(n-1)^{\binom{k}{k}}} \cdot \langle v_k, \mathcal{L}^{n,k} \rangle. \quad (4.13)$$

Como $\frac{\binom{2k}{k}}{(n-1)^{\binom{k}{k}}}$ es un número positivo, sólo los factores $(-1)^k$ y $\langle v_k, \mathcal{L}^{n,k} \rangle$ determinan el signo de a_k . Recuerde ahora que, según nuestra construcción inicial, los polinomios discretos de Legendre de dimensión n (i.e. los elementos del conjunto (4.10)) se obtienen al ortonormalizar con el proceso de Gram-Schmidt a la base de \mathbb{R}^n formada por los vectores v_k ; podemos entonces aplicar el lema 2.4.5 para concluir que el signo del producto punto $\langle v_m, \mathcal{L}^{n,m} \rangle$ es positivo; así, según (4.13), el signo de a_k es $(-1)^k$; puesto que a_k sólo podía ser $\|y_{n,k}\|$ o $-\|y_{n,k}\|$ (c.f. (4.12)) y por ser la norma de un vector es no negativa, concluimos que $a = (-1)^k \|y_{n,k}\|$; sustituyendo esto en (4.12), concluimos lo deseado. \square

Recuerde que nuestro objetivo es determinar expresiones de los vectores $\mathcal{L}^{n,k}$; después de lo demostrado en la proposición 4.2.2 estamos en posición de hacer esto, pues en base a la relación de ortogonalidad [NS74], p. 746 podemos calcular el cuadrado de la norma de cada vector $y_{n,k}$ (o sea, el valor absoluto de a_k) y en base a [NS74][7] podemos obtener una expresión para $y_{n,k}$.

Planteamos, por fin, una expresión para todo vector de la forma $\mathcal{L}^{n,k}$ en el siguiente teorema. Para su formulación necesitamos antes definir el concepto de “fading factorial” usado en el artículo [NS74], que definen en la página 745. Por comodidad, preferimos reformular su definición en términos de cocientes de factoriales.

Definición 4.2.3

Sean $K, m \in \overline{\mathbb{N}}$. Se define el **fading factorial** $K^{(m)}$ como sigue;

$$K^{(m)} = \begin{cases} \frac{K!}{(K-m)!} & \text{si } K \geq m, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 4.2.4

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para toda $0 \leq k \leq n-1$,

$$\mathcal{L}_m^{n,k} = (-1)^k \sqrt{\frac{(2k+1)(n-1)^{\binom{k}{k}}}{(n+k)^{\binom{k+1}{k}}}} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{k+j}{j} \frac{m^{(j)}}{(n-1)^{\binom{j}{j}}}, \quad (4.14)$$

donde $\mathcal{L}^{n,k} = (\mathcal{L}_m^{n,k})_{m=0}^{n-1}$ es el polinomio discreto de Legendre de dimensión n y grado k definido en 2.3.1.

Demostración. Basta hacer los siguientes cambios de variable (siendo la variable de la izquierda la que se usa originalmente en [NS74] y la de la derecha la adoptada

por nosotros);

$$m = k, \quad K = m, \quad N = n - 1, \quad l = m.$$

Según la fórmula de ortogonalidad (p. 746 de [NS74]),

$$\|y\|_{n,k}^2 = \sum_{m=0}^{n-1} P_k(m, n-1)^2 = \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{(n+k)^{(k+1)}}{(n-1)^{(k)}}. \quad (4.15)$$

Además,

$$y_k = (P_k(m, n-1))_{m=0}^{m=n-1} = \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{k+j}{j} \frac{m^{(j)}}{(n-1)^{(j)}} \right)_{m=0}^{n-1}. \quad (4.16)$$

Sustituyendo (4.15) y (4.16) en la expresión (4.11) obtenida en la proposición 4.2.2, concluimos que

$$(\mathcal{L}_m^{n,k})_{m=0}^{n-1} = \mathcal{L}^{n,k} = (-1)^k \cdot \sqrt{\frac{(2k+1)(n-1)^{(k)}}{(n+k)^{(k+1)}}} \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{k+j}{j} \frac{m^{(j)}}{(n-1)^{(j)}} \right)_{m=0}^{n-1}.$$

□

4.2.1 Fórmulas explícitas para los primeros vectores (máximo hasta el cuarto) de la base \mathcal{L}^n

Sea $n \geq 2$.

- Para toda $0 \leq m \leq n-1$,

$$\mathcal{L}_m^{n,0} = \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (4.17)$$

- **Fórmula para los polinomios de legendre discretos de grado $k = 1$**

$$\mathcal{L}_m^{n,1} = \sqrt{\frac{3(n-1)}{n(n+1)}} \left(\frac{2}{n-1} m - 1 \right),$$

o sea,

$$\mathcal{L}_m^{n,1} = \frac{2\sqrt{3}}{(n+1)n(n-1)} \left(m - \frac{n-1}{2} \right) \quad (4.18)$$

- **Fórmula para los polinomios de legendre discretos de grado $k = 2$**
si $n \geq 3$,

$$\mathcal{L}_m^{n,2} = \sqrt{\frac{5(n-1)(n-2)}{n(n+1)(n+2)}} \left(1 - \frac{6}{n-1} m + \frac{6}{(n-1)(n-2)} m(m-1) \right),$$

o sea,

$$\mathcal{L}_m^{n,2} = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}} \left(\left(m - \frac{n-1}{2} \right)^2 + \frac{n-1}{4} (23n-47) \right)$$

- **Fórmula para los polinomios de Legendre discretos de grado $k = 3$**
si $n \geq 4$,

$$\mathcal{L}_m^{n,3} = -\sqrt{\frac{7(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+3)(n+2)(n+1)n}} (1 - A_n m + B_n m(m-1) - C_n m(m-1)(m-2)),$$

donde

$$A_n := \frac{12}{n-1},$$

$$B_n := \frac{30}{(n-1)(n-2)}$$

y

$$C_n := \frac{20}{(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

Mostramos las gráficas de los PDL hasta dimensión 8.

Nota 4.2.5

Según la proposición 2.2.1, dado $n \geq 2$, una vez fijada la malla uniforme de discretización como \mathcal{P}_n , para cada PDL $\mathcal{L}^{n,k}$ existe un único polinomio de variable continua cuya discretización puntual en la malla \mathcal{P}_n es $\mathcal{L}^{n,k}$.

Para encontrar a tales polinomios de variable continua, bien se pueden usar fórmulas de interpolación (c.f. [Int]), aunque en realidad a estas alturas ya tenemos una fórmula explícita para tal polinomio; revise la ecuación (4.14), en la que se da una fórmula para la entrada m -ésima del PDL $\mathcal{L}^{n,k}$. Observe que la variable m aparece sólo en la suma, y que su potencia máxima es k . Además, el coeficiente que acompaña a esta potencia máxima no es cero (pues la raíz cuadrada involucrada en la expresión (4.14) nunca es cero, y el coeficiente de la suma que multiplica a la potencia k -ésima de m es $(-1)^k \frac{(2k)!}{(k!)^2} \neq 0$). Así, usando la expresión (4.14) con m no una variable discreta, sino continua, se obtiene un polinomio de grado k que, según el teorema 4.2.4, evaluado en los elementos de la malla uniforme \mathcal{P}_n da lugar a las entradas de $\mathcal{L}^{n,k}$.

El código usado para graficar estos polinomios (y que fue usado para graficar las figuras de abajo) se encuentra en el repositorio <https://github.com/AmelieBernes/tesis-licenciatura/tree/main>.

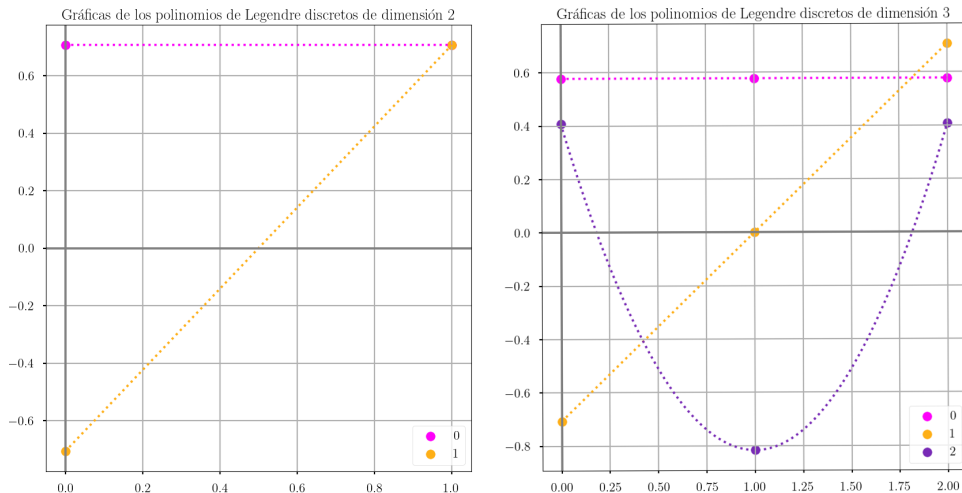


Figure 4.2: PDL de dimensiones 2 y 3.

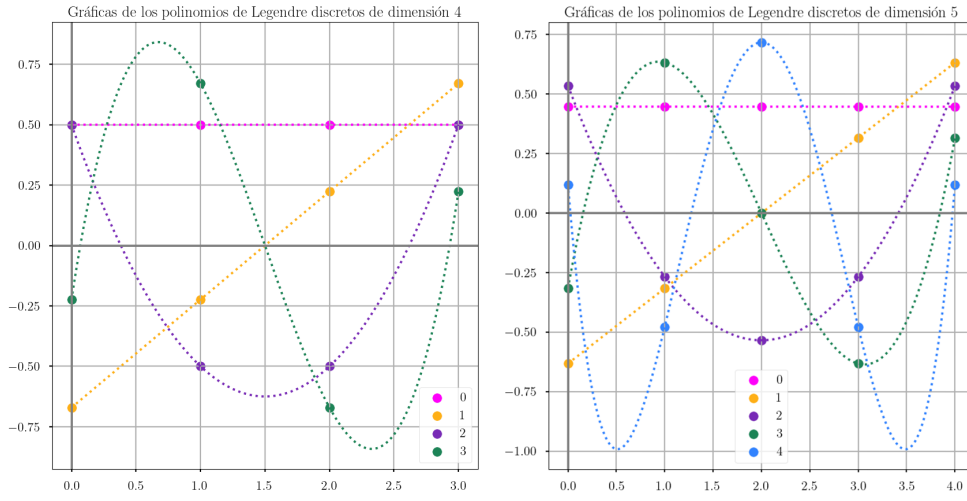


Figure 4.3: PDL de dimensiones 4 y 5.

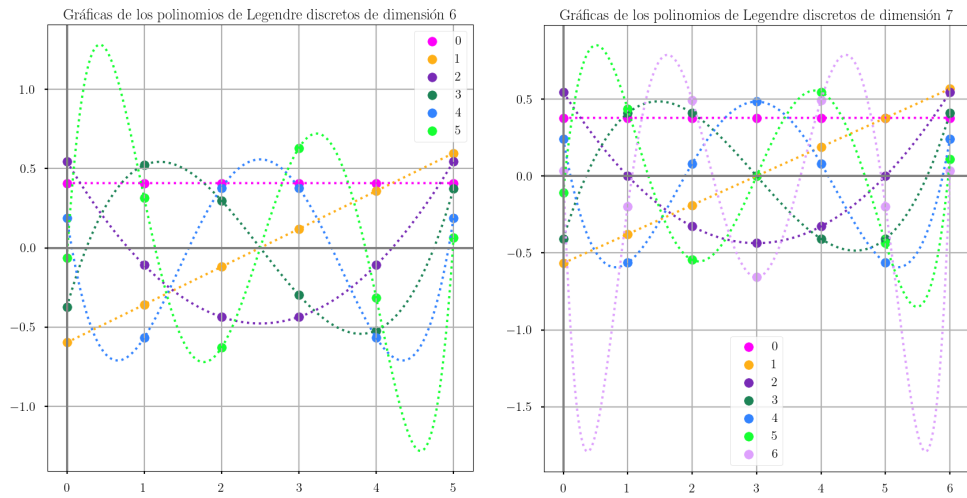


Figure 4.4: PDL de dimensiones 6 y 7.

4.3 Implementación computacional de las bases discretas de Legendre

Haciendo uso de la fórmula establecida en el teorema 4.2.4 y las simetrías exploradas en el capítulo 3, definiremos un algoritmo para calcular las bases de Legendre discretas. Para implementarlo, lo escribiremos en Python. El input y output del algoritmo deseado son como siguen:

- **Input:** la dimensión requerida $n \geq 2$, variable de tipo `int`.
- **Output:** lista con n entradas, siendo la k -ésima entrada (con $0 \leq k \leq n-1$) una lista que contiene las n entradas del vector $\mathcal{L}^{n,k}$.

output

$$\begin{array}{l}
 \text{input} \quad \longrightarrow \quad [[0.4472, 0.4472, 0.4472, 0.4472, 0.4472], \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad [-0.6324, -0.3162, 0, 0.3162, 0.6324], \\
 n = 5 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad [0.5345, -0.2673, -0.5345, -0.2673, 0.5345], \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad [-0.3162, 0.6324, 0, -0.6324, 0.3162], \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad [0.1195, -0.4781, 0.7171, -0.4781, 0.1195]]
 \end{array}$$

Figure 4.5: Se ilustran el input y el output esperados del algoritmo para $n = 5$. En los scripts que escribimos no se pidió redondeo a cuatro decimales.

4.3.1 Análisis de la expresión de los PDL

Sean $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n - 1$. Veamos cómo usar lo que sabemos para calcular eficientemente al vector $\mathcal{L}^{n,k}$ o, equivalentemente, para calcular cada una de sus n entradas, que son los números reales $\mathcal{L}_m^{n,k}$, con $0 \leq m \leq n - 1$.

Conviene reescribir la expresión (4.14) resaltando con colores el papel que juegan la dimensión n , el grado k y la posición m en la fórmula para $\mathcal{L}_m^{n,k}$:

$$\mathcal{L}_m^{n,k} = (-1)^k \sqrt{\frac{(2k+1)(n-1)^{(k)}}{(n+k)^{(k+1)}}} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{k+j}{j} \frac{m^{(j)}}{(n-1)^{(j)}}. \quad (4.19)$$

Recuerde el concepto de fading factorial definido en 4.2.3. Observe ahora que, en la expresión (4.19), aparecen cuatro fading factorials;

- $(n-1)^{(k)}$, que nunca es cero, pues $n-1 \geq k$ siempre ocurre,
- $(n+k)^{(k+1)}$, que nunca es cero, pues $n+k \geq k+1$ siempre ocurre,
- $(n-1)^{(j)}$ que, por ocurrir $j \leq k \leq n-1$, nunca es cero, y
- $m^{(j)}$, que no es cero si y sólo si $j \leq m$;

según este último punto, algunos de los sumandos considerados en la sumatoria en (4.19) pueden ser cero; podemos ajustar el limite superior de la sumatoria y llegar así a que

$$\mathcal{L}_m^{n,k} = (-1)^k \sqrt{\frac{(2k+1)(n-1)^{(k)}}{(n+k)^{(k+1)}}} \sum_{j=0}^{\min(k,m)} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{k+j}{j} \frac{m^{(j)}}{(n-1)^{(j)}}, \quad (4.20)$$

Podemos también usar la definición de fading factorial para reescribir (4.20) en términos de factoriales como sigue:

$$\mathcal{L}_m^{n,k} = A_{n,k} \sum_{j=0}^{\min(k,m)} B_{n,k,m,j}, \quad (4.21)$$

donde

$$A_{n,k} := (-1)^k (n-1)! \sqrt{\frac{(2k+1)}{(n-(k+1))!(n+k)!}}, \quad (4.22)$$

y

$$B_{n,k,m,j} := (-1)^j \frac{m!}{(n-1)!} \frac{(k+j)!(n-(j+1))!}{(j!)^2(k-j)!(m-j)!}. \quad (4.23)$$

Usando las fórmulas (4.21), (4.22) y (4.23) junto con las simetrías estudiadas en la sección 3, podemos escribir con facilidad el algoritmo deseado.

4.4 Pseudocódigos algoritmos usados para calcular las BDL

A continuación mostramos los pseudocódigos para calcular los polinomios discretos de Legendre.

Las implementaciones en Python de todos estos algoritmos se compartieron en <https://github.com/AmelieBernes/tesis-licenciatura/tree/main>.

- Damos los algoritmos **sumandoV1** y **sumandoV2** (c.f. 1, 2) para calcular el número

$$B_{n,k,m,j}. \quad (4.24)$$

El primero usa directamente la fórmula (4.23), mientras que en el segundo simplificamos los factoriales que aparecen en la definición (4.23) de $B_{n,k,m,j}$ para llegar a la expresión

$$(-1)^j \frac{m!}{(n-1)!} \frac{(k+j)!(n-j-1)!}{(j!)^2(k-j)!(m-j)!} = (-1)^j \frac{\left(\prod_{\mu=m-j+1}^m \mu\right) \left(\prod_{\mu=k-j+1}^{k+1} \mu\right)}{\left(\prod_{\mu=n-j}^{n-1} \mu\right) \left(\prod_{\mu=n-j}^{n-1} \mu\right)^2}.$$

- Damos dos algoritmos **sumatoriaV1** y **sumatoriaV2** (c.f. 3 y c.f. 4) para calcular a la suma

$$\sum_{j=0}^{\min(k,m)} B_{n,k,m,j}; \quad (4.25)$$

observe en la definición de estos que **sumatoriaV1** hace referencia a **sumandoV1**, mientras que **sumatoriaV2** hace referencia a **sumandoV2**

- Los algoritmos **baseLegendre_dimImpar** y **baseLegendre_dimPar** (c.f. 5 y 6) que sirven para calcular, usando ya sea el algoritmo **sumatoriaV1** o **sumatoriaV2**, la base de Legendre discreta de dimensión n ; se usa el primero si n es impar y el segundo si n es par. Las líneas 10 de estos algoritmos se justifican, respectivamente, con los teoremas 3.1.1 y 3.2.1. Por último, tenemos el sencillo algoritmo **calculo_base**, que, en base a la paridad de la dimensión n , decide si usar el algoritmo 5 o el 6 para calcular la BDL de dimensión n .

Para los pseudocódigos usamos las siguiente abreviaciones:

- **APPEND**(A,t) donde A es una lista y t es un elemento significa “agregar t al final de la lista A ”.
- **CONCATENATE**(A,B), donde A y B son listas, significa concatenar A con B .

- $PRODUCT(A)$, donde A es una lista cuyas entradas son todas variables de tipo `float`, significa “calcular el producto de todos los elementos de A ”. Si A es vacía, $PRODUCT(A)$ es uno.
- $SUM(A)$, donde A es una lista cuyas entradas son todas variables de tipo `float`, significa “calcular la suma de todos los elementos de A ”.
- $CEIL(a)$, donde a es una variable de tipo `float`, significa “calcular $\lceil a \rceil$ ”.

Algorithm 1 *sumandoV1*

Input: n, k, m, j , todas de tipo `int`, con $n \geq 2, 0 \leq k, m \leq n-1, 0 \leq j \leq \min(k, m)$

Output: El número $B_{n,k,m,j}$ definido en (4.24).

1: **return** $\frac{(k+j)!*(n-j-1)!}{(j!)^2*(k-j)!*(m-j)!}$

Algorithm 2 *sumandoV2*

Input: n, k, m, j , todas de tipo `int`, con $n \geq 2, 0 \leq k, m \leq n-1, 0 \leq j \leq \min(k, m)$

Output: El número (4.24)

1: $B1, B2, B3, B4 \leftarrow []$
2: **for** $t = m - j + 1$ **to** $t = m$ **do**
3: $APPEND(B1, t)$
4: **end for**
5: **for** $t = k - j + 1$ **to** $t = k + j$ **do**
6: $APPEND(B2, t)$
7: **end for**
8: **for** $t = n - j$ **to** $t = n - 1$ **do**
9: $APPEND(B3, t)$
10: **end for**
11: **for** $t = 1$ **to** $t = j$ **do**
12: $APPEND(B4, t)$
13: **end for**
14: $num \leftarrow CONCATENATE(B1, B2)$
15: $den \leftarrow CONCATENATE(B3, B4)$
16: $den \leftarrow CONCATENATE(den, B4)$
17: $numerador = PRODUCT(num)$
18: $denominador = PRODUCT(den)$
19: **return** $numerador/denominador$

Algorithm 3 *sumatoriaV1*

Input: n, k, m , todas de tipo int, con $n \geq 2, 0 \leq k, m \leq n-1, 0 \leq j \leq \min(k, m)$

Output: La suma $\sum_{j=0}^{\min(k,m)} B_{n,k,m,j}$

```
1: limite  $\leftarrow$  minimo( $m, k$ )
2: factor  $\leftarrow$   $\frac{m!}{(n-1)!}$ 
3: sumandos_pares  $\leftarrow$  [ ]
4: sumandos_impares  $\leftarrow$  [ ]
5: for  $j = 0$  to  $j =$  limite do
6:   if  $j \equiv 1 \pmod{2}$  then
7:     APPEND(sumandos_impares, sumandoV1( $n, k, m, j$ ))
8:   else
9:     APPEND(sumandos_pares, sumandoV1( $n, k, m, j$ ))
10:  end if
11: end for
12: suma_pares  $\leftarrow$  SUM(sumandos_pares)
13: suma_impares  $\leftarrow$  SUM(sumandos_impares)
14: return factor * (suma_pares - suma_impares)
```

Algorithm 4 *sumatoriaV2*

Input: n, k, m , todas de tipo int, con $n \geq 2, 0 \leq k, m \leq n-1, 0 \leq j \leq \min(k, m)$

Output: La suma $\sum_{j=0}^{\min(k,m)} B_{n,k,m,j}$

```
1: limite  $\leftarrow$  minimo( $m, k$ )
2: sumandos_pares  $\leftarrow$  [ ]
3: sumandos_impares  $\leftarrow$  [ ]
4: for  $j = 0$  to  $j =$  limite do
5:   if  $j \equiv 1 \pmod{2}$  then
6:     APPEND(sumandos_impares, sumandoV2( $n, k, m, j$ ))
7:   else
8:     APPEND(sumandos_pares, sumandoV2( $n, k, m, j$ ))
9:   end if
10: end for
11: for  $j = 0$  to  $j =$  limite and  $j$  odd do
12:   APPEND(sumandos_impares, sumandoV2( $n, k, m, j$ ))
13: end for
14: suma_pares  $\leftarrow$  SUM(sumandos_pares)
15: suma_impares  $\leftarrow$  SUM(sumandos_impares)
16: return suma_pares - suma_impares
```

Algorithm 5 base_legendre_dimImpar

Input: n , variable de tipo int, $n \geq 2$, $n \equiv 1 \pmod{2}$, 'sumatoria' es una de las dos funciones definidas en los algoritmos 3 y 4.

Output: lista cuyos elementos son n listas, conteniendo la k -ésima lista las n entradas del polinomio discreto de Legendre de grado k y dimensión n .

```
1:  $M \leftarrow CEIL(n/2)$ 
2:  $base\_legendre = [ ]$ 
3:  $signo \leftarrow 1$ 
4: for  $k = 0$  to  $k = n - 1$  do
5:    $A_{nk} \leftarrow signo * (n - 1)! * \sqrt{\frac{2k+1}{(n-k-1)! * (n+k)!}}$ 
6:    $vector\_legendre \leftarrow [0, \dots, 0]$  {Lista con  $n$  ceros}
7:   for  $m = 0$  to  $m = M - 2$  do
8:      $entrada \leftarrow A_{nk} * sumatoria(n, k, m)$ 
9:      $vector\_legendre[m] \leftarrow entrada$ 
10:     $vector\_legendre[n - m - 1] \leftarrow signo * entrada$ 
11:   end for
12:   if  $k \equiv 1 \pmod{2}$  then
13:      $vector\_legendre[M - 1] \leftarrow 0$ 
14:   else
15:      $vector\_legendre[M - 1] \leftarrow A_{nk} * sumatoria(n, k, M - 1)$ 
16:   end if
17:    $APPEND(base\_legendre, vector\_legendre)$ 
18:    $signo \leftarrow signo * -1$ 
19: end for
20: return  $base\_legendre$ 
```

Algorithm 6 base_legendre_dimPar

Input: n , variable de tipo int, $n \geq 2$, $n \equiv 0 \pmod{2}$, 'sumatoria' es una de las dos funciones definidas en los algoritmos 3 y 4.

Output: lista cuyos elementos son n listas, conteniendo la k -ésima lista las n entradas del polinomio discreto de Legendre de grado k y dimensión n .

```
1:  $M \leftarrow CEIL(n/2)$ 
2:  $base\_legendre = [ ]$ 
3:  $signo \leftarrow 1$ 
4: for  $k = 0$  to  $k = n - 1$  do
5:    $A_{nk} \leftarrow signo * (n - 1)! * \sqrt{\frac{2k+1}{(n-k-1)! * (n+k)!}}$ 
6:    $vector\_legendre \leftarrow [0, \dots, 0]$  {Lista con  $n$  ceros}
7:   for  $m = 0$  to  $m = M - 1$  do
8:      $entrada \leftarrow A_{nk} * sumatoria(n, k, m)$ 
9:      $vector\_legendre[m] \leftarrow entrada$  {Agregamos en la  $m$ -ésima posición}
10:     $vector\_legendre[n - m - 1] \leftarrow signo * entrada\_legendre$ 
11:   end for
12:    $APPEND(base\_legendre, vector\_legendre)$ 
13:    $signo \leftarrow signo * -1$ 
14: end for
15: return  $base\_legendre$ 
```

Algorithm 7 calculo_base

Input: n , variable de tipo int, $n \geq 2$, función “sumatoria”, que es una de las dos funciones definidas en los algoritmos 3 y 4

Output: lista cuyos elementos son n listas, conteniendo la k -ésima lista las n entradas del polinomio discreto de Legendre de grado k y dimensión n .

- 1: **if** $n \equiv 0 \pmod{2}$ **then**
 - 2: **return** *base_legendre_dimPar*(n , *sumatoria*)
 - 3: **else**
 - 4: **return** *base_legendre_dimImpar*(n , *sumatoria*)
 - 5: **end if**
-

Chapter 5

Análisis de señales en base a coeficientes respecto a las BLDs

Fijada una dimensión n , en este capítulo vamos a explicar cómo la base de Legendre discreta \mathcal{L}^n definida en 2.3.1 es una BON que cumple satisfactoriamente los dos puntos de la lista de deseos 1.2.1 (que es la motivación de todo este trabajo).

Adicionalmente, en la sección 5.4 estudiamos la estrecha relación que existe entre proyecciones a los espacios $W_{n,i}$ y a aproximaciones polinomiales por mínimos cuadrados.

5.1 Expresiones de señales finitas respecto a BLDs

Puesto que por definición se realizó un proceso de ortonormalización para obtener a \mathcal{L}^n , este primer punto se cumple trivialmente.

Observación 5.1.1

Sean $n \geq 2$, \mathcal{L}^n la BLD definida en 2.3.1. Para toda $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \mathcal{L}^{n,k}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle^2.$$

A la luz del teorema de la proyección ortogonal, las proyecciones de x sobre los espacios $W_{n,0}$, $W_{n,1}$ y $W_{n,2}$ son los vectores de estos espacios más cercanos (en términos de la distancia euclídea) a x ; es natural entonces formular las siguientes definiciones.

Definición 5.1.2

Si $x \in \mathbb{R}^n$ y

$$\Pi_{W_{n,i}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow W_i, \quad i = 0, 1, 2 \quad (5.1)$$

Aquí verificamos que la base de Legendre discreta \mathcal{L}^n de \mathbb{R}^n satisface el primer punto de la lista de deseos 1.2.1.

Puede recordar la definición de proyección ortogonal, basada en la unicidad establecida en el teorema de la proyección ortogonal, en (A.8).

son las proyecciones ortogonales a los espacios $W_{n,0}$, $W_{n,1}$ y $W_{n,2}$, a los vectores

$$\Pi_{W_{n,i}}(x), \quad i = 0, 1, 2$$

les llamaremos la **parte constante** o **promedio**, la **parte afín** y la **parte cuadrática**, respectivamente, de x .

Proposición 5.1.3

Sea $x \in \mathbb{R}^n$; si

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \mathcal{L}^{n,k},$$

entonces, para toda $0 \leq i \leq n-1$,

$$\Pi_{W_{n,i}}(x) = \sum_{k=0}^i \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \mathcal{L}^{n,k}$$

y

$$\|\Pi_{W_{n,i}}(x)\|^2 = \sum_{k=0}^i \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle^2$$

Demostración. Sólo recuerde que, para toda $0 \leq i \leq n-1$, los vectores $\mathcal{L}^{n,j}$ con $0 \leq j \leq i$ conforman una BON de $W_{n,i}$ (c.f. corolario 2.3.3) y que $a_k = \langle x, \mathcal{L}^{n,j} \rangle$. \square

Ejemplo 4. Considere al siguiente conjunto de cinco puntos del plano:

$$\{(0, -0.5), (1, 2.4), (2, 1.6), (3, 1.7), (4, 2.3)\}. \quad (5.2)$$

Como tenemos cinco puntos, trabajamos en el espacio \mathbb{R}^5 .

El vector cuyas entradas son las cinco mediciones (dadas por las ordenadas de los puntos del conjunto (5.2)) es

$$x = (-0.5, 2.4, 1.6, 1.7, 2.3). \quad (5.3)$$

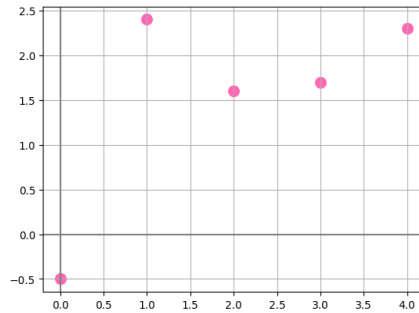


Figure 5.1: Gráfica de la señal $x \in \mathbb{R}^5$.

Nos interesa dar explícitamente a la señal $\Pi_{W_{5,1}}(x) \in W_{5,1} \leq \mathbb{R}^5$. En realidad, por ser \mathcal{L}^5 una base ortonormal de \mathbb{R}^5 y por ser $W_{5,1}$ el subespacio generado por los dos primeros vectores de esta base, se sabe de inmediato que

$$\Pi_{W_{5,1}}(x) = \langle \Pi_{W_{5,1}}(x), \mathcal{L}^{5,0} \rangle \mathcal{L}^{5,0} + \langle \Pi_{W_{5,1}}(x), \mathcal{L}^{5,1} \rangle \mathcal{L}^{5,1};$$

de todas formas, como ilustración, planteemos un sistema de ecuaciones para llegar a una expresión para $\Pi_{W_{5,1}}(x)$. Usando las expresiones para los vectores de \mathcal{L}^5 dadas en ??, tenemos que

$$W_{5,1} = \text{span}\{(1, 1, 1, 1, 1), (-2, -1, 0, 1, 2)\},$$

y

$$W_{5,1}^\perp = \text{span}\{(2, -1, -2, -1, 2), (-1, 2, 0, -2, 1), (1, -4, 6, -4, 1)\}.$$

Según el teorema de la proyección ortogonal A.4.1, $\Pi_{W_{5,1}}(x)$ es el único elemento de $W_{5,1}$ para el que

$$x - \Pi_{W_{5,1}}(x) \in W_{5,1}^\perp;$$

esto se traduce en la existencia de únicos escalares c_1 , c_2 , a_1 , a_2 y a_3 tales que

$$x - c_1(1, 1, 1, 1, 1) - c_2(-2, -1, 0, 1, 2)$$

es igual a

$$a_1(2, -1, -2, -1, 2) + a_2(-1, 2, 0, -2, 1) + a_3(1, -4, 6, -4, 1),$$

o sea, tales que

$$\begin{cases} -0.5 - (c_1 - 2c_2) = 2a_1 - a_2 + a_3, \\ 2.4 - (c_1 - c_2) = -a_1 + 2a_2 - 4a_3, \\ 1.6 - c_1 = -2a_1 + 6a_3, \\ 1.7 - (c_1 + c_2) = -a_1 - 2a_2 - 4a_3, \\ 2.3 - (c_1 + 2c_2) = 2a_1 + a_2 + a_3. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, encontramos que $c_1 = 1.5$ y $c_2 = 0.49$. Así,

$$\begin{aligned} \Pi_{W_{5,1}}(x) &= c_1(1, 1, 1, 1, 1) + c_2(-2, -1, 0, 1, 2) \\ &= (0.52, 1.01, 1.5, 1.99, 2.48); \end{aligned} \tag{5.4}$$

observe que la regresión lineal calculada a partir del conjunto de datos (5.2) es la recta con ecuación cartesiana

$$y = 0.49x + 0.52 \tag{5.5}$$

y que (5.4) es, como se asegura en la proposición 5.4.1, la discretización de la recta (5.5) en la malla uniforme \mathcal{P}_5 . De forma análoga se calcula la parte cuadrática de la señal s .

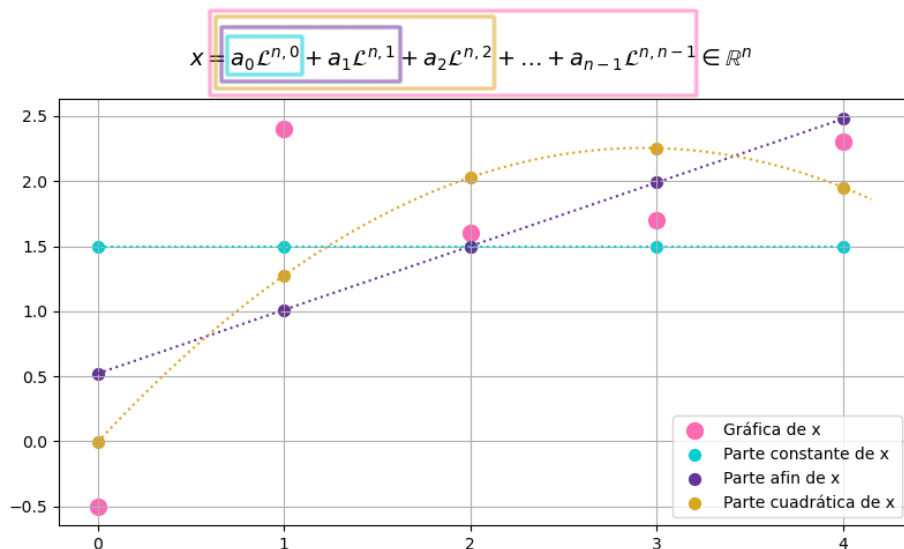


Figure 5.2: Gráficas de x , $\Pi_{W_{5,0}}(x)$, $\Pi_{W_{5,1}}(x)$ y $\Pi_{W_{5,2}}(x)$.

◇

5.2 Caracterización de morfología en base a coeficientes respecto a las BLDs

Ahora que contamos con bases ortonormales para los espacios de polinomios discretos (c.f. corolario 2.3.3), es sencillo reescribir al corolario 2.1.12, en el que se dan condiciones necesarias y suficientes para que una señal sea afín o cuadrática, no en términos de pertenencia a espacios de polinomios discretos, sino en términos de coeficientes.

Proposición 5.2.1

Sean $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{L}^n la base de Legendre discreta de dimensión n definida en 2.3.1 y $x \in \mathbb{R}^n$ una señal de dimensión n .

Se tiene que la señal x es

- constante si y sólo si para todo índice $1 \leq k \leq n-1$ se cumple que $\langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle = 0$,
- afín si y sólo si sólo sus primeros para todo índice $2 \leq k \leq n-1$ se cumple que $\langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle = 0$,
- cuadrática si y sólo si para todo índice $3 \leq k \leq n-1$ se cumple que $\langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle = 0$, y además $\langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \neq 0$.

Demostración. Por ejemplo, para probar el segundo punto, sólo observe que x es lineal sí y sólo si $x \in W_{n,1}$ (c.f. 2.1.9), lo que equivale a que x coincida con su proyección al espacio $W_{n,1}$ que, según la proposición 5.1.3 es $\langle x, \mathcal{L}^{n,0} \rangle \mathcal{L}^{n,0} + \langle x, \mathcal{L}^{n,1} \rangle \mathcal{L}^{n,1}$; esta igualdad implica que los coeficientes $\langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle$ con $k > 1$ sean cero. □

Más aún; a pesar de que una señal x no sea ni lineal ni cuadrática, gracias a

Aquí verificamos que la base de Legendre discreta \mathcal{L}^n de \mathbb{R}^n satisface el segundo punto de la lista de deseos 1.2.1.

la ortogonalidad de la base \mathcal{L}^n podemos formalizar lo que entendemos por que una señal se asemeje a ser afín o cuadrática y, además, **cuantificar** esta semejanza; dada una señal $x \in \mathbb{R}^n$ y su representación respecto a la BON \mathcal{L}^n , como se explica en la observación 5.2.1, tenemos condiciones necesarias y suficientes (muy sencillas de comprobar) **en términos de los coeficientes** $\langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle$ de x respecto a \mathcal{L}^n en referencia a la **forma de la gráfica de x** , pero, incluso aunque no se satisfagan estas condiciones, puesto que contamos con la identidad de Parseval (c.f. nota 1.1.2), si algunos coeficientes $\langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle$ son considerados pequeños, estos pueden eliminarse y obtener así una señal cercana (en distancia euclídea) a la original que tenga una forma determinada. Por ejemplo, si todos los coeficientes de una $x \in \mathbb{R}^n$ respecto a \mathcal{L}^n , a excepción de $\langle x, \mathcal{L}^{n,0} \rangle$, $\langle x, \mathcal{L}^{n,1} \rangle$ y $\langle x, \mathcal{L}^{n,2} \rangle$, son pequeños, entonces, a pesar de que x no pertenezca a $W_{n,2}$ (o sea, no sea cuadrática), será cercana a ser cuadrática.



Tenemos dos propuestas naturales, usando los espacios de polinomios discretos $W_{n,k}$, para poder dar no sólo respuestas del tipo “sí/no” a preguntas sobre la morfología de una señal, sino, de forma más general, del tipo “qué tanto sí” o “qué tanto no”.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Digamos que

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathcal{L}^{n,k}.$$

Como se argumentó ya, las proposiciones

$$“x \in \mathbb{R}^n \text{ tiene grado } k” \quad \text{y} \quad “x \in W_{n,k}”$$

son equivalentes. Observe que, aún cuando no se cumpla el caso extremos de que x sea elemento de $W_{n,k}$ (y, por lo tanto, no podamos aseverar que x es afín), provistos de nociones como las de norma y ortogonalidad, es fácil dar una propuesta legítima de **medidas** de “qué tan afín” es la señal x , o, en términos matemáticos, de qué tanto se aleja x del espacio de señales afines de su correspondiente espacio ambiente.

Como se explica en la subsección A.6.3, hay dos formas plausibles de dar medidas de qué tan cerca está x del espacio $W_{n,k}$;

- a) Una forma obvia de proceder es calcular la distancia de x al espacio $W_{n,k}$, que por definición es la norma del vector

$$x - \Pi_{W_{n,k}}(x) = \sum_{i=k+1}^{n-1} a_i \mathcal{L}^{n,i},$$

es decir, tomar al número no negativo

$$\sqrt{\sum_{i=k+1}^{n-1} a_i^2}$$

como una medida de qué tanto se aleja x del plano $W_{n,k}$ (o sea, de qué tanto se aleja x de ser afín).

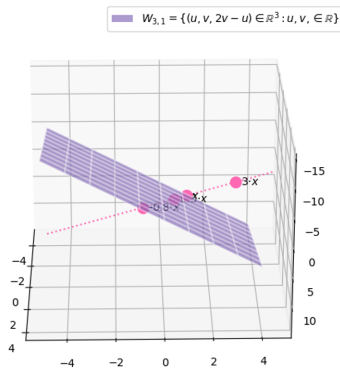
- b) Otro acercamiento podría ser preguntarse por el ángulo $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ que forma el vector x con $W_{n,k}$, el espacio de señales n -dimensionales de grado k .

Veamos por qué la segunda es la mejor forma de proceder.

Si $x \in \mathbb{R}^n$ es una señal de dimensión n y $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ es un escalar cualquiera, la gráfica de $a \cdot x$ no es más que la gráfica de x reescalada por un factor de a cuando este último es positivo; en caso contrario, es la gráfica de x reescalada pero además reflejada respecto al eje horizontal.

La morfología de la gráfica de x es entonces, salvo reflexiones horizontales, invariante bajo multiplicación escalar; otro atributo de x que no se ve afectado por esta acción es el ángulo que forma con el espacio $W_{n,k}$ de señales de grado k , aunque la distancia euclídea de la señal al plano $W_{n,1}$ por lo general sí es afectada por multiplicaciones escalares.

$x = [0.5, 1, -2]$ junto con algunos vectores paralelos a él



Gráficas de x y algunos múltiplos escalares

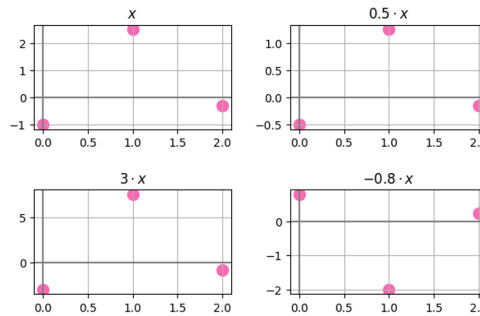


Figure 5.3: Para $n = 3$, se grafica a x junto con algunos múltiplos escalares de x . Observe que, salvo reflexiones horizontales, la gráfica de estas señales tiene la misma forma.

Tomamos pues al coseno del ángulo que forma x con su proyección al plano $W_{n,k}$ como una medida de cercanía de x a la propiedad de tener grado k . Es decir, no usamos la distancia euclídea de x al espacio de señales $W_{n,k}$ para dar una medida de qué tanto tiene x la propiedad de “ser un polinomio discreto de grado a lo más k ”, sino que usamos la distancia coseno de x a $W_{n,k}$ (c.f. apéndice A.6.3).

Es muy fácil obtener fórmulas para el seno, coseno y tangente del ángulo que una señal $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ forma con el espacio $W_{n,k}$, usando solamente los n coeficientes

$$a_n := \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle$$

de x respecto a la BLD \mathcal{L}^n .

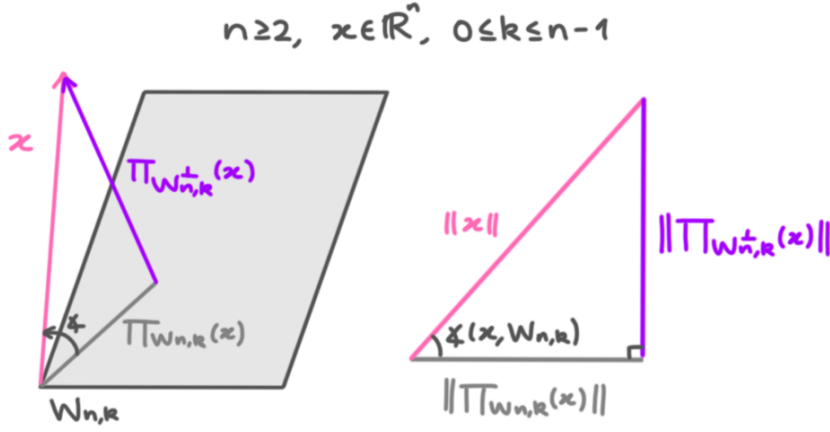


Figure 5.4: Lo que haremos será simplemente expresar a las tres cantidades $\|x\|$, $\|\Pi_{W_{n,k}}(x)\|$ y $\|\Pi_{W_{n,k}^\perp}(x)\|$ en términos de los coeficientes a_k .

Según la observación 5.1.1,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2$$

y, según la proposición 5.1.3,

$$\|\Pi_{W_{n,k}}(x)\|^2 = \sum_{i=0}^k a_i^2.$$

Note además que, según el corolario A.4.2,

$$x - \Pi_{W_{n,k}}(x) = \Pi_{W_{n,k}^\perp}(x),$$

y, como

$$\{\mathcal{L}^{n,i} : k+1 \leq i \leq n-1\}$$

es una base ortonormal de $W_{n,k}^\perp$, se tiene que

$$\|x - \Pi_{W_{n,k}}(x)\|^2 = \|\Pi_{W_{n,k}^\perp}(x)\|^2 = \sum_{i=k+1}^{n-1} a_i^2.$$

Concluimos así que

$$\cos(\angle(x, W_{n,k})) = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^k a_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2}}, \quad \text{sen}(\angle(x, W_{n,k})) = \frac{\sqrt{\sum_{i=k+1}^{n-1} a_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2}} \quad (5.6)$$

y, si $x \notin W_{n,k}^\perp$, entonces también puede calcularse la tangente del ángulo $\angle(x, W_{n,k})$, y es

$$\tan(\angle(x, W_{n,k})) = \sqrt{\frac{\sum_{i=k+1}^{n-1} a_i^2}{\sum_{i=0}^k a_i^2}}.$$

Puesto que x es cercano a pertenecer al espacio $W_{n,k}$ si y sólo si $\cos(\angle(x, W_{n,k}))$ es aproximadamente uno, podemos usar la expresión (5.6) para tal coseno para establecer los siguientes criterios.

Proposición 5.2.2

Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq k \leq n-1$. Sean $a_i := \langle x, \mathcal{L}^{n,i} \rangle$ los coeficientes de x respecto a la base de Legendre discreta \mathcal{L}^n .

- La señal x es cercana a ser constante si $a_0^2 \sim \|x\|^2$
- La señal x es cercana a ser afín si $a_0^2 + a_1^2 \sim \|x\|^2$
- La señal x es cercana a ser cuadrática si $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \sim \|x\|^2$

En general,

- La señal x es cercana a ser un polinomio n -dimensional de grado k si $\sum_{i=0}^k a_i^2 \sim \|x\|^2$

Demostración. En efecto, x es cercana a ser un polinomio n -dimensional de grado k si y sólo si x es cercana a pertenecer al espacio $W_{n,k}$ (pues este es exactamente el subconjunto de \mathbb{R}^n que consta de tales polinomios discretos). Esto ocurre si y sólo si $\angle(x, W_{n,k})$, el ángulo que x forma con su proyección a $W_{n,k}$ (que es, por definición, el vector de este espacio más cercano a x), es cercano a cero. Esto último equivale a que $\cos(\angle(x, W_{n,k}))$ sea cercano a 1. Usando la fórmula (5.6) para tal coseno, tenemos que esta proposición equivale a que $\sum_{i=0}^k a_i^1$ sea cercana a $\sum_{i=0}^{n-1} a_i^1 = \|x\|^2$. \square

Según esta última proposición, una señal x (que, gracias a la proposición 2.2.1, sabemos es un polinomio de dimensión n) es cercano a tener grado k si la energía $\|x\|^2$ de la señal se concentra en los primeros k coeficientes a_i de x .

Ejemplo 5. Para dar un ejemplo concreto con las ideas explicadas antes, fijemos $n = 3$. Como se calculó en (2.15), el subespacio $W_{3,1} \leq \mathbb{R}^3$ de señales afines es el plano de ecuación cartesiana

$$W_{3,1} : x - 2y + z = 0.$$

Sea

$$x = a_0 \mathcal{L}^{3,0} + a_1 \mathcal{L}^{3,1} + a_2 \mathcal{L}^{3,2}$$

un vector del espacio.

Como las dimensiones de \mathbb{R}^3 y $W_{3,1}$ difieren por uno, este último es un hiperplano ⁷ del primero; como $\mathcal{L}^{3,2}$ es un vector normal a $W_{3,1}$ (c.f. corolario 2.3.4), si $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es la función definida como

$$\varphi(x) = \langle \mathcal{L}^{3,2}, x \rangle = a_2, \tag{5.7}$$

las tres regiones ajenas en las que $W_{3,1}$ divide al espacio \mathbb{R}^3 son

- I) $\{x \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x) > 0\}$, región a la que pertenece $\mathcal{L}^{3,2}$,
- II) $W_{3,1} = \text{Ker}(\varphi)$, y
- III) $\{x \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x) < 0\}$, región a la que pertenece $-\mathcal{L}^{3,2}$.

⁷ Puede recordar la definición de hiperplano en A.3.

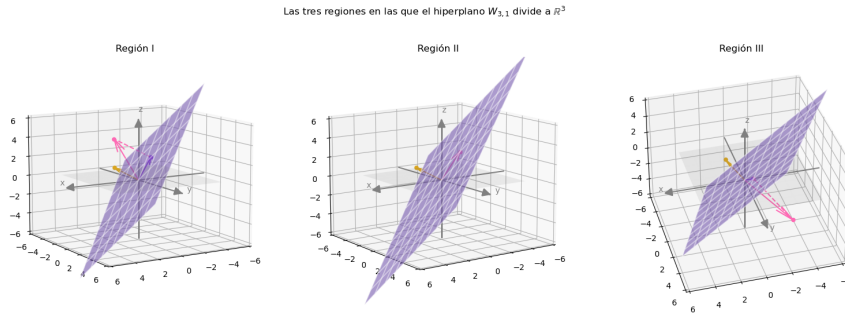


Figure 5.5: Se ilustran las tres regiones en las que $W_{3,1} \subseteq \mathbb{R}^3$ divide al espacio, clasificadas según el signo de la función φ como se definió en (5.7). En dorado se muestra al vector $\mathcal{L}^{3,2}$, en rosa un elemento de la región citada, y en morado la proyección de este al espacio $W_{3,1}$.

