Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Suavidad y la propiedad de Kelley

TESIS PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA
Alexis Yannick Munive Mena

DIRECTOR DE TESIS
Dr. Mauricio Esteban Chacón Tirado

PUEBLA, PUE. 25 de noviembre de 2024.

Para Pupis,
Franklin
y Brandon Sanderson.

Agradecimientos

A las primeras personas que les quiero agradecer son a mi mama y a mi hermano, ellos fueron los primeros en saber que iba a estudiar matemáticas haya en la primavera del 2017. Mi mama siempre me ha apoyado además me doy mucha confianza al empezar esta carrera y mucha paciencia al terminar esta tesis. Mi hermano siempre ha estado conmigo, lo conozco de toda la vida y sé que seguiremos viviendo alegrías y molestias.

Siguiendo con mi familia les doy las gracias a mi abuelo Jacobo, a mi abuela Rodolfina, a mi tía Noemi, a mi tía Karina, a mi madrina Isis y a mis primos; Checo, Emi, Danna, Manue y Alan, me han visto crecer y con ellos he vivido muchas etapas, pido disculpas a los que hice que se preocuparan por no decir que ya estaba haciendo mi tesis, en especial a mi tía Karina que cada que podía me lo recordaba.

Le doy gracias a mi asesor el Dr. Mauricio Chacón, por estarme ayudando semana a semana con esta tesis y por aprenderle mucho como su tesista y como su alumno. Mención especial a mi profe de Matemáticas Básicas Manuel Ibarra, a mi profa de Geometría Analítica del Espacia Laura Cano, a mi profe de Geometrías No Euclidianas Agustín Contreras, a mi profe de Anillos y Campos Angel García y a mi profe de Servicio Social Eduardo Rosales, aprendí lo que pude de ellos y les doy las gracias por ser influencias positivas en mi carrera.

Igual quiero agradecerles a mi mejor amigo Marti por los años sin pelear, a mi mejor amiga Ivon por los años peleando, a mi gran amiga Jessi por los años riendo y a Adri. Agrego a las amistades que hice en mi facultad y las que hice en la FIQ; Karla B, Alejandro, Damaris, Vida, Diana, Brandon y Ericka. Sin olvidar a mis buenos compañeros; Cinthia, Alberto, Karen y Jhon.

Un último agradecimiento a mi jurado la Dra. María de Jesús López Toriz, el Dr. Fernando Macías Romero y la Dra. Paula Ivon Vidal Escobar por los comentarios y correcciones que hicieron para mejorar esta tesis.

A todos ustedes muchas gracias.

Índice general

Introducción

La teoría de continuos es una rama de la topología, que se encarga de estudiar a los espacios compactos, conexos y con más de un punto. Su estudio comenzó a inicios del siglo XX en Polonia, con los trabajos Z. Janiszewski, W. Sierpiński, S. Mauzurkiewicz, B. Knaster, K. Kuratowski y K. Borsuk. En Estados Unidos la estudiaron después los matemáticos R. L. Moore, G. T. Whyburn, F. B. Jones, R. H. Sorgenfrey, G. S. Young, J. L. Kelley, R. H. Bing y E. Moise, entre otros. En México se ha estudiado esta área desde los años ochentas, donde se reunían Adalberto García-Máynez, Alejandro Illanes, Sergio Macías, Luis Montejano, e Isabel Puga, para leer el libro *Hyperspaces of Sets*, de Sam B. Nadler, Jr. Actualmente tales investigadores son de renombre en la matemática en México.

Recordemos que un hiperespacio de un continuo es una familia de ciertos subconjuntos de un continuo, que además tengan alguna propiedad particular. La propiedad de Kelley fue definida en 1942 por J. L. Kelley en [8, 3.2, p. 26] y él la utilizó para analizar la contractibilidad de hiperespacios. Más adelante, en 1977, R. W. Wardle estudio la Propiedad 3.2 de [8], la propiedad de Kelley, en [13]. Así J. J. Charatonik y W. J. Charatonik usando el trabajo de R. W. Wardle en [13] dieron la definición de la propiedad de Kelley que se uso en esta tesis. Por otro lado la noción de suavidad, para el espacio de dendroides, fue propuesto en 1970 por J. J. Charatonik y C. Eberhart en [2, DEFINITION, p. 298]. La propiedad de Kelley y suavidad de continuos son conceptos débiles comparados con la conexidad local.

En la presente tesis estudiaremos y explicaremos de manera detallada el artículo [1], es decir estará enfocada dentro de la teoría de continuos en las interrelaciones entre la suavidad, la propiedad de Kelley, la conexidad local y la conexidad en pequeño. Esta tesis se conforma de tres capítulos; uno sobre continuos e hiperespacios que servirá como preliminares al artículo mencionado, otro sobre la suavidad de continuos y la conexidad local de continuos, y el último de continuos con la propiedad de Kelley.

Capítulo 1

Introducción y definiciones básicas

En este capítulo tratamos el concepto de continuos, así como algunos ejemplos, también estudiamos el concepto de hiperespacios de continuos y dimos una métrica para los hiperespacios 2^X y $C(X)$, vimos algunos modelos conocidos de algunos hiperespacios, por último dimos algunas definiciones y resultados sobre continuos que utilizamos más adelante.

1.1. Continuos

Definición 1.1. Un espacio métrico X es un *continuo* si X tiene más de un punto, es compacto y conexo.

Ejemplo 1.2. (a) [12, 1.1 Arcs, p. 3] El intervalo $[0, 1]$ es cerrado y acotado, es decir es compacto, además es conexo y tiene más de un punto, por lo tanto $[0, 1]$ es un continuo. En la Figura 1.1 tenemos dicho intervalo.

Figura 1.1: Intervalo cerrado $[0, 1]$ como subconjunto de $\mathbb{R}$, con la topología usual

Un espacio cualquiera homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$ es también un continuo, a estos espacios los llamaremos *arcos*. Dados un arco cualquiera X, y h un homeomorfismo de $[0,1]$ a X, los puntos $h(0)$ y $h(1)$ se llaman *puntos extremos del arco X*. En la Figura 1.2 tenemos un arco A con puntos extremos e y e'.

Figura 1.2: Un arco A con puntos extremos e y e'

(b) [12, 1.2 n-Cells, p. 4] Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, tenemos su norma $||x|| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, definimos $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$. El conjunto B^n es una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$, como B^n es acotada y $\mathbb{R}^n$ tiene la topología usual, B^n es compacta, conexa y con más de un punto, por lo tanto B^n es un continuo. Podemos ver a B^2 en la Figura 1.3.

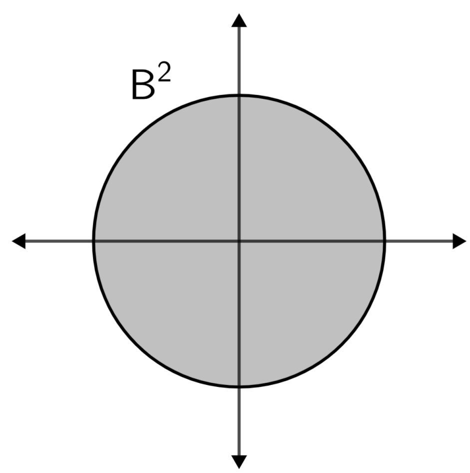

Figura 1.3: Bola cerrada B^2 como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, con la topología usual

Un espacio cualquiera homeomorfo a la bola cerrada B^n es un continuo, a estos espacios los llamaremos *n-celda*. Note que el espacio $[0,1]^n$ es una n-celda.

(c) [12, 1.3 n-Spheres, p. 4] Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea S^n la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$, es decir $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$. El espacio S^n es un continuo.

Podemos ver a la esfera S^2 en la Figura 1.4.

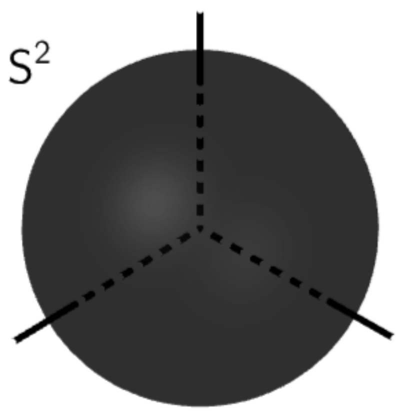

Figura 1.4: Esfera unitaria S^2 como subconjunto de $\mathbb{R}^3$, con la topología usual

Un espacio homeomorfo a la esfera S^n es un continuo, y le llamaremos *n-esfera* a estos espacios. Una 1-esfera también se llama *curva cerrada simple*.

(d) [12, 1.4 Hilbert cube, p. 4] El *cubo de Hilbert* es el espacio obtenido como el producto numerable de intervalos $[0, 1]$; así, es producto de espacios conexos y compactos, por tanto el cubo de Hilbert es un espacio conexo y compacto, y tiene más de un punto, por tanto es un continuo.

Definición 1.3. [6, p. 6] Un continuo X es una *gráfica finita* si X es una unión finita de arcos tales que cada dos de ellos se intersectan solo en un número finito de puntos.

Ejemplo 1.4. (a) En la Figura 1.5 tenemos una gráfica finita que es unión de 3 arcos, que son A_1, A_2 y A_3.

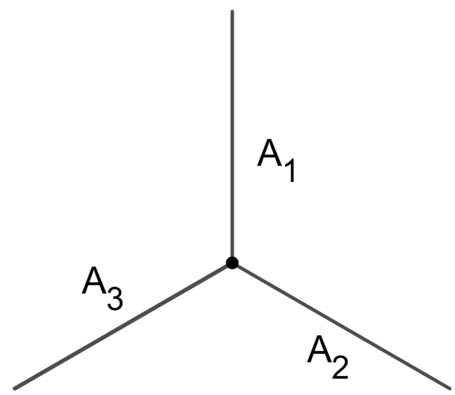

Figura 1.5: Gráfica finita que es unión de 3 arcos

(b) En la Figura 1.6 tenemos una gráfica finita que es unión de 5 arcos, que son A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5.

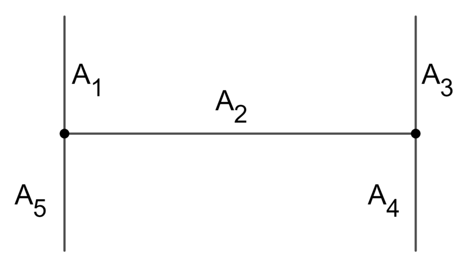

Figura 1.6: Gráfica finita que es unión de 5 arcos

Definición 1.5. [6, p. 6] Un continuo X es un *n-odo simple* si X es una unión de n-arcos que se intersectan dos a dos en un único punto, que llamaremos v, que además es punto extremo de cada arco. El punto v se llama el *vértice del n-odo simple*, y a los otros puntos extremos se llaman *extremos del n-odo simple*.

