



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Dimensiones Temporales Extra: Implicaciones Clásicas y  
Cuánticas

Tesis presentada al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Maestra en Ciencias**

por

Alma Elena Piceno Martínez

asesorada por

Dr. Emerson L. Sadurní Hernández

y

Dr. Alfonso Rosado Sánchez

Puebla Pue.  
Diciembre 2016



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Dimensiones Temporales Extra: Implicaciones Clásicas y  
Cuánticas

Alma Elena Piceno Martínez

asesorada por

Dr. Emerson L. Sadurní Hernández

y

Dr. Alfonso Rosado Sánchez

Puebla Pue.

Diciembre 2016



**Título:** Dimensiones Temporales Extra: Implicaciones Clásicas y Cuánticas

**Estudiante:** ALMA ELENA PICENO MARTÍNEZ

COMITÉ

---

Dr. J. Lorenzo Díaz Cruz  
Presidente

---

Dr. Gerardo Torres del Castillo  
Secretario

---

Dr. Alberto Escalante Hernández  
Vocal

---

Dr. Arturo Fernández Téllez  
Suplente

---

Dr. Emerson L. Sadurní Hernández      Dr. Alfonso Rosado Sánchez  
Asesores



# Resumen

En esta tesis nos ocupamos de las extensiones a dos tiempos de las teorías físicas fundamentales sobre las que se basa nuestro conocimiento actual de la naturaleza. Creemos que es posible incidir en esta área con contribuciones originales, si se incluye un análisis más serio sobre la congruencia de más ejes temporales, a la luz de implicaciones físicas a diversos niveles, inclusive los elementales, buscando determinar las condiciones más generales que permiten un formalismo de dos ejes. De esta manera, estudiamos las implicaciones dinámicas en una teoría clásica con una propuesta de una segunda ley de Newton extendida a dos tiempos. También proponemos extensiones a la mecánica cuántica, primero extendiendo la métrica de una ecuación de onda que cumple un principio de acción extremal, permitiéndonos así tener una probabilidad conservada. Posteriormente, proponiendo un operador de evolución en dos tiempos. Analizamos las teorías resultantes encontrando restricciones importantes a la existencia de un segundo eje temporal. Parte de la investigación presentada en esta tesis se publicó recientemente en el artículo [1].



# Índice general

Resumen	III
Índice general	v
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	2
<b>2. Implicaciones clásicas</b>	<b>5</b>
2.1. Una dimensión espacial . . . . .	5
2.1.1. Análisis de consistencia . . . . .	6
2.1.2. Dinámicas desacopladas . . . . .	8
2.2. Dos coordenadas espaciales . . . . .	9
2.3. Tres coordenadas espaciales . . . . .	13
2.4. Caso general . . . . .	14
<b>3. Implicaciones cuánticas: Ecuaciones de onda</b>	<b>17</b>
3.1. Corrientes de Noether . . . . .	17
3.1.1. Vuelta al caso clásico . . . . .	20
3.2. La ecuación de Klein-Gordon . . . . .	21
3.3. La ecuación de Dirac . . . . .	22
<b>4. Implicaciones cuánticas: Evolución unitaria</b>	<b>25</b>
4.1. Fluctuaciones y restricciones fundamentales . . . . .	26
4.2. El principio de incertidumbre extendido . . . . .	27
<b>5. Teorema de plausibilidad</b>	<b>29</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>35</b>
6.1. Alcances y límites de la teoría . . . . .	36
6.2. Similitudes y diferencias con la teoría relativista de varios cuerpos . . . . .	37
<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>
<b>Apéndice I. Artículo</b>	<b>43</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Tradicionalmente, las extensiones dimensionales del espacio-tiempo se han propuesto únicamente en la parte espacial [2–6]. Esto se hace patente en teorías de la física fundamental que involucran dimensiones escondidas (compactificadas) [7–10] como las de Kaluza-Klein.

Las promesas de extensiones dimensionales incluyen, en el caso puramente espacial, un espectro de masas para las partículas a través de los modos normales de la función de onda en las dimensiones extra. Algunos aspectos fenomenológicos en función de la escala de dichas dimensiones se han explorado extensamente [11–18], incluyendo trabajos por grupos de investigación de esta universidad [19–23]. Sin embargo, una pregunta recurrente en estas investigaciones proviene de una aparente falta de justificación para proceder únicamente sobre el espacio y no sobre el tiempo.

Lo anterior es una buena motivación para estudiar la existencia de más de un eje temporal y, si es posible, descartarla bajo principios físicos. A pesar de ser un tema atractivo y de evidente relevancia en lo referente a física fundamental (modelos de dimensiones extendidas), existe poco o muy poco trabajo hecho en la parte temporal [24–30].

En algunos de los trabajos ya citados, las extensiones temporales se juzgan con formalismos bastante convencionales: típicamente se trata de una simple extensión de la métrica con las firmas correspondientes [26]. En otros trabajos se reconoce que esta forma de proceder no basta [24, 25], pero el aparato matemático con el que se pretenden evitar ciertas dificultades rebasa las teorías de la física conocida, entrando en el dominio de la teoría de cuerdas. A nuestro parecer esta argumentación es demasiado compleja y recurre a formalismos que están relacionados con física plausible pero no comprobada.

Por varios métodos se han encontrado argumentos para la existencia de esta teoría de dos tiempos [24–26], incluyendo sugerencias de que la signatura del espacio tiempo incluye dos dimensiones temporaloides [26]. En [26] también se obtiene un escenario en el que la dimensión temporaloides extra se vuelve parte de un universo compactificado y se tiene efectivamente un solo parámetro de evolución temporal. Por otro camino, en [29] se ha dado una justificación de la existencia de tal formalismo para una teoría singular, usando una generalización del teorema de Noether, en la que se obtiene como resultado que la simetría de norma es generada por una constricción de primera clase.

De manera similar, ciertas teorías que describen sistemas de muchas partículas, en un esfuerzo por enmarcarlas en una teoría invariante de Poincaré, han introducido varias coordenadas temporales, cada una de ellas perteneciente a cada partícula en el sistema, donde la descripción de varios tiempos surge naturalmente. Anteriormente se han obtenido resultados en esta dirección [30, 31].

Por el contrario, en este trabajo se planteará y discutirá el problema a un nivel más sencillo y fundamental, utilizando herramientas de álgebra y análisis conocidas por todo estudiante de posgrado, pero basadas sólidamente en los principios que han dado lugar a la física conocida, descrita por la mecánica cuántica. Nosotros vamos a seguir las hipótesis usuales del modelo estándar, en

donde todas las coordenadas son parte del escenario donde viven los campos.

Se ha analizado las restricciones que surgen en distintas regiones de la teoría, véase la Figura 1.1. Este trabajo se divide en 7 capítulos, teniendo este propósito en mente. Comenzamos con la introducción y una breve motivación en el capítulo 1. En el capítulo 2 obtenemos las ecuaciones clásicas de movimiento para dos tiempos y una variable espacial, partiendo de la definición del momento lineal y generalizando la Segunda ley de Newton, y resolvemos la dinámica para un solo eje espacial. Se generalizó para 2, 3 y  $d$  dimensiones, usando los mismos métodos se encontraron condiciones fuertes de restricción para que la fuerza externa pueda producir evolución en dos parámetros.

En el capítulo 3 extendemos las ecuaciones de onda y generalizamos la ley de conservación de la probabilidad con dos ejes temporales, para bosones (3.2) y fermiones (3.3), respectivamente. También discutimos el caso general de una ecuación de onda proveniente de un principio de acción extremal y la carga de Noether conservada, restringiendo así la posibilidad de una probabilidad conservada. En la última parte de la sección 3.1 obtenemos el teorema de Ehrenfest generalizado. En el capítulo 4 hacemos una extensión a un espacio de Hilbert que evoluciona con dos generadores de traslación temporal. Analizamos la desviación de un solo eje a través de las fluctuaciones cuánticas y un principio de incertidumbre generalizado. Finalmente, en el capítulo 5 condensamos los resultados obtenidos en la forma de un teorema de plausibilidad para extensiones temporales. Concluimos en el capítulo 6.

## 1.1. Motivación

Una pregunta recurrente en teorías multidimensionales es si la signatura de la métrica del espacio tiempo puede contener más de una componente positiva. La teoría de cuerdas y la compactificación de Kaluza-Klein [32] dependen de extensiones dimensionales propuestas en la parte espacial de la métrica de Minkowski. Resulta tentador mirar las consecuencias de estas extensiones al nivel de las llamadas relaciones de dispersión expresadas en forma covariante (la relación energía-momento). La introducción de modos estacionarios en los operadores de masa para las dimensiones extra produce masas efectivas relacionadas a las escalas de compactificación. En la parte temporal estas extensiones entran con el signo opuesto. Tenemos, de la manera usual,

$$\left[ \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_d^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \phi(x_1, x_2, \dots, x_d; t) = \frac{m^2}{c^2} \hbar^2 \phi(x_1, x_2, \dots, x_d; t). \quad (1.1)$$

En varios tiempos ( $\phi(x_1, x_2, \dots, x_d; t_1, \dots, t_s)$ ) esta ecuación se puede extender como sigue,

$$\left\{ \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_d^2 - \frac{1}{c^2} \partial_{t_1}^2 - \dots - \frac{1}{c^2} \partial_{t_s}^2 \right\} \phi = \frac{m^2}{c^2} \hbar^2 \phi. \quad (1.2)$$

Una idea para su solución es expresar

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_d; t_1, \dots, t_s) = \phi(x_1, \dots, x_d; t_1) \chi(t_2, \dots, t_s), \quad (1.3)$$

con  $\chi(t_2, \dots, t_s)$  dependiendo de la topología de los ejes temporales. Si  $(t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{R}^s$

$$\chi(t_2, \dots, t_s) = \exp(i\omega_2 t_2 + \dots + i\omega_s t_s), \quad (1.4)$$

de manera que su contribución podría disminuir la masa de forma efectiva como

$$\frac{\bar{m}^2 c^2}{\hbar^2} \equiv \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{\omega_2^2}{c^2} - \frac{\omega_3^2}{c^2} - \dots, \quad (1.5)$$

lo cual podría introducir aún más parámetros para describir el espectro de masas de una partícula escalar. En este nivel no existe un principio que prohíba esta posibilidad, siempre y cuando las masas totales resultantes sean positivas.

## CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1. MOTIVACIÓN

---

De este modo, responder la vieja pregunta sobre la extensión temporal tendría un efecto importante sobre predicciones establecidas. Sin embargo, nadie ha observado más de dos ejes temporales, y es probable que las restricciones que impone la física, más allá de las matemáticas, prohíban su existencia. Hay que trabajar en ello, ya que según la literatura no hay razón aparente para prohibirlas.

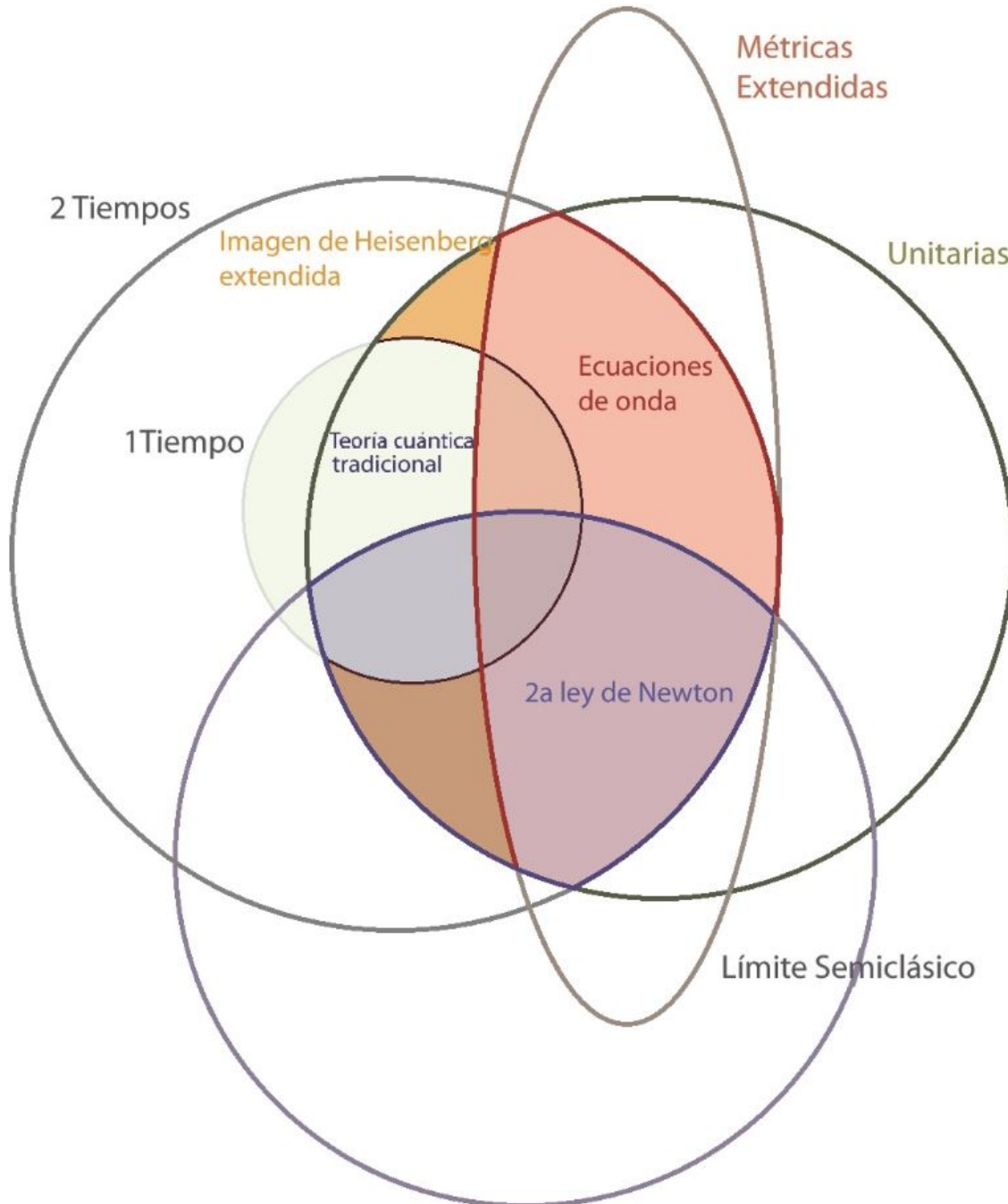


Figura 1.1: Regiones de la teoría explorada. Se estudió la mecánica clásica a dos tiempos partiendo de la segunda ley de Newton (región azul). También se analizó la mecánica cuántica partiendo por un lado de ecuaciones de onda con métrica extendida (región roja), y por otro lado, de una imagen de Heisenberg extendida (región amarilla).

## Capítulo 2

# Implicaciones clásicas: no es simplemente una elección de signatura

En esta sección nos ocupamos de qué es lo que ocurre con la segunda ley de Newton cuando tenemos dos tiempos, en el límite no relativista, y resolvemos la dinámica resultante, para varios casos de dimensionalidad espacial.

Podemos formular una dinámica simétrica en dos tiempos de acuerdo con la segunda ley de Newton. De esta manera encontramos que las extensiones a  $d + 2$  dimensiones son integrables bajo condiciones de suavidad de las funciones involucradas. El resultado principal es que en una dimensión espacial la dinámica ocurre en una única superficie restringida y por lo tanto en un solo tiempo. Hacemos el mismo análisis para más dimensiones espaciales, concluyendo que la generalización propuesta en este capítulo está restringida por la dimensión espacial.

### 2.1. Una dimensión espacial

En este capítulo nos interesa mantener el hecho de que la naturaleza está descrita como un sistema dinámico determinista. De esta manera existe una ecuación diferencial que hace evolucionar los sistemas estudiados. Por lo tanto, partimos de la segunda ley de Newton extendida. En la primera parte de esta sección proponemos una generalización a la segunda ley de Newton para una posición que depende de los dos tiempos, con la que tenemos que la fuerza que determina tal dinámica es un tensor en la parte temporal. Más adelante procedemos a hacer un análisis de consistencia para encontrar las restricciones a la teoría que surgen naturalmente.