Usando la expresión (5.6) para $n = 3$, obtenemos que

$$\cos(\angle(x, W_{3,1})) = \sqrt{\frac{a_0^2 + a_1^2}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}}. \quad (5.8)$$

Fijemos

$$a_0 = \sqrt{3}, \quad a_1 = \sqrt{2}, \quad (5.9)$$

es decir, consideremos a todos los vectores de \mathbb{R}^3 cuya proyección al plano $W_{3,1}$ es el vector

$$(0, 1, 2). \quad (5.10)$$

Es obvio que el conjunto de los puntos del espacio cuya proyección a $W_{3,1}$ es el vector (5.10) de hecho la recta con ecuación vectorial

$$l_{(0,1,2)} := (0, 1, 2) + c(1, -2, 1), \quad c \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

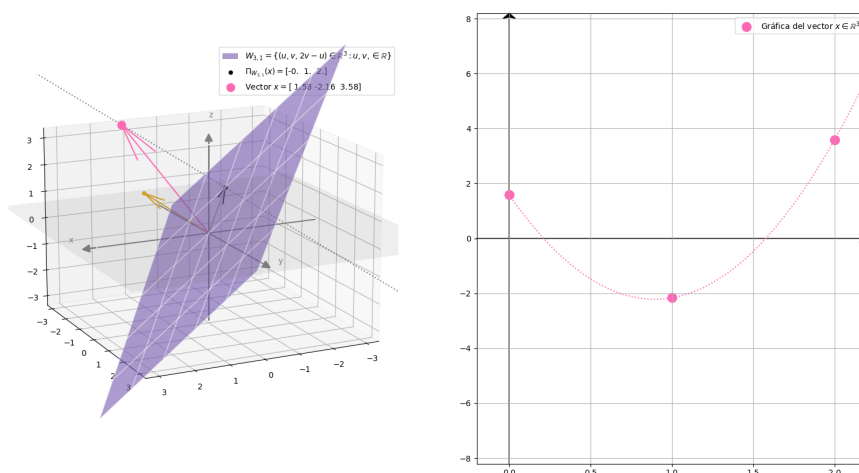
Sustituyendo los valores (5.9) en (5.8) y despejando ⁸, obtenemos

$$|a_2| = \sqrt{5tg^2(\alpha)}.$$

El signo del coeficiente a_2 (que corresponde a la dirección de $\mathcal{L}^{3,2}$ en la descomposición de x) se determina por la región en la que se encuentre x ;

- el signo de a_2 es positivo si x es elemento de la región I,
- $a_2 = 0$ si x es elemento de la región II, y
- el signo de a_2 es negativo si x es elemento de la región III.

Grafiquemos ahora algunos elementos de la recta (5.11). Los valores de las entradas de x , en la mayoría de los casos, han sido redondeados.



⁸ En general, si $C := \|\Pi_{W_{3,1}}(x)\|^2$, entonces $a_2^2 = C \cdot 4tg^2(\alpha)$.

Figure 5.6: Aquí se considera al vector x que forma un ángulo de $\pi/3$ radianes con el plano $W_{3,1}$ y que se ubica en la región I.

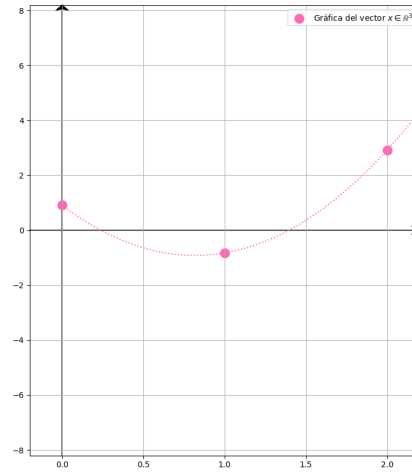
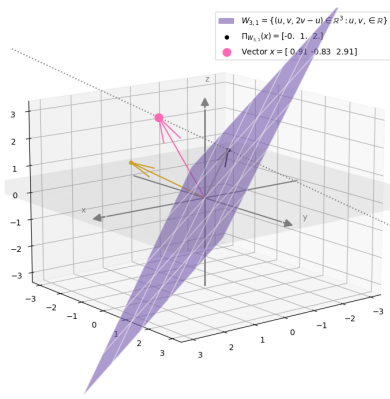


Figure 5.7: Aquí se considera al vector x que forma un ángulo de $\pi/4$ radianes con el plano $W_{3,1}$ y que se ubica en la región I.

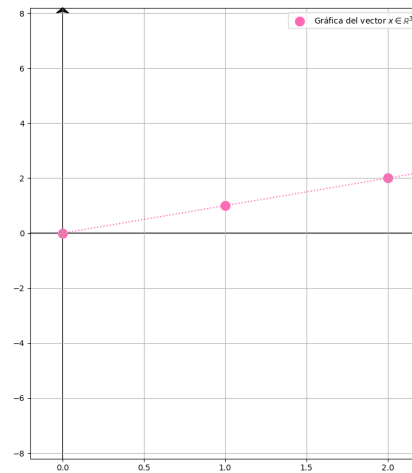
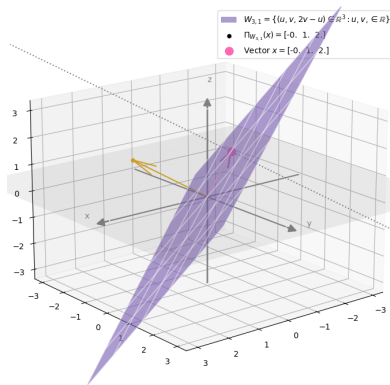


Figure 5.8: Aquí se considera al vector x que forma un ángulo de 0 radianes con el plano $W_{3,1}$ y que se ubica en la región II. Observe que tal x de hecho se ubica en $W_{3,1}$, hecho que se corresponde con que su gráfica sea la discretización puntual de una recta.

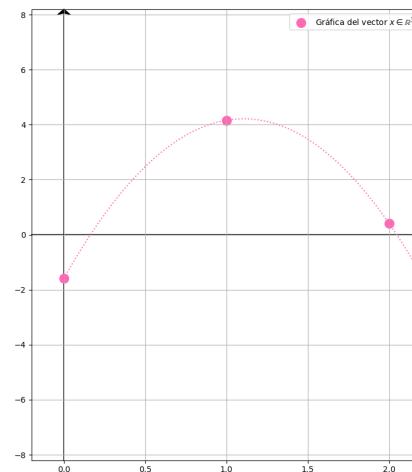
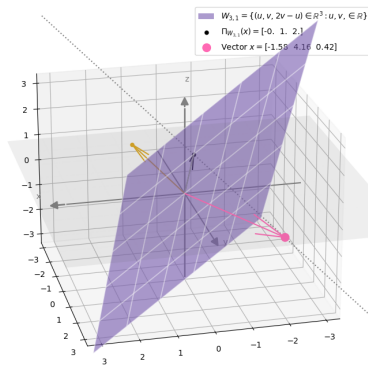


Figure 5.9: Aquí se considera al vector x que forma un ángulo de $\pi/3$ radianes con el plano $W_{3,1}$ y que se ubica en la región III.

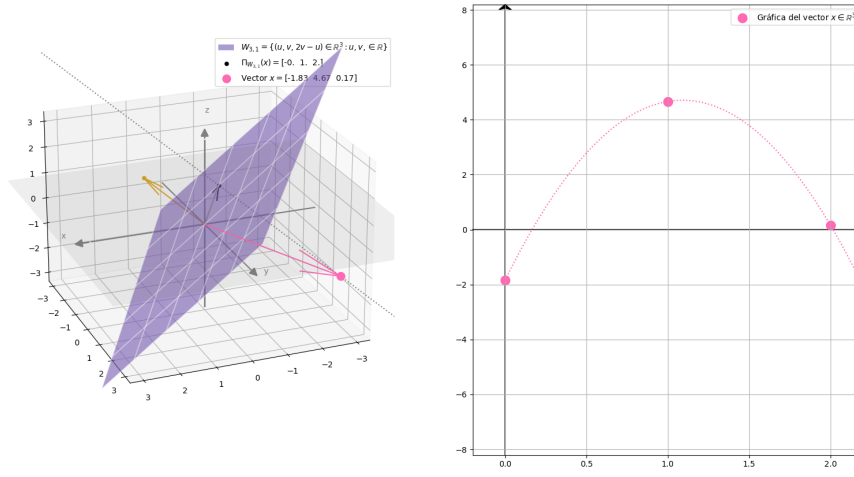


Figure 5.10: Aquí se considera al vector x que forma un ángulo de $6\pi/17$ radianes con el plano $W_{3,1}$ y que se ubica en la región III.

◇

5.3 Determinando el grado de una señal finita a partir de sus coeficientes respecto a \mathcal{L}^n

Fijemos una dimensión $n \geq 2$. Recuerde que, en la sección 2.2, definimos el grado de una señal finita en términos de la pertenencia de esta a espacios $W_{n,k}$. El grado de una señal es relevante para nosotros pues este nos indica la morfología de la gráfica de esta.

En general, si W es un subespacio de \mathbb{R}^n , entonces $x \in \mathbb{R}^n$ es elemento de W si y sólo si x coincide con su proyección, hecho que equivale a que $\cos(\angle(x, W))$ sea 1.

Notación 5.3.1

Para todo grado $0 \leq k \leq n - 1$ y toda señal $x \in \mathbb{R}^n$,

$$d_k(x) = \cos(\angle(x, W_{n,k})). \quad (5.12)$$

Claro que toda distancia $d_k(x)$ está entre cero y uno (inclusivo).

Podemos entonces reinterpretar a la proposición 2.2.4 como sigue;

- Si $d_0(x) = 1$, entonces x tiene grado cero. En caso contrario,
- el índice k para el que se cumpla que $d_k(x) < 1$ y $d_k(x) = 1$ es el grado de la señal x .

Considerando el posible ruido presente al tomar mediciones, es razonable aceptar un error $\epsilon > 0$ para redondear las similitudes coseno $d_k(x)$ y determinar un posible grado para la señal x en cuestión.

Ejemplo 6. Considere al polinomio $f(t) = (t - 3)(t - 5)(t - 7)(t - 9)$ y fijemos $n = 12$. Puesto que este es un polinomio de grado 4, su discretización en \mathcal{P}_{12} es una señal de grado 4. Consideremos una señal que se obtiene muestreando este polinomio y agregando un ruido uniforme; sea pues

$$x = (f(t) + U)_{t=0}^{11}, \quad (5.13)$$

con $U \sim (1, 1)$ una variable aleatoria con distribución uniforme en $(-0.5, 0.5)$.

Puesto que estamos agregando ruido a las mediciones, ya no podemos asegurar que x sea una señal de grado 4, o sea, que cumpla la (bastante restrictiva) condición de ser elemento de $W_{12,4}$. Sin embargo, usando un error de $\epsilon = 10^{-4}$, es decir, redondeando toda distancia $d_k(x)$ que sea mayor o igual a $1 - \epsilon$ a 1, concluimos que el grado de x es, al igual que el grado de f , igual a 4.

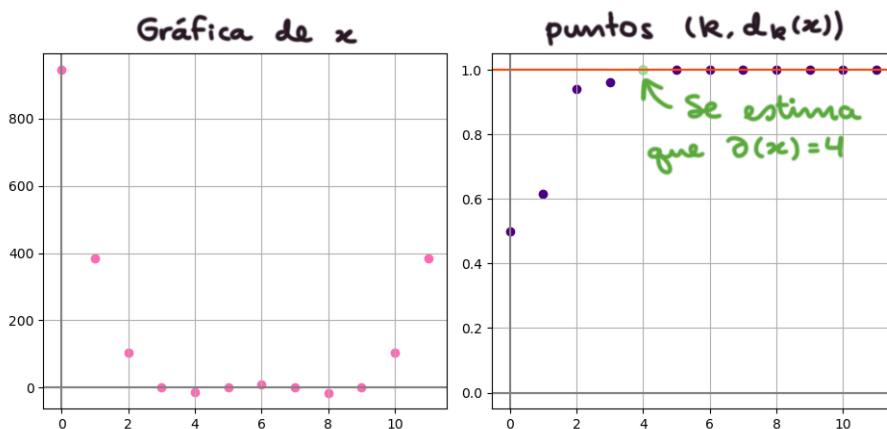


Figure 5.11: Se muestra la gráfica de x que, en efecto, parece poder ajustarse bien con el polinomio f . Sin embargo, como hay ruido en las mediciones, $x \neq \Omega_{12, \mathcal{P}_{12}}(f)$. Sin embargo, usando el margen de error $\epsilon = 10^{-4}$, pudimos asociar el grado 4 a la señal x . Así, a pesar de que, teóricamente, 4 puede no ser el grado de x , x se encuentra a una distancia coseno de $W_{12,4}$ considerablemente cercana a uno como para poder aceptar que x está bien modelado por un polinomio de grado 4.

◇

Este último ejemplo muestra lo robusta que es la metodología de usar a \mathcal{L}^n como sistema de representación de señales n -dimensionales cuando lo que se quiere es conocer el grado (la forma) de una señal; incluso cuando hay un nivel de ruido en las mediciones, puede recuperarse el grado del polinomio que origina la señal.

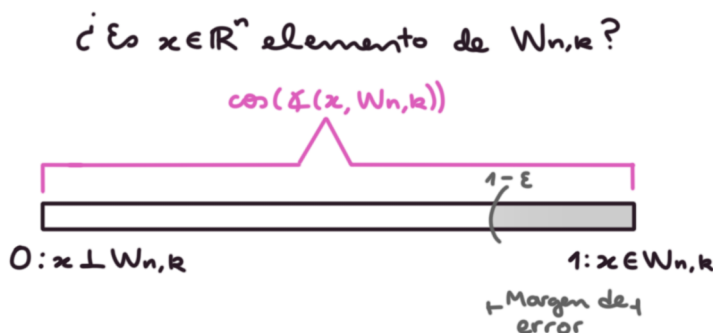


Figure 5.12: Según la proposición A.6.6, un vector x es elemento de $W_{n,k}$ si y sólo si $d_k(x)$ es uno. Aceptando que puede haber errores de cálculo, podemos fijar un $\epsilon > 0$ de tal forma que concluyamos que todo x para el que se cumpla $1 - \epsilon \leq d_x \leq 1$ es elemento de $W_{n,k}$. Cuando aceptemos usar un error ϵ , hablaremos del “grado estimado” de una señal.

Ejemplo 7. Sea la señal $x \in \mathbb{R}^8$ el resultado de muestrear uniformemente en \mathcal{P}_8 al polinomio $f(t) = (t - 2)^2(t - 5)$ con un ruido uniforme en $(-5, 5)$. Calculamos que la sucesión de similitudes coseno $d_k(x)$ de x a los espacios de polinomios discretos $W_{8,k} \leq \mathbb{R}^8$ es

0.21736762184489677, 0.8350140717863705, 0.9026494011237881, 0.9891048269951728,
0.989106814868772, 0.9968972495107041, 0.9975812235176584, 1.0

Vemos entonces que, a pesar de que se muestreó un polinomio de grado 3, la presencia de ruido en las mediciones hizo que la señal resultante tenga grado

7. Observe sin embargo que las últimas similitudes coseno pueden considerarse cercanas a 1. Si se aceptan distintos márgenes de error ϵ , podemos hacer otras inferencias sobre el grado de x .

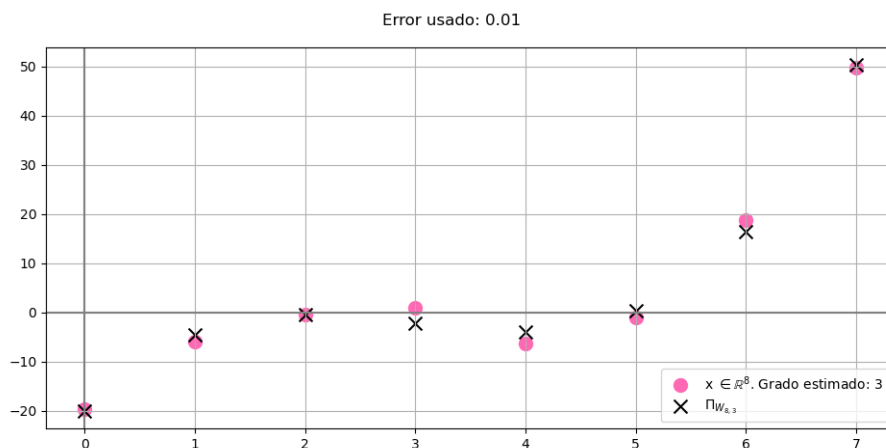


Figure 5.13: Usando $\epsilon = 0.01$, estimamos que $\partial(x) = 3$.

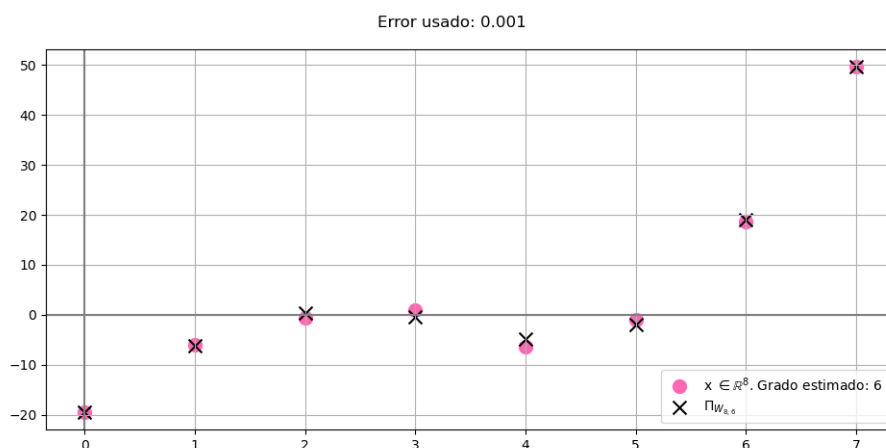


Figure 5.14: Usando $\epsilon = 0.001$, estimamos que $\partial(x) = 6$.

Nota 5.3.2

Por estar el subespacio $W_{n,k}$ contenido en $W_{n,k+1}$ para toda $0 \leq k \leq n-2$, es claro que para todo tal índice k y para toda señal $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$. En efecto, $\Pi_{W_{n,k}} \in W_{n,k} \subseteq W_{n,k+1}$, luego, según la proposición A.6.4, $\angle(x, W_{n,k+1}) \leq \angle(x, \Pi_{W_{n,k}}) = \angle(x, W_{n,k})$, luego, $d_k(x) = \cos(\angle(x, W_{n,k})) \leq \cos(\angle(x, W_{n,k+1})) = d_{k+1}(x)$.

Así, al usar un error ϵ para estimar el grado de una señal como lo hicimos en el ejemplo 7, la estimación siempre será menor o igual al grado real de la señal.

5.4 Relación entre proyecciones a espacios de polinomios discretos y aproximaciones por mínimos cuadrados

Hasta el momento, hemos partido siempre de una señal $x \in \mathbb{R}^n$ y, a partir de ella, considerado al subconjunto G_x de \mathbb{R}^2 (interesándonos por patrones de recta

y parábola que este pueda seguir). Si, recíprocamente, se tiene un subconjunto de puntos de \mathbb{R}^2

$$G := \{(j, x_j) : 0 \leq j \leq n-1\}, \quad (5.14)$$

con $n \geq 2$, cuyas abscisas formen una malla uniforme de n puntos, tenemos ahora dos caminos para dar una aproximación lineal que modele el comportamiento seguido por estos puntos:

1. El clásico método de mínimos cuadrados, método que, en este contexto, consiste en minimizar a la función de dos variables

$$\mu(m, b) = \sum_{j=1}^n (x_j - (mj + b))^2, \quad (5.15)$$

es decir, en encontrar una pendiente $m_0 \in \mathbb{R}$ y un $b_0 \in \mathbb{R}$ para los que la suma de las distancias al cuadrado entre las mediciones (i.e. los valores x_j) y los valores correspondientes de la función $l_{min}(t) := m_0 t + b_0$ sea mínima.

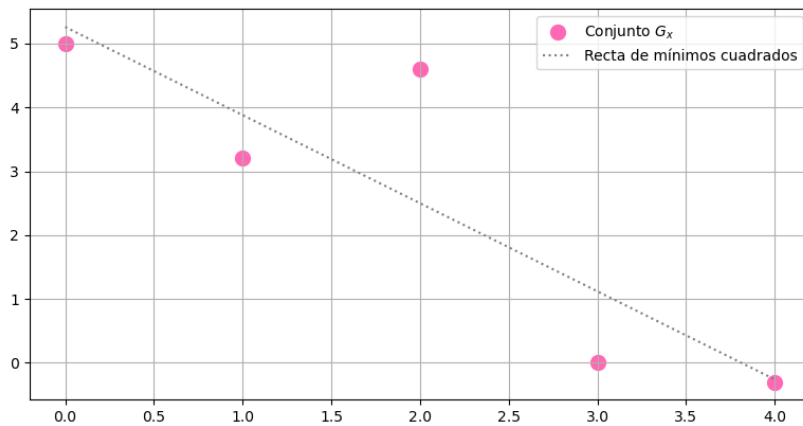


Figure 5.15: Partimos del conjunto G cuyos elementos son $(0, 5)$, $(1, 3.2)$, $(2, 4.6)$, $(3, 0)$ y $(4, -0.3)$, y calculamos la recta de mínimos cuadrados correspondiente a este conjunto, que resulta ser $l_{min} : y = -1.38t + 5.26$.

2. Considerar al vector $x = (x_j)_{j=0}^{n-1}$ de \mathbb{R}^n , proyectarlo al espacio $W_{n,1}$ de polinomios discretos de dimensión n y grado uno y usar a la recta l_x cuya discretización en \mathcal{P}_n sea esta proyección $\Pi_{W_{n,1}}(x) \in W_{n,1}$ (que existe por ser precisamente $W_{n,1}$ el espacio de discretizaciones de polinomios discretos de dimensión n con grado a lo más uno, c.f. teorema 2.1.14) como aproximación lineal del conjunto (5.14).

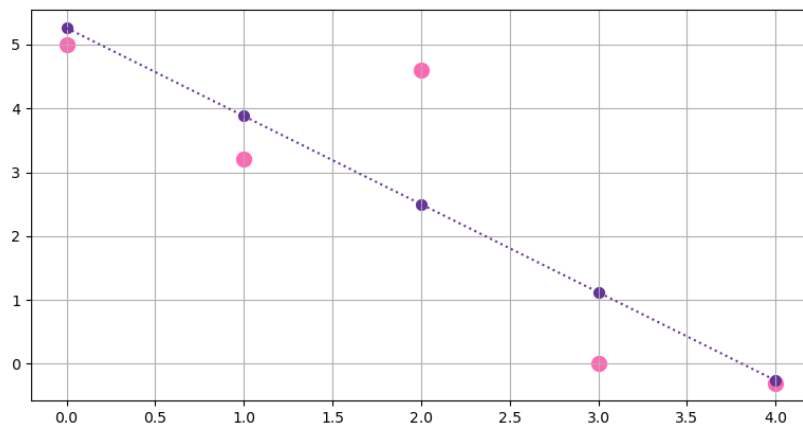


Figure 5.16: El vector formado a partir del conjunto G de la figura 5.15 es $x = (5, 3.2, 4.6, 0, -0.3)$. Su proyección al espacio $W_{5,1}$ es $\Pi_{W_{5,1}}(x) = (5.26, 3.88, 2.5, 1.12, -0.26)$, y la recta cuya discretización en \mathcal{P}_5 es la señal $\Pi_{W_{5,1}}(x)$ es $l_x : y = -1.38t + 5.26$.

Puesto que el mínimo (m_0, b_0) de la función (5.15) siempre existe, y como siempre puede formarse el vector $x = (x_j)_{j=0}^{n-1}$ a partir del conjunto G dado en (5.14) y proyectarse este a $W_{n,1}$, los dos caminos discutidos arriba son siempre realizables.

Como establecemos en la siguiente observación, estas dos formas de abordar el problema de aproximación coinciden. Observe que la demostración de este hecho no es más que una consecuencia directa del teorema de la proyección A.4.1 pues, hablando en los términos que hemos usado hasta ahora, encontrar la recta de mínimos cuadrados de la gráfica G_x es lo mismo que encontrar al elemento del espacio $W_{n,1}$ cuya distancia euclídea a $x \in \mathbb{R}^n$ sea mínima.

Proposición 5.4.1

Sea $n \geq 2$ y sea el conjunto de n puntos del plano

$$\{(j, x_j) : 0 \leq j \leq n-1\} \subseteq \mathbb{R}^2. \quad (5.16)$$

Si $x = (x_j)_{j=0}^{n-1}$ es la señal cuya gráfica G_x coincide con el conjunto dado en (5.16), si

- $l_{min} : y = m_0t + b_0$ es la recta obtenida aproximando los puntos del conjunto (5.16) con el método de mínimos cuadrados, y
- l_x es la recta cuya versión discreta respecto a la malla uniforme \mathcal{P}_n es $\Pi_{W_{n,1}}(x) \in \mathbb{R}^n$,

entonces las rectas l_x y l_{min} coinciden.

Demostración. Si demostramos que las señales

$$r := \Omega_{n, \mathcal{P}_n}(l_{min}) \in \mathbb{R}^n$$

y

$$\Pi_{W_{n,1}}(x) \in W_{n,1} \subseteq \mathbb{R}^n$$

coinciden, podremos concluir la igualdad entre las rectas l_x y l_{min} (pues la igualdad $r = \Pi_{W_{n,1}}(x)$ significa que las rectas l_{min} y l_x coinciden en los puntos con abscisas los elementos de \mathcal{P}_n , que son al menos dos).

Por ser r la discretización en una malla uniforme de un polinomio de grado uno, es elemento del espacio $W_{n,1}$ (c.f. teorema 2.1.14). Además, si z es cualquier señal afín (es decir, cualquier elemento de $W_{n,1}$) y si $y = mt + b$ es la ecuación de la recta sobre la que yace su gráfica, por definición de l_{min} sabemos que

$$\sum_{j=1}^n (x_j - (m_0j + b_0))^2 = \mu(m_0, b_0) \leq \mu(m, b) = \sum_{j=1}^n (x_j - (mj + b))^2; \quad (5.17)$$

tomando raíces cuadradas en ambos extremos de (5.17) llegamos a la desigualdad

$$d(x, r) \leq d(x, z)$$

(donde d denota a la distancia euclídea en \mathbb{R}^n). Como z fue un elemento arbitrario del espacio $W_{n,1}$, inferimos que

$$d(x, r) = \inf\{d(x, z) : z \in W_{n,1}\};$$

de la unicidad establecida en el teorema de la proyección ortogonal [A.4.1](#) concluimos que $r = \Pi_{W_{n,1}}(x)$. \square

Aquí sólo se trató el caso lineal, pero, naturalmente, discusiones totalmente análogas se valen para grados más altos (estando los grados posibles acotados superiormente por la cardinalidad del conjunto de puntos G dado en [\(5.14\)](#) a aproximar), por ejemplo, cuando se buscan aproximaciones cuadráticas (resp. cúbicas) para cuando la cardinalidad del conjunto [\(5.14\)](#) es mayor o igual a tres (resp. cuatro).

Part II

Análisis espectral de los PDL

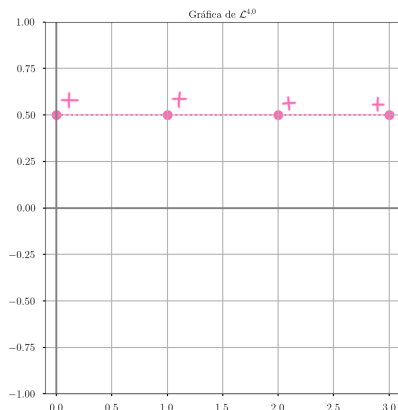
Chapter 6

Análisis espectral de señales finitas

6.1 Motivación para realizar un estudio espectral de los PDL

No es difícil convencerse de que las condiciones de ortogonalidad impuestas en la definición de la base discreta de Legendre \mathcal{L}^n forzan a las entradas de los polinomios discretos $\mathcal{L}^{n,k}$ a cambiar más frecuentemente de signo conforme aumenta el grado k , luego, conforme k tiende a $n - 1$, la cantidad de oscilaciones aumenta; revisemos, por ejemplo, el caso $n = 4$.

En esta motivación informal, por “oscilación” de una señal $x = (x_m)_{m=0}^{n-1}$ entendemos tres cambios consecutivos de signo en sus entradas.



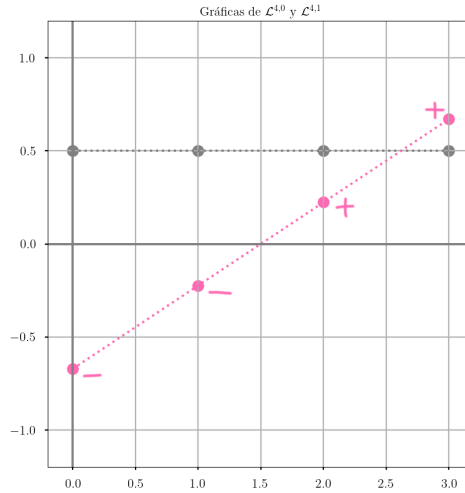
1.- Por definición, $\mathcal{L}^{4,0}$ se obtiene al normalizar al vector constante uno de \mathbb{R}^4 , o sea,

$$\mathcal{L}^{4,0} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

2.- La señal $\mathcal{L}^{4,1} \in \mathbb{R}^4$ es un polinomio discreto de dimensión 4 y grado 1 que se obtiene exigiendo las siguientes condiciones

$$\langle \mathcal{L}^{4,1}, \mathcal{L}^{4,0} \rangle = 0 \text{ y } \langle \mathcal{L}^{4,1}, \mathcal{L}^{4,1} \rangle = 1;$$

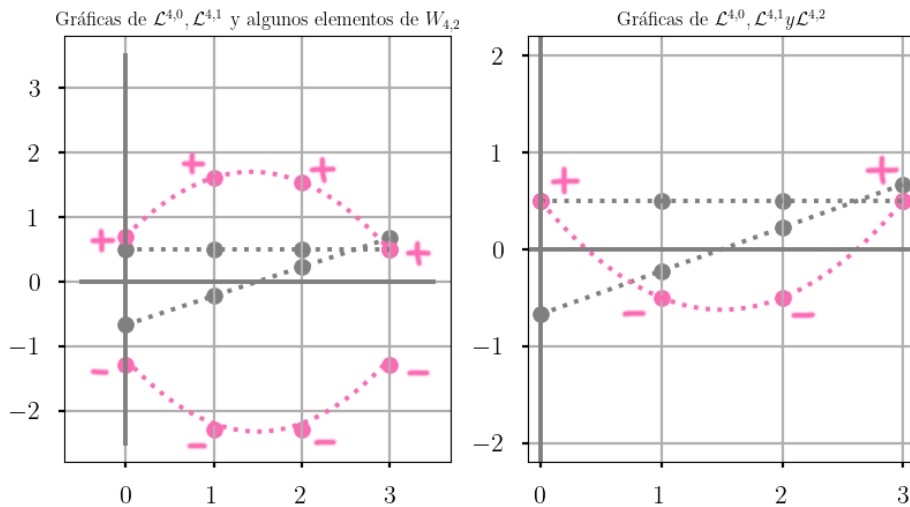
esta primera condición se refleja en que las alturas de los puntos de la gráfica de $\mathcal{L}^{4,1}$ deben sumar cero; esto implica un cambio de signo (y sólo uno, pues el polinomio es lineal).



3.- El vector $\mathcal{L}^{4,2} \in \mathbb{R}^4$, que es un polinomio discreto de grado 2, satisface las siguientes tres condiciones:

$$\langle \mathcal{L}^{4,2}, \mathcal{L}^{4,0} \rangle = 0, \quad \langle \mathcal{L}^{4,2}, \mathcal{L}^{4,1} \rangle = 0, \text{ y } \langle \mathcal{L}^{4,2}, \mathcal{L}^{4,2} \rangle = 1.$$

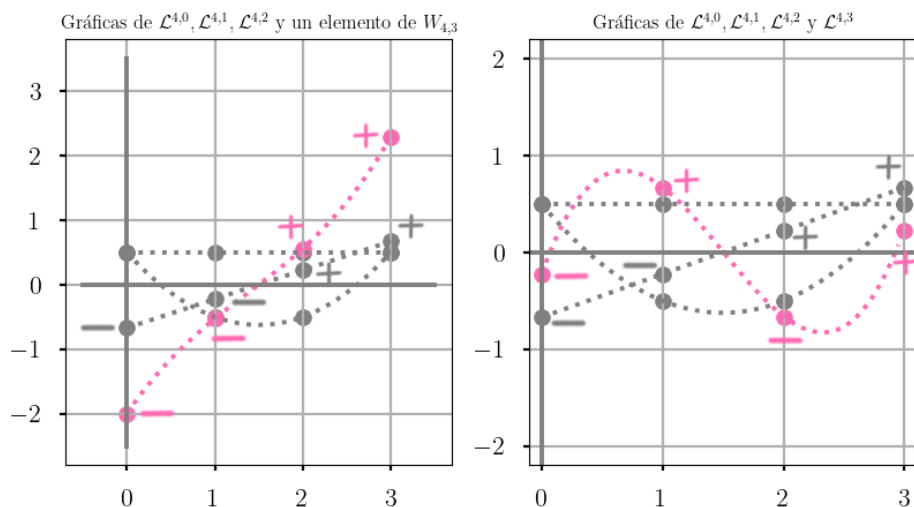
La segunda condición no da información sobre más requerimientos que deba cumplir $\mathcal{L}^{4,2}$, pues, como $\mathcal{L}^{4,1} \in S_{n,-}$ y $\mathcal{L}^{4,2} \in S_{n,+}$ (c.f. teorema 3.2.1), ya del lema 3.0.4 se deducía la ortogonalidad de estas señales; observe sin embargo que, si las entradas de $\mathcal{L}^{4,2}$ fuesen todas positivas o todas negativas, entonces no se tendría la ortogonalidad con la señal constante $\mathcal{L}^{4,0}$.



4.- Por último, $\mathcal{L}^{4,3} \in \mathbb{R}^4$ satisface las siguientes cuatro condiciones:

$$\langle \mathcal{L}^{4,3}, \mathcal{L}^{4,0} \rangle = 0, \quad \langle \mathcal{L}^{4,3}, \mathcal{L}^{4,1} \rangle = 0, \quad \langle \mathcal{L}^{4,3}, \mathcal{L}^{4,2} \rangle = 0, \text{ y } \langle \mathcal{L}^{4,3}, \mathcal{L}^{4,3} \rangle = 1.$$

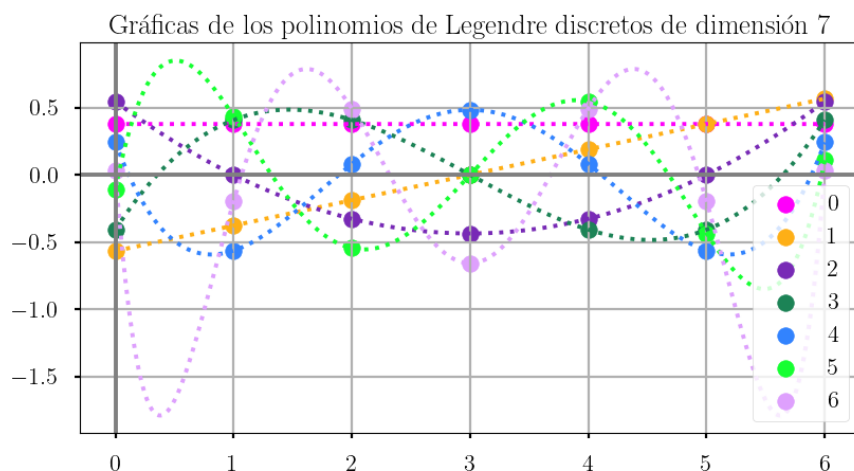
Según los teoremas 2.1.14 y 3.2.1, $\mathcal{L}^{4,3}$ es la discretización de un polinomio cúbico y además es una señal antisimétrica (en el sentido de la definición 3.0.1); dos gráficas de señales que cumplen esto se ilustran abajo:



La señal cúbica de la izquierda, a pesar de ser ortogonal a $\mathcal{L}^{4,0}$ y a $\mathcal{L}^{4,2}$ por simetría (c.f. lema 3.0.4), definitivamente no puede ser ortogonal a $\mathcal{L}^{4,1}$, pues las entradas de estos dos vectores de \mathbb{R}^4 tienen el mismo signo. Sin embargo, la señal cúbica de la derecha (que de hecho es $\mathcal{L}^{4,3}$) sí cumple el ser ortogonal a $\mathcal{L}^{4,1}$ pero, para lograr esto, sus entradas deben cambiar de signo tres veces.

Figure 6.1: Observe que la señal cúbica de la izquierda tiene un sólo cambio de signo, mientras que la de la derecha (que es $\mathcal{L}^{4,3}$) tiene tres.

Después de graficar los PDL de otras dimensiones puede apreciarse que esta tendencia a aumentar el número de oscilaciones en las gráficas conforme el grado k tiende a $n - 1$ (su cota superior) parece presentarse en todas las dimensiones. Por ejemplo, abajo se muestran las gráficas de los PDL de dimensión 7.



6.2 Hipótesis sobre las oscilaciones de los PDL

Con el objetivo de analizar la forma de oscilación de los PDL, nos proponemos hacer un análisis espectral. Antes de proceder sistemáticamente, hagamos un análisis empírico.

Fórmula general de un senoide

$$f(t) = A \cos(2\pi\omega t + 2\pi\phi)$$

$\phi \in [0,1]$: desfase normalizado
 $A \in \mathbb{R}$: amplitud
 $\omega \geq 0$: frecuencia

Pongamos una dimensión de $n = 60$. A continuación, graficamos los PDL de dimensión 60 para los primeros grados, e intentamos aproximar tales gráficas con senoideos continuos.

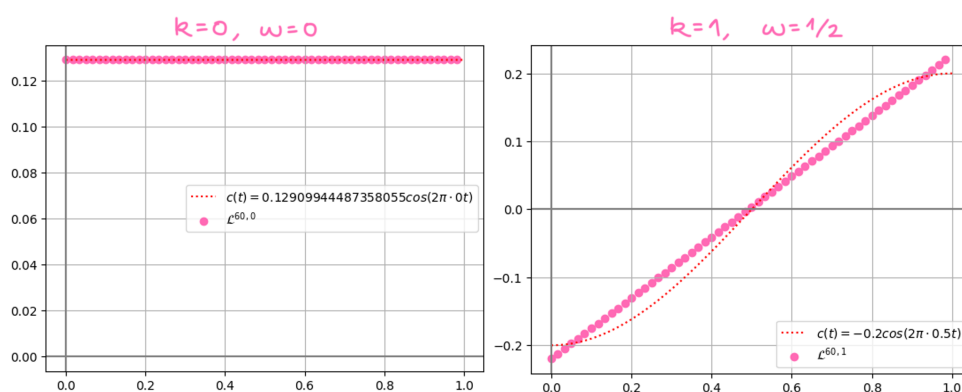


Figure 6.2: Con “senoide” nos referimos a una función continua cuya forma se ilustra en la figura. Este queda completamente determinado al fijar una **amplitud**, una **frecuencia** y un **desfase**, que nosotros preferimos normalizar para que sea un número entre 0 y 1.

Figure 6.3: Aproximando las gráficas de $\mathcal{L}^{60,0}$ y $\mathcal{L}^{60,1}$ con senoideos.

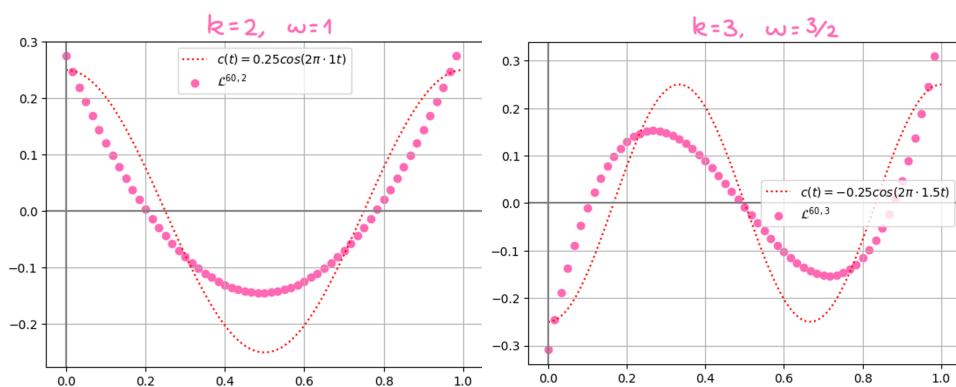


Figure 6.4: Aproximando las gráficas de $\mathcal{L}^{60,2}$ y $\mathcal{L}^{60,3}$ con senoideos.

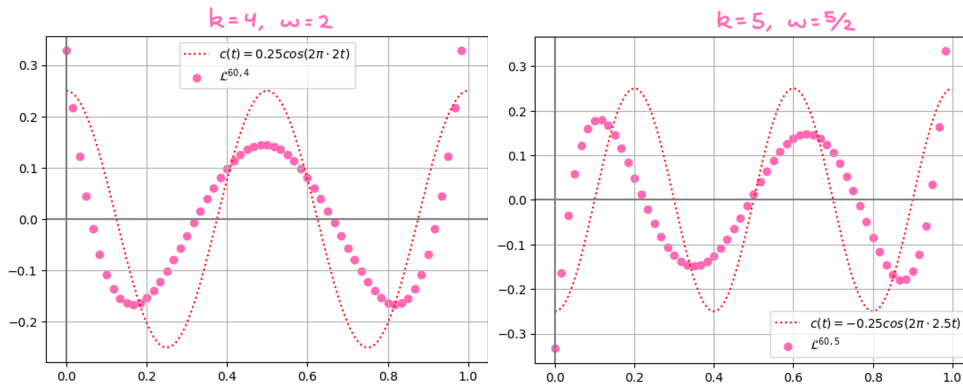


Figure 6.5: Aproximando las gráficas de $\mathcal{L}^{60,4}$ y $\mathcal{L}^{60,5}$ con sinusoides.

Después de dibujar gráficas parecidas para varias dimensiones, establecemos la siguiente hipótesis de trabajo.

Hipótesis 6.2.1

Sean $n \geq 2$, $0 \leq k \leq n - 1$ entero. Sea $\mathcal{L}^{n,k}$ el PDL de dimensión n y grado k . El espectro de $\mathcal{L}^{n,k}$ se concentra alrededor de la frecuencia $\omega = k/2$.

Se ha formulado de forma intencional la hipótesis 6.2.1 en términos vagos, para tener libertad después de definir las herramientas con las que abordaremos el problema de dar forma concreta a la hipótesis y mejorarla o refutarla con simulaciones numéricas.

Observe que, para analizar la presencia de oscilaciones en las gráficas de las señales, estamos hablando de un “espectro”. se cuenta ya con una herramienta clásica para hacer esta clase de análisis, cuyo producto final es una función que da información sobre la importancia que cierta frecuencia tiene para modelar la gráfica analizada. Hablamos de la transformada discreta de Fourier, cuyas bases teóricas comentamos en la sección 6.3, para usarla posteriormente para hacer un primer análisis espectral. Motivados por algunas limitaciones de esta herramienta que comentamos más adelante, nosotros proponemos una alternativa de metodología para realizar un análisis espectral en la sección 6.4.

6.3 La transformada discreta de Fourier

En esta sección vamos a dar la definición usual de las bases de Fourier complejas y reales, que son bases ortonormales de \mathbb{C}^n y de \mathbb{R}^n de \mathbb{C}^n y una de \mathbb{R}^n (que llamaremos “bases de Fourier complejas y reales”), definidas ambas en términos de discretizaciones de sinusoides de frecuencias enteras, y que son herramientas clásicas para hacer lo que comúnmente se denomina un **análisis espectral** de señales finitas.

Puesto que la definición de estas herramientas requiere de algunas nociones del análisis complejo (en particular, de la definición de la exponencial compleja y de las raíces n -ésimas de la unidad), damos brevemente algunas definiciones y resultados necesarios para definir las bases de Fourier.

6.3.1 La exponencial compleja y raíces n -ésimas de la unidad

La definición de la función exponencial compleja tiene diversas motivaciones (puede consultar algunas de estas en [JEM99]). Nosotros sólo damos la definición de esta,

Incluimos este capítulo de teoría clásica por completitud de este trabajo y para fijar la notación. [Ste] y [Sun01] son referencias con mucha más información.

así como algunas propiedades de ella que se usarán en lo que sigue.

Definición 6.3.1

Si $y \in \mathbb{R}$, entonces por $\exp(iy)$ denotamos al número complejo de módulo uno y argumento y , es decir,

$$\exp(iy) := \cos(y) + i\operatorname{sen}(y). \quad (6.1)$$

Para todo número complejo $z = a + bi$, definimos $\exp(z)$ como sigue:

$$\exp(z) := e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)). \quad (6.2)$$

Proposición 6.3.2

(Algunas propiedades de la exponencial compleja) Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{Z}$.

- $\frac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)} = \exp(z_1 - z_2)$
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$
- $(\exp(z_1))^\omega = \exp(\omega z)$
- $\exp(z) = 1$ si y sólo si $z = 2K\pi i$ para algún $K \in \mathbb{Z}$
- para todo $y \in \mathbb{R}$,

$$\cos(y) = \frac{\exp(iy) + \exp(-iy)}{2} \quad (6.3)$$

y

$$\operatorname{sen}(y) = \frac{\exp(iy) - \exp(-iy)}{2i}. \quad (6.4)$$

Definición 6.3.3

Sea $n \in \mathbb{N}$. A las n raíces complejas del polinomio $p_n(t) = t^n - 1 \in \mathbb{C}[t]$ se les denominará las **raíces n -ésimas de la unidad**.

Las raíces n -ésimas de la unidad son pues los números complejos tales que, elevados a la potencia n , son iguales a 1; según el teorema fundamental del álgebra A.1.4, sí hay números complejos que satisfacen la definición 6.3.3, y además son a lo más n . Es fácil establecer, como hacemos a continuación, fórmulas explícitas para estos números, que de hecho son exactamente n .

Proposición 6.3.4

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Hay exactamente n raíces n -ésimas de la unidad, y estas son los números complejos

$$z_{n,\omega} := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\omega\right), \quad \text{con } \omega \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (6.5)$$

Demostración. Por las propiedades expresadas en la proposición 6.3.2, es fácil ver que $z_{n,1} := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ es raíz n -ésima de la unidad, pues

$$(z_{n,1})^n = \exp(2\pi i) = 1.$$

Además, para todo $\omega \in \{0, \dots, n-1\}$, el número

$$z_{n,\omega} := (z_{n,1})^\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\omega\right)$$

también es raíz n -ésima de la unidad, ya que

$$(z_{n,\omega})^n = ((z_{n,1})^\omega)^n = ((z_{n,1})^n)^\omega = 1^\omega = 1.$$

Note ahora que los n números complejos $z_{n,\omega}$ son todos distintos entre sí, pues si ω_1 y ω_2 son enteros entre 0 y $n-1$ tales que $z_{n,\omega_1} = z_{n,\omega_2}$, o sea, tales que $\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\omega_1\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\omega_2\right)$, entonces, según el primer punto de la proposición 6.3.2, $1 = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}(\omega_1 - \omega_2)\right)$, luego, según el cuarto punto de esta misma proposición, $\frac{\omega_1 - \omega_2}{n}$ es entero, o sea, n divide a $\omega_1 - \omega_2$; por el rango de ω_1 y ω_2 , esto sólo ocurre si $\omega_1 - \omega_2$ es cero, o sea, si ω_1 y ω_2 son iguales. \square

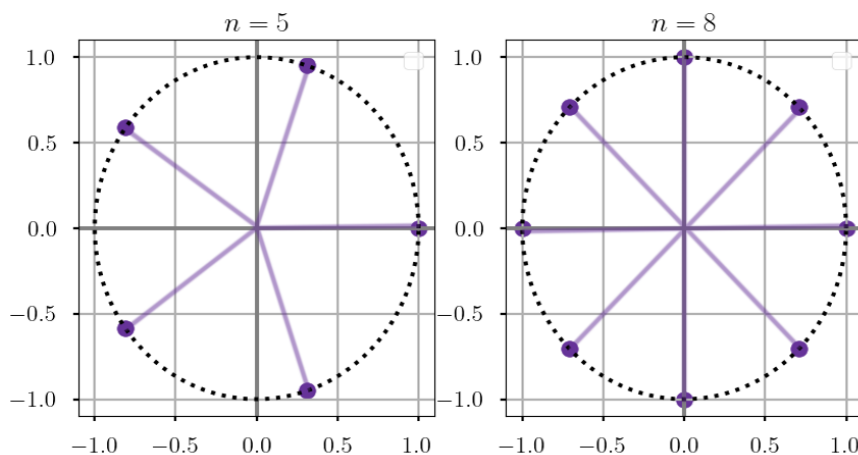


Figure 6.6: Para construir gráficamente a las raíces n -ésimas de la unidad, se debe dividir, a partir del punto $(0,1)$, a la circunferencia unitaria en n partes iguales. Según esta construcción y la interpretación geométrica de la multiplicación unitaria, es claro que multiplicando a $z_{n,1}$ consigo mismo se obtienen a todas las demás raíces n -ésimas.

6.3.2 La transformada discreta de Fourier

Ya tenemos todo lo necesario para definir a la base de Fourier compleja de la que hablamos al inicio.

Proposición 6.3.5

Sea $n \in \mathbb{N}$. El conjunto

$$\mathcal{B}_n := \left\{ e_{n,\omega} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(2\pi i \omega \frac{m}{n}\right) \right)_{0 \leq m \leq n-1} : 0 \leq \omega \leq n-1 \right\} \quad (6.6)$$

es una base ortonormal del \mathbb{C} -espacio vectorial \mathbb{C}^n .

Demostración. Calculemos el producto punto de dos elementos e_{n,ω_1} y e_{n,ω_2} del conjunto (6.6); si $\omega := \omega_1 - \omega_2$,

$$\begin{aligned} \langle e_{n,\omega_1}, e_{n,\omega_2} \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \exp\left(2\pi i \frac{m}{n}\omega_1\right) \cdot \overline{\exp\left(2\pi i \frac{m}{n}\omega_2\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \exp\left(2\pi i \frac{m}{n}(\omega_1 - \omega_2)\right) \end{aligned}$$

El producto punto que estamos considerando en el \mathbb{C} -espacio vectorial \mathbb{C}^n es el que definimos en (A.6), y el del \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^n es el definido en (A.5).

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \exp\left(2\pi i \frac{\omega}{n} m\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \exp\left(2\pi i \frac{\omega}{n}\right)^m \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (z_{n,\omega})^m;
\end{aligned}$$

esta última es una suma geométrica.

- Si $\omega_1 \neq \omega_2$, entonces n no puede dividir a $\omega = \omega_1 - \omega_2$ (pues, por el rango en el que se encuentran ω_1 y ω_2 , $w \in [-(n-1), n-1]$, y el único múltiplo de n en este intervalo es cero), luego, $z_{n,\omega} \neq 1$. En este caso se tiene entonces que

$$\langle e_{n,\omega_1}, e_{n,\omega_2} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (z_{n,\omega})^m = \frac{1}{n} \cdot \frac{(z_{n,\omega})^n - 1}{z_{n,\omega} - 1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - 1}{z_{n,\omega} - 1} = 0.$$

- Si $\omega_1 = \omega_2$, entonces $\omega = 0$, y

$$\langle e_{n,\omega_1}, e_{n,\omega_2} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (z_{n,0})^m = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} 1 = \frac{1}{n} \cdot n = 1.$$

Demostremos así que los elementos de \mathcal{B}_n tienen norma uno y que además son ortogonales dos a dos, luego, \mathcal{B}_n es un subconjunto l.i. de \mathbb{C}^n ; como \mathbb{C}^n es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n , concluimos lo deseado. \square

Por ser (6.6) una BON de \mathbb{C}^n , siempre es posible expresar a un vector $x = (x_m)_{0 \leq m \leq n-1} \in \mathbb{C}^n$ como combinación lineal de los elementos de (6.6) y además los coeficientes están dados por los productos punto de x y los elementos de (6.6) (c.f. nota 1.1.2).