Ejemplo 1.6. (a) Notamos que la Figura 1.5 es un 3-odo.

(b) En la Figura 1.7 vemos el 5-odo simple con vértice v y puntos extremos e_1, e_2, e_3, e_4 y e_5.

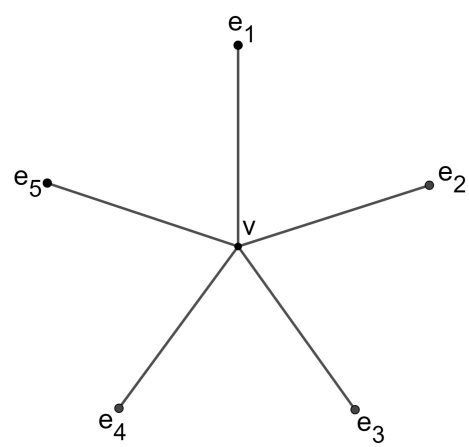

Figura 1.7: 5-odo simple

(c) En la Figura 1.8 vemos el n-odo simple con vértice v y puntos extremos e_1, e_2, e_3, e_4, e_5,...,e_{n-1} y e_n.

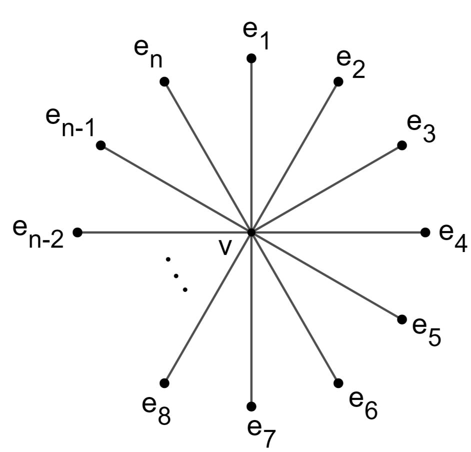

Figura 1.8: n-odo simple

Definición 1.7. Para un espacio métrico X y A un subconjunto de X, se define el *interior de A* como la unión de todos los subconjuntos abiertos C de X tal que $C \subset A$. El interior de A se denota por $\operatorname{int} A$.

Definición 1.8. Para un espacio métrico X y B un subconjunto de X, se define la *cerradura de B* como la intersección de todos los subconjuntos cerrados C de X tal que $B \subset C$. La cerradura de B se denota por $\operatorname{cl} B$.

1.2. Hiperespacios de continuos

Para X un continuo cualquiera, una colección específica de subconjuntos cerrados de X se llama *hiperespacio de X*.

A continuación mencionamos los hiperespacios clásicos más estudiados en la literatura:

(a) $2^X = \{A \subseteq X : A$ es cerrado y no vacío$\}$, llamado el *hiperespacio de cerrados de X*;

(b) $C(X) = \{A \in 2^X : A$ es conexo$\}$, para un continuo X un subconjunto A' de X es un *subcontinuo de X* si A' es cerrado, conexo y no vacío. Así $C(X)$ es llamado el *hiperespacio de subcontinuos de X*;

(c) para cada entero positivo n, $F_n(X) = \{A \in 2^X : A$ tiene a lo más n puntos$\}$, llamado el *n-ésimo producto simétrico de X*;

(d) para cada entero positivo n, $C_n(X) = \{A \in 2^X : A$ tiene a lo más n componentes$\}$.

Las definiciones a) y b) nos servirán más adelante.

Definición 1.9. [6, p. 22] Para un continuo X con métrica d, $\varepsilon > 0$, $p \in X$ y $A \in 2^X$ se definen los conjuntos

$$B(\varepsilon, p) = \{q \in X : d(p, q) < \varepsilon\},$$

y

$$N(\varepsilon, A) = \{q \in X : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } d(x, q) < \varepsilon\}.$$

El conjunto $B(\varepsilon, p)$ se llama la *bola de radio ε centrada en p* y $N(\varepsilon, A)$ se llama la *nube de radio ε centrada en A*. Note que $N(\varepsilon, A)$ es la unión de todas las bolas de radio ε centradas en los puntos de A.

Ejemplo 1.10. En la Figura 1.9 ilustramos las bolas con radio ε con centros $p_1, p_2, ..., p_7$, que están contenidas en la nube $N(\varepsilon, A)$.

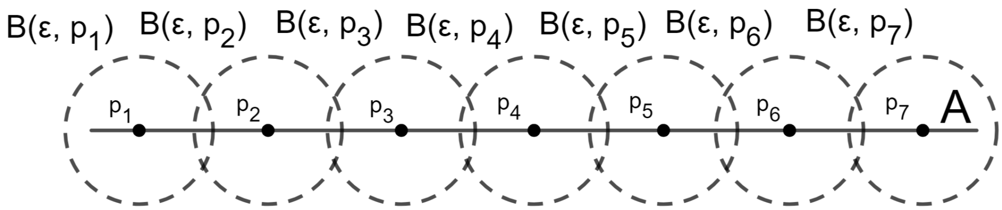

Figura 1.9: El conjunto A con algunas de sus bolas de radio ε.

Ahora con el concepto de nube vamos a definir la métrica de Hausdorff en 2^X.

Definición 1.11. [6, p. 22] Para cualesquiera A y B en 2^X definimos la *distancia de Hausdorff entre A y B* mediante la expresión

$$H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Probemos que la distancia de Hausdorff entre A y B es una métrica.

Definimos el siguiente conjunto,

$$D(A, B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\} \subset \mathbb{R}^+.$$

Así, $H(A, B) = \text{ínf}\, D(A, B)$.

Como X es compacto, existe $r > 0$ tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se tiene $d(x_1, x_2) < r$, así, para cualesquiera $A, B \in 2^X$, tenemos que $A \subset N(r, B)$ y $B \subset N(r, A)$, es decir $r \in D(A, B)$, además $D(A, B)$ es acotado inferiormente por 0. Ya vimos que $D(A, B)$ es no vacío, por tanto $H(A, B)$ está bien definida. Ahora veamos que H cumple las propiedades de métrica. Para esto, sean $A, B, C \in 2^X$ arbitrarios.

- Veamos que $H(A, B) \geq 0$: Como 0 es una cota inferior de $D(A, B)$, por definición de ínfimo, tenemos $H(A, B) \geq 0$.

- Veamos que $H(A,B) = H(B,A)$: Notemos que

$$\begin{aligned}H(A,B) &= \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}\\ &= \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset N(\varepsilon, A) \text{ y } A \subset N(\varepsilon, B)\}\\ &= H(B,A).\end{aligned}$$

- Veamos que $H(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

  - Primero veamos que $H(A,B) = 0 \Rightarrow A = B$.

    Supongamos que $H(A,B) = 0$. Sean $a \in A$ y $\varepsilon > 0$, así existe un $\varepsilon_1 \in D(A,B)$ tal que $\varepsilon_1 < \varepsilon$, pues $0 = \inf D(A,B)$. Como $A \subset N(\varepsilon_1, B)$, por definición de nube existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \varepsilon_1 < \varepsilon$, por tanto $B(\varepsilon, a) \cap B \neq \emptyset$, así a esta en la cerradura de B, que es igual a B, es decir $a \in B$. Así $A \subset B$ y de manera análoga podemos probar que $B \subset A$. Concluimos que $A = B$

  - Ahora veamos que $A = B \Rightarrow H(A,B) = 0$.

    Supongamos que $A = B$. Notemos que cualquier $\varepsilon > 0$ satisface que $A \subset N(\varepsilon, A)$, así $D(A,A) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, A)\} = \mathbb{R}^+$, y el ínfimo de $\mathbb{R}^+$ es 0, por lo tanto $H(A,B) = 0$.

- Por último veamos que $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$.

  Lo que hay que probar es que $\inf D(A,C) \leq \inf D(A,B) + \inf D(B,C)$. Para cualquier entero positivo n, definamos $\varepsilon_n = \inf D(A,B) + \frac{1}{2n}$ y $\delta_n = \inf D(B,C) + \frac{1}{2n}$, ahora tomamos un $\varepsilon \in D(A,B)$ y un $\delta \in D(B,C)$ tales que $\inf D(A,B) \leq \varepsilon < \varepsilon_n$ y $\inf D(B,C) \leq \delta < \delta_n$. Así $A \subset N(\varepsilon, B)$, $B \subset N(\varepsilon, A)$, $B \subset N(\delta, C)$ y $C \subset N(\delta, B)$; si $a \in A$, entonces existe $b \in B$ con $d(a,b) < \varepsilon$, y existe $c \in C$ con $d(b,c) < \delta$, por tanto $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) < \varepsilon + \delta$, así $A \subset N(\varepsilon + \delta, C)$, y de manera análoga tenemos que $C \subset N(\varepsilon + \delta, A)$. Por tanto $\varepsilon + \delta \in D(A,C)$. Con lo cual $\inf D(A,C) \leq \varepsilon + \delta < \varepsilon_n + \delta_n = \inf D(A,B) + \frac{1}{2n} + \inf D(B,C) + \frac{1}{2n} = \inf D(A,B) + \inf D(B,C) + \frac{1}{n}$, así $\inf D(A,C) \leq \inf D(A,B) + \inf D(B,C) + \frac{1}{n}$, para cualquier entero positivo n, entonces $\inf D(A,C) \leq \inf D(A,B) + \inf D(B,C)$, por lo tanto $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$.

Con todo lo anterior, concluimos que $H(A,B)$ es una métrica para el hiperespacio 2^X.

Teorema 1.12. [11, Theorem 1.13] Si X es un continuo, entonces los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son continuos.

1.3. Ejemplos de hiperespacios de continuos

Ejemplo 1.13. (a) Para el continuo $[0,1]$, $2^{[0,1]}$ es homeomorfo al cubo de Hilbert, la demostración de este hecho es un resultado clásico que necesita teoremas muy técnicos para su demostración, y el lector interesado puede ver [7, Theorem 11.3, p. 89]. Ahora bien, si A es un arco contenido en un continuo X, nótese que el hiperespacio 2^A es un subconjunto del hiperespacio 2^X, es decir, 2^X contiene cubos de Hilbert.

(b) [6, Ejemplo 3.1, p. 29] El hiperespacio $C([0,1])$ es más sencillo que $2^{[0,1]}$; notemos que

$$\begin{aligned} C([0,1]) &= \{A \in 2^{[0,1]} : A \text{ es conexo}\} \\ &= \{[a,b] \subset [0,1] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}, \end{aligned}$$

es decir $C([0,1])$ son los intervalos cerrados contenidos en $[0,1]$.

Este hiperespacio $C([0,1])$ es homeomorfo al conjunto $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$, al que llamaremos T, y un homeomorfismo está dado por la función $f : C([0,1]) \to T$ definida por $f([a,b]) = (a,b)$, para todo $[a,b] \in C([0,1])$.