En la mecánica clásica con un tiempo la segunda ley de Newton se define a partir del momento lineal. Tenemos que el momento lineal de una partícula con masa constante se escribe como

$$p = m \frac{dx}{dt}, \quad (2.1)$$

y la segunda ley de Newton está dada por

$$\frac{d}{dt}p = F. \quad (2.2)$$

**CAPÍTULO 2. IMPLICACIONES CLÁSICAS**  
2.1. UNA DIMENSIÓN ESPACIAL

---

Si la posición  $x$  depende de dos tiempos,  $x = x(t_1, t_2)$ , necesitamos generalizar el momento lineal, definiendo un momento asociado a cada tiempo mediante dos ecuaciones diferenciales no preferenciales de la forma

$$p_1 = m \frac{\partial x}{\partial t_1}, \quad p_2 = m \frac{\partial x}{\partial t_2}. \quad (2.3)$$

Con el mismo razonamiento proponemos una ecuación diferencial de orden dos en los tiempos no preferencial, que gobierna la dinámica y define una segunda ley de Newton extendida, de la forma

$$F_{ij} = \frac{\partial}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial t_j} x, \quad (2.4)$$

donde consideramos  $m = 1$ . En este caso  $F_{ij}$  es la fuerza especificada, en general

$$F_{ij}(x(t_1, t_2); t_1, t_2) \neq 0, \quad (2.5)$$

y ahora es un tensor de rango 2 en los tiempos

Por simplicidad a partir de ahora trabajaremos con la notación

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Notamos que esta segunda ley está formada por cuatro ecuaciones

$$\Rightarrow \begin{matrix} F_{11} = \partial_1 p_1 & F_{21} = \partial_2 p_1 \\ F_{12} = \partial_1 p_2 & F_{22} = \partial_2 p_2 \end{matrix}; \quad (2.7)$$

y las definiciones de momento lineal

$$p_1 = \partial_1 x, \quad p_2 = \partial_2 x. \quad (2.8)$$

De manera vectorial podemos expresar estas ecuaciones como

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ F_{11} \\ F_{12} \\ p_2 \\ F_{21} \\ F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \begin{pmatrix} x \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ \partial_2 \begin{pmatrix} x \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}; \quad (2.9)$$

que son ecuaciones de orden uno.

### 2.1.1. Análisis de consistencia

Supongamos que el sistema es autónomo<sup>1</sup>, es decir, que tenemos  $F_{ij} = F_{ij}(x(t_1, t_2))$ , sin dependencia explícita de los tiempos; entonces podemos usar la regla de la cadena para obtener

$$\partial_1 \partial_2 \begin{pmatrix} x \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \partial_1 \begin{pmatrix} p_2 \\ F_{21} \\ F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{12} \\ F'_{21} p_1 \\ F'_{22} p_1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

y

$$\partial_2 \partial_1 \begin{pmatrix} x \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \partial_2 \begin{pmatrix} p_1 \\ F_{11} \\ F_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{21} \\ F'_{11} p_2 \\ F'_{12} p_2 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

---

<sup>1</sup>Un sistema autónomo corresponde a la hipótesis de homogeneidad temporal. Introducir dependencia explícita en el estímulo externo  $F$  no ayuda a discriminar las soluciones, ya que la dependencia en dos tiempos entra de manera automática en este caso.

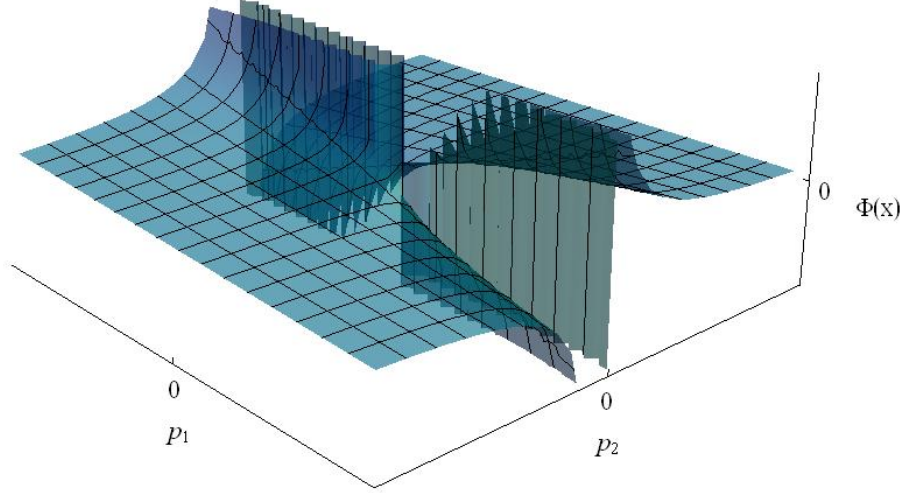


Figura 2.1: Superficie hiperbólica en el espacio  $(\Phi(x), p_1, p_2)$ .

donde escribimos  $F' = \frac{dF}{dx}$ .

Si consideramos  $F$  simétrica, entonces necesariamente  $x$  es una función continuamente diferenciable de orden dos en los tiempos,  $x(t_1, t_2) \in C_2$ . No es fácil concebir una función que no sea de clase  $C_2$  para todo punto, por lo que supondremos la existencia del intervalo abierto  $\Omega \neq \emptyset$  de manera que  $x \in C_2(\Omega)$ , y aquí tengamos la conmutatividad de las derivadas temporales

$$F_{21} = \partial_2 \partial_1 x = \partial_1 \partial_2 x = F_{12}. \quad (2.12)$$

De lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} F'_{11} p_2 &= F'_{21} p_1 \\ F'_{12} p_2 &= F'_{22} p_1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ahora podemos encontrar una ecuación para órbitas que relacionan  $p_1$ ,  $p_2$  y los elementos del tensor  $F$  como funciones de  $x$ . Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior obtenemos

$$\left( \frac{p_1}{p_2} \right)^2 = \frac{\left( \frac{dF_{11}}{dx} \right)}{\left( \frac{dF_{22}}{dx} \right)} = \frac{dF_{11}}{dF_{22}} = \Phi(x), \quad (2.14)$$

esta es la ecuación de una única superficie en el espacio fase extendido  $(x, p_1, p_2)$ , esta superficie se muestra en la Fig. 2.1. Notemos que para cualquier condición inicial tenemos esta misma superficie, de manera que ya no es posible tener foliación del espacio fase. Como toda la dinámica ocurre sobre esta superficie, entonces la dinámica en una dirección está restringida por la dinámica en la otra dirección, por lo que tenemos que  $x$  sólo tiene evolución en una dirección temporal.

También podemos determinar la dirección sobre la que hay evolución mediante la definición del campo

$$\mathcal{F} = \left( -\sqrt{F'_{22}}, \sqrt{F'_{11}} \right), \quad (2.15)$$

con lo que

$$\mathcal{F} \cdot \nabla_{12} x = 0, \quad (2.16)$$

**CAPÍTULO 2. IMPLICACIONES CLÁSICAS**  
2.1. UNA DIMENSIÓN ESPACIAL

---

donde definimos

$$\nabla_{12} = (\partial_1, \partial_2). \quad (2.17)$$

Esto significa que  $x$  evoluciona únicamente en la dirección perpendicular a  $\mathcal{F}$ , y es constante en la dirección paralela. De esta manera tenemos que siempre existe una dirección donde ocurre toda la dinámica determinada por el campo  $\mathcal{F}$ . Tal dirección describe una curva con la dependencia implícita de  $\mathcal{F}$  en los tiempos, y se puede especificar por un único parámetro temporal.

Siguiendo con el análisis podemos encontrar restricciones sobre el campo  $\mathcal{F}$ . Tenemos

$$\frac{F'_{11}}{F'_{21}} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{F'_{12}}{F'_{22}} = \frac{F'_{21}}{F'_{22}}, \quad (2.18)$$

por lo tanto

$$F'_{11}F'_{22} = (F'_{21})^2 \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow F_{21}(x) = \pm \int_0^x \sqrt{F'_{11}F'_{22}} dx. \quad (2.20)$$

Es decir, hemos restringido los elementos no diagonales del tensor de fuerza, así el tensor de fuerza queda como

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & \pm \int_0^x \sqrt{F'_{11}F'_{22}} dx \\ \pm \int_0^x \sqrt{F'_{11}F'_{22}} dx & F_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

De esta manera hemos visto que, de extender la Segunda ley de Newton a dos tiempos mediante la definición de momento lineal, obtenemos que la dinámica ocurre en una sólo superficie del espacio fase dada en la ecuación (2.14), y por lo tanto en una sólo dirección temporal determinada por el campo  $\mathcal{F}$  como aparece en la ecuación (2.16). Además el tensor de fuerza adquiere al menos una restricción:

$$\det \mathbf{F}' = F'_{11}F'_{22} - F'_{12}F'_{21} = 0. \quad (2.22)$$

En esta sección usamos el hecho de que  $x$  es  $C_2$  en los tiempos. Notemos que, aunque renunciemos a  $C_2$  podemos conservar una única ecuación de las que conforman la ecuación (2.13), por ejemplo  $F'_{11}p_2 = F'_{21}p_1$ , pero no la otra, por lo que  $F'_{12}p_2 \neq F'_{22}p_1$ . De aquí podemos obtener

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{F'_{11}}{F'_{21}} = \frac{F'_{11}}{F'_{12}} = \Phi(x), \quad (2.23)$$

que es nuevamente una superficie hiperbólica en el espacio fase extendido, donde ocurre toda la dinámica, por lo que la evolución de  $x$  aún es en una única dirección temporal. Sin embargo, una consecuencia de esto es que ya no se restringe la parte no diagonal del tensor de fuerza.

### 2.1.2. Dinámicas desacopladas

Un caso de interés especial, sobre todo cuando tratamos el límite clásico de las teorías cuánticas extendidas, es cuando se cumple

$$F_{11} = \partial_1 v_1 \quad , \quad F_{22} = \partial_2 v_2 \quad , \quad F_{12} = F_{21} = 0 \quad (2.24)$$

es decir, la dinámica está desacoplada en los dos tiempos.

Habíamos encontrado la condición (2.22), entonces

$$F'_{11} = 0 \quad o \quad F'_{22} = 0. \quad (2.25)$$

A partir de aquí tenemos varias opciones en la forma de  $F$  para cumplir estas ecuaciones. Supongamos  $F_{11} = cte.$  y  $F_{22}$  arbitraria. Teníamos

$$\Phi(x) = \frac{F'_{11}}{F'_{22}} = \left( \frac{\partial_1 x}{\partial_2 x} \right)^2, \quad (2.26)$$

entonces

$$\Phi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_1 x = 0 \quad \forall t_1, \quad (2.27)$$

lo que nos dice que sólo hay evolución en  $t_2$ . El resultado es similar si consideramos  $F_{11}$  arbitraria pero  $F_{22}$  constante, de aquí se sigue directamente que sólo hay evolución en  $t_1$ .

También podemos tener

$$F_{11} = \partial_1^2 x = cte. \quad F_{22} = \partial_2^2 x = cte. \quad (2.28)$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= \langle x \rangle = x_{c1} = g(t_1) + f(t_2) \\ &= \frac{a_{11} t_1^2}{2} + v_1 t_1 + x_{10} + \frac{a_{22} t_2^2}{2} + v_2 t_2 + x_{20} \\ &= \tau_1^2 + \tau_2^2 = T^2, \end{aligned} \quad (2.29)$$

con

$$\tau_1 = \left( t_1 + \frac{v_1}{a_{11}} \right) \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}, \quad \tau_2 = \left( t_2 + \frac{v_2}{a_{22}} \right) \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \quad (2.30)$$

$$T = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}. \quad (2.31)$$

Por lo que la evolución es nuevamente en una única dirección del plano temporal, dada por  $T$ .

Concluimos que en cualquier caso cuando las dinámicas son desacopladas podemos encontrar explícitamente la dirección temporal en la que existe dinámica.

## 2.2. Dos coordenadas espaciales

Extendiendo el análisis anterior encontramos restricciones dinámicas para mayores dimensiones espaciales. El número de restricciones que resulta en los casos de mayor dimensión espacial se puede determinar directamente, reproduciendo el cálculo realizado en una dimensión para obtener las expresiones dimensionalmente extendidas correspondientes.

Comenzamos con el caso de dos coordenadas espaciales. Ahora la posición está dada por dos coordenadas,  $(x, y)$ , y tenemos dos coordenadas temporales  $(t_1, t_2)$  donde hay evolución. Podemos definir naturalmente los momentos para cada coordenada espacial, extendiendo las definiciones anteriores

$$p_j^x = \partial_j x, \quad p_j^y = \partial_j y. \quad (2.32)$$

La extensión de la segunda ley de Newton propuesta ahora tiene la forma

$$F_{ij}^x = \partial_i p_j^x = \partial_i \partial_j x, \quad F_{ij}^y = \partial_i p_j^y. \quad (2.33)$$

Si  $x = x^1, y = x^2$ , podemos reescribirla como

$$F_{jk}^i = \partial_j \partial_k x^i = \partial_j p_k^i. \quad (2.34)$$

**CAPÍTULO 2. IMPLICACIONES CLÁSICAS**  
2.2. DOS COORDENADAS ESPACIALES

---

De manera extendida, tenemos ocho ecuaciones, además de las cuatro que definen los momentos lineales,

$$\begin{pmatrix} p_1^x & p_1^y \\ F_{11}^x & F_{11}^y \\ F_{12}^x & F_{12}^y \\ p_2^x & p_2^y \\ F_{21}^x & F_{21}^y \\ F_{22}^x & F_{22}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \begin{pmatrix} x & y \\ p_1^x & p_1^y \\ p_2^x & p_2^y \end{pmatrix} \\ \partial_2 \begin{pmatrix} x & y \\ p_1^x & p_1^y \\ p_2^x & p_2^y \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Para analizar la posibilidad de que tal tensor de fuerza produzca evolución en los dos tiempos, continuaremos con un análisis de consistencia. Supongamos que no hay dependencia explícita de los tiempos en la fuerza, entonces tenemos

$$\partial_1 \partial_2 \begin{pmatrix} x & y \\ p_1^x & p_1^y \\ p_2^x & p_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{12}^x & F_{12}^y \\ \partial_x F_{21}^x p_1^x + \partial_y F_{21}^x p_1^y & \partial_x F_{21}^y p_1^x + \partial_y F_{21}^y p_1^y \\ \partial_x F_{22}^x p_1^x + \partial_y F_{22}^x p_1^y & \partial_x F_{22}^y p_1^x + \partial_y F_{22}^y p_1^y \end{pmatrix}; \quad (2.36)$$

$$\partial_2 \partial_1 \begin{pmatrix} x & y \\ p_1^x & p_1^y \\ p_2^x & p_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{21}^x & F_{21}^y \\ \partial_x F_{11}^x p_2^x + \partial_y F_{11}^x p_2^y & \partial_x F_{11}^y p_2^x + \partial_y F_{11}^y p_2^y \\ \partial_x F_{12}^x p_2^x + \partial_y F_{12}^x p_2^y & \partial_x F_{12}^y p_2^x + \partial_y F_{12}^y p_2^y \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

usando la regla de la cadena. A partir de ahora usaremos la notación

$$F_{jk,l}^i \equiv \partial_l F_{jk}^i. \quad (2.38)$$

Tenemos cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} F_{21,x}^x p_1^x - F_{11,x}^x p_2^x + F_{21,y}^x p_1^y - F_{11,y}^x p_2^y &= 0 \\ F_{22,x}^x p_1^x - F_{12,x}^x p_2^x + F_{22,y}^x p_1^y - F_{12,y}^x p_2^y &= 0 \\ F_{21,x}^y p_1^x - F_{11,x}^y p_2^x + F_{21,y}^y p_1^y - F_{11,y}^y p_2^y &= 0 \\ F_{22,x}^y p_1^x - F_{12,x}^y p_2^x + F_{22,y}^y p_1^y - F_{12,y}^y p_2^y &= 0 \end{aligned}$$

Encontramos que para tener una solución no trivial, y por tanto evolución, se necesita

$$\begin{vmatrix} F_{21,x}^x & -F_{11,x}^x & F_{21,y}^x & -F_{11,y}^x \\ F_{22,x}^x & -F_{12,x}^x & F_{22,y}^x & -F_{12,y}^x \\ F_{21,x}^y & -F_{11,x}^y & F_{21,y}^y & -F_{11,y}^y \\ F_{22,x}^y & -F_{12,x}^y & F_{22,y}^y & -F_{12,y}^y \end{vmatrix} = 0. \quad (2.39)$$

Además, podemos obtener ecuaciones separadas para  $p_i^x$  y  $p_i^y$ ,

$$\vec{C} \cdot p^x = 0 \quad (2.40)$$

$$\vec{D} \cdot p^y = 0. \quad (2.41)$$

Lo que nos dice que cada coordenada espacial evoluciona en una única dirección del plano temporal, pero estas son en general distintas entre sí.

