Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

Regularización del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en un cilindro

T E S I S

Que para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:
Lic. Eduardo Hernández Montero

Director de Tesis:
Dr. Andrés Fraguela Collar

Puebla, Puebla. enero 2014.

BENEMÉRITA
UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

**FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICO MATEMÁTICAS**

DR. JACOBO OLIVEROS OLIVEROS
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP.
P R E S E N T E:

Por este medio informo que (el)(la) C.

HERNÁNDEZ MONTERO EDUARDO

Estudiante de la *Maestría en Ciencias (Matemáticas)*, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 18 de diciembre de 2013, en la tesis titulada:

"REGULARIZACIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN UN CILINDRO"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 08 de enero de 2014.

DR. FRANCISCO JAVIER MENDOZA TORRES
COORDINADOR DEL POSGRADO EN MATEMÁTICAS

D*JJ

Av. San Claudio y 18 Sur, Col. San Manuel, Ciudad Universitaria, Puebla, Pue. C.P. 72570
Tels.: (01222) 229 55 00 Ext.: 7550, 229 56 37 Fax: 229 56 36 www.fcfm.buap.mx direccion@fcfm.buap.mx

A mi familia.

Agradezco a mi asesor
por el respaldo académico y humano,

a mis sinodales y oponente
por toda la atención brindada,

a la SIEP, responsable y auxiliares,
por un compromiso efectivo con la vida académica,

al CONACYT,
por el apoyo económico.

Introducción

Sea Ω una región conductora homogénea en $\mathbb{R}^3$, con una cavidad y sin fuentes de actividad.

Considérese ahora el problema de identificar el valor de un potencial u en la frontera interior de Ω, Γ_D, a partir de datos conocidos de u y la corriente en la frontera exterior de Ω, Γ_N; problema al que en lo sucesivo se referirá como el problema de identificación del dato de Dirichlet. Este problema es una simplificación del problema inverso electrocardiográfico, a saber:

> Identificar el potencial epicardial a partir de mediciones de potencial y corriente en la superficie del torso de un individuo.

En la práctica, la región entre la superficie del corazón y la del torso de un individuo, es una región conductora no homogénea y existe presencia de fuentes de actividad eléctrica, como los pulmones por ejemplo. El problema de identificación; sin embargo, es una simplificación de uso corriente en la práctica, debido a (*ver* [**6**]):

- Ω modela la región comprendida entre la superficie del corazón y la del torso de un individuo.
- La conductividad del aire que circunda al individuo es nula, por lo que puede suponerse que es nula la corriente en la superficie del torso.
- Se acepta que el problema inverso elecrocardiográfico puede ser modelado suponiendo una conductividad promedio en Ω.
- Es posible aproximar mediciones continuas de $u|_{\Gamma_D}$, a partir de mediciones electrocardiográficas adecuadas, tomadas en la superficie del torso del individuo.
- Existen técnicas conocidas que, en un electrocardiograma permiten filtrar actividad eléctrica ajena al propio corazón del individuo.

La inmediata formulación matemática del problema de identificación descrito es como un problema de Cauchy, como el problema de evaluar $u|_{\Gamma_D}$, donde u es la solución de un problema de Cauchy de la forma

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \;\; en \;\; \Omega, \\ u|_{\Gamma_N} &= \varphi, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_N} &= \psi. \end{cases}$$

La relevancia práctica del problema inverso electrocardiográfico, radica en la importancia que tiene el potencial epicardial en el diagnóstico y tratamiento de enfermedades cardíacas; no obstante, la formulación matemática del problema presenta inconvenientes significativos que no pueden ser tomados a la ligera:

- En general, dado un par arbitrario (φ, ψ) de funciones de cuadrado integrable en Γ_N, sólo puede garantizarse la existencia de solución local en una vecindad de Γ_N, que no necesariamente contiene a Γ_D. En general no necesariamente tiene sentido la expresión $u|_{\Gamma_D}$.
- El problema de identificación es mal planteado; es decir, suponiendo que para el par (φ, ψ) exista solución del problema de Cauchy en todo el dominio Ω, entonces $u|_{\Gamma_D}$ no depende continuamente del dato de Cauchy en Γ_N. El problema de Cauchy en realidad es un tipo de problema que se conoce como severamente mal planteado.

Investigadores como A. Fraguela y J. Henry buscan alternativas para resolver el problema de identificación, sin olvidar buscar que sea asequible su implementación numérica, requerida en las aplicaciones médicas.

El presente trabajo de tesis se tiene su origen en aceptar una hipótesis A. Fraguela y J. Henry, aún no probada; se cree que bajo cambios de coordenadas adecuados, es posible llevar a Ω en una región cilíndrica, donde el problema de identificar $u|_{\Gamma_D}$ es equivalente a resolver un problema análogo en un cilindro, donde el problema consista en identificar el valor de un potencial en una de las bases del cilindro, siendo conocida información del potencial y la corriente en el resto de la frontera:

> Identificar $\phi = u|_{\Gamma_a}$, donde Ω es una región cilíndrica, Σ el costado de Ω, mientras que Γ_0 es la base, Γ_a la tapa y u es solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \;\; en \;\; \Omega, \\ u|_{\Sigma} &= cte., \\ u|_{\Gamma_0} &= \varphi, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_0} &= \psi. \end{cases}$$

Esta hipótesis busca generalizar un hecho que es conocido para regiones planas (Ω una región en $\mathbb{R}^2$), donde la equivalencia pueda ser probada con herramienta de variable compleja (*ver fig. 1*).

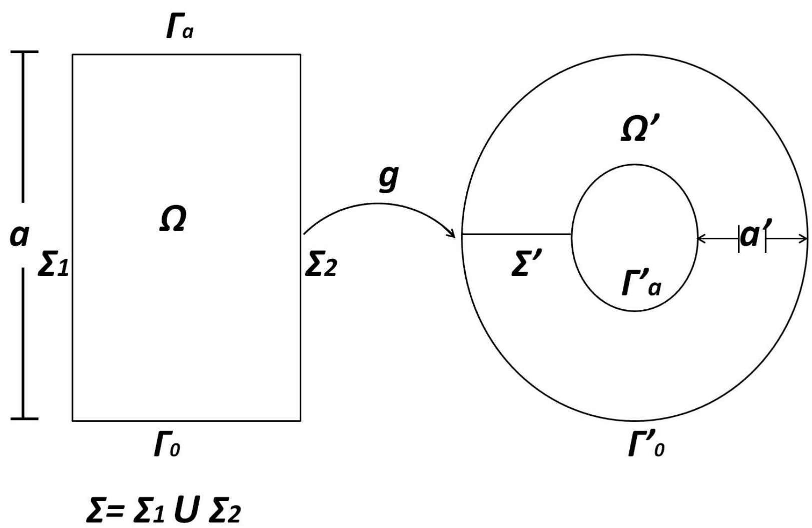

FIGURA 1. Esquema de equivalencia entre problemas de Cauchy para regiones cilíndricas y anulares en el plano.

Naturalmente se formulan preguntas como si realmente es posible extender de alguna forma esta relación a dominios análogos en dimensiones mayores y si , de ser posible, alguna de las formulaciones ofrece ventajas de implementación numérica frente a la otra.

Este trabajo puede considerarse como la antesala para la respuesta a estas preguntas, pues, en esa dirección, es averiguar si la formulación del problema de Cauchy en un cilindro ofrece ventajas frene a la formulación en una región con una cavidad, considerando como primer intento aquel en que la condición de Dirichlet en Σ es nula.

Una de las principales formas en que se aborda el problema en regiones cilíndricas es mediante la teoría de Control, como lo hacen Ben Abda *et al.* en [**1**]. Sabiendo que es mal planteado el problema asociado de identificación de datos de frontera, como se expone en [**5, 2**].