Notamos que T es el triángulo en $\mathbb{R}^2$ incluyendo el interior, donde un lado es el segmento de recta que une el origen con el punto $(0,1)$, otro lado es el segmento de recta que une $(0,1)$ con $(1,1)$, y el último lado es el segmento de recta que une al origen con el punto $(1,1)$. Este triángulo lo ilustramos en la Figura 1.10.

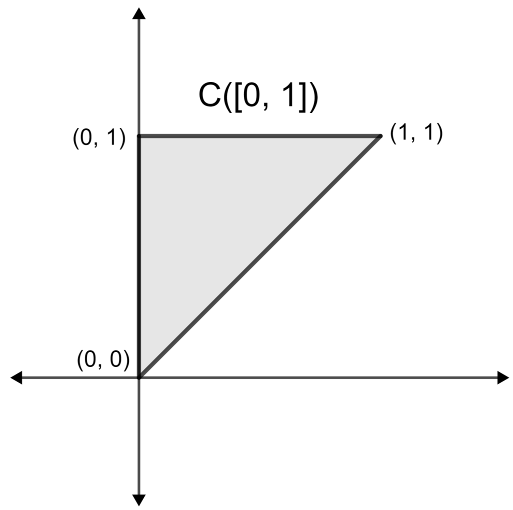

Figura 1.10: Triángulo T

(c) [6, Ejemplo 3.1, p. 31] Otro homeomorfismo de $C([0,1])$ está dado por la función $g : C([o,1]) \to \mathbb{R}^2$ definida por $f([a,b]) = (\frac{a+b}{2}, b-a)$, para todo $[a,b] \in C([0,1])$, es decir a cada intervalo le corresponde su punto medio y su longitud. La imagen de esta función se ilustra en la Figura 1.11

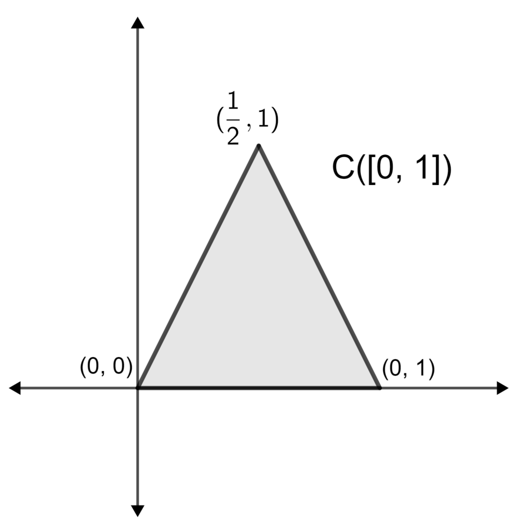

Figura 1.11: Otra representación de $C([0,1])$

(d) [6, Ejemplo 3.2, p. 31] El hiperespacio de la circunferencia unitaria S^1, $C(S^1)$, consiste de los conjuntos de un punto, sus subarcos y S^1.

Definimos $f : C(S^1) \to B^2$ tal que para A subarco cualquiera de S^1 $f(A) = m(A)(1 - \frac{l(A)}{2\pi})$, con $m(A)$ el punto medio de A y $l(A)$ la longitud de A. Además para $\{p\} \in C(S^1)$, $f(\{p\}) = p$ y para S^1, $f(S^1) = (0, 0)$. Por lo tanto el hiperespacio $C(S^1)$ es homeomorfo a la bola unitaria B^2. La imagen de B^2 se ilustra en la Figura 1.3.

(e) [6, Ejemplo 3.3, p. 35] Si X es un 3-odo simple en $\mathbb{R}^3$ con vértice $v = (0, 0, 0)$ y los arcos A_1, A_2 y A_3, que van de v a $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ respectivamente. El hiperespacio $C(X)$, está formado por los subcontinuos Y que tienen a v y a los subcontinuos Z que se quedan contenidos en algún arco del 3-odo y que no tienen a v. Para $n = 1, 2, 3$.

Tomamos un subcontinuo Y. Definimos $B_n = Y \cap A_n$, así B_n es subcontinuo de A_n que contiene a v, aunque B_n pueda ser solo el punto v, tenemos $l(B_n)$ la longitud de B_n. Entonces podemos asignarle a Y el punto $(l(B_1), l(B_2), l(B_3)) \in \mathbb{R}^3$, notamos que tales longitudes podrían varias de 0 a 1, por lo que esa asociación es el cubo o $3-$celda $C = [0, 1]^3$.

Tomamos un subcontinuo Z. Notamos que Z es un subcontinuo de A_n. Como A_n es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$, del inciso c) de este Ejemplo tenemos que el hiperespacio de subcontinuos de A_n puede ser representado por un triangulo T_n.

Definimos la función $h : C(X) \to \mathbb{R}^3$ tal que a los subcontinuos Y los manda al cubo $C = [0, 1]^3$ y a los subcontinuos Z los manda a los triangulos T_n. La imagen de esto se ilustra en la Figura 1.12

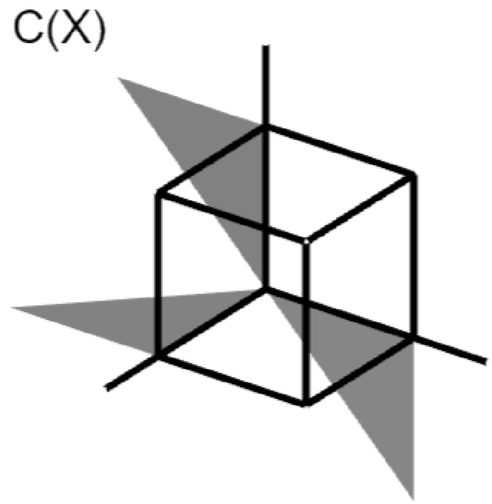

Figura 1.12: Representación de $C(X)$

1.4. Resultados de hiperespacios que utilizaremos

Definición 1.14. [11, p. 4] Para un continuo X y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en 2^X, se define lo siguiente:

- El *límite inferior* de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es el conjunto $\operatorname{Li} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X :$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X convergente a x tal que $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}\}$.
- El *límite superior* de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es el conjunto $\operatorname{Ls} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X :$ existe una sucesión creciente $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ de naturales y existe sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en X convergente a x tal que $x_k \in A_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}\}$.

Teorema 1.15. [11, Theorem 0.7] Para un continuo X, $A \in 2^X$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en 2^X, se tiene que $\operatorname{Li} A_n = \operatorname{Ls} A_n = A$ si y sólo si $\lim A_n = A$.

El siguiente Teorema nos sera útil más adelante.

Teorema 1.16. Sean X un continuo, $A, K \in 2^X$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en 2^X convergente a A. Si $A_n \cap K \neq \emptyset$ para todo natural n, entonces $A \cap K \neq \emptyset$.

Demostración: Supongamos que $A_n \cap K \neq \emptyset$ para todo natural n y $A \cap K = \emptyset$. Probemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \cap K = \emptyset$. Si esto último no es cierto, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $N(\varepsilon, A) \cap K \neq \emptyset$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $N(\frac{1}{n}, A) \cap K \neq \emptyset$, entonces existe $k_n \in N(\frac{1}{n}, A) \cap K$, y existe $a_n \in A$ tal que $k_n \in B(\frac{1}{n}, a_n)$, es decir $d(k_n, a_n) < \frac{1}{n}$, como K y A son compactos, podemos suponer que las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes, y llamemos $k \in K$ y $a \in A$ sus límites, respectivamente. Como la distancia de k_n a a_n es menor a $\frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $k = a$, lo que es una contradicción porque supusimos que $A \cap K = \emptyset$, $a \in A$, $k \in K$ y $a = k$. Por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, A) \cap K = \emptyset$. Para tal $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \varepsilon$, por tanto $A_N \subset N(\varepsilon, A)$, así $A_N \cap K \subset N(\varepsilon, A) \cap K = \emptyset$, lo cual contradice las hipótesis. Concluimos que $A \cap K \neq \emptyset$. $\otimes$

Teorema 1.17. [7, Exercise 4.15] Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X convergente a $A \in 2^X$ y sea $B \in 2^X$. Entonces la sucesión $\{A_n \cup B\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $A \cup B$.

Demostración: Como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A, tomamos $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $H(A, A_n) < \varepsilon$, es decir $A \subset N(\varepsilon, A_n)$ y $A_n \subset N(\varepsilon, A)$. Así $A \cup B \subset N(\varepsilon, A_n \cup B)$ y $A_n \cup B \subset N(\varepsilon, A \cup B)$, entonces $H(A \cup B, A_n \cup B) < \varepsilon$ para $n \geq N$, por lo tanto $\{A_n \cup B\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $A \cup B$. $\otimes$

Definición 1.18. [11, (0.47), p. 17] y [9, Sección 18, p. 173] Sean X y Y continuos y $f : X \to 2^Y$ se dice que

- f es *semicontinua superiormente en un punto $x_0 \in X$* si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X convergente en x_0, $\operatorname{Ls} f(x_n) \subset f(x_0)$. Si f es semicontinua superiormente en cada punto de X, diremos que f es *semicontinua superiormente*.

- f es *semicontinua inferiormente en un punto $x_0 \in X$* si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X convergente en x_0, $f(x_0) \subset \operatorname{Li} f(x_n)$. Si f es semicontinua inferiormente en cada punto de X, diremos que f es *semicontinua inferiormente*.

Como consecuencia del Teorema 1.15, si una función $f : X \to 2^Y$ es semicontinua superior e inferiormente, es continua, y viceversa

Teorema 1.19. [11, Ejercicio 0.67.1] Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ convergente a $A \in C(X)$. Entonces la sucesión $\{f(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(A)$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua entre compactos, entonces f es uniformemente continua, así existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in X$, si $d_X(x, y) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Tomamos un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $H(A, A_n) < \delta$, así $A_n \subset N(\delta, A)$ y $A \subset N(\delta, A_n)$.

Veamos que si $n \geq N$, entonces $H(f(A), f(A_n)) < \varepsilon$. Para esto probemos que $f(A_n) \subset N(\varepsilon, f(A))$ y $f(A) \subset N(\varepsilon, f(A_n))$. Primero veamos que $f(A_n) \subset N(\varepsilon, f(A))$. Sea $x \in f(A_n)$, así $x = f(a_n)$ para algún $a_n \in A_n$, y existe $a \in A$ tal que $d_X(a_n, a) < \delta$, entonces $d_Y(f(a_n), f(a)) < \varepsilon$, por tanto $x = f(a_n) \in B(\varepsilon, f(a)) \subset N(\varepsilon, f(A))$. Concluimos que $f(A_n) \subset N(\varepsilon, f(A))$.