Definición 6.3.6

Sean $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_m)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$ una señal compleja de longitud n . Sea \mathcal{B}_n la base de \mathbb{C}^n definida en la proposición 6.3.5.

A la función $f_x : \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \mathbb{C}^n$ que a cada frecuencia $\omega \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ le asocia el coeficiente de x respecto al elemento $e_{n,\omega}$ de la base \mathcal{B}_n , o sea, la función definida como

$$f_x(\omega) = X_\omega := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{n-1} x_m \exp\left(2\pi i \omega \frac{m}{n}\right) \quad (6.7)$$

le llamaremos la **transformada discreta de Fourier de x** . Muchas veces identificamos a tal transformada con el vector $X := (X_\omega)_{\omega=0}^{n-1}$, que no es más que la representación de $x = (x_m)_{m=0}^{n-1}$ respecto a la base de frecuencias \mathcal{B}_n .

Calcular entonces la transformada discreta de Fourier de x consiste en calcular a los productos punto $\langle x, e_{n,\omega} \rangle$, que son

$$X_\omega := \langle x, e_{n,\omega} \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{n-1} x_m \exp\left(2\pi i \omega \frac{m}{n}\right)$$

Por sus siglas en inglés, a la transformada discreta de Fourier también se le denomina “TDF”.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{n-1} x_m \left(\exp \left(\frac{2\pi i}{n} \omega \right) \right)^m \\
&= A_x(z_{n,\omega}),
\end{aligned}$$

donde $z_{n,\omega}$ es como en (6.5) y $A_x = A_x(t) \in \mathbb{C}[t]$ es el polinomio de coeficientes complejos definido a partir de x como sigue:

$$A_x(t) := \sum_{m=0}^{n-1} \frac{x_m}{\sqrt{n}} t^m \in \mathbb{C}[t]; \quad (6.8)$$

así, calcular la transformada discreta de Fourier de x es lo mismo que evaluar al polinomio A_x de grado a lo más $n-1$ definido en (6.8) en todas las raíces n -ésimas de la unidad.

Nota 6.3.7

Según este último párrafo, calcular transformadas discretas de Fourier requiere de algoritmos eficientes para evaluar polinomios en raíces n -ésimas de la unidad. Usando propiedades de las raíces n -ésimas de la unidad (por ejemplo, véase el lema 30.5 de [THC09]) es posible usar recursión para disminuir el tiempo de cómputo. Al algoritmo estándar usado para esto se le conoce como la **transformada rápida de Fourier** (abreviado como “FFT” por sus siglas en inglés); puede consultar los detalles técnicos en el capítulo 30 de [THC09].

Nota 6.3.8

Se calcula fácilmente una fórmula para la inversa de la transformada discreta de Fourier f_x de una señal x ; si se conoce la TDF $X = (X_\omega)_{\omega=0}^{n-1}$ de una señal $x \in \mathbb{C}^n$, pueden recuperarse sus coeficientes respecto a la base canónica de \mathbb{C}^n (i.e. su representación respecto al tiempo) como sigue:

$$\forall 0 \leq m \leq n-1: x_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \exp \left(-2\pi i k \frac{m}{n} \right). \quad (6.9)$$

En ocasiones, por transformada discreta de Fourier y su inversa se toman las opuestas a las que hemos definido aquí (i.e. se pide el signo negativo en la exponencial para la TDF y se toma el signo positivo para la inversa); además, se toman distintos factores de normalización (por ejemplo, 1 para la TDF y $\frac{1}{n}$ para la inversa), c.f. [Tdf]. Puede ver que fórmulas para la TDF y su inversa son implementadas en el módulo `scipy.fft` de Python con las modificaciones descritas antes (puede consultar la documentación de esta librería en [Fft]).

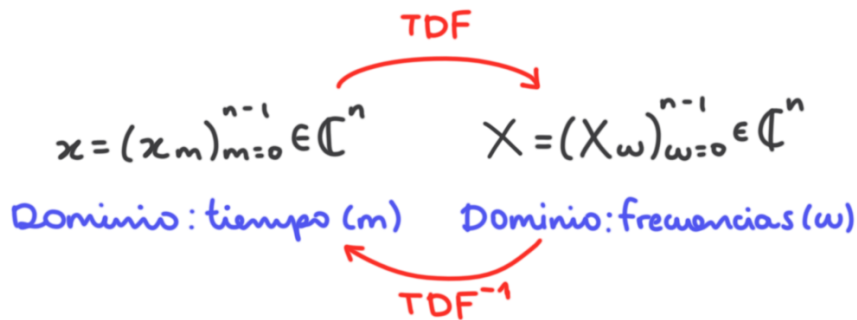


Figure 6.7: Usualmente uno representa a una señal discreta x de dimensión n con n mediciones complejas; en este caso, el dominio de la representación es el tiempo. Pero también se puede representar unívocamente a x con sus coeficientes respecto a la base de frecuencias \mathcal{B}_n ; en este caso, puesto que cada coeficiente da el peso que tiene la respectiva frecuencia para construir la señal original x , decimos que el dominio de la representación es el de frecuencia. Las fórmulas para pasar de una representación a otra son (6.7) y (6.9).

Al usar a \mathcal{B}_n como sistema de representación en \mathbb{C}^n , lo que estamos haciendo es representar a un $x = (x_m)_{0 \leq m \leq n-1}$ como combinación lineal de los vectores

$$e_{n,\omega} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\cos\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right) \right)_{0 \leq m \leq n-1}, \quad 0 \leq \omega \leq n-1;$$

observe que las partes reales de las entradas de $e_{n,\omega} \in \mathbb{C}^n$ se obtienen de tomar n muestras uniformes de la función $c_\omega(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(2\pi\omega t)$ (o sea, de la función coseno de amplitud $\frac{1}{\sqrt{n}}$, frecuencia ω y desfase 0) y, similarmente, las partes imaginarias de las entradas se obtienen muestreando uniformemente a la función $s_\omega(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(2\pi\omega t)$.

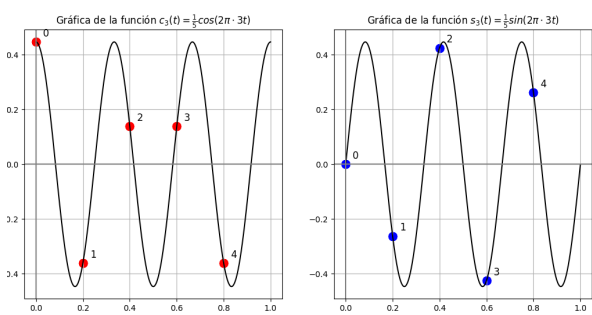


Figure 6.8: Por ejemplo, si $n = 5$, para construir al vector e_3 de la base \mathcal{B}_n se muestrean uniformemente cosenos y senos de frecuencia 3 como se muestra en la figura; los puntos rojos representan las partes reales de las entradas y los azules las imaginarias.

Según esto, el vector $e_{n,\omega}$ se construye a partir de funciones de frecuencia ω ; considerando esto y el que \mathcal{B}_n sea una BON de \mathbb{C}^n (luego, el que se valga la identidad de Parseval, c.f. nota 1.1.2), tenemos que la síntesis

$$x = \sum_{\omega=0}^{n-1} \langle x, e_{n,\omega} \rangle e_{n,\omega}$$

es una expresión de x en términos de vectores de frecuencia ω y que los respectivos coeficientes $\langle x, e_{n,\omega} \rangle$ indican qué tanto contribuye la frecuencia ω para construir a x .

Es por eso que al proceso de considerar representaciones de señales complejas finitas respecto a las bases de Fourier se le conoce como **realizar un análisis espectral**.

6.3.3 Versión real de la TDF

En el caso en el que todas las entradas de un vector $x = (x_m)_{0 \leq m \leq n-1}$ sean reales, se puede definir una base ortonormal de \mathbb{R}^n , análoga a la BON \mathcal{B}_n de \mathbb{C}^n construida en 6.3.5, a partir de muestreos uniformes de sinusoides de frecuencias enteras.

Proposición 6.3.9

Sean $n \in \mathbb{N}$ mayor a uno, $M = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Definimos a los vectores de \mathbb{R}^n

$$c_{n,0} = \left(\sqrt{\frac{1}{n}} \cos \left(2\pi \cdot 0 \frac{m}{n} \right) \right)_{m=0}^{n-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

$$c_{n,\omega} := \left(\sqrt{\frac{2}{n}} \cos \left(2\pi \omega \frac{m}{n} \right) \right)_{m=0}^{n-1}, \quad 1 \leq \omega \leq M-1 \quad (6.10)$$

$$s_{n,\omega} := \left(\sqrt{\frac{2}{n}} \sin \left(2\pi \omega \frac{m}{n} \right) \right)_{m=0}^{n-1}, \quad 1 \leq \omega \leq M-1 \quad (6.11)$$

y, en el caso en que n sea par, definimos también al vector

$$c_{n,M} = \left(\sqrt{\frac{1}{n}} \cos \left(2\pi \cdot M \frac{m}{n} \right) \right)_{0 \leq m \leq n-1} = \left(\frac{(-1)^m}{\sqrt{n}} \right)_{m=0}^{n-1}.$$

El subconjunto \mathcal{F}_n de \mathbb{R}^n definido como

- $\mathcal{F}_n := \{c_{n,0}, c_{n,1}, s_{n,1}, \dots, c_{n,M-1}, s_{n,M-1}, c_{n,M}\}$ si n es par (o sea, si $n = 2M$), y como
- $\mathcal{F}_n := \{c_{n,0}, c_{n,1}, s_{n,1}, \dots, c_{n,M-1}, s_{n,M-1}\}$ si n es impar (o sea, si $n = 2M - 1$)

es una base ortonormal del \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^n .

Demostración. Supongamos n par. Si $0 \leq \omega_1, \omega_2 \leq M$ son enteros, entonces $\omega_1 + \omega_2$ sólo es divisible por n si ambos números son iguales a M . Si suponemos a ω_1 y ω_2 distintos, entonces

$$\begin{aligned} \langle c_{n,\omega_1}, c_{n,\omega_2} \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \cos \left(2\pi \omega_1 \frac{m}{n} \right) \cdot \cos \left(2\pi \omega_2 \frac{m}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\cos \left(2\pi (\omega_1 + \omega_2) \frac{m}{n} \right) + \cos \left(2\pi (\omega_1 - \omega_2) \frac{m}{n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4n} \left(\sum_{m=0}^{n-1} (\exp(2\pi m (\omega_1 + \omega_2) i / n) + \exp(-2\pi m (\omega_1 + \omega_2) i) \right. \\ &\quad \left. + \exp(2\pi m (\omega_1 - \omega_2) i / n) + \exp(-2\pi m (\omega_1 - \omega_2) i)) \right) \\ (\text{suma geométrica}) &= \frac{\exp(2\pi i (\omega_1 + \omega_2)) - 1}{4n(\exp(2\pi i (\omega_1 + \omega_2) / n) - 1)} + \frac{\exp(-2\pi i (\omega_1 + \omega_2)) - 1}{4n(\exp(-2\pi i (\omega_1 + \omega_2) / n) - 1)} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\exp(2\pi i(\omega_1 - \omega_2)) - 1}{4n(\exp(2\pi i(\omega_1 - \omega_2)/n) - 1)} + \frac{\exp(-2\pi i(\omega_1 - \omega_2)) - 1}{4n(\exp(-2\pi i(\omega_1 - \omega_2)/n) - 1)};$$

puesto que $\omega_1 + \omega_2$ y $\omega_1 - \omega_2$ son ambos enteros, según la proposición 6.3.2 las exponenciales de los numeradores de esta última expresión son todas iguales a uno, luego, $\langle c_{n,\omega_1}, c_{n,\omega_2} \rangle = 0$.

Con argumentos similares se prueba que todos los elementos de \mathcal{F}_n tienen norma uno, así como la ortogonalidad entre dos elementos distintos del conjunto \mathcal{F}_n , por lo tanto, la independencia lineal de este conjunto, luego, el que \mathcal{F}_n sea base (ortonormal) de \mathbb{R}^n .

□

Definición 6.3.10

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Llamaremos a la BON \mathcal{F}_n de \mathbb{R}^n definida en 6.3.9 la **base de Fourier real de dimensión n** .

Nota 6.3.11

Observe que \mathcal{F}_n , a diferencia de $\mathcal{B}_n \subseteq \mathbb{C}^n$, considera frecuencias enteras no mayores a $M := \lceil \frac{n}{2} \rceil$ (cuando n es par) o a $M - 1$ (cuando n es impar), mientras que en \mathcal{B}_n se consideran las frecuencias enteras entre 0 y $n - 1$ (inclusivo); así, si decidimos representar a una señal $x \in \mathbb{R}^n$ en base a $\mathcal{F}_n \subseteq \mathbb{R}^n$ y no en base a $\mathcal{B}_n \subseteq \mathbb{C}^n$, sintetizaremos a x respecto a frecuencias enteras acotadas por M o por $M - 1$ (dependiendo de la paridad de n), y no respecto a frecuencias menores a n .

Ejemplo 8. Consideremos a la señal

$$x = (-0.5, -8, -5.3, 15, -0.3, 6, 4) \in \mathbb{R}^7. \quad (6.12)$$

Según la construcción de \mathcal{F}_7 (c.f. proposición 6.3.9), una expresión de x respecto a \mathcal{F}_7 es una síntesis de x a partir de señales de frecuencias $\omega = 0, 1, 2, 3$. En la imagen de abajo se muestran los coeficientes de x respecto a \mathcal{F}_7 .

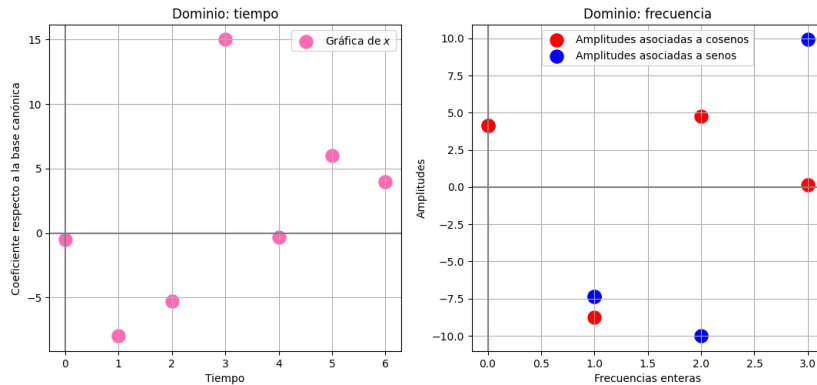


Figure 6.9: Se muestran la gráfica de x junto con la gráfica de los coeficientes de x respecto a la BON \mathcal{F}_7 . Observe que, por definición, sólo un vector de \mathcal{F}_7 tiene frecuencia cero (i.e. es constante), mientras que para las otras frecuencias tenemos dos vectores de la misma frecuencia, uno construido a partir de un coseno y otro a partir de un seno.

Redondeando los coeficientes, se tiene la siguiente descomposición de x ;

$$x = 4.12c_{7,0} - 8.76c_{7,1} - 7.35s_{7,1} + 4.77c_{7,2} - 10s_{7,2} + 0.14c_{7,3} + 9.91s_{7,3}. \quad (6.13)$$

A continuación mostramos las gráficas de los sinusoides que fueron discretizados para obtener los vectores de frecuencia 0, 1, 2 y 3 en los que descompusimos a x .

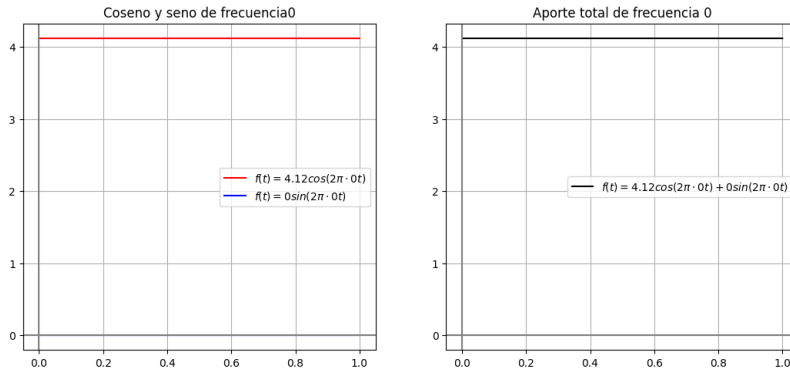


Figure 6.10: Aporte de frecuencia 0.

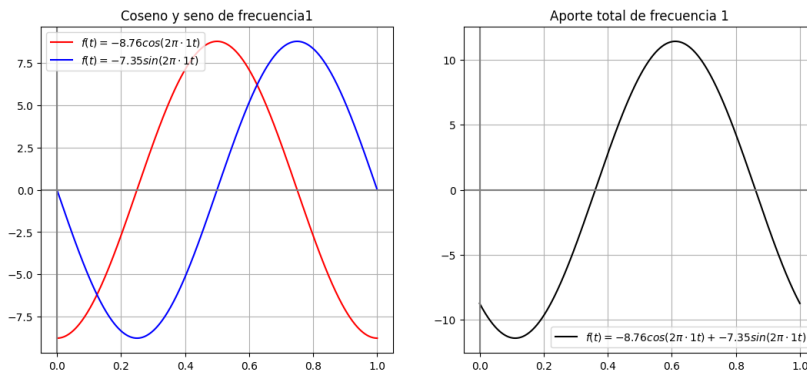


Figure 6.11: Aporte de frecuencia 1.

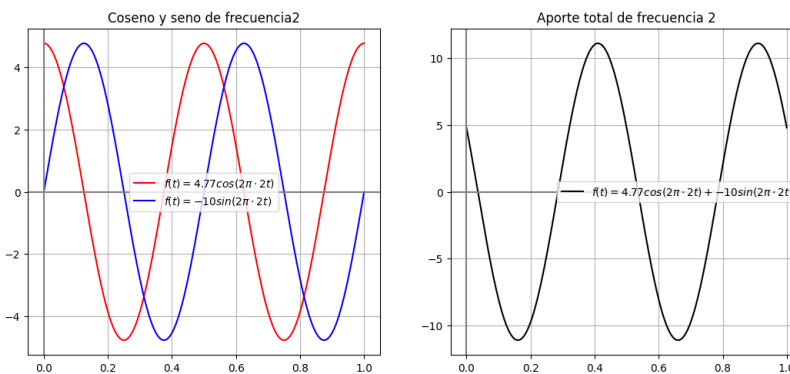


Figure 6.12: Aporte de frecuencia 2.

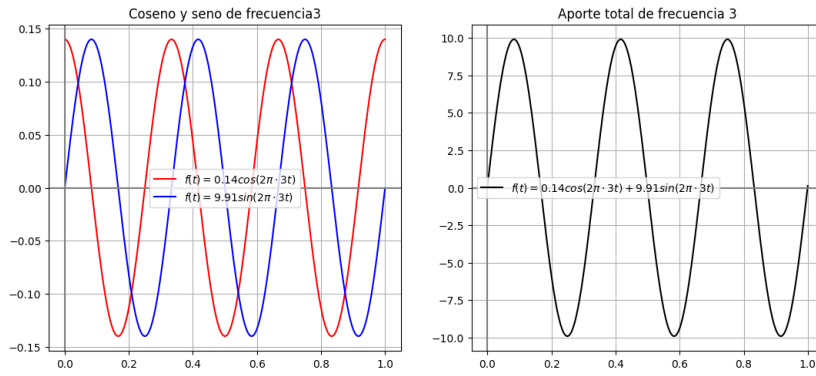


Figure 6.13: Aporte de frecuencia 3.

Sumando todas las gráficas de la derecha, obviamente obtenemos una función de cosenos y senos tal que, del muestrearla uniformemente en $[0, 1]$, resulta el vector x (6.12).

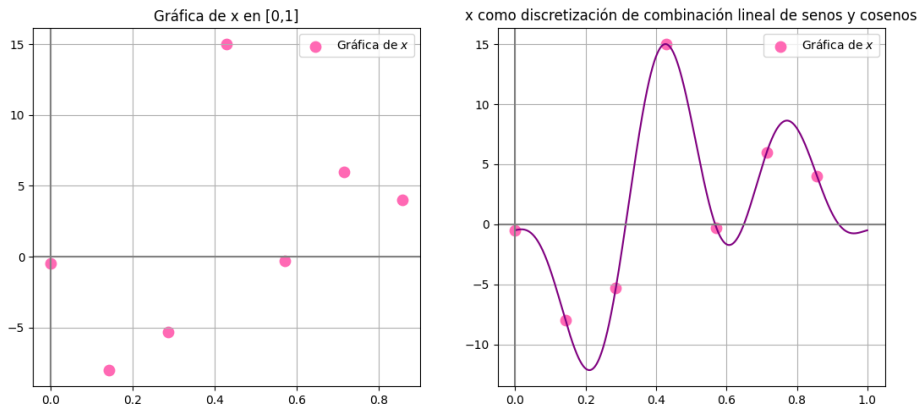


Figure 6.14: En morado se muestra la gráfica de la función suma de las gráficas derechas en las figuras anteriores.

◇

Para terminar, digamos en concreto qué se entiende por el espectro que resulta de usar la versión real de la transformada discreta de fourier para analizar una señal finita.

En la definición \mathcal{F}_n de la base dada en 6.3.9, observe que, por cada frecuencia entera ω considerada, aparecen uno o dos sinusoides (discretizados) con tal frecuencia:

Frecuencia	0	1	...	$M - 1$
Cant. sinusoides	1	2	...	2

Table 6.1: Dimensión $n = 2M - 1$ impar

Frecuencia	0	1	...	$M - 1$	M
Cant. sinusoides	1	2	...	2	1

Table 6.2: Dimensión $n = 2M$ par

Definición 6.3.12

¹ Sea $n \geq 2$. Llamaremos $Dom_{TDF,n}$ al conjunto de frecuencias consideradas en

la transformada discreta de Fourier para las señales de dimensión n , o sea, al siguiente subconjunto de \mathbb{R} ;

$$Dom_{TDF,n} = \{0, 1, \dots, M-1\} \text{ si } n = 2M-1 \text{ es impar,}$$

y

$$Dom_{TDF,n} = \{0, 1, \dots, M\} \text{ si } n = 2M-1 \text{ es par.}$$

Nota 6.3.13

Por ser la base de Fourier real \mathcal{F}_n una BON de \mathbb{R}^n , si $M = \lceil \frac{n}{2} \rceil$,

$$x = \langle x, c_{n,0} \rangle c_{n,0} + \sum_{\omega=1}^{M-1} (\langle x, c_{n,\omega} \rangle c_{n,\omega} + \langle x, s_{n,\omega} \rangle s_{n,\omega}) \text{ si } n \text{ es impar} \quad (6.14)$$

$$x = \langle x, c_{n,0} \rangle c_{n,0} + \sum_{\omega=1}^{M-1} (\langle x, c_{n,\omega} \rangle c_{n,\omega} + \langle x, s_{n,\omega} \rangle s_{n,\omega}) + \langle x, c_{n,M} \rangle c_{n,M} \text{ si } n \text{ es par;} \quad (6.15)$$

así, usando la transformada discreta de Fourier -que, en este contexto, pensamos como calcular los coeficientes de x respecto a \mathcal{F}_n - tenemos tanto un proceso de análisis de x (que pensamos como el cálculo de tales coeficientes) respecto a sinusoides discretizados de frecuencias $\omega \in Dom_{TDF,n}$ como uno de síntesis, que interpretamos como el recuperar a la señal original x usando sus coeficientes respecto a \mathcal{F}_n .

Se vale además la identidad de Parseval, luego, para toda señal $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|^2 = \langle x, c_{n,0} \rangle^2 + \sum_{\omega=0}^{M-1} (\langle x, c_{n,\omega} \rangle^2 + \langle x, s_{n,\omega} \rangle^2) \text{ si } n \text{ es impar} \quad (6.16)$$

y

$$\|x\|^2 = \langle x, c_{n,0} \rangle^2 + \sum_{\omega=0}^{M-1} (\langle x, c_{n,\omega} \rangle^2 + \langle x, s_{n,\omega} \rangle^2) + \langle x, c_{n,M} \rangle^2 \text{ si } n \text{ es par;} \quad (6.17)$$

así, los coeficientes de la forma $\langle x, c_{n,\omega} \rangle^2$ y $\langle x, s_{n,\omega} \rangle^2$ dan información sobre el peso que la frecuencia ω tiene para sintetizar a la señal x .

Definición 6.3.14

Sean $n \geq 2$, $M = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Definimos

$$\tau_n(x, 0) := \frac{|\langle x, c_{n,0} \rangle|}{\|x\|},$$

y

$$\forall 1 \leq \omega \leq M-1 : \tau_n(x, \omega) := \frac{\sqrt{\langle x, c_{n,\omega} \rangle^2 + \langle x, s_{n,\omega} \rangle^2}}{\|x\|}.$$

Si n es par, se define además a

$$\tau_n(x, M) := \frac{|\langle x, c_{n,M} \rangle|}{\|x\|}.$$

Según las ecuaciones (6.16) y (6.17), los coeficientes $\tau_{n,\omega}(x)$ permiten calibrar la presencia de la frecuencia ω (en los rangos dados por las tablas 6.1 y 6.2) en una señal x .

De las ecuaciones (6.16) y (6.17) se deduce fácilmente que, para toda ω , $0 \leq \tau_n(x, \omega) \leq 1$. Puede pensar a tales coeficientes $\tau_n(x, \omega)$ como la contribución (normalizada por la norma de x) de la frecuencia ω para sintetizar a x .

Definición 6.3.15

Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Por el **espectro de x obtenido a partir de la TDF** nos referiremos a la función $T_x : \text{Dom}_{TDF, n} \rightarrow [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ definida como

$$T_x(\omega) = \tau_n(x, \omega) \quad \text{para toda } \omega \in \text{Dom}_{TDF, n},$$

donde los coeficientes $\tau_n(x, \omega)$ son como se definieron en 6.3.14

Ejemplo 9. A continuación se grafica el espectro (a la derecha) obtenido a partir de la TDF de la señal considerada en el ejemplo 8.

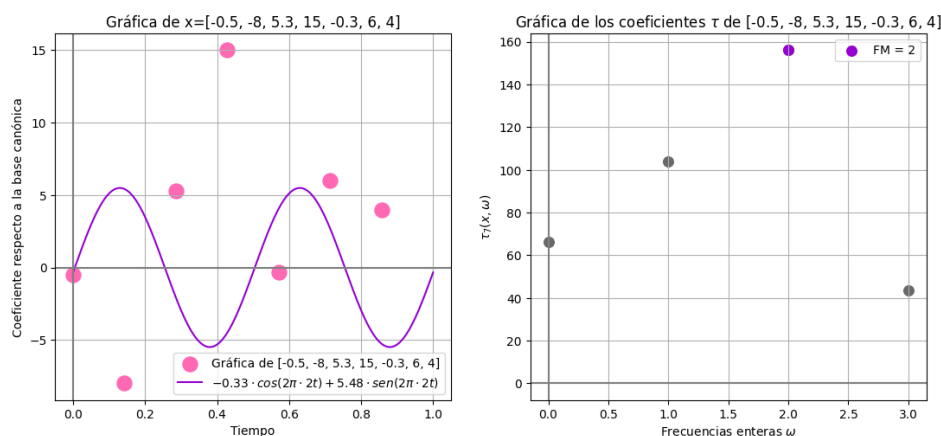


Figure 6.15: Espectro de la señal x dada en (6.12).

Como se marca en el espectro con color morado, la frecuencia asociada al coeficiente τ más alto es $\omega = 2$; a la izquierda, junto con la gráfica de la señal x , se dibuja el senoide (en versión continua) de frecuencia 2 que aparece en el análisis de x respecto a \mathcal{F}_7 dado en (6.13). \diamond

6.4 Metodología para realizar un análisis espectral que considere frecuencias arbitrarias

Ya podemos usar la base de Fourier real \mathcal{F}_n definida en la proposición 6.3.9 para hacer un estudio espectral de los PDL.

Puesto que, por la construcción de \mathcal{F}_n , hacer un análisis espectral de una señal $x \in \mathbb{R}^n$ via su análisis respecto a la BON \mathcal{F}_n nos lleva a considerar sólo ciertas frecuencias enteras (c.f. nota 6.3.11), queremos no sólo usar la TDF para realizar nuestro estudio espectral, pues no queremos restringirnos al estudio de frecuencias enteras (después de todo, según la hipótesis planteada en 6.2.1, creemos que la frecuencia que mejor aproxima al PDL $\mathcal{L}^{n,k}$ es $\frac{k}{2}$, y este último número no siempre es un entero), sino que nos gustaría

1. poder elegir una frecuencia $\omega \geq 0$ respecto a la cual comparar a la señal y,

2. una vez fijada una frecuencia, buscar el desfase $\phi \in [0, 1]$ que mejor ajuste la gráfica de x .

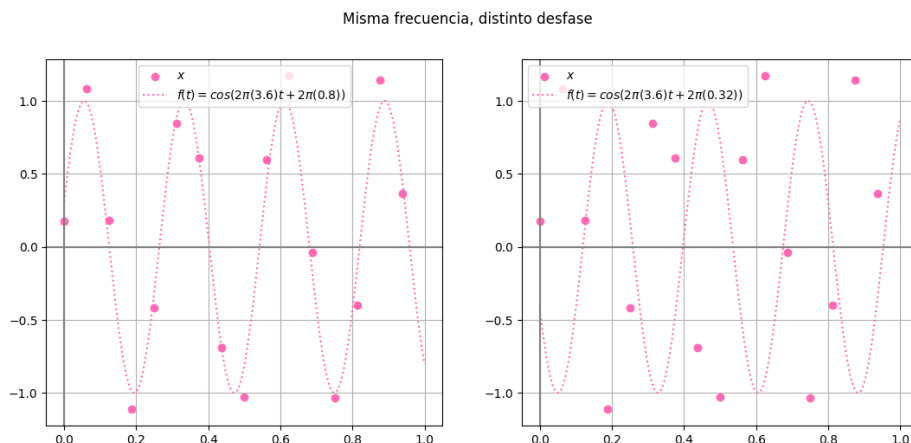


Figure 6.16: Aquí se grafica una misma señal $x \in \mathbb{R}^{16}$ y se compara con dos sinusoides de frecuencia 3.6, una con desfase (normalizado) 0.8 y otra con 0.32. Observe que la primera parece ajustar mucho mejor la gráfica de x .

Vamos a seguir una línea de razonamiento totalmente análoga a la empleada en el ejemplo 5, pues aquí también abordamos el problema definiendo subconjuntos (de hecho, subespacios) de \mathbb{R}^n que consten de elementos que cumplan determinada propiedad (en el caso del ejemplo 5, la propiedad era ser elemento de determinado espacio de polinomios discretos $W_{n,k}$, mientras que en esta sección la propiedad de nuestro interés es “ser la discretización de un senoide de frecuencia ω ”) y usando el coseno del ángulo que una señal x forma con dichos subconjuntos para dar una medida de qué tanto tiene x la propiedad considerada.

6.4.1 Espacios monofrecuenciales

Notación 6.4.1

Para simplificar la notación, denotamos por I_n al intervalo $\{\frac{m}{n} : 0 \leq m \leq n-1\}$.

Digamos qué es lo que entendemos por “señal de frecuencia pura ω ”.

Definición 6.4.2

Sean $n \in \mathbb{N}$, $\omega > 0$, $\phi \in [0, 1[$. A toda señal n -dimensional de la forma

$$A(\cos(2\pi\omega t + 2\pi\phi))_{t \in I_n} \quad (6.18)$$

con $A \in \mathbb{R}$, se le llamará **señal n -dimensional de frecuencia pura ω** . En este contexto, a ϕ se le llama el **desfase normalizado** de la señal, y a A la **amplitud**.

Note que los vectores $c_{n,\omega}$ y $s_{n,\omega}$ definidos en la proposición 6.3.9 son señales n -dimensionales de frecuencia pura ω .

Nota 6.4.3

Observe que toda señal de la forma

$$A(\sin(2\pi\omega t + 2\pi\phi))_{t \in I_n},$$

con $A \in \mathbb{R}$, también es una señal n -dimensional de frecuencia pura ω , pues,

como

$$\text{sen}(x) = -\text{cos}(x + \pi/2) \text{ para toda } x \in \mathbb{R},$$

entonces

$$A(\text{sen}(2\pi\omega t + 2\pi\phi))_{t \in I_n} = -A(\text{cos}(2\pi\omega t + 2\pi\phi'))_{t \in I_n},$$

donde $\phi' = \phi + 1/4$.

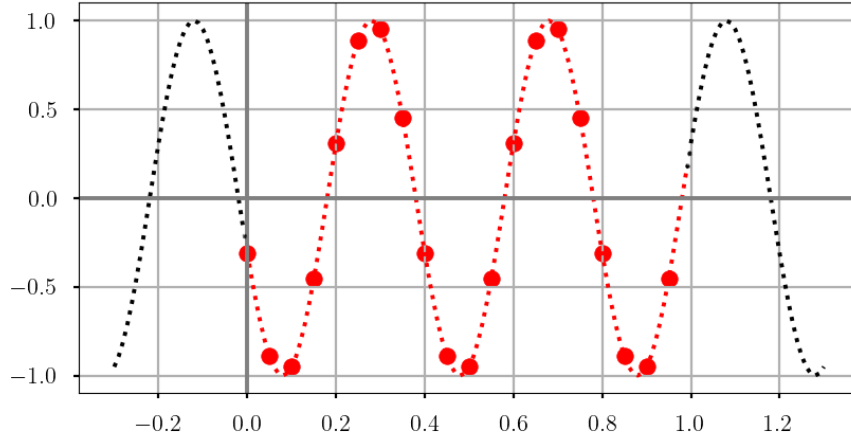


Figure 6.17: Se grafica a la función $f(t) = \text{cos}(2\pi \cdot \frac{5}{2}t + 2\pi \cdot 0.3)$; muestreando este senoide de forma uniforme con n puntos en el intervalo $[0,1]$ obtenemos una señal n -dimensional de frecuencia pura $\omega = \frac{5}{2}$. En la figura, $n = 20$.

Proposición 6.4.4

Sean $n \geq 2$, $\omega \geq 0$.

- El vector

$$\tilde{c}_{n,\omega} = (\text{cos}(2\pi\omega m/n))_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n \quad (6.19)$$

no es cero, y

- el vector

$$\tilde{s}_{n,\omega} = (\text{sen}(2\pi\omega m/n))_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n \quad (6.20)$$

es cero si y sólo si $\omega \in \frac{n}{2}\mathbb{Z}$.

Demostración. El primer punto es fácil de probar, pues la primera entrada del vector (6.19) es $\text{cos}(0) = 1$.

Supongamos ahora que $\omega > 0$ es tal que (6.20) es el vector cero, o sea, que para toda $0 \leq m \leq n-1$, se tiene que $\text{sen}(2\pi\omega m/n) = 0$. En particular, ocurre $\text{sen}(2\pi\omega/n) = 0$; esto implica la igualdad $2\pi\omega/n = \pi K$ para algún entero K . Despejando a ω de la ecuación tenemos que $\omega = \frac{n}{2}K \in \frac{n}{2}\mathbb{Z}$. Recíprocamente, todo ω de la forma $\frac{n}{2}K$, con $K \in \mathbb{Z}$ hace que el vector (6.20) sea cero, pues, para toda $0 \leq m \leq n-1$, $\text{sen}(2\pi\frac{n}{2}K\frac{m}{n}) = \text{sen}((Km)\pi) = 0$. \square

Nos interesará considerar al subespacio de \mathbb{R}^n generado por las señales de frecuencia ω $\tilde{c}_{n,\omega}$ y $\tilde{s}_{n,\omega}$, o sea, a

$$P_{n,\omega} := \text{span}(\tilde{c}_{n,\omega}, \tilde{s}_{n,\omega}). \quad (6.21)$$

caracterizamos a los elementos de espacios de la forma $P_{n,\omega}$ a continuación.

Teorema 6.4.5

Sean $n \in \mathbb{N}$, $\omega \geq 0$ con $\omega \notin \frac{n}{2}\mathbb{Z}$. El espacio $P_{n,\omega}$ definido en (6.21) consta exactamente de las se\u00f1ales n dimensionales de frecuencia ω .

Demostraci\u00f3n.

Sea $\phi \in [0, 1]$ un desfase cualquiera y $A \in \mathbb{R}$ una amplitud cualquiera; por la regla del coseno de la suma de dos \u00e1ngulos, tenemos que

$$A(\cos(2\pi\omega t + 2\pi\phi))_{t \in I_n} = Aa(\cos(2\pi\omega t))_{t \in I_n} + Ab(\sin(2\pi\omega t))_{t \in I_n} \in P_{n,\omega}$$

donde

$$a := \cos(2\pi\phi) \text{ y } b := \sin(2\pi\phi).$$

Rec\u00edprocamente, si $a, b \in \mathbb{R}$ son escalares cualesquiera, el elemento gen\u00e9rico $x = a(\cos(2\pi\omega t))_{t \in I_n} + b(\sin(2\pi\omega t))_{t \in I_n}$ de $P_{n,\omega}$ puede expresarse como sigue:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} (A(\cos(2\pi\omega t))_{t \in I_n} + B(\sin(2\pi\omega t))_{t \in I_n}), \quad (6.22)$$

donde

$$A := \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ y } B := \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Como $A^2 + B^2 = 1$, existe $\phi \in [0, 1]$ tal que

$$A = \cos(2\pi\phi) \text{ y } B = \sin(2\pi\phi); \quad (6.23)$$

sustituyendo (6.23) en (6.22), llegamos a que

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(2\pi\phi) \cdot (\cos(2\pi\omega t))_{t \in I_n} + \sin(2\pi\phi) \cdot (\sin(2\pi\omega t))_{t \in I_n}) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(2\pi\phi) \cdot \cos(2\pi\omega t) + \sin(2\pi\phi) \cdot \sin(2\pi\omega t))_{t \in I_n} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(2\pi\omega t - 2\pi\phi))_{t \in I_n}. \end{aligned}$$

□

Definici\u00f3n 6.4.6

Si $n \geq 2$ y $\omega > 0$, entonces al subespacio $P_{n,\omega}$ de \mathbb{R}^n definido en (6.21) le llamaremos el **espacio monofrecuencial** de \mathbb{R}^n de frecuencia ω .

Observaci\u00f3n 6.4.7

Sean $n \geq 2$ entero, $\omega \geq 0$ con $\omega \notin \frac{n}{2}\mathbb{Z}$. Los vectores (6.19) y (6.20) de \mathbb{R}^n son linealmente independientes.

Demostraci\u00f3n. S\u00f3lo note que la primera entrada de (6.19) es 1, mientras que la primera entrada de $\tilde{s}_{n,\omega}$ es cero pero no todas sus entradas lo son (c.f. proposici\u00f3n 6.4.4). □

Seg\u00fan la observaci\u00f3n 6.4.7, si $\omega \notin \frac{n}{2}\mathbb{Z}$, el espacio $P_{n,\omega}$ que generan los vectores (6.19) y (6.20)

$$P_{n,\omega} := \text{span}(\tilde{c}_{n,\omega}, \tilde{s}_{n,\omega})$$

$$= \{a (\cos(2\pi\omega t))_{t \in I_n} + b (\sin(2\pi\omega t))_{t \in I_n} : a, b \in \mathbb{R}\}, \omega \notin \frac{n}{2}\mathbb{Z} \quad (6.24)$$

es un plano (i.e. un subespacio de dimensión 2) de \mathbb{R}^n que además, según el teorema 6.4.5, consta exactamente de las señales de dimensión n y frecuencia (pura) ω .

Si $\omega \in \frac{n}{2}\mathbb{Z}$, entonces, según la proposición 6.4.4, el vector $\tilde{s}_{n,\omega}$ es el vector cero y $\tilde{c}_{n,\omega}$ no, luego, el espacio

$$\begin{aligned} P_{n,\omega} &:= \text{span}(c_{n,\omega}, s_{n,\omega}) \\ &= \{a (\cos(2\pi\omega t))_{t \in I_n} : a \in \mathbb{R}\}, \omega \in \frac{n}{2}\mathbb{Z} \end{aligned} \quad (6.25)$$

es una recta (i.e. un subespacio de dimensión 1) de \mathbb{R}^n .

Nota 6.4.8

Sean $n \geq 2$, $\omega \in \frac{n}{2}\mathbb{Z}$ una frecuencia mayor o igual a cero; digamos que $\omega = \frac{n}{2}K$. Entonces, según la proposición 6.4.4, $s_{n,\omega} = 0$ y

$$\tilde{c}_{n,\omega} = \left(\cos\left(2\pi \frac{n}{2} K \frac{m}{n}\right) \right)_{m=0}^{n-1} = (\cos(mK\pi))_{m=0}^{n-1} = ((-1)^{mK})_{m=0}^{n-1},$$

luego, fijada una dimensión n , sólo hay dos espacios $P_{n,\omega}$ cuando $\omega \in \frac{n}{2}\mathbb{Z}$, a saber,

$$\{(a)_{m=0}^{n-1} : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

y

$$\{((-1)^m a)_{m=0}^{n-1} : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

6.4.2 Fórmulas para el coseno del ángulo de un punto a un plano

Para proponer una metodología alternativa al uso de la TDF para realizar un análisis espectral, necesitaremos medir ángulos de señales a planos (i.e. subespacios de dimensión 2). En esta subsección nos dedicamos a obtener expresiones que usaremos para la tarea. Vamos pues a desarrollar la teoría de la subsección A.6.2 para este caso particular.

La situación es la siguiente: V es un \mathbb{R} -espacio de Hilbert, u y v son elementos de V , unitarios y linealmente independientes entre sí. El espacio que ellos generan es pues un plano, digamos,

$$P := \text{span}\{u, v\}.$$

Dado $x \in V$, el coseno del ángulo entre x y P es, según la proposición A.6.4,

$$\cos(\angle(x, P)) = \frac{\|\Pi_P(x)\|}{\|x\|}; \quad (6.26)$$

para lograr expresar el lado derecho de la igualdad en términos sólo de u , v y x (que son los elementos básicos de nuestra discusión), conviene primero obtener, a partir de estos elementos, una base ortonormal del espacio P .

Observación 6.4.9

Si $u, v \in V$ son unitarios y linealmente independientes, y P es el plano que

generan, entonces $\{u, z\}$, donde

$$z := \frac{v - \langle u, v \rangle u}{\|v - \langle u, v \rangle u\|} \quad (6.27)$$

es una BON de P

Demostración. Basta aplicar el teorema de Gram-Schmidt A.5.1. \square

Teniendo una BON de P , según el corolario A.4.4, se tiene la siguiente expresión para la proyección de x en P ;

$$\Pi_P(x) = \langle x, u \rangle u + \langle x, z \rangle z; \quad (6.28)$$

puesto que, según la definición (6.27) de z este vector es función de u y v , fácilmente se puede derivar, a partir de (6.28), una expresión de $\Pi_P(x)$ en función sólo de x , u y v . Se plasman las fórmulas concretas a continuación.

Proposición 6.4.10

Sean V un espacio de Hilbert, $x \in V$, $u, v \in V$ linealmente independientes y unitarios. Si P es el plano que generan u y v , entonces,

$$\Pi_P(x) = \frac{\langle x, u \rangle - \langle u, v \rangle \langle x, v \rangle}{1 - \langle u, v \rangle^2} u + \frac{\langle x, v \rangle - \langle u, v \rangle \langle x, u \rangle}{1 - \langle u, v \rangle^2} v \quad (6.29)$$

y

$$\|\Pi_P(x)\|^2 = \frac{\langle x, u \rangle^2 + \langle x, v \rangle^2 - 2\langle x, u \rangle \langle x, v \rangle \langle u, v \rangle}{1 - \langle u, v \rangle^2}. \quad (6.30)$$

Demostración. La demostración consiste de simples manipulaciones aritméticas. Según (6.28),

$$\begin{aligned} \Pi_P(x) &= \langle x, u \rangle u + \langle x, z \rangle z \\ &= \langle x, u \rangle u + \frac{\langle x, v \rangle - \langle u, v \rangle \langle x, u \rangle}{\|v - \langle u, v \rangle u\|^2} (v - \langle u, v \rangle u); \end{aligned}$$

puesto que u y v son unitarios, tenemos que

$$\begin{aligned} \|v - \langle u, v \rangle u\|^2 &= \langle v, v \rangle^2 - 2\langle u, v \rangle^2 + \langle u, v \rangle^2 \langle u, u \rangle \\ &= 1 - \langle u, v \rangle^2; \end{aligned} \quad (6.31)$$

sustituyendo (6.31) en la última expresión para $\Pi_P(x)$ llegamos a (6.30).

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|\Pi_P(x)\|^2 &= \langle x, u \rangle^2 + \langle x, z \rangle^2 \\ &= \langle x, u \rangle^2 + \left(\frac{\langle x, v \rangle - \langle u, v \rangle \langle x, u \rangle}{\|v - \langle u, v \rangle u\|} \right)^2; \end{aligned}$$

sustituyendo (6.31) en esta última expresión llegamos a (6.30).

\square

Usando las expresiones (A.13) y (6.30) es fácil establecer la siguiente proposición.

Proposición 6.4.11

Sean V un espacio de Hilbert, $x \in V$, $u, v \in V$ linealmente independientes y unitarios. Si P es el plano que generan u y v , entonces,

$$\cos(\angle(x, P)) = \sqrt{\frac{\langle x, u \rangle^2 + \langle x, v \rangle^2 - 2\langle x, u \rangle \langle x, v \rangle \langle u, v \rangle}{\|x\|^2 \cdot (1 - \langle u, v \rangle^2)}}. \quad (6.32)$$

6.4.3 Estudio espectral basado en ángulos a espacios monofrecuenciales

Definidos los espacios monofrecuenciales $P_{n,\omega} \subseteq \mathbb{R}^n$ (c.f. (6.21)) y caracterizados sus elementos como las señales n -dimensionales de frecuencia pura ω , parece razonable medir la cercanía de una señal n -dimensional $x \in \mathbb{R}^n$ a tener frecuencia ω con el ángulo que x forma con el subespacio $P_{n,\omega}$, cuyo coseno, según la proposición A.6.4 es

$$\cos(\angle(x, P_{n,\omega})) = \frac{\|\Pi_{P_{n,\omega}}(x)\|}{\|x\|} \in [0, 1]. \quad (6.33)$$

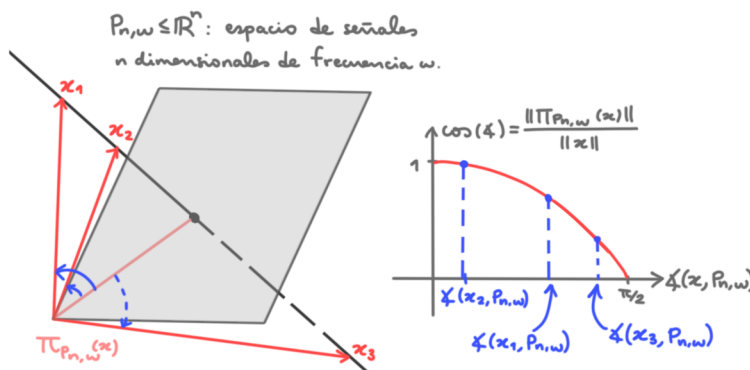


Figure 6.18: Según la relación (6.33), si $\frac{\|\Pi_{P_{n,\omega}}(x)\|}{\|x\|}$ es cercano a uno (resp. a cero), entonces x es muy parecido a una señal de frecuencia ω (resp. se aleja de ser una señal de frecuencia ω).

Si x es unitaria, tenemos la relación simplificada

$$\cos(\angle(x, W)) = \|\Pi_W(x)\| \quad (x \text{ unitario}). \quad (6.34)$$

Usaremos pues, para dar una medida de qué tanto reacciona una señal $x \in \mathbb{R}^n$ a una frecuencia $\omega > 0$ el número

$$\frac{\|\Pi_{P_{n,\omega}}(x)\|}{\|x\|} \in [0, 1].$$

Definición 6.4.12

Sean $n \geq 2$, $\omega \geq 0$. Definimos la función $\sigma_n(\cdot, \omega)$ para todo elemento de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ como sigue;

$$\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\} : \sigma_n(x, \omega) = \cos(\angle(x, P_{n,\omega})) = \frac{\|\Pi_{P_{n,\omega}}(x)\|}{\|x\|}. \quad (6.35)$$

Nota 6.4.13

Fijada una frecuencia ω ,

- si $\sigma_{n,\omega}(x)$ es “cercano” a cero, ω no es una frecuencia con la que es razonable aproximar a x (pues x será cercano a ser ortogonal a toda señal de dimensión n y frecuencia ω), mientras que
- si $\sigma_{n,\omega}(x)$ es “cercano” a uno, también es muy cercano (hablando en términos de distancia euclídea) a su proyección al espacio $P_{n,\omega}$, luego x es muy parecido a tener frecuencia ω .

Para poder usar las fórmulas derivadas en la subsección 6.4.2, debemos de dar una BON del espacio $P_{n,\omega}$.

Proposición 6.4.14

Sean $n \in \mathbb{N}$, $\omega > 0$. Sean los vectores $\tilde{c}_{n,\omega}, \tilde{s}_{n,\omega} \in \mathbb{R}^n$ como se definieron en (6.19) y (6.20), respectivamente.