Con el objetivo de analizar este par de ecuaciones, notemos que sólo nos interesan los numeradores de  $\vec{C}$ , y  $\vec{D}$ , viendo que el denominador de cada uno se puede sacar como una constante. Podemos escribir

$$\vec{C} = \frac{1}{(F_{21,y}^x)^2 (F_{22,y}^x F_{11,y}^x - F_{12,y}^x F_{21,y}^x)} (c_1, c_2) \quad (2.42)$$

$$\vec{D} = \frac{1}{(F_{21,x}^y)^2 (F_{22,x}^y F_{11,x}^y - F_{12,x}^y F_{21,x}^y)} (d_1, d_2) \quad (2.43)$$

**CAPÍTULO 2. IMPLICACIONES CLÁSICAS**  
2.2. DOS COORDENADAS ESPACIALES

---

donde

$$c_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix} \quad (2.44)$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\gamma}_1 & \tilde{\delta}_1 \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\beta}_2 \\ \tilde{\gamma}_2 & \tilde{\delta}_2 \end{vmatrix} \quad (2.45)$$

con

$$\alpha_1 = -\tilde{\alpha}_1 = - \begin{vmatrix} F_{21,x}^x & F_{21,y}^x \\ F_{21,x}^y & F_{21,y}^y \end{vmatrix}, \quad \beta_1 = \beta_2 = \begin{vmatrix} F_{11,y}^x & F_{21,y}^x \\ F_{11,y}^y & F_{21,y}^y \end{vmatrix} \quad (2.46)$$

$$\gamma_1 = -\tilde{\gamma}_1 = \begin{vmatrix} F_{21,x}^x & F_{22,x}^x \\ F_{21,y}^x & F_{22,y}^x \end{vmatrix}, \quad \delta_1 = \delta_2 = \begin{vmatrix} F_{11,y}^x & F_{12,y}^x \\ F_{21,y}^x & F_{22,y}^x \end{vmatrix} \quad (2.47)$$

$$\alpha_2 = \begin{vmatrix} F_{21,y}^y & F_{11,x}^y \\ F_{21,y}^x & F_{11,x}^x \end{vmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{vmatrix} F_{22,y}^x & F_{12,x}^x \\ F_{21,y}^x & F_{11,x}^x \end{vmatrix} \quad (2.48)$$

$$\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \begin{vmatrix} F_{11,x}^x & F_{12,x}^x \\ F_{11,x}^y & F_{21,x}^y \end{vmatrix}, \quad \tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_2 = \begin{vmatrix} F_{21,x}^x & F_{12,x}^x \\ F_{21,x}^y & F_{22,x}^x \end{vmatrix} \quad (2.49)$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \begin{vmatrix} F_{21,x}^x & F_{11,y}^x \\ F_{21,x}^y & F_{11,y}^y \end{vmatrix}, \quad \tilde{\gamma}_2 = \begin{vmatrix} F_{11,y}^x & F_{12,y}^y \\ F_{21,x}^x & F_{22,x}^x \end{vmatrix} \quad (2.50)$$

Entonces tenemos que la evolución es en la misma dirección temporal para ambas coordenadas espaciales si se cumplen condiciones de paralelismo, que toman la forma

$$\alpha_1 \delta_1 - \gamma_1 \beta_1 = -\lambda(\alpha_1 \tilde{\delta}_1 - \gamma_1 \tilde{\beta}_1), \quad (2.51)$$

$$\alpha_2 \delta_1 - \beta_1 \gamma_2 = \lambda(\tilde{\alpha}_2 \tilde{\delta}_1 - \tilde{\beta}_1 \tilde{\gamma}_2). \quad (2.52)$$

También encontramos restricciones que aparecen por consideraciones físicas. Tenemos restricciones que surgen de pedir que no existan líneas cerradas en los tiempos. En una dimensión, como  $\mathcal{F} \cdot \nabla_{12} x = 0$ , prohibimos  $\mathcal{F} = \nabla_{12} \times \vec{G}$ ,  $\nabla_{12} \cdot \mathcal{F} = 0$ , para que no cierren las líneas en  $x$  moviéndose en una dirección temporal (Fig. 2.2). Elegimos  $\mathcal{F} = \nabla_{12} \phi$ , entonces  $\nabla_{12} \times \mathcal{F} = \partial_1 \mathcal{F}_2 - \partial_2 \mathcal{F}_1 = 0$ .

En dos dimensiones hay una ecuación para cada uno de los vectores  $\vec{C}$  y  $\vec{D}$ , esto es

$$\partial_1 c_2 = \partial_2 c_1, \quad (2.53)$$

y, para  $\vec{D}$ ,

$$\partial_1 d_2 = \partial_2 d_1, \quad (2.54)$$

que tienen una única componente cada una.

Con esto hemos encontrado varias restricciones: la ecuación para el determinante, Ec. (2.39)

$$\begin{vmatrix} F_{21,x}^x & -F_{11,x}^x & F_{21,y}^x & -F_{11,y}^x \\ F_{22,x}^x & -F_{12,x}^x & F_{22,y}^x & -F_{12,y}^x \\ F_{21,x}^y & -F_{11,x}^y & F_{21,y}^y & -F_{11,y}^y \\ F_{22,x}^y & -F_{12,x}^y & F_{22,y}^y & -F_{12,y}^y \end{vmatrix} = 0, \quad (2.55)$$

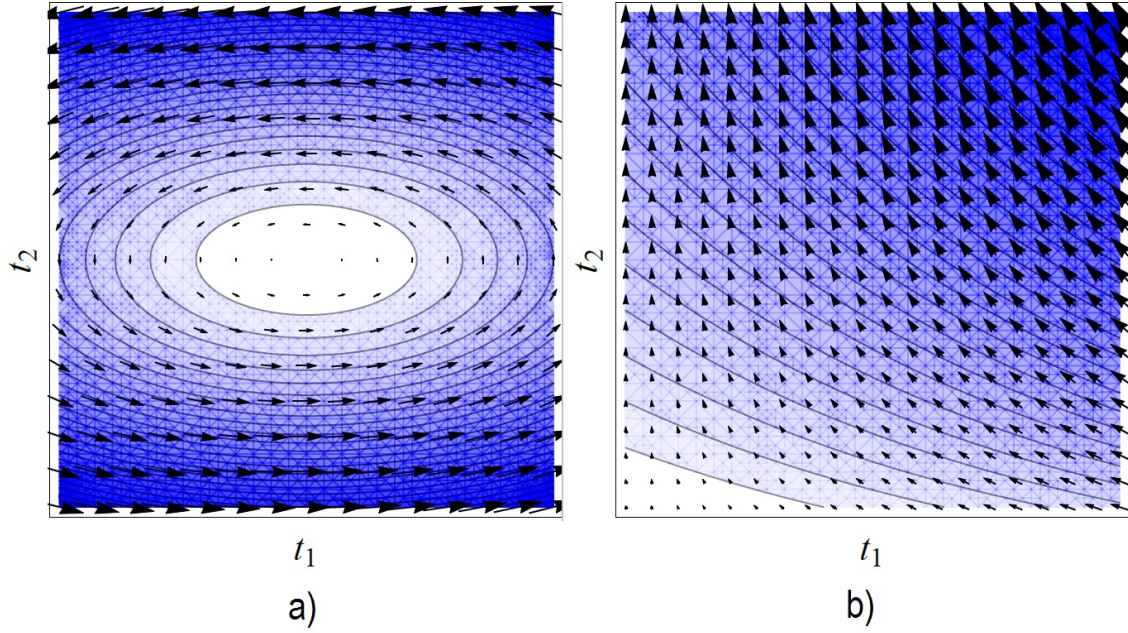


Figura 2.2: Ejemplos: a) campo vectorial con líneas cerradas, b) campo vectorial sin líneas cerradas. Se muestran las curvas de nivel, y el gradiente de color representa la magnitud.

y las ecuaciones (2.53, 2.54)

$$\nabla_{12} \times \vec{C} = 0 \quad (2.56)$$

$$\nabla_{12} \times \vec{D} = 0. \quad (2.57)$$

Además

$$F_{12}^x = F_{21}^x \quad (2.58)$$

$$F_{12}^y = F_{21}^y. \quad (2.59)$$

Es decir, tenemos cinco ecuaciones de restricción para un espacio de fuerzas originalmente de ocho dimensiones ( $F_{jk}^a$ , con  $j, k = 1, 2$ ,  $a = x, y$ ). Entonces en este espacio tenemos evolución en una superficie de tres dimensiones.

De la condición de paralelismo entre  $\vec{C}$  y  $\vec{D}$  tenemos una condición de evolución no trivial

$$\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.60)$$

que no reduce la dimensión del espacio donde podemos tener evolución en dos tiempos, puesto que para la evolución trivial tenemos una ecuación

$$\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.61)$$

Tenemos que hay un espacio tridimensional donde la evolución es no trivial, de esto podemos concluir que no hay tensores genéricos que produzcan evolución en dos parámetros. La naturaleza debe ser especial para que existan dos tiempos.

### 2.3. Tres coordenadas espaciales

Podemos realizar el mismo desarrollo para tres coordenadas espaciales:  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Nuevamente extendemos la definición de los momentos lineales de la forma

$$p_j^x = \partial_j x, \quad p_j^y = \partial_j y, \quad p_j^z = \partial_j z, \quad (2.62)$$

y la segunda ley de Newton

$$F_{kj}^i = \partial_k p_j^i = \partial_k \partial_j x^i, \quad (2.63)$$

en este caso con  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ , y  $j, k = 1, 2$  para los dos tiempos, por lo que el tensor de fuerza es de dimensión 12.

Si  $F_{ij}^i$  no depende explícitamente de los tiempos, tenemos

$$F_{12}^i = F_{21}^i, \quad (2.64)$$

y

$$\sum_l F_{kj,l}^i p_m^l - \sum_l F_{mj,l}^i p_k^l = 0, \quad i, l = 1, 2, 3. \quad (2.65)$$

De estas una sola ecuación es no redundante,

$$\sum_l F_{1j,l}^i p_2^l - \sum_l F_{2j,l}^i p_1^l = 0, \quad (2.66)$$

que representa seis ecuaciones. Al escribirlas de manera matricial requerimos

$$\begin{vmatrix} F_{21,x}^x & -F_{11,x}^x & F_{21,y}^x & -F_{11,y}^x & F_{21,z}^x & -F_{11,z}^x \\ F_{21,x}^y & -F_{11,x}^y & F_{21,y}^y & -F_{11,y}^y & F_{21,z}^y & -F_{11,z}^y \\ F_{21,x}^z & -F_{11,x}^z & F_{21,y}^z & -F_{11,y}^z & F_{21,z}^z & -F_{11,z}^z \\ F_{22,x}^x & -F_{12,x}^x & F_{22,y}^x & -F_{12,y}^x & F_{22,z}^x & -F_{12,z}^x \\ F_{22,x}^y & -F_{12,x}^y & F_{22,y}^y & -F_{12,y}^y & F_{22,z}^y & -F_{12,z}^y \\ F_{22,x}^z & -F_{12,x}^z & F_{22,y}^z & -F_{12,y}^z & F_{22,z}^z & -F_{12,z}^z \end{vmatrix} \equiv |\hat{F}| = 0 \quad (2.67)$$

para tener evolución no trivial.

A partir de aquí se obtiene la correspondiente ecuación de la evolución de  $x^i$ ,  $\vec{C}_i \cdot \nabla_{12} x^i = 0$ , despejando cada par  $p_1^i, p_2^i$  de la ecuación (2.66). Tendremos entonces las componentes del vector  $\vec{C}_i = (c_{i,1}, c_{i,2})$  dadas en términos de las funciones  $A_k^l(j)$ , definidas por

$$A_k^1(j) = \begin{vmatrix} f_{(k)(j)} & f_{(k)(1)} \\ f_{(6)(j)} & f_{(6)(1)} \end{vmatrix}, \quad (2.68)$$

donde  $f_{(i)(j)}$  son las componentes de la matriz  $\hat{F}$ ,

$$A_k^2(j) = \begin{vmatrix} A_k^1(j) & A_k^1(5) \\ A_5^1(j) & A_5^1(5) \end{vmatrix}, \quad (2.69)$$

$$A_k^3(j) = \begin{vmatrix} A_k^2(j) & A_k^2(4) \\ A_4^2(j) & A_4^2(4) \end{vmatrix}, \quad (2.70)$$

de la forma

$$c_{i,j} = \begin{vmatrix} A_2^3(j) & A_2^3(3) \\ A_3^3(j) & A_3^3(3) \end{vmatrix} \left[ c_{61}^2 (A_5^1(5) A_4^2(4))^2 A_3^3(3) \right]^{-1}, \quad j = 1, 2. \quad (2.71)$$

Así resultan las tres ecuaciones que determinan las direcciones donde evolucionan las tres coordenadas espaciales dadas por

$$\vec{C}_1 \cdot \nabla_{12} x = 0, \quad \vec{C}_2 \cdot \nabla_{12} y = 0, \quad \vec{C}_3 \cdot \nabla_{12} z = 0. \quad (2.72)$$

Se debe cumplir la condición para el rotacional de la forma

$$\nabla_{12} \times \vec{C}_i = 0, \quad (2.73)$$

de manera que no tengamos líneas cerradas en los tiempos. También se debe cumplir la ec. (2.67) para el determinante, además de la ecuación (2.64). En total son 7 ecuaciones de restricción para un espacio de fuerzas de 12 dimensiones, por lo que tenemos la evolución no trivial en una superficie de 5 dimensiones. De las condiciones de paralelismo entre los campos,

$$\vec{C}_1 = \lambda_1 \vec{C}_2 = \lambda_2 \vec{C}_3,$$

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} \end{vmatrix} = 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} c_{1,2} & c_{2,2} \\ c_{1,3} & c_{2,3} \end{vmatrix} = 0,$$

con  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  constantes, vemos que hay evolución trivial en un espacio 3 dimensional en este espacio de 5 dimensiones, lo que todavía nos deja un espacio de 5 dimensiones donde hay evolución no trivial dentro de un espacio originalmente de 12 dimensiones. Concluimos lo mismo que en el caso de dos dimensiones.

## 2.4. Caso general

El procedimiento anterior se puede generalizar para  $d$  coordenadas espaciales  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Como hicimos anteriormente definimos dos momentos lineales para cada coordenada espacial de la forma

$$p_j^i = \partial_j x^i, \quad j = 1, 2, \quad (2.74)$$

y proponemos la segunda ley de Newton extendida

$$F_{jk}^i = \partial_j p_k^i = \partial_j \partial_k x^i, \quad j, k = 1, 2, \quad (2.75)$$

con la fuerza especificada por un tensor en la parte temporal. En esta ocasión el tensor de fuerza es de dimensión  $4d$ .