Ahora veamos que $f(A) \subset N(\varepsilon, f(A_n))$. Sea $x \in f(A)$, entonces $x = f(a)$ para algún $a \in A$, y existe $a_n \in A_n$ tal que $d_X(a, a_n) < \delta$, luego $d_Y(f(a), f(a_n)) < \varepsilon$, por lo que $x = f(a) \in B(\varepsilon, f(a_n)) \subset N(\varepsilon, f(A_n))$, es decir $H(f(A), f(A_n)) < \varepsilon$, por lo tanto la sucesión $\{f(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(A)$. $\otimes$

Definición 1.20. [7, 14.1 Definition, p. 110] Un arco $\mathcal{A}$ en $C(X)$ es un *arco ordenado* si para cada $A, B \in \mathcal{A}$, se tiene $A \subset B$ o $B \subset A$.

Teorema 1.21. [7, Theorem 15.3] Sean X un continuo y A, $B \in C(X)$. Si $A \subset B$, entonces existe arco ordenado $\mathcal{A}$ en $C(X)$ tal que los puntos extremos de $\mathcal{A}$ son A y B.

Capítulo 2

Suavidad de continuos y conexidad local

En este capítulo nos enfocamos en la suavidad de continuos y la conexidad local de continuos. Definimos la suavidad en un punto, la conexidad local en un punto, la conexidad en pequeño, y dimos ejemplos de estos conceptos. Luego para X un continuo explicamos la relación entre los conjuntos $I(X)$ y $L(X)$, que denotan el conjunto de los puntos de suavidad y el conjunto de los puntos de conexidad local, respectivamente. También vimos la función $F_p : X \to C(C(X))$, la que a cada $p \in X$ le asigna la familia de subcontinuos de X que tienen al punto p, y probaremos algunos resultados de dicha función. Para funciones continuas dimos la noción de función monótona y de función monótona relativa a un punto, así como algunos ejemplos. Así con los conceptos de suavidad y funciones monótonas vimos algunos resultados interesantes. Dichos resultados tienen como consecuencia contenciones propias, para confirmar que esas contenciones son propias usamos ejemplos de dendroides. Para finalizar hablamos de la conexidad en pequeño y su relación con la suavidad.

Definición 2.1. [1, p. 123] Un continuo X es *suave en un punto $p \in X$ con respecto a un punto $x \in X$* si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a x y cada subcontinuo K de X que contiene a p y x, existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X que converge a K tal que $p, x_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si X es suave en p con respecto de cualquier $x \in X$, diremos que X es *suave en p*. Si X es suave en algún $p \in X$, diremos que X es *suave* y p se llama *punto de suavidad* de X.

Ejemplo 2.2. (a) Los continuos en los Ejemplo 1.2, Ejemplo 1.4 y Ejemplo 1.6 son suaves.

(b) Los continuos en los incisos a), c), d), e) y f) del Ejemplo 1.13 también son suaves.

Definición 2.3. [3, p. 104] Un continuo X es *localmente conexo en un punto* $p \in X$ si para cada B abierto de X tal que $p \in B$, existe A subconjunto conexo y abierto de X tal que $p \in A \subset B$, y diremos que X es *localmente conexo* si es localmente conexo en todos sus puntos.

Ejemplo 2.4. (a) Los continuos en el Ejemplo 2.2 son localmente conexos.

(b) [6, p. 7] Otro continuo muy utilizado es el *abanico armónico*, que es la unión de segmentos de recta que une el origen con el punto $(1, \frac{1}{n})$, con $n \in \mathbb{N}$, junto con el segmento de recta que une el origen con el punto (1,0) como se ve en la Figura 2.1. El arco que une a $(0, 1)$ con $(1, 0)$ se llama *arco límite del abanico armónico*, y el punto $(0, 0)$ se llama el *vértice del abanico armónico*.

Note que el abanico armónico no es localmente conexo en los puntos de la forma $(x, 0)$, con $x \in (0, 1]$.

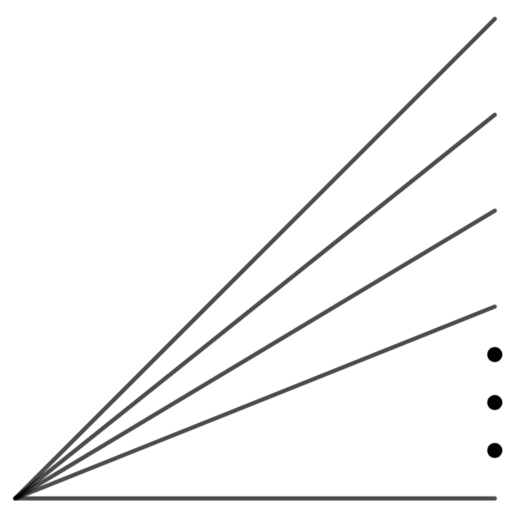

Figura 2.1: El abanico armónico

Definición 2.5. [1, p. 123] Para X un continuo, el conjunto de todos los puntos de suavidad de X se denota por $I(X)$, y el conjunto de todos los puntos donde X es localmente conexo se denota por $L(X)$.

Teorema 2.6. [10, Corollary 3.2, p. 84] Si X es un continuo, entonces $I(X) \subset L(X)$.

Demostración: Sean X un continuo y $p \in I(X)$. Veamos que $p \in L(X)$. De la Definición 2.3, sea $U \subset X$ abierto con $p \in U$ y definamos

$$\begin{aligned} C(U,p) &= \bigcup \{K \subset U : K \in C(X) \text{ y } p \in K\} \\ &= \{x \in X : \text{ existe un continuo } K \subset U \text{ con } p, x \in K\}, \end{aligned}$$

como $\{p\} \in C(X)$ y $\{p\}$ es subconjunto de U, entonces $p \in C(U,p)$. Es claro que $C(U,p) \subset U$ y es conexo.

Veamos que $C(U,p)$ es abierto, para esto probaremos que $X - C(U,p)$ es cerrado. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $X - C(U,p)$ que converge a algún punto $x \in X$. Sea $Y \in C(X)$ tal que $p, x \in Y$, como $p \in I(X)$, por la Definición 2.1, existe $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de subcontinuos de X que converge a Y tal que $p, x_n \in Y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tenemos $x_n \in X - C(U,p)$, es decir $x_n \notin C(U,p)$, entonces $Y_n \cap (X - U) \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.16, $Y \cap (X - U) \neq \emptyset$, así $x \notin C(U,p)$, por tanto $x \in X - C(U,p)$, entonces $X - C(U,p)$ es cerrado, es decir $C(U,p)$ es abierto. Concluimos que $p \in L(X)$. $\otimes$

Definición 2.7. [1, p. 123] Para un continuo X y $p \in X$, se define el siguiente conjunto

$$S(p) = \{x \in X : X \text{ es suave en } p \text{ con respecto a } x\}.$$

Notamos que X es suave en p es equivalente a $S(p) = X$ y así

$$I(X) = \{p \in X : S(p) = X\}.$$

Ejemplo 2.8. Sean $X = [0,1]$ y $p \in X$, probemos que $S(p) = X$. Sean $x \in X$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X convergente a x y K subcontinuo de X tal que $x, p \in K$. Para dos puntos cualesquiera u y v de $[0,1]$, sea uv el intervalo cerrado cuyos extremos son u y v. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $K_n = K \cup xx_n$, note que K_n es un subcontinuo de X con $x_n, p \in K_n$. Como la sucesión $\{xx_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\{x\}$, por el Teorema 1.17, la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $K \cup \{x\} = K$. Por tanto X es suave en p con respecto a $x \in X$. Concluimos que $S(p) = X$.

Si x y y son puntos de un espacio cartesiano $\mathbb{R}^n$, denotemos por xy el segmento de recta que une a x con y, es decir $xy = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$.

Ejemplo 2.9. Sean $p = (0,0)$ y $q = (1,0)$ puntos en el plano. Para el abanico armónico X definido en el Ejemplo 2.4, probaremos que $q \in S(p)$, $q \notin S(q)$ y $p \in I(X)$.

(a) Primero veamos que $q \in S(p)$, es decir, X es suave en p con respecto a q. Sea $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X convergente a q y sea K subcontinuo de X tal que $p, q \in K$, así $pq \subset K$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ el subcontinuo $K_n = K \cup pq_n$, así $p, q_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $\{pq_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a pq entonces la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $K \cup pq = K$ por el Teorema 1.17. Por lo tanto $q \in S(p)$.

(b) Probemos que $q \notin S(q)$, es decir X no es suave en q con respecto a q. Definimos $q_n = (1, \frac{1}{n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, la sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X converge a q. Sean $m = (\frac{1}{2}, 0)$ y $K = mq$ subcontinuo de X con $q \in K$. Sea $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión convergente de subcontinuos de X tal que $q, q_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $pq_n \cup pq \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así $p \in \lim_{n\to\infty} K_n$ por que $p \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero $p \notin mq$ así $\lim_{n\to\infty} K_n \neq mq$. Por lo tanto $q \notin S(q)$.

(c) Por último veamos que $p \in I(X)$, o sea X es suave en p con respecto a todo $x \in X$. Sean $x \in X$ un punto cualquiera, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X convergente a x y K un subcontinuo de X con $p, x \in K$, así $px \subset K$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ el subcontinuo $K_n = K \cup px_n$, así $p, x_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $\{px_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a px, entonces la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a K. Concluimos que X es suave en p con respecto a todo $x \in X$, es decir, $p \in I(X)$.

Una pregunta interesante es sobre qué podemos decir del conjunto $S(p)$ cuando $S(p) \neq X$. Para esto nos será útil el hiperespacio de subcontinuos de $C(X)$, es decir $C(C(X))$ y definir la siguiente función.

Definición 2.10. [1, p. 124] Para un continuo X y $p \in X$, definimos la función $F_p : X \to C(C(X))$ mediante la expresión

$$F_p(x) = \{K \in C(X) : p, x \in K\},$$

para todo $x \in X$.

Primero vemos que F_p está bien definida. Sea $x \in X$. Probemos que $F_p(x)$ es cerrado en $C(X)$. Tomemos una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $F_p(X)$ y $A \in C(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Veamos que $A \in F_p(x)$. Por la Definición 2.10 $p, x \in A_n$, es decir $A_n \cap \{p\} \neq \emptyset$, así por el Teorema 1.16, $A \cap \{p\} \neq \emptyset$, es decir $p \in A$; análogamente $x \in A$, así $A \in F_p(x)$, por lo tanto $F_p(x)$ es cerrado.

Ahora probemos que $F_p(x)$ es conexo. Tomemos $A \in F_p(x)$ y note que $X \in F_p(X)$. Por el Teorema 1.21, existe un arco ordenado $\mathcal{A}$ de A a X, además $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $F_p(x)$, por tanto $F_p(x)$ es arcoconexo y también conexo. Con lo anterior, $F_p(x) \in C(C(X))$ para todo $p, x \in X$.