- Si $\omega \notin \frac{n}{2}\mathbb{Z}$, entonces $\{c_{n,\omega}, s_{n,\omega}\}$, donde

$$c_{n,\omega} = \xi_{n,\omega} \tilde{c}_{n,\omega} \in \mathbb{R}^n \quad (6.36)$$

y

$$s_{n,\omega} = \eta_{n,\omega} \tilde{s}_{n,\omega} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.37)$$

con

$$\xi_{n,\omega} = \sqrt{2} \cdot \left(n + \frac{\text{sen}(2\pi\omega) \cos(2\pi\omega \left(\frac{n-1}{n}\right))}{\text{sen}\left(2\pi\frac{\omega}{n}\right)} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.38)$$

y

$$\eta_{n,\omega} = \sqrt{2} \cdot \left(n - \frac{\text{sen}(2\pi\omega) \cos(2\pi\omega \left(\frac{n-1}{n}\right))}{\text{sen}\left(2\pi\frac{\omega}{n}\right)} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.39)$$

es una base normalizada del subespacio $P_{n,\omega} \leq \mathbb{R}^n$ definido en (6.24), y,

- si $\omega \in \frac{n}{2}\mathbb{Z}$, entonces $\{c_{n,\omega}\}$, con

$$c_{n,\omega} := \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{c}_{n,\omega} \quad (6.40)$$

es una base normalizada del subespacio $P_{n,\omega} \leq \mathbb{R}^n$ definido en (6.25).

Demostración. En efecto, por definición del espacio $P_{n,\omega}$, $\{\tilde{c}_{n,\omega}, \tilde{s}_{n,\omega}\}$ es una base de este cuando $\omega \notin \frac{n}{2}\mathbb{Z}$, y $\{\tilde{c}_{n,\omega}\}$ es base si $\omega \in \frac{n}{2}\mathbb{Z}$, luego, en ambos casos el conjunto propuesto en efecto es una base de $P_{n,\omega}$. En el segundo caso, puesto que $c_{n,\omega}$ será un vector cuyas entradas serán 1, o -1 , en efecto es un vector unitario. En el primer caso, se han calculado las constantes $\xi_{n,\omega}$ y $\eta_{n,\omega}$ dadas en (6.38) y (6.39) para que $c_{n,\omega}$ y $s_{n,\omega}$ tengan normal uno; puesto que los cálculos son muy similares a los realizados en la demostración de la proposición 6.4.16, los omitimos. \square

Nota 6.4.15

Observe que las notaciones “ $c_{n,\omega}$ ” y “ $s_{n,\omega}$ ” ya las habíamos empleado antes en la proposición 6.3.9 cuando se definía la base ortonormal en función de la cual se calcula la TDF; no hay problema en usar esta notación aquí también, pues para los valores $\omega \in \text{Dom}_{TDF,n}$, los vectores $c_{n,\omega}$ y $s_{n,\omega}$ definidos en la proposición 6.3.9 coinciden con los que acabamos de definir en la proposición 6.4.14.

Conviene también establecer una fórmula para el producto punto entre los vectores $c_{n,\omega}$ y $s_{n,\omega}$ definidos en la proposición 6.4.14 cuando $\omega \notin \frac{n}{2}\mathbb{Z}$. Hacemos esto a continuación.

Proposición 6.4.16

Fijados $n \geq 2$ y $\omega \geq 0$ con $\omega \notin \frac{n}{2}\mathbb{Z}$, el producto punto entre los vectores $c_{n,\omega}$ y $s_{n,\omega}$, definidos (6.36) y (6.37) respectivamente, es

$$\langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle = \frac{\xi_{n,\omega} \eta_{n,\omega}}{2} \cdot \frac{\text{sen}(2\pi\omega) \text{sen}(2\pi\omega(1 - \frac{1}{n}))}{\text{sen}(2\pi\frac{\omega}{n})} \quad (6.41)$$

Demostración. Aquí usaremos las siguientes tres igualdades:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha), \quad (6.42)$$

$$\forall z \in \mathbb{R} : \text{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (6.43)$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{1\} : \sum_{m=0}^{n-1} a^m = \frac{1 - a^n}{1 - a}. \quad (6.44)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle &= \xi_{n,\omega} \eta_{n,\omega} \left\langle \left(\cos\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right) \right)_{0 \leq m \leq n-1}, \left(\text{sen}\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right) \right)_{0 \leq m \leq n-1} \right\rangle \\ &= \xi_{n,\omega} \eta_{n,\omega} \sum_{m=0}^{n-1} \cos\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right) \text{sen}\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right) \\ &= \frac{\xi_{n,\omega} \eta_{n,\omega}}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\text{sen}\left(4\pi\omega\frac{m}{n}\right) \right) \\ &= \frac{\xi_{n,\omega} \eta_{n,\omega}}{4i} \sum_{m=0}^{n-1} \left(e^{4\pi\omega im/n} - e^{-4\pi\omega im/n} \right) \\ &= \frac{\xi_{n,\omega} \eta_{n,\omega}}{4i} \left(\frac{1 - e^{4\pi\omega i}}{1 - e^{4\pi\omega i/n}} - \frac{1 - e^{-4\pi\omega i}}{1 - e^{-4\pi\omega i/n}} \right) \\ &= \frac{\xi_{n,\omega} \eta_{n,\omega}}{4i} \left(\frac{e^{2\pi\omega i} - e^{-2\pi\omega i}}{e^{2\pi\omega i/n} - e^{-2\pi\omega i/n}} - \frac{e^{-2\pi\omega i} - e^{2\pi\omega i}}{e^{-2\pi\omega i/n} - e^{2\pi\omega i/n}} \right) \\ &= \frac{\xi_{n,\omega} \eta_{n,\omega}}{4i} \left(e^{2\pi\omega i(1-1/n)} \frac{\text{sen}(2\pi\omega)}{\text{sen}(2\pi\omega/n)} - e^{-2\pi\omega i(1-1/n)} \frac{\text{sen}(2\pi\omega)}{\text{sen}(2\pi\omega/n)} \right) \\ &= \frac{\xi_{n,\omega} \eta_{n,\omega}}{4i} \frac{\text{sen}(2\pi\omega)}{\text{sen}(2\pi\omega/n)} \left(e^{2\pi\omega i(1-1/n)} - e^{-2\pi\omega i(1-1/n)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\xi_{n,\omega} \eta_{n,\omega}}{4i} \frac{\text{sen}(2\pi\omega)}{\text{sen}(2\pi\omega/n)} \left(2i \cdot \text{sen} \left(2\pi\omega \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) \right) \\
&= \frac{\xi_{n,\omega} \eta_{n,\omega}}{2} \frac{\text{sen}(2\pi\omega)}{\text{sen}(2\pi\omega/n)} \text{sen} \left(2\pi\omega \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right).
\end{aligned}$$

□

Proposición 6.4.17

Sean $n \geq 2$, $\omega \geq 0$. Sea $\sigma_n(\cdot, \omega) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ la función definida en 6.4.12. Para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ se tiene que

- Si $\omega \notin \frac{n}{2}\mathbb{Z}$, entonces

$$\Pi_{P_{n,\omega}}(x) = \frac{\langle x, c_{n,\omega} \rangle - \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle \langle x, s_{n,\omega} \rangle}{1 - |\langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle|^2} c_{n,\omega} + \frac{\langle x, s_{n,\omega} \rangle - \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle \langle x, c_{n,\omega} \rangle}{1 - |\langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle|^2} s_{n,\omega} \quad (6.45)$$

y

$$\sigma_n(x, \omega) = \left(\frac{\langle x, c_{n,\omega} \rangle^2 + \langle x, s_{n,\omega} \rangle^2 - 2\langle x, c_{n,\omega} \rangle \langle x, s_{n,\omega} \rangle \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle}{\|x\|^2 \cdot (1 - \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle^2)} \right)^{1/2}, \quad (6.46)$$

donde $c_{n,\omega}$ y $s_{n,\omega}$ son como en (6.36) y (6.37), y

- si $\omega \in \frac{n}{2}\mathbb{Z}$, entonces

$$\Pi_{P_{n,\omega}}(x) = \langle x, c_{n,\omega} \rangle c_{n,\omega} \quad (6.47)$$

y

$$\sigma_n(x, \omega) = \frac{|\langle x, c_{n,\omega} \rangle|}{\|x\|}, \quad (6.48)$$

donde $c_{n,\omega}$ es como en (6.40).

Ya tenemos todo lo necesario para dar una definición alternativa del espectro de una señal (c.f. definición 6.3.15 para ver la definición de espectro basada en la TDF).

6.5 Desfase de la proyección de una señal a espacios monofrecuenciales

Fijada una dimensión n y una frecuencia $\omega \geq 0$, dado cualquier $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ya tenemos una fórmula para calcular la proyección $\Pi_{P_{n,\omega}}(x)$ (c.f. proposición 6.4.17). Sin embargo, como $\Pi_{P_{n,\omega}}(x) \in P_{n,\omega}$, según el teorema 6.4.5, es posible expresar a la señal $\Pi_{P_{n,\omega}}(x)$ como el resultado de muestrear uniformemente con n mediciones a un senoide de frecuencia pura ω . Lo que queremos hacer en esta sección es dar explícitamente a los dos elementos que faltan para determinar unívocamente este senoide continuo, a saber, el parámetro de amplitud $A \in \mathbb{R}$ y el desfase normalizado $\phi \in [0, 1[$. Buscamos entonces A y ϕ tales que

$$\Pi_{P_{n,\omega}}(x) = A(\cos(2\pi\omega t - 2\pi\phi))_{t \in I_n}.$$

Puesto que $\Pi_{P_{n,\omega}}(x)$ (donde $P_{n,\omega}$ es como se definió en (6.21)) es la señal de frecuencia ω que está a menor distancia euclídea de x , podremos interpretar este desfase ϕ como el desfase que mejor se ajusta a x (c.f. figura 6.17).

Buscamos pues la amplitud y el desfase de la señal de frecuencia ω más cercana a x .

Primero abordemos el caso en el que $\omega \notin \frac{n}{2}\mathbb{Z}$.

Como los vectores $c_{n,\omega}$ y $s_{n,\omega}$ definidos en (6.36) y (6.37) son unitarios y linealmente independientes (c.f. proposición 6.4.14), podemos usar la ecuación (6.29) para escribir a la proyección de x en P_ω como sigue

$$\Pi_{P_\omega}(x) = c(\cos(2\pi\omega t))_{t \in I_n} + d(\sin(2\pi\omega t))_{t \in I_n}, \quad (6.49)$$

donde

$$c = \frac{\langle x, c_{n,\omega} \rangle - \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle \langle x, s_{n,\omega} \rangle}{1 - \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle^2} \xi_{n,\omega} \quad (6.50)$$

y

$$d = \frac{\langle x, s_{n,\omega} \rangle - \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle \langle x, c_{n,\omega} \rangle}{1 - \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle^2} \eta_{n,\omega}. \quad (6.51)$$

Nos conviene más reescribir a (6.49) como

$$\Pi_{P_{n,\omega}}(x) = \sqrt{c^2 + d^2} [C(\cos(2\pi\omega t))_{t \in I_n} + D(\sin(2\pi\omega t))_{t \in I_n}], \quad (6.52)$$

donde

$$C := \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} \text{ y } D := \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \quad (6.53)$$

pues, como $C^2 + D^2 = 1$, existe un único $\phi \in [0, 1[$ tal que

$$C = \cos(2\pi\phi), \quad D = \sin(2\pi\phi). \quad (6.54)$$

Sustituyendo (6.54) en (6.52), llegamos a que

$$\begin{aligned} \Pi_{P_{n,\omega}}(x) &= \sqrt{c^2 + d^2} [\cos(2\pi\phi) \cdot (\cos(2\pi\omega t))_{t \in I_n} + \sin(2\pi\phi) \cdot (\sin(2\pi\omega t))_{t \in I_n}] \\ &= \sqrt{c^2 + d^2} (\cos(2\pi\phi) \cdot \cos(2\pi\omega t) + \sin(2\pi\phi) \cdot \sin(2\pi\omega t))_{t \in I_n} \\ &= \sqrt{c^2 + d^2} (\cos(2\pi\omega t - 2\pi\phi))_{t \in I_n}. \end{aligned}$$

Además, de (6.54) y (6.53) se deduce que

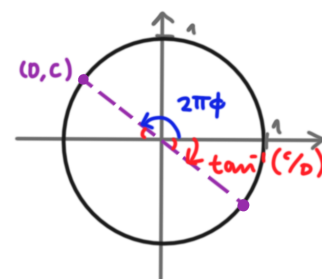
$$\phi = \begin{cases} \frac{\tan^{-1}(d/c)}{2\pi} & \text{si } d, c > 0, \\ \frac{\tan^{-1}(d/c) + \pi}{2\pi} & \text{si } d, c < 0 \text{ o } d < 0, c > 0, \\ \frac{\tan^{-1}(d/c) + 2\pi}{2\pi} & \text{si } d > 0, c < 0. \end{cases} \quad (6.55)$$

Hemos probado el siguiente

Teorema 6.5.1

(Amplitud y desfase de la proyección de $x \in \mathbb{R}^n$ al espacio monofrecuencial $P_{n,\omega}$) Sean $n \geq 2$ y $\omega > 0$ con $\omega \notin \frac{n}{2}\mathbb{Z}$. Si $P_{n,\omega}$ es el subespacio de \mathbb{R}^n definido como en (6.24), entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ no cero, se tiene que

$$\Pi_{P_{n,\omega}}(x) = A \cdot (\cos(2\pi\omega t - 2\pi\phi))_{t \in I_n} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.56)$$



donde la amplitud A es

$$\sqrt{c^2 + d^2},$$

c y d son como en (6.50) y (6.51), resp., y el desfase ϕ está dado por (6.55).

Observe que tenemos una fórmula para obtener a la frecuencia y la amplitud de $\Pi_{P_{n,\omega}}(x)$ usando sólo los datos

$$\langle x, c_{n,\omega} \rangle, \langle x, s_{n,\omega} \rangle \text{ y } \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle.$$

El resultado análogo para cuando $\omega \in \frac{n}{2}\mathbb{Z}$ es más fácil de establecer, pues en este caso el espacio monofrecuencia $P_{n,\omega}$ es una recta.

Teorema 6.5.2

Sean $n \geq 2$ y $\omega > 0$ con $\omega \in \frac{n}{2}\mathbb{Z}$. Si $P_{n,\omega}$ es el subespacio de \mathbb{R}^n definido como en (6.25), entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ no cero, se tiene que

$$\Pi_{P_{n,\omega}}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \langle x, c_{n,\omega} \rangle \cdot (\cos(2\pi\omega t))_{t \in I_n} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.57)$$

Demostración. En efecto, según (6.47) y (6.40), se tiene que

$$\begin{aligned} \Pi_{P_{n,\omega}}(x) &= \langle x, c_{n,\omega} \rangle c_{n,\omega} \\ &= \langle x, c_{n,\omega} \rangle \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{c}_{n,\omega} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \langle x, c_{n,\omega} \rangle \cdot (\cos(2\pi\omega t))_{t \in I_n} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

□

6.6 Algunas propiedades de Σ_x

Antes de continuar, fijada una dimensión $n \geq 2$ y una señal $x \in \mathbb{R}^n$, establezcamos algunas propiedades de la función $\Sigma_x : [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ definida como

$$\Sigma_x(\omega) := \sigma_n(x, \omega), \quad (6.58)$$

donde los coeficientes $\sigma_n(x, \omega)$ son como se definieron en (6.35), pues, al ser la función que a cada frecuencia positiva le asigna el coseno del ángulo que x forma con el espacio monofrecuencia $P_{n,\omega}$, parece en principio ser una buena candidata a espectro de x . Tales propiedades nos ayudarán a afinar tal definición, y dar así una definición del espectro de una señal basado en espacios monofrecuenciales.

El primer resultado de esta sección establece la periodicidad del espectro, hecho que nos permitirá acotar considerablemente el dominio de frecuencias de la función Σ_x .

6.6.1 Periodicidad

Proposición 6.6.1

(Periodicidad de la función (6.58)) Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Sea Σ_x la función

definida como en (6.58). La función Σ_x es n -periódica, es decir, para cualquier frecuencia $0 \leq \omega \leq n$ y toda $K \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\sigma_n(x, \omega) = \sigma_n(x, \omega + Kn).$$

Demostración. Sólo observe que

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{n, \omega + Kn} &= \left(\cos \left(2\pi (\omega + Kn) \frac{m}{n} \right) \right)_{m=0}^{n-1} \\ &= \left(\cos \left(2\pi \omega \frac{m}{n} + 2\pi Km \right) \right)_{m=0}^{n-1} \\ &= \left(\cos \left(2\pi \omega \frac{m}{n} \right) \right)_{m=0}^{n-1} = \tilde{c}_{n, \omega} \end{aligned}$$

y, similarmente, que

$$\tilde{s}_{n, \omega + Kn} = \tilde{s}_{n, \omega},$$

luego, por definición de los espacios monofrecuenciales (c.f. ecuación 6.21),

$$\begin{aligned} P_{n, \omega + Kn} &= \text{span}(\tilde{c}_{n, \omega + Kn}, \tilde{s}_{n, \omega + Kn}) \\ &= \text{span}(\tilde{c}_{n, \omega}, \tilde{s}_{n, \omega}) = P_{n, \omega}; \end{aligned}$$

de esto se concluye, usando la definición 6.4.12, que

$$\sigma_n(x, \omega) = \cos(\angle(x, P_{n, \omega})) = \cos(\angle(x, P_{n, \omega + Kn})) = \sigma_n(x, \omega + Kn).$$

□

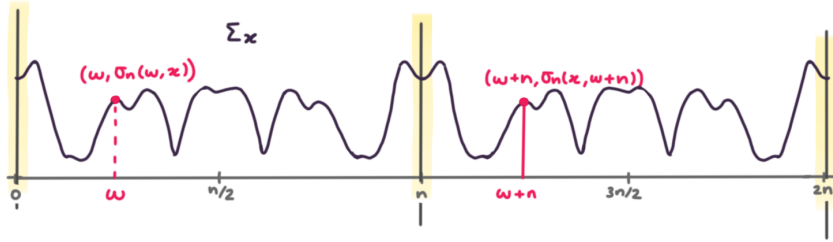


Figure 6.19: Según la periodicidad establecida en la proposición 6.6.1, basta calcular los coeficientes espectrales $\sigma_n(x, \omega)$ para frecuencias $0 \leq \omega \leq n$.

6.6.2 Simetría

Proposición 6.6.2

(Simetría de la función (6.58)) Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Para toda $0 \leq \omega \leq \frac{n}{2}$,

$$\Sigma_x(\omega) = \Sigma_x(n - \omega).$$

Demostración. Debemos demostrar que se tiene la igualdad

$$\sigma_n(x, \omega) = \sigma_n(x, n - \omega).$$

En efecto,

$$\tilde{c}_{n, \omega + n} = \left(\cos \left(2\pi (n - \omega) \frac{m}{n} \right) \right)_{m=0}^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\cos \left(2\pi n \frac{m}{n} - 2\pi \omega \frac{m}{n} \right) \right)_{m=0}^{n-1} \\
&= \left(\cos \left(2\pi m - 2\pi \omega \frac{m}{n} \right) \right)_{m=0}^{n-1} \\
&= \left(\cos \left(2\pi \omega \frac{m}{n} \right) \right)_{m=0}^{n-1} = \tilde{c}_{n,\omega}
\end{aligned}$$

y, similarmente,

$$\tilde{s}_{n,\omega+Kn} = -\tilde{s}_{n,\omega};$$

de esto, como en la demostración de la proposición 6.6.1, se concluye la igualdad entre los espacios $P_{n,\omega}$ y $P_{n,n-\omega}$, y de esto la igualdad deseada. \square

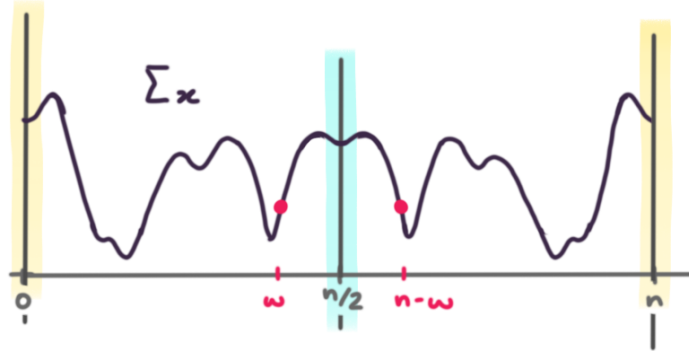


Figure 6.20: Podemos así afinar la afirmación hecha en la figura 6.19 y concluir que basta calcular los coeficientes $\sigma_n(x, \omega)$ para $0 \leq \omega \leq \frac{n}{2}$, pues los demás pueden deducirse a partir de reflexiones y traslaciones.

6.6.3 Continuidad

Fijada una $n \geq 2$ y una $x \in \mathbb{R}^n$, vamos a analizar la continuidad de la función Σ_x como se definió en (6.58). Por la periodicidad y simetría establecidas en las proposiciones 6.6.1 y 6.6.2, basta analizar la continuidad de Σ_x sólo en el intervalo cerrado $[0, n/2]$. Establecer la continuidad de Σ_x en el interior de este intervalo no es un problema.

Proposición 6.6.3

Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$, Σ_x como se definió en (6.58). La función Σ_x es continua en $]0, n/2[$.

Demostración. Sólo observe que la fórmula (6.46), que sirve para calcular el coeficiente $\sigma_n(x, \omega) = \Sigma_x(\omega)$ cuando $\omega \in]0, n/2[$, es una combinación de sumas y productos de senos y cosenos evaluados en funciones de la frecuencia ω , luego, es una función continua, por lo tanto Σ_x es continua en el interior del intervalo $[0, n/2]$. \square

Sólo resta analizar la continuidad de Σ_x en los puntos extremos 0 y $n/2$. Para ello, será de utilidad introducir algunos conceptos.

6.6.4 Operador de alternancia

Definición 6.6.4

Sea $n \geq 2$. Definimos a la función $A_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como sigue;

$$\forall x = (x_m)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n : A_n(x) = ((-1)^m x_m)_{m=0}^{n-1}.$$

Llamaremos a A el **operador de alternancia n dimensional**.

Observación 6.6.5

El operador de alternancia $A_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene las siguientes propiedades.

- Es una transformación lineal de \mathbb{R}^n en si mismo
- Es una isometría de \mathbb{R}^n , es decir, para toda $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\|A_n(x)\| = \|x\|$
- Es un operador involutivo, es decir, es invertible e igual a su inversa

Ejemplo 10. Veamos qué efecto tiene en la geometría y oscilaciones de una señal $x \in \mathbb{R}^n$ el evaluarlo con el operador de alternancia A_n .

Puesto que por definición A_n agrega cambios de signos intercalados en las entradas de una señal, es intuitivamente obvio que si esta tenía pocas oscilaciones (hecho que, informalmente hablando, podría pensarse como el pocos cambios de signo de la forma $+-+ y -+-$), $A_n(x)$ por el contrario tendrá muchas oscilaciones, y que, recíprocamente, si x tiene muchos oscilaciones el vector $A_n(x)$ no los tendrá.

En este contexto, puede pensarse a A_n como un operador que, dependiendo de la naturaleza oscilatoria de x , aumente o disminuya las oscilaciones de la señal x .

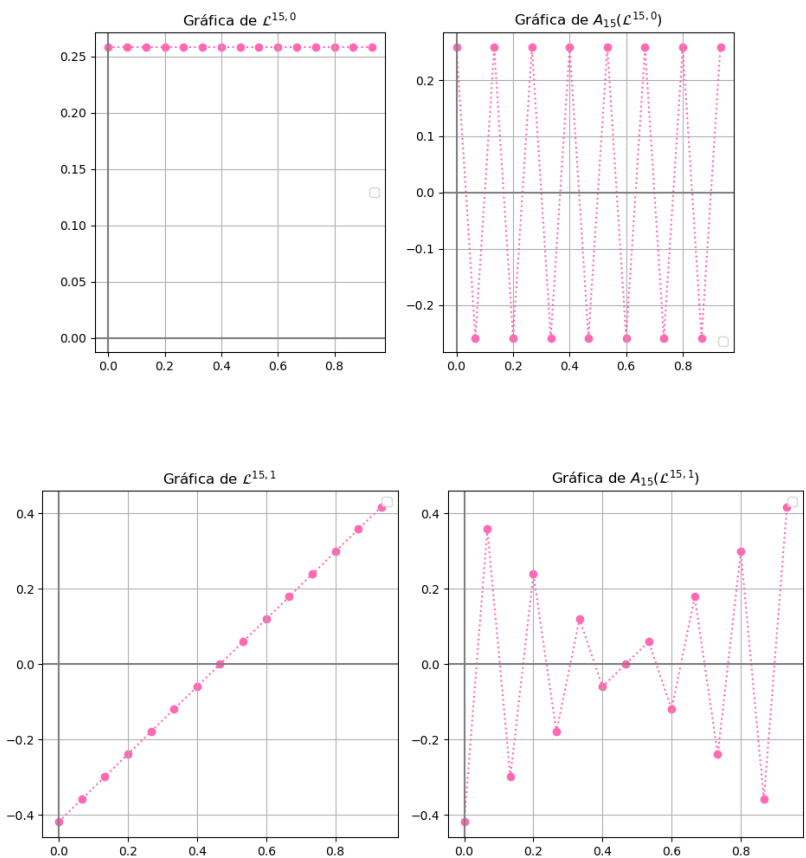


Figure 6.21: Una señal constante $x \in \mathbb{R}^n$ es, por excelencia, aquella que no presenta oscilaciones. Por el contrario, la gráfica de $A_n(x)$ presenta el número máximo de oscilaciones posibles para una señal de tamaño n .

Figure 6.22

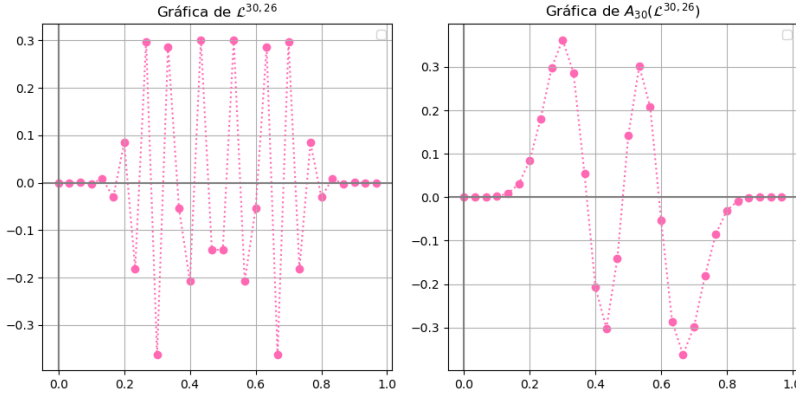


Figure 6.23: Por el contrario, si la gráfica de $x \in \mathbb{R}^n$ presenta muchas oscilaciones, entonces la de $A_n(x)$ es más suave.

Proposición 6.6.6

Sean $n \geq 2$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Para toda $\omega \in [0, n/4]$ se tiene que

$$\sigma_n(x, n/2 - \omega) = \sigma_n(A(x), \omega). \quad (6.59)$$

Demostración. En efecto, sólo note que, para toda $0 \leq m \leq n-1$,

$$\cos\left(2\pi\left(\frac{n}{2} - \omega\right)\frac{m}{n}\right) = (-1)^m \cos\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right)$$

y

$$\operatorname{sen}\left(2\pi\left(\frac{n}{2} - \omega\right)\frac{m}{n}\right) = -(-1)^m \operatorname{sen}\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right),$$

luego,

$$\langle x, c_{n, n/2 - \omega} \rangle = \xi_{n, \omega} \sum_{m=0}^{n-1} x_m (-1)^m \cos\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right) = \langle A(x), c_{n, n/2 - \omega} \rangle,$$

$$\langle x, s_{n, n/2 - \omega} \rangle = -\eta_{n, \omega} \sum_{m=0}^{n-1} x_m (-1)^m \operatorname{sen}\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right) = -\langle A(x), s_{n, n/2 - \omega} \rangle,$$

$$\langle c_{n, n/2 - \omega}, s_{n, n/2 - \omega} \rangle = -\xi_{n, \omega} \eta_{n, \omega} \sum_{m=0}^{n-1} \cos\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right) \operatorname{sen}\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right) = -\langle c_{n, n/2 - \omega}, s_{n, n/2 - \omega} \rangle.$$

De estas igualdades y del que A sea una isometría, se sigue aplicando directamente la definición de los números $\sigma_n(x, \omega)$ dada en la proposición 6.4.17, la igualdad 6.59. \square

Según esta última proposición, analizar la presencia de una frecuencia “alta” (i.e. cercana a $n/2$) en una señal $x \in \mathbb{R}^n$ es lo mismo que analizar la presencia de una frecuencia baja en la señal alternada $A(x)$. Esto concuerda con lo explicado en el ejemplo 10, a saber, que el alternar una señal con muchas oscilaciones da lugar a una mucho más estable y viceversa.

Definición 6.6.7

Sean $n \geq 2$ y $x = (x_m)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Para todo $k \geq 0$ se definen a los números $M_k(x)$ como

$$M_k(x) := \sum_{m=0}^{n-1} m^k x_m. \quad (6.60)$$

6.6.5 Límites de la función Σ_x en 0 y $n/2$

Teorema 6.6.8

Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $\Sigma_x : [0, n/2] \rightarrow [0, 1]$ como se definió en (6.58). Se tiene que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Sigma_x(\omega) = \left(\frac{2M_0(x)^2(2n-1)(n-1) + 12M_1(x)^2 - 12M_0(x)M_1(x)(n-1)}{\|x\|^2(n-1)(n+1)n} \right)^{1/2} \quad (6.61)$$

y

$$\lim_{\omega \rightarrow (n/2)^-} \Sigma_x(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Sigma_{A_n(x)}(\omega). \quad (6.62)$$

Demostración. Para calcular ambos límites, usaremos las series de Taylor de las funciones seno y coseno alrededor del cero con términos de hasta la potencia 5 para aproximar a los sinusoides que aparecen en la expresión

$$\left(\frac{\langle x, c_{n,\omega} \rangle^2 + \langle x, s_{n,\omega} \rangle^2 - 2\langle x, c_{n,\omega} \rangle \langle x, s_{n,\omega} \rangle \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle}{\|x\|^2 \cdot (1 - \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle^2)} \right)^{1/2}, \quad (6.63)$$

es decir, usaremos las siguientes aproximaciones, válidas en las cercanías del cero;

$$\text{sen}(\omega) \sim \omega - \frac{\omega^3}{3!} + o(\omega^5), \quad \omega \sim 0,$$

$$\text{cos}(\omega) \sim 1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} + o(\omega^5), \quad \omega \sim 0.$$

Con estas aproximaciones, vamos a tener a nuestra disposición expresiones como las siguientes;

$$\text{cos} \left(2\pi\omega \frac{n-1}{n} \right) \sim 1 - 2\pi^2 \frac{(n-1)^2}{n^2} \omega^2 + \frac{2}{3} \frac{(n-1)^4}{n^4} \pi^4 \omega^4 + o(\omega^5),$$

$$\text{sen} \left(2\pi\omega \frac{m}{n} \right) \sim 2\pi \frac{m}{n} \omega - \frac{4}{3n^3} \pi^3 \omega^3 + o(\omega^5).$$

Empecemos calculando el límite

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Sigma_x(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left(\frac{\langle x, c_{n,\omega} \rangle^2 + \langle x, s_{n,\omega} \rangle^2 - 2\langle x, c_{n,\omega} \rangle \langle x, s_{n,\omega} \rangle \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle}{\|x\|^2 \cdot (1 - \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle^2)} \right)^{1/2}. \quad (6.64)$$

Usando las aproximaciones de las funciones seno y coseno cerca del origen en las definiciones (6.38) y (6.39) de los factores de normalización $\xi_{n,\omega}$ y $\eta_{n,\omega}$, encontramos las siguientes aproximaciones, válidas en las cercanías del cero.

$$\begin{aligned} \xi_{n,\omega} &\sim \sqrt{2} \left(4\pi \frac{\omega - \frac{2\pi^2}{3n^2}(2n^2 - 3n + 2)\omega^3 + o(\omega^5)}{\frac{2\pi}{n}\omega - \frac{4\pi^3}{3n^3}\omega^3 + o(\omega^5)} \right)^{-1/2} \\ &\sim \sqrt{2} \left(2n \frac{\omega - \frac{2\pi^2}{3n^2}(2n^2 - 3n + 2)\omega^3 + o(\omega^5)}{\omega - \frac{2\pi^2}{3n^2}\omega^3 + o(\omega^5)} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{\omega \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{n}}, \\
\eta_{n,\omega} & \sim \sqrt{2} \left(\frac{8\pi^3(2n-1)(n-1)\omega^3 + o(\omega^5)}{6\pi n\omega - \frac{4\pi^3}{n}\omega^3 + o(\omega^5)} \right)^{-1/2} \\
& \sim \sqrt{2} \left(\frac{4\pi^2(2n-1)(n-1)\omega^3 + o(\omega^5)}{3n\omega - \frac{2\pi^2}{n}\omega^3 + o(\omega^5)} \right)^{-1/2} \\
& \xrightarrow{\omega \rightarrow 0^+} \infty.
\end{aligned}$$

De la expresión para $\xi_{n,\omega}$ se calcula que

$$\begin{aligned}
\langle x, c_{n,\omega} \rangle & = \xi_{n,\omega} \langle x, \tilde{c}_{n,\omega} \rangle = \xi_{n,\omega} \sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos \left(2\pi\omega \frac{m}{n} \right) \\
& \sim \xi_{n,\omega} \left(M_0(x) - \frac{2\pi^2}{n^2} X_2 \omega^2 + \frac{2\pi^4}{3n^4} M_4(x) \omega^4 + o(\omega^5) \right) \\
& \xrightarrow{\omega \rightarrow 0^+} \frac{M_0(x)}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, de la expresión para $\eta_{n,\omega}$ se deduce la siguiente aproximación.

$$\begin{aligned}
\langle x, s_{n,\omega} \rangle & = \eta_{n,\omega} \langle x, \tilde{s}_{n,\omega} \rangle = \eta_{n,\omega} \sum_{m=0}^{n-1} x_m \operatorname{sen} \left(2\pi\omega \frac{m}{n} \right) \\
& \sim \eta_{n,\omega} \left(\frac{2\pi}{n} M_1(x) \omega - \frac{4\pi^3}{3n^3} M_3(x) \omega^3 + o(\omega^5) \right) \quad \text{cuando } \omega \sim 0 \\
& \sim \sqrt{2} \left(\frac{6\pi n\omega - \frac{4\pi^3}{n}\omega^3 + o(\omega^5)}{8\pi^3(2n-1)(n-1)\omega^3 + o(\omega^5)} \right)^{1/2} \\
& \cdot \left(\frac{2\pi}{n} M_1(x) \omega - \frac{4\pi^3}{3n^3} M_3(x) \omega^3 + o(\omega^5) \right).
\end{aligned}$$

Del intentar evaluar el límite de $\langle x, s_{n,\omega} \rangle$ cuando $\omega \rightarrow 0^+$ con esta última aproximación asintótica se llega a una indeterminación de tipo $\infty \cdot 0$. Para desarrollar más esta última expresión para intentar eliminar esta indeterminación, vamos a expresar el segundo factor

$$\frac{2\pi}{n} M_1(x) \omega - \frac{4\pi^3}{3n^3} M_3(x) \omega^3 + o(\omega^5) \quad (6.65)$$

como la raíz cuadrada de su cuadrado. Para hacer esto, deberemos de considerar el signo de este factor

$$\frac{2\pi}{n} M_1(x) \omega - \frac{4\pi^3}{3n^3} M_3(x) \omega^3 + o(\omega^5) = \frac{2\pi}{n} \omega \left(M_1(x) - \frac{2\pi^2}{3n^2} M_3(x) \omega^2 \right)$$

que, por ser ω positivo, es el signo de

$$M_1(x) - \frac{2\pi^2}{3n^2} M_3(x) \omega^2. \quad (6.66)$$

Recuerde que en realidad sólo nos interesan valores de ω muy cercanos a cero (pues lo que queremos es evaluar el límite de $\langle x, s_{n,\omega} \rangle$ cuando ω tiende a cero), luego, es posible escoger un rango de ω de tal forma que el sumando $\frac{2\pi^2}{3n^2}M_3(x)\omega^2$ sea tan pequeño (comparado con $M_1(x)$) que el signo de la expresión (6.66) (i.e. el de (6.65)) sea el de $M_1(x)$. Si

$$\text{sgn}(M_1(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } M_1(x) \geq 0, \\ -1 & \text{si } M_1(x) < 0, \end{cases}$$

podemos entonces seguir la cadena de aproximaciones asintóticas de $\langle x, s_{n,\omega} \rangle$ como sigue.

$$\begin{aligned} \langle x, s_{n,\omega} \rangle &\sim \text{sgn}(M_1(x))\sqrt{2} \left(\frac{6\pi n\omega - \frac{4\pi^3}{n}\omega^3 + o(\omega^5)}{8\pi^3(2n-1)(n-1)\omega^3 + o(\omega^5)} \right)^{1/2} \\ &\cdot \left(\left(\frac{2\pi}{n}M_1(x)\omega - \frac{4\pi^3}{3n^3}M_3(x)\omega^3 + o(\omega^5) \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \text{sgn}(M_1(x))\sqrt{2} \left(\frac{\frac{24\pi^3}{n}X_1^2\omega^3 + o(\omega^5)}{8\pi^3(2n-1)(n-1)\omega^3 + o(\omega^5)} \right)^{1/2} \\ &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0^+} \text{sgn}(M_1(x)) \left(\frac{6M_1(x)^2}{(2n-1)(n-1)n} \right)^{1/2} = M_1(x) \left(\frac{6}{(2n-1)(n-1)n} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Por último, encontremos un equivalente asintótico, válido en las cercanías de 0, de $\langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle &= \xi_{n,\omega}\eta_{n,\omega} \sum_{m=0}^{n-1} \cos\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right) \text{sen}\left(2\pi\omega\frac{m}{n}\right) \\ &\sim \frac{2\pi}{n}\xi_{n,\omega}\eta_{n,\omega}(n-1) \left(\frac{n}{2}\omega - \frac{2\pi^2}{3}(n-1)\omega^3 + o(\omega^5) \right) \quad \text{cuando } \omega \sim 0 \\ &\sim \frac{2\pi}{n\sqrt{n}}(n-1)\eta_{n,\omega} \left(\frac{n}{2}\omega - \frac{2\pi^2}{3}(n-1)\omega^3 + o(\omega^5) \right). \end{aligned}$$

Nuevamente, el factor $\eta_{n,\omega}$, que tiende a ∞ conforme $\omega \rightarrow 0^+$, nos hace tener una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$ cuando intentamos calcular el límite de $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle$.

Observe que, puesto que sólo nos interesan los valores de ω cercanos a cero, el factor $\frac{n}{2}\omega - \frac{2\pi^2}{3}(n-1)\omega^3 + o(\omega^5)$ es positivo para ω lo suficientemente pequeño (pues siempre es posible encontrar una cota superior para ω , cercana a cero, de tal forma que se cumpla la desigualdad $\frac{n}{2} \geq \frac{2\pi^2}{3}(n-1)\omega^2$ para las frecuencias ω menores a tal cota), luego, en este caso podemos proceder sin problemas a expresar este factor como la raíz cuadrada de su cuadrado, para poder concluir lo siguiente;

$$\begin{aligned} \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle &\sim \frac{2\sqrt{2}}{n\sqrt{n}}\pi(n-1) \left(\frac{\frac{3}{2}\pi n^3\omega^3 + o(\omega^5)}{8\pi^3(2n-1)(n-1)\omega^3 + o(\omega^5)} \right)^{1/2} \quad \text{cuando } \omega \sim 0 \\ &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{6(n-1)}}{2\sqrt{2n-1}}. \end{aligned}$$

De estos límites se deduce que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \langle x, c_{n,\omega} \rangle^2 = \frac{M_0(x)^2}{n}, \quad (6.67)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \langle x, s_{n,\omega} \rangle^2 = \frac{6M_1(x)^2}{(2n-1)(n-1)n}, \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} -2\langle x, c_{n,\omega} \rangle \langle x, s_{n,\omega} \rangle \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle &= -2 \frac{M_0(x)}{\sqrt{n}} \cdot \frac{M_1(x)\sqrt{6}}{\sqrt{(n(n-1)(2n-1))}} \cdot \frac{\sqrt{6}\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n-1}} \\ &= -\frac{6M_0M_1(x)}{n(2n-1)}, \end{aligned} \quad (6.69)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle^2 = \frac{3(n-1)}{2(2n-1)}. \quad (6.70)$$

Observe que $1 - \frac{3(n-1)}{2(2n-1)}$ nunca es cero, o sea, que sustituyendo la expresión (6.70) en (6.63) no se tiene un denominador igual a cero, por lo que podemos sustituir los límites (6.67), (6.68), (6.69) y (6.70) en (6.63) y concluir que el límite buscado (6.64) existe y es igual

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Sigma_x(\omega) &= \left(\frac{\frac{M_0(x)^2}{n} + \frac{6M_1(x)^2}{n(2n-1)(n-1)} - \frac{6M_0(x)M_1(x)}{n(2n-1)}}{\|x\|^2 \left(1 - 1.5 \frac{n-1}{2n-1}\right)} \right)^{1/2} \\ &= \frac{2M_0(x)^2(2n-1)(n-1) + 12M_1(x)^2 - 12M_0(x)M_1(x)(n-1)}{\|x\|^2(n-1)(n+1)n}. \end{aligned}$$

Determinemos ahora el límite de (6.63) cuando $\omega \rightarrow (n/2)^-$. Para aprovechar todo lo calculado antes, vamos a hacer el cambio de variable

$$\omega = \frac{n}{2} - \tilde{\omega},$$

pues $\omega \rightarrow (n/2)^-$ si y sólo si $\tilde{\omega} \rightarrow 0^+$.

Se calcula que

$$\cos\left(2\pi\omega \frac{n-1}{n}\right) = (-1)^{n-1} \cos\left(2\pi\tilde{\omega} \frac{n-1}{n}\right), \quad \cos\left(2\pi\omega \frac{m}{n}\right) = (-1)^m \cos\left(2\pi\tilde{\omega} \frac{m}{n}\right),$$

$$\cos\left(2\pi\frac{\omega}{n}\right) = -\cos\left(2\pi\frac{\tilde{\omega}}{n}\right),$$

$$\operatorname{sen}(2\pi\omega) = (-1)^{n-1} \operatorname{sen}(2\pi\tilde{\omega}), \quad \operatorname{sen}\left(2\pi\omega \frac{m}{n}\right) = (-1)^{m+1} \operatorname{sen}\left(2\pi\tilde{\omega} \frac{m}{n}\right),$$

$$\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{\omega}{n}\right) = \operatorname{sen}\left(2\pi\frac{\tilde{\omega}}{n}\right).$$

De usar las definiciones de $\xi_{n,\omega}$ y $\eta_{n,\omega}$ y las relaciones anteriores entre senos y cosenos de ángulos que involucran a ω y $\tilde{\omega}$ se sigue de inmediato que

$$\xi_{n,\omega} = \xi_{n,\tilde{\omega}} \quad \text{y} \quad \eta_{n,\omega} = \eta_{n,\tilde{\omega}},$$

luego,

$$\begin{aligned}
\xi_{n,\omega} &= \xi_{n,\tilde{\omega}} \\
&\sim \sqrt{2} \left(\frac{2n \tilde{\omega} - \frac{2\pi^2}{3n^2} (2n^2 - 3n + 2) \tilde{\omega}^3 + o(\tilde{\omega}^5)}{\tilde{\omega} - \frac{2\pi^2}{3n^2} \tilde{\omega}^3 + o(\tilde{\omega}^5)} \right)^{-1/2} \quad \text{cuando } \tilde{\omega} \sim 0 \\
&\xrightarrow{\tilde{\omega} \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\eta_{n,\omega} &= \eta_{n,\tilde{\omega}} \\
&\sim \sqrt{2} \left(\frac{4\pi^2 (2n-1)(n-1) \tilde{\omega}^3 + o(\tilde{\omega}^5)}{3n\tilde{\omega} - \frac{2\pi^2}{n} \tilde{\omega}^3 + o(\tilde{\omega}^5)} \right)^{-1/2} \quad \text{cuando } \tilde{\omega} \sim 0 \\
&\xrightarrow{\tilde{\omega} \rightarrow 0^+} \infty.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\lim_{\omega \rightarrow (n/2)^-} \xi_{n,\omega} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \lim_{\omega \rightarrow (n/2)^-} \eta_{n,\omega} = \infty.$$

De forma análoga pueden reutilizarse los cálculos anteriores, cambiando los factores $M_k(x)$ por $M_k(A_n(x))$ para deducir los siguientes límites.

$$\begin{aligned}
\langle x, c_{n,\omega} \rangle &= \xi_{n,\omega} \langle x, \tilde{c}_{n,\omega} \rangle = \xi_{n,\omega} \sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos \left(2\pi\omega \frac{m}{n} \right) \\
&= \xi_{n,\tilde{\omega}} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m x_m \cos \left(2\pi\tilde{\omega} \frac{m}{n} \right) \\
&\sim \xi_{n,\tilde{\omega}} \left(M_0(A_n(x)) - \frac{2\pi^2}{n^2} M_2(A_n(x)) \tilde{\omega}^2 + \frac{2\pi^4}{3n^4} M_4(A_n(x)) \tilde{\omega}^4 + o(\tilde{\omega}^5) \right) \quad \text{cuando } \tilde{\omega} \sim 0 \\
&\xrightarrow{\tilde{\omega} \rightarrow 0^+} \frac{M_0(A_n(x))}{\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x, s_{n,\omega} \rangle &= \eta_{n,\omega} \langle x, \tilde{s}_{n,\omega} \rangle = \eta_{n,\omega} \sum_{m=0}^{n-1} x_m \operatorname{sen} \left(2\pi\omega \frac{m}{n} \right) \\
&= -\eta_{n,\tilde{\omega}} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m x_m \operatorname{sen} \left(2\pi\tilde{\omega} \frac{m}{n} \right) \\
&\sim -\eta_{n,\tilde{\omega}} \left(\frac{2\pi}{n} M_1(A_n(x)) \tilde{\omega} - \frac{4\pi^3}{3n^3} M_3(A_n(x)) \tilde{\omega}^3 + o(\tilde{\omega}^5) \right) \quad \text{cuando } \tilde{\omega} \sim 0 \\
&\sim -\operatorname{sgn}(M_1(A_n(x))) \sqrt{2} \left(\frac{6\pi n \tilde{\omega} - \frac{4\pi^3}{n} \tilde{\omega}^3 + o(\tilde{\omega}^5)}{8\pi^3 (2n-1)(n-1) \tilde{\omega}^3 + o(\tilde{\omega}^5)} \right)^{1/2} \\
&\quad \left(\left(\frac{2\pi}{n} M_1(A_n(x)) \tilde{\omega} - \frac{4\pi^3}{3n^3} M_3(A_n(x)) \tilde{\omega}^3 + o(\tilde{\omega}^5) \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\xrightarrow{\tilde{\omega} \rightarrow 0^+} -\operatorname{sgn}(M_1(A_n(x))) \left(\frac{6M_1(A_n(x))^2}{(2n-1)(n-1)n} \right)^{1/2} = -M_1(A_n(x)) \left(\frac{6}{(2n-1)(n-1)n} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}
\langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle &= \xi_{n,\omega} \eta_{n,\omega} \sum_{m=0}^{n-1} \cos\left(2\pi\omega \frac{m}{n}\right) \operatorname{sen}\left(2\pi\omega \frac{m}{n}\right) \\
&= \xi_{n,\tilde{\omega}} \eta_{n,\tilde{\omega}} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \cos\left(2\pi\tilde{\omega} \frac{m}{n}\right) \cdot (-1)^{m+1} \operatorname{sen}\left(2\pi\tilde{\omega} \frac{m}{n}\right) \\
&= -\xi_{n,\tilde{\omega}} \eta_{n,\tilde{\omega}} \sum_{m=0}^{n-1} \cos\left(2\pi\tilde{\omega} \frac{m}{n}\right) \operatorname{sen}\left(2\pi\tilde{\omega} \frac{m}{n}\right) \\
&\xrightarrow{\tilde{\omega} \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{6(n-1)}}{2\sqrt{2n-1}}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
-2\langle x, c_{n,\omega} \rangle \langle x, s_{n,\omega} \rangle \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle \\
&\xrightarrow{\tilde{\omega} \rightarrow 0^+} -2 \frac{M_0(A_n(x))}{\sqrt{n}} \cdot (-1)M_1(A_n(x)) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(2n-1)(n-1)n}} \cdot (-1) \frac{\sqrt{6(n-1)}}{2\sqrt{2n-1}} \\
&= -\frac{6M_0(A_n(x))M_1(A_n(x))}{n(2n-1)}.
\end{aligned}$$

Obtenemos así los siguientes límites.

$$\lim_{\omega \rightarrow (n/2)^-} \langle x, c_{n,\omega} \rangle^2 = \frac{M_0(A_n(x))^2}{n}, \quad (6.71)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow (n/2)^-} \langle x, s_{n,\omega} \rangle^2 = \frac{6M_1(A_n(x))^2}{(2n-1)(n-1)n}, \quad (6.72)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow (n/2)^-} -2\langle x, c_{n,\omega} \rangle \langle x, s_{n,\omega} \rangle \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle = -\frac{6M_0(A_n(x))M_1(A_n(x))}{n(2n-1)}, \quad (6.73)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow (n/2)^-} \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle^2 = \frac{3(n-1)}{2(2n-1)}. \quad (6.74)$$

No hay problemas de indeterminación al sustituir (6.74) en (6.63), por lo que podemos sustituir (6.71), (6.72), (6.73) y (6.74) en (6.63) para concluir que el límite por la izquierda de $n/2$ del espectro Σ_x es

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \rightarrow (n/2)^-} \Sigma_x(\omega) &= \left(\frac{2M_0(A_n(x))^2(2n-1)(n-1) + 12M_1(A_n(x))^2 - 12M_0(A_n(x))M_1(A_n(x))(n-1)}{\|x\|^2(n-1)(n+1)n} \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{2M_0(A_n(x))^2(2n-1)(n-1) + 12M_1(A_n(x))^2 - 12M_0(A_n(x))M_1(A_n(x))(n-1)}{\|A_n(x)\|^2(n-1)(n+1)n} \right)^{1/2} \\
&= \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Sigma_{A_n(x)}(\omega).
\end{aligned}$$

□

Con unos ejemplos, fijando a una señal x , es fácil comprobar que los límites extremos (6.61) y (6.62) no siempre coinciden con los valores de la función Σ_x en tales extremos.