Para pasar al análisis de consistencia, tenemos que si  $F_{jk}^i$  no depende explícitamente de los tiempos se cumple

$$F_{12}^i = F_{21}^i \quad (2.76)$$

y

$$\partial_k \partial_l p_j^i = \partial_l \partial_k p_j^i. \quad (2.77)$$

Usando la regla de la cadena, como aparece en la ecuación (2.65), pero con los índices para las dimensiones espaciales  $i, l = 1, 2, \dots, d$ , en la ecuación anterior, la única ecuación no redundante que encontramos es

$$F_{1j,m}^i p_2^m - F_{2j,m}^i p_1^m = 0, \quad (2.78)$$

que representa ahora  $2d$  ecuaciones. De aquí tenemos el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} f_{(1)(1)} & f_{(1)(2)} & \cdots & f_{(1)(2d)} \\ f_{(2)(1)} & f_{(2)(2)} & \cdots & f_{(2)(2d)} \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{(2d)(1)} & f_{(2d)(2)} & \cdots & f_{(2d)(2d)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^i \\ p_2^i \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \quad (2.79)$$

las entradas  $f_{(k)(l)}$  que forman la matriz  $\hat{F}$  son las derivadas de las funciones  $F$  correspondientes a los coeficientes de los momentos  $p_j^i$ . Para que podamos tener una solución no trivial a este sistema de ecuaciones requerimos que el determinante de la matriz  $\hat{F}$  sea nulo,

$$\det \hat{F} = 0 \quad (2.80)$$

La matriz  $\hat{F}$  está así arreglada para obtener la ecuación  $\vec{C}_i \cdot \nabla_{12} x^i = 0$ , al despejar  $p_1^i$  y  $p_2^i$ . De esta manera, las componentes de los vectores  $\vec{C}_i = (c_{i,1}, c_{i,2})$  resultan

$$c_{i,j} = \begin{vmatrix} A_2^{2d-3}(j) & A_2^{2d-3}(3) \\ A_3^{2d-3}(j) & A_3^{2d-3}(3) \end{vmatrix} \left[ c_{2d,1}^2 \prod_{i=1}^{2d-3} A_{2d-i}^i(2d-i) \right]^{-1} \quad (2.81)$$

con las definiciones de las funciones  $A_k^i(j)$

$$A_k^1 = \begin{vmatrix} f_{(k)(j)} & f_{(k)(1)} \\ f_{(2d)(j)} & f_{(2d)(1)} \end{vmatrix}, \quad (2.82)$$

$$A_k^2(j) = \begin{vmatrix} A_k^1(j) & A_k^1(2d-1) \\ A_{2d-1}^1(j) & A_{2d-1}^1(2d-1) \end{vmatrix}, \quad (2.83)$$

$$A_k^3(j) = \begin{vmatrix} A_k^2(j) & A_k^2(2d-2) \\ A_{2d-2}^2(j) & A_{2d-2}^2(2d-2) \end{vmatrix}, \quad (2.84)$$

definidas recursivamente hasta llegar a

$$A_k^{2d-3}(j) = \begin{vmatrix} A_k^{2d-4}(j) & A_k^{2d-4}(4) \\ A_4^{2d-4}(j) & A_4^{2d-4}(4) \end{vmatrix}. \quad (2.85)$$

Así podemos escribir las ecuaciones separadas para la evolución de cada coordenada espacial con los coeficientes encontrados anteriormente

$$\vec{C}_i \cdot \nabla_{12} x^i = c_{i,1} p_1^i + c_{i,2} p_2^i = 0. \quad (2.86)$$

Continuemos haciendo un conteo de las restricciones que hemos encontrado. Hasta aquí tenemos un espacio de  $4d$  dimensiones para la fuerza. La suposición que las funciones  $F_{kj}^i$  son simétricas nos dan  $d$  restricciones, y tenemos que el determinante de la matriz  $\hat{F}$  es cero como consecuencia de la condición de suavidad sobre los momentos  $p_j^i$  como requerimiento para la existencia de una solución no trivial al sistema de ecuaciones (2.79). Habiendo encontrado las ecuaciones de evolución para los campos de cada coordenada, ecuación (2.86), tenemos una condición para cada uno de los campos,  $\vec{C}_i$ , de manera que no existan líneas cerradas en los tiempos. Estas restricciones tienen la forma

$$\nabla_{12} \times \vec{C}_i = 0, \quad (2.87)$$

que son  $d$  restricciones en total. Con esto tenemos finalmente que la evolución se da en un espacio de  $4d - d - 1 - d = 2d - 1$  dimensiones. La conclusión es la misma que en los casos 2 y 3 dimensionales, al considerar un tensor de fuerza general la evolución producida es únicamente sobre una dirección en el plano temporal, y, recíprocamente, un tensor de fuerza que pueda generar evolución en los dos tiempos es uno bastante especial.

Finalmente, notemos que el espacio donde no hay paralelismo entre *todos* los campos  $\vec{C}_i$ , y por lo tanto la evolución no es en un solo tiempo, no ve su dimensión más reducida. Esto es porque tal espacio es aquel donde se cumple

$$\det \begin{pmatrix} c_{i,1} & c_{j,1} \\ c_{i,2} & c_{j,2} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (2.88)$$

## CAPÍTULO 2. IMPLICACIONES CLÁSICAS

### 2.4. CASO GENERAL

---

para algún par  $i, j$ .

En este capítulo hemos analizado la mecánica clásica a dos tiempos mediante la extensión propuesta a la segunda ley de Newton. En el caso de una dimensión espacial encontramos que no es posible tener evolución en dos tiempos, mientras que cuando consideramos 2, 3 y  $d$  dimensiones espaciales encontramos que el tensor de fuerza que produce evolución en dos tiempos debe ser uno muy particular. Si la dimensión espacial  $d$  tiende a infinito el criterio no puede decidir. Este caso no es del todo exótico, ya que si la posición fuera un observable matricial en mecánica cuántica tendríamos un número infinito de componentes. Esto se analizará en el capítulo 4.

Como a continuación pasaremos a analizar la teoría cuántica, notamos que aunque la cuantización se puede construir basándonos en restricciones clásicas [33] a través de igualdades débiles y el espacio de Hilbert que las obedece, es importante reconocer que la cuantización de restricciones clásicas no es equivalente a las restricciones de sistemas cuánticos. Esto fue notado primero por Jensen en [34] y desarrollado en [35] con conexiones con la curvatura y es de suma importancia en nuestro análisis. En [36, 37] se pueden encontrar efectos específicos que surgen de las diferencias entre estos dos enfoques, como ejemplo, estados ligados sin contrapartes clásicas. En los capítulos siguientes se estudiará el caso cuántico de los problemas en dos tiempos desde los fundamentos, asegurando generalidad correspondiente a las restricciones obtenidas.

## Capítulo 3

# Implicaciones cuánticas: Ecuaciones de onda

En escenarios mecánico-cuánticos obtenemos condiciones menos restrictivas, ya sea siguiendo el enfoque de ecuaciones de onda dimensionalmente extendidas, como se propone en [2, 7, 24–30, 38–41] para teorías de Kaluza-Klein, o extendiendo el número de generadores de evolución que aseguran dinámicas unitarias. En el primer caso, al enfocarnos en mantener la conservación de la probabilidad, las ecuaciones de continuidad extendidas llevan, después de la integración, a una probabilidad conservada a lo largo de una sola dirección temporal.

Tenemos que el segundo enfoque es más general, ya que la extensión de la métrica implica extender una única ecuación de onda, mientras que la evolución unitaria mediante dos parámetros necesita de la existencia de dos ecuaciones de Schrödinger. Como consecuencia, este último enfoque implica condiciones menos restrictivas. El segundo caso se analiza en el siguiente capítulo (4), donde obtenemos condiciones para Hamiltonianos arbitrarios.

### 3.1. Corrientes de Noether

En esta sección estudiamos el comportamiento de un campo mecánico cuántico con una métrica extendida mediante el principio de mínima acción en un espacio de Minkowski extendido.

La suposición de que las funciones de onda y las probabilidades están relacionadas es fundamental para la mecánica cuántica. De esta manera, en cualquier teoría de ecuaciones de onda dimensionalmente extendidas es necesario incluir una cantidad conservada que puede ser identificada con la probabilidad total. Como en cualquier teoría de campo, la ley de conservación necesaria es asegurada por el teorema de Noether, y por consecuencia, por la presencia de simetría. Esto nos lleva a considerar ecuaciones de campo con simetrías de norma, tales que las ondas mecánico-cuánticas describiendo la evolución de la materia puedan ser relacionadas con una ecuación de continuidad satisfecha por las correspondientes corrientes de Noether. En el caso general solo necesitamos analizar la ecuación de continuidad con dimensión extendida para encontrar restricciones importantes a la teoría. Proponemos la extensión dimensional mediante la extensión de la signatura de la métrica, considerando otra componente positiva.

La idea es encontrar una probabilidad conservada a lo largo de dos tiempos, evitando el caso en el que esto ocurre solo para un tiempo. Esto último implica que solo puede haber dinámica en un tiempo, mientras que en el primer caso aún se puede tener física no trivial. Posteriormente encontraremos que en este escenario general la densidad de probabilidad debe ser muy especial.

Partimos de la ecuación de continuidad extendida definida por

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}\{+, +, -, \dots, -\}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, d + 2. \quad (3.1)$$

**CAPÍTULO 3. IMPLICACIONES CUÁNTICAS: ECUACIONES DE ONDA**  
**3.1. CORRIENTES DE NOETHER**

---

Ahora queremos obtener la carga conservada. Debemos separar esta ecuación en componentes temporaloides y espacialoides, para integrar sobre el espacio bajo algunas condiciones de frontera específicas. En la notación previa escribimos

$$\nabla_{12} \cdot \mathbf{j}_{\text{tiempo}} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{j}_{\text{espacio}} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{tiempo}} &= (j_1, j_2), & \mathbf{j}_{\text{espacio}} &= (j_3, \dots, j_{d+2}), \\ \nabla_{12} &= (\partial_1, \partial_2), & \nabla_{\mathbf{x}} &= \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ahora podemos integrar sobre un espacio  $d + 1$  dimensional para obtener la derivada total de alguna cantidad; esto puede ser hecho de dos maneras diferentes, sobre volúmenes  $V_1$  y  $V_2$ :

$$\frac{d}{dt_1} \left\{ \int_{V_1} dt_2 dx j_1 \right\} = \int_{V_1} dt_2 dx (\partial_2, \nabla_x) \cdot (-j_2, j_{\text{espacio}}) \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt_2} \left\{ \int_{V_2} dt_1 dx j_2 \right\} = \int_{V_2} dt_1 dx (\partial_1, \nabla_x) \cdot (-j_1, j_{\text{espacio}}), \quad (3.5)$$

pero encontramos dos cantidades conservadas después de aplicar el teorema de la divergencia al lado derecho e imponer integrales nulas en la frontera (Fig. 3.1). Esto lleva a

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i(t_i)}{dt_i} &= \oint_{S_i} ds \cdot (-j_k, j_{\text{espacio}}) = 0, & i &= 1, 2, \quad k \neq i \\ Q_i(t_i) &\equiv \int_{V_i} dt_k dx j_i & \text{Carga conservada.} \end{aligned} \quad (3.6)$$

De aquí vemos que hay dos densidades,  $\rho_i = \int dt_k j_i$ , correspondiendo cada una a cada carga conservada. Nuestra tarea es encontrar una cantidad conservada en ambos tiempos  $Q(t_1, t_2)$  usando (3.6). Como una consecuencia, encontraremos que cualquier densidad de probabilidad tal que

$$\int dx \rho(x; t_1, t_2) = Q(t_1, t_2) = 1 \quad (3.7)$$

debe ser una función separable de  $t_1, t_2$ .

Buscamos obtener una expresión para  $\rho$  en términos de las densidades encontradas  $\rho_i$ . Consideremos una funcional  $\rho[\rho_1, \rho_2]$  y reemplacémosla en (3.7). Las derivadas temporales nos dan

$$\begin{aligned} \partial_i \int dx \rho[\rho_1, \rho_2] &= \partial_i Q(t_1, t_2) = 0 \\ &= \int dx \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial \rho_1} \partial_i \rho_1 + \frac{\partial \rho}{\partial \rho_2} \partial_i \rho_2 \right\} \\ &= \int dx \frac{\partial \rho}{\partial \rho_i} \partial_i \rho_i \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde la última línea se sigue de  $\partial_1 \rho_2 = \partial_2 \rho_1 = 0$ . Sin embargo, ya que esta integral es cero, el resultado debe ser independiente de  $t_1$  y  $t_2$ .

Si es independiente de  $t_1$  para  $i = 2$ ,  $\partial \rho / \partial \rho_2$  no puede depender de  $\rho_1$  (excepto si  $\rho_1$  es una constante) y un argumento similar lleva a que  $\partial \rho / \partial \rho_1$  no puede depender de  $\rho_2$ . Esto significa que  $\rho$  debe ser serapable  $\rho = \alpha g_1(\rho_1) + \beta g_2(\rho_2)$ , con  $\alpha, \beta$  dos constantes.

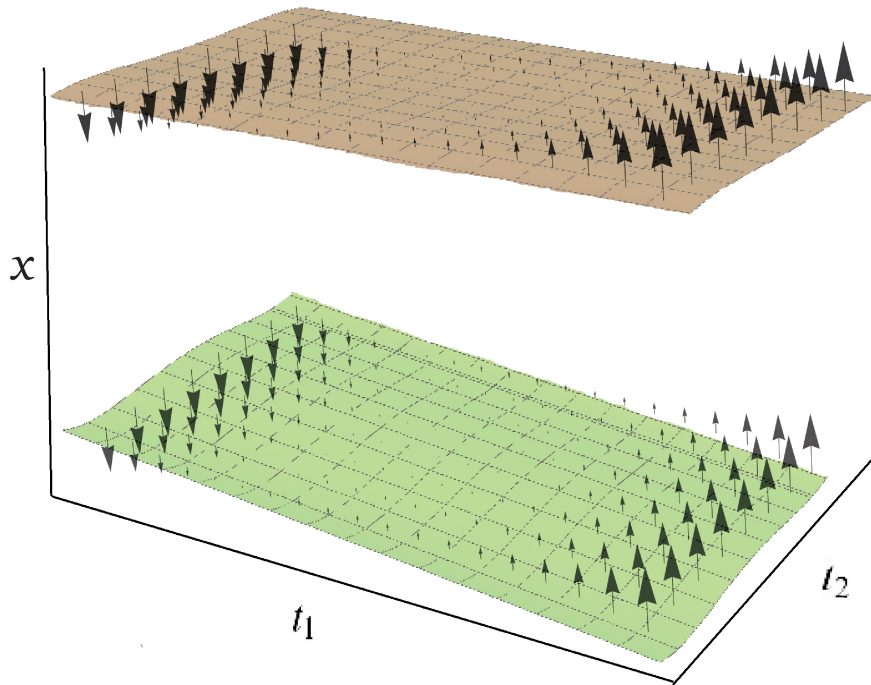


Figura 3.1: Condiciones a la frontera,. El flujo entrante es igual al flujo saliente (bordes), en particular no hay flujo entrante o saliente en el caso de estados ligados (centro).

**CAPÍTULO 3. IMPLICACIONES CUÁNTICAS: ECUACIONES DE ONDA**  
**3.1. CORRIENTES DE NOETHER**

---

Ahora consideramos  $i = 2$  cuando la integral no depende de  $t_2$ , lo que lleva a

$$\int dx \beta g'_2(\rho_2) \partial_2 \rho_2 = 0 = \partial_2 Q_2 = \int dx \partial_2 \rho_2, \quad (3.9)$$

y finalmente  $\beta g'_2 = 1$ . Esto nos dice que  $\rho$  es lineal en  $\rho_1, \rho_2$ ,

$$\rho = \alpha \rho_1 + \beta \rho_2. \quad (3.10)$$

Como una consecuencia, la carga total también es separable,  $Q = \alpha Q_1 + \beta Q_2$ , y las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  se pueden escoger en términos de la condición de normalización.

Terminamos nuestra discusión reconociendo la separabilidad como un efecto restrictivo en los promedios, al calcularlos con la densidad  $\rho$  que encontramos. El promedio de cualquier función de la posición,  $A(x)$  es también separable

$$\langle A \rangle = \int d^d \mathbf{x} A \rho_1 + \int d^d \mathbf{x} A \rho_2. \quad (3.11)$$

Una consecuencia dinámica de esta propiedad es que  $\langle x \rangle$  es separable, es decir  $\langle x^i \rangle = f_1^i(t_1) + f_2^i(t_2)$ .

De acuerdo al teorema de Ehrenfest, en el límite clásico debemos recuperar las ecuaciones de Hamilton para el movimiento de estos promedios. Para extender el teorema de Ehrenfest a dos tiempos escribimos

$$F_{jk}^i = \partial_j \partial_k \langle x^i \rangle = \partial_j \partial_k x_{\text{clásica}}^i. \quad (3.12)$$

En el límite de la extensión propuesta en este capítulo tenemos que la fuerza, como la consideramos en la discusión previa, debe actuar de tal manera que la evolución sea separable, llevando a

$$F_{12}^i = \partial_1 \partial_2 \langle x^i \rangle = 0. \quad (3.13)$$

Sin embargo, en general tenemos una diagonal no nula

$$F_{11}^i = \partial_1^2 \langle x^i \rangle \neq 0, \quad F_{22}^i = \partial_2^2 \langle x^i \rangle \neq 0. \quad (3.14)$$

Cuando las ecuaciones (3.14), o las ecuaciones clásicas (3.27), se desacoplan de esta manera, se encuentra

$$F_{jj}^i(\langle x \rangle) = F_{jj}^i(f_1(t_1) + f_2(t_2)) = \partial_j^2 [f_1^i(t_1) + f_2^i(t_2)] = \partial_j^2 f_j^i(t_j). \quad (3.15)$$

Así que ahora  $F_{11}^i$  debe depender solo de  $t_1$ , y  $F_{22}^i$  solo de  $t_2$ . Por esta razón, tenemos ya sea  $f_1^i = \text{constante}$  o  $f_2^i = \text{constante}$ . Por lo tanto, en el límite clásico este esquema obliga a una sola dependencia temporal de la posición promedio. Las fuerzas extremas también están restringidas, de manera que cualquier estímulo externo debe producir evolución en solo un parámetro. Este argumento es válido para  $i = 1, \dots, d$ , pero es posible analizar casos simples como ( $d = 1$ ), donde el tensor de fuerza solo debe tener una componente no trivial, como se mostró en la sección 2.1.2.