En [**1**] se plantea una formulación operacional del problema de identificación del dato de Dirichlet y una solución tipo Tikhonov como problema mal planteado; sin embargo, la principal problemática es que este problema inverso es del tipo exponencial o severamente mal planteado, suelen ser requeridas herramientas especializadas de la teoría general de regularización (*ver* [**4, 14**]).

En general, determinar técnicas adecuadas de regularización para problemas inversos exponencialmente mal planteados suele ser en sí mismo un problema importante, debido a que para conocer en forma explícita la velocidad de convergencia de un algoritmo de regularización tipo Tikhonov, por ejemplo, dada una medición del dato de salida, suele ser necesario tener la certeza de que la solución exacta del problema de identificación del dato de Dirichlet tiene ciertas propiedades de suavidad, información *a priori*, que en la práctica no siempre pueden garantizarse cuando se trata de aplicaciones médicas.

Como resultado de la colaboración directa entre A. Fraguela Collar[1] y los autores de [**1**], se considera que, aún es necesario brindar especial atención a la técnica de regularización empleada, por lo que la etapa final de este trabajo es dedicada a ello en su totalidad.

Aquí se presenta una forma de abordar el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en una región cilíndrica en general, llevándolo a una formulación operacional como problema inverso, mediante la que se evidencia el mal planteamiento exponencial del problema de identificación del dato de contorno y, a partir de ella, se presenta una técnica de regularización por truncamiento adecuada, además de perspectivas de investigación para esquemas de regularización posteriores.

La forma que aquí se presenta para la obtención de soluciones aproximadas del problema de identificación del dato de Dirichlet, presenta ventajas respecto de la información *a priori* que se considera suficiente para lograr acotaciones explícitas del error de regularización; no obstante, previamente se requiere resolver el problema de determinar las funciones y valores propios del operador de Laplace definido en Γ_a.

Este trabajo ejemplifica una metodología para resolver problemas inversos que propone A. Fraguela, a partir de la cuál se llega a una completa formulación operacional del problema de identificación del dato de Dirichlet: resolver una ecuación de la forma $A\phi = \rho$, dado ρ y siendo A un operador lineal y compacto.

Los principales logros de este trabajo de tesis son:

- Una definición clara en sentido matemático de lo que se entiende por un dato de Cauchy exacto.
- Caracterización en regiones cilíndricas de los pares (ϕ, ψ) en Γ_a para los cuales tiene sentido la expresión $u|_{\Gamma_0}$.
- Una estrategia de regularización admisible que, en comparación con los métodos para problemas exponencialmente mal planteados, requiere información *a priori* "más débil" que las condiciones de fuente logarítmica sobre el dato ϕ.

[1] Adscrito al cuerpo académico de Modelación Matemática y Ecuaciones Diferenciales de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, BUAP.

Índice general

Introducción I

Índice de figuras VII

Capítulo 1. Formulación operacional del problema de Cauchy 1
1. Preliminares 2
2. Problema auxiliar de contorno, problema directo 7
3. Ecuación operacional equivalente al problema de Cauchy 13
4. Forma de serie para soluciones débiles en regiones cilíndricas 17

Capítulo 2. Regularización de la formulación operacional del problema de Cauchy en regiones cilíndricas 29
1. Truncamiento 31
2. Perspectivas de regularización 36

Conclusiones 39

Apéndice A. 41

Bibliografía 45

Índice de Notación 47

Índice alfabético 49

Índice de figuras

1. Esquema de equivalencia entre problemas de Cauchy para regiones cilíndricas y anulares en el plano. III

1. Ejemplo ficticio de p_0, para 5 ordenes distintos de magnitud de δ que sólo pretende ser ilustrativo la elección de p_0. Las constantes C_0 y C_1 fueron elegidas sólo para hacer evidente el comportamiento cualitativo de $K_{\delta,p}$, en función de p, para el caso en que se verifica $\|\xi\|_e = \|\varphi\|_{2/n} = 1$. 36

Capítulo 1

Formulación operacional del problema de Cauchy

En el presente capítulo se muestra el desarrollo necesario para probar que, resolver en un sentido débil el problema de identificación del dato de Dirichlet, ϕ, para la ecuación de Laplace en una región cilíndrica dado el par (φ, ψ), descrito en la introducción de este trabajo, es equivalente a resolver una ecuación operacional de la forma

$$A\phi = \varphi - A'\psi;$$

donde (φ, ψ) es un dato de Cauchy exacto, mientras que A y A' serán operadores lineales y compactos entre espacios normados.

El capítulo se estructura en cuatro secciones, la primera de las cuales es un preliminar de los resultados que serán de mayor relevancia en el desarrollo del propio capitulo, todos conocidos del análisis funcional.

En la segunda y tercera sección son introducidas las definiciones básicas y las demostraciones esenciales de la formulación operacional referida. Se prueba que, el problema de identificación de ϕ puede ser entendido como un problema inverso, donde el problema directo consiste en, dado ψ, determinar en función de ϕ la traza a Γ_N de la solución *débil* del problema de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \Delta u \equiv & 0 & en\ \Omega, \\ u|_{\Sigma} & = & 0, \\ u|_{\Gamma_D} & = & \phi, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_N} & = & \psi; \end{array} \right.$$

donde Γ_D, Γ_N y Σ forman una partición de Ω con características que se detallan desde el inicio.

Por su parte, la última sección de este capítulo es dedicada a la caracterización, en términos de series de Fourier, de los espacios y operadores involucrados en la formulación operacional, cuando Ω es una región cilíndrica.

Se recuerda al lector que al final del texto encontrará un indice de acuerdos usuales de notación.

1. Preliminares

Los resultados enunciados en la presente sección y el apéndice de este trabajo son resultados conocidos, pueden consultarse en [**3, 5, 7, 8, 10, 12, 15**].

Dados Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^{n+1}$ y el multiíndice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, con α_k un entero no negativo para $k = 1, ..., n$. Se define $|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ y

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x), \quad \varphi \in C^{|\alpha|}(\Omega).$$

Definición 1. *Derivada de Sobolev La función $v(x)$ localmente sumable en Ω se llama* ***derivada en sentido de Sobolev*** *de orden $|\alpha|$ de la función $u(x)$ localmente sumable en Ω, y se denota $v = D^\alpha u$, si satisface la igualdad*

$$\int_\Omega v\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definición 2. *Se define el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como el completamiento de $C^m(\overline{\Omega})$ en la norma*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sqrt{\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}}.$$

Para $p = 2$ se denota $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Las definiciones y demostraciones de propiedades que verifican los espacios de Sobolev pueden consultarse en [**3, 5, 10, 12**].

El espacio $H_0^1(\Omega)$ se define como el completamiento de $C_0^\infty(\Omega)$ en la norma de $H^1(\Omega)$.

1.1. Subespacios de $H^1(\Omega)$ con normas equivalentes.

Lema 1.1. *Sean Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^{n+1}$ y Σ un subconjunto de medida no nula en $\partial\Omega$; si $E = \left\{u \in H^1(\Omega) : u|_\Sigma = 0\right\}$, entonces*

$$\begin{array}{rcl} <\nabla\cdot, \nabla\cdot>: E \times E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{df}{dx_i}\frac{d\overline{g}}{dx_i} \end{array}$$

es un producto interior en E, donde la norma inducida $\|\nabla\cdot\|$ es equivalente a la norma en $H^1(\Omega)$.