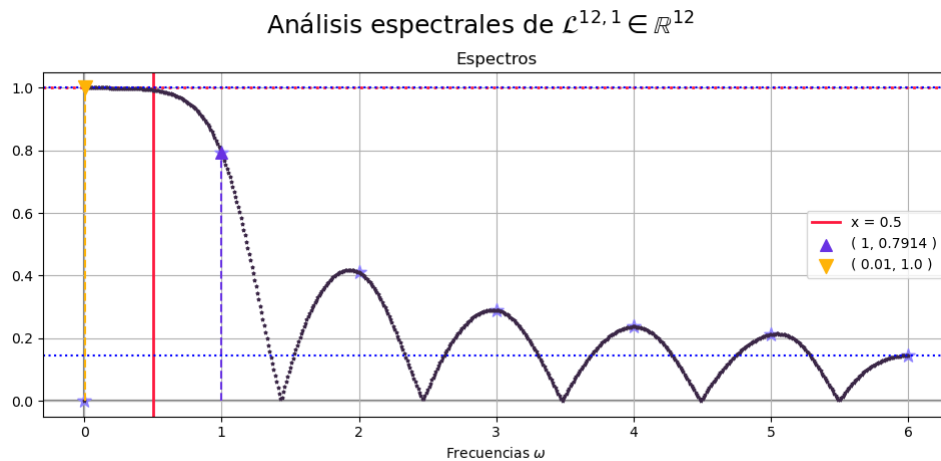


Figure 6.24: Se grafica el espectro del PDL $\mathcal{L}^{12,1}$. Observe que el espectro es continuo por la derecha de 6, pero tiene una discontinuidad de salto a la izquierda de 0.

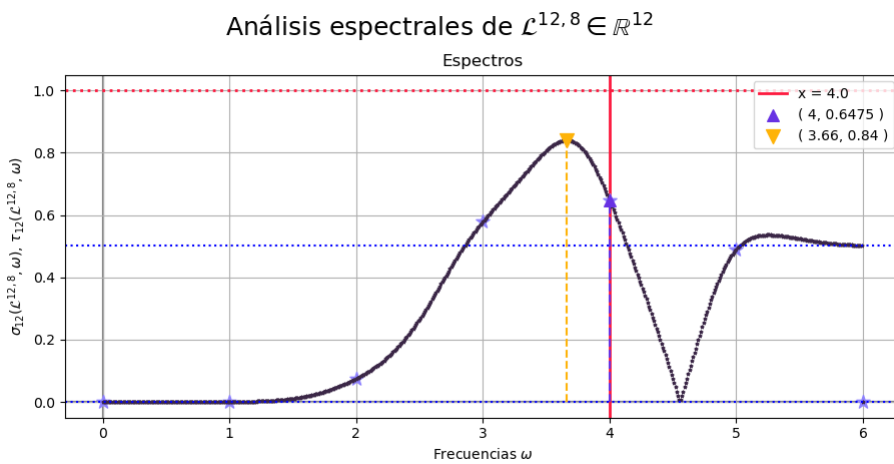


Figure 6.25: Observe que el espectro de $\mathcal{L}^{12,8}$ es, por el contrario, continuo por 0 pero discontinuo por 6.

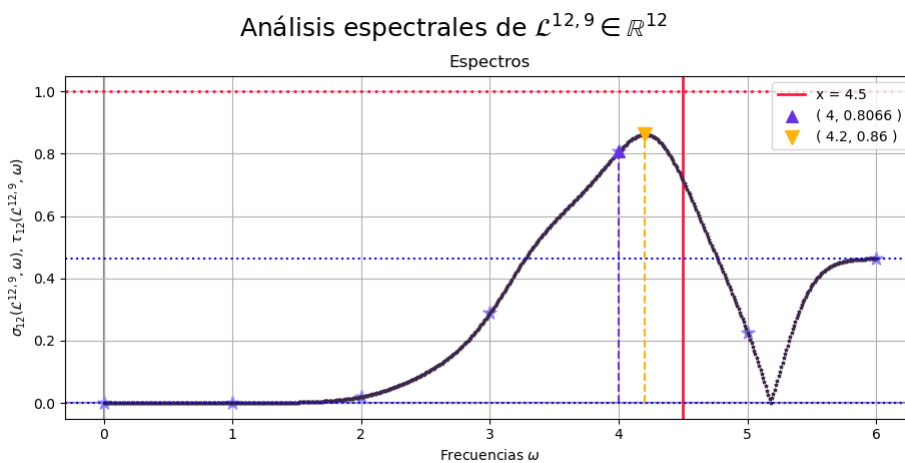


Figure 6.26: El espectro de $\mathcal{L}^{12,9}$ es continuo por ambos extremos 0 y 6.

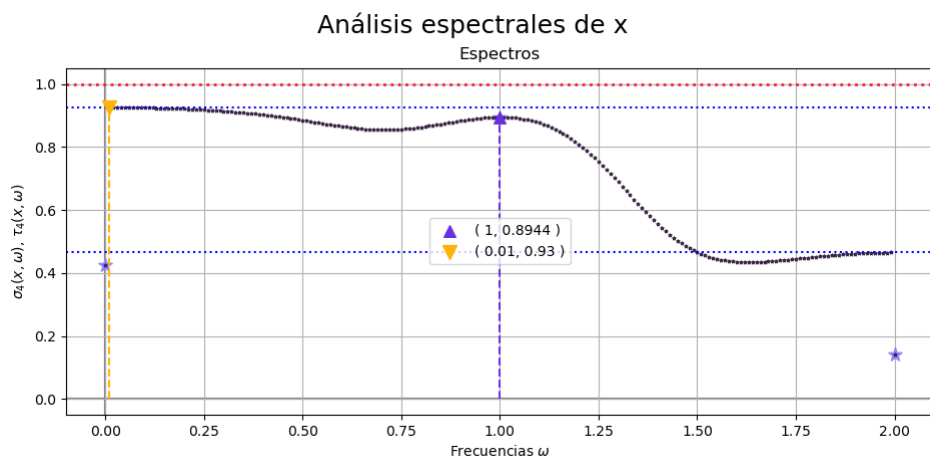


Figure 6.27: El espectro de la señal $x = (1, 2, -3, -6) \in \mathbb{R}^4$ es discontinuo por ambos extremos 0 y 2.

6.7 Definición del espectro de una señal basado en espacios monofrecuenciales

Estamos motivados a usar los coeficientes $\sigma_n(x, \omega)$ de una señal x (luego, a la función Σ_x definida como en (6.58)) para formular una definición del espectro de una señal que indique qué tan cercana⁹ es x a pertenecer a un espacio monofrecuencia $P_{n,\omega}$, luego, qué tan cercana es x a tener frecuencia pura ω . Para nuestra definición, sería pertinente tomar en cuenta que

- Σ_x es n -periódica,
- Σ_x es simétrica respecto a la recta vertical $\omega = n/2$, y
- Σ_x es continua en $]n/2[$ pero no necesariamente en 0 y $n/2$.

Estos primeros dos puntos se toman en cuenta al acotar el dominio de frecuencias ω , que en principio era todo el rango $[0, \infty[$.

Nos gustaría que la función que sea el espectro de x sea continua en todo su dominio $[0, n/2]$. Según el último punto de la lista, tomando directamente a la función Σ_x (restringida a $[0, n/2]$), esto no puede asegurarse. Como tenemos expresiones para los límites laterales, esto puede remediarse fácilmente redefiniendo a Σ_x en 0 y $n/2$. Antes de hacer esto, establezcamos algunos resultados que nos ayudarán a expresar a los límites de Σ_x por 0 y $n/2$ de una forma mucho más ilustrativa que la dada en las fórmulas (6.61) y (6.62).

Para ello necesitamos antes el siguiente

Lema 6.7.1

Sean $n \neq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Si

$$c_i(x) := \langle x, \mathcal{L}^{n,i} \rangle, \quad i = 0, 1 \tag{6.75}$$

son los dos coeficientes primeros coeficientes de x respecto a la BLD $\mathcal{L}^{n,k}$, entonces

$$M_0(x) = \sqrt{n}c_0(x) \tag{6.76}$$

y

$$M_1(x) = \frac{c_1(x)}{\ell_1} + \frac{\sqrt{n}(n-1)}{2}c_0(x), \tag{6.77}$$

⁹ Midiéndose tal cercanía con el coseno del ángulo que forma x con espacios monofrecuenciales.

donde

$$\ell_1 := \sqrt{\frac{12}{(n-1)n(n+1)}}. \quad (6.78)$$

Demostración. En efecto, según la ecuación (4.17),

$$c_0(x) = \langle x, \mathcal{L}^{n,0} \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{n-1} x_m = \frac{1}{\sqrt{n}} M_0(x),$$

luego, $M_0(x) = \sqrt{n}c_0$. Además, según (4.18),

$$c_1(x) = \langle x, \mathcal{L}^{m,1} \rangle = \ell_1 \sum_{m=0}^{n-1} x_m \left(m - \frac{n-1}{2} \right) = \ell_1 \left(M_1(x) - \frac{n-1}{2} M_0(x) \right);$$

despejando a $M_1(x)$ y usando la relación dada de $M_0(x)$ obtenemos (6.77). \square

En la siguiente proposición establecemos una interesante relación entre el espectro de una señal x con sus primeros dos coeficientes respecto a la base de Legendre discreta \mathcal{L}^n .

Proposición 6.7.2

Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$, Σ_x el espectro de x . Si $W_{n,1}$ es como en (2.4), el espacio de los polinomios discretos de grado a lo más 1 y dimensión n , entonces

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Sigma_x(\omega) = \cos(\angle(x, W_{n,1})) \quad (6.79)$$

y

$$\lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \Sigma_x(\omega) = \cos(\angle(A_n(x), W_{n,1})). \quad (6.80)$$

Demostración. Según la proposición 5.1.3,

$$\|\Pi_{W_{n,1}}(x)\| = \sqrt{c_0(x)^2 + c_1(x)^2}, \quad (6.81)$$

donde los c_i son funcionales coordenada respecto a la BON \mathcal{L}^n como se definieron en 6.75.

Sustituyendo las expresiones (6.76) y (6.77) en la expresión (6.61) del límite para $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Sigma_x(\omega)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Sigma_x(\omega)^2 &= \left(\frac{2M_0(x)^2(2n-1)(n-1) + 12M_1(x)^2 - 12M_0(x)M_1(x)(n-1)}{\|x\|^2(n-1)(n+1)n} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\|x\|^2(n-1)(n+1)n} (2nc_0(x)^2(n-1)(2n-1) + \\ &\quad 12 \left(\frac{c_1(x)}{\ell_1} + \frac{\sqrt{n}(n-1)}{2} c_0(x) \right)^2 - 12\sqrt{n}c_0(x) \sqrt{\frac{12}{(n-1)n(n+1)}}) \\ &= \frac{1}{\|x\|^2(n-1)(n+1)n} ([2n(n-1)(2n-1) + \\ &\quad 3n(n-1)^2 - 6(n-1)^2n]c_0(x)^2 + \frac{12}{\ell_1^2} c_1(x)^2) \\ &= \frac{c_0(x)^2 + c_1(x)^2}{\|x\|^2}. \end{aligned}$$

Usando (6.81) podemos concluir que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Sigma_x(\omega)^2 = \frac{c_0(x)^2 + c_1(x)^2}{\|x\|^2} = \frac{\|\Pi_{W_{n,1}}(x)\|^2}{\|x\|^2},$$

siendo esta última expresión, según la proposición A.6.4, el coseno del ángulo que x forma con $W_{n,1}$.

Por último, usando (6.62) y lo ya demostrado se tiene que

$$\lim_{\omega \rightarrow (n/2)^-} \Sigma_x(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Sigma_{A_n(x)}(\omega) = \angle(A_n(x), W_{n,1}).$$

□

Veamos por qué el resultado expuesto en la proposición 6.7.2 era de esperarse. Usando las expansiones en series de Taylor de las funciones seno y coseno cerca del origen

$$\text{sen}(\omega) = \omega + o(\omega^3), \quad \omega \sim 0$$

y

$$\text{cos}(\omega) = 1 + o(\omega^2), \quad \omega \sim 0,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{n,\omega} &:= \left(\text{sen} \left(2\pi\omega \frac{m}{n} \right) \right)_{m=0}^{n-1} \\ &= \left(2\pi\omega \frac{m}{n} + o(\omega^3) \right)_{m=0}^{n-1} \\ &= \left(2\pi \frac{\omega}{n} m \right)_{m=0}^{n-1} + (o(\omega^3))_{m=0}^{n-1}, \end{aligned}$$

luego, cuando la frecuencia ω es cercana a cero, los vectores $\tilde{s}_{n,\omega}$ y $(2\pi \frac{\omega}{n} m)_{m=0}^{n-1}$ son semejantes.

Análogamente,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{n,\omega} &:= \left(\text{cos} \left(2\pi\omega \frac{m}{n} \right) \right)_{m=0}^{n-1} \\ &= (1 + o(\omega^2))_{m=0}^{n-1} \\ &= (1)_{m=0}^{n-1} + (o(\omega^2))_{m=0}^{n-1}, \end{aligned}$$

o sea, cuando ω es cercano a cero los vectores $\tilde{c}_{n,\omega}$ y $(1)_{m=0}^{n-1}$ son semejantes.

Ahora bien, recuerde que, por definición del espacio monofrecuencial $P_{n,\omega}$ (c.f. ecuación (6.21)), $P_{n,\omega}$ es generado por $\tilde{s}_{n,\omega}$ y $\tilde{c}_{n,\omega}$. Según las aproximaciones anteriores, conforme $\omega \rightarrow 0^+$, $P_{n,\omega}$ se asemeja al espacio $\text{span}\{(2\pi \frac{\omega}{n} m)_{m=0}^{n-1}, (1)_{m=0}^{n-1}\}$, que, según la proposición 2.1.12 es $W_{n,1}$ -el espacio de polinomios discretos n -dimensionales de grado a lo más 1. Tiene sentido entonces que, como se demuestra en la proposición 6.7.2, los números

$$\Sigma_x(\omega) := \sigma_n(x, \omega) := \text{cos}(\angle(x, P_{n,\omega}))$$

tiendan al número

$$\text{cos}(\angle(x, W_{n,1}))$$

conforme ω tiende a cero por la derecha.

Tenemos todo para definir el espectro de x basado en espacios monofrecuenciales.

Claro que el codominio de Σ_x es $[0, 1]$, pues esta función se define en función del coseno.

Definición 6.7.3

(Definición del espectro de una señal basado en espacios monofrecuenciales)

Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Si $x \neq 0$, definimos a su **espectro basado en espacios monofrecuenciales** como la función $\Sigma_x : [0, n/2] \rightarrow [0, 1]$ definida como

$$\Sigma_x(\omega) = \begin{cases} \cos(\angle(x, P_{n,\omega})) & \text{si } \omega \in]0, n/2[, \\ \cos(\angle(x, W_{n,1})) & \text{si } \omega = 0, \\ \cos(\angle(A_n(x), W_{n,1})) & \text{si } \omega = n/2. \end{cases}$$

Si $x = 0$, definimos su espectro como la función constante cero.

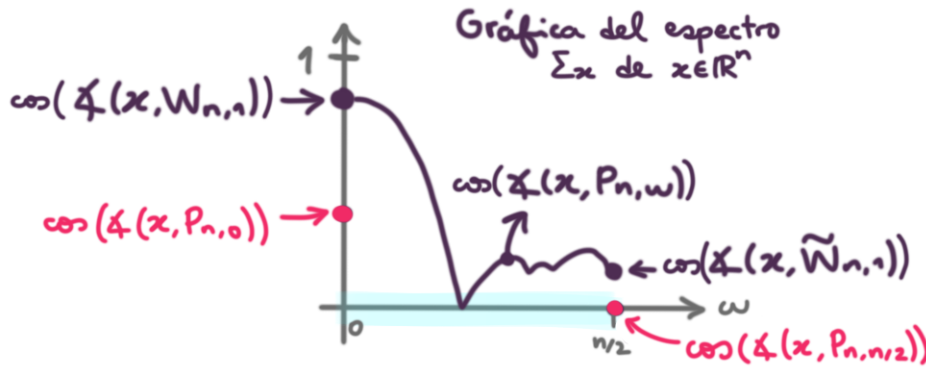


Figure 6.28: Por definición, Σ_x -el espectro de una señal $x \in \mathbb{R}^n$ -es una función definida en $[0, n/2]$ y continua en su dominio. Preferimos no definir al espectro en 0 y $n/2$ como el coseno del ángulo que forma x con los correspondientes espacios monofrecuenciales $P_{n,0}$ y $P_{n,\omega}$, pues esto daría lugar a una función que no siempre es continua en su dominio.

La definición 6.7.3 es importante desde el punto de vista teórico, pues hace evidente la relación entre el número $\Sigma_x(\omega)$ y la cercanía de x a cierto subespacio de \mathbb{R}^n (medida en términos del coseno del ángulo que x forma con tal espacio, la llamada “distancia coseno” en el apéndice A.6.3). Sin embargo, para poder usar en la práctica tal definición para realizar un análisis espectral, es conveniente establecer fórmulas más concretas para el espectro. En realidad, ya tenemos tales fórmulas, y las reunimos en la siguiente proposición.

Proposición 6.7.4

Sean $n \neq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$ no cero. Sea Σ_x el espectro de x como se definió en 6.7.3. Si $\omega \in]0, n/2[$, entonces

$$\Sigma_x(\omega) = \sigma_n(x, \omega) = \left(\frac{\langle x, c_{n,\omega} \rangle^2 + \langle x, s_{n,\omega} \rangle^2 - 2\langle x, c_{n,\omega} \rangle \langle x, s_{n,\omega} \rangle \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle}{\|x\|^2 \cdot (1 - \langle c_{n,\omega}, s_{n,\omega} \rangle^2)} \right)^{1/2},$$

donde los vectores $c_{n,\omega}$ y $s_{n,\omega}$ son como en (6.36) y (6.37). Además

$$\Sigma_x(0) = \left(\frac{2M_0(x)^2(2n-1)(n-1) + 12M_1(x)^2 - 12M_0(x)M_1(x)(n-1)}{\|x\|^2(n-1)(n+1)n} \right)^{1/2},$$

y

$$\Sigma_x(n/2) = \left(\frac{2M_0(\tilde{x})^2(2n-1)(n-1) + 12M_1(\tilde{x})^2 - 12M_0(\tilde{x})M_1(\tilde{x})(n-1)}{\|\tilde{x}\|^2(n-1)(n+1)n} \right)^{1/2},$$

donde $\tilde{x} := A_n(x)$ y los coeficientes $M_i(x)$ son como se definieron en 6.6.7.

6.7.1 Propiedades importantes del espectro Σ_x de una señal finita

Sólo para referenciar más adelante la continuidad del espectro de una señal y la forma en que se relacionan los valores del espectro para pares de frecuencias ω y $n/2 - \omega$, plasmamos estos resultados -que son consecuencias directas de la forma en que hemos definido el espectro Σ_x - en la siguiente proposición.

Proposición 6.7.5

Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $\Sigma_x : [0, n/2] \rightarrow [0, 1]$ el espectro de x como se definió en 6.7.3.

- Σ_x es una función continua.
- Para toda $\omega \in [0, n/4]$,

$$\Sigma_x(n/2 - \omega) = \Sigma_{A_n(x)}(\omega).$$

Demostración. La continuidad de Σ_x en el interior de $[0, n/2]$ se estableció en 6.6.3, y la continuidad en los puntos extremos 0 y $n/2$ se sigue del teorema 6.6.8, la proposición 6.7.2 y la definición 6.7.3 del espectro.

La veracidad del segundo punto para toda $\omega \in]0, n/4[$ se sigue directamente de la proposición 6.6.6. Por último, haciendo $\omega = 0$ se tiene también la igualdad, pues

$$\begin{aligned} \Sigma_x(n/2) &= \lim_{\omega \rightarrow (n/2)^-} \Sigma_x(n/2) \\ &= \angle(A_n(x), W_{n,1}) \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Sigma_{A_n(x)}(\omega) \\ &= \Sigma_{A_n(x)}(0), \end{aligned}$$

donde la primera y última igualdad son ciertas por ser continuo el espectro Σ_x . \square

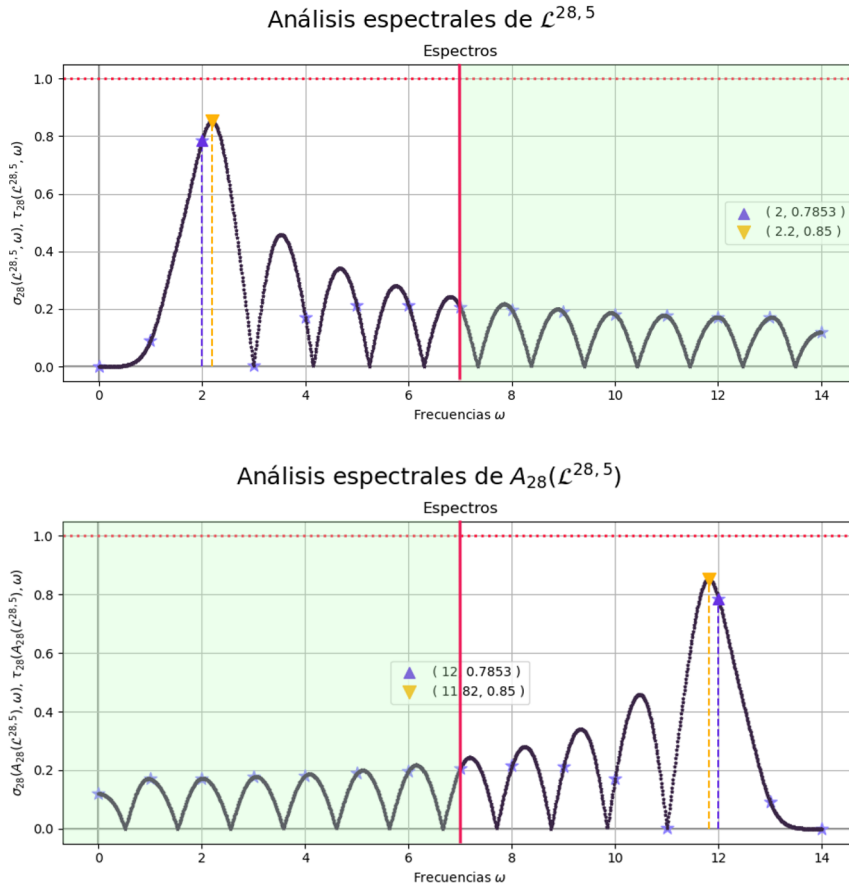


Figure 6.29: Según la proposición 6.7.5, si se quieren calcular los valores del espectro $\Sigma_{\mathcal{L}^{28,5}}$ cuyo dominio es $[0, 14]$ en frecuencias $\omega \in [7, 14]$, estos pueden hallarse usando los valores del espectro del vector alternado $A_{28}(\mathcal{L}^{28,5})$ en el rango de frecuencias $[0, 7]$.

6.7.2 Sobre la interpretación de los valores de Σ_x

Sea $\Sigma_x : [0, n/2] \rightarrow [0, 1]$ el espectro de una señal $x \in \mathbb{R}^n$ como se definió en 6.7.3. Según esta definición,

- Para toda $\omega \in]0, n/2[$, entre más cercano a 1 sea $\Sigma_x(\omega)$, más cercana estará x al espacio monofrecuencial $P_{n,\omega}$; puesto que, según el teorema 6.4.5, $P_{n,\omega}$ consta exactamente de las señales n -dimensionales de frecuencia ω , tenemos que entre más cercano a 1 sea $\Sigma_x(\omega)$, más cerca está x de la propiedad de tener frecuencia ω . Dualmente, si $\Sigma_x(\omega)$ es muy cercana a cero, ω es una frecuencia poco adecuada para modelar a x .
- Puesto que $\Sigma_x(0)$ es $\angle(x, W_{n,1})$, y como $W_{n,1}$ es el espacio de los polinomios discretos n -dimensionales de grado o lo más 1 (c.f. corolario 2.1.11), si $\Sigma_x(0)$ es cercano a 1, entonces la gráfica de x será muy cercana a parecer una recta (ya sea constante o no).
- Por ser $\Sigma_x(n/2)$ igual a $\angle(A_n(x), W_{n,1})$, si $\Sigma_x(n/2)$ es cercano a 1 entonces $A_n(x)$ -la señal alternada de x - es cercana a ser la discretización de una recta, luego, x es cercana a ser el alternado de una tal señal.

Observe entonces que, para toda frecuencia $\omega \in]0, n/2[$, $\Sigma_x(\omega)$ indica qué tanto reacciona x a la frecuencia ω (en términos precisos, $\Sigma_x(\omega)$ indica la distancia coseno al espacio monofrecuencial de \mathbb{R}^n y frecuencia ω), pero los valores del

espectro Σ_x en los puntos extremos 0 y $n/2$ **no indican distancias a espacios monofrecuenciales**. En su lugar, indican la distancia coseno de x y $A_n(x)$, respectivamente, al espacio $W_{n,1}$ de señales afines n -dimensionales.

Nota 6.7.6

Fijados $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$ una señal y $\omega > 0$ una frecuencia, **entre más cercano a 1 sea $\Sigma_x(\omega) = \sigma_n(x, \omega)$, mejor es usar un senoide de frecuencia ω para ajustar la gráfica de x** . Esto porque, recuerde, entre más cercano a uno sea uno de esos coeficientes, más cercana estará la señal x al espacio monofrecuencial $P_{n,\omega}$, luego, más cercana está x a tener la propiedad de ser una discretización de un senoide de la respectiva frecuencia ω .

6.8 Relación entre los espectros basados en la TDF y en espacios monofrecuenciales

Después de todo lo expuesto en las secciones anteriores, tenemos ya dos alternativas para realizar un análisis espectral de una señal $x \in \mathbb{R}^n$.

Sean $n \geq 2$, $M := \lceil \frac{n}{2} \rceil$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

- **(Espectro-0: basado en la TDF)** Usando la transformada discreta de Fourier (c.f. sección 6.3), el espectro de x es la función

$$T_x : Dom_{TDF,n} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

definida en 6.3.15.

La gráfica es entonces la de las frecuencias enteras ω dadas (dependiendo de la paridad de n) por las tablas 6.1 y 6.2 versus los coeficientes $\tau_n(x, \omega)$ definidos en 6.3.14.

Puesto que el realizar un análisis de x via la TDF significa encontrar una expresión de x como una suma ponderada de muestreos de senos y cosenos, de frecuencias enteras las indicadas en las tablas 6.1 o 6.2, se tiene que

- Para toda frecuencia ω considerada por la TDF,

$$0 \leq \tau_n(x, \omega) \leq 1,$$

y que

- entre más se acerque $\tau_{n,\omega}(x)$ a 1, mayor es la importancia de la frecuencia ω para sintetizar x ; recíprocamente, si $\tau_n(x, \omega)$ es cercana a cero, entonces la frecuencia ω no es muy relevante para sintetizar a la señal x .

Definición 6.8.1

Llamaremos **frecuencia principal-0** (y denotaremos por $FP0(x)$) a una frecuencia $\omega \in Dom_{TDF,n}$ tal que, para cualquier otra $\omega' \in Dom_{TDF,n}$ se tenga que

$$\tau_n(x, \omega') = T_x(\omega') \leq T_x(\omega) = \tau_n(x, \omega).$$

Observe que tal frecuencia principal existe por ser el máximo de un conjunto finito de números, pero que no estamos asegurando que sea única. Tomamos pues como FP0 de x a la mayor de las $\omega \in \text{Dom}_{TDF,n}$ que satisfaga la definición 6.8.1.

- **(Espectro-1: basado en espacios monofrecuenciales)** Recuerde que este espectro $\Sigma_x : [0, \frac{n}{2}] \rightarrow [0, 1]$. se definió en 6.7.3.

La gráfica de este espectro es la de las frecuencias $\omega \in]0, \frac{n}{2}[$ versus los coeficientes $\sigma_n(x, \omega) = \cos(\angle(x, P_{n,\omega}))$ definidos en 6.4.17, y los puntos extremos del espectro son

$$(0, \cos(\angle(x, W_{n,1}))) \quad y \quad (n/2, \cos(\angle(x, \tilde{W}_{n,1}))).$$

Observe que

- para cualquier frecuencia $\omega \in [0, n/2]$, se tiene que

$$0 \leq \sigma_n(x, \omega) \leq 1$$

- y, para $w \in]0, n/2[$, el que $\Sigma_x(\omega) = \sigma_n(x, \omega)$ sea cercano a 1 significa que un muestreo uniforme de un senoide de frecuencia ω modela bien el comportamiento de x , mientras que un $\sigma_n(x, \omega)$ cercano a cero significa que x es casi perpendicular a toda señal de frecuencia ω (c.f. nota 6.4.13). Similarmente, si $\omega = 0$ o $\omega = n/2$, el que $\Sigma_x(\omega)$ sea cercano a 1 significa que x es cercano al espacio $W_{n,1}$ o $\tilde{W}_{n,1}$, respectivamente.

Definición 6.8.2

Llamaremos **frecuencia principal-1** (y denotaremos por $FP1(x)$) a una frecuencia $\omega' \in [0, n/2]$ tal que, para cualquier otra $\omega \in [0, n/2]$ se tenga que

$$\Sigma_x(\omega) \leq \Sigma_x(\omega').$$

Observe que, por ser el espectro Σ_x una función continua en su dominio (c.f. proposición 6.7.5), que es un intervalo cerrado de \mathbb{R} , Σ_x alcanza su máximo (c.f. teorema del valor extremo, [Spi08] p. 130), luego, 6.8.2 es una buena definición. Sorteamos el problema de la posible no unicidad de una frecuencia que satisfaga la definición de frecuencia principal-1 acordando que se tomará como FP1 a la mayor de las frecuencias $\omega \in [0, n/2]$ que satisfaga la definición 6.8.2. De todas formas, en la práctica se tendrá que fijar un conjunto finito $\mathcal{P} \subseteq [0, n/2]$ de frecuencias para calcular, de forma computacional, el espectro Σ_x . Para respetar la convención puesta en la nota 6.8.5, vamos a tomar a \mathcal{P} como en (6.83).

Para establecer una relación entre los espectros T_x y Σ_x de una señal así definidos, será de utilidad la siguiente proposición.

Proposición 6.8.3

Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $\text{Dom}_{TDF,n}$ el dominio del espectro-0 de x como se definió en 6.3.12. Se tiene que

$$\forall \omega \in \text{Dom}_{TDF,n} : \tau_n(x, \omega) = \sigma_n(x, \omega). \quad (6.82)$$

Demostración. Recuerde que los coeficientes $\sigma_n(x, \omega)$ se definieron como

$$\sigma_n(x, \omega) = \frac{\|\Pi_{P_{n,\omega}}(x)\|}{\|x\|}.$$

Teniendo una base ortonormal del espacio $P_{n,\omega}$ puede calcularse la proyección involucrada en la fórmula para $\sigma_n(x, \omega)$. Recuerde que, por definición del espacio $P_{n,\omega}$,

- los vectores $c_{n,\omega}$ y $s_{n,\omega}$ conforman una base de $P_{n,\omega}$ cuando $1 \leq \omega \leq M-1$ (pues, para estos valores de omega se tiene siempre que $\omega \notin \frac{n}{2}\mathbb{Z}$) y
- $c_{n,\omega}$ conforma una base de $P_{n,\omega}$ cuando $\omega = 0$ y, en el caso en el que n es par, también para cuando $\omega = M$ (pues sólo para estos valores de omega se tiene que $\omega \in \frac{n}{2}\mathbb{Z}$).

Además, según la proposición 6.3.9, para todas estas ω , los vectores de la lista anterior son ortogonales entre sí y tienen norma uno, luego, más que una base de $P_{n,\omega}$ constituyen una BON para este espacio. Así, $\Pi_{P_{n,\omega}}(x)$ puede encontrarse simplemente calculando los productos punto de x con los elementos de estas BONs (c.f. nota 1.1.2); comparando este cálculo con la definición 6.3.14 de los coeficientes $\tau_n(x, \omega)$, concluimos que en efecto se tiene la igualdad (6.82).

□

Usando la definición del espectro Σ_x en el interior de su dominio $]0, 1[$ (c.f. definición 6.7.3) y la proposición anterior, se sigue de inmediato el siguiente resultado.

Corolario 6.8.4

(Relación entre los espectros T_x y Σ_x de una señal) Sea $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Para toda $\omega \in \text{Dom}_{TDF,n} - \{0, n/2\}$ se tiene que

$$T_x(\omega) = \Sigma_x(\omega).$$

Así, a excepción de los valores de Σ_x en los puntos extremos 0 y $n/2$, el **espectro basado en espacios monofrecuenciales es una extensión de la definición del espectro basado en la transformada discreta de Fourier**. Como ya recordamos al inicio, la ventaja de este primer espectro Σ_x es que para calcularlo es posible usar un rango cualquiera de frecuencias no negativas, mientras que el segundo, a pesar de que da no sólo un proceso de análisis de una señal de x a partir de sinusoides, sino también uno de síntesis (c.f. nota 6.3.13), se limita a considerar las frecuencias en $\text{Dom}_{TDF,n}$.

Nota 6.8.5

Para poder escribir programas para calcular el espectro Σ_x de una señal x , se debe de usar como dominio de esta un conjunto discreto de puntos. Para los espectros que calcularemos de ahora en adelante, adoptamos la convención de usar como dominio de la función Σ_x de una señal $x \in \mathbb{R}^n$ - que en teoría es el intervalo $[0, n/2]$ - al conjunto

$$\left\{ \frac{a}{100} : 0 \leq a \leq \left\lfloor \frac{100n}{2} \right\rfloor \right\} \quad (6.83)$$

es decir, se toman 100 muestras por cada unidad del intervalo $[0, \frac{n}{2}]$.

Así, cuando hablemos de “frecuencia principal 1” de una señal, en realidad no estamos hablando con seguridad del punto en el que Σ_x alcanza su máximo, sino el punto de la malla de frecuencias (6.83) en el que computacionalmente se calculó el valor máximo para Σ_x .

Ejemplo 11. Sea la señal

$$x = (1, 3, 5, 7, 9, 19, 3.4, 8) \in \mathbb{R}^8.$$

En este ejemplo, $n = 8$. A continuación graficamos los dos espectros T_x y Σ_x de x .

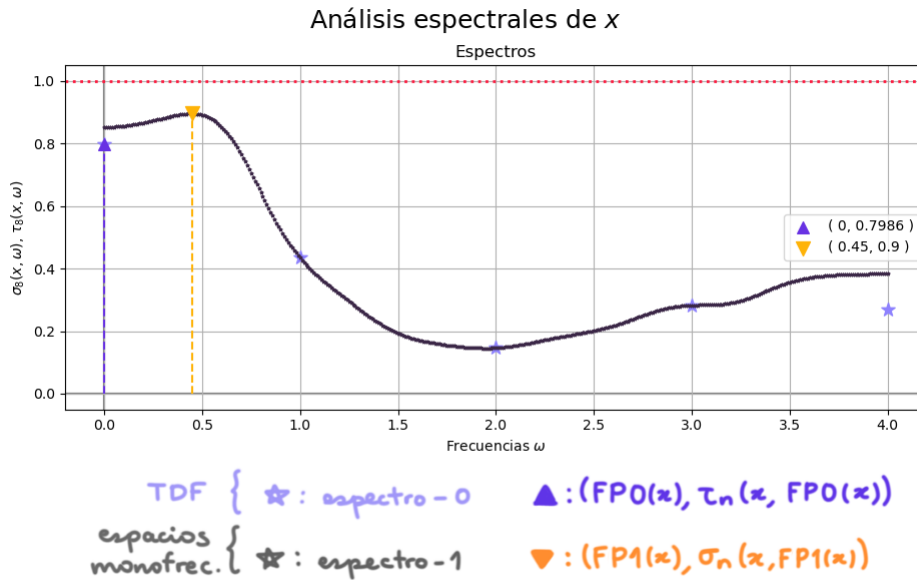


Figure 6.30: De ahora en adelante, siempre que grafiquemos espectros de señales finitas, usaremos los colores y notaciones usados para esta figura.

Como se esperaba (según lo establecido en el corolario 6.8.4), las gráficas de Σ_x y T_x coinciden en el interior del intervalo de frecuencias $[0, 4]$, pero de hecho no coinciden en los puntos extremos.

Según la gráfica,

$$FP0_x = 0 \quad \text{y} \quad FP1_x = 0.45.$$

- Según el estudio basado en el espectro de Fourier T_x , la frecuencia entera en $Dom_{TDF,8}$ que es mejor para modelar la gráfica de x es 0, luego, de este estudio se concluye que lo mejor es modelar a la gráfica de x con una recta horizontal.
- Según la nota 6.7.6 y el estudio basado en el espectro Σ_x , usando una frecuencia de 0.45 se obtiene el senoide que mejor modela la gráfica de x .

A continuación graficamos

- la parte de la descomposición de x en base a la TDF correspondiente a la frecuencia $0 = FP0(x)$, y
- el senoide de frecuencia $0.45 = FP1(x)$, con amplitud y desfase los dados en el teorema 6.5.1.

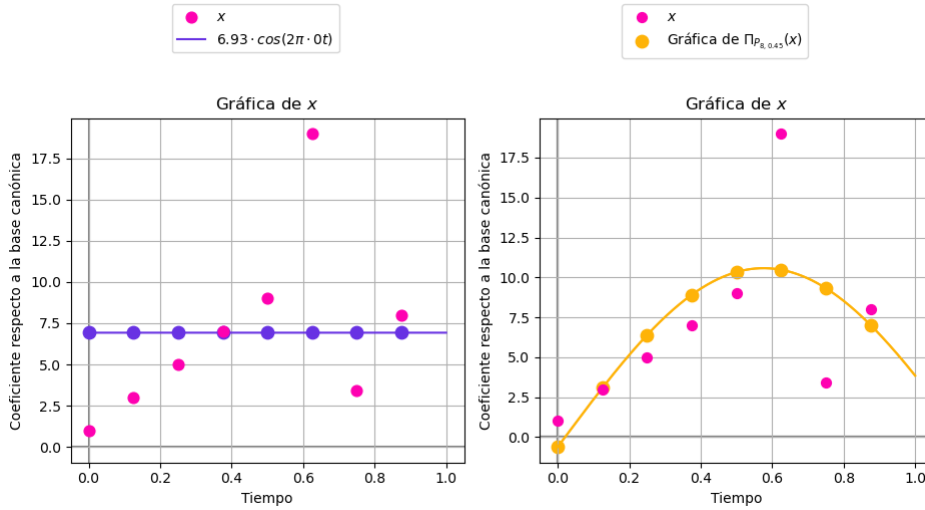


Figure 6.31: Gráfica de x comparada con las de los sinusoides cuyas frecuencias fueron obtenidas al realizar un análisis espectral de x con T_x y Σ_x . Observe que el sinusoide naranja, el obtenido en base al espectro Σ_x , parece ajustar mucho mejor la gráfica de x que el sinusoide morado, el obtenido como resultado de hacer un análisis con la transformada discreta de Fourier.

◇

Nota 6.8.6

Sea $x \in \mathbb{R}^n$; sea (6.14) o (6.15) (dependiendo de la paridad de n) la síntesis de x respecto a la base de Fourier real \mathcal{F}_n . De esta suma podemos separar los sumandos que corresponden a una cierta frecuencia $\omega \in \text{Dom}_{TDF,n}$; recordando que, como se notó en la demostración de la proposición 6.8.3, los correspondientes vectores de frecuencia ω (que son ya sea uno o dos, dependiendo del valor de ω) conforman una BON para el correspondiente espacio monofrecuencial $P_{n,\omega}$, tenemos que la parte de la síntesis de x que corresponde a cierta frecuencia ω es igual a $\Pi_{P_{n,\omega}}(x)$.

Aplicando esto al ejemplo 8, si x es la señal definida en 6.12, se tiene que

$$\begin{aligned}\Pi_{7,0} &= 4.12c_{7,0}, \\ \Pi_{7,1} &= -8.76c_{7,1} - 7.35s_{7,1}, \\ \Pi_{7,2} &= 4.77c_{7,2} - 10s_{7,2}, \\ \Pi_{7,3} &= 0.14c_{7,3} + 9.91s_{7,z3}.\end{aligned}$$

Ejemplo 12. Sea f_ω el sinusoide definido como

$$f_\omega(t) := -1.5\cos(2\pi \cdot \omega t + 2\pi \cdot 0.2). \quad (6.84)$$

Considere a una señal $x \in \mathbb{R}^{36}$ que sea el resultado de muestrear uniformemente al sinusoide $f_{3.4}$ con ruido aleatorio (con distribución, pongamos, uniforme en $[-0.5, 0.5]$).

A continuación, mostramos las gráficas de los espectros de x . Para calcular el espectro Σ_x , usamos el dominio establecido en la nota 6.8.5.

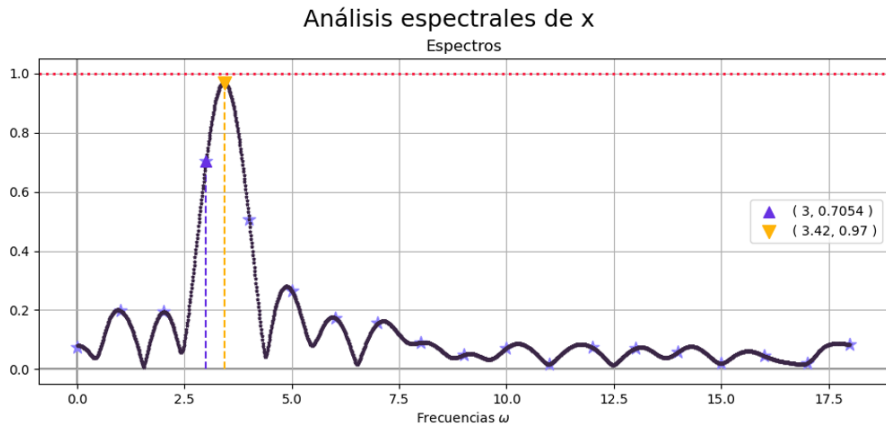


Figure 6.32

Observe cómo el espectro-1 parece completar la información dada por el espectro-0, pues, a diferencia del primero, el espectro-0 da coeficientes de frecuencia $\tau_n(x, \omega)$ sólo para algunas frecuencias enteras ω , mientras que en el espectro-1 es posible considerar cualesquiera frecuencias $\omega \geq 0$; como puede observar en la gráfica,

$$FP0(x) = 3 \text{ y } FP1(x) = 3.42;$$

esta segunda frecuencia es mucho más cercana a la frecuencia $\omega = 3.4$ del senoide del que fue obtenida la señal x ; como agregamos ruido aleatorio en las mediciones, no es de extrañarse que no se haya obtenido exactamente $FP1(x) = 3.4$.

A pesar de que el espectro-0, el obtenido a partir de la transformada discreta de Fourier, no dio una mala estimación (del rango de frecuencias $Dom_{TDF,n}$ considerado por esta herramienta, $\omega = 3$ es el valor más cercano al valor real $\omega = 3.4$), vemos en este ejemplo que usando el espectro-1 es posible obtener mejores estimaciones de frecuencias que modelen a la señal original.

Mostramos ahora la gráfica de x junto con

- la parte de la síntesis de x respecto a la TDF que corresponde a la frecuencia principal $FP0(x)$ (c.f. nota 6.3.13), que de hecho, según la nota 6.8.6, es $\Pi_{P_{36,3}}(x)$

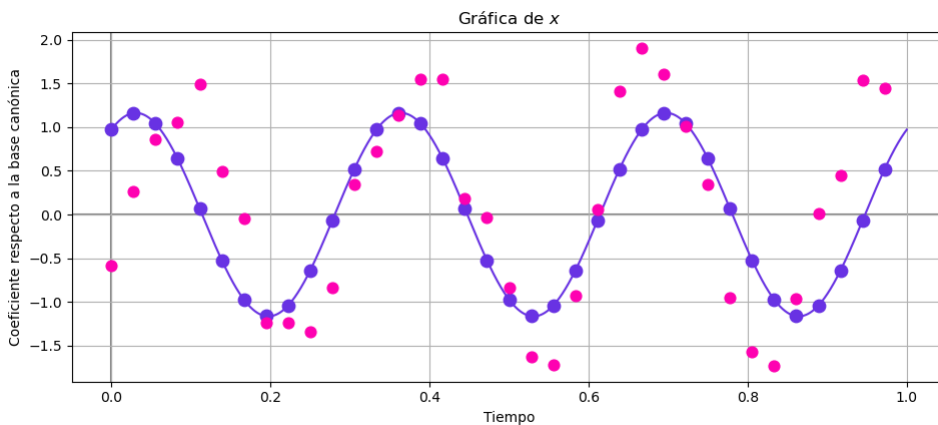


Figure 6.33: Puesto que $\{c_{36,3}, s_{36,\omega}\}$ es una BON de $P_{36,3}$, claro que la señal que resulta de discretizar el senoide morado en la malla I_{36} es, de hecho, la proyección de x al espacio monofrecuencial $P_{36,3}$.

y

- la señal $\Pi_{P_{16,3.42}}(x)$, o sea, la señal de dimensión 36 y frecuencia $FP1(x) = 3.42$ más cercana a x , junto con el senoide continuo del que fue muestreado.

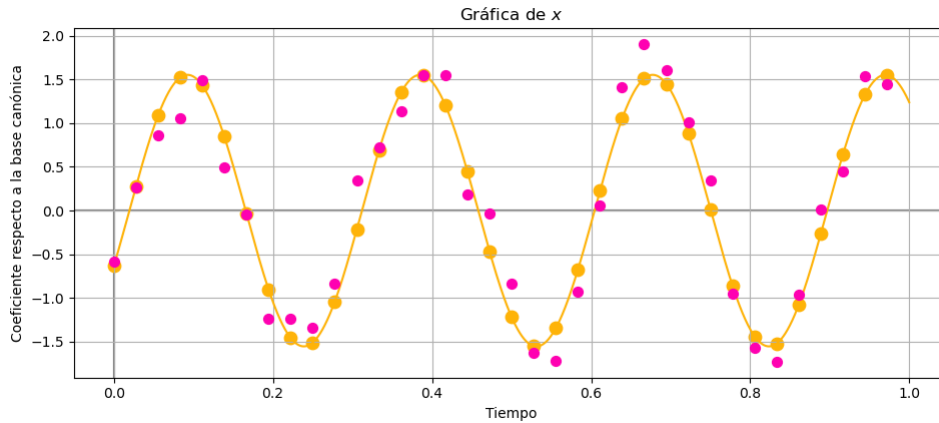


Figure 6.34: Para obtener la versión continua del senoide discreto $\Pi_{P_{36,3.42}}(x)$ (i.e. la gráfica naranja), usamos las fórmulas establecidas en los teoremas 6.5.1 y 6.5.2.

Los sinusoides de las figuras 6.33 y 6.34 son las señales de frecuencia pura 3 y 3.42, respectivamente, cuya distancia euclídea a la señal original x es mínima. Observe que la segunda señal, aquella cuya frecuencia fue determinada a partir del estudio espectral basado en espacios monofrecuenciales, parece ajustarse un poco mejor a la gráfica de x .

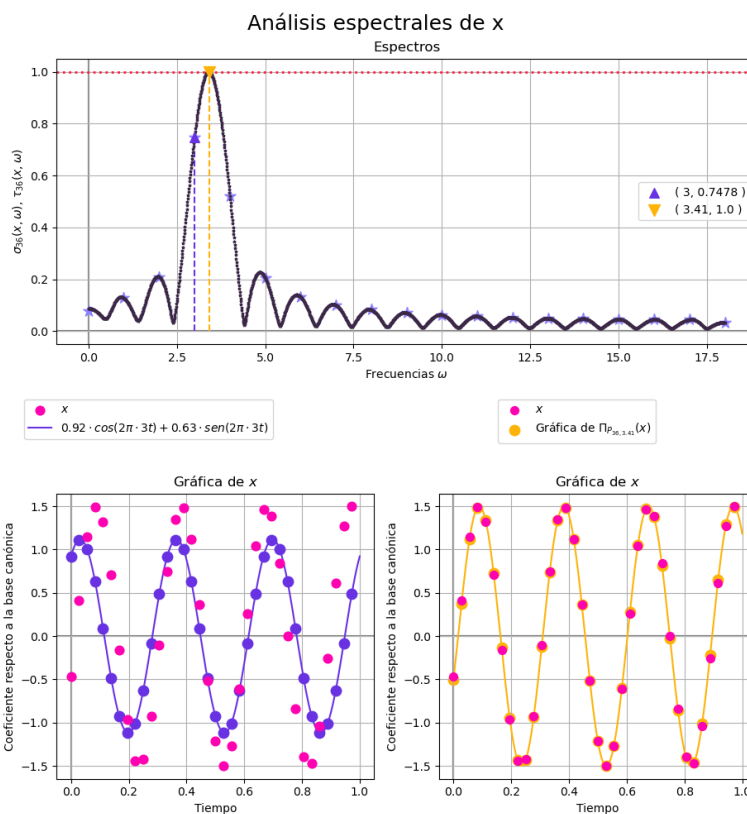


Figure 6.35: Mostramos ahora los espectros de la señal x que se obtiene tomando 36 muestras uniformemente espaciadas del mismo senoide $f_{3.4}(t)$, esta vez sin agregar ruido aleatorio a las mediciones. Observe que el espectro-1 detectó a la frecuencia $\omega = 3.4$ como la mejor, y que el senoide naranja ajusta perfectamente la gráfica de x . Como la frecuencia real no es entera, usar la frecuencia principal dada por la TDF sigue sin dar resultados perfectos, aunque no malos.

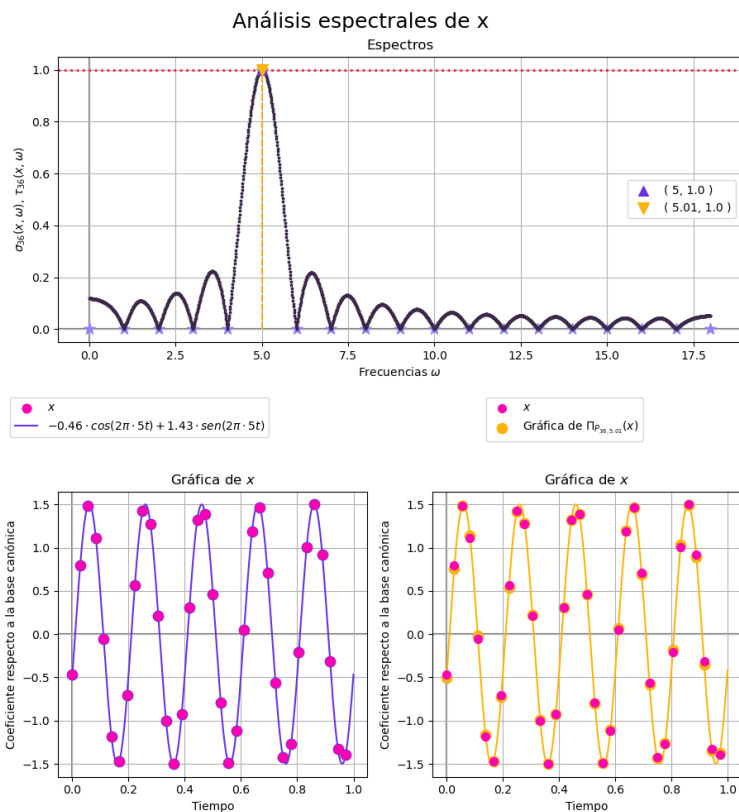


Figure 6.36: Si ahora muestreamos sin ruido del senoide f_5 , como era de esperarse, la frecuencia principal de ambos espectros es 5 (y el valor de los espectros en tal frecuencia es igual a 1, la cota superior). Además, las gráficas de frecuencia 5 que resultan ajustan a la perfección a la señal original x .