### 3.1.1. Vuelta al caso clásico: probabilidad a dos tiempos

Para entender el significado de una densidad de probabilidad separable en los tiempos veamos cómo se define una densidad de probabilidad semiclásicamente. Tenemos que la probabilidad de encontrar una partícula en un intervalo a los tiempos  $t_1, t_2$  en una dimensión,  $p(t_1, t_2)$ , es determinada por la densidad de probabilidad  $\rho(t_1, t_2)$  como

$$p(t_1, t_2) = \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x; t_1, t_2). \quad (3.16)$$

Para una partícula en un tiempo tenemos la energía total dada por

$$H = E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x, t), \quad (3.17)$$

entonces podemos obtener la velocidad

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V]}. \quad (3.18)$$

Tenemos que  $v$  está relacionada con la densidad de probabilidad mediante la ecuación

$$\rho(x_1, t_1) = \frac{1}{T \cdot v(x_1, t_1)}, \quad (3.19)$$

Aquí  $T$  es el tiempo total de observación y  $v(x, t)$  campo de velocidades.

Consideremos otra partícula, de manera que tenemos una segunda densidad de probabilidad,

$$\rho(x_2, t_2) = \frac{1}{T \cdot \tilde{v}(x_2, t_2)}. \quad (3.20)$$

Cuando  $x_1$  y  $x_2$  coinciden, este proceso corresponde a nuestro caso de interés: dos tiempos y una coordenada espacial ( $x_1 = x_2 = x$ ). Como son procesos independientes, debemos sumar para construir la densidad de probabilidad total,  $\rho_{total} = \rho(x, t_1, t_2)$ , resultando

$$\rho(x, t_1, t_2) = \frac{\left[ \frac{1}{v_1(x, t_1)} + \frac{1}{v_2(x, t_2)} \right]}{W}, \quad (3.21)$$

donde  $W$  es un factor de normalización que podemos encontrar como

$$W = \int_{\mathbb{R}} [v_1^{-1} + v_2^{-1}] dx. \quad (3.22)$$

De esta manera, tenemos que la densidad de probabilidad es separable en ambos tiempos, y se cumple una ley de conservación individual como la que encontramos anteriormente,

$$\frac{d}{dt_j} \int_{\mathbb{R}} dx \{ \rho_1(x, t_1) + \rho_2(x, t_2) \} = \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\partial}{\partial t_j} \rho_j(x, t_j) = 0 \quad (3.23)$$

para  $j = 1, 2$ .

## 3.2. La ecuación de Klein-Gordon

A continuación discutimos como ejemplos específicos las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac (en la sección 3.3) 2 + 1 dimensionales.

Partamos de la ecuación de Klein-Gordon, extendiendo la métrica,

$$\left\{ \square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right\} \phi = 0, \quad (3.24)$$

con  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ , donde el índice 1 representa el espacio y 2 y 3 los dos tiempos. La métrica es aquella que aparece en la ecuación (3.1). Para continuar necesitamos una interpretación correcta de la onda  $\phi$  y por ende una definición de probabilidad asociada a esta. De esta forma, buscamos una cantidad conservada,  $P$ , que podemos escribir como:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x; t_1, t_2) \quad (3.25)$$

donde  $\rho$  es la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en el intervalo  $[x_1, x_2]$  a tiempo  $t_1$  o  $t_2$ . Tenemos que  $\rho(x; t_1, t_2)$  debe ser función de  $\phi(x; t_1, t_2)$  o sus derivadas.

Construyamos la ecuación de continuidad

$$\phi^* \square \phi - \phi \square \phi^* = 0, \quad (3.26)$$

si desarrollamos encontramos

$$\partial_\mu^{(2+1)} \left\{ \frac{\phi^* \partial^{(2+1)\mu} \phi - \phi \partial^{(2+1)\mu} \phi^*}{2i} \right\} = 0, \quad (3.27)$$

donde

$$\partial_\mu^{(2+1)} = (\partial_1, \partial_2, \partial_x). \quad (3.28)$$

Por lo tanto la corriente conservada es

$$j_\mu = \frac{1}{2i} (\phi^* \partial_1 \phi - \phi \partial_1 \phi^*, \phi^* \partial_2 \phi - \phi \partial_2 \phi^*, \phi^* \partial_x \phi - \phi \partial_x \phi^*). \quad (3.29)$$

Como hicimos anteriormente, con esta cantidad y con condiciones a la frontera apropiadas podemos escribir la ley de conservación

$$\partial_\mu^{(2+1)} j^\mu = 0. \quad (3.30)$$

Tenemos la distribución de probabilidad

$$\rho(x; t_1, t_2) = \rho_1(x, t_1) + \rho_2(x, t_2) = \frac{1}{2iW} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} dt_1 \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_1 \phi + \int_{\mathbb{R}_+} dt_2 \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_2 \phi \right\}. \quad (3.31)$$

Tal densidad de probabilidad cumple con una ley de conservación total, como (3.7), y cada una de sus componentes cumple con una ley de conservación individual (3.6), además se reduce al caso clásico (3.21). Finalmente, es positiva definida si nos restringimos a energías positivas,  $\omega_1, \omega_2 > 0$ .<sup>1</sup>

### 3.3. La ecuación de Dirac

Procedemos a extender la ecuación de Dirac a 2 + 1 dimensiones y buscamos obtener una corriente conservada apropiada, y así, una densidad de probabilidad apropiada. Encontramos que la corriente conservada derivada es consistente con la sección 3.1. Así, terminamos con las mismas conclusiones, y tenemos un límite clásico con evolución en un solo tiempo.

En esta ocasión partimos de la relación entre el vector de energía momento y la masa en reposo,

$$\{\square + m^2\} \Psi = 0, \quad (3.32)$$

y queremos obtener una ecuación de orden uno en los dos tiempos. Para esto necesitamos un conjunto de matrices  $\gamma$  tales que

$$\{i\gamma_\mu \partial^\mu - m\} \Psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.33)$$

donde  $\hbar = c = 1$ . Con la condición de Clifford

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  está dada por (3.1). Tenemos que una representación  $2 \times 2$  es suficiente, y las matrices  $\gamma$  pueden estar dadas por

$$\gamma_1 = \sigma_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2, \quad \gamma_x = i\sigma_3. \quad (3.35)$$

---

<sup>1</sup>Existen más posibilidades que arrojan  $\rho > 0$ , pero para fines de nuestra discusión son irrelevantes.

**CAPÍTULO 3. IMPLICACIONES CUÁNTICAS: ECUACIONES DE ONDA**  
**3.3. LA ECUACIÓN DE DIRAC**

---

Teniendo la ecuación de Dirac extendida (3.33), necesitamos una corriente conservada  $j^\mu$ ,

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (3.36)$$

asegurada por el teorema de Noether.

Notamos que la manera usual (en 3 + 1 dimensiones) de encontrar tal corriente conservada no funciona bien en este caso, como consecuencia de que el hamiltoniano efectivo no sea hermítico,

$$i\partial_1\Psi = -i\partial_2[(\gamma_1\gamma_2)\Psi] + i\frac{\partial}{\partial x}[(\gamma_1\gamma_x)\Psi] + m\gamma_1\Psi. \quad (3.37)$$

Esto además implica que el campo que describe la antipartícula no puede ser definido como  $\Psi^\dagger\gamma_x$ .

Sin embargo, si hacemos una inversión de coordenadas al considerar el hermítico conjugado de la ecuación de Dirac de la forma

$$\Psi^\dagger(-x_\nu) \left\{ +i\gamma_\mu^\dagger \overleftarrow{\partial}^\mu - m \right\} = 0, \quad (3.38)$$

somos llevados a una ecuación de conservación que podemos escribir como

$$\partial^\mu \left[ i\Psi^\dagger(-x_\nu)\gamma_x\gamma_\mu\Psi(x_\nu) \right] = 0. \quad (3.39)$$

Notamos que la corriente conservada puede ser elegida hermítica

$$j_\mu = \frac{1}{2}i\Psi^\dagger(-x_\nu)\gamma_x\gamma_\mu\Psi(x_\nu) + h.c., \quad (3.40)$$

y que la  $\bar{\Psi}$  que describe antipartículas debe ser definida como

$$\bar{\Psi}(x_\nu) = \Psi^\dagger(-x_\nu)\gamma_x. \quad (3.41)$$

Con esta corriente conservada podemos obtener la densidad de probabilidad y la carga total como se hizo en la sección 3.1, obteniendo para la densidad de probabilidad la siguiente expresión

$$\rho(\mathbf{x}; t_1, t_2) = \alpha \int dt_2 j_1 + \beta \int dt_1 j_2 = \alpha\rho_1(\mathbf{x}, t_1) + \beta\rho_2(\mathbf{x}, t_2), \quad (3.42)$$

y para la probabilidad total

$$P = \int d\mathbf{x}\rho(\mathbf{x}; t_1, t_2) = \alpha P_1(t_1) + \beta P_2(t_2); \quad (3.43)$$

que, nuevamente, son separables.

Tanto en este caso como para la ecuación de Klein-Gordon, las conclusiones en la sección 3.1 aplican, y entonces, en el límite clásico, la posición promedio evoluciona como una función de sólo un tiempo.

Notemos que las densidades de probabilidad deben ser positivas en todo el espacio. En el caso de la corriente (3.29) de la ecuación de Klein-Gordon tenemos que sólo las componentes de energía positiva pueden relacionarse con densidades positivas. Para la ecuación de Dirac tenemos que siempre es posible encontrar densidades de probabilidad positivas en la teoría extendida. En particular, tenemos que si las corrientes  $j_1$  y  $j_2$  son positivas,  $\rho$  también lo es, sin embargo este no es el caso más general que se puede tener.

En la primera parte de este capítulo encontramos que en varias dimensiones espaciales la probabilidad sigue siendo separable. En el límite clásico para el caso general existe un desacoplamiento que indica que sólo hay fuerza en una dirección temporal. Notamos que al partir de una ecuación de continuidad extendida cualquier teoría que cumpla una ecuación de onda y que tenga simetrías se puede estudiar como hicimos.

CAPÍTULO 3. IMPLICACIONES CUÁNTICAS: ECUACIONES DE ONDA  
3.3. LA ECUACIÓN DE DIRAC

---

## Capítulo 4

# Implicaciones cuánticas: Evolución unitaria

En el capítulo anterior discutimos la conservación de probabilidad refiriéndonos a ecuaciones diferenciales extendidas. Ahora tomaremos un enfoque diferente para extender la mecánica cuántica a dos tiempos, postulando un espacio de Hilbert de estados físicos  $|a\rangle$  que evolucionan bajo dos parámetros mediante una transformación unitaria,  $U(t_1, t_2)$ . Este desarrollo es una extensión del análisis hecho en el caso clásico, ya que consideramos dos ecuaciones dinámicas, una para cada tiempo, no preferenciales.

Proponemos una evolución unitaria tal que

$$U(t_1, t_2; t_{01}, t_{02})|a\rangle = |a(t_1, t_2)\rangle, \quad UU^\dagger = U^\dagger U = 1. \quad (4.1)$$

Para simplificar la notación no escribiremos el tiempo inicial  $t_{01}, t_{02}$  en lo sucesivo.

Mediante una expansión infinitesimal de  $U$  encontramos un generador hermítico  $H(t_1, t_2)$ , que está compuesto por dos operadores, uno para cada dirección temporal,  $H_1, H_2$ . Se puede mostrar que cada evolución lleva a una ecuación de Schrödinger para el operador  $U$  en términos del generador correspondiente,

$$H_i(t_1, t_2)U(t_1, t_2) = i\hbar\partial_i U(t_1, t_2), \quad i = 1, 2. \quad (4.2)$$

Esto es equivalente a un grupo unitario con dos parámetros. Para averiguar su estructura debemos recurrir a condiciones de suavidad sobre  $U$ , al menos en alguna región del espacio  $t_1, t_2$ . La conmutatividad de las derivadas implica

$$\partial_1(H_2U) = \partial_2(H_1U), \quad (4.3)$$

o, multiplicando por  $U^\dagger$  en la derecha y usando (4.2),

$$i\hbar\partial_i H_j = [H_i, H_j], \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2 \quad i \neq j, \quad (4.4)$$

es decir, los generadores obedecen condiciones de no conmutabilidad fundamentales en términos de sus derivadas. Finalmente, (4.2) puede usarse para establecer dos ecuaciones de Schrödinger al actuar en un estado específico.

Adicionalmente, quisiéramos imitar el tratamiento en el caso clásico analizando la evolución de observables. La imagen de Heisenberg puede extenderse naturalmente si tomamos un operador en ésta como  $A^H \equiv U^\dagger A U$ , lo que lleva a

$$i\hbar\partial_i A^H = [A^H, H_i^H], \quad i = 1, 2. \quad (4.5)$$

**CAPÍTULO 4. IMPLICACIONES CUÁNTICAS: EVOLUCIÓN UNITARIA**  
**4.1. FLUCTUACIONES Y RESTRICCIONES FUNDAMENTALES**

---

Para cualquier observable, en particular para la posición  $x$ , tenemos nuevamente dos velocidades<sup>1</sup>,

$$v_i = -\frac{i}{\hbar} [x, H_i], \quad (4.6)$$

y cuatro aceleraciones posibles,

$$a_{ij} = \partial_i v_j = -\frac{1}{\hbar^2} [[x, H_j], H_i] \equiv F_{ij}. \quad (4.7)$$

Esta es de hecho la segunda ley de Newton, si admitimos que la dinámica está gobernada por el operador  $F_{ij}$ <sup>2</sup>. Con estas relaciones podemos establecer un conjunto de ecuaciones dinámicas para los promedios usando un estado fijo  $|\psi\rangle$ :

$$\langle a_{ij} \rangle = \partial_{ij}^2 \langle x \rangle = \langle F_{ij} \rangle. \quad (4.8)$$

Esta es nuestra versión en dos tiempos del teorema de Ehrenfest; un buen límite clásico es asegurado cuando  $x_{\text{clásica}} = \langle x \rangle$  y  $F_{ij}(x_{\text{clásica}}) = \langle F_{ij} \rangle$ . La segunda condición claramente depende del estado  $|\psi\rangle$  escogido, pero imponer este límite clásico lleva directamente a nuestras condiciones previamente obtenidas, la evolución de los promedios debe elegir una única dirección en el plano  $t_1, t_2$  por la cual evolucionar.

## 4.1. Fluctuaciones y restricciones fundamentales

Dejando de lado el límite clásico, podemos analizar la posibilidad de tener evolución a lo largo de diferentes direcciones temporales en un régimen completamente mecánico-cuántico.

Pedimos que la física sea invariante bajo traslaciones del origen del tiempo, entonces  $\partial_i H_j = 0$  y consecuentemente  $[H_i, H_j] = 0$ <sup>3</sup>. De esta manera, los generadores Hamiltonianos comparten una base propia y podemos analizar la dinámica en una representación matricial adecuada,  $x^{nm} = \langle m|x|n\rangle$ , dada por los vectores propios  $H_i|n\rangle = E_i^n|n\rangle$ . Calculando los elementos matriciales de ambos lados de (4.7), y definiendo  $\Delta_i^{nm} \equiv E_i^n - E_i^m$ , tenemos

$$\partial_i \partial_j x^{nm} = x^{nm} \Delta_i^{nm} \Delta_j^{nm}, \quad (4.9)$$

que es simétrico en  $i$  y  $j$ , como se esperaba. Nuevamente se puede suponer que las velocidades  $v_i$  y sus elementos matriciales,  $v_i^{nm} = i\Delta_i^{nm}x^{nm}/\hbar$ , son funciones suaves, llevando a las siguientes condiciones

$$\Delta_1^{nm} \partial_2 x^{nm} - \Delta_2^{nm} \partial_1 x^{nm} = 0. \quad (4.10)$$

La evolución de cada elemento de matriz está por lo tanto restringida por una condición geométrica,

$$\mathcal{F}^{nm} \cdot \nabla_{12} x^{nm} = 0, \quad (4.11)$$

donde el campo está definido como  $\mathcal{F}^{nm} = (\Delta_2^{nm}, -\Delta_1^{nm})$  y ahora depende de las energías  $E_i^n, E_i^m$ , en contraste con su contraparte clásica (2.16) que depende de la fuerza externa.