Observación 1. *E es un subespacio de $H^1(\Omega)$ desde que el operador de traza a Σ de funciones de $H^1(\Omega)$ es lineal y continuo, tiene sentido el enunciado del lema 1.1.*

Las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ se dicen equivalentes en E, si existen constantes $K_1 \geq K_2 > 0$ tales que

$$K_1 \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq K_2 \|f\|_1 , \quad \forall f \in E.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \equiv 1$ en Ω. Suponga que en$E$ existe una extensión continua de f a $\overline{\Omega}$; significa que para cada $(x; z)$ en Σ, existe una vecindad de $(x; z)$, en su intersección con Ω, f toma valores estrictamente menores que $1/2$, lo cual es claramente una contradicción. Se prueba que no existen en E extensiones continuas de $f \equiv 1$ a $\overline{\Omega}$; de lo cual se desprende que $f \equiv 1$ no pertenece a E, verificándose la desigualdad de Poincaré en dicho subespacio.

Por el lemma A.11, existe una constante $C > 0$ tal que, para toda f en E se verifica

$$\|f\|^2 \leq \|f\|_{H^1}^2 \leq (C^2 + 1)\langle \nabla f, \nabla f \rangle. \tag{1.1}$$

De (1.1) y la definición de $\langle \nabla\cdot, \nabla\cdot \rangle$ se obtiene que $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = 0$ es equivalente a que $f \equiv 0$ en E.

Las pruebas del resto de las propiedades de un producto interior son inmediatas.

Por último, de (1.1) también se desprende la equivalencia en E de las normas $\|\nabla\cdot\|$ y $\|\cdot\|_{H^1}$.

□

1.2. Vectores y valores propios del operador de Laplace. En adelante se reservan las notaciones Ω y Γ para denotar un dominio acotado en $\mathbb{R}^{n+1}$ y una superficie de clase C^1 en $\partial\Omega$, respectivamente.

Sea $(\Delta, H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma))$ el operador de Laplace en Γ, es decir

$$\begin{aligned} \Delta : H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma) \quad &\rightarrow \quad L^2(\Gamma) \\ v \quad &\mapsto \quad \Delta v = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Siempre que v en $H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma)$ no sea identicamente nula, se dice que v es una *función propia* de $(\Delta, H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma))$, si existe un escalar λ tal que

$$\Delta v = \lambda v;$$

el escalar λ se conoce como el *valor propio* de $(\Delta, H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma))$ asociado a v.

Observación 2. *Si Γ es un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$; entonces, la función propia v del operador $(\Delta, H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma))$, con valor propio λ, también se conoces como* solución fuerte *del problema de contorno :*

$$\begin{aligned} \Delta v &= \lambda v \\ v|_{\partial\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Como se observa en el libro de Mijailov [**10**]*, las soluciones clásicas de este problema de contorno también son denominadas funciones propias del mismo.*

Una definición de función propia del operador de Laplace en un sentido débil es como sigue.

Definición 3. *v en $H_0^1(\Gamma)$ es una* función generalizada propia *del problema de Dirichlet homogéneo para el operador de Laplace, si existe un escalar λ tal que*

$$\int_\Gamma \nabla v \nabla \varphi dx = -\lambda \int_\Gamma u\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Gamma).$$

En adelante, se hará referencia explícita al sentido en que, en cada caso, se entenderán los valores y funciones propias del operador de Laplace (fuerte, clásico o débil) sólo cuando por contexto pueda existir confusión, de lo contrario se hará referencia a ellos simplemente como valores y funciones propias.

Por la relevancia del operador de Laplace en estas páginas, se presta especial atención al estudio de sus propiedades, incluyendo en lo sucesivo algunas demostraciones relevantes, mismas que pueden ser consultadas en [**10, 13, 15**] para operadores elípticos en general.
Sean v que pertenece a $H_0^1(\Gamma)$ y u en $H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\overline{\Gamma})$ tal que $\Delta u = 0$. Por el Teorema A.7 e integración por partes se obtiene

$$\int_\Gamma \nabla v \nabla u = \int_{\partial\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial \eta} - \int_\Gamma v\Delta u = \int_{\partial\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0;$$

es decir,

$$\langle \nabla v, \nabla u \rangle = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Gamma).$$

Por el Lema 1.1 y el teorema de representación de Riesz se infiere $u \equiv 0$. El operador de Laplace es inyectivo, su núcleo es el espacio trivial $\{0\}$.

Por otro lado, integración por partes para u en $H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma)$ y v elemento de $H_0^1(\Gamma)$:

$$\int_\Gamma \nabla u \nabla v = -\int_\Gamma v\Delta u. \tag{1.2}$$

Tomando valores absolutos y aplicando la desigualdad de Hölder en el extremo izquierdo de (1.2), cuando $u = v$,

$$\int_\Gamma \|\nabla u\|^2 \leq \|u\| \|\Delta u\| ,$$

multiplicando por $\frac{C^2}{\|u\|}$, C la constante en la desigualdad de Poincaré, siempre que $u \neq 0$, se infiere

$$C^2 \|\Delta u\| \geq \frac{1}{\|u\|} C^2 \|\nabla u\|^2 \geq \|u\| .$$

La desigualdad $C^2 \|\Delta u\| \geq \|u\|$ prueba que, en $L^2(\Gamma)$, cualquier conjunto acotado en el rango del operador de Laplace también es acotado en $H1111101^1_0(\Gamma)$. Por el Teorema A.4, se sigue que el operador $(\Delta^{-1}, Im(\Delta))$ es compacto con respecto a la norma en $L^2(\Gamma)$.

En el libro de Mijailov **[10]** se prueba que el operador de Laplace es autoadjunto bajo las condiciones de suavidad y contorno aquí consideradas, así que, su inverso también es autoadjunto. En (1.2) se establece que los valores propios del operador $-\Delta$ son reales positivos.

Del análisis funcional (*ver* **[8]***, cap IV*) se sabe que el espectro puntual de un operador compacto es a lo sumo numerable y tiene al origen por único punto de acumulación en el plano complejo. Además, los valores propios de $-\Delta$ coinciden con los inversos multiplicativos de los valores propios de $(-\Delta)^{-1}$; es decir, si $\{\frac{1}{\lambda_k^2}\}$ es el conjunto de valores propios del operador $((-\Delta)^{-1}, R(A))$, ordenados de forma que $\frac{1}{\lambda_1^2} > \frac{1}{\lambda_2^2} > \cdots$, entonces $\{\lambda_k^2\}$ es el conjunto de valores propios de $-\Delta$, verifican $0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \cdots$ y $\lambda_k^2 \to \infty$ cuando $k \to \infty$.

También se sabe que el subespacio propio E_{λ_k}, asociados al vector propio λ_k^2, es de dimensión 1 y existe $\{v_k\}$ base ortonormal de $L^2(\Gamma)$ de funciones propias de $-\Delta$, con $v_k \in E_{\lambda_k}$. Adicionalmente, $\{v_k\}$ es un subconjunto ortogonal de $H_0^1(\Omega)$. Integrando por partes y por el Teorema A.7, para cualesquiera naturales j y k se garantiza

$$\int_\Omega \nabla v_j \nabla v_k d(x;z) = \int_{\partial\Omega} v_j \frac{\partial v_k}{\partial \eta} dS - \int_\Omega v_j \Delta v_k d(x;z) = \lambda_k^2 \int_\Omega v_j v_k d(x;z).$$

Es decir,

$$\langle \nabla v_j, \nabla v_k \rangle = \begin{cases} \lambda_k^2, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} . \tag{1.3}$$