Para terminar este ejemplo, tomemos una suma de sinusoides de varias frecuencias, digamos, de frecuencias 1, 4 y 7; sea

$$g(t) = 3\text{sen}(2\pi t) + \text{sen}(2\pi \cdot 4t) + 0.5\text{cos}(2\pi \cdot 7t).$$

Sea x la señal que resulta de muestrear, sin ruido, este senoide g , siendo 25 el tamaño de la muestra.

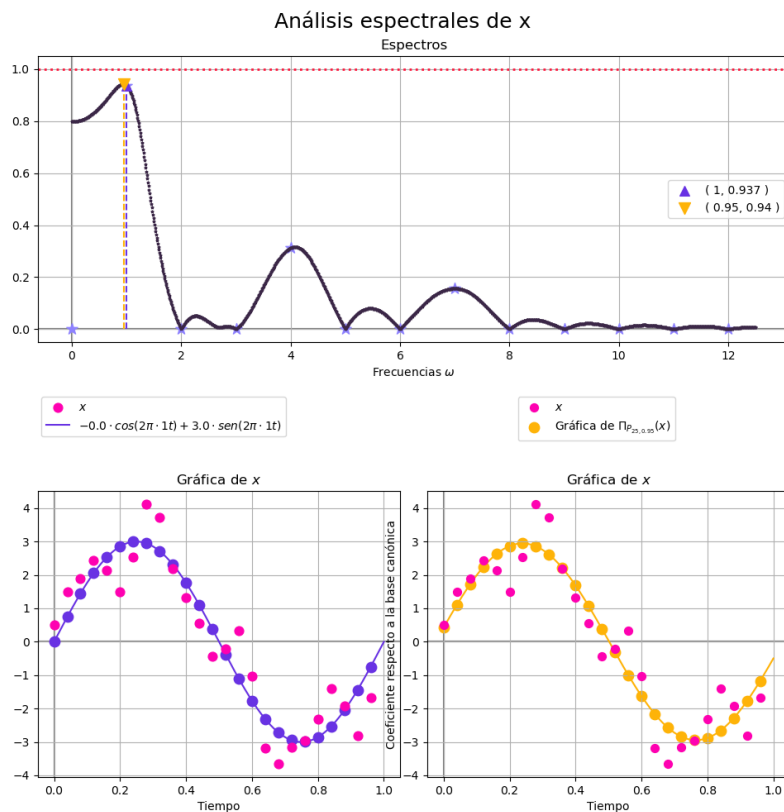


Figure 6.37: En la imagen se muestran los espectros de tal x . Observe que los espectros parecen concentrarse alrededor de las frecuencias 1, 4 y 7.

◇

6.8.1 Adaptación del análisis espectral a señales reales con una frecuencia de muestreo dada

Para hacer nuestros análisis espectrales numéricos de una señal $x \in \mathbb{R}^n$, hemos usado la dimensión n de la señal en cuestión para buscar, en base a máximos globales del espectro $\Sigma_x : [0, \frac{n}{2}] \rightarrow [0, 1]$, la mejor frecuencia ω para aproximar la gráfica de x en base a un senoide discreto de dimensión n .

Note que en esta discusión nunca hablamos de parámetros importantes para, de forma canónica, hacer un análisis espectral, como lo son la duración en tiempo de la señal o la frecuencia de muestreo.

Definición 6.8.7

La cantidad de muestras tomadas (de forma uniforme) de una señal por unidad de tiempo será denotada por F_s y llamada **frecuencia de muestreo** de la señal. A la cantidad de unidades de tiempo que dura la medición se le denotará por T . A la cantidad total de muestras tomadas se le denotará por L .

Observe que, para poder dividir una unidad de tiempo en F_s subintervalos de igual longitud, se deben dividir al eje del tiempo con los puntos

$$t_k := t_0 + hk, \quad \text{con } h := \frac{1}{F_s}. \quad (6.85)$$

A tal constante h , definida como el recíproco de la frecuencia de muestreo, se le llama el **paso temporal** de la señal.

De las definiciones se sigue de inmediato que

$$L = TF_s. \quad (6.86)$$

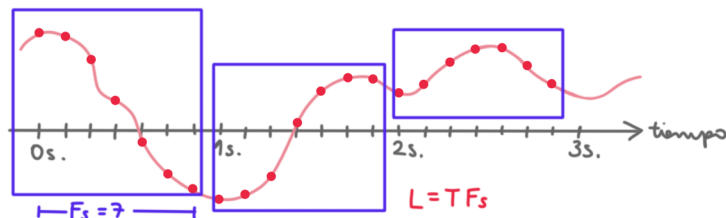


Figure 6.38: Adoptamos la convención de empezar a medir un bloque de F_s mediciones desde que inicia la unidad de tiempo (que, en el caso de la figura, se ha fijado como segundos).

Nosotros, por el momento, sólo nos hemos enfocado en buscar una frecuencia $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$ que de lugar a un senoide que aproxime bien la gráfica de x ; observe que, al hacer esto, hemos supuesto de forma implícita que estamos estudiando una señal de duración una unidad de tiempo (i.e. $T = 1$) y de longitud n (i.e. $L = F_s = n$). Supongamos ahora que tenemos una señal x que consta de L mediciones, siendo F_s la frecuencia de muestreo.

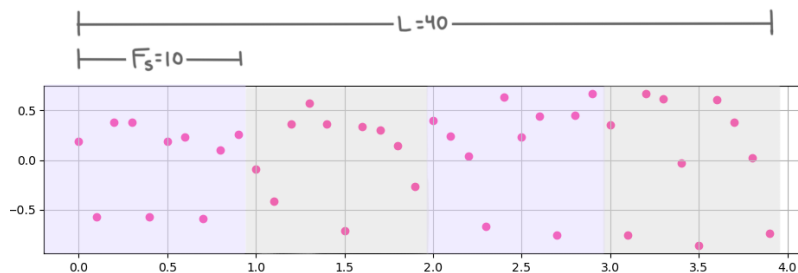


Figure 6.39: Para la imagen, hemos fijado $F_s = 10$ y $L = 40$.

Sea ahora $2 \leq n \leq L$ y supongamos que se hizo el análisis espectral de una sección $x|_n$ de tal señal que conste de n puntos (usando el espectro $\Sigma_x : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$). Digamos que, como conclusión de ese análisis, se obtuvo que un senoide de frecuencia $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ajusta bien *esa sección particular* $x|_n$ de la señal x .

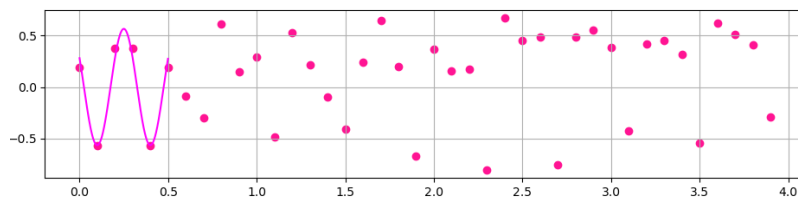


Figure 6.40: Para la imagen, hemos fijado $n = 6$; se calculó que la mejor frecuencia para ajustar los primeros 6 puntos que componen la señal original x es $w = 2$.

Observe que, en general, si se quisiera usar directamente una frecuencia de w para ajustar a la señal x , la aproximación lograda en los n puntos escogidos previamente puede no ser válida.

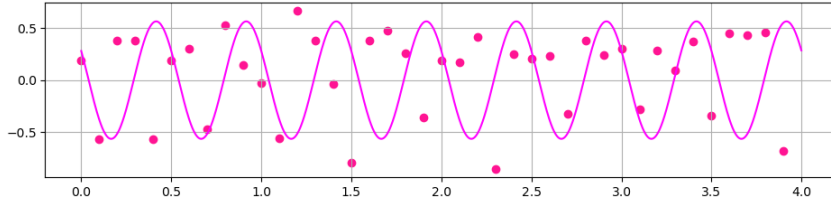


Figure 6.41: Usando los datos de la figura 6.41, podríamos intentar en un principio usar a un senoide de frecuencia 2 para intentar modelar a la señal, pero un senoide de tal frecuencia, como es el caso de esta figura, puede que ni siquiera sea adecuado para modelar el pedazo $x|_n$ original a partir del cual se obtuvo la frecuencia ω .

Esto se debe a que tal frecuencia ω es buena para aproximar a dichos n puntos cuando se ha tomado como unidad de tiempo a n , pero, por la forma en que fue muestreada la señal original x , son F_s (y no necesariamente n) la cantidad de puntos que conforman una unidad. Así, puesto que con ω ciclos de un senoide se aproximaron n puntos, la frecuencia que debe escogerse para aproximar a todos los L puntos es

$$\tilde{\omega} := \frac{F_s}{n} \omega. \quad (6.87)$$

ω ciclos — n puntos (unidad ficticia)
 $\frac{F_s}{n} \omega$ ciclos — F_s puntos (unidad real)

Figure 6.42: Es con una simple regla de tres que se deduce la relación (6.87).

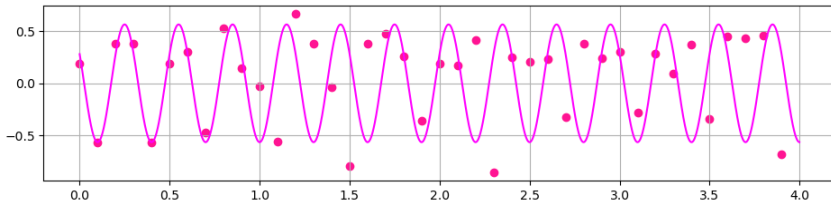


Figure 6.43: Según los datos de las figuras 6.39 y 6.41, con un senoide de frecuencia $\tilde{\omega} = 10/3$ se aproximan bien a los seis puntos en base a los cuales se encontró a la primera frecuencia ω .

Chapter 7

Análisis espectral numérico de los PDL

Establecida ya la teoría necesaria para definir todos los elementos de los espectros basados en la TDF y en espacios monofrecuenciales de una señal finita $x \in \mathbb{R}^n$, programamos las funciones necesarias para realizar análisis espectrales de los polinomios discretos de Legendre usando estas dos metodologías; podremos así comprobar o refutar y mejorar la hipótesis hecha en 6.2.1.

Puede encontrar el código, implementado en Python, en <https://github.com/AmelieBernes/tesis-licenciatura/tree/main>.

Antes de mostrar las gráficas de los espectros de algunos PDL, redactamos en la siguiente sección unas preguntas guía que nos gustaría responder numéricamente, después de realizar análisis espectrales de los PDL $\mathcal{L}^{n,k}$ de dimensiones $2 \leq n \leq 69$.

No realizamos el análisis espectral para dimensiones mayores a 69 pues, para dimensiones más grandes, los números involucrados en los cálculos son tan pequeños en magnitud que son redondeados a cero.

7.1 Preguntas a responder numéricamente sobre las oscilaciones de los PDL

Enlistamos las preguntas que nos interesa considerar relacionadas a las naturaleza oscilatoria de los PDL $\mathcal{L}^{n,k}$ para dimensiones hasta $n = 69$. Todas ellas se formulan con la intención de verificar o refinar la hipótesis 6.2.1 hecha al inicio del capítulo. La primera de estas preguntas es una reformulación de dicha hipótesis en términos de los valores $FP0(x)$ y $FP1(x)$ definidos en 6.8.1 y 6.8.2.

Pregunta 1

Sean $2 \leq n \leq 69$ y $0 \leq k \leq n - 1$. Sea $\mathcal{L}^{n,k}$ el PDL de dimensión n y grado k . ¿las frecuencias máximas $FP0(\mathcal{L}^{n,k})$ y $FP1(\mathcal{L}^{n,k})$ son cercanas a $\frac{k}{2}$?

A continuación mostramos un dibujo para ilustrar cómo podrían verse los espectros del PDL $\mathcal{L}^{7,5} \in \mathbb{R}^7$ en caso de que la respuesta a la pregunta 1 sea afirmativa. Observe que, en el segundo espectro, fue posible usar varios valores de ω para analizar a $\mathcal{L}^{7,5}$, y que podría ser que la frecuencia máxima sea un número

decimal, mientras que para el primer espectro (el basado en la TDF) sólo pueden usarse algunas frecuencias enteras, por lo que no esperamos que $FP0(x)$ sea $\frac{5}{2}$, pues este ni siquiera es un entero. Esperamos, sin embargo, que el máximo se de en las frecuencias enteras cercanas al valor $\frac{5}{2}$.

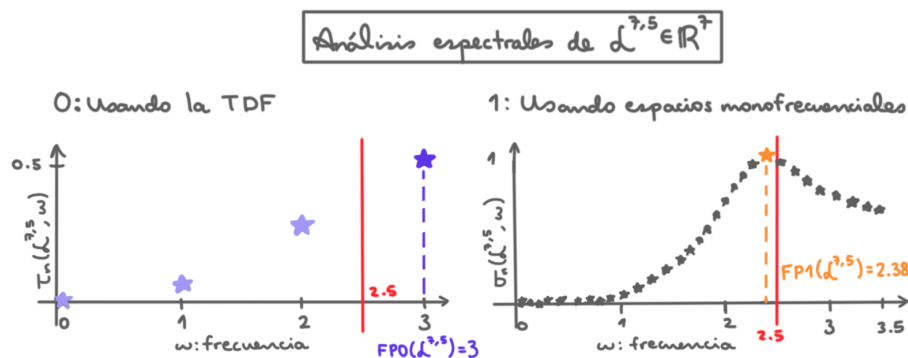


Figure 7.1: A la izquierda un dibujo (no basado en datos reales) de un posible espectro para $\mathcal{L}^{n,k}$ basado en la DFT, y a la derecha uno basado en cosenos a espacios monofrecuenciales. Observe que en el segundo espectro se pueden considerar muchas más frecuencias que en el primero.

En la formulación de nuestra hipótesis 6.2.1, en la que asociamos una frecuencia ω al PDL $\mathcal{L}^{n,k}$, observe que sólo se involucra el parámetro de grado y no el de dimensión. En lugar de ver si en realidad ocurre que $FP0(\mathcal{L}^{n,k})$, vista como función de n , es constante, para investigar la veracidad de la hipótesis 6.2.1 podría ser más adecuado preguntarse por el límite de tal expresión conforme n crece. Formulamos esta idea en la siguiente pregunta.

Pregunta 2

Sea $k \geq 0$ entero. ¿Existen los límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} FP0(\mathcal{L}^{n,k}) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} FP1(\mathcal{L}^{n,k})?$$

De existir estos límites, ¿coinciden entre sí?

Para tratar de responder a la pregunta 2, fijado un grado k , podría ser útil graficar los puntos de la forma

$$(n, FP0(\mathcal{L}^{n,k})), \quad k < n \leq 69, \quad (7.1)$$

y

$$(n, FP1(\mathcal{L}^{n,k})), \quad k < n \leq 69. \quad (7.2)$$

Gráficas de este estilo podrían usarse para comprobar la respuesta a la pregunta 1 graficando también la recta horizontal $y = \frac{k}{2}$ y viendo si los puntos graficados se encuentran cerca de esta recta o no.

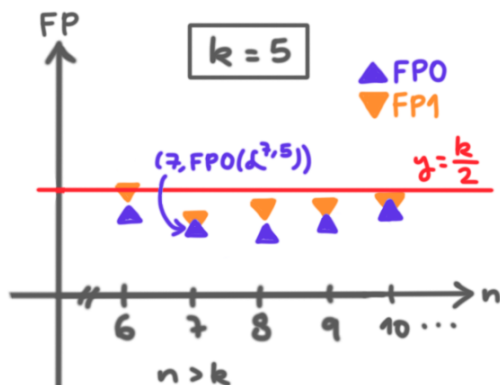


Figure 7.2: De ser la respuesta a la pregunta 2 afirmativa, deberíamos obtener gráficas de puntos alineados horizontalmente, como en este dibujo. Sería bueno que los puntos $FP0$ y $FP1$ estuviesen a alturas parecidas, pues eso significaría que los dos análisis espectrales (uno, el canónico, y otro, el propuesto por nosotros) dan resultados parecidos.

Para intentar refinar la aproximación hecha en la hipótesis 6.2.1, planteemos una tercera y última pregunta. Según esta hipótesis, esperamos que tanto $FP0(\mathcal{L}^{n,k})$ como $FP1(\mathcal{L}^{n,k})$ sean cercanos a $\frac{k}{2}$; de ocurrir esto, tendríamos que los puntos de las colecciones

$$(k, FP0(\mathcal{L}^{n,k})), \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (7.3)$$

y

$$(k, FP1(\mathcal{L}^{n,k})), \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (7.4)$$

que se obtiene después de hacer análisis espectrales a todos los PDL de dimensión n , se ajustan a la recta $f(t) = \frac{t}{2}$. Una forma de comprobar o refutar esto es calcular las rectas de mínimos cuadrados de estas dos colecciones de puntos, y ver si las pendientes de estas son cercanas a $1/2$ y las ordenadas al origen a 0. Planteamos esto en la siguiente pregunta.

Pregunta 3

Fijada una dimensión $2 \leq n \leq 69$, considere las gráficas de los puntos (7.3) y (7.4).

Sean $m_{n,0}$ y $b_{n,0}$ la pendiente y la ordenada al origen de la recta de mínimos cuadrados calculada a partir del conjunto de puntos (7.3), y $m_{n,1}$ y $b_{n,1}$ los correspondientes parámetros para el conjunto de puntos (7.4).

Considere las nubes de puntos

$$(b_{n,0}, m_{n,0}), \quad 2 \leq n \leq 69$$

y

$$(b_{n,1}, m_{n,1}), \quad 2 \leq n \leq 69.$$

¿Alrededor de qué punto parecen concentrarse estas nubes? ¿Las pendientes $m_{n,0}$, $m_{n,1}$ y ordenadas al origen $b_{n,0}$, $b_{n,1}$ parecen seguir una tendencia conforme n crece?

Observe que para la pregunta 2 se ha fijado el parámetro k de grado, mientras que para la pregunta 3 se ha fijado n , el de dimensión.

Frecuencias principales de los PDL de dim. 7

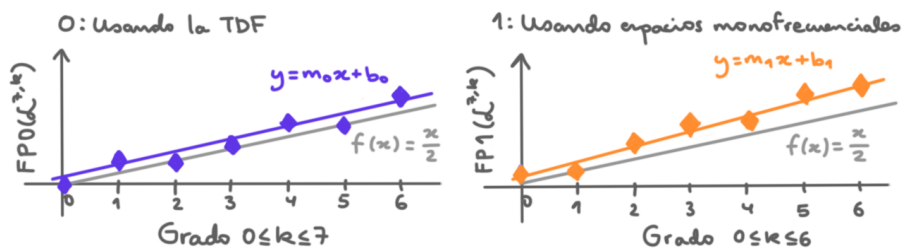


Figure 7.3: Se muestran las gráficas de las colecciones de puntos (7.3) y (7.4) para $n = 7$ descritas en la pregunta 3.

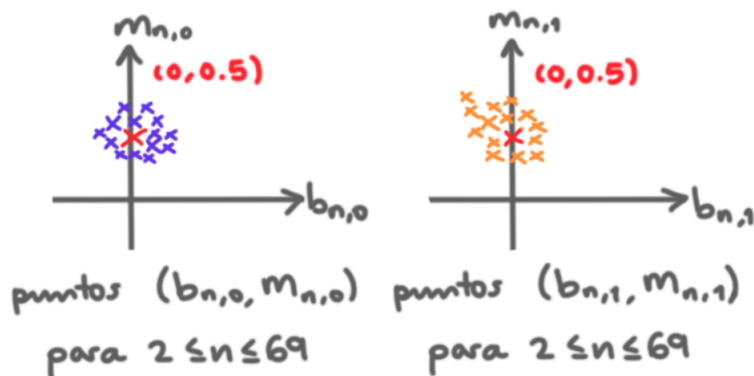


Figure 7.4: Si la estimación dada en la pregunta 1 es buena, las nubes de puntos descritas en la pregunta 3 deberían estar centradas en el punto $(0, 0.5)$.

Vamos a responder a estas tres preguntas con gráficas parecidas a las dibujadas en las figuras 7.1, 7.2, 7.3 y 7.4.

Intentaremos responder a la pregunta 1 con gráficas análogas a las expuestas en el ejemplo 12, esta vez para analizar algunos PDL.

Recordamos que, para cada análisis espectral, vamos a tomar al conjunto de frecuencias como se sugiere en la nota 6.8.5.

7.2 Gráficas y comentarios

Las gráficas de los espectros para los PDL de dimensión hasta 40, así como gráficas análogas a las de las figuras 7.2 y 7.3 se han guardado en https://github.com/AmelieBernes/tesis-licenciatura/tree/main/imagenes/graficas_analisisEspectrales.

A continuación, mostramos algunas de estas imágenes con algunos comentarios que nos ayuden a responder numéricamente a las preguntas 1, 2 y 3 planteadas antes.

En todos los espectros que graficamos, se resaltaron la recta horizontal $y = 1$, para recordar que esa es la cota superior de los coeficientes espectrales que se grafican, y también la recta vertical $x = 0.5$. Según nuestra hipótesis 6.2.1, las frecuencias principales debería estar cerca de esta recta vertical.

Veamos qué pasa con $n = 7$. Grafiquemos primero los espectros de los PDL de dimensión 7.

Calculamos una sola vez y guardamos los datos necesarios para dibujar estas gráficas con el módulo `pickle` de `python`.

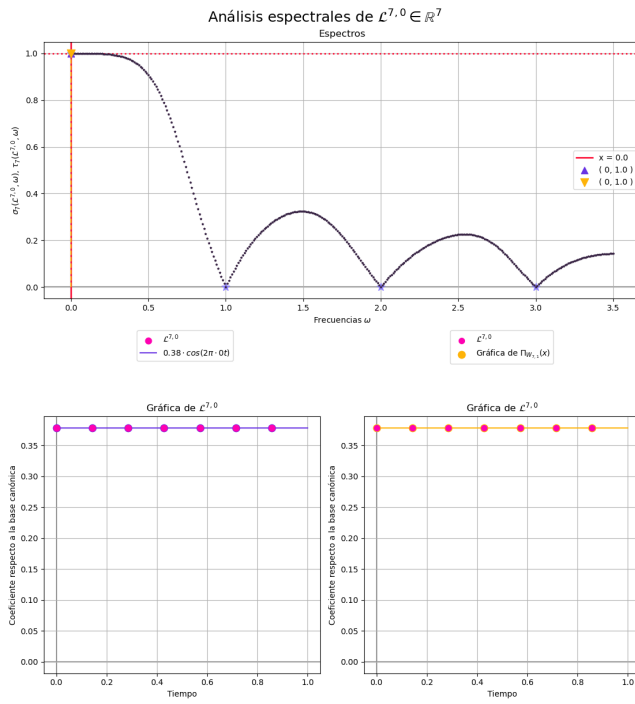


Figure 7.5: Análisis espectral de $\mathcal{L}^{7,0}$.

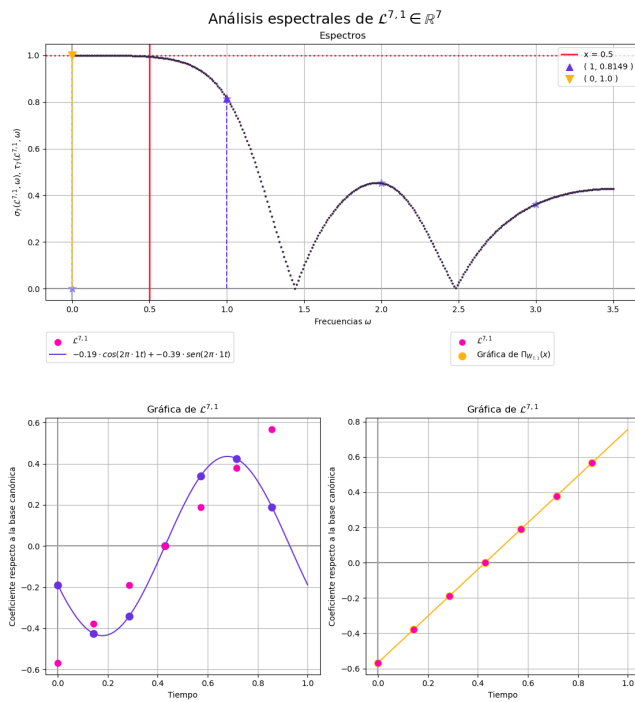


Figure 7.6: Análisis espectral de $\mathcal{L}^{7,1}$.

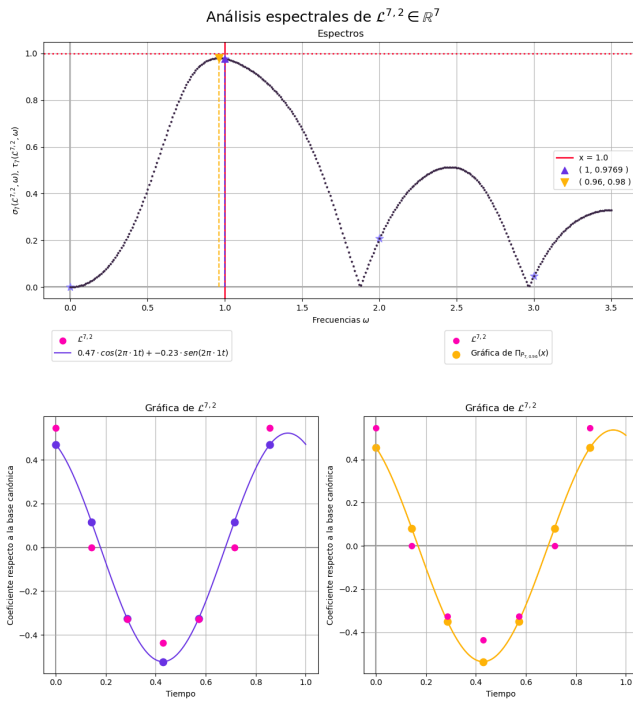


Figure 7.7: Análisis espectral de $\mathcal{L}^{7,2}$.

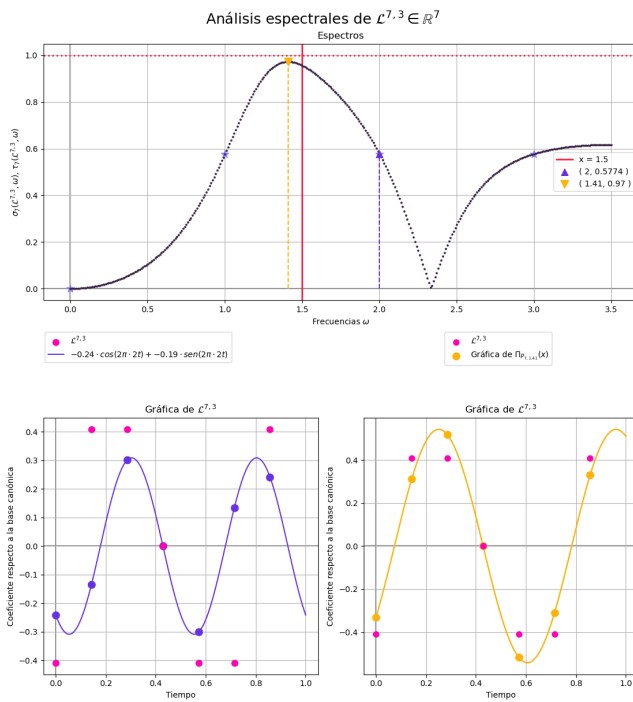


Figure 7.8: Análisis espectral de $\mathcal{L}^{7,3}$.

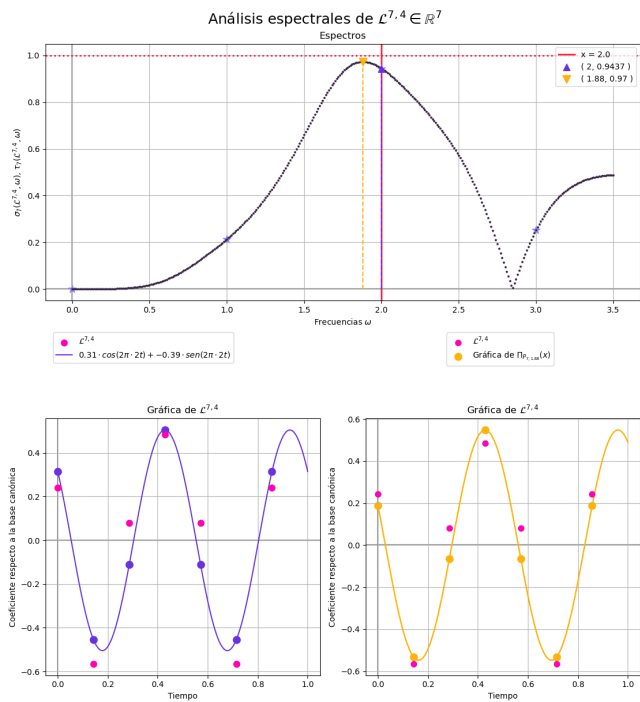


Figure 7.9: Análisis espectral de $\mathcal{L}^{7,4}$.

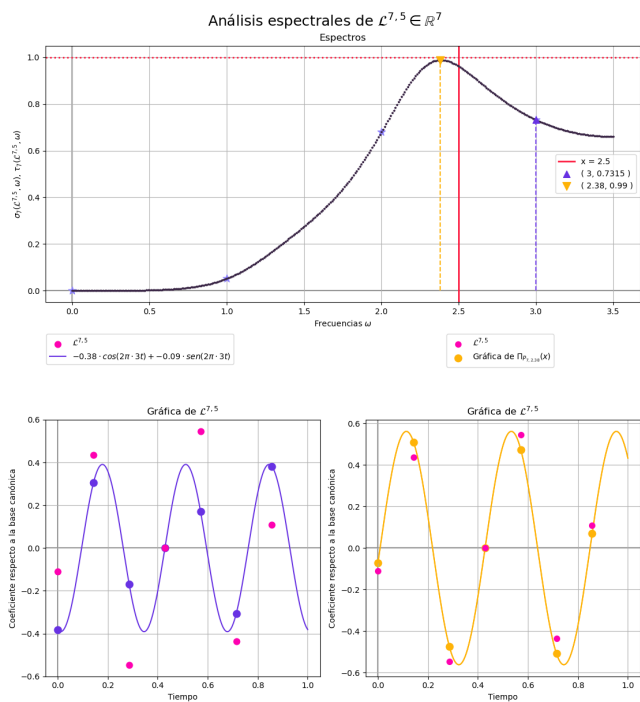


Figure 7.10: Análisis espectral de $\mathcal{L}^{7,5}$.

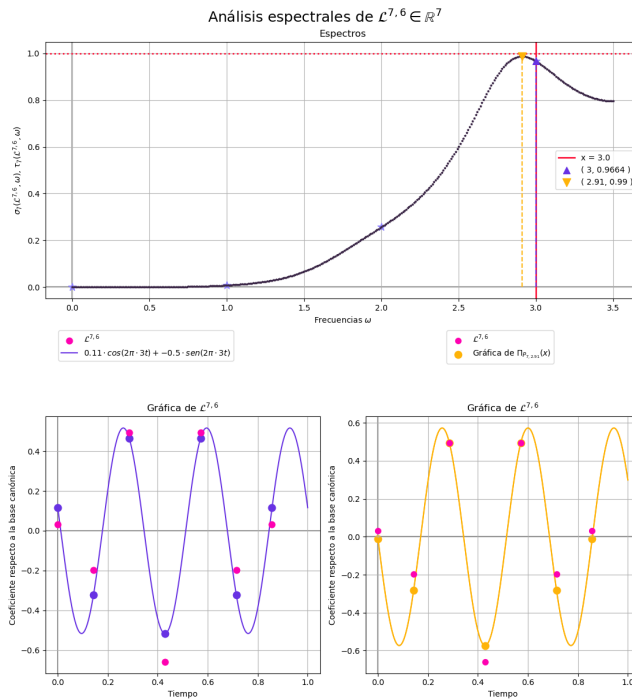


Figure 7.11: Análisis espectral de $\mathcal{L}^{7,6}$.

A continuación mostramos las gráficas de los puntos de la forma $(k, FP0(\mathcal{L}^{7,k}))$ y $(k, FP0(\mathcal{L}^{7,k}))$.

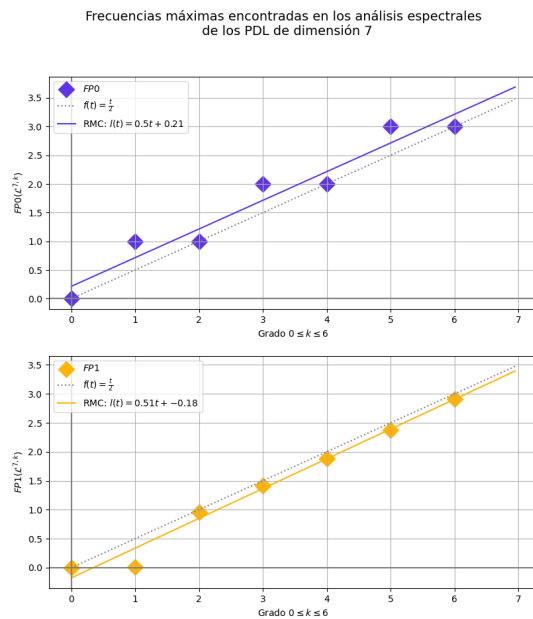


Figure 7.12: Observe que $FP0(\mathcal{L}^{7,0}) = 0 = FP1(\mathcal{L}^{7,0})$ pero $FP0(\mathcal{L}^{7,1}) = 1$ mientras que $FP1(\mathcal{L}^{7,1})$, aunque no es cero, es un decimal muy cercano a cero; observe en la figura 7.6, donde se dibuja el espectro de $\mathcal{L}^{7,1}$ que, en efecto, usando un sinusoide de frecuencia 0.01 (la dada por el espectro basado en espacios monofrecuenciales), logramos ajustar casi a la perfección la gráfica de $\mathcal{L}^{7,1}$ (que, según el teorema 2.3.3, yace en una recta, por lo que no puede ser ajustada a la perfección por un sinusoide), mientras que usando un sinusoide de frecuencia 1 (la dada por el espectro basado en la TDF), no se logran ajustar tan bien los datos.

Como notamos en la descripción de la figura 7.12, parece ser que usando el estudio espectral basado en espacios monofrecuenciales obtenemos una aproximación de la gráfica de $\mathcal{L}^{n,1}$, con $n = 7$, en base a un sinusoide de frecuencia muy baja; grafiquemos los puntos de la forma (7.1) y (7.2) para $k = 1$ para ver si esta es una particularidad de la dimensión $n = 7$ o si también ocurre para otros valores de n .

Gráficas de las frecuencias principales FP para los PDL de grado $k = 1$

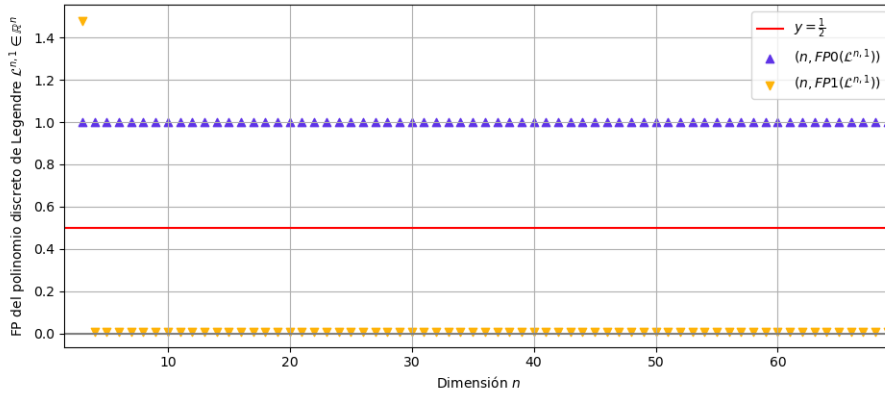


Figure 7.13: Comprobamos numéricamente que los resultados del espectro-1 sugieren usar frecuencias muy bajas para modelar los PDL de grado 1; la única excepción se da para $n = 3$. Graficamos a continuación, en la figura 7.14, los espectros de $\mathcal{L}^{3,1}$ para ver qué está sucediendo.

Análisis espectrales de $\mathcal{L}^{3,1} \in \mathbb{R}^3$

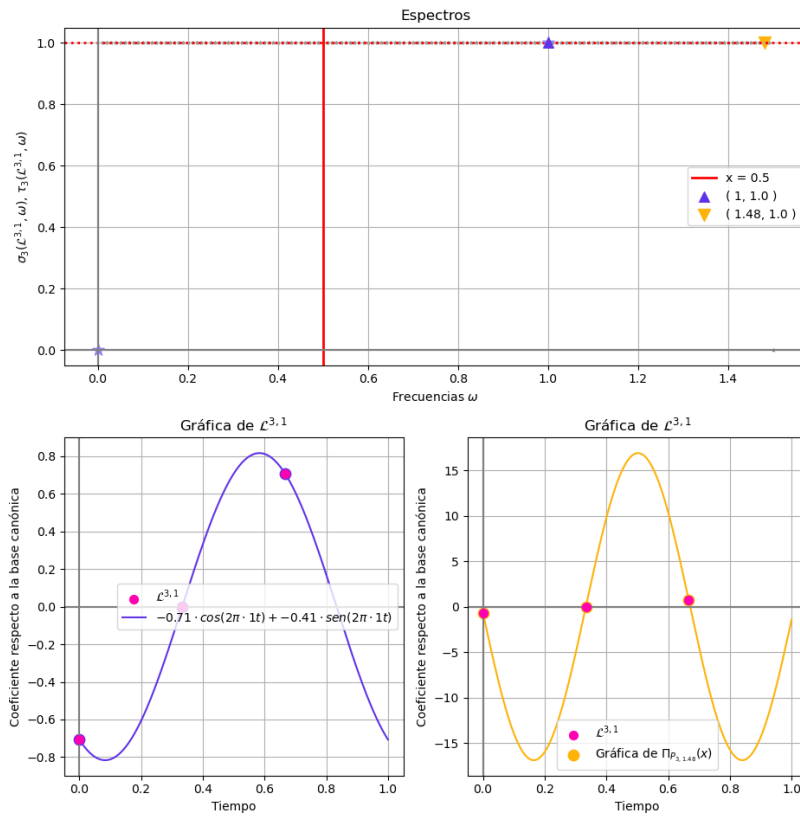


Figure 7.14: Como se muestra en los espectros, el coeficiente $\sigma_3(\mathcal{L}^{3,1}, \omega)$ es, para casi toda ω considerada, muy cercana a uno, por lo que cualquiera de estas frecuencias sería adecuada para aproximar con un senoide la gráfica de $\mathcal{L}^{3,1}$. Por la forma en que programamos el proceso, se usa la última frecuencia más alta, que resultó ser 1.48. Como puede comprobar en las gráficas de abajo, se puede aproximar bien la gráfica de $\mathcal{L}^{3,1}$ tanto con frecuencia $\omega = 1$ como con frecuencia $\omega = 1.48$.

Análisis espectrales de $\mathcal{L}^{8,1} \in \mathbb{R}^8$

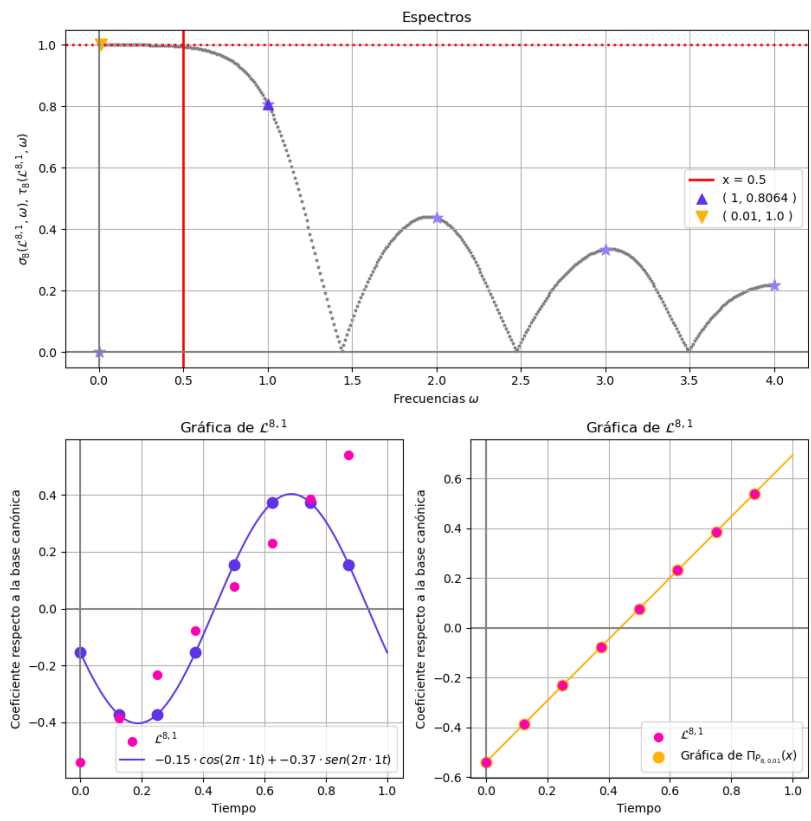


Figure 7.15: Note que en este espectro no ocurre lo que se tenía en el del PDL $\mathcal{L}^{3,1}$ (c.f. figura 7.14); en este caso, el espectro-1 muestra claramente que $\omega = 0.1$, la frecuencia considerada en el análisis más cercana a 0 que **no** es cero, es la mejor (en el sentido explicado en la nota 6.7.6).

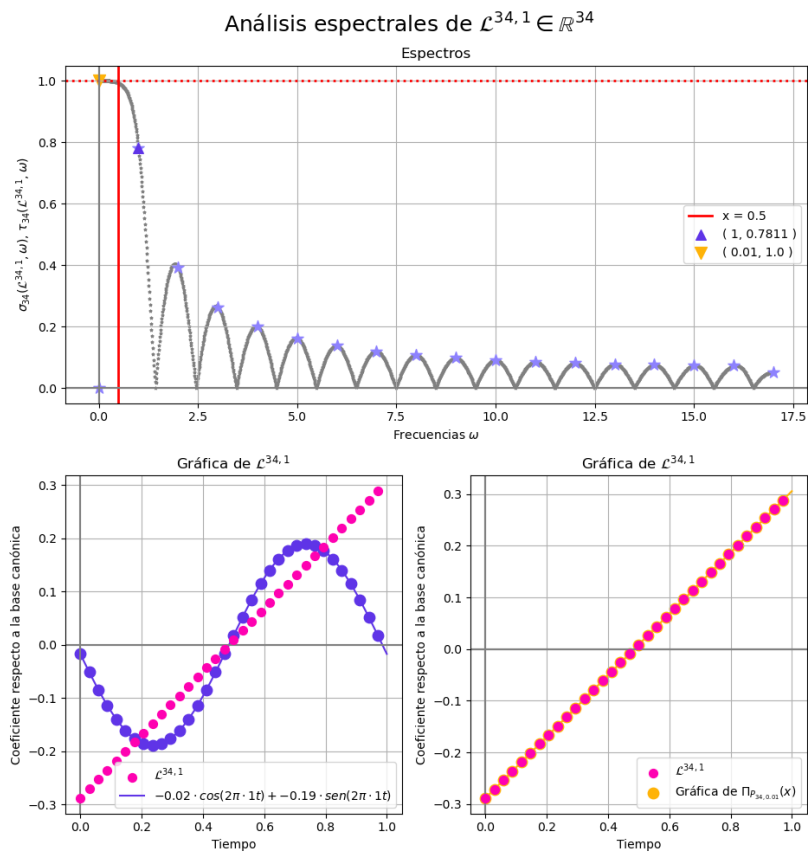


Figure 7.16

Observe que las frecuencias que maximizan los coeficientes espectrales $\Sigma_{\mathcal{L}^{n,1}}$ de los PDL de grado 1 son todas cero, pues como $\mathcal{L}^{n,1}$ es elemento de $W_{n,1}$, coincide con su proyección a este espacio, luego,

$$\Sigma_{\mathcal{L}^{n,1}}(0) = \cos(\angle(\mathcal{L}^{n,1}, W_{n,1})) = \cos(\angle(\mathcal{L}^{n,1}, \mathcal{L}^{n,1})) = \cos(0) = 1.$$

Graficando algunos PDL de dimensión 39, apreciamos que conforme k aumenta, es menos sencillo aproximar la gráfica del respectivo PDL con un solo senoide.

Análisis espectrales de $\mathcal{L}^{39,5} \in \mathbb{R}^{39}$

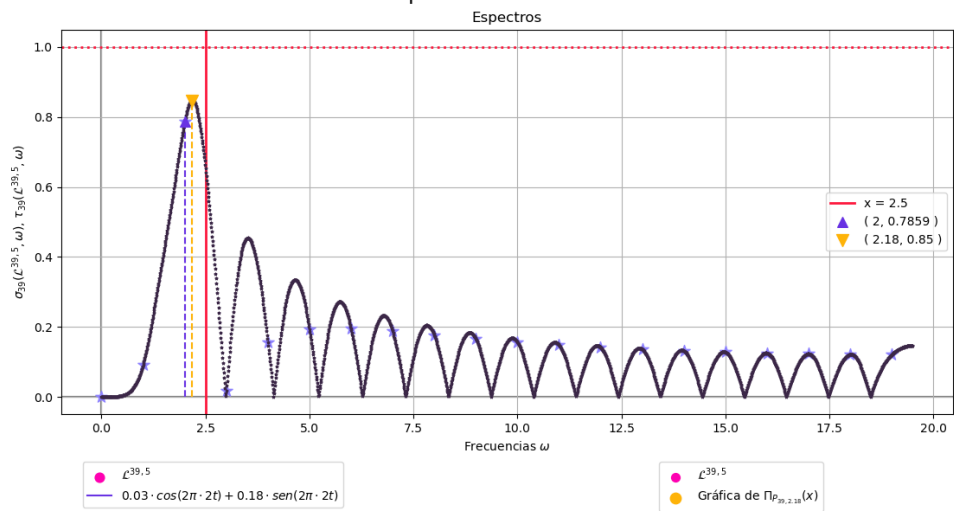
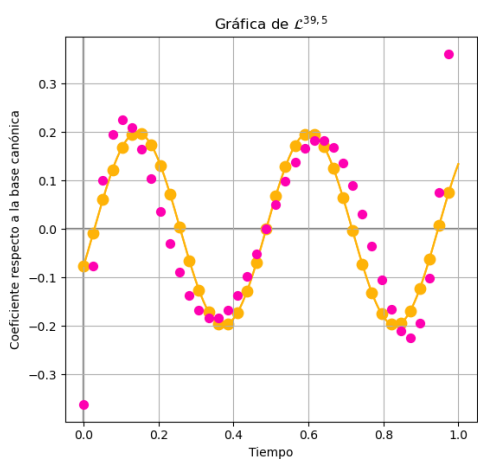
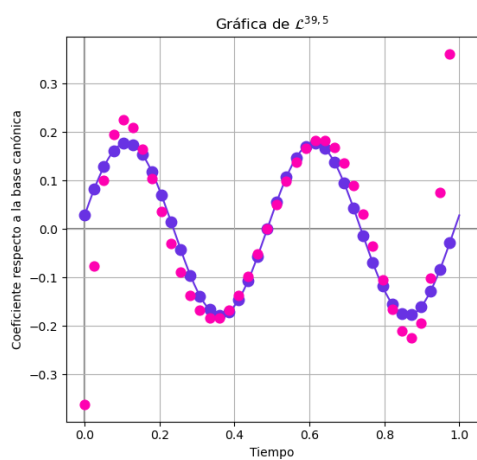


Figure 7.17: Análisis espectral de $\mathcal{L}^{39,5}$.



Análisis espectrales de $\mathcal{L}^{39,8} \in \mathbb{R}^{39}$

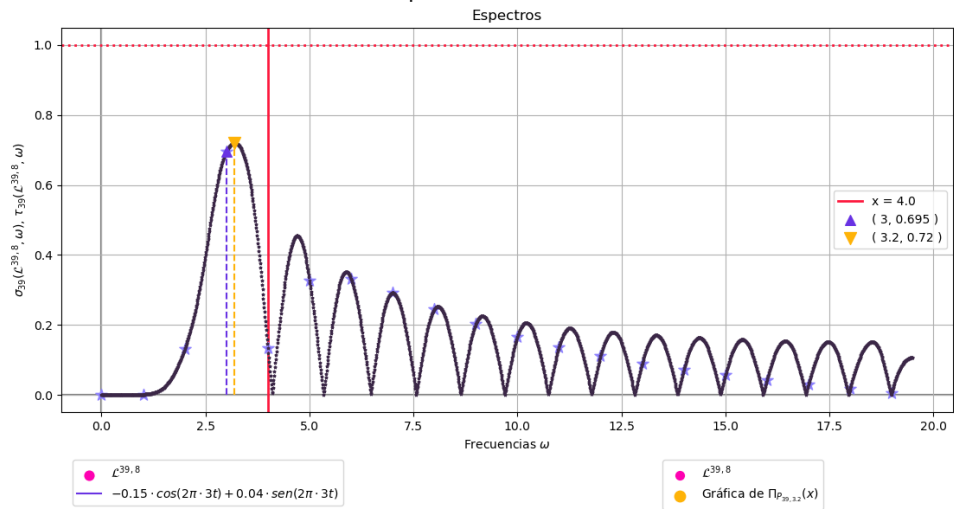
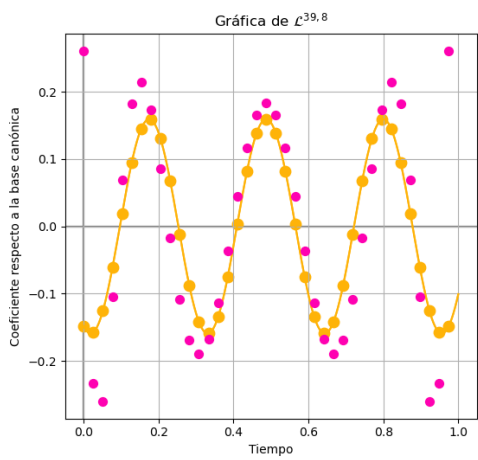
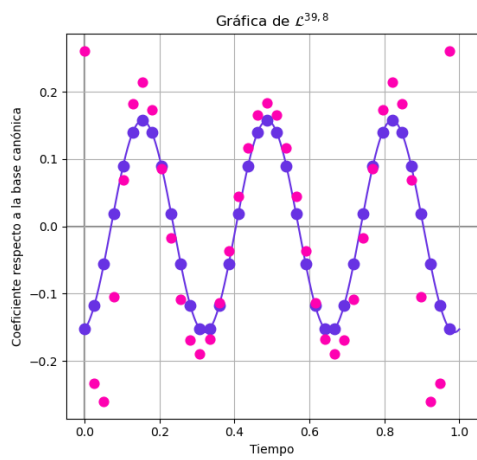


Figure 7.18: Análisis espectral de $\mathcal{L}^{39,8}$.