Un cambio de variables conveniente en el plano temporal nos ayuda a entender la naturaleza de cada dirección. Para esto proponemos una rotación de ángulo variable

$$\begin{aligned} \tau_1^{nm} &= \cos(\theta^{nm})t_1 + \text{sen}(\theta^{nm})t_2 \\ \tau_2^{nm} &= -\text{sen}(\theta^{nm})t_1 + \cos(\theta^{nm})t_2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

---

<sup>1</sup>No necesitamos imponer ninguna representación en el momento, o un conmutador canónico con  $x$ . Sin embargo, nótese que la prescripción  $p = -i\hbar\partial/\partial x$  debe ser modificada para tener dos tiempos.

<sup>2</sup>Son suficientes ecuaciones de un orden finito en el tiempo. Las versiones mecánico-cuánticas de la fuerza de Abraham-Lorentz pueden proponerse, pero esto haría más largo el tratamiento.

<sup>3</sup>En el caso general,  $\partial_i H_j \neq 0$ , podemos probar que la suavidad de  $x(t_1, t_2)$  lleva a  $[x, [H_i, H_j]] = 0$ , i.e.  $i[H_i, H_j]$  debe ser compatible con  $x$ , y puede contener otras observables físicas tales como espín, color, sabor, etc.

con

$$\begin{aligned}\cos(\theta^{nm}) &= \frac{\Delta_1^{nm}}{\sqrt{(\Delta_1^{nm})^2 + (\Delta_2^{nm})^2}} = \frac{\Delta_1^{nm}}{|\mathcal{F}^{nm}|}, \\ \text{sen}(\theta^{nm}) &= \frac{\Delta_2^{nm}}{\sqrt{(\Delta_1^{nm})^2 + (\Delta_2^{nm})^2}} = \frac{\Delta_2^{nm}}{|\mathcal{F}^{nm}|}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

La restricción geométrica (4.11) ahora implica que  $x^{nm}$  solo depende de la primera variable  $\tau_1^{nm}$ , y no de  $\tau_2^{nm}$ . En otras palabras, cada elemento elige una propia dirección temporal para evolucionar en función de las energías. Cuando  $n = m$  recobramos el límite clásico, pero en el régimen cuántico completo la evolución en un solo tiempo únicamente es aplicable a procesos individuales.

Aquí vale la pena mencionar un segundo efecto: el tiempo efectivo de evolución se vuelve uno solo cuando el ángulo está fijo,  $\theta^{nm} = \theta$ , implicando que el sistema ha elegido una única dirección para la evolución. Un escenario donde esto es una posibilidad es cuando se tiene una proporcionalidad entre las diferencias de energías,  $E_1^n - E_1^m = \epsilon(E_2^n - E_2^m)$ , es decir, cuando los generadores coinciden en su forma  $H_1 = \epsilon H_2 + E_0$ .

Como consecuencia, una física general de dos tiempos puede existir, considerando que las fluctuaciones en  $x$  o cualquier otra observable no sean nulas. Estas fluctuaciones se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \langle x \rangle_\psi^2 - \langle x^2 \rangle_\psi \\ &= x_{\text{clásica}}^2 - \sum_{nm} \psi_m^* \psi_n |x^{nm}(0)|^2 \exp\left(\frac{i\tau_1^{nm} |\mathcal{F}^{nm}|}{\hbar}\right),\end{aligned}\quad (4.14)$$

donde  $\psi_n = \langle n | \psi \rangle$  y  $\langle x \rangle$  es ahora reemplazado por su límite,  $x_{\text{clásica}}$ . Deseamos analizar el promedio  $\langle x^2 \rangle$  en nuestra búsqueda de efectos residuales. Entre más términos hay involucrados en  $\langle x^2 \rangle$  la posibilidad de tener superposiciones a lo largo de muchas direcciones temporales  $\tau_1^{nm}$  es mayor. Aunque se pueden emplear varios procedimientos elaborados en el estudio de la evolución cuántica y decoerencia, como operadores de densidad y ecuaciones maestras [42–44], la ecuación 4.14 es adecuada para nuestros propósitos. Notamos que la condición cuántica aparece entonces como una cota a tal cantidad de elecciones posibles de una dinámica de un solo tiempo. En nuestro intento por explorar nueva física se debe notar que el parecido entre los espectros de  $H_1$  y  $H_2$  nos lleva a una probabilidad despreciable de encontrar dinámica de dos tiempos en las fluctuaciones de cualquier observable.

## 4.2. El principio de incertidumbre extendido

Notamos que (4.14) contendrá oscilaciones fuertes, y así contribuciones nulas, excepto si el argumento del exponencial satisface una nueva relación de incertidumbre

$$(E_1^n - E_1^m)t_1 + (E_2^n - E_2^m)t_2 \sim \hbar, \quad (4.15)$$

o, redefiniendo

$$\Delta E_1 \Delta t_1 + \Delta E_2 \Delta t_2 \sim \hbar. \quad (4.16)$$

También se puede tener aquí la desigualdad, pero si el argumento del exponencial es demasiado pequeño no habría oportunidad de realizar al menos una oscilación, y la evolución no habrá producido variaciones importantes en  $\langle x^2 \rangle$ .

Hasta este momento, hicimos un análisis completamente mecánico cuántico en el que partimos de un espacio de Hilbert con dos parámetros. En este caso es necesario tener en consideración que los tiempos son parámetros de la evolución y son independientes de la existencia del operador de

**CAPÍTULO 4. IMPLICACIONES CUÁNTICAS: EVOLUCIÓN UNITARIA**  
**4.2. EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE EXTENDIDO**

---

evolución. Con este contexto debemos notar que al derivar el principio de incertidumbre extendido, tenemos que  $\Delta t_i$  se refiere a un intervalo temporal donde se hace la observación. Recordemos que para encontrar este resultado es necesaria la existencia del operador de evolución en un espacio de Hilbert y la homogeneidad en los dos tiempos. En la relación el lado izquierdo depende del observador, pero  $\hbar$  no, y tampoco la probabilidad de que un proceso ocurra.

Como una tarea final, estimemos la variación en el ángulo de las trayectorias alrededor de algún valor promedio. Definimos una longitud en las variables temporales  $t = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$  y tomamos  $\phi$  como el ángulo entre los vectores  $(t_1, t_2)$  y  $(\Delta_1^{nm}, \Delta_2^{nm}) = (\Delta E_1, \Delta E_2)$ . Tenemos, debido a (4.16),

$$\cos \phi = \frac{\hbar}{t\sqrt{(\Delta E_1)^2 + (\Delta E_2)^2}} \leq 1. \quad (4.17)$$

Los efectos en las fluctuaciones cuánticas, como hemos visto, provienen de variaciones de las energías como funciones de  $n, m$ .

Para estimar las fluctuaciones en  $\phi$  obtenemos el diferencial  $\delta\phi$  calculando la derivada de  $\cos \phi$  en ambos lados de (4.17). Esto nos permite expresar  $\delta\phi$  en términos de los incrementos en los espaciamientos de energía  $\delta(\Delta E_i)$ :

$$\delta\phi = \frac{\hbar [\Delta E_1 \delta(\Delta E_1) + \Delta E_2 \delta(\Delta E_2)]}{[(\Delta E_1)^2 + (\Delta E_2)^2] \sqrt{t^2 [(\Delta E_1)^2 + (\Delta E_2)^2] - \hbar^2}}. \quad (4.18)$$

Si mantenemos  $\hbar$  al más bajo orden, tenemos la menor estimación posible,

$$\delta\phi \sim \frac{\hbar [\Delta E_1 \delta(\Delta E_1) + \Delta E_2 \delta(\Delta E_2)]}{t [(\Delta E_1)^2 + (\Delta E_2)^2]^{3/2}}. \quad (4.19)$$

Nuestras posibilidades de detectar esta pequeña anchura  $\delta\phi$  a partir de nuestro nuevo principio de incertidumbre están mayormente limitadas por los espaciamientos de los niveles de ambos generadores de la evolución.

Por otro lado, la desigualdad en (4.17) puede aplicarse para encontrar

$$\delta\phi \leq \frac{\Delta E_1 \delta(\Delta E_1) + \Delta E_2 \delta(\Delta E_2)}{(\Delta E_1)^2 + (\Delta E_2)^2}, \quad (4.20)$$

que es ahora independiente de constantes físicas. Aunque este límite no garantiza la existencia de dos ejes temporales, podemos estar seguros de que los detalles particulares de los Hamiltonianos  $H_1, H_2$ , o, en otras palabras, el modelo de nuestro sistema físico, son suficientes para restringir la observabilidad. Del denominador en (4.20) podemos ver que los espaciamientos grandes destruyen cualquier posibilidad de una anchura finita. Aún así, debemos remarcar que la desigualdad también está controlada por las fluctuaciones  $\delta(\Delta E)$ , refiriéndonos a la composición de los paquetes de onda constando de muchas escalas de energía. Las diferencias de energía pueden fluctuar tanto si  $|\psi\rangle$  contiene una estructura de niveles fina como una gruesa. Hemos llegado a la conclusión de que la riqueza en composición da la oportunidad de observar evolución sostenida en dos tiempos.

## Capítulo 5

# Teorema de plausibilidad

En esta parte formulamos un teorema de plausibilidad para extensiones temporales con los resultados obtenidos.

**Teorema 1** (Teorema de plausibilidad clásico unidimensional). *Consideremos un sistema clásico en una dimensión. Suponemos que la dinámica del sistema está determinada por la definición de dos momentos lineales como*

$$p_i = \frac{\partial x}{\partial t_i} \quad i = 1, 2, \quad (5.1)$$

y por la segunda ley de Newton extendida en dos tiempos, dada en la ecuación (2.4),

$$F_{ij} = \frac{\partial}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial t_j} x \quad i = 1, 2. \quad (5.2)$$

Si  $F_{ij}$  no depende explícitamente de los tiempos y  $x$  es continuamente diferenciable de orden dos en los tiempos, entonces la evolución es a lo largo de una sola dirección temporal. Esta dirección está determinada por

$$\left( -\sqrt{F'_{22}}, \sqrt{F'_{11}} \right) \cdot \nabla_{12} x = 0. \quad (5.3)$$

**Demostración.** A partir de la segunda ley de Newton, como aparece en la ecuación (2.4) y si  $F_{ij}$  no depende explícitamente de los tiempos, usamos la regla de la cadena para obtener el sistema de ecuaciones que aparece en las ecuaciones (2.10,2.11). Si además  $x$  es  $C_2$  en los tiempos, podemos relacionar las ecuaciones anteriores para obtener la ecuación de una única órbita en el espacio fase, ecuación (2.14),

$$\left( \frac{p_1}{p_2} \right)^2 = \frac{dF_{11}}{dF_{22}} = \Phi(x). \quad (5.4)$$

Esta ecuación relaciona  $p_1$  y  $p_2$ , lo que nos dice que hay evolución en una sola dirección temporal. También encontramos explícitamente la dirección en la cual se tiene la evolución, haciendo los despejes pertinentes de manera que obtenemos la ecuación (2.16)

$$\left( -\sqrt{F'_{22}}, \sqrt{F'_{11}} \right) \cdot \nabla_{12} x = 0. \quad (5.5)$$

De aquí notamos que la dirección donde hay evolución es perpendicular al campo  $\mathcal{F} = (-\sqrt{F'_{22}}, \sqrt{F'_{11}})$ . q.e.d.

**Teorema 2** (Teorema de plausibilidad clásico en  $d$  dimensiones). *Tomemos un sistema determinista en  $d$  dimensiones espaciales,  $x^i(t_1, t_2)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , y dos temporales, tal que su evolución en dos tiempos está dada por la segunda ley de Newton generalizada*

$$F_{ij} = \frac{\partial}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial t_j} x \quad i = 1, 2, \quad (5.6)$$

definiendo los momentos lineales como

$$p_i = \frac{\partial x}{\partial t_i} \quad i = 1, 2. \quad (5.7)$$

Si  $F_{ij}$  no depende explícitamente de los tiempos y las coordenadas  $x^i$  son continuamente diferenciables de orden dos en los tiempos, entonces un tensor de fuerza que genere evolución no trivial y sin líneas cerradas en ambos tiempos se encuentra en un subespacio  $2d - 1$  dimensional del espacio completo  $4d$  dimensional.

**Demostración.** Nuevamente partimos de la segunda ley de Newton extendida, y consideramos una fuerza  $F_{ij}$  que no depende explícitamente de los tiempos, de manera que podemos usar la regla de la cadena para obtener un sistema de ecuaciones que se muestra en la ecuación (2.79).

A partir de aquí podemos obtener restricciones sobre el tensor de fuerza si se cumple  $x^i(t_1, t_2) \in C_2$ ,  $i = 1, \dots, d$ . La primera restricción que encontramos es que el determinante de tal sistema de ecuaciones debe ser nulo, como se ve en la ecuación (2.80), para poder tener una solución no trivial, y por lo tanto, dinámica. Además, el hecho de que  $F_{ij}$  sea simétrico en los tiempos nos da  $d$  restricciones más. Despejando del sistema lineal anterior obtenemos  $d$  ecuaciones independientes para la dinámica de cada coordenada espacial, como aparecen en la ecuación (2.86), que nos dicen que cada coordenada evoluciona en una única dirección temporal.

El resto de las restricciones sobre el tensor de fuerza vienen de estas expresiones. Tenemos que para que la dinámica no tenga líneas cerradas en los tiempos cada campo  $\vec{C}$  debe cumplir una ecuación de la forma (2.87), que en total nos dan  $d$  restricciones. Además, para que no exista evolución efectiva en un único tiempo, estos campos no deben ser todos paralelos entre sí, como se ve en la discusión de la ecuación (2.88). De lo anterior encontramos un total de  $2d + 1$  restricciones para un tensor que vive en un espacio  $4d$  dimensional, lo que prueba el teorema. Notamos que la última restricción, ecuación (2.88), es importante, sin embargo no reduce la dimensionalidad del espacio donde  $F$  produce evolución no trivial en dos tiempos.

**Teorema 3** (Teorema de plausibilidad cuántico mediante ecuaciones de onda). *Consideremos una teoría de campo que provenga de un principio de acción extremal, con métrica extendida a dos tiempos y con simetrías, de manera que el teorema de Noether sea aplicable.*

1. *Suponiendo condiciones de frontera apropiadas determinadas en las ecuaciones (3.4, 3.5), existe una carga conservada en ambos tiempos que se puede indentificar con una densidad de probabilidad, y que necesariamente es separable en los tiempos, de la forma*

$$\rho = \alpha \rho_1(t_1) + \beta \rho_2(t_2). \quad (5.8)$$

con  $\rho_1, \rho_2$  definidas en la ecuación (3.6).

2. *Con tal densidad de probabilidad, la teoría tiene un límite clásico con evolución sólo en un tiempo.*

**Demostración.**

1. Tenemos la ecuación de continuidad extendida resultante de aplicar el teorema de Noether a una teoría de campo con métrica extendida dada en la ecuación (3.1),

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad g_{\mu\nu} = \text{diag} \{+, +, -, \dots, -\}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, d + 2. \quad (5.9)$$

Partiendo de aquí integramos sobre dos volúmenes distintos, incluyendo cada uno un solo tiempo, e imponemos condiciones de frontera con las que las integrales en la superficie sean nulas. De esta manera obtenemos dos cargas conservadas en la ecuación (3.6),  $Q_i$  y por tanto, dos densidades de probabilidad, cada una relacionada con la evolución en una coordenada temporal,

$$Q_i(t_i) = \int dx \rho_i. \quad (5.10)$$

Tenemos que una densidad de probabilidad total con una carga conservada en los dos tiempos se puede construir a partir de estos resultados. Escribimos de manera funcional,  $\rho[\rho_1, \rho_2]$  y tomamos las derivadas temporales de  $\rho$ , como se hace en la ecuación (3.8). Finalmente, con un sencillo razonamiento, que aparece en el párrafo que sigue a la ecuación (3.8), concluimos que  $\rho$  es separable en los tiempos

$$\rho = \alpha \rho_1(t_1) + \beta \rho_2(t_2). \quad (5.11)$$

q.e.d.