Teorema 2.11. [4, Proposition 1, p. 185] Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces la función $F_p : X \to C(C(X))$ es semicontinua superiormente.

Demostración: Sea $x \in X$. Veamos que F_p es semicontinua superiormente en x. Tomemos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X convergente a x. Probemos que $\operatorname{Ls} F_p(x_n) \subset F_p(x)$. Sea $K \in \operatorname{Ls} F_p(x_n)$. Entonces existe una sucesión creciente $\{n_m\}$ en $\mathbb{N}$ y una sucesión $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $K_m \in F_p(x_{n_m})$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y que $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a K. Como K_m contiene a p y x_{n_m} para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces K contiene p y x, es decir $K \in F_p(x)$. $\otimes$

Teorema 2.12. [1, Theorem 7, p. 124] Sea X un continuo y $p \in X$. Entonces la función $F_p : X \to C(C(X))$ es semicontinua inferiormente en un punto $x \in X$ si y solo si $x \in S(p)$.

Demostración:

- Primero supongamos que F_p es semicontinua inferiormente en un punto $x \in X$. Veamos que $x \in S(p)$, es decir, veamos que X es suave en p respecto de x.

  Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que converge a x y $K \in C(X)$ con $p, x \in K$, así $K \in F_p(X)$. Por la Definición 1.18 para la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a x tenemos que $F_p(x) \subset \operatorname{Li} F_p(x_n)$. Como

$K \in F_p(x)$, hay una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $K_n \in F_p(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{n\to\infty} K_n = K$. Note que $p, x_n \in K_n$ para todo n en los naturales, así, por la Definición 2.1, X es suave en $p \in X$ con respecto a $x \in X$, concluimos que $x \in S(p)$.

- Supongamos que $x \in S(p)$. Veamos que F_p es semicontinua inferiormente en x. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X convergente a x. Veamos que $F_p(x) \subset \mathrm{Li}\, F_p(x_n)$. Sea $K \in F_p(x)$, entonces $p, x \in K$. Además como $x \in S(p)$, X es suave en $p \in X$ con respecto a $x \in X$, entonces por la Definición 2.1 para la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y K, existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a K tal que $p, x_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $K_n \in F_p(x_n)$ para todo n en los naturales. Por Definición 1.18, concluimos que $K \in \mathrm{Li}\, F_p(x_n)$. Así $F_p(X) \subset \mathrm{Li}\, F_p(x_n)$, y F_p es semicontinua inferiormente.

$\otimes$

Corolario 2.13. [1, Corollary 8, p. 124] Sean X un continuo y $p \in X$, la función $F_p : X \to C(C(X))$ es continua en un punto $x \in X$ si y solo si $x \in S(p)$.

Corolario 2.14. [4, Proposition 2, p. 185] Sean X un continuo y $p \in X$, la función $F_p : X \to C(C(X))$ es continua si y solo si el continuo X es suave en el punto p.

Teorema 2.15. [1, Observation 11, p. 125] Sean X, Y continuos, $p \in X$ y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces se cumple

$$Y - f(X - S(p)) \subset f(S(p)).$$

Demostración: Como $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$ para cualesquiera A y B subconjuntos de X, hacemos $A = X$ y $B = X - S(p)$, y obtenemos $f(X) - f(X - S(p)) \subset f(X - (X - S(p))) = f(S(p))$, además por la sobreyectividad de f, $f(X) = Y$, por lo tanto $Y - f(X - S(p)) \subset f(S(p))$. $\otimes$

Definición 2.16. [1, p. 125] Sean X, Y continuos. Una función continua $f : X \to Y$ es:

- *monótona* si para cada Q subcontinuo de Y, $f^{-1}(Q)$ es conexo.

- *monótona relativa en un punto $p \in X$* si para cada Q subcontinuo de Y tal que $f(p) \in Q$, $f^{-1}(Q)$ es conexo.

Notamos que si f es monótona, entonces f es monótona relativa en cualquier punto.

Ejemplo 2.17. (a) La función identidad es monótona y monótona relativa en cualquier punto.

(b) También las funciones crecientes y sobreyectivas $f : [0,1] \to [0,1]$ son monótonas.

(c) La función exponencial $e : [0, 2\pi] \to S^1$, definida por la expresión $e(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Notamos que e no es monótona porque $e^{-1}(1,0) = \{0, 2\pi\}$, que no es conexo.

(d) La función tienda $f : [0,1] \to [0,1]$ se define por $f(x) = 2x$ si $x \in [0, \frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{2}) = 1$ y $f(x) = 2 - 2x$ si $x \in (\frac{1}{2}, 1]$. Observe que f no es monótona porque $f^{-1}(0) = \{0, 1\}$, que no es conexo, pero sí es monótona relativa en el punto $\frac{1}{2}$.

Teorema 2.18. [1, Theorem 13, p. 125] Sean X, Y continuos, $p \in X$ y $f : X \to Y$ función continua, sobreyectiva y monótona relativa en $p \in X$. Entonces

$$Y - f(X - S(p)) \subset S(f(p)).$$

Demostración: Supongamos que $y \in Y - f(X - S(p))$. Veamos que $y \in S(f(p))$, es decir Y es suave en $f(p)$ respecto de y.

Sean $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y que converge a y y Q subcontinuo de Y tal que $f(p), y \in Q$. Ahora como y no está en $f(X - S(p))$, entonces $f^{-1}(y) \subset S(p)$, es decir, si $f(x) = y$ para algún $x \in X$, entonces $x \in S(p)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos $x_n \in f^{-1}(y_n)$, por compacidad de X podemos suponer que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto $x \in X$, y por continuidad, $f(x) = lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y$, por tanto $x \in S(p)$. Además, como f es monótono relativo en p, el conjunto $K = f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de X que contiene los puntos p y x; como X es suave en p con respecto de x, así por la Definición 2.1 existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X que contienen a p y x_n y que converge a K. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $Q_n = f(K_n)$, note que cada Q_n es un subcontinuo de Y que contiene a y_n y $f(p)$ y que converge a $f(K) = Q$, entonces por la Definición 2.1 Y es suave en $f(p)$ respecto de y, es decir $y \in S(f(p))$. $\otimes$

Corolario 2.19. [4, Corollary, p. 187] Sea X, Y continuos, con X suave en un punto $p \in X$, y sea $f : X \to Y$ función continua, sobreyectiva y monótona relativa en p. Entonces Y es suave en $f(p)$.

Demostración: Como X es suave en p, entonces $S(p) = X$, por tanto $Y - f(X - S(p)) = Y$; por otro lado, por el Teorema 2.18 $Y - f(X - S(p)) \subset S(f(p)) \subset Y$, así $S(f(p)) = Y$, con lo cual Y es suave en $f(p)$. $\otimes$

Corolario 2.20. [10, Theorem 6.2, p. 90] Sean X, Y continuos, y sea $f : X \to Y$ función continua, sobreyectiva y monótona. Entonces $f(I(X)) \subset I(Y)$.

Definición 2.21. [7, p. 193] Un continuo X es un *dendroide* si X es arco-conexo y para cualesquiera A y B subcontinuos de X, $A \cap B = \emptyset$ o $A \cap B$ es conexo.

Los siguientes ejemplos muestran que las contenciones en la conclusión de los Teorema 2.15, Teorema 2.18 y el Corolario 2.20 pueden ser propias, que en el Teorema 2.18 es necesario que f sea monótona relativa en el punto.

Ejemplo 2.22. [1, Example 18, p. 126] Existen dendroides X y Y en el plano, un punto $p \in X$ y $f : X \to Y$ función continua, sobreyectiva y monótona tal que la contención del Teorema 2.15 es propia, a saber $Y - f(X - S(p)) \subsetneq f(S(p))$, es decir existe $a \in f(S(p)) \cap f(X - S(p))$.

En coordenadas cartesianas en el plano sean $p = (0, 0)$, $a = (\frac{1}{2}, 0)$, $b = (1, 0)$, $c = (\frac{1}{2}, -1)$, y sean $a_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4^{n+1}})$ y $b_n = (1, \frac{1}{4^n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $Y = pb \cup \bigcup\{pb_n \cup b_n a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $X = ac \cup Y$. Vea Figuras 2.2 y 2.3.

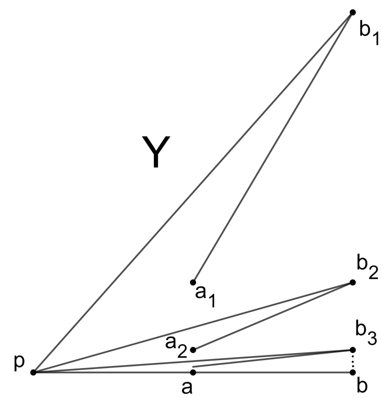

Figura 2.2: Dendroide Y

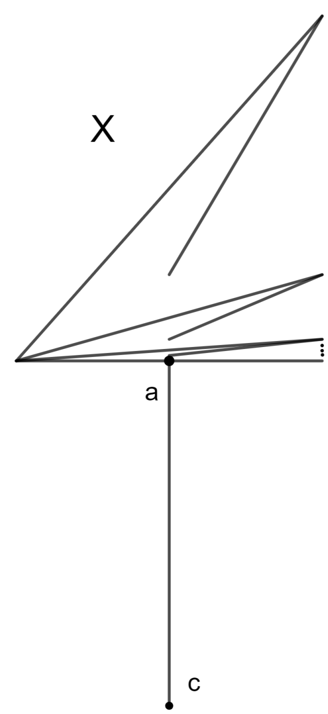

Figura 2.3: Dendroide X

Sea $f : X \to Y$ la función definida por $f(x) = x$ si $x \in Y$ y $f(x) = a$ si $x \in ac$. Note que f es continua y monótona.

Veamos que $c \in S(p)$, es decir, X es suave en p con respecto a c. Sea $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de puntos en X convergente a c y K subcontinuo de X tal que $p, c \in K$. Como X es dendroide, K también es dendroide, así $pa \cup ac \subset K$. Como c es un punto del interior de K en X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c_n \in K$ si $n \geq N$

Definimos $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de subcontinuos de X de la siguiente forma: $K_n = K$ si $n \geq N$, y K_n es el arco en X que une a p y c_n, para $n < N$. De esta forma $p, c_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $K_n \to K$. Por lo tanto $c \in S(p)$ y como $f(c) = a$, $a \in f(S(p))$.

Ahora veamos que $a \notin S(p)$. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión en X convergente a a y el segmento pa como subcontinuo de X que contiene a p y a. Sea $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente de subcontinuos de X tal que $p, a_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así $pb_n \cup b_n a_n \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $b_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $b \in \lim_{n\to\infty} K_n$. De esto concluimos que $\lim_{n\to\infty} K_n \neq pa$, así $a \in X - S(p)$, pero $f(a) = a$, por lo tanto $a \in f(X - S(p))$.