Análisis espectral de $\mathcal{L}^{39,15} \in \mathbb{R}^{39}$

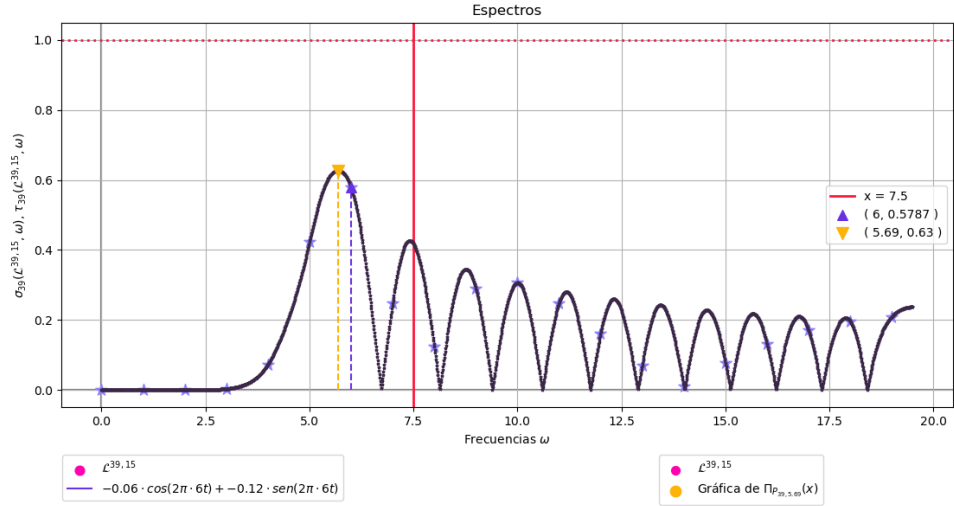
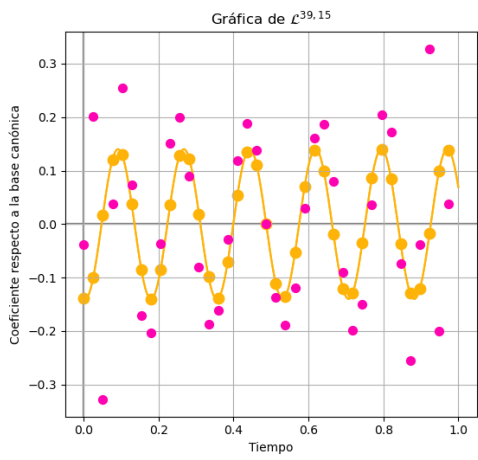
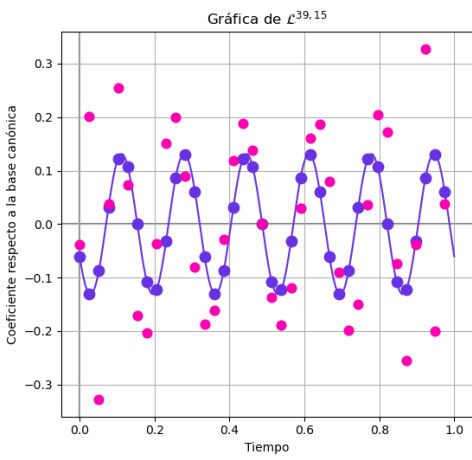


Figure 7.19: Análisis espectral de $\mathcal{L}^{39,15}$.



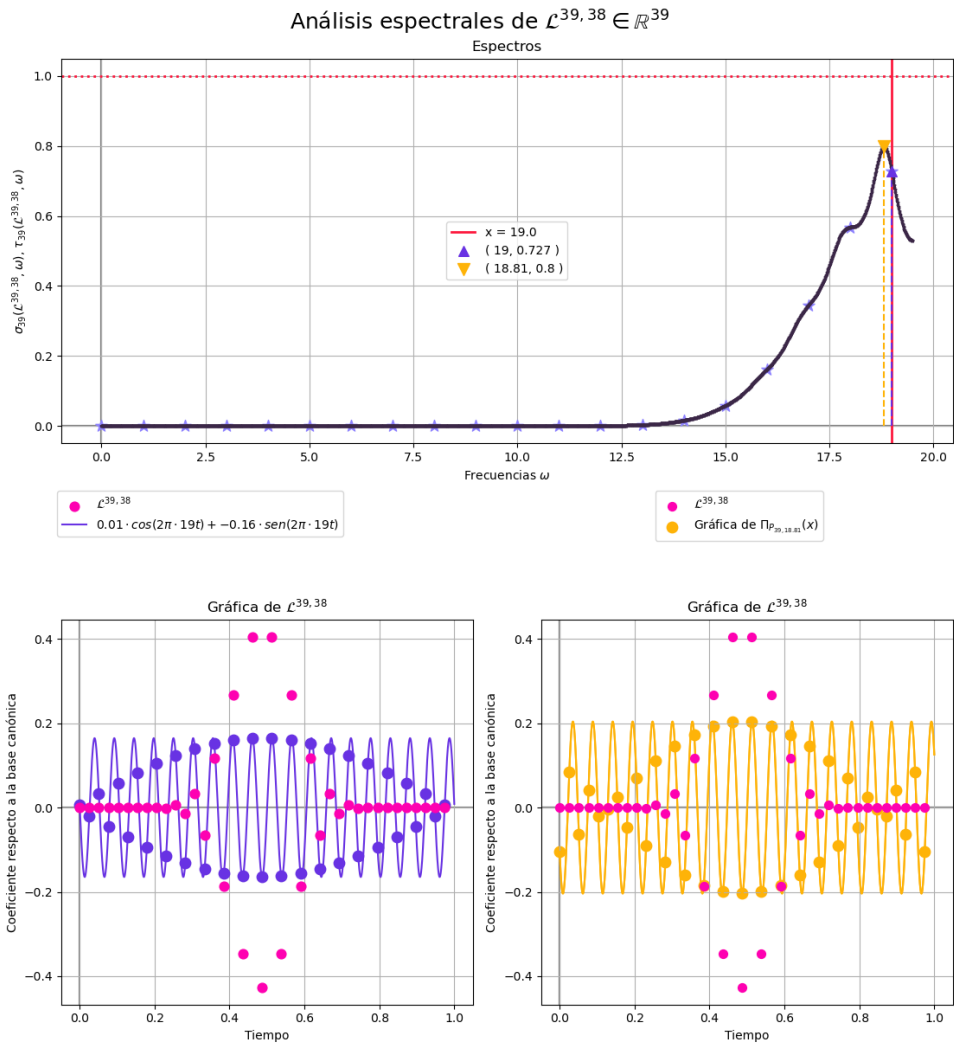


Figure 7.20: Análisis espectral de $\mathcal{L}^{39,38}$.

Sin embargo, puede observar en los espectros guardados en https://github.com/AmelieBernes/tesis-licenciatura/tree/main/imagenes/graficas_analisisEspectrales que, para las dimensiones consideradas, se consigue aproximar muy bien la gráfica del PDL $\mathcal{L}^{n,k}$ cuando k es cercano a cero, y además que los espectros parecen tener un solo máximo global (i.e. una sola frecuencia principal $\omega \in [0, \frac{n}{2}]$).

Graficando algunos conjuntos de puntos de la forma $(k, FP0(\mathcal{L}^{n,k}))$ y $(k, FP1(\mathcal{L}^{n,k}))$ para ciertas dimensiones n , veamos si, como afirmamos en la hipótesis 6.2.1, la frecuencia principal resultante de tales análisis es cercana a $\frac{k}{2}$.

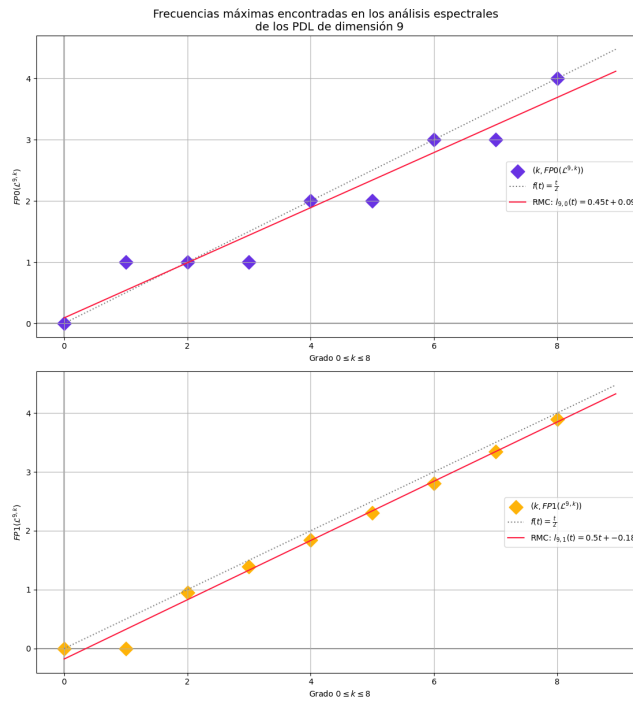


Figure 7.21: Estudio de frecuencias principales para dimensión $n = 9$. Las ecuaciones de las rectas de mínimos cuadrados para los dos análisis son $l_{9,0}(t) = 0.45t + 0.09$ y $l_{9,1}(t) = 0.5t - 0.18$.

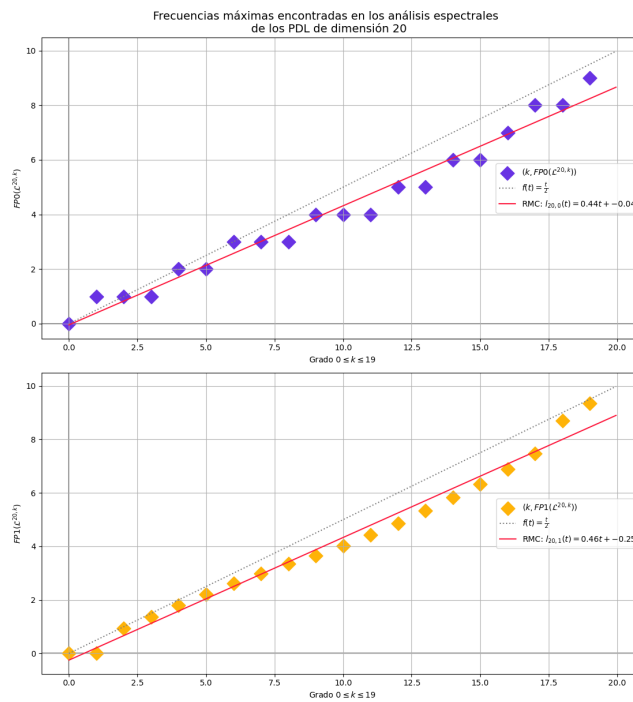


Figure 7.22: Estudio de frecuencias principales para dimensión $n = 20$. Las ecuaciones de las rectas de mínimos cuadrados para los dos análisis son $l_{20,0}(t) = 0.44t - 0.04$ y $l_{20,1}(t) = 0.46t - 0.25$.

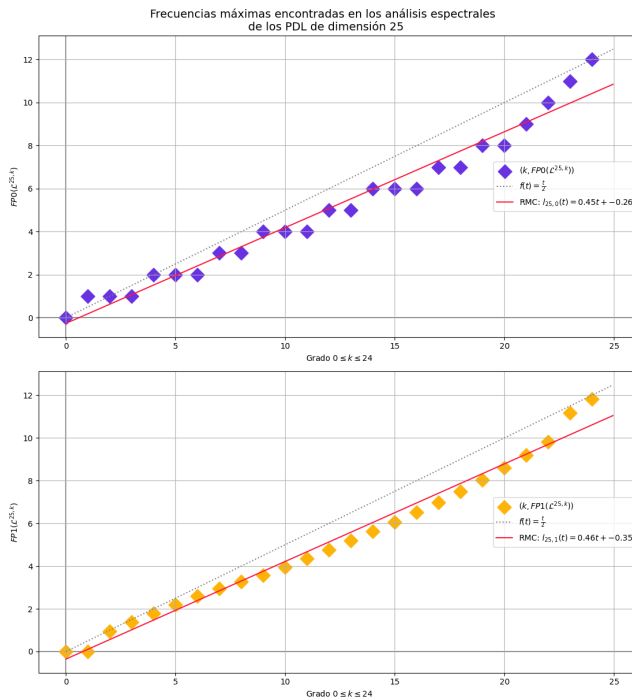


Figure 7.23: Estudio de frecuencias principales para dimensión $n = 25$. Las ecuaciones de las rectas de mínimos cuadrados para los dos análisis son $l_{25,0}(t) = 0.45t - 0.26$ y $l_{9,1}(t) = 0.46t - 0.35$.

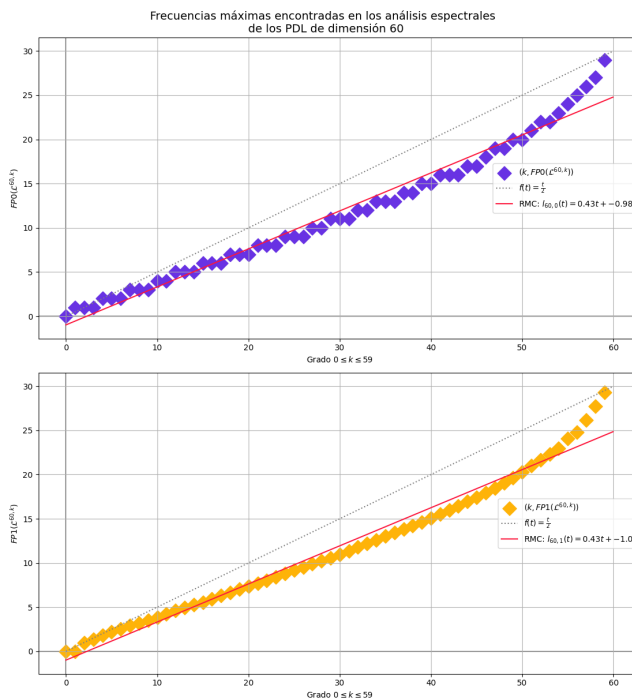


Figure 7.24: Estudio de frecuencias principales para dimensión $n = 60$. Las ecuaciones de las rectas de mínimos cuadrados para los dos análisis son $l_{60,0}(t) = 0.43t - 0.98$ y $l_{60,1}(t) = 0.43t - 1$.

Parece ser que, globalmente, conforme n aumenta, la pendiente que mejor parece modelar las frecuencias principales no es 0.5 (como afirmamos en nuestra hipótesis), sino algo menor, cercana a 0.4. Ya desde el visualizar algunos espectros de los PDL se percibía que las frecuencias principales parecían siempre ubicarse a la izquierda de 0.5.

Grafiquemos los puntos de la forma $(n, m_{n,0})$, $(n, m_{n,1})$ y $(n, b_{n,0})$, $(n, b_{n,1})$

para ver si las pendientes de las RMC parecen, como sugieren las observaciones anteriores, tender a 0.4, y qué tendencia parecen seguir las ordenadas al origen.

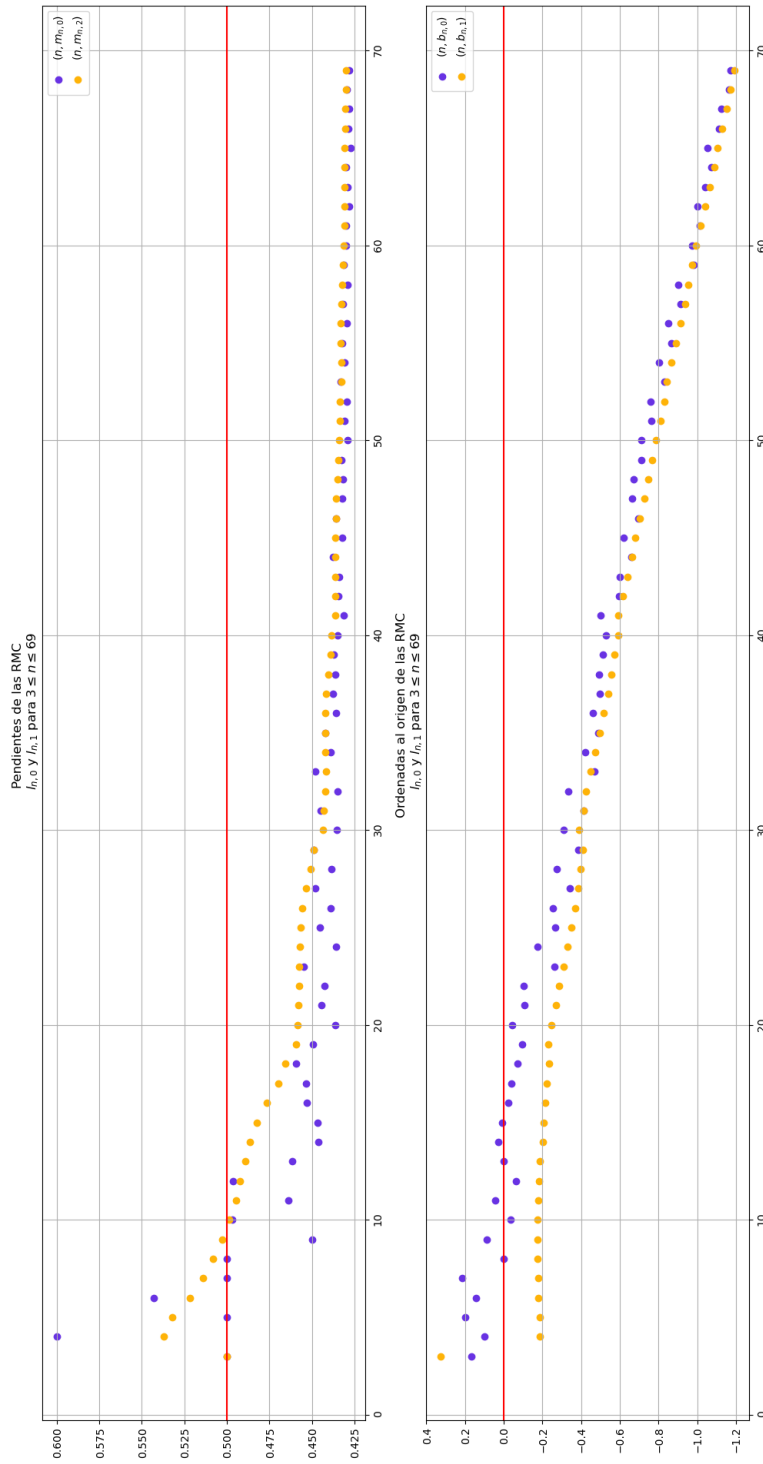


Figure 7.25: En esta gráfica comprobamos que las pendientes de las rectas de mínimos cuadrados parecen ser más bajas que 0.5 conforme n crece. Para los valores de n considerado en estos análisis espectrales, vemos que una cota inferior para estas pendientes es 0.425. Observe que las ordenadas al origen también descienden; si nuestra hipótesis 6.2.1 hubiese sido cierta, tales ordenadas al origen debería permanecer cerca del cero. Con color morado se han graficado los datos correspondientes a los análisis realizados con la TDF, y se usó un naranja para los de los análisis basados en espacios monofrecuenciales. Observe que, por lo general, los resultados dados por ambos análisis son parecidos.

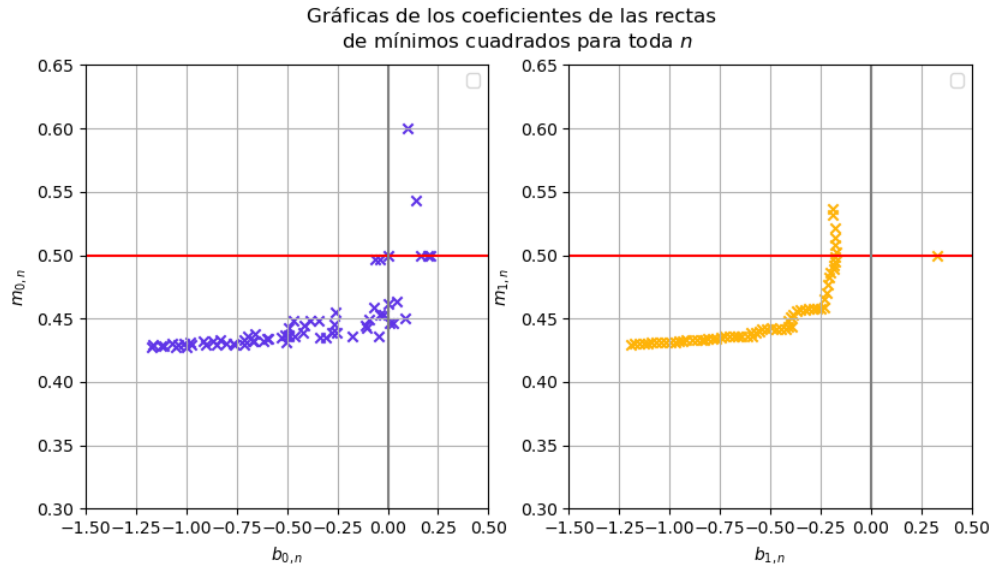


Figure 7.26: Aquí la gráfica de las nubes de puntos de las que se habló en la figura 7.4. Observe que no se acumulan cerca del punto $(0, 0.5)$, como sería de esperar si la respuesta a la pregunta 1 fuese afirmativa. Los puntos se dirigen a la izquierda conforme n crece.

Usados ya los parámetros de las rectas de mínimos cuadrados para intentar ver si los PDL de grado k presentan una respuesta mayor a la frecuencia $k/2$, mostremos algunas gráficas análogas al dibujo 7.2 para intentar discernir la respuesta de la pregunta 2. Hagamos esto fijando un $k \geq 2$ y graficando las familias de puntos de la forma (7.1) y (7.2). Si sólo el parámetro k influye en la frecuencia principal, tendríamos gráficas de puntos que siguen una trayectoria horizontal. Se ha marcado en rojo la recta $y = \frac{k}{2}$, a la que, según nuestra hipótesis 6.2.1, deberían estar cercanos los puntos de las gráficas.

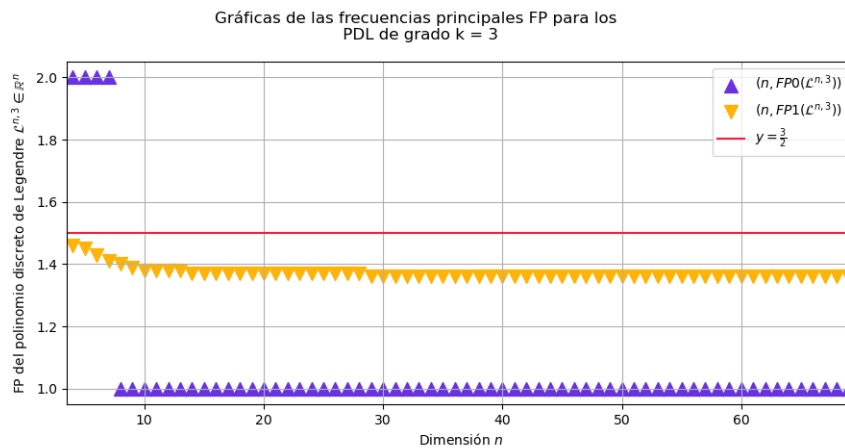


Figure 7.27: Puntos de la forma (7.1) y (7.2) para $k = 3$.

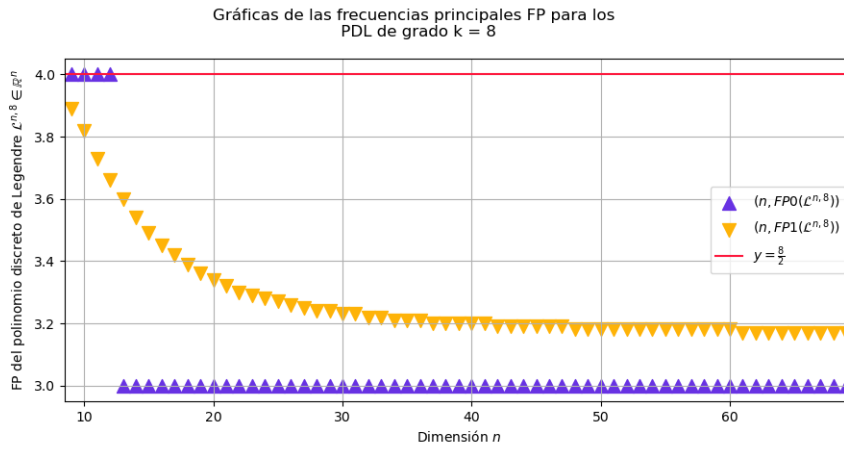


Figure 7.28: Puntos de la forma (7.1) y (7.2) para $k = 8$.

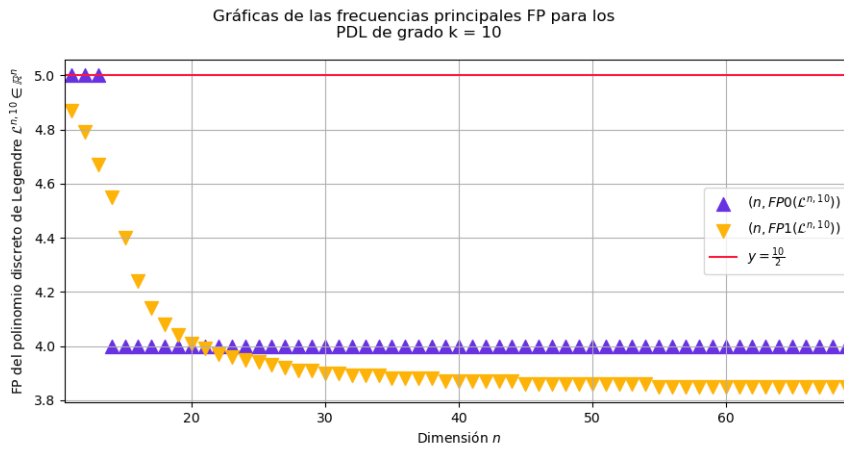


Figure 7.29: Puntos de la forma (7.1) y (7.2) para $k = 10$.

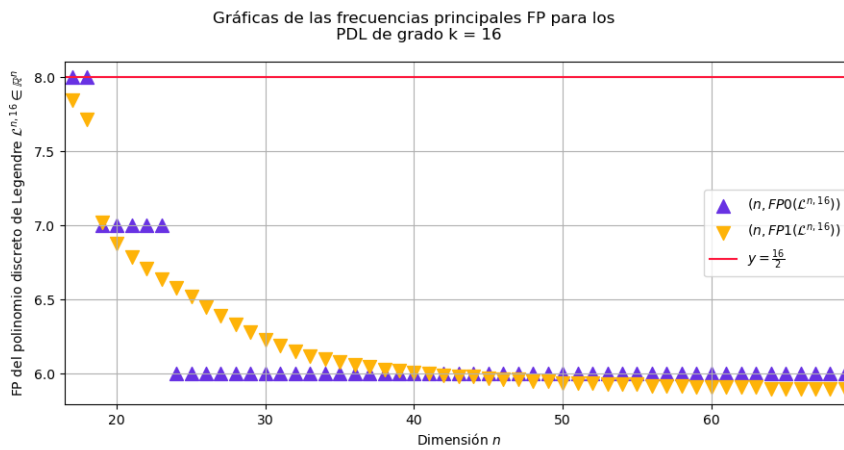


Figure 7.30: Puntos de la forma (7.1) y (7.2) para $k = 16$.

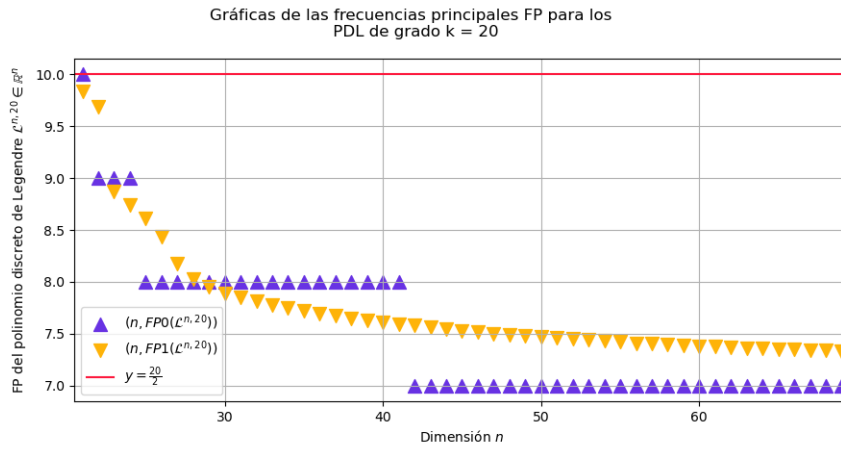


Figure 7.31: Puntos de la forma (7.1) y (7.2) para $k = 20$.

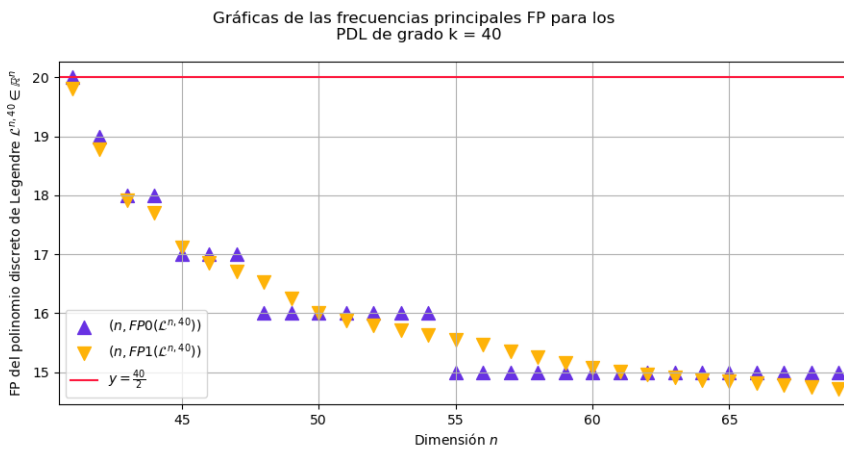


Figure 7.32: Puntos de la forma (7.1) y (7.2) para $k = 40$.

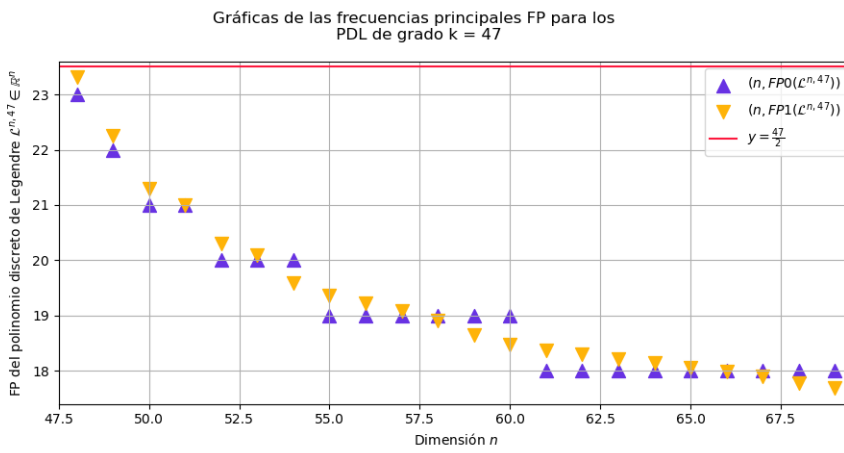


Figure 7.33: Puntos de la forma (7.1) y (7.2) para $k = 47$.

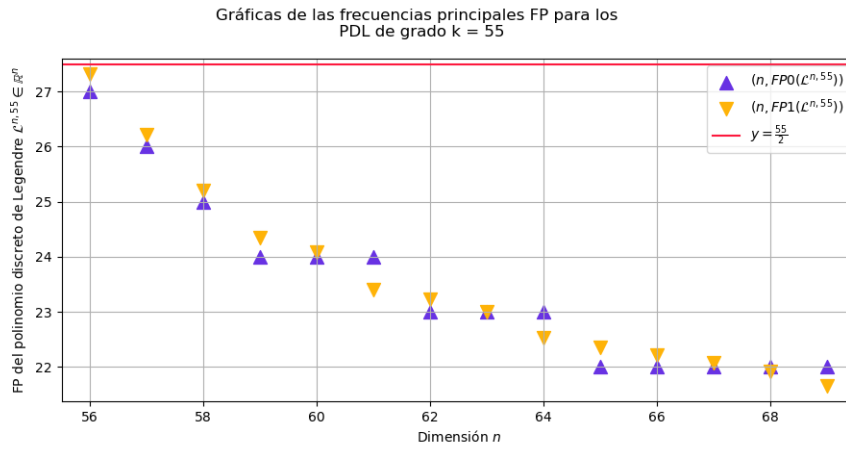


Figure 7.34: Puntos de la forma (7.1) y (7.2) para $k = 55$.

Observe que, para valores de k “grandes”, parece ser que la frecuencia principal del PDL $\mathcal{L}^{n,k}$ es dependiente no sólo de k , sino que la dimensión n también influye, y que, conforme n aumenta, las frecuencias principales disminuyen. Lo que es constante en todas las gráficas es que las FP1 están siempre por debajo de $\frac{k}{2}$. Note además que, para valores pequeños de k , la diferencia entre los valores reales de las frecuencias principales y la estimación de $k/2$ no parece rebasar más que algunas unidades, pero, conforme k es mayor, la diferencia es considerable (por ejemplo, en la figura 7.34 puede apreciarse que algunas frecuencias principales están a más de 5 unidades de distancia del valor estimado $55/2$ para la frecuencia principal).

Análisis espectrales de $\mathcal{L}^{48,47} \in \mathbb{R}^{48}$

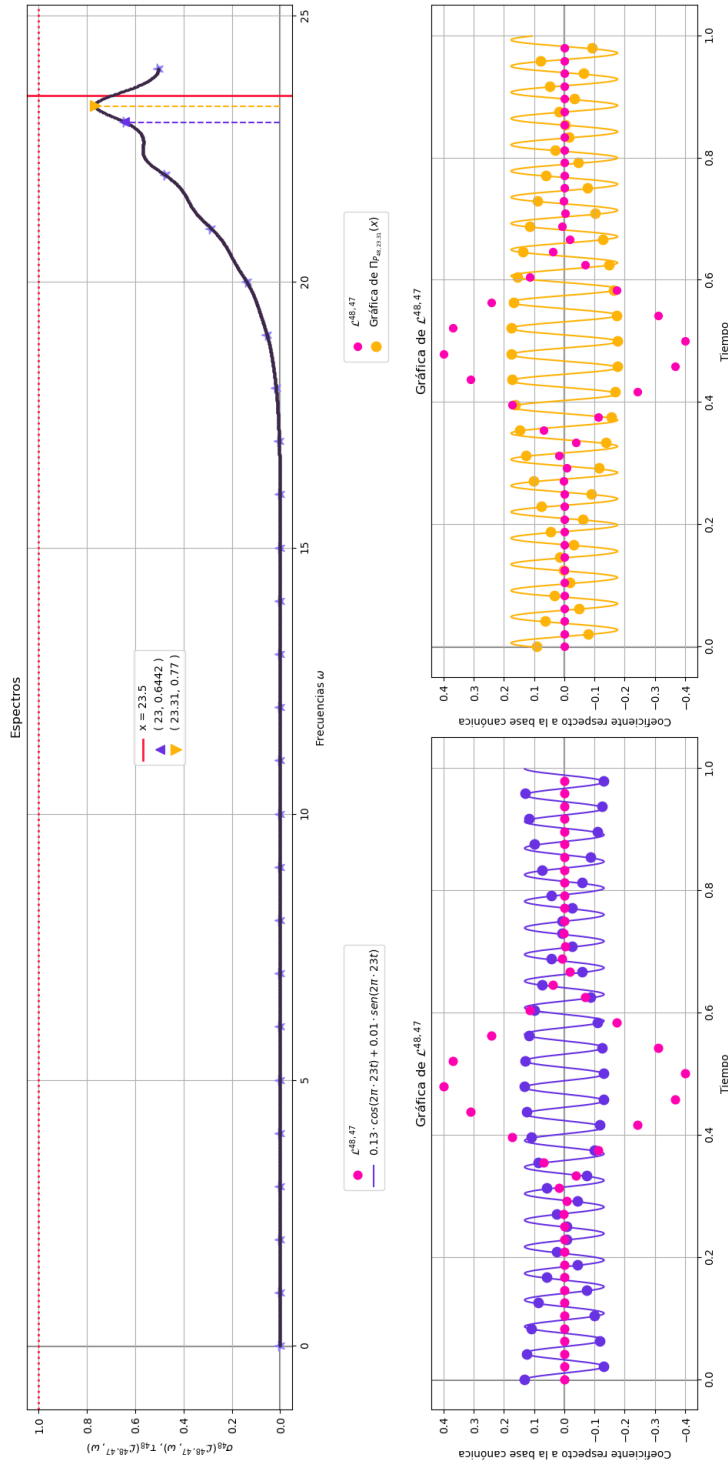


Figure 7.35: Según la figura (7.33), la frecuencia principal del PDL $\mathcal{L}^{48,47}$, cuyo espectro se muestra en la figura, es muy cercano al valor predicho $k = 44/7$. Observe que el senoide que resulta del análisis (marcado en naranja) parece aproximar decentemente al PDL en los extremos, pero no es capaz de modelar las oscilaciones centrales. El que no sea posible modelar a toda la gráfica con un sólo senoide se refleja en el hecho de que $FP1(\mathcal{L}^{48,47})$ (que, según la definición de frecuencia principal, es el valor máximo del espectro de la señal $\mathcal{L}^{48,47}$) es 0.77, cuando el caso óptimo es que este coeficiente espectral sea cercano a 1.

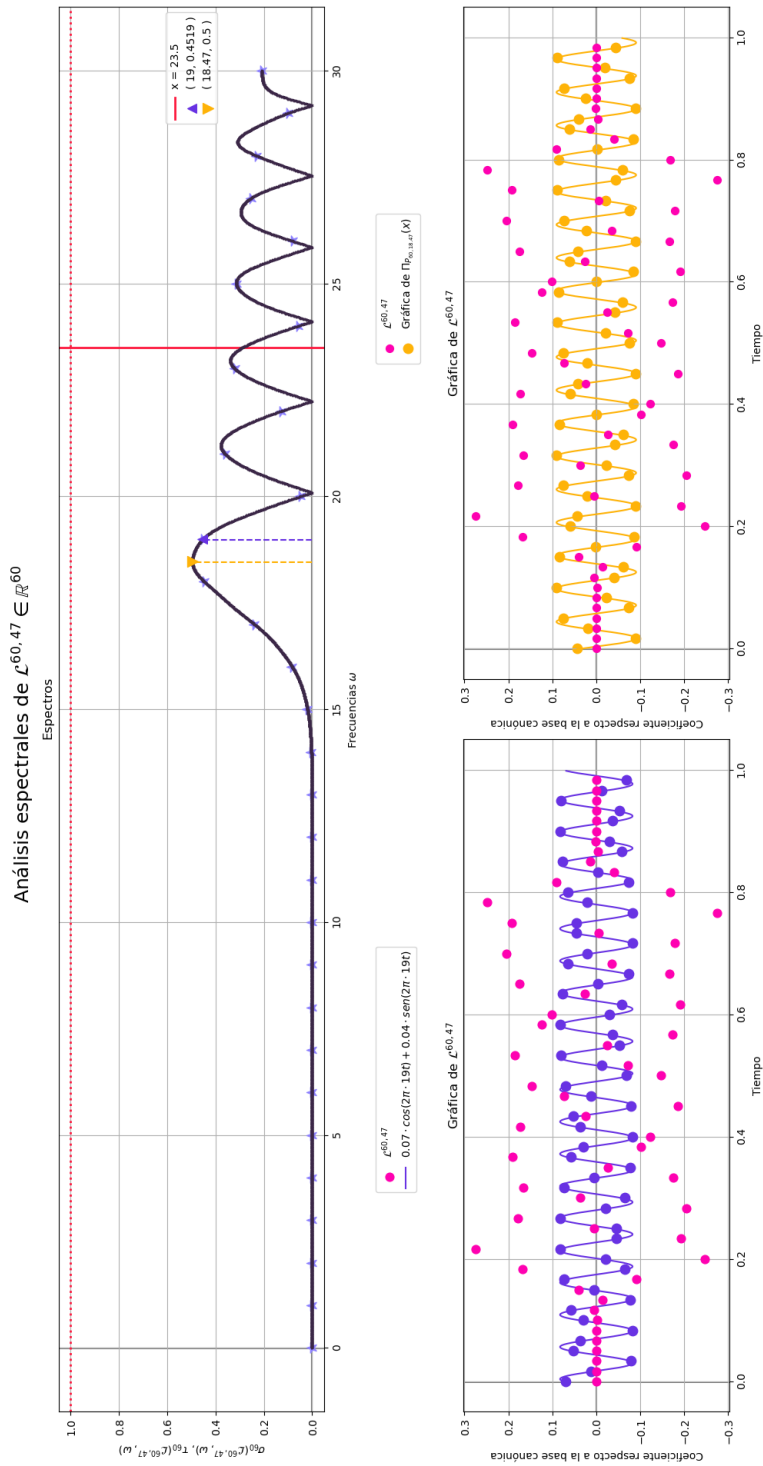


Figure 7.36: Aquí, como en la figura 7.35, se analiza el espectro de un PDL de grado 47, pero la dimensión del de esta imagen es mayor (a saber, 60) a la del PDL de la figura 7.35. Observe que la aproximación es aún peor que la dada en 7.35, y que el coeficiente espectral asociado a la frecuencia principal es aún menos cercano a 1.

Para comprobar o refutar el hecho de que, conforme n es grande y k tiende a $n - 1$ (su cota superior), los PDL de dimensión n y grado k no están bien modelados con un solo senoide (o sea, que no parezca que les es característica una frecuencia en particular), fijado un grado k será de utilidad graficar los puntos de la forma

$$(n, \tau_n(\mathcal{L}^{n,k}, FPO(\mathcal{L}^{n,k}))) \quad (7.5)$$

y

$$(n, \sigma_n(\mathcal{L}^{n,k}, FP1(\mathcal{L}^{n,k}))); \quad (7.6)$$

si ocurriese que los PDL por lo general reaccionan principalmente a una frecuencia, se debería tener (según la nota 6.7.6) que las ordenadas de los puntos (7.5) y (7.6) son cercanas a 1.

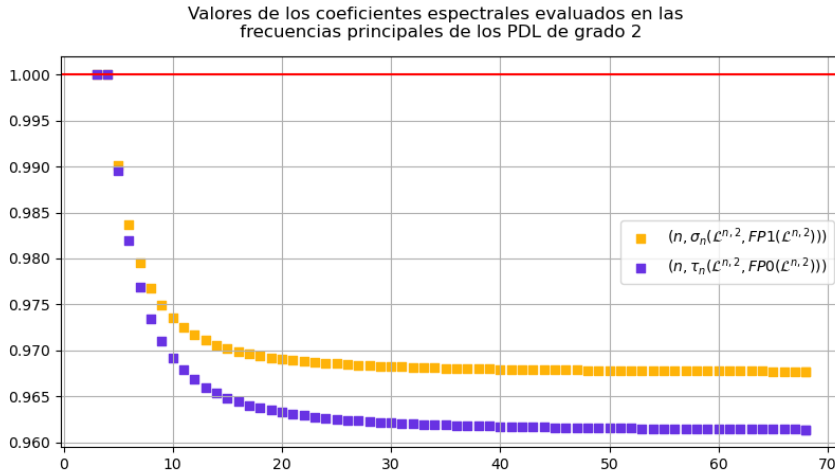


Figure 7.37: Puntos de la forma (7.5) y (7.6) para $k = 2$.

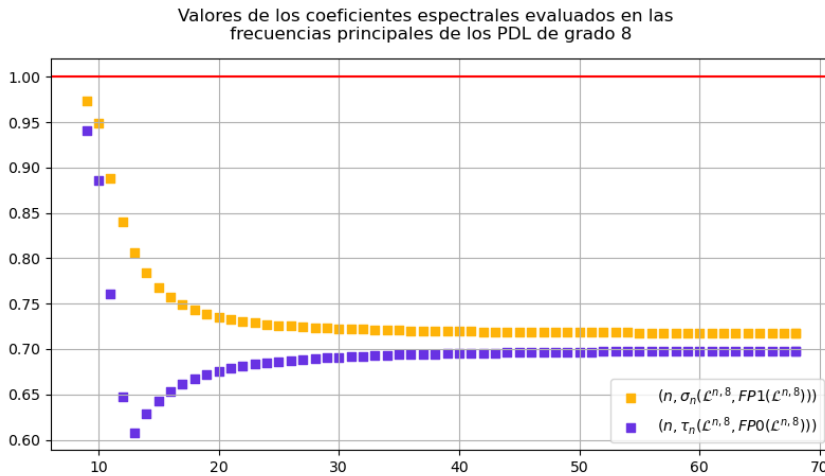


Figure 7.38: Puntos de la forma (7.5) y (7.6) para $k = 8$.

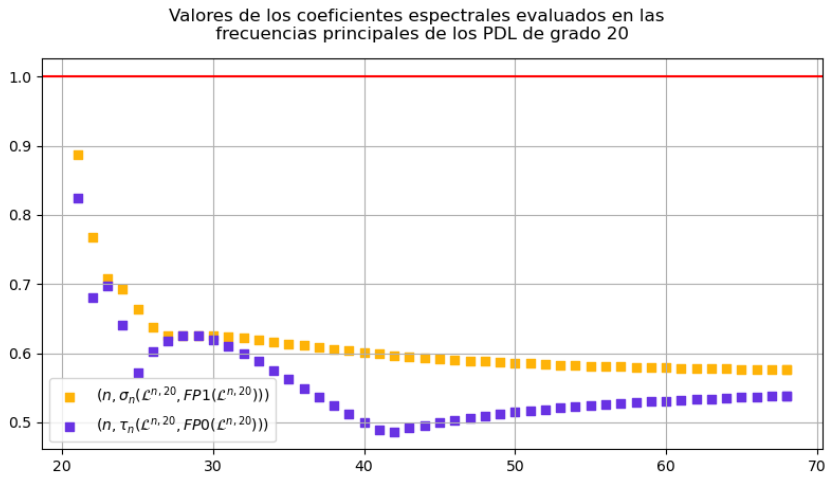


Figure 7.39: Puntos de la forma (7.5) y (7.6) para $k = 20$.

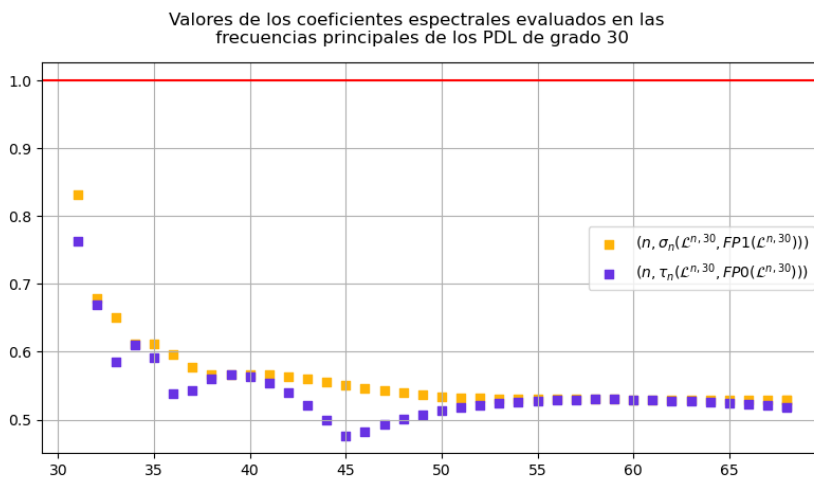


Figure 7.40: Puntos de la forma (7.5) y (7.6) para $k = 30$.

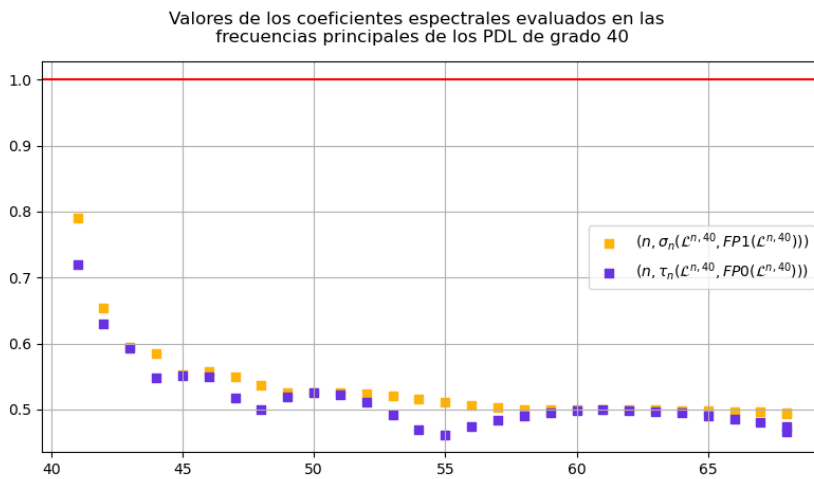


Figure 7.41: Puntos de la forma (7.5) y (7.6) para $k = 40$.