2. Con el resultado anterior para la densidad de probabilidad total notamos que el promedio de cualquier función de la posición es separable en los tiempos, como se ve en la ecuación (3.11), de manera que

$$\langle x^i \rangle = f_1^i(t_1) + f_2^i(t_2). \quad (5.12)$$

De acuerdo al teorema de Ehrenfest, encontramos dinámicas desacopladas en los tiempos, de acuerdo a las ecuaciones (3.13) y (3.14). Con la forma obtenida para el promedio de  $x^i$  tenemos que las funciones deben ser tales que  $f_1^i = cte.$  o  $f_2^i = cte.$ , por lo que la dinámica efectiva de la posición promedio es en un único tiempo. q.e.d.

**Teorema 4** (Teorema de plausibilidad cuántico con evolución unitaria). *Suponemos un espacio de Hilbert de estados que evolucionan en dos tiempos con un operador unitario suave  $U(t_1, t_2)$  en dos parámetros temporales. Tenemos que:*

- I) *Existen dos generadores de evolución  $H_i(t_i)$ ,  $i = 1, 2$  individuales, relacionados con cada uno de los tiempos.*
- II) *Si  $U$  es suave, entonces los generadores cumplen una relación de anticonmutación relacionada con sus derivadas temporales,*

$$[H_i, H_j] = i\hbar \partial_{t_i} H_j. \quad (5.13)$$

- III) *Hay una imagen de Heisenberg extendida, de manera que para cualquier operador definido como  $A^H = U^\dagger A U$  se cumple la ecuación siguiente para la evolución de  $A^H$ ,*

$$i\hbar \partial_i A^H = [A^H, H_i^H], \quad i = 1, 2. \quad (5.14)$$

- IV) *Además, si  $H_1$  y  $H_2$  no dependen de los tiempos explícitamente, existe una representación matricial dada por la base propia común,  $H_i|n\rangle = E_i^n|n\rangle$ . Suponiendo que la posición y sus elementos matriciales tienen suficientes derivadas continuas, entonces cada elemento de matriz  $x^{mn} = \langle m|x|n\rangle$  evoluciona en una dirección temporal especificada por los eigenvalores de la energía según*

$$(\Delta E_2, -\Delta E_1) \cdot \nabla_{12} x^{nm} = 0, \quad (5.15)$$

con  $\Delta E_i = E_i^n - E_i^m$  ( $i = 1, 2$ ).

**Demostración.**

- I) Para encontrar los generadores  $H_i(t_i)$ ,  $i = 1, 2$ , expandemos infinitesimalmente el operador de evolución  $U$  de la manera usual (véase [45], p.68), pero para cada uno de los tiempos. Escribimos una evolución infinitesimal en  $t_1$  de un estado en el espacio de Hilbert como

$$|a(t_1 + dt_1, t_2)\rangle = U(t_1 + dt_1, t_2; t_1, t_2)|a(t_1, t_2)\rangle. \quad (5.16)$$

Suponiendo que  $t_1$  es un parámetro continuo, se debe cumplir

$$\lim_{dt_1 \rightarrow 0} U(t_1 + dt_1, t_2; t_1, t_2) = 1, \quad (5.17)$$

y busquemos mantener la diferencia entre este operador infinitesimal y la unidad del orden de  $dt_1$ . Además,  $U$  debe ser unitario y cumplir con la propiedad de composición en ambos tiempos. En particular en  $t_1$  tal propiedad se escribe como

$$U(t'_1, t_2; t_{01}, t_2) = U(t'_1, t_2; t_1, t_2)U(t_1, t_2; t_{01}, t_2), \quad t'_1 > t_1 > t_{01}. \quad (5.18)$$

Tenemos que para cumplir estos requerimientos  $U(t_1 + dt_1, t_2; t_1, t_2)$  debe tener la forma

$$U(t_1 + dt_1, t_2; t_1, t_2) = 1 - iH_1 dt_1 \quad (5.19)$$

con  $H_1$  hermítico. Tenemos algo similar para  $H_2$ , de manera que obtenemos ambos generadores de evolución hermíticos,  $H_1$ ,  $H_2$ , q.e.d.

- II) Del resultado anterior se deduce la existencia de dos ecuaciones de Schrödinger para el operador  $U$ , como aparecen en la ecuación (4.2). Si  $U$  es suave en alguna región del espacio  $t_1, t_2$ , tenemos que sus derivadas temporales conmutan, y usando las ecuaciones de Schrödinger (4.2) tenemos que

$$\partial_1(H_2U) = \partial_2(H_1U). \quad (5.20)$$

A continuación, multiplicamos por  $U^\dagger$  del lado derecho y volvemos a usar (4.2) para obtener la ecuación buscada.

- III) Con las ecuaciones de Schrödinger, (4.2), y la definición de  $A^H$  llegamos directamente al resultado deseado calculando la derivada temporal de  $A^H$ .
- IV) Calculamos los elementos matriciales de las velocidades, de la ecuación (4.8), que resultan

$$v_i^{nm} = \partial_i x^{nm} = x^{nm} \Delta E_i \quad (5.21)$$

Si las velocidades y sus elementos matriciales son funciones suaves, podemos igualar las parciales cruzadas de  $x^{nm}$ , lo que nos da

$$(\Delta E_2, -\Delta E_1) \cdot \nabla_{12} x^{nm} = 0. \quad (5.22)$$

De aquí vemos que la evolución del elemento de matriz se restringe a la dirección perpendicular al campo  $(\Delta E_2, -\Delta E_1)$ , que a su vez depende de los números de cuantos  $n, m$ . q.e.d.

**Corolario 1.** *Si la dinámica está determinada por el operador*

$$F_{ij} \equiv -\frac{1}{\hbar^2} [[x, H_j], H_i] \quad i, j = 1, 2, \quad (5.23)$$

*podemos extender el teorema de Ehrenfest y por lo tanto tenemos un límite clásico dado por*

$$\langle a_{ij} \rangle = \partial_{ij}^2 \langle x \rangle = \langle F_{ij} \rangle \quad i, j = 1, 2, \quad (5.24)$$

**Demostración.** Al tener los generadores de evolución  $H_1, H_2$  encontramos dos velocidades y cuatro aceleraciones, usando el resultado del punto III en el teorema 4, ecuación (5.14),

$$v_i = -\frac{i}{\hbar} [x, H_i], \quad a_{ij} = \partial_i v_j = -\frac{1}{\hbar^2} [[x, H_j], H_i] \equiv F_{ij}. \quad (5.25)$$

con la dinámica determinada por  $F_{ij}$ . Usando un estado fijo podemos obtener una ecuación para los promedios dada por

$$\langle a_{ij} \rangle = \partial_{ij}^2 \langle x \rangle = \langle F_{ij} \rangle \quad i, j = 1, 2, \quad (5.26)$$

que es el límite clásico de acuerdo con la extensión natural del teorema de Ehrenfest. q.e.d.

**Corolario 2.** *La evolución de la varianza de un operador implica la existencia de un principio de incertidumbre generalizado para la evolución en dos tiempos*

$$\Delta E_1 \Delta t_1 + \Delta E_2 \Delta t_2 \sim \hbar, \quad (5.27)$$

$$(E_1^n - E_1^m)t_1 + (E_2^n - E_2^m)t_2 \sim \hbar. \quad (5.28)$$

**Demostración.** Al tener un límite clásico que evoluciona en un solo tiempo, encontramos que sólo hay evolución en dos tiempos cuando existen fluctuaciones en las observables. Estas fluctuaciones se escriben en la ecuación (4.14). Para que existan tales fluctuaciones es necesario que el argumento de la exponencial cumpla la relación (4.15),

$$(E_1^n - E_1^m)t_1 + (E_2^n - E_2^m)t_2 \sim \hbar, \quad (5.29)$$

que es la ecuación (5.27) cuando  $t_{1,0} = 0, t_{2,0}$ , poniendo los tiempos iniciales iguales a cero, sin pérdida de generalidad. lo que nos define el principio de incertidumbre extendido.

**Corolario 3.** *La desviación del ángulo de fluctuación entre las direcciones de evolución de distintos elementos matriciales está restringida por*

$$\delta\phi \leq \frac{\Delta E_1 \delta(\Delta E_1) + \Delta E_2 \delta(\Delta E_2)}{(\Delta E_1)^2 + (\Delta E_2)^2}, \quad (5.30)$$

con  $t = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$  y  $\phi$  el ángulo entre los vectores  $(t_1, t_2)$  y  $(\Delta E_1, \Delta E_2)$ .

**Demostración.** Usando la relación (4.16) del principio de incertidumbre encontramos la ecuación (4.17) para el coseno de  $\phi$ . Calculando el diferencial  $\delta\phi$  tenemos que, la menor estimación posible aparece como la ecuación (4.19),

$$\delta\phi \sim \frac{\hbar [\Delta E_1 \delta(\Delta E_1) + \Delta E_2 \delta(\Delta E_2)]}{t [(\Delta E_1)^2 + (\Delta E_2)^2]^{3/2}}. \quad (5.31)$$

Finalmente, podemos aplicar la desigualdad que resulta de la ecuación (4.17) al tomar en consideración que  $\cos \phi \leq 1$  en el resultado anterior para encontrar el límite deseado.



# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo se encontraron las condiciones necesarias para que un sistema físico en 1, 2, 3 o infinitas dimensiones espaciales y dos temporales tenga genuina evolución temporal en dos direcciones.

Extendimos la mecánica clásica mediante una reformulación de la segunda ley de Newton, encontrando que en el caso unidimensional no hay evolución permitida en dos tiempos, y en los casos 2 y 3 dimensionales y general hay severas restricciones para la fuerza externa.

En lo que se refiere a la mecánica cuántica se estudió el caso de ecuaciones de onda de dimensionalidad extendida a través de las corrientes de Noether asociadas a la conservación de probabilidad. Se encontró que la evolución en dos tiempos, de cualquier condición inicial y para cualquier ecuación de onda que provenga de un principio de acción extremal, la carga de Noether, o probabilidad total, debe ser una función separable, produciendo fuertes restricciones en el promedio de cualquier observable. Se argumentó que en el límite clásico la separabilidad conduce necesariamente a una dinámica trivial de un tiempo.

También se desarrolló un formalismo completamente mecánico cuántico de dos tiempos con el fin de subsanar las imposibilidades de una ecuación de onda con métrica extendida. En el marco de Heisenberg de este nuevo formalismo se extendió la dinámica de una observable  $x$  en representación matricial de dimensión infinita. Dada la infinita dimensionalidad espacial de este sistema no se encontró un resultado análogo al caso clásico, lo que abrió una ventana de oportunidad a la dinámica multitemporal. En este escenario se encontraron principios de incertidumbre de energía-tiempo generalizados que restringen la observabilidad de este tipo de física en las fluctuaciones de las observables alrededor de su promedio clásico.

En suma, las ecuaciones diferenciales de dos parámetros contienen condiciones de consistencia que determinan la plausibilidad de dos ejes temporales para sistemas de dimensión finita, mientras que para dimensión infinita (caso cuántico), aunque el criterio no decida, las correcciones cuánticas pueden encontrarse en términos del espectro y la constante de Planck.

Es importante mencionar que la violación de las restricciones aquí encontradas implicaría desviaciones importantes a la física conocida, tales como el no tener una ecuación diferencial que determine la dinámica.

Podemos resumir los resultados encontrados en la siguiente tabla:

Dimensiones espaciales	Plausibilidad
1 dimensión espacial	No se puede tener evolución en dos tiempos
d dimensiones espaciales	Tensor de fuerza de dimensión reducida
$\infty$ dimensiones espaciales Caso cuántico	El criterio no decide, las fluctuaciones se estiman con el principio (4.15).

## 6.1. Alcances y límites de la teoría

Es conveniente analizar las consecuencias de las suposiciones hechas a lo largo de este trabajo en cuanto a la generalidad de las teorías analizadas y la posibilidad de utilizar otros enfoques con objetivos similares. En la figura 1.1 aparecen las regiones de las teorías exploradas, muchas de las teorías que se pueden analizar como lo hicimos entran también en estas regiones. A continuación hacemos algunos comentarios respecto a los alcances de la teoría aquí desarrollada.

Para empezar, en el análisis clásico se parte de la suposición de que la naturaleza es un sistema dinámico, por lo que tenemos una ecuación diferencial que la hace evolucionar. Proponemos la segunda ley de Newton como punto de partida, ya que es un problema de condiciones iniciales bien planteado y una manera muy general de tener una ecuación determinista. Así mismo es equivalente a un enfoque con ecuaciones de Hamilton o ecuaciones diferenciales de mayor orden, el cual también se podría realizar pero queda fuera del objetivo de esta tesis. También suponemos, junto al determinismo, localidad en el tiempo, de otra manera se tendrían ecuaciones diferenciales con un número infinito de condiciones iniciales. No hemos realizado los detalles de tal análisis.

En cuanto a las ecuaciones de campo, es importante notar que, gracias a que el análisis está basado en una ecuación de continuidad con métrica extendida, tenemos que cualquier teoría que cumpla una ecuación de campo en dos tiempos y que tenga simetrías se puede estudiar como hicimos en el capítulo 3. En particular, las teorías de norma cumplen con un principio variacional. Adicionalmente, tenemos dos tiempos simétricos e igualmente importantes, lo que nos dice que la invariancia de norma se debe mantener, por lo que aún se puede usar el teorema de Noether y encontrar la carga conservada que corresponde a la densidad de probabilidad. No hemos realizado tal análisis, pero es importante notar que las consecuencias generales encontradas en la sección 3.1 aún serían válidas.

Así mismo, en segunda cuantización se sigue teniendo una carga conservada, aunque esta ya no corresponda a la densidad de probabilidad, sino a la diferencia entre el número de partículas con carga positiva y el número de partículas con carga negativa. Nótese que el número de partículas no se conserva. Véase por ejemplo el capítulo 4 en [46], en el que se promueve el campo a uno cuántico y se propone el operador de número. Tales teorías igualmente se pueden analizar con el formalismo desarrollado, aunque esto no se realizó en la presente tesis. En este caso la matriz  $S$  conecta estados en el espacio de Fock iniciales y finales, pero, a nivel de operadores las ecuaciones de movimiento son similares a las ecuaciones de campo para ondas (*e.g* Klein-Gordon, Maxwell, Dirac, etc.), excepto por términos de ordenamiento de operadores.

En el caso de la teoría de la gravedad, es posible hacer un análisis de consistencia mediante una ecuación de campo no lineal para la métrica. En este caso, las leyes de conservación se imponen sobre el tensor de energía momento, usando la derivada covariante, o localmente mediante coordenadas normales gaussianas. La ecuación de continuidad sería en este caso tensorial. Sin embargo, tal análisis está fuera del alcance de esta tesis. Huelga decir que en el caso cuántico no existe una respuesta para estas interrogantes.

Por otro lado, en el último capítulo hicimos un análisis completamente mecánico cuántico en el que partimos de un espacio de Hilbert con dos parámetros. En este caso es necesario tener en consideración que los tiempos son parámetros de la evolución y son independientes de la existencia del operador de evolución mismo. En este contexto debemos notar que al derivar el principio de incertidumbre extendido, ecuación (4.16), tenemos que  $\Delta t_i$  se refiere a un intervalo temporal donde se hace la observación. Recordemos que para encontrar este resultado es necesaria la existencia del operador de evolución en un espacio de Hilbert y la homogeneidad en los dos tiempos. En la relación (4.16) el lado izquierdo depende del observador, pero  $\hbar$  no, como tampoco la probabilidad de que un proceso ocurra.