Más aún, para el inverso aditivo del operador de Laplace, también en **[10]**, se presenta la demostración de existencia de constantes reales positivas C_0' y C_1', así como del natural k_0, tales que, para todo $k > k_0$ se satisfacen las desigualdades

$$C_0' k^{\frac{2}{n}} \leq \lambda_k^2 \leq C_1' k^{\frac{2}{n}};$$

donde n corresponde a la dimensión de Γ. Pero, definiendo

(1.4)
$$C_0 = min\{C_0', \lambda_1, \frac{\lambda_2^2}{2^{1/n}} \ldots, \frac{\lambda_{k_0}}{k_0^{1/n}}\}, \quad C_1 = max\{C_1', \lambda_1, \frac{\lambda_2^2}{2^{1/n}} \ldots, \frac{\lambda_{k_0}}{k_0^{1/n}}\};$$

se sigue,

$$C_0 k^{\frac{2}{n}} \leq \lambda_k^2 \leq C_1 k^{\frac{2}{n}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

1.3. Regularización de problemas inversos mal planteados para ecuaciones del primer tipo. Sea A un operador lineal, compacto e inyectivo definido entre los espacios de Hilbert X e Y, sobre el campo real o complejo. Los productos interiores y normas en X e Y se diferenciarán por contexto y no por notaciones especiales. Se suponen desconocidos x en X e y que pertenece a Y, pero tales que x es solución de $Ax = y$, se denominan x e y como *solución exacta* y *dato exacto*, respectivamente. Se supondrá δy conocido en Y y tal que $\|y - \delta y\| \leq \delta$.

La ecuación $Ax = y_\delta$ no es soluble en general y, en caso de serlo, la tansformación A^{-1} no es continua en Y; incluso si y_δ pertenece al rango de A, la solución $x_\delta = A^{-1}y_\delta$ no necesariamente se encuentra "suficientemente próxima" a x en la norma de X.

Regularizar el problema de *resolver* la ecuación $Ax = y$, siendo conocido y_δ, significa encontrar un algoritmo o método para determinar x_δ en función de A, y_δ y δ, de forma que x_δ converja a x, en la norma de X, cuando el orden del error δ tienda a 0.

Definición 4. *Una estrategia de regularización es una familia de operadores lineales y acotados*

$$R_\alpha : Y \to X, \quad \alpha > 0$$

tal que

$$\lim_{\alpha \to 0} R_\alpha A x = x \quad \forall x \in X.$$

Es decir, los operadores $R_\alpha A$ convergen puntualmente a la identidad.

Definición 5. *Una estrategia de regularización $\alpha = \alpha(\delta)$ se dice admisible, si para todo x en X se verifica*

$$\alpha(\delta) \to 0, sup\{\left\|R_{\alpha(\delta)} y_\delta - x\right\| : \|Ax - y_\delta\| \leq \delta\} \to 0;$$

cuando δ tiende a 0.

Teorema 1.2. *Sea (λ_k, x_k, y_k) un sistema singular de A y*

$$q : (0, \infty) \times (0, \|A\|] \to \mathbb{R}$$

una función con las siguientes propiedades:

1. $|q(\alpha,\lambda)| \le 1,\ \forall(\alpha,\lambda) \in (0,\infty)\times(0,\|A\|]$;
2. $\forall\alpha > 0,\ \exists c(\alpha):\ |q(\alpha,\lambda)| \le c(\alpha)\lambda,\ \forall\lambda \in (0,\|A\|]$;
3. $\lim_{\alpha\to 0} q(\alpha,\lambda) = 1, \quad \forall\lambda \in (0,\|A\|]$.

La familia de operadores $R_\alpha : Y \to X$, $\lambda > 0$, definida por

$$R_\alpha y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q(\alpha,\lambda_k)}{\lambda_k}\langle y, y_k\rangle x_k, \quad \forall y \in Y,$$

es una estrategia de regularización, con $\|R_\alpha\| \le c(\alpha)$. La elección $\alpha = \alpha(\delta)$ es admisible si $\alpha(\delta) \to 0$ y $\delta c(\alpha(\delta)) \to 0$ cuando $\delta \to 0$.

Definición 6. *La función q, definida en el Teorema 1.2, se dice un filtro de regularización para A.*

Teorema 1.3. *Si q es un filtro de regularización para el cual existe $c > 0$ que*

$$|q(\alpha,\lambda) - 1| \le c\frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda};$$

entonces,

$$\|R_\alpha A x - x\| \le c\sqrt{\alpha}\,\|z\|\,,$$

donde $x = A^* z$.

2. Problema auxiliar de contorno, problema directo

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Sigma \cup \Gamma_D$, donde Σ, Γ_N y Γ_D son superficies de dimensión n, de clase C^1 y ajenas por pares, Σ es compacta.

Como caso particular que posteriormente reclamará toda la atención se tiene $\Omega = \Gamma \times (0,a)$, con Γ un dominio regular y acotado en $\mathbb{R}^n$, $\Sigma = \partial\Gamma \times (0,a)$, $\Gamma_N = \Gamma \times \{0\}$ y $\Gamma_D = \Gamma \times \{a\}$.

Considérese el problema de contorno

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u & \equiv & 0 & en\ \Omega, \\ u|_\Sigma & = & 0, & \\ u|_{\Gamma_D} & = & \phi, & \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_N} & = & \psi. & \end{array}\right. . \tag{1.6}$$

Se definen

$$\begin{array}{rcl} E_0(\Omega) & := & \left\{u \in H^1(\Omega) : u|_\Sigma \equiv 0\right\} \\ E_{00}(\Omega) & := & \left\{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Sigma\cup\Gamma_D} \equiv 0\right\}. \end{array}$$

Definición 7. *u se dice **solución débil** del problema de contorno* (1.6) *si pertenece a* $E_0(\Omega)$*,* $u|_{\Gamma_D} = \phi$ *y se verifica la relación integral*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_{\Gamma_N} \psi v dS, \quad \forall v \in E_{00}(\Omega). \tag{1.7}$$

La definición 7 es introducida aquí como una necesidad emanada de la formulación del problema de contorno (1.6), ya que es de utilidad para la formulación operacional del problema de identificación del dato de Dirichlet a partir de condiciones sobredeterminadas en una parte de $\partial\Omega$. Permitiendo que Γ_N o $\Gamma_D \cap \Sigma$ sean conjuntos vacíos y una definición adecuada de E, puede extenderse el concepto de solución débil (generalizada) para los problemas de Dirchlet y Neumann, de forma que la definición 7 sea un caso particular de tal generalización; dicho lo cual.

Las demostraciones aquí presentadas, sobre existencia de solución débil de (1.6) para ϕ y ψ en espacios funcionales específicos, se realizan siguiendo ideas contenidas en el libro de Mijailov **[10]**.

Observación 3. *Para u de* $H^1(\Omega)$ *que satisface* (1.7)*, se infiere*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

por lo que, ver **[10]***, u es una función armónica en* Ω*; es decir,* $\Delta u = 0$ *en* Ω*. Integrando por partes se implica la siguiente relación integral que posteriormente será de utilidad:*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Es claro que la solución débil del problema (1.6) no necesariamente existe para cualesquiera ϕ y ψ de cuadrado integrable, ϕ debe pertenecer al espacio de Lions $H_{00}^{1/2}(\Gamma_D)$ por principio; sin embargo, en lo que resta de la presente sección serán considerados únicamente los pares (ϕ, ψ) para los cuales existe u solución débil de (1.6).