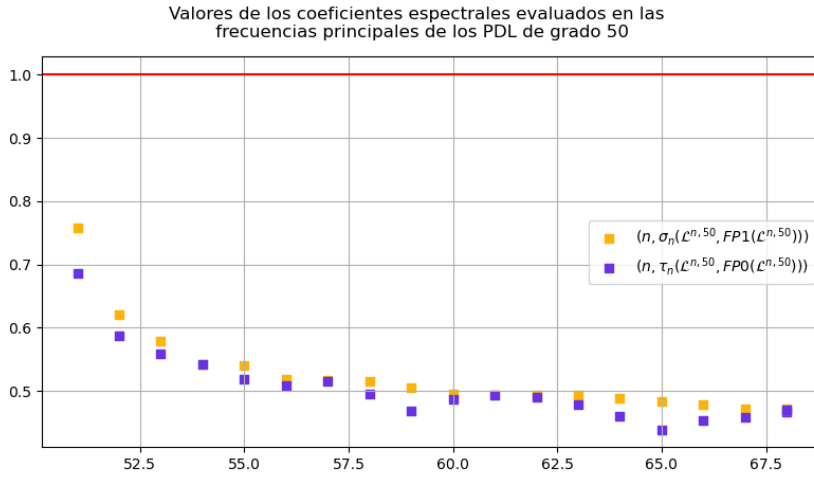


Figure 7.42: Puntos de la forma (7.5) y (7.6) para $k = 50$.

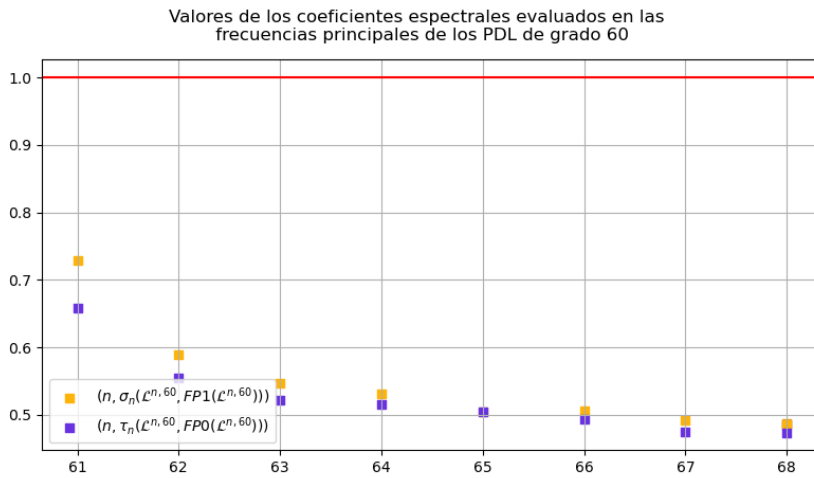


Figure 7.43: Puntos de la forma (7.5) y (7.6) para $k = 60$.

Comprobamos que los valores de los coeficientes espectrales de un PDL evaluados en la frecuencia principal de este se alejan de 1 (el caso ideal) conforme n aumenta y k no tiene valores bajos.

Por otro lado, observe cómo los coeficientes espectrales $\sigma_n(\mathcal{L}^{n,k}, FP1(\mathcal{L}^{n,k}))$ son siempre más cercanos a 1 que los $\tau_n(\mathcal{L}^{n,k}, FP0(\mathcal{L}^{n,k}))$, comprobando con esto que con el estudio espectral basado en espacios monofrecuenciales es posible encontrar una frecuencia que ajuste mejor la gráfica del PDL que la frecuencia resultante al hacer un análisis con la TDF.

7.3 Conclusiones del análisis espectral de los PDL

Para concluir, vamos a resumir las observaciones hechas a lo largo de la sección anterior. Recordamos que las gráficas análogas a las de tal sección, para dimensiones $0 \leq n \leq 69$, se han guardado en https://github.com/AmelieBernes/tesis-licenciatura/tree/main/imagenes/graficas_analisisEspectrales.

- Por ser discretizaciones de rectas, entre más cercana a cero (sin llegar a ser

a cero) sea la frecuencia $\omega > 0$, mejor aproximará un senoide de frecuencia tal ω la gráfica de un PDL $\mathcal{L}^{n,1}$ de grado 1. Sin embargo, $\mathcal{L}^{n,1}$ es ortogonal a toda señal de frecuencia $\omega = 0$.

- **Sobre la pregunta 1:** Graficados los espectros de los PDL hasta dimensión 69, parece ser que el valor $k/2$ es, más que una estimación precisa de la frecuencia principal de un PDL $\mathcal{L}^{n,k}$, una cota superior para tal frecuencia principal.
- **Sobre la pregunta 2:** Después de analizar las gráficas de puntos de la forma (7.1) y (7.2) para valores de k entre 0 y 68, parece distinguirse una convergencia de tales puntos a cierto límite. Se nota, sin embargo, que (salvo para el caso $k = 2$), este límite no parece ser cercano al valor propuesto $k/2$.
- **Sobre la pregunta 3:** Si la hipótesis 6.2.1 fuese cierta, debería esperarse que las pendientes $m_{n,0}$ y $m_{n,1}$ se encontraran, para toda n , cercanas a 0.5, mientras que las ordenadas al origen $b_{n,0}$ y $b_{n,1}$ se ubicaran cerca de cero. Lo que en realidad encontramos durante el análisis numérico fue que las pendientes, conforme n crece, parecen tender a un valor cercano a 0.4, mientras que las ordenadas al origen parecen disminuir conforme n aumenta.
- En general, para todas las dimensiones n estudiadas, se encontró que los PDL $\mathcal{L}^{n,k}$ con k pequeño parecían responder particularmente bien a su frecuencia principal, siendo el espectro evaluado en esta muy cercano a uno, pero conforme n crece y k tiende a $n - 1$ (su cota superior), los valores $\sigma_n(\mathcal{L}^{n,k}, \omega)$ parecen estar muy alejados de 1, por lo que no parece ser factible aproximar la gráfica de tales PDL sólo con un senoide.

Appendix A

Apéndice: teoría

En este apéndice, establecemos las definiciones y resultados del álgebra y de la teoría de espacios de Hilbert estrictamente necesarios para el desarrollo de este trabajo de tesis. A pesar de que los teoremas aquí expuestos son clásicos, preferimos no limitarnos a simplemente citarlos ya que queremos puntos de vista de estos tal vez un poco distintos a los usuales, pero útiles para nosotros.

A menos que se diga explícitamente lo contrario, las elecciones del orden en la exposición del material, al igual que las demostraciones aquí contenidas, son personales.

A.1 Polinomios y teorema fundamental del álgebra

En general, si R es un anillo, se define a partir de él un nuevo anillo denominado el **anillo de polinomios con coeficientes en R** ; no vamos a ahondar en la construcción algebraica de este (basada en sucesiones en R de soporte finito, c.f. [Jac85] p.119), pero suponemos que el lector está ya familiarizado con el anillo $R[t]$, donde las operaciones de suma y multiplicación se definen de la manera usual, así como con la noción de evaluar un polinomio $f(t) \in R[t]$ en un elemento $r \in R$ del anillo.

Definición A.1.1

Sean K un anillo, $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k \in K[t]$ con a_n un elemento no cero del anillo K .

- Al elemento $a_n \in K$ se le llama el **coeficiente principal** del polinomio f , y
- a $n \in \mathbb{N}$ se le llama el **grado de f** y se le denota por $\partial(f)$.

A todo elemento $r \in K$ tal que $f(r) = 0$ se le llamará una **raíz de f** .

Nota A.1.2

En A.1.1 se definió el coeficiente principal y grado de todo polinomio no cero; por lo general, los algebraistas prefieren definir el grado del polinomio cero como $-\infty$ (c.f. [Jac85], p.128) o dejarlo indefinido (c.f. [Rot10], p.126). Nosotros preferimos definir el grado del polinomio cero como cero (que es el grado de todo

polinomio constante). Esto lo hacemos simplemente para no tener que distinguir al polinomio cero como un caso especial, pues eso simplifica las formulaciones de los resultados que necesitamos.

Proposición A.1.3

(c.f. [Rot10], p.127) Si K es un dominio entero, entonces, para cualesquiera polinomios $f(t), g(t) \in K[t]$ no cero se tiene que el producto $f(t) \cdot g(t)$ de estos dos polinomios no es el polinomio cero y que

$$\partial(f \cdot g) = \partial(f) \cdot \partial(g).$$

A nosotros nos interesará tomar siempre al anillo de coeficientes K como el campo \mathbb{R} o el campo \mathbb{C} .

Es una consecuencia inmediata del algoritmo de la división (c.f. [Rot10] p. 131) el que, si K es un campo y $f(t) \in K[t]$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces f tiene a lo más n raíces (el argumento es relacionar raíces de un polinomio con divisores lineales de este y argumentar que, por A.1.3, si el grado de f es n entonces f no puede factorizarse como el producto de más de n factores lineales, luego, no puede tener más de n raíces).

Se tiene pues una cota superior para la cantidad de raíces de un polinomio no cero basada en su grado, sin embargo, esta cota bien puede no alcanzarse. De hecho, como muestra el siguiente ejemplo, puede ser que un polinomio no constante con coeficientes en un campo no tenga ninguna raíz.

Ejemplo 13. Considere al anillo \mathbb{Z}_5 de enteros módulo 5. Como 5 es un número primo, \mathbb{Z}_5 es un campo (c.f. proposición 3.12 de [Rot10]). Sea $f(t) = t^2 - 2 \in \mathbb{Z}_5[t]$; evaluar a este polinomio en cada uno de los cinco elementos de \mathbb{Z}_5 nunca da lugar al cero del campo, luego, f es un polinomio de grado dos con coeficientes en \mathbb{Z}_5 sin raíces (en \mathbb{Z}_5). \diamond

Ejemplo 14. El ejemplo canónico de polinomio con coeficientes reales sin raíces (reales) es $p(t) = t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$. No puede tener raíces por ser el cuadrado de todo número real no negativo. \diamond

Teorema A.1.4

(Teorema fundamental del álgebra, versión dada por [Kur68], p.149):
 Todo polinomio $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ de coeficientes complejos y grado al menos uno tiene al menos una raíz compleja.

Como se hace notar en la referencia, es difícil exagerar la importancia que tiene este teorema no sólo en el álgebra, sino en la matemática en general; se resalta también el hecho de que, hasta el momento, todas las pruebas de este teorema hacen uso no sólo de la estructura algebraica del dominio entero $\mathbb{C}[t]$, sino de propiedades de otra índole (por ejemplo topológicas) de \mathbb{C} visto como un \mathbb{C} -espacio vectorial (obtenidas, por ejemplo, al definir en \mathbb{C} una norma, c.f. (A.6)). Hay, sin embargo, construcciones puramente algebraicas del campo \mathbb{C} basadas en la idea de “completar” al campo de los números reales (c.f. [God66], L’anneau $K[\sqrt{d}]$, p.152).

De un simple argumento inductivo, usando el teorema A.1.4 se demuestra que el que todo polinomio no constante con coeficientes en \mathbb{C} tenga al menos una raíz compleja **equivale** a que tenga tantas raíces como su grado.

Teorema A.1.5

Todo polinomio $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces complejas (contando multiplicidades).

Demostración. Procedemos por inducción sobre n , el grado del polinomio. Sea f un polinomio con coeficientes complejos y de grado $n = 1$. Según el teorema A.1.4, f tiene al menos una raíz $r_1 \in \mathbb{C}$, luego, el polinomio lineal $x - r_1$ divide a f . Ahora bien, si f tuviese una segunda raíz r_2 , el polinomio de grado dos $(x - r_1)(x - r_2)$ dividiría a f , pero esto contradice el que todos los divisores de un polinomio f con coeficientes en un campo tengan grado menor o igual al de f (c.f. proposición A.1.3). Con esto comprobamos la validez del teorema para $n = 1$.

Supongamos ahora el teorema cierto para todo polinomio de grado $n \geq 1$. Sea $f \in \mathbb{C}[t]$ un polinomio de grado $n + 1$; según A.1.4, f tiene al menos una raíz r_1 , luego,

$$f(x) = (x - r_1)g(x), \quad (\text{A.1})$$

con $g(x)$ algún polinomio de coeficientes complejos y grado n (c.f. proposición A.1.3). Por hipótesis de inducción, g tiene exactamente n raíces complejas (contando multiplicidades); puesto que, según la ecuación (A.1), las raíces de f son r_1 y las raíces de g (pues, en un campo, el producto de dos elementos del campo es cero sí y sólo si alguno de estos es cero), concluimos, como queríamos, que, salvo multiplicidades, f tiene $n + 1$ raíces complejas. \square

La siguiente consecuencia inmediata del teorema fundamental del álgebra es una de las piezas angulares del trabajo desarrollado en esta tesis.

Proposición A.1.6

Sea $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ un polinomio con coeficientes reales con $\partial(f) = n$. Si f tiene más de n raíces reales, entonces f es el polinomio cero.

Demostración. En efecto, si f tuviese grado mayor a cero, entonces, según el teorema A.1.5, f tendría a lo más n raíces reales, pero, por hipótesis, f tiene más de n ; así, f debe tener grado cero, o sea, debe ser un polinomio constante. Puesto que el único polinomio constante con al menos una raíz es el polinomio cero, concluimos que $f = 0$. \square

A.2 Definiciones básicas de espacios de Hilbert

Sea $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Nosotros vamos a trabajar con F -espacios vectoriales V en los que se haya definido un **producto punto**; si uno tiene definida una función de este tipo (que introducimos a continuación) es posible ya no sólo sumar y escalar elementos de V , sino también hablar de **ángulos** y **distancias** entre puntos del espacio.

Definición A.2.1

Sea V un F -espacio vectorial. A una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$ tal que, para cualesquiera $x, y, z \in V$ y $a, b \in F$ se cumple que

- $\langle a \cdot x + b \cdot y, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, al **conjugado complejo** de z , o sea, al complejo $a - ib$, se le denota por \bar{z} .

- $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$

se le llamara un **producto punto** (o **producto interior**) definido en V .

En la sección A.6.1 mostramos cómo se puede definir la noción de ángulo cuando se cuenta con un producto punto definido en el espacio.

Observe que, según el segundo punto de la definición A.2.1, para todo $x \in V$ se tiene que el conjugado complejo de $\langle x, x \rangle$ coincide con $\langle x, x \rangle$, luego ¹⁰, $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$.

A partir de las propiedades listadas en A.2.1 que debe cumplir un producto punto se puede definir una norma ¹¹ en el espacio, luego, se tiene disponible una noción de longitud (y, por lo tanto, de distancia también).

Proposición A.2.2

(La norma inducida por un producto punto) Dado un espacio vectorial con producto punto $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, la función $\| \cdot \| : V \rightarrow [0, \infty[$ definida como

$$\forall v \in V : \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad (\text{A.2})$$

satisface la definición de norma. A tal función se le llama la **norma inducida por el producto punto**.

Provistos de una noción de norma, siempre se puede definir la **distancia** entre dos elementos del espacio $x, y \in V$ como

$$d(x, y) := \|x - y\|; \quad (\text{A.3})$$

dotamos así a V de estructura de **espacio métrico**. ¹²

Teniendo una estructura de espacio métrico en el espacio se define naturalmente una base para una **topología** en este espacio como sigue;

$$\tau := \{B_\epsilon(x) : x \in V, \epsilon > 0\}, \quad (\text{A.4})$$

donde

$$B_\epsilon(x) := \{y \in V : d(x, y) < \epsilon\}.$$

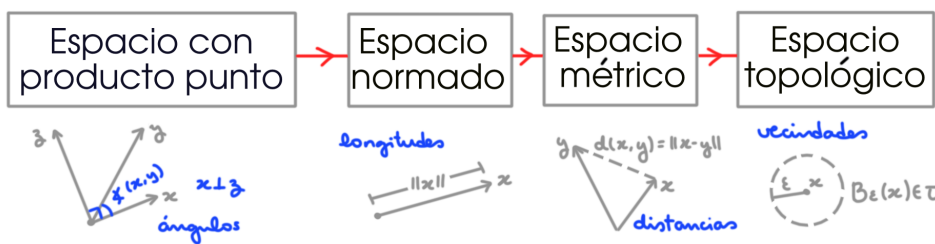


Figure A.1: El definir un producto punto en un espacio vectorial permite considerar en este estructuras de espacio normado, métrico y topológico. Se tienen pues definiciones matemáticas de conceptos como “ángulo”, “longitud”, “distancia” y “vecindad”.

En general, si X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$ es una función de distancia definida en él, entonces toda **sucesión de Cauchy** $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ del espacio (es decir, toda sucesión tal que, para todo $\epsilon > 0$ sea siempre posible encontrar

¹⁰ Por eso tiene sentido comparar a $\langle x, x \rangle$ con cero en el tercer punto de la definición (no se puede definir una relación de orden en \mathbb{C} , c.f. [JEM99] p.6).

¹¹ Puede consultar la definición de norma en [Car00], p.40

¹² Consulte la definición de espacio métrico en [Car00], p.37.

un natural N tal que, para cualesquiera $m, n > N$ se cumpla que $|x_m - x_n| < \epsilon$ trivialmente converge a un punto de X ; si, recíprocamente, toda sucesión de Cauchy es convergente, se dice que el espacio métrico (X, d) es **completo**.

Definición A.2.3

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un F -espacio vectorial con producto punto. Sea $\|\cdot\|$ la norma definida como en (A.2) y d la distancia definida a partir de esta como en (A.3). Si el espacio métrico (V, d) es completo, entonces decimos que $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un **espacio de Hilbert**.

Ejemplo 15. Sea $n \geq 1$.

En el \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^n se tiene definido un producto punto canónico como sigue:

$$\forall x = (x_m)_{0 \leq m \leq n-1}, y = (y_m)_{0 \leq m \leq n-1} \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} x_m y_m. \quad (\text{A.5})$$

En el \mathbb{C} -espacio vectorial \mathbb{C}^n el producto canónico se define como sigue:

$$\forall x = (x_m)_{0 \leq m \leq n-1}, y = (y_m)_{0 \leq m \leq n-1} \in \mathbb{C}^n : \langle x, y \rangle = \sum_{m=0}^{n-1} x_m \overline{y_m}. \quad (\text{A.6})$$

Puesto que ambos espacios son finito dimensionales (de hecho, de dimensión n), según [Mse] son espacios de Hilbert. \diamond

A.3 Hiperplanos de espacios con producto punto de dimensión finita

En general, si V es cualquier F -espacio vectorial (con F un campo cualquiera) y W es un subespacio de V cuya dimensión difiere de la del espacio ambiente V por uno, W se denomina un “hiperplano” de V .

Como a nosotros sólo nos interesa el escenario en el que V es finito dimensional y en él se ha definido un producto punto, damos la definición para este caso particular y algunas de sus consecuencias a continuación.

Definición A.3.1

Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial, con $\dim(V) = n < \infty$ y con un producto punto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido en él¹. A todo subespacio W de V con $\dim(W) = n - 1$ le llamaremos un **hiperplano de V** .

Si W es un hiperplano de V , puesto que $V = W + W^\perp$ (c.f. [Fri02], p.355, ejercicio 13), W^\perp tiene dimensión uno; fijando pues un vector u de W^\perp , tenemos que $W^\perp = \text{span}\{u\}$. En base a este podemos definir (gracias a la linealidad del producto punto) al siguiente funcional¹³:

$$\begin{aligned} h_u : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle x, u \rangle. \end{aligned}$$

Observe que

¹³ Por “funcional” entendemos toda transformación lineal de un F -espacio vectorial V a F (c.f. [Kre91]).

- $h_u(x) > 0$ si y sólo si $x = au$ para algún $a > 0$,
- $h_u(x) = 0$ si y sólo si $x \in W$,
- $h_u(x) < 0$ si y sólo si $x = au$ para algún $a < 0$.

Así, en base al hiperplano W , via el funcional h_u podemos dividir al espacio ambiente V en tres subconjuntos ajenos dos a dos, a saber,

$$R_I = \{x \in V : h_u(x) > 0\}, \quad R_{II} = W, \quad R_{III} = \{x \in V : h_u(x) < 0\}, \quad (\text{A.7})$$

siendo el funcional h_u el criterio usado para determinar la pertenencia de un $x \in V$ a alguna de estas regiones.

Es fácil comprobar que, si se escoge otro vector $\tilde{x} \in W^\perp$, las regiones análogas a las (A.7) obtenidas ahora con el funcional $h_{\tilde{x}}$ coinciden con las dadas en (A.7) (aunque, obviamente, pueden diferir en el orden en que estas se escriban), pues todos los elementos de W^\perp son múltiplos escalares uno del otro. En este sentido decimos que **todo hiperplano divide en tres regiones ajenas al espacio ambiente**.

A.4 El teorema de la proyección ortogonal

En general, si V es un espacio métrico y W es un subconjunto de este, puede definirse la distancia de un punto $x \in V$ a W como el ínfimo del conjunto de distancias entre x y puntos de W :

$$d(x, W) = \inf\{d(x, y) : y \in W\}.$$

Tal ínfimo existe por estar el conjunto descrito acotado inferiormente, por ejemplo, por el cero. El siguiente teorema nos dice que, en el contexto de espacios de Hilbert, si W es un subespacio de V que además es cerrado ¹⁴, tal ínfimo se alcanza, es decir, existe un punto (además, único) \hat{x} de W que minimiza la distancia a x .

Teorema A.4.1

(de la **proyección ortogonal** [Nim]): Sean V un espacio de Hilbert, W un subespacio cerrado de V . Para todo $x \in V$ existe un único $\hat{x} \in W$ tal que

$$\|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in W} \|x - y\|;$$

además, \hat{x} es el único elemento de W tal que $x - \hat{x} \in W^\perp$.

En este trabajo, el espacio con producto punto particular que nos concierne es \mathbb{R}^n con el producto punto usual (definido como en (A.5)); por ser este un espacio finito-dimensional, cualquier subespacio de este es cerrado (c.f. teorema 2.4-3 de [Kre91]), luego, el teorema de la proyección siempre aplica.

En general, si W es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert V , gracias a la unicidad establecida en el teorema A.4.1, podemos definir la función **proyección a W** como sigue:

$$\begin{aligned} \Pi_W : V &\longrightarrow W \\ x &\longmapsto \hat{x} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde \hat{x} es el único vector del que se habla en el teorema A.4.1.

¹⁴ Cuidado aquí: hay dos nociones distintas de cerradura involucradas. Como el espacio métrico V es un espacio vectorial normado, con “subespacio” nos referimos a un subespacio vectorial de V , no a un mero subconjunto de este; es decir, requerimos que W sea cerrado bajo las operaciones de espacio vectorial. Se pide además que W (pensado como subconjunto del espacio métrico V) sea cerrado en el sentido topológico (c.f. [Mun00] p.93).

Puede pensarse a esta como la función que a cada elemento x del espacio le asocia “su representante” del espacio W más cercano. Otra consecuencia de la unicidad establecida en el teorema A.4.1 es la linealidad de la función Π_W .

Corolario A.4.2

Sean V es un espacio de Hilbert, W un subespacio cerrado de V cuyo complemento ortogonal también es cerrado en V . Entonces,

- Para todo $x \in V$, $x = \Pi_W(x) + \Pi_{W^\perp}(x)$.
- $\Pi_W : V \rightarrow W$ es un operador autoadjunto.

Demostración. Sea $x \in V$ cualquiera; según el teorema de la proyección A.4.1,

$$x - \Pi_W(x) \in W^\perp; \quad (\text{A.9})$$

además,

$$x - (x - \Pi_W(x)) = \Pi_W(x) \in W \subseteq (W^\perp)^\perp; \quad (\text{A.10})$$

puesto que, según el teorema de la proyección, $\Pi_{W^\perp}(x)$ se caracteriza por ser el único elemento de W^\perp tal que $x - \Pi_{W^\perp}(x) \in (W^\perp)^\perp$, concluimos por (A.9) y (A.10) la igualdad

$$x - \Pi_W(x) = \Pi_{W^\perp}(x).$$

Esto demuestra el primer punto del corolario. Para demostrar el segundo, o sea, que para cualesquiera $x, y \in V$ se tiene que

$$\langle x, \Pi_W(y) \rangle = \langle \Pi_W(x), y \rangle,$$

sólo observe que, usando el primer punto ya demostrado, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle x, \Pi_W(y) \rangle &= \langle \Pi_W(x) + \Pi_{W^\perp}(x), \Pi_W(y) \rangle \\ &= \langle \Pi_W(x), \Pi_W(y) \rangle + \langle \Pi_{W^\perp}(x), \Pi_W(y) \rangle \\ &= \langle \Pi_W(x), \Pi_W(y) \rangle, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da porque $\Pi_W(y) \in W$ y $\Pi_{W^\perp}(x) \in W^\perp$ (luego, son vectores mutuamente perpendiculares), y, análogamente,

$$\langle \Pi_W(x), y \rangle = \langle \Pi_W(x), \Pi_W(y) \rangle.$$

□

Nota A.4.3

De hecho, por la continuidad del producto punto, podemos quitar en la formulación del corolario A.4.2 la hipótesis de que W^\perp sea cerrado, pues esto será consecuencia de que W lo sea; si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en W^\perp convergente a algún $a \in V$, entonces, para todo $w \in W$, $\langle a, w \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, w \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n, w \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$, luego, $a \in W^\perp$.

Proposición A.4.4

(Dando explícitamente a la proyección de un vector a un subespacio cerrado respecto a una BON de este último) Sean V un espacio de

Hilbert, W un subespacio cerrado de V y de dimensión finita. Si $\mathcal{B} = \{e_k : 0 \leq k \leq n\}$ es una BON de W , entonces, para todo $x \in V$,

$$\Pi_W(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, e_k \rangle e_k,$$

y

$$\|\Pi_W(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Una de las desigualdades más importantes con las que se cuenta en un espacio con producto punto es la de Cauchy-Schwarz. Es un resultado clásico, y su demostración puede encontrarse en casi cualquier libro de análisis, en particular, en [Lan97], p. 292.

Teorema A.4.5

(**Desigualdad de Cauchy-Schwarz**) Sea $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sea V un F -espacio vectorial con producto punto $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$$\forall x, y \in V : \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad (\text{A.11})$$

siendo $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto punto.

A.5 El teorema de Gram-Schmidt

Dado un espacio de Hilbert V y W un subespacio de dimensión finita de V , en ocasiones nos interesará contar no sólo con una base de Hamel W , sino con una base ortonormal de este (recuerde que, en el caso finito dimensional, toda BON es una base Hamel).

El siguiente resultado nos permite lograr justamente eso; la esencia del teorema de Gram-Schmidt es el reemplazar una base $S = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ de un subespacio $W := \text{span}(S)$ de dimensión finita de V por una base ortogonal S' para este, que fácilmente puede normalizarse multiplicando a cada elemento de S' por el recíproco de su norma. Al proceso descrito a continuación lo llamaremos el **proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt**, y lo abreviaremos como “G-S”.

Teorema A.5.1

(**de Gram-Schmidt**, [Fri02] p.344): Sean V un espacio vectorial con producto punto, $S = \{v_k : 0 \leq k \leq n-1\}$ un subconjunto linealmente independiente de V . Sean los vectores

$$\begin{aligned} \xi_0 &:= v_0, \\ \xi_k &:= v_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle v_k, \xi_j \rangle}{\langle \xi_j, \xi_j \rangle} \xi_j, \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

El subconjunto $S' := \{\xi_k : 0 \leq k \leq n-1\}$ de V es ortogonal y genera el mismo espacio que S .

La ventaja de la formulación del teorema de Gram-Schmidt dada en A.5.1 es que esta da explícitamente la forma de calcular a los elementos de la base ortogonal para el subespacio finito-dimensional, pero, para nuestros fines, una formulación que involucre proyecciones ortogonales sobre espacios será preferible. De este modo la geometría que hay detrás del proceso puede vislumbrarse mejor.

Proposición A.5.2

(versión del teorema de Gram-Schmidt en términos de proyecciones)

Sean V un espacio vectorial con producto punto,

$$S = \{v_k : 0 \leq k \leq n-1\}$$

un subconjunto linealmente independiente de V y

$$S' = \{\xi_k : 0 \leq k \leq n-1\}$$

el subconjunto ortogonal que resulta de aplicar el proceso de Gram-Schmidt A.5.1 a S .

Si para cada $0 \leq k \leq n-1$ se define al subespacio

$$W_k = \text{span}(v_0, \dots, v_k)$$

de V , entonces, para toda $1 \leq k \leq n-1$ se tiene que

$$\xi_k = v_k - \Pi_{W_{k-1}}(v_k).$$

Demostración.

Sea $1 \leq k \leq n-1$. Según el teorema de Gram-Schmidt (A.5.1),

$$W_{k-1} = \text{span}(\xi_0, \dots, \xi_{k-1}). \quad (\text{A.12})$$

Si mostramos que

- el vector $v_k - \xi_k$ es elemento del espacio W_{k-1} , y que
- $\xi_k = v_k - (v_k - \xi_k)$ es elemento de W_{k-1}^\perp ,

por la unicidad establecida en el teorema de la proyección ortogonal A.4.1 podremos concluir la igualdad deseada.

Lo primero es claro, pues, según las fórmulas dadas en el teorema A.5.1 y la ecuación (A.12),

$$v_k - \xi_k = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{v_k \cdot \xi_j}{\xi_j \cdot \xi_j} \right) \xi_j \in W_{k-1}.$$

Lo segundo se sigue de observar que ξ_k es ortogonal a los vectores ξ_0, \dots, ξ_{k-1} ; como estos conforman una base para W_{k-1} (c.f. (A.12)), concluimos que $\xi_k \in W_{k-1}^\perp$.

□

Nota A.5.3

Algunos autores prefieren realizar, como parte del algoritmo de Gram-Schmidt

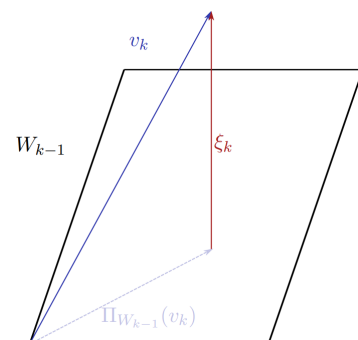


Figure A.2: Ilustrando el proceso de Gram-Schmidt formulado en términos de proyecciones.

descrito antes, un paso de normalización del conjunto ortogonal que se obtiene, esto para obtener BONS del espacio generado por el conjunto linealmente independiente inicial. Nosotros preferimos usar la versión de Gram-Schmidt que sólo involucra la ortogonalización, y en la teoría siempre realizamos el paso final de normalización aparte.

Comentemos una consecuencia sencilla del teorema de Gram-Schmidt.

Corolario A.5.4

Todo espacio de Hilbert finito dimensional tiene bases ortonormales.

Demostración. Sólo observe que, si el espacio de Hilbert V es finito dimensional, uno puede aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para obtener, a partir de una base de Hamel de V , una base ortonormal. \square

Así, a pesar de que, como comentamos en ??, en general uno no puede asegurar que un espacio de Hilbert tenga bases ortonormales, en el caso finito dimensional. Recuerde las ventajas de estos sobre las bases de Hamel discutidas en la nota 1.1.2.

A.6 El concepto de ángulo en un espacio de Hilbert

A.6.1 Ángulo entre elementos de un espacio con producto punto

Es gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz (A.4.5) que es posible introducir una de las nociones más valiosas con las que se cuenta en un espacio vectorial con producto punto, a saber, la de **ángulo** entre dos vectores.

Si v y w son dos elementos no cero de V , entonces, según el teorema A.4.5,

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1,$$

luego, puesto que la función coseno es una biyección del intervalo $[0, \pi]$ al intervalo $[-1, 1]$, tenemos que existe un único elemento $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|};$$

a tal número θ se le denomina el **ángulo formado por los vectores v y w** , y lo denotamos por $\angle(v, w)$

Dejamos indefinido el ángulo entre el vector cero y otro vector del espacio.

Con esta definición de ángulo entre vectores, podemos trasladar la noción geométrica de ortogonalidad (i.e. de formar un ángulo recto) al contexto de espacios con producto punto.

Definición A.6.1

Sea V un F -espacio vectorial con producto punto. Dos elementos v y w del espacio se dirán **ortogonales** si su producto punto es cero.

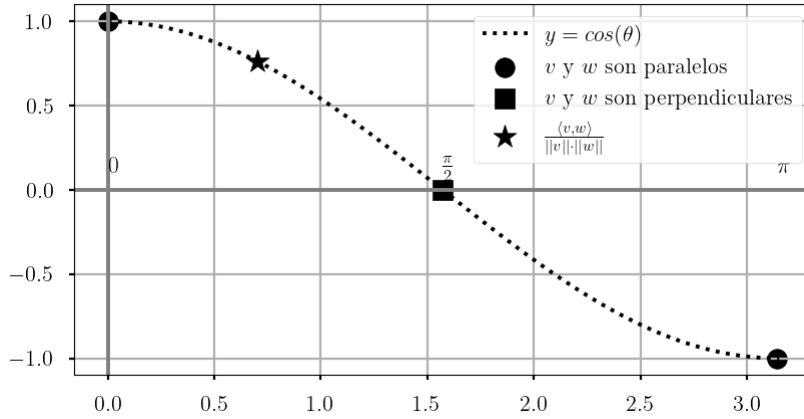


Figure A.3: Si θ es el ángulo entre v y w , los casos extremos en los que $\theta \in \{0, \pi\}$ son aquellos en los que v y w son múltiplos escalares uno del otro, mientras que, si $\cos(\theta) = 0$, o sea, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces v y w son perpendiculares.

Terminamos esta sección con una sencilla observación, que es consecuencia de la linealidad del producto punto y de la norma.

Observación A.6.2

(El ángulo entre dos vectores no se ve afectado por multiplicación por un mismo escalar) Sean V un espacio de Hilbert, $u, v \in V$ no cero. Si $a \in F$ es un escalar no cero, entonces $\angle(v, w) = \angle(a \cdot v, a \cdot w)$

A.6.2 Definición de ángulo entre un punto y un subespacio cerrado de un espacio euclideo

Ya vimos en A.6.1 cómo definir el ángulo entre dos elementos de un espacio de Hilbert V .

Si además W es un subespacio cerrado de V (cosa que siempre ocurre en caso que V sea finito dimensional, c.f. teorema 2.4-3 de [Kre91]), entonces también es posible definir el ángulo entre un punto $x \in V$ del espacio y W .

Definición A.6.3

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto punto. Sean $W \leq V$ un subespacio cerrado de V y $x \in V$. Definimos el **ángulo entre x y W** como el ángulo que forma x con su proyección a W , es decir,

$$\angle(x, W) := \angle(x, \Pi_W(x)).$$

Una definición alternativa del ángulo entre un punto y un subespacio, así como una caracterización sencilla del coseno de este, se dan a continuación.

Proposición A.6.4

Si V , W y x son como en la definición A.6.3, entonces

- $\angle(x, W) = \min\{\angle(x, w) : w \in W\}$, y
- para todo $x \neq 0$,

$$\cos(\angle(x, W)) = \frac{\|\Pi_W(x)\|}{\|x\|}. \quad (\text{A.13})$$

Demostración.

- Sea w un elemento cualquiera de W . Puesto que el ángulo entre dos vectores es preservado bajo multiplicación por escalares (c.f. observación A.6.2), sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\|w\| = \|\Pi_W(x)\|. \quad (\text{A.14})$$

De la definición del vector $\Pi_W(x)$ se sigue que

$$\|x - \Pi_W(x)\|^2 \leq \|x - w\|^2;$$

expresando ambos lados de la desigualdad como un producto punto (c.f. (A.2)) y aplicando la bilinealidad del producto punto, llegamos a que

$$\langle x, x \rangle - 2\langle x, \Pi_W(x) \rangle + \langle \Pi_W(x), \Pi_W(x) \rangle \leq \langle x, x \rangle - 2\langle x, w \rangle + \langle w, w \rangle;$$

usando (A.14), podemos simplificar esta última desigualdad para llegar a

$$\langle x, w \rangle \leq \langle x, \Pi_W(x) \rangle,$$

de donde se sigue, usando nuevamente (A.14), que

$$\cos(\angle(x, w)) = \frac{\langle x, w \rangle}{\|x\| \cdot \|w\|} \leq \frac{\langle x, \Pi_W(x) \rangle}{\|x\| \cdot \|\Pi_W(x)\|} = \cos(\angle(x, \Pi_W(x)));$$

del que la función coseno sea decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ se concluye de esta última desigualdad que $\angle(x, \Pi_W(x)) \leq \angle(x, w)$.

- Según el corolario A.4.2, x puede expresarse como la suma entre su proyección a W y su proyección a W^\perp , luego, según la definición A.6.3 y la linealidad del producto punto, concluimos que

$$\begin{aligned} \cos(\angle(x, W)) &= \cos(\angle(x, \Pi_W(x))) \\ &= \frac{\langle x, \Pi_W(x) \rangle}{\|x\| \cdot \|\Pi_W(x)\|} \\ &= \frac{\langle \Pi_W(x) + \Pi_{W^\perp}(x), \Pi_W(x) \rangle}{\|x\| \cdot \|\Pi_W(x)\|} \\ &= \frac{\langle \Pi_W(x), \Pi_W(x) \rangle}{\|x\| \cdot \|\Pi_W(x)\|} \\ &= \frac{\|\Pi_W(x)\|^2}{\|x\| \cdot \|\Pi_W(x)\|} \\ &= \frac{\|\Pi_W(x)\|}{\|x\|}. \end{aligned}$$

□

Nota A.6.5

Observe que, según el segundo punto de la proposición A.6.4, el coseno entre un vector x y un subespacio cerrado W es siempre no negativo; esto nos permite acotar el rango en el que se encuentra el ángulo (que, por definición, es $[0, \pi]$)

y afirmar que $\angle(x, W) \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Proposición A.6.6

Sean V un espacio con producto punto, $W \leq V$ un subespacio cerrado. Para todo $x \in V$, se tiene que

$$\cos(\angle(x, W)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in W^\perp, \\ 1 & \text{si } x \in W. \end{cases}$$

Demostración.

Observe que $x \in W$ si y sólo si x coincide con su proyección a W , hecho que equivale a que el ángulo entre x y $\Pi_W(x)$ sea cero (recuerde que este ángulo se encuentra entre 0 y $\pi/2$), o sea, a que $\cos(\angle(x, W))$ sea uno.

El que x sea elemento de W^\perp implique que $\cos(\angle(x, W))$ sea cero es evidente, pues x será ortogonal a todo elemento de W , en particular, a su proyección a este espacio. Para terminar, mostremos el recíproco. Según la proposición A.6.4,

$$\forall y \in W : \frac{\pi}{2} = \angle(x, W) \leq \angle(x, y), \quad (\text{A.15})$$

luego,

$$\forall y \in W : \cos(\angle(x, y)) \leq \cos(\angle(x, W)) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Supongamos que existe $y \in W$ para el que se tenga que $\angle(x, y) > \frac{\pi}{2}$. Como W es un subespacio de V , $-y \in W$, y además

$$\cos(\angle(x, -y)) = \frac{\langle x, -y \rangle}{\|x\| \cdot \|-y\|} = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = -\cos(\angle(x, y)) \geq 0;$$

esto contradice (A.16).

□

A.6.3 Similitud coseno

Sea V un espacio de Hilbert. Sean $W \subseteq V$ un subespacio cerrado de V y x un elemento cualquiera de V . Hay dos formas “naturales” de intentar medir la cercanía de x a W :

- a) **Usando la distancia euclídea de x a W** , es decir, tomando la norma del vector $x - \Pi_W(x)$ como una medida de qué tanto pertenece x a W .
- b) **Usando el ángulo que x forma con W** : como ya vimos en la sección A.6.2, el ángulo $\angle(x, W) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ entre x y W está definido como el ángulo entre x y su proyección $\Pi_W(x)$ a W , luego,
 - entre más cercano a cero sea $\angle(x, W)$, x se aleja más del plano W , pues es casi perpendicular al elemento de W más cercano a x , y
 - entre más cercano a uno sea $\angle(x, W)$, más se acerca x a ser paralelo a su representante en W , luego, más se acerca x a pertenecer a W .

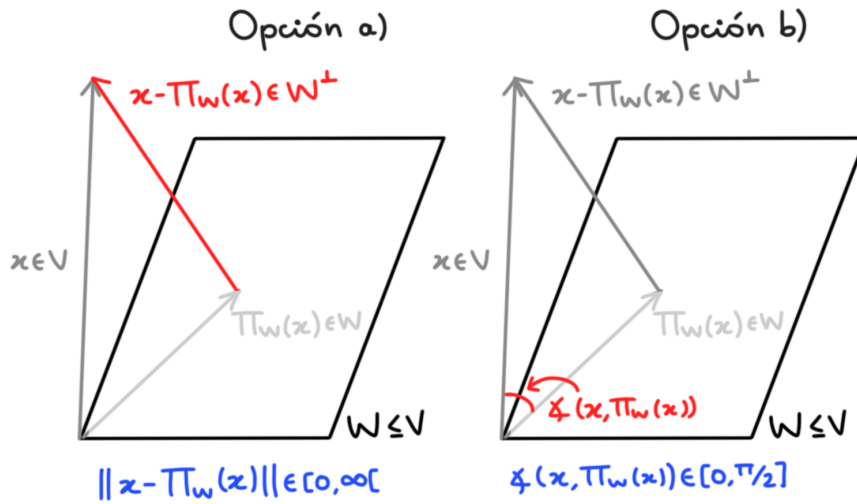


Figure A.4: Esquema de dos formas en las que uno puede intentar medir la proximidad de un elemento $x \in V$ al subespacio cerrado W .

Este segundo enfoque es conocido como “**cosine similarity**” en inglés (c.f. [Cos]). Nosotros nos referiremos a este como usar la “**distancia coseno**” de un $x \in V$ a un subespacio $W \leq V$. Una ventaja -que será decisiva para nosotros- del segundo método sobre el primero se expone en el siguiente resultado.

Proposición A.6.7

Sean V un espacio euclideo, $W \subseteq V$ cerrado, $x \in V$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Si $|a| \neq 1$, la distancia euclídea de $a \cdot x$ a W es distinta a la de x a W , mientras que los ángulos que forman $a \cdot x$ y x con W coinciden.

Demostración. En efecto,

$$\|a \cdot x - \Pi_W(a \cdot x)\| = |a| \cdot \|x - \Pi_W(x)\| \neq \|x - \Pi_W(x)\|,$$

mientras que

$$\begin{aligned} \angle(a \cdot x, W) &:= \angle(a \cdot x, \Pi_W(a \cdot x)) \\ &= \frac{\langle a \cdot x, \Pi_W(a \cdot x) \rangle}{\|a \cdot x\| \cdot \|\Pi_W(a \cdot x)\|} \\ &= \frac{a^2 \langle x, \Pi_W(x) \rangle}{a^2 \|x\| \cdot \|\Pi_W(x)\|} \\ &= \angle(x, W). \end{aligned}$$

□

Así el criterio $b)$ no se ve afectado por multiplicación escalar, mientras que el $a)$ sí.

□

Appendix B

Notaciones y abreviaciones

Lista de notaciones empleadas

$x = (x_m)_{m=0}^{n-1}$	Vector de \mathbb{R}^n con sus entradas especificadas
$B_\epsilon(x)$	Bola de radio ϵ y centro x .
$:=$	Igualdad cierta por definición
$\equiv \pmod{n}$	Congruencia módulo n
//	Parte entera de una división
%	Módulo
\mathbb{N}	Conjunto de los enteros positivos
$\overline{\mathbb{N}}$	Conjunto de los enteros no negativos
\mathbb{Z}	Conjunto de los números enteros
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
\mathbb{R}^+	Conjunto de los números reales positivos
$C[a, b]$	Conjunto de funciones continuas en $[a, b]$
\mathbb{R}_0^+	Conjunto de los números reales no negativos
$a\mathbb{Z}$	Conjunto $\{az : x \in \mathbb{Z}\}$.
$\text{span}(W)$	Subespacio generado por W
$\mathbb{R}[t]$	Anillo de polinomios con coeficientes reales
$\mathbb{C}[t]$	Anillo de polinomios con coeficientes complejos
$\partial(f)$	Grado de un polinomio f
$K^{(m)}$	Fading factorial, c.f. 4.2.3
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto punto
$\ \cdot\ $	Norma
Π_W	Proyección sobre el subespacio cerrado W
B^\perp	Complemento ortogonal de un subconjunto B de un espacio con producto punto.
\leq	Relación “ser subespacio de”
$\lceil \cdot \rceil$	Función techo
\sphericalangle	Ángulo
$L^2[a, b]$	c.f. wolfram

Abreviaciones

PDL	Polinomio discreto de Legendre
G-S	Gram-Schmidt
C-S	Cauchy-Schwarz
BON	Base ortonormal
DLOP	Abreviación (adoptada de [NS74]) de “polinomio ortogonal discreto de Legendre”
sii	si y sólo si
li.	linealmente independiente
RMC	recta de mínimos cuadrados

Bibliography

- [Abu93] Maurice F. Aburdene. “On the computation of discrete Legendre polynomial coefficients”. **in** *Multidimensional systems and signal processing*: (1993), **pages** 181–186.
- [Abu96] John E. Dorband Aburdene Maurice F. “Parallel computation of discrete Legendre transforms”. **in** *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing Conference Proceedings*: 6 (1996).
- [AN91] V.B. Uvarov A.F. Nikiforov S.K. Suslov. *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*. 1st edition. Springer Series in Computational Physics. Springer, 1991.
- [bn] Discrete function bases **and** convolutional neural networks. “Stöckel, Andreas”. **in** *arXiv preprint arXiv:2103.05609 (2021)*: ().
- [Car00] N. L. Carothers. *Real analysis*. 1st edition. Cambridge University Press, 2000.
- [Col97] Antonio Albiol Colomer Colomer Alberto Albiol. “Adaptive ECG data compression using discrete legendre transform”. **in** *Digital Signal Processing*: (1997), **pages** 222–228.
- [Cos] *Cosine similarity*. https://en.wikipedia.org/wiki/Cosine_similarity. Accessed: 2023-04-11.
- [DPK22] Thomas Taimre Radislav Vaisman Dirk P. Kroese Zdravko I. Botev. *Data science and machine learning: mathematical and statistical methods*. 2022.
- [Dri97] Dennis M. Healy Jr Daniel N. Rockmore. Driscoll James R. “Fast discrete polynomial transforms with applications to data analysis for distance transitive graphs”. **in** *SIAM Journal on Computing*: (1997), **pages** 1066–1099.
- [Fft] *Discrete Fourier Transform, SciPy module*. <https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.fft.html>. Accessed: 2023-05-09.
- [Forne] George E. Forsythe. “Generation and use of orthogonal polynomials for data-fitting with a digital computer”. **in** *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*: 5.2 (June 1957), **pages** 74–88.
- [Fri02] Stephen H. Friedberg. *Linear Algebra*. 4th edition. Pearson, 2002.
- [Fur22] et al. Furlong P. Michael. “Learned legendre predictor. Learning with compressed representaitons for efficient online multistep prediction”. **in** *Technical Report*: (2022).
- [God66] Roger Godement. *Cours d’algèbre*. Hermann éditeurs, 1966.

- [Him70] David M. Himmelblau. *Process Analysis by Statistical Methods*. John Wiley and Sons, 1970.
- [Int] *Polynomial interpolation*. <https://www.unioviado.es/compnum/labs/PYTHON/Interpolation.html>. Accessed: 2023-04-25.
- [Jac85] Nathan Jacobson. *Basic Algebra I*. 2nd edition. W H Freeman and Company, 1985.
- [JEM99] Michael J. Hoffman Jerrold E. Marsden. *Basic complex analysis*. 3rd edition. W H Freeman and Company, 1999.
- [KK96] Guy A. Dumont Kristinn Kristinsson. “Cross-directional Control on Paper Machines using Gram Polynomials”. *in Automatica*: 32.4 (1996), pages 533–548.
- [Kre91] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley and Sons, 1991.
- [Kur68] A. G. Kurosch. *Curso de álgebra superior*. edition. Editorial MIR, 1968.
- [Lan97] Serge Lang. *Undergraduate Analysis*. 2nd edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 1997.
- [Leg] *Legendre polynomials*. https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials. Accessed: 2023-04-11.
- [Mse] *Proof that every finite dimensional normed vector space is complete*. <https://math.stackexchange.com/questions/168275/proof-that-every-finite-dimensional-normed-vector-space-is-complete>. Accessed: 2023-04-11.
- [Muk04] Ramakrishnan Mukundan. “Some computational aspects of discrete orthonormal moments”. *in IEEE Transactions on image processing*: (2004), pages 1055–1059.
- [Mun00] James R. Munkres. *Topology*. 2nd edition. Pearson College Div, 2000.
- [Nik91] S.K. Suslov V.B. Uvarov Nikiforov A.F. “Classical orthogonal polynomials of a discrete variable”. *in Springer Berlin Heidelberg*: (1991).
- [Nim] Kristoffer Nimark. “The Projection Theorem”. <http://www.kris-nimark.net/pdf/ProjectionTheorem.pdf>.
- [NS74] Charles P Neuman and Dave I Schonbach. “Discrete (Legendre) orthogonal polynomials—a survey”. *in International Journal for Numerical Methods in Engineering*: 8.4 (1974), pages 743–770.
- [Rot10] Joseph J. Rotman. *Advanced Modern Algebra*. 2nd edition. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [Roy93] Ranjan Roy. “The work of Chebyshev on orthogonal polynomials”. *in Topics In Polynomials Of One And Several Variables And Their Applications: Volume Dedicated to the Memory of PL Chebyshev (1821–1894)*: (1993), pages 495–512.
- [RR78] A. Ralston and P. Rabinowitz. *A First Course in Numerical Analysis*. McGraw-Hill New York, 1978.
- [Spi08] Michael Spivak. *Calculus*. Publish or Perish, 2008.
- [Ste] Elias M. Stein. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton Lectures in Analysis.

- [Sun01] D. Sundararajan. *The Discrete Fourier Transform: Theory, Algorithms and Applications*. World Scientific Publishing Company, 2001.
- [Tch58] P.L. Tchebychef. “Sur une nouvelle série”. *in Oeuvres, T.I. (Chelsea, New York, 1961)*: (1858), pages 381–384.
- [Tdf] *Discrete Fourier Transform*. https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform. Accessed: 2023-05-09.
- [THC09] Ronald L. Rivest Clifford Stein Thomas H. Cormen Charles E. Leiserson. *Introduction to algorithms*. Third edition. The MIT Press, 2009.