---

## 6.2. Similitudes y diferencias con la teoría relativista de varios cuerpos

En el desarrollo clásico encontramos las restricciones fundamentales sobre los campos de fuerza que generan la evolución de las coordenadas en dos tiempos, en función del número de coordenadas. Estas restricciones no deben confundirse con la teoría de restricciones propuesta por Dirac [47]. Sin embargo, parece haber una analogía con este tema al tratar con la relatividad especial de varios cuerpos y merece algunos comentarios. En este escenario, los múltiples tiempos surgen de varios cuadvectores  $x_\mu^{(i)}$  para cada partícula, donde  $i$  es el índice de partícula, de manera que existe una variable temporal,  $x_0^{(i)}$ , independiente en apariencia, unida a cada cuadvector. Las restricciones que surgen de esta teoría corresponden a la invariancia de cada masa en reposo  $m_i$ , y tienen la forma  $p_i^{(i)\mu} p_\mu^{(i)} = m_i^2 c^2$ . Esto restringe la evolución a una superficie, ya que cada  $p_i^{(i)0}$  está determinada por los momentos y masas. La dependencia aparente de los múltiples tiempos ha sido reducida anteriormente a una dinámica en un sólo tiempo en [48–50], donde fue posible describir la dinámica de un sistema compuesto mediante un único Hamiltoniano, correspondiente a la componente temporal del cuadrimento total. De esta manera pueden introducirse las interacciones entre partículas usando cuadvectores perpendiculares, dependientes del marco de referencia, junto con coordenadas de Jacobi relativas generalizadas al espacio de Minkowski, en contraste con las críticas comunes relacionadas con la inconsistencia de ciertos tipos de interacciones relativistas [31]. Algunos resultados sobre este tema fueron resumidos en [51], especialmente aquellos conectados con el oscilador de Dirac de varios cuerpos. En [52, 53] se dan aplicaciones más recientes a la espectroscopía de compuestos relativistas, considerándose ideas similares para partículas relativistas fuertemente interactuantes. Debemos hacer notar que la física de dos tiempos de una única partícula no es un caso particular de la física relativista de muchos tiempos típica, sino que es una teoría independiente.

En cuanto a la extensión aquí propuesta a la mecánica cuántica en conexión con el problema de muchos cuerpos en relatividad, debe notarse que aunque existen tales teorías, la visión exitosa de nuestro mundo físico es aquella dada por la Teoría Cuántica de Campos Relativista [46], en completo acuerdo con nuestros resultados. En esta teoría sólo se necesita un conjunto de coordenadas y los estados de varias partículas se representan en segunda cuantización mediante estados de Fock. Los primeros intentos de describir la Electrodinámica Cuántica usando varios conjuntos de coordenadas para  $N$  cuerpos, con  $N$  fijo, las primeras teorías físicas con varios tiempos fueron propuestas en esta dirección por Dirac [54], Bloch [55] y Tomonaga [56]. Se han hecho avances adicionales en años más recientes [31, 57–60].

## CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

### 6.2. SIMILITUDES Y DIFERENCIAS CON LA TEORÍA RELATIVISTA DE VARIOS CUERPOS

---

# Bibliografía

- [1] E. Piceno, A. Rosado, and E. Sadurní. Fundamental constraints on two-time physics. *Eur. Phys. J. Plus*, 131:352, October 2016.
- [2] J. Scherk and J. H. Schwarz. How to get masses from extra dimensions. *Nucl. Phys. B*, 153(1):61–88, June 1979.
- [3] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov. Extra space-time dimensions: Towards a solution to the cosmological constant problem. *Phys. Lett. B*, 125(2-3):139, May 1983.
- [4] Steven Weinberg. Charges from extra dimensions. *Phys. Lett.*, 125(4):265–269, June 1983.
- [5] E. Alvarez and M. Belen Gavela. Entropy from extra dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 51(10):931, September 1983.
- [6] J. D. Barrow. Observational limits on the time evolution of extra spatial dimensions. *Phys. Rev. D*, 35(6):1805–1810, March 1987.
- [7] Yutaka Hosotani. Dynamical mass generation by compact extra dimensions. *Phys. Lett. B*, 126(5):309–313, July 1983.
- [8] E. Cremmer and Joel Scherk. Spontaneous compactification of extra space dimensions. *Nucl. Phys. B*, 118(1-2):61–75, January 1977.
- [9] Thomas Flacke, Dan Hooper, and John March-Russell. Improved bounds on universal extra dimensions and consequences for LKP dark matter. *Phys. Rev. D*, 73(9):095002, May 2006. [Erratum: *Phys. Rev. D* 74, 019902(2006)].
- [10] Kyoungchul Kong and Konstantin T. Matchev. Precise calculation of the relic density of Kaluza-Klein dark matter in universal extra dimensions. *JHEP*, 01:038, January 2006.
- [11] Frank J. Petriello. Kaluza-Klein effects on higgs physics in universal extra dimensions. *JHEP*, 05:003, May 2002.
- [12] T. Appelquist, Hsin-Chia Cheng, and B. A. Dobrescu. Bounds on universal extra dimensions. *Phys. Rev. D*, 64(3):035002, August 2001.
- [13] Ulrich Haisch and Andreas Weiler. Bound on minimal universal extra dimensions from anti-B  $-\bar{j}X(s)\gamma$ . *Phys. Rev. D*, 76(3):034014, August 2007.
- [14] Florian Goertz, Ulrich Haisch, and Matthias Neubert. Bounds on warped extra dimensions from a standard model-like higgs boson. *Phys. Lett. B*, 713(1):23–28, June 2012.
- [15] N. Arkani Hamed, S. Dimopoulos, G. R. Dvali, and J. March Russell. Neutrino masses from large extra dimensions. *Phys. Rev. D*, 65(2):024032, January 2002.
- [16] K. R. Dienes, E. Dudas, and T. Gherghetta. Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions. *Nucl. Phys. B*, 537(1-3):47–108, 1999.

- [17] Pier Paolo Giardino and Paolo Lodone. Experimental bounds on large extra dimensions from di-jet event production in hadron collisions. *J. Phys. Conf. Ser.*, 323(1):012017, 2011.
- [18] R. Allahverdi, C. Bird, S. Groot Nibbelink, and M. Pospelov. Cosmological bounds on large extra dimensions from nonthermal production of Kaluza-Klein modes. *Phys. Rev. D*, 69(4):045004, February 2004.
- [19] M. A. López Osorio, E. Martínez Pascual, J. Montano, H. Novales Sánchez, J. J. Toscano, and E. S. Tututi. Trilinear gauge boson couplings in the standard model with one universal extra dimension. *Phys. Rev. D*, 88(1):016010, July 2013.
- [20] A. Flores-Tlalpa, J. Montano, H. Novales-Sánchez, F. Ramirez-Zavaleta, and J. J. Toscano. One-loop effects of extra dimensions on the  $WW\gamma$  and  $WWZ$  vertices. *Phys. Rev. D*, 83(1):016011, January 2011.
- [21] H. Novales-Sánchez and J. J. Toscano. About gauge invariance in compactified extra dimensions. *Phys. Rev. D*, 84(5):057901, September 2011.
- [22] H. Novales-Sánchez and J. J. Toscano. Gauge invariance and quantization of Yang-Mills theories in extra dimensions. *Phys. Rev. D*, 82(11):116012, December 2010.
- [23] M. A. López Osorio, E. Martínez Pascual, H. Novales Sánchez, and J. J. Toscano. Yang-Mills theories with an arbitrary number of compactified extra dimensions. *Phys. Rev. D*, 89(11):116015, June 2014.
- [24] I. Bars. Survey of two-time physics. *Class. Quant. Grav.*, 18(16):3113, 2001.
- [25] I. Bars and J. Terning. *Extra dimensions in space and time*. Multiversal Journeys. Springer New York, 2010.
- [26] I. Bars and C. Kounnas. Theories with two times. *Phys. Lett. B*, 402(1-2):25, 1997.
- [27] I. Bars. Gravity in 2T-physics. *Phys. Rev. D*, 77(12):125027, 2008.
- [28] I. Bars, C. Deliduman, and D. Minic. Lifting M-theory to two-time physics. *Phys. Lett. B*, 457(4):275, 1999.
- [29] V. M. Villanueva, J. A. Nieto, L. Ruiz, and J. Silvas. Hamiltonian Noether theorem for gauge systems and two time physics. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38(32):7183, July 2005.
- [30] I. Bars and C. Kounnas. String and particle with two times. *Phys. Rev. D*, 56(6):3664, 1997.
- [31] M. Lienert. A relativistically interacting exactly solvable multi-time model for two massless dirac particles in  $1 + 1$  dimensions. *J. Math. Phys.*, 56(4):042301, April 2015.
- [32] D. Bailin and A. Love. Kaluza-klein theories. *Rep. Prog. Phys.*, 50(9):1087–1170, September 1987.
- [33] A. Komar. Interacting relativistic particles. *Phys. Rev. D*, 18(6):1881–1886, September 1978.
- [34] H. Jensen and H. Koppe. Quantum mechanics with constraints. *Ann. Phys.*, 63(2):586–591, April 1971.
- [35] R. C. T. da Costa. Quantum mechanics of a constrained particle. *Phys. Rev. A*, 23(4):1982–1987, April 1981.
- [36] E. Sadurní and W. P. Schleich. Conformal mapping and bound states in bent waveguides. *AIP Conf. Proc.*, 1323:283–295, 2010.

- [37] S. Bittner, B. Dietz, M. Miski-Oglu, A. Richter, C. Ripp, E. Sadurní, and W. P. Schleich. Bound states in sharply bent waveguides: Analytical and experimental approach. *Phys. Rev. E*, 87(4):042912, April 2013.
- [38] I. Y. Arefeva and I. V. Volovich. Kaluza-Klein theories and the space-time signature. *JETP Letters*, 41:654, 1985.
- [39] I. Y. Arefeva and I. V. Volovich. Kaluza-Klein theories and the signature of space-time. *Phys. Lett. B*, 164(4-6):287, December 1985.
- [40] I. Y. Arefeva, B. G. Dragovic, and I. V. Volovich. The extra timelike dimensions lead to a vanishing cosmological constant. *Phys. Lett. B*, 177(3-4):357, September 1986.
- [41] R. Bonezzi, E. Latini, and A. Waldron. Gravity, two times, tractors, Weyl invariance, and six-dimensional quantum mechanics. *Phys. Rev. D*, 82(6):054037, September 2010.
- [42] W. H. Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Rev. Mod. Phys.*, 75(3):715, July 2003.
- [43] M. Schlosshauer. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 76(4):1267, October 2005.
- [44] A. Isar, A. Sandulescu, H. Scutaru, and W. Scheid. Open quantum systems. *Int. J. Mod. Phys. E*, 03(2):635, June 1994.
- [45] J. J. Sakurai and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 2nd. edition, 2010.
- [46] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [47] P. A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Number 2 in Belfer Graduate School Monograph Series. Yeshiva University, 1964.
- [48] A. O. Barut and S. Komy. Derivation of nonperturbative relativistic two-body equations from the action principle in quantum electrodynamics. *F. der Physik*, 33:309–318, 1985.
- [49] M. Moshinsky and A. Nikitin. The many body problem in relativistic quantum mechanics. *Rev. Mex. Fis.*, 50:66–73, February 2005.
- [50] M. Moshinsky and E. Sadurní. Composite particle in relativistic quantum mechanics and their application to three quark systems. In *25th Int. Coll. Group Theoretical Methods in Physics.*, volume 185 of *Inst. Phys. Conf. Ser.*, page 403, 2005.
- [51] M. Moshinsky and Y. F. Smirnov. *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*. Hardwood Academic Publishers, Amsterdam, 1996.
- [52] E. Sadurní. Kleingordon and dirac gyroscopes. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42(1):015209, November 2009.
- [53] E. Sadurní, J. A. Franco-Villafañe, U. Kuhl, F. Mortessagne, and T. H. Seligman. Schematic baryon models, their tight binding description and their microwave realization. *New J. Phys.*, 15:123014, December 2013.
- [54] P. A. M. Dirac. Relativistic quantum mechanics. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 136:453–464, 1932.
- [55] F. Bloch. Die physikalische bedeutung mehrerer zeiten in der quantenelektrodynamik. *Phys. Z. d. Sowjetunion*, 5:301–315, 1934.

- [56] S. Tomonaga. *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*, chapter On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields, pages 156–168. Dover, 1958.
- [57] M. Lienert. On the question of current conservation for the two-body dirac equations of constraint theory. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 48(32):325302, August 2015.
- [58] H. W. Crater and P. Van Alstine. Two-body dirac equations. *Ann. Phys.*, 148(1):57–94, June 1983.
- [59] H. Sazdjian. Relativistic wave equations for the dynamics of two interacting particles. *Phys. Rev. D*, 33(11):3401–3424, June 1986.
- [60] S. Petrat and R. Tumulka. Multi-time Schrödinger equations cannot contain interaction potentials. *J. Math. Phys.*, 55(3):032302, March 2014.

# Apéndice I. Artículo

Como resultado de la investigación realizada en esta tesis se ha publicado el siguiente artículo [1]:

- E. Piceno, A. Rosado, and E. Sadurní. Fundamental constraints on two-time physics. *Eur. Phys. J. Plus*, 131:352, October 2016.

A continuación se reproduce la primera página del artículo.



# Fundamental constraints on two-time physics

E. Piceno<sup>1</sup>, A. Rosado<sup>2</sup>, and E. Sadurni<sup>2,a</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal 1152, Puebla, Mexico

<sup>2</sup> Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, 72570 Puebla, Mexico

Received: 25 April 2016 / Revised: 13 September 2016

Published online: 5 October 2016 – © Società Italiana di Fisica / Springer-Verlag 2016

**Abstract.** We show that generalizations of classical and quantum dynamics with two times lead to a fundamentally constrained evolution. At the level of classical physics, Newton's second law is extended and exactly integrated in a  $(1 + 2)$ -dimensional space, leading to effective single-time evolution for any initial condition. The cases  $2 + 2$  and  $3 + 2$  are also analyzed. In the domain of quantum mechanics, we follow strictly the hypothesis of probability conservation by extending the Heisenberg picture to unitary evolution with two times. As a result, the observability of two temporal axes is constrained by a generalized uncertainty relation involving level spacings, total duration of the effect and Planck's constant.

## 1 Introduction

Two-time physics has been a tantalizing possibility of dimensionally extended descriptions of our world [1–5], in particular for those extensions related to extra-dimensional high-energy physics and their inherent compactification mechanisms [6–9]. The focus of attention in such theoretical endeavours is the existence of phenomenological as well as consistency constraints that allow to answer the simplest, yet most profound question on the nature of space-time. Undoubtedly, all areas of physics are affected by its outcome. Noteworthy attempts [10–15] have directed their efforts to distill numerical bounds on physical quantities —*i.e.* energies or masses— using a theoretical apparatus related to extended-metric versions of classical and quantum field theories. In these terms —*i.e.*, a problem of group representations on dimensionally extended manifolds— the challenge seems fit for particle physicists, who are well versed in mechanisms [16,17] that either hide or expose measurable quantities in the domain of current experimental capabilities. We believe, however, that even more fundamental restrictions may arise from the point of view of dynamical systems when their evolution is extended to two parameters. At such an elementary level of formality, we encounter already a number of compromising questions.

Indeed, we may formulate initially symmetric two-time dynamics in compliance with Newton's second law and discover, with little effort, that any  $1 + 2$  dimensional extension can be integrated under reasonable smoothness conditions on the functions involved. The main result is that the dynamics occur on a restricted surface and therefore only one time. This would be a surprising result in principle, since typical integrability conditions rest on the existence of integrals of the motion that match the system's dimensionality. Our results show that in the presence of two times, not only the integrability conditions must be rethought, but also that  $1 + 2$  extensions render simple solutions with a preferred time axis at the level of classical mechanics. It is the resulting motion and not the shape of the equations what yields an effective one-time description. We can formulate the  $2 + 2$  and  $3 + 2$  dimensional extensions in the same manner, therefore these extensions yield similar results. In these cases, two-time evolution takes place only in a dimensionally reduced surface of the force space. Thus we still have one preferred time direction for the case of a general force, and two times for very special cases.

Less restrictive conditions can be derived in quantum mechanical settings, either following the approach of dimensionally extended wave equations, or by extending the number of evolution generators that ensure unitary dynamics. In regard to the former, the conservation of probability is at stake: dimensionally extended continuity equations yield, upon integration, a conserved probability along a single time direction. In the present work we show that circumventing such a drawback via unitary evolution leads, after dynamical analysis, to classical limits constrained again by Newton's second law for two times —now at the level of quantum averages. However, our probability-conserving approach also

<sup>a</sup> e-mail: sadurni@ifuap.buap.mx