Lema 1.4. *Dado el par* (ϕ, ψ) *tal que existe u, solución débil de* (1.6)*, entonces u es única.*

Demostración. Si u_1 y u_2 son soluciones débiles de (1.6), entonces $u_1 - u_2$ también lo es y pertenece a $E_{00}(\Omega)$. La definición 7 implica

$$\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \nabla v dx = 0, \quad \forall v \in E_{00}(\Omega).$$

Por el Lema 1.1 y el teorema de representación de Riesz, $u_1 - u_2$ caracteriza al funcional identicamente nulo en $(E_{00}, \langle \nabla \cdot, \nabla \cdot \rangle)$, entonces $u_1 - u_2 \equiv 0$, lo cuál termina la demostración. $\square$

Del lema 1.4 se observa que, si existe solución débil de (1.6) para los pares $(\phi, 0)$ y $(0, \psi)$; entonces, la solución débil de (1.6), para (ϕ, ψ), coincide con $u_1 + u_2$, donde u_1 y u_2 son las respectivas soluciones débiles de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta u_1 & \equiv & 0 \;\; en \;\; \Omega, \\ u_1|_\Sigma & = & 0, \\ u_1|_{\Gamma_D} & = & \phi \\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_N} & = & 0. \end{array} \right. \tag{1.8}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta u_2 & \equiv & 0 \;\; en \;\; \Omega, \\ u_2|_\Sigma & = & 0, \\ u_2|_{\Gamma_D} & = & 0, \\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_N} & = & \psi. \end{array} \right. . \tag{1.9}$$

Entonces, los problemas inmediatos a resolver son los de existencia de solución débil de (1.8) y (1.9). Se definen los espacios de trazas que naturalmente se presentan:

Definición 8. *Sea S una superficie de clase C^1 y dimensión n en $\overline{\Omega} \setminus \Sigma$, se define $E^{1/2}(S)$ como el conjunto de trazas a S de funciones de $H^1(\Omega)$ tales que es nula su traza a Σ, es decir:*

$$E^{1/2}(S) = \left\{ \varphi \in L^2(S) : \exists u \in E_0(\Omega) : \left. u \right|_S = \varphi \right\}.$$

Además, $\|\cdot\|_{1/2} : E \to \mathbb{R}$ se define por

$$\|\phi\|_{1/2} = inf \left\{ \|\nabla u\| : u \in E_0(\Omega), \;\; \left. u \right|_{\Gamma_D} = \phi \right\}$$

Cuando sea empleada la expresión $\|\phi\|_{1/2}$, se entenderá por contexto el conjunto al que debe pertenecer ϕ.

Lema 1.5. *$(E^{1/2}(S), \|\cdot\|_{1/n})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. $E^{1/2}(S)$ es la imagen de $E_0(\Omega)$ bajo el operador de traza a S, claramente es un espacio vectorial. Se probará que $\|\cdot\|_{1/2}$ es una norma en $E^{1/2}(S)$.

Por definición $\|\cdot\|_{1/2}$ toma valores no negativos. Trivialmente $\|0\|_{1/2} = 0$.

Primero, para cualquier u de $E_0(\Omega)$ tal que $\left. u \right|_{\Gamma_D} = \phi$, se verifica la relación $\|\phi\| \leq \|u\|_{H^1}$ (*ver Teorema A.6*), probando así la equivalencia

$$\|\phi\|_{1/2} = 0 \Leftrightarrow \phi \equiv 0.$$

Luego, sean $E_{0,\phi} := \{u \in E_0 : \left. u \right|_S = \phi\}$ y α un escalar; entonces,

$$\alpha E_{0,\phi} + E_{0,\psi} = E_{0,\alpha\phi+\psi}.$$

Por las propiedades de suma y producto por escalar de conjuntos se implica

$$\|\alpha\phi + \psi\|_{1/2} \leq \alpha \|\phi\|_{1/2} + \|\psi\|_{1/2}, \quad \forall \phi, \psi \in E^{1/2}(S).$$

Resta demostrar que $E^{1/2}(S)$ es completo en la norma $\|\cdot\|_{1/2}$. Sea $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(E^{1/2}(S), \|\cdot\|_{1/n})$; entonces, por la linealidad del operador de traza y la definición de $\|\cdot\|_{1/2}$, existen en $E_0(\Omega)$, para cualesquiera $k_1 < k_2$ y $m_1 < m_2$, u_{m_1,k_1} y u_{m_2,k_2} tales que

$$u_{m_1,k_1}|_S = \phi_{k_1}, \quad u_{m_2,k_2}|_S = \phi_{k_2}$$

y

$$\|\nabla(u_{m_1,k_1} - u_{m_2,k_2})\|_{H^1} \leq \|\phi_{k_1} - \phi_{k_2}\|_{1/2} + \frac{1}{m_1 + m_2}.$$

Entonces , $\{u_{k,k}\}$ es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$ y es tal que $u_{k,k}|_S = \phi_k$, para todo k. La continuidad del operador de traza como un operador de $H^1(\Omega)$ en $L^2(S)$ termina la demostración. □

Lema 1.6. *Para toda ϕ en $E^{1/2}(\Gamma_D)$, existe solución débil única de* (1.8)*, u_1, que verifica*

$$\|\nabla u_1\| \leq C_1 \|\phi\|_{1/2}; \tag{1.10}$$

donde la constante C_1 no depende de ϕ.

Demostración. Si se supone la existencia de u_1 solución débil del problema (1.8), entonces para toda u en $E^1(\Omega)$ tal que $u|_{\Gamma_D} = \phi$ se define $w_u = u_1 - u$.

Es clara la pertenencia de w_u a $E_{00}(\Omega)$ al igual que la validez de las igualdades (*ver Definición 7*):

$$\int_\Omega \nabla(u + w_u)\nabla v dx = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla v dx = 0, \ \forall v \in E_{00}(\Omega).$$

Para probar la existencia de solución débil de (1.8) es suficiente con probar, dado u como antes, la existencia de w_u en $E_{00}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla w_u \nabla v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \ \forall v \in E_{00}(\Omega).$$

Sea $\Lambda_u : E_{00}(\Omega) \to \mathbb{R}$ está definida por $\Lambda_u v = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx$, la relación integral anterior se reescribe como

$$\int_\Omega \nabla w_u \nabla v dx = \Lambda_u v, \ \forall v \in E_{00}(\Omega).$$

Λ_u es un funcional lineal que, por las desigualdades triangular, de Hölder y de Caychy-Schwarz, satisface:

$$|\Lambda_u v dx| \leq \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v \right| \leq \|\nabla u\| \, \|\nabla v\| \, . \tag{1.11}$$

Es decir, Λ_u es acotado en $(E_{00}(\Omega), \|\nabla \cdot\|)$. Por el teorema de Riesz, existe una única w_u en $E_{00}(\Omega)$ tal que $\langle \nabla w_u, \nabla v \rangle = \Lambda_u v$ para toda v en $E_{00}(\Omega)$, probando con ello la existencia de solución débil que, por (1.11), satisface

$$\|\nabla w_u\| = \|\Lambda_u\| = inf \{K : |\Lambda_u v| \leq K \|\nabla v\| \, , \ v \in E_{00}(\Omega)\} \leq \|\nabla u\| \, .$$

Entonces,

$$\|\nabla u_1\| \leq \|\nabla w_u\| + \|\nabla u\| \leq 2 \|\nabla u\| \, ; \tag{1.12}$$

con $C_1 = 2$.

Se ha demostrado que, a partir de cualquier u en $H^1(\Omega)$ tal que $u|_{\Gamma_D} = \phi$, es posible exhibir a u_1 como una solución débil de (1.8) en función de u; sin embargo, el Lema 1.4 establece que u_1 no depende de u, por lo que (1.10) se implica de la relación de orden entre los extremos de (1.12). □

Lema 1.7. *Para toda ψ en $L^2(\Gamma_N)$ existe solución débil única de* (1.9)*, u_2, que verifica*

$$\|\nabla u_2\| \leq C_2 \|\psi\| \, ; \tag{1.13}$$

donde la constante C_2 no depende de ψ.