Por lo anterior $a \in f(S(p)) \cap f(X - S(p))$ y el ejemplo está terminado.

Ejemplo 2.23. [1, Example 21, p. 126] Existen dendroides X y Y en el plano, un punto $p \in X$ y $f : X \to Y$ función continua, sobreyectiva y monótona tal que

- la contención del Teorema 2.18 es propia, a saber $Y - f(X - S(p)) \subsetneq S(f(p))$, es decir, existe $q \in S(f(p)) \cap f(X - S(p))$;
- la contención del Corolario 2.20 es propia, es decir $f(I(X)) \subsetneq I(Y)$, con lo cual existe $q \in I(Y) - f(I(X))$.

Usando los puntos p, a, b, a_n, b_n del Ejemplo 2.22 definimos $X = pb \cup \bigcup \{pb_n \cup b_n a_n : n \in \mathbb{N}\}$, consideramos Y como el espacio cociente de X, donde el arco ab se identifica a un punto y los demás puntos no se identifican entre sí. Sea $f : X \to Y$ la función cociente, esta función es continua monótona y definida por $f(x) = ab$, ab un punto en Y, si $x \in ab$ y como la identidad en el resto. Observe que Y es un abanico armónico con vértice p, y cuyo arco límite es el arco en Y que une p con $f(b)$.

Notamos que $ab \in S(p) = S(f(p))$, pues lo demostramos en el Ejemplo 2.9 inciso a). Ahora veamos que $ab \in f(X - S(p))$. Como $ab = f(a)$, basta probar que $a \in X - S(p)$, es decir que $a \notin S(p)$. La prueba de este hecho es análoga a la prueba que hicimos en el Ejemplo 2.22, es decir, tomamos la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a a, el subcontinuo pa y no es posible encontrar la sucesión de subcontinuos K_n que converjan a pa, entonces $a \in X - S(p)$, y $ab \in f(X - S(p))$, por lo tanto $ab \in S(f(p)) \cap f(X - S(p))$.

Por el Ejemplo 2.9 se tiene que $p \in I(Y)$. Para terminar probemos que $I(X) = \emptyset$, es decir si $x \in X$ entonces $S(x) \neq X$. Sea $x \in X$, entonces;

- Si $x = b$. Veamos que $b \notin S(x)$. Sea $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión convergente a b y ab es subcontinuo tal que $x \in ab$. Sea $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión convergente con $x, b_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así $b_n p \cup pb \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \in lim_{n\to\infty} K_n$ pero $p \notin ab$, por lo tanto $b \notin S(x)$.

- Si $x \neq b$, $x \in (pb \cup pb_n) - \{b\}$ o $x \in b_n a_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $a \notin S(x)$. Primero si $x \in (pb \cup pb_n) - \{b\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Tomemos la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a a y el subcontinuo $K = xp \cup pa$. Notemos que $b \notin K$. Supongamos que existe sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos que converge a K y tal que $x, a_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $b_n \in K_n$ para n suficientemente grande, así $b \in \lim_{n\to\infty} K_n$, pero $b \notin K$. Concluimos que $a \notin S(x)$.

  Ahora si $x \in b_n a_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Igual sea la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a a y $K = (pa \cup pb_n) \cup b_n x$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Si existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos que converge a K y tal que $x, a_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $(pa \cup pb_n) \cup b_n a_n \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así $b_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $b \in \lim_{n\to\infty} K_n$ pero $b \notin K$. Por lo tanto $a \notin S(X)$. O sea $I(X) = \emptyset$, entonces $f(I(X)) = f(\emptyset) = \emptyset$.

Por lo anterior $p \in I(Y) - f(I(X))$ y con esto acabamos el ejemplo.

Ahora veamos un ejemplo que también ilustra lo visto en el Ejemplo 2.22 y las dos condiciones del Ejemplo 2.23, este ejemplo es original para esta tesis.

Ejemplo 2.24. Existen dendroides X y Y en el plano y $f : X \to Y$ función continua, sobreyectiva y monótona tal que

- existen $r \in X$ y $x \in f(S(r)) \cap f(X - S(r))$,
- existen $t \in X$ y $x \in S(f(t)) \cap f(X - S(t))$,
- existe $y \in I(Y) - f(I(X))$.

En el plano sean $p = (0, 0)$, $q = (1, 0)$, $r = (2, 0)$, $t = (\frac{1}{2}, 0)$ y $q_n = (1, \frac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $X' = pq \cup \bigcup\{pq_n : n \in \mathbb{N}\}$, o sea el abanico armónico,

$X = X' \cup qr$ y $Y = [0,1]$. Véase Figura 2.4.

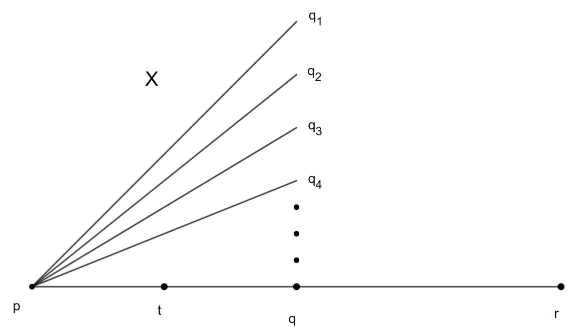

Figura 2.4: Dendroide X

Sea $f : X \to Y$ definida como $f(x,y) = 0$ si $(x,y) \in X'$ y $f(x,0) = x - 1$ si $x \in (1,2] \times \{0\}$, notamos que f es continua, monótona y sobreyectiva. Sean $x = 0$ y $y = 1$.

- Probemos que $x \in f(S(r)) \cap f(X - S(r))$.

  Veamos que $x \in f(S(r))$. Como $0 = f(0,0)$, basta probar que $p \in S(r)$, sea $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión cualquiera en X convergente a p y sea K subcontinuo de X tal que $p, r \in K$, entonces $pr \subset K$. Definimos $K_n = K \cup pp_n$, así $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a K tal que $p_n, r \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $p \in S(r)$, o sea $x \in f(S(r))$.

  Para ver que $x \in f(X - S(r))$, observemos que $f(q) = 0$, y basta probar que $q \notin S(r)$. Tomamos la sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X convergente a q y qr subcontinuo de X. Tomemos una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente tal que $r, q_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \in rq_n \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $p \in lim_{n\to\infty} K_n$ pero $p \notin qr$, con lo cual la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ no puede converger a qr. Así $q \notin S(r)$, por lo que $x \in f(X - S(r))$.

- Ahora veamos que $x \in S(f(t)) \cap f(X - S(t))$. Como $Y = [0,1]$, por el Ejemplo 2.8 se tiene que $x \in S(f(t))$.

  Para ver que $x \in f(X - S(t))$, observemos que $f(q) = 0$, y basta probar que $q \notin S(t)$. Tomamos la sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X convergente a q y tq subcontinuo de X. Tomemos una sucesión de subcontinuos $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$

convergente tal que $t, q_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $p \in tq_n \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $p \in lim_{n\to\infty} K_n$, pero $p \notin tq$, con lo cual la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ no puede converger a tq. Así $q \notin S(t)$, por lo que $x \in f(X - S(t))$.

- Por último probemos que $y \in I(Y) - f(I(X))$.

  Por el Ejemplo 2.8 tenemos que $y \in I(Y)$. Como $q \notin S(r)$, entonces $S(r) \neq X$, así $r \notin I(X)$. Como $f^{-1}(y) = \{r\}$, tenemos que $y \notin f(I(X))$.

Ejemplo 2.25. [1, Example 25, p. 126] Existen dendroides X y Y en el plano, un punto $p \in X$ y $f : X \to Y$ una función continua, sobreyectiva que no es monótona relativa en p, tal que la contención del Teorema 2.18 no se cumple, es decir $Y - f(X - S(p)) \not\subset S(f(p))$, entonces existe $a \in Y - (f(X - S(p)) \cup S(f(p)))$.

Usando los puntos del Ejemplo 2.22 y también definimos $d = (\frac{3}{2}, 0)$ y $d_n = (\frac{3}{2}, \frac{1}{4^n})$. Definimos $X' = pb \cup \bigcup\{pb_n : n \in \mathbb{N}\}$,

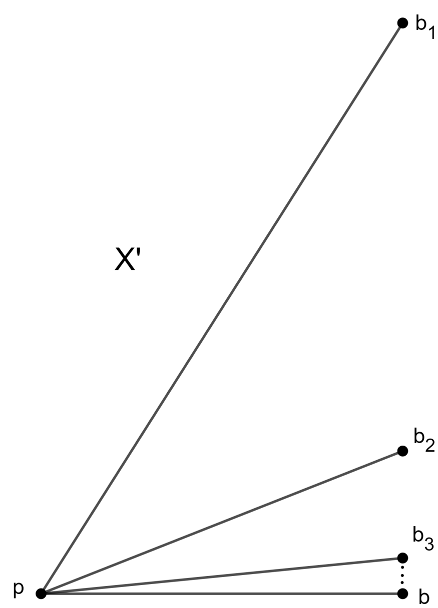

Figura 2.5: Conjunto X'

$X = X' \cup bd \cup \bigcup\{b_n d_n : n \in \mathbb{N}\}$

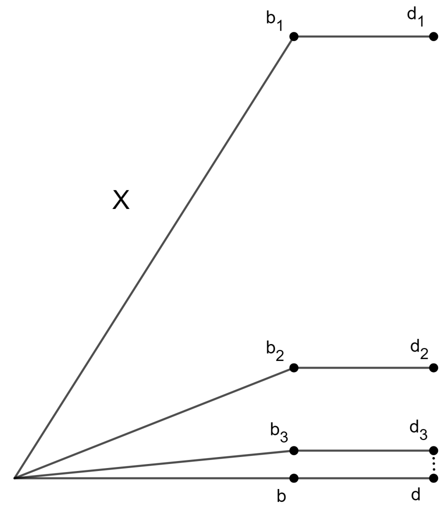

Figura 2.6: Dendroide X

y $Y = pb \cup \bigcup\{pb_n \cup b_n a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (véase Figura 2.2).

Así X es homeomorfo al abanico armónico y $X' \subset Y$. Sea $f : X \to Y$ definida como la identidad en X' y como las restricciones $f|b_n d_n : b_n d_n \to b_n a_n$ y $f|bd : bd \to ba$ en $b_n d_n$ y bd respectivamente, funciones tales que $f|b_n d_n$ y $f|bd$ son lineales, donde $f(d_n) = a_n$ y $f(d) = a$. Así f no es monótona relativa en p, porque si tomamos el segmento de recta pa subcontinuo de Y, $f(p) \in pa$ y $f^{-1}(pa) = pa \cup \{d\}$ que no es conexo.