Demostración. Sea ψ en $L^2(\Gamma_N)$, $\Lambda_\psi : E_{00}(\Omega) \to \mathbb{R}$ se define por

$$\Lambda_\psi v = \int_{\Gamma_N} \psi v dS.$$

El funcional Λ_ψ es lineal, se probara que es acotado. Por la desigualdad de Hölder, el teorema A.6 y la desigualdad de Poincaré, se sigue

$$\left| \int_{\Gamma_N} \psi v dS \right| \leq \|\psi\| \left\| v|_{\Gamma_N} \right\| \leq \|\psi\| \, \|v|_{\partial\Omega}\| \leq C \|\psi\| \, \|v\|_{H^1} \, ;$$

para cualquier ψ de cuadrado integrable en Γ_N, v en $E_{00}(\Omega)$ y C una constante que no depende de v. Se deduce que Λ_ψ es acotado en $(E_{00}(\Omega), \|\nabla \cdot\|)$.

Por el teorema de representación de Riesz, existe una función única u_2 en $E_{00}(\Omega)$ tal que: $\langle \nabla u_2, \nabla v \rangle = \Lambda_\psi v$ y, como antes, verifica

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla v dx = \int_{\Gamma_0} \psi v dS, \ \forall v \in E_{00}(\Omega)$$

y

$$\|\nabla u_2\| = \|\Lambda_\psi\| \leq C \|\psi\| .$$

$\square$

De la definición 7 se sigue que la pareja (ϕ, ψ) es un elemento de $E^{1/2}(\Gamma_D) \times L^2(\Gamma_N)$, mientras que los lemas 1.4, 1.6 y 1.7 prueban que para cualquier par en $E^{1/2}(\Gamma_D) \times L^2(\Gamma_N)$, existe solución débil única $u = u_1 + u_2$ del problema (1.6) que depende continuamente de (ϕ, ψ) en la norma $\|\phi\|_{1/2} + \|\psi\|$, situación que se enuncia como un teorema ya demostrado.

Teorema 1.8. *Si u es solución débil de* (1.6)*, dado el par* (ϕ, ψ)*, entonces u es única y satisface*

$$\|\nabla u\| \leq C(\|\phi\|_{1/2} + \|\psi\|);$$

donde C es una constante que no depende de (ϕ, ψ).

Además del Teorema 1.8, aún es posible obtener más información de utilidad para la regularización del ptoblema de identificación del dato de Dirchlet.

Sean u_1 y u_2 las respectivos soluciones débiles de (1.8) y (1.9), se definen

$$\begin{array}{rcl} \Upsilon_1 : E^{1/2}(\Gamma_D) & \to & E_0(\Omega) \\ \phi & \mapsto & u_1 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} \Upsilon_2 : L^2(\Gamma_N) & \to & E_{00}(\Omega) \\ \psi & \mapsto & u_2 \end{array}.$$

Los siguientes resultados son considerados como corolarios, se deducen de la definición 7 y los lemas 1.6-1.7.

Corolario 1.9. Υ_1 *y* Υ_2 *son transformaciones lineales y acotadas.*

Corolario 1.10. *Las imagenes* $\Upsilon_1(E^{1/2}(\Gamma_D))$ *y* $\Upsilon_1(E^{1/2}(\Gamma_D))$ *son ortogonales en* $(E_0(\Omega), \langle\nabla\cdot, \nabla\cdot\rangle)$*.*

Demostración. La demostración es inmediata si en la definición 7 se sustituye u por $\Upsilon_1\phi$ y v por $\Upsilon_2\psi$. $\square$

Corolario 1.11. *Sea* $\|\phi\|_D = \|\nabla \Upsilon_1 \phi\|$. $(E^{1/2}(\Gamma_D), \|\cdot\|_D)$ *es un espacio de Banach tal que* $\|\phi\|_{1/2} \leq \|\phi\|_D$.

Observación 4. *Por definición, todo conjunto acotado en la norma* $\|\cdot\|_D$ *es el conjunto de trazas, a* Γ_D*, de un conjunto acotado en* $H^1(\Gamma)$*. Por el Teorema A.8, se sigue que todo subconjunto de* $E^{1/2}(\Gamma_a)$*, acotado en la norma* $\|\cdot\|_E$*, es un conjunto compacto en* $L^2(\Gamma)$*.*

3. Ecuación operacional equivalente al problema de Cauchy

El primer objetivo de este trabajo es lograr una formulación operacional del problema de identificación del dato de Dirichlet que, siendo conocido el par (φ, ψ) y bajo el supuesto de existencia en $E_0(\Omega)$ de una función armónica en un sentido débil tal que $u|_{\Gamma_0} = \varphi$ y $\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_0} = \psi$, consiste en determinar la traza de u a Γ_a; formulación operacional que se basará el corolario 1.9.

3.1. Operadores auxiliares sobre los datos de contorno. Sean Υ_1 y Υ_2 las transformaciones que asocian a ϕ y ψ con la solución débil de los problemas (1.8) y (1.9), respectivamente. Se define

$$\begin{array}{rcl} A : E^{1/2}(\Gamma_D) & \to & E^{1/2}(\Gamma_N) \\ \phi & \mapsto & \Upsilon_1\phi|_{\Gamma_N} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} A' : L^2(\Gamma_N) & \to & E^{1/2}(\Gamma_N) \\ \psi & \mapsto & \Upsilon_2\psi|_{\Gamma_N} . \end{array}$$

Lema 1.12. *A y A' son lineales y compactas.*

Demostración. La continuidad de A yA' se deduce del corolario 1.9, de la continuidad de Υ_1 y Υ_2, por ser continuo el operador de traza. Por otro lado, el operador de traza es compacto, se sabe que la composición de un operador continuo con una transformación compacta es también una transformación compacta. □

Se recuerda la definición del adjunto de un operador en espacios de Hilbert.

Definición 9. *Sean X e Y espacios de Hilber y $D(A)$ denso en X. Dado el operador lineal $(A, D(A))$, se define $D(A^*)$ como el conjunto de todos los y en Y para los cuales existe x_y en X tal que*

$$\langle Ax, y\rangle_Y = \langle x, x_y\rangle_X, \quad \forall x \in D(A). \tag{1.14}$$

El operador adjunto de A, $A^* : D(A*) \to X$, se define por

$$A^*y = x_y;$$

donde x_y verifica (1.14).

Lema 1.13. *A' es un operador inyectivo y autoadjunto.*

Demostración. Por la definición 7 se tiene

$$\|\nabla\Upsilon_2\psi\|^2 = \int_{\Gamma_N} \psi A'(\psi) dS.$$

Por lo tanto, $A'\psi \equiv 0$ implical $\Upsilon_2\psi \equiv 0$, en consecuencia

$$\psi = \left.\frac{\partial \Upsilon_2\psi}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_N} \equiv 0.$$

Se concluye $ker(A) = \{0\}$, probando que A' es inyectivo.