Probemos que $\in Y - (f(X - S(p)) \cup S(f(p)))$, es decir $\notin f(X - S(p))$ y $\notin S(f(p))$. Veamos que $a \notin f(X - S(p))$. Como X es homeomorfo al abanico armónico, por el Ejemplo 2.9 tenemos que $p \in I(X)$, por tanto $S(p) = X$, así $f(X - S(p)) = f(\emptyset) = \emptyset$, concluimos que $a \notin f(X - S(p))$.

La prueba de que $a \notin S(f(p))$ es análoga a la demostración de que $a \notin S(p)$ en el Ejemplo 2.22, tomamos la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a a, el subcontinuo pa y no es posible encontrar la sucesión de subcontinuos K_n que converjan a pa, entonces $a \notin S(f(p))$.

Por lo tanto $a \in Y - (f(X - S(p)) \cup S(f(p)))$.

Definición 2.26. [1, 27, p. 127] Para un continuo X y $x \in X$, se define el siguiente conjunto

$$W(x) = \{p \in X : \text{ el continuo } X \text{ es suave en } p \text{ con respecto a } x\}.$$

Notamos de la Definición 2.26 y de Definición 2.7, tenemos que $x \in S(p)$ si y sólo si $p \in W(x)$.

Definición 2.27. [1, p. 127] Un continuo X es *puntualmente suave en un punto $x \in X$* si $W(x) \neq \emptyset$. Si X es puntualmente suave en cualquier $x \in X$, diremos que X es *puntualmente suave*.

Teorema 2.28. [1, p. 127] Sea X es un continuo. Si X es suave, entonces X es puntualmente suave y $I(X) = \bigcap\{W(x) : x \in X\}$.

Demostración: Para lo primero sea $x \in X$ punto cualquiera, basta probar que $W(x) \neq \emptyset$. Como X es suave en algún $p \in X$, entonces $x \in S(p)$, así $p \in W(x)$, es decir X es puntualmente suave.

Ahora veamos que $I(X) = \bigcap\{W(x) : x \in X\}$. Sea $x' \in I(X)$, entonces $S(x') = X$, es decir cualquier $x \in X$ esta en $S(x')$, así $x' \in W(x)$, para cualquier punto x, con lo cual $x' \in \bigcap\{W(x) : x \in X\}$.

Ahora sea $x' \in \bigcap\{W(x) : x \in X\}$, entonces $x' \in W(x)$ para todo $x \in X$, o sea $x \in S(x')$ para todo $x \in X$, es decir $S(x') = X$, por lo tanto $x' \in I(X)$. $\otimes$

Los conceptos de suavidad y de conexidad local están relacionados de otras formas y no solo como en el Teorema 2.6. Mostraremos otras relaciones entre suavidad y conexidad local.

Si Y es un subconjunto de un espacio con métrica d, se define el diámetro de Y, como el supremo del conjunto $\{d(x,y) : x, y \in Y\}$. Vamos a denotar al diámetro de Y por $\operatorname{diam} Y$.

Definición 2.29. [3, p. 104] Un continuo X es *conexo en pequeño en un punto $p \in X$* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un subcontinuo Y de X con x en el interior de Y y el diámetro de Y es menor a ε. Sea $CIK(X) = \{x : X$ es conexo en pequeño en $x\}$.

Notemos que $L(X) \subset CIK(X)$, pues si $x \in L(X)$ y $\varepsilon > 0$, existe abierto conexo U tal que $x \in U \subset B(\frac{\varepsilon}{3}, x)$, por tanto $cl(U)$ es un subcontinuo de X que tiene a x en su interior cuyo diámetro es menor a ε.

Lema 2.30. Sean X un continuo conexo en pequeño en un punto $x \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que converge a x. Entonces existe una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X cuyos diámetros convergen a 0 y tales que $x, x_n \in M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea M_n subcontinuo de X tal que $x, x_n \in M_n$ y $\operatorname{diam} M_n < \inf\{\operatorname{diam} M | M \in C(X) \text{ y } x, x_n \in M\} + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta probar que $lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} M_n = 0$.

Sean $\varepsilon > 0$. Como X es conexo en pequeño en x, sea Y subcontinuo de X con $\operatorname{diam} Y < \frac{\varepsilon}{2}$ y $x \in \operatorname{int} Y$. También sean $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in Y$ para todo $n \geq N_1$ y sea $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, entonces $n \geq N_1$, o sea $x, x_n \in Y$. Así $\operatorname{diam} Y \in \{\operatorname{diam} M | M \in C(X) \text{ y } x, x_n \in M\}$, es decir $\inf\{\operatorname{diam} M | M \in C(X) \text{ y } x, x_n \in M\} \leq \operatorname{diam} Y < \frac{\varepsilon}{2}$ y como $n \geq N_2$, así $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por último $\operatorname{diam} M_n < \inf\{\operatorname{diam} M | M \in C(X) \text{ y } x, x_n \in M\} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, por lo tanto $lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} M_n = 0$. $\otimes$

Teorema 2.31. Si X es un continuo, entonces $CIK(X) = \bigcap\{S(p) : p \in X\}$.

Demostración: Supongamos que $x \in CIK(X)$, es decir, X es conexo en pequeño en x. Sea $p \in X$ punto cualquiera. Probemos que $x \in S(p)$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X convergente a x y sea K subcontinuo de X con $p, x \in K$. Como X es conexo en pequeño en x, por el Lema 2.30 existen continuos M_n tal que $x, x_n \in M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, cuyos diámetros tienden a 0. Definimos a los continuos $K_n = K \cup M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así $p, x_n \in K_n$ y $\lim_{n\to\infty} K_n = K$. Por tanto $x \in S(p)$, y como p es arbitrario, entonces $x \in \bigcap\{S(p) : p \in X\}$.

Ahora supongamos que $x \in \bigcap\{S(p) : p \in X\}$, en particular $x \in S(x)$. Probemos que $x \in CIK(X)$, o sea que X es conexo en pequeño en x. Sea $\varepsilon > 0$, definimos $C(\varepsilon, x) = \operatorname{cl}(\bigcup\{K \in C(X) : x \in K, \operatorname{diam} K < \frac{\varepsilon}{4}\})$, notemos que $C(\varepsilon, x)$ es un subcontinuo de X.

Veamos que $\operatorname{diam} C(\varepsilon, x) < \varepsilon$ y $x \in \operatorname{int} C(\varepsilon, x)$. Para lo primero sean $p, q \in C(\varepsilon, x)$, entonces existen $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones tales que $p_n \to p$ y $q_n \to q$, y $p_n, q_n \in \bigcup\{K \in C(X) : x \in K, \operatorname{diam} K < \frac{\varepsilon}{4}\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así, existen K_n' y K_n'' tal que $x, p_n \in K_n'$ y $x, q_n \in K_n''$ con $\operatorname{diam} K_n' < \frac{\varepsilon}{4}$ y

$\operatorname{diam} K_n'' < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $d(x, p_n) < \frac{\varepsilon}{4}$ y $d(x, q_n) < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como $p_n \to p$ y $q_n \to q$, se tiene que $d(x, p) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ y $d(x, q) \leq \frac{\varepsilon}{4}$, y aplicando la desigualdad del triángulo $d(p, q) \leq d(x, p) + d(x, q) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, así $\operatorname{diam} C(\varepsilon, x) < \varepsilon$.

Ahora probemos que $x \in \operatorname{int} C(\varepsilon, x)$. Supongamos $x \notin \operatorname{int} C(\varepsilon, x)$, entonces existe sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \to x$ y $x_n \notin C(\varepsilon, x)$. Como $x \in S(x)$, existe $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión tal que $M_n \to \{x\}$ y $x, x_n \in M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que existe N tal que para todo $n \geq N$, $\operatorname{diam} M_n < \frac{\varepsilon}{4}$, entonces $M_n \subset \bigcup\{K \in C(X) : x \in K, \operatorname{diam} K < \frac{\varepsilon}{4}\}$, pero $x_n \in M_n \subset \bigcup\{K \in C(X) : x \in K, \operatorname{diam} K < \frac{\varepsilon}{4}\} \subset C(\varepsilon, x)$, para todo $n \geq N$, lo que es una contradicción. Por tanto $x \in \operatorname{int} C(\varepsilon, x)$, por tanto $x \in CIK(X)$. $\otimes$

De hecho, por la prueba del Teorema 2.31, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.32. Si X un continuo, entonces $p \in CIK(X)$ si y sólo si $p \in S(p)$.

Capítulo 3

Propiedad de Kelley

Para finalizar tratamos la propiedad de Kelley en un punto y veremos su relación con la suavidad, la conexidad local y la conexidad en pequeño en algunos resultados. Uno de estos resultados tendrá una contención propia que se confirmo con un ejemplo. Dimos las definiciones de hereditariamente descomponible y hereditariamente unicoherente, para ver que junto a la arco-conexidad y la propiedad de Kelley implican la conexidad local en un punto. Para finalizar estudiamos si son necesarias las tres propiedades anteriores y la propiedad de Kelley o si con alguna o algunas de las tres junto con la propiedad de Kelley es suficiente para llegar a la conexidad local.

Definición 3.1. [1, p. 128] Un continuo X tiene *la propiedad de Kelley en un punto $x \in X$* si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x y cada subcontinuo K de X que contiene a x, existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X que converge a K tal que $x_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Un continuo X tiene *la propiedad de Kelley* si X tiene la propiedad de Kelley en todo punto $x \in X$. Definimos el conjunto

$$K(X) = \{x \in X : X \text{ tiene la propiedad de Kelley en } x\}.$$

Observe que $K(X) = X$ es equivalente a que X tiene la propiedad de Kelley.

Teorema 3.2. Si X es un continuo, entonces $CIK(X) \subset K(X)$.

Demostración: Sea $x \in CIK(X)$, es decir, X es conexo en pequeño en x. Probemos que $x \in K(X)$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X convergente a x y sea

K subcontinuo de X con $x \in K$. Como X es conexo en pequeño en x, por el Lema 2.30 existen continuos M_n tal que $x, x_n \in M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, cuyos diámetros tienden a 0. Definimos a los continuos $K_n = K \cup M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así $x_n \in K_n$ y $\lim_{n\to\infty} K_n = K$. Por tanto $x \in K(X)$. $\otimes$

Corolario 3.3. [1, Corollary 38, p. 129] Si X es un continuo, entonces $L(X) \subset K(X)$.

Corolario 3.4. Si X es un continuo localmente conexo, entonces $K(X) = X$.

Demostración: Como $X = L(X) \subset K(X) \subset X$, entonces $K(X) = X$. $\otimes$

Ejemplo 3.5. (a) El intervalo $[0,1]$ del Ejemplo 1.2 tiene la propiedad de Kelley, pues el localmente conexo.