Por otro lado, A' está definido para toda función de cuadrado integrable, bastará con demostrar que es simétrico para establecer que es autoadjunto. Para cualesquiera ϕ y ψ de cuadrado integrable en Γ_N se cumple (*ver Definición 7*):

$$\int_{\Gamma_N} A'(\phi)\psi dS = \int_{\Omega} \Upsilon_2(\phi)\Upsilon_2(\psi)dx = \int_{\Gamma_N} \phi A'(\psi)dS.$$

□

Lema 1.14. *A es una transformación inyectiva.*

Demostración. Sean ϕ en $E^{1/2}(\Gamma_D)$ y ψ en $L^2(\Gamma_N)$. De acuerdo con la definición 7,

$$\int_{\Omega} \nabla\Upsilon_1\phi\nabla\Upsilon_2\psi dx = 0.$$

Además, por la observación 3, se sabe:

$$\int_{\Omega} \nabla\Upsilon_1\phi\nabla\Upsilon_2\psi dx = \int_{\Gamma_N} A(\phi)\psi dS + \int_{\Gamma_D} \phi\frac{\partial\Upsilon_2\psi}{\partial\eta}dS.$$

De modo que, $A\phi = 0$ implica

$$\int_{\Gamma_D} \phi\frac{\partial\Upsilon_2\psi}{\partial\eta}dS = 0, \quad \forall\psi \in L^2(\Gamma_N).$$

Dado que $\left.\frac{\partial\Upsilon_2\psi}{\partial\eta}\right|_{\Gamma_D}$ recorre todo el espacio $L^2(\Gamma_D)$, entonces $A\phi \equiv 0$ implica $\phi \equiv 0$. □

Lema 1.15. *$D(A^*)$ (dominio de A^*) es el espacio de funciones de cuadrado integrable en Γ_N. A^* restringido a $E^{1/2}(\Gamma_N)$ queda definido por*

$$A^*\varphi = -\left.\frac{\partial\Upsilon_2\varphi}{\partial\eta}\right|_{\Gamma_D}, \quad \varphi \in E^{1/2}(\Gamma_N).$$

Demostración. Por definición, φ en $L^2(\Gamma_N)$ pertenece a $D(A^*)$ si y sólo si existe ζ en $L(\Gamma_D)$ tal que

$$\int_{\Gamma_N} A(\phi)\varphi dS = \int_{\Gamma_D} \phi\zeta dS, \quad \forall\phi \in E^{1/2}(\Gamma_N).$$

Sin embargo, del desarrollo de la demostración del Lema 1.14, se observa que dicha condición es equivalente a

$$\int_{\Gamma_N} A(\phi)\varphi dS = -\int_{\Gamma_D} \phi\frac{\partial\Upsilon_2\varphi}{\partial\eta}dS, \quad \forall\phi \in E^{1/2}(\Gamma_N); \tag{1.15}$$

pero, el lado derecho de la última igualdad define un funcional lineal y continuo en $L^2(\Gamma_D)$, por tanto, el teorema de representación de Riesz garantiza la existencia de ζ de cuadrado integrable en Γ_D tal que

$$\int_{\Gamma_D} \phi \frac{\partial \Upsilon_2 \varphi}{\partial \eta} dS = \int_{\Gamma_D} \zeta dS, \quad \forall \phi \in L^2(\Gamma_N);$$

probando así que $L^2(\Gamma_D)$ es el dominio de A^*.

La ecuación (1.15) prueba el resto del resultado. □

Teorema 1.16. *Dado el par (φ, ψ) en $L^2(\Gamma_N) \times L^2(\Gamma_N)$, existe ϕ en $E^{1/2}(\Gamma_D)$ tal que φ es la traza a Γ_0 de la solución débil del problema (1.6), con $u|_{\Gamma_a} = \phi$ y $\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_0} = \psi$, si y solamente si ϕ es solución de la ecuación operacional*

$$A\phi = \rho, \quad \rho = \varphi - A'\psi.$$

Demostración. La prueba de suficiencia se desprende de las definiciones de A y A'. Si existe ϕ como en el enunciado del teorema, entonces la solución del problema de contorno (1.6) está dada por $u = \Upsilon_1\phi + \Upsilon_2\psi$, en consecuencia $A\phi + A'\psi = \varphi$.

En cuanto a la necesidad, sean ϕ, φ y ϕ funciones de cuadrado integrable tales que tiene sentido la expresión formal

$$A\phi = \varphi - A'\psi;$$

entonces, por la definición de A, ϕ es elemento de $E^{1/2}(\Gamma_D)$ y se satisface la relación integral

$$\int_{\Gamma_N} (A\phi + A'\psi)\zeta dS = \int_{\Gamma_N} \varphi\zeta dS, \quad \forall \zeta \in L^2(\Gamma_N)$$

Es decir,

$$\int_\Omega \nabla(\Upsilon_1\phi + \Upsilon_2\psi)\nabla\Upsilon_2\zeta dx = \int_{\Gamma_N} \varphi\zeta dS, \quad \forall \zeta \in L^2(\Gamma_N).$$

Sin embargo, por la definición de solución débil de (1.6), se verifica también

$$\int_\Omega \nabla(\Upsilon_1\phi + \Upsilon_2\psi)\nabla\Upsilon_2\zeta dx = \int_{\Gamma_N} (\Upsilon_1\phi + \Upsilon_2\psi)|_{\Gamma_N} \zeta dS, \quad \forall \zeta \in L^2(\Gamma_N).$$

De las dos últimas relaciones integrales se concluye

$$\int_{\Gamma_N} \left[\varphi - (\Upsilon_1\phi + \Upsilon_2\psi)|_{\Gamma_N}\right] \zeta dS = 0, \quad \forall \zeta \in L^2(\Gamma_N); \tag{1.16}$$

es decir, $\varphi = (\Upsilon_1\phi + \Upsilon_2\psi)|_{\Gamma_N}$. □

Con el teorema 1.16 queda demostrado que resolver el problema de identificación del dato de Dirichlet, es equivalente a resolver la ecuación operacional

$$A\phi = \rho, \quad \rho = \varphi - A'\psi;$$

por lo que es posible presentar una definición operacional de lo que significa una solución débil del problema de Cauchy asociado al problema de identificación de del dato de Dirichlet, así como de la propia definición de solución al problema de identificación.

Definición 10 (Datos de Cauchy exactos)**.** *(φ, ψ) en $L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$ se dirá un dato de Cauchy exacto, siempre que exista ϕen $E^{1/2}(\Gamma_D)$ que resuelve la ecuación operacional*

$$A\phi = \rho, \quad \rho = \varphi - A'\psi.$$

Se denotará por $\mathcal{M}$ al conjunto en $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ de datos de Cauchy exactos.

Definición 11. *Para todo dato exacto de Cauchy (φ, ψ) y ϕ en $E^{1/2}(\Gamma_a)$ que resuelve $A\phi = \rho$, se dirá que $u = \Upsilon_1\phi + \Upsilon_2\psi$ es la solución débil del problema de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \Delta u & \equiv & 0 \;\; en\ \Omega, \\ u|_{\Sigma} & = & 0, \\ u|_{\Gamma_N} & = & \varphi, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_N} & = & \psi. \end{array} \right. . \tag{1.17}$$

Por su parte, ϕ se dirá solución del problema de identificación del dato de Dirichlet en Γ_D para el problema de Cauchy (1.17)*.*

La definición operacional recién presentada de la solución débil del problema de Cauchy (1.17), es una formulación que involucra la solución de un problema inverso mal planteado en el sentido de Hadamard (*ver* [**7**]).

Para aclarar lo anterior, supóngase que A^{-1} es continuo, al componerlo con A se tiene que la identidad I es un operador compacto en $E_0^{1/2}(\Gamma_a)$, de donde se desprende que la bola unitaria es pre compacta; con todo lo anterior y sabiendo que la cerradura de la bola unitaria es compacta si y solamente si el espacio en el que se le entiende es de dimensión finita, entonces se sigue que $E_0^{1/2}(\Gamma_a)$ es de dimensión finita, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, resolver la ecuación

$$A\phi = \rho$$

es un problema mal planteado.

4. Forma de serie para soluciones débiles en regiones cilíndricas

Sea $\Omega = \Gamma \times (0, a)$, donde Γ es un dominio acotado $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Gamma$ de clase C^1.