(b) El dendroide X del Ejemplo 2.24 no tiene la propiedad de Kelley en el punto $q = (1,0)$. Para justificar esto, tomemos la sucesión $\{q_n = (1, \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a q, y el subcontinuo $K = [1,2] \times \{0\}$. Recordemos que en el Ejemplo 2.24 tenemos $p = (0,0)$ y $r = (2,0)$. Supongamos que $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos que converge a K tal que $q_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $r \in \operatorname{int} K$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $K_n \cap \operatorname{int}(K) \neq \emptyset$, así $K_n \cap K \neq \emptyset$, y como $q_n \in K_n$, debemos tener también que $p \in K_n$, por tanto $p \in \lim_{n\to\infty} K_n = K$, lo cual es una contradicción.

Teorema 3.6. Si X es un continuo tal que $CIK(X) \neq \emptyset$, entonces $K(X) \subset \bigcap\{S(p) : p \in CIK(X)\}$.

Demostración: Sea $p \in CIK(X)$. Probemos que $K(X) \subset S(p)$. Sea $x \in K(X)$. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de X convergente a x y K un continuo que contiene a p y x. Como X tiene la propiedad de Kelley en x, existe una sucesión de subcontinuos $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a K tal que $x_n \in L_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces existen $p_n \in L_n$ tal que la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto p. Como X es conexo en pequeño en p, por el Lema 2.30, existen subcontinuos M_n cuyos diámetros tienden a 0 con $p, p_n \in M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el subcontinuo $K_n = L_n \cup M_n$, así, la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a K y $p, x_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces X es suave en p con respecto a x, es decir $x \in S(p)$. $\otimes$

Ejemplo 3.7. Existe X un continuo con $CIK(X) \neq \emptyset$ tal que la contención del Teorema 3.6 es propia, o sea $K(X) \subsetneq \bigcap\{S(q) : q \in CIK(X)\}$, por lo que debe existir $b \in \bigcap\{S(q) : q \in CIK(X)\} - K(X)$.

Sean $p = (0,0)$, $a = (\frac{1}{4}, 0)$, $b = (\frac{1}{2}, 0)$, $c = (1,0)$ y $c_n = (1, 2^{-n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y sean $a_n, b_n \in pc_n$ que tienen su primera coordenada $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ respectivamente. Definimos $X = pc \cup \bigcup\{pb_{2n} \cup b_{2n}a_{2n+1} \cup a_{2n+1}c_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$.

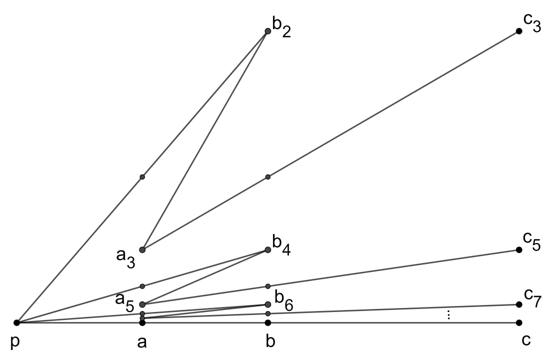

Figura 3.1: Continuo X

Notemos que $CIK(X) = \{p\} \cup (X - pc)$. Sea $p \in CIK(X)$, probemos que $b \in S(p)$. Sea $\{b'_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X convergente a b y K subcontinuo de X tal que $p, b \in K$, además notemos que $pb \subset K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos el subcontinuo α_n de la siguiente forma:

- si $b'_n \in pc$, sea $\alpha_n = pb'_n$;
- si $b'_n \in pb_{2m}$, para algún $m \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_n = pb_{2m}$;
- si $b'_n \in b_{2m}a_{2m+1}$, para algún $m \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_n = pb_{2m} \cup b_{2m}a_{2m+1}$;
- si $b'_n \in a_{2m+1}b_{2m+1}$, para algún $m \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_n = pb_{2m} \cup b_{2m}a_{2m+1} \cup a_{2m+1}b_{2m+1}$;
- si $b'_n \in b_{2m+1}c_{2m+1}$, para algún $m \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_n = pb_{2m} \cup b_{2m}a_{2m+1} \cup a_{2m+1}b_{2m+1} \cup b_{2m+1}b'_n$.

Como tenemos lo siguiente; $\lim pb'_n = pb$, $\lim_{m\to\infty} pb_{2m} = pb$, $\lim_{m\to\infty} b_{2m}a_{2m+1} = ab$ y $\lim_{m\to\infty} a_{2m+1}b_{2m+1} = ab$, concluimos que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a pb. Definimos $K_n = K \cup \alpha_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $K \cup pb = K$ y $p, b'_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $b \in S(p)$ para todo $p \in CIK(X)$.

Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley en b. Tomemos la sucesión $\{b_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a b y bc subcontinuo de X que contiene a b. Supongamos que existe $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de subcontinuos de X tal que $b_{2n} \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} K_n = bc$; como $c \in \lim_{n\to\infty} K_n$, sea $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X tal que $c_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} c_n = c$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene $c_n = (x_n, y_n)$, con $x_n > \frac{3}{4}$.

Para $n \geq N$, si $c_n \in bc$, entonces $a \in pb_{2n} \cup pc_n \subset K_n$ y si $c_n \notin bc$, entonces $a_{2n} \in K_n$ o $a_{2n+1} \in K_n$, porque K_n es arcoconexo, y para conectar por una trayectoria a b_{2n} con c_n, se tiene que pasar por a_{2n} o por a_{2n+1}. En cualquiera de los casos, se tiene que $K_n \cap \{a, a_1, a_2, ...\} \neq \emptyset$, y como $\{a, a_1, a_2, ...\}$ es cerrado, entonces $bc \cap \{a, a_1, a_2, ...\} \neq \emptyset$ lo que es una contradicción. Concluimos que X no tiene la propiedad de Kelley en b.

Por lo tanto $b \in \bigcap \{S(q) : q \in CIK(X)\} - K(X)$.

Teorema 3.8. [1, Proposition 42, p. 130] Si X es un continuo que tiene la propiedad de Kelley, entonces $I(X) = L(X)$.

Demostración: Por el Teorema 2.6, se tiene que $I(X) \subset L(X)$. Para ver la otra contención, sea $p \in L(X)$, por el Teorema 3.6, $X = K(X) \subset S(p) \subset X$, así $S(p) = X$, entonces $p \in I(X)$. Por lo tanto $L(X) \subset I(X)$. $\otimes$

Teorema 3.9. [5, Corolario 5, p. 730] Si X es un dendroide que tiene la propiedad de Kelley, entonces X es suave.

Corolario 3.10. [1, 43, p. 130] Si X es un dendroide que tiene la propiedad de Kelley, entonces X es localmenente conexo en algún punto.

Una pregunta natural es para qué otras familias de continuos se sigue cumpliendo el teorema anterior.

Definición 3.11. Un continuo X es *descomponible* si existen dos subcontinuos propios A, B tales que $X = A \cup B$. Diremos además que X es *hereditα-*

riamente descomponible si cualquier subcontinuo de X es a su vez descomponible.

Definición 3.12. Un continuo X es *unicoherente* si para cualesquiera dos subcontinuos A, B tales que $X = A \cup B$ se cumple que $A \cap B$ es conexo. Diremos además que X es *hereditariamente unicoherente* si cualquier subcontinuo de X es a su vez unicoherente.

Observemos que los dendroides son continuos hereditariamente unicoherentes, hereditariamente descomponibles y arcoconexos.

Ejemplo 3.13. Los solenoides son continuos complejos por lo que no se dará una definición en esta tesis, pero se encuentra una en [7, p. 291]. Sea X un solenoide, X es hereditaramente unicoherente, tiene la propidad de Kelley y no es localmente conexo en ningún punto.

Definición 3.14. [1, p. 130] Un continuo X es *λ-dendroide* si X es hereditariamente descomponible y hereditariamente unicoherente.

Ejemplo 3.15. [1, Example 44, p. 130] Existe un λ-dendroide X que tiene la propiedad de Kelley y no es localemente conexo en ningún punto. Sea C el conjunto de Cantor usual contenido en $[0, 1]$ y definimos el conjunto $X = \{(x, y, z)|x \in (0, 1], c \in C, y = \text{sen}(\frac{1}{x}), z = xc\} \cup \{(0, y, 0)|y \in [0, 1]\}$.

Ejemplo 3.16. [1, Example 45, p. 130] Existe una curva arco-conexa que tiene la propiedad de Kelley y no es localmente conexa en ningún punto. Sea C el conjunto de Cantor usual en el intervalo $[0, 1]$. En coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$, definimos los conjuntos $A = C \times \{0\} \times \{0\}$ y $B = \{0\} \times C \times \{1\}$. Para todo $u \in A$ y $v \in B$ unimos u a v con el segmento de recta uv. Ya que los conjuntos de Cantor A y B están en líneas en el 3-espacio, los segmentos que se conectan son mutuamente disjuntos excepto en sus puntos extremos. Definimos el conjunto $X = \bigcup\{uv : u \in A \text{ y } v \in B\}$. Entonces X es una curva arcoconexa que no es locamente conexo en ningún punto y con la propiedad de Kelley.

Bibliografía

[1] Charatonik J. J., Charatonik W. J. Smoothness and the property of Kelley. *Commet. Math. Univ. Carolinae* ***41*** (2000), 123–132.

[2] Charatonik J. J., Eberhart C. On smooth dendroids. *Fund. Math.* ***67*** (1970), 297–322.

[3] Charatonik J. J., Illanes A. Various kinds of local connectedness. *Mathematica Pannonica* ***13*** (2002), 103–116.

[4] Charatonik W. J. Inverse limits of smooth continua. *Commet. Math. Univ. Carolinae* ***23*** (1982), 183–191.

[5] Czuba S. T. On dendroids with Kelley's property. *Proc. Amer. Math. Soc.* ***102*** (1988), 728–730.

[6] Illanes A. *Hiperespacios de continuos.* Aportaciones Matemáticas, 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[7] Illanes A., Nadler S. B., Jr. *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[8] Kelley J. L. Hyperspaces of a continuum. *Trans. Amer. Math. Soc.* ***52*** (1942), 22–36.

[9] Kuratowski K. *Topology, vol. 1.* Academic Press and PWN, 1966.

[10] Mackowiak T. On smooth continua. *Fund. Math.* ***85*** (1974), 79–95.

[11] Nadler S. B., Jr. *Hyperspaces of sets.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York,

Basel, 1978. Reprinted in: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Mexicana, Serie Texto # 33, 2006.

[12] NADLER S. B., JR. *Continuum theory: an introduction.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[13] WARDLE R. W. On property of J. L. Kelley. *Houston J. Math.* ***3*** (1977), 291–299.

Índice alfabético