Notación 1. *En lo que resta de este texto, salvo que se indique lo contrario,* z *denotará un elemento del intervalo* $[0, a]$, $\{v_k\}$ *será un sistema completo y ortonormal en* $L^2(\Gamma)$ *de funciones propios del operador* $(-\Delta, H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma))$ *y* λ_k^2 *el valor propio correspondiente a* v_k.

Se define además $\Gamma_z := \Gamma \times \{z\}$.

En lo referente a las superficies involucradas en las condiciones de contorno del problema (1.6)*, se hacen los siguientes acuerdos de notación para el resto del documento:*

$$\Sigma = \partial\Gamma \times [0, a], \quad \Gamma_D = \Gamma_a, \quad \Gamma_N = \Gamma_0.$$

Debe notarse que $L^2(\Gamma)$ es isométrico a cualquier espacio $L^2(\Gamma_z)$, de modo que son indistintos para efectos del este trabajo.

Como recién ha sido expuesto, dado u un elemento de $H^1(\Omega)$, $u|_{\Gamma_z}$ puede verse como una función de $L^2(\Gamma)$, por lo que existen $\{w_k(z)\}$ coeficientes de Fourier de $u|_{\Gamma_z}$ tales que

$$u|_{\Gamma_z} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z) v_k, \quad w_k(z) = \int_\Gamma u|_{\Gamma_z} v_k dx; \tag{1.18}$$

relación que, como se mostrará, ofrece en expresión en forma de serie de cualquier función de $H^1(\Omega)$ cuando Ω es una región cilíndrica.

Lema 1.17. *Si* u *es elemento de* $H^1(\Omega)$*; entonces,* w_k *definida en* (1.18) *pertenece a* $L^2(0, a)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea u elemento de $C_0^\infty(\Omega)$. Por hipótesis u^2 verifica las hipótesis del teorema de Fubini, se sigue

$$\int_\Omega u^2 d(x; z) = \int_0^a \int_\Gamma \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k v_k \right)^2 dx dz = \int_0^a \left\| u|_{\Gamma_z} \right\|^2 dz \tag{1.19}$$

En este caso, $u|_{\Gamma_z}$ es simplemente la restricción de u a Γ_z y es de cuadrado integrable desde que Γ_z es una superficie regular en Ω. En virtud del teorema de Riesz-Fisher y 1.19:

$$\int_\Omega u^2 d(x; z) = \int_0^a \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k^2 \right) dz \geq \int_0^a w_k^2 dz, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

es decir, se prueba el lema para los elementos de $C_0^\infty(\Omega)$.

Se concluye la demostración atendiendo a que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$. □

Lema 1.18. *Si u es elemento de $H^1(\Omega)$; entonces, como función de z en $(0,a)$, w_k definida en (1.18), pertenece a $H^1(0,a)$, $\int_\Gamma \frac{du}{dz}\big|_{\Gamma_z} v_k dx = \frac{dw_k}{dz}$ y se verifica*

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\frac{dw_k}{dz}\right\|^2 + \lambda_k^2\|w_k\|^2\right).$$

Demostración. Por el Lema 1.17 existen $\zeta_1, \zeta_2, ...$ en $L^2(0,a)$ tales que

$$\int_\Gamma \frac{du}{dz}\bigg|_{\Gamma_z} v_j dx = \zeta_j(z), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.20}$$

Por otro lado, aplicando a u la Definición 1, el teorema de Fubini y por (1.18), se sigue

(1.21)
$$\int_0^a \int_\Gamma \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k v_k\right)\frac{dv}{dz}dxdz = -\int_0^a \int_\Gamma \frac{du}{dz} v dxdz, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Si $v = wv_j$, cualesquiera j natural y w en $C_0^\infty(0,a)$, entonces (1.20) y (1.21) implican

$$\int_0^a w_j \frac{dw}{dz}dz = -\int_0^a \zeta_j w dz, \quad \forall v \in C_0^\infty(0,a);$$

relación que prueba, por la propia definición de derivada en el sentido de Sobolev, la pertenencia de w_k a $H^1(0,a)$ y la igualdad

$$\zeta_j = \frac{dw_j}{dz}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, de (1.3) se infiere

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^2 &= \int_0^a \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{dw_k}{dz}\right)^2 + \lambda_k^2 w_k^2\right]dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left\|\frac{dw_k}{dz}\right\|^2 + \lambda_k^2\|w_k\|^2\right).\end{aligned}$$

□

Es claro que las propiedades de la serie en el extremo de (1.18), dependerán de las propiedades de los k-ésimos coeficientes de Fourier de las trazas de u a la familia de superficies Γ_z, z en $(0,a)$.

En regiones cilíndricas el lema 1.6 y el teorema 1.8 se verifican si en sus enunciados se sustituye $H^1(\Omega)$ por $E_0(\Omega)$; dichos teoremas implican entonces que la solución débil del problema de contorno (1.6) puede expresarse en forma de serie.

Lema 1.19. *Toda función generalizada propia del operador de segunda derivada para funciones definidas en el intervalo $(0, a)$ (operador de Laplace para funciones definidas en un intervalo) es una función propia en el sentido clásico.*

Demostración. Si $w \in H^1(0, a)$ y λ verifican la relación integral

$$\int_0^a \frac{dw}{dz}\frac{dv}{dz}dz = -\lambda \int_0^a wv, \quad \forall v \in H_0^1(0, a); \tag{1.22}$$

entonces, dados $0 < t < a$ y v en $H_0^1(0, a)$, se observa que v_t también pertenece a $H_0^1(0, a)$, donde

$$v_t(z) = \begin{cases} v(z), & si \quad x \in (0, t) \\ 0, & si \quad x \in [t, a) \end{cases};$$

es decir, (1.22) implica

$$\int_0^t \frac{dw}{dz}\frac{dv}{dz}dz = -\lambda \int_0^t wv, \quad \forall v \in H_0^1(0, a), \ t \in (0, a).$$

Es posible derivar (en sentido de Sobolev) en ambos lados de la relación de igualdad en (4), de modo que

$$\frac{dw}{dz}\frac{dv}{dz} = -\lambda wv, \quad \forall v \in H_0^1(0, a). \tag{1.23}$$

La relación en (1.23) se cumple particularmente para $v = v_1 + v_2$, donde v_1 y v_2 tienen el mismo soporte I,compacto y conexo propiamente contenido en $(0, a)$, y son tales que en I verifican

$$\frac{dv_1}{dz} = v_1, \quad \frac{dv_2}{dz} = -v_2$$

.

Derivando el extremo izquierdo de la igualdad en (1.23) se sigue

$$\frac{d\left(\frac{dw}{dz}\frac{dv}{dz}\right)}{dz} = \frac{d^2w}{dz^2}(v_1 - v_2) + \frac{dw}{dz}\frac{d(v_1 - v_2)}{dz}.$$

Derivando el extremo derecho,

$$-\lambda\frac{d(wv)}{dz} = -\lambda\left(\frac{dw}{dz}\frac{d(v_1 - v_2)}{dz} + w(v_1 - v_2)\right)$$

Luego, sólo en virtud de (1.23), se establece la relación

$$\left(\frac{d^2w}{dz^2} - \lambda w\right)(v_1 - v_2) = (\lambda^2 w - \lambda w)(v_1 - v_2).$$

Se sabe que v_1 y v_2 son cualesquiera múltiplos escalares de funciones exponenciales para z en I y nulas en $(0, a) \setminus I$, por lo que de la relación anterior se desprende que, siempre es posible encontrar un par (v_1, v_2) tal que $v_1(z) - v_2(z) \neq 0$ para toda z en I,

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \lambda^2 w, \quad z \in I. \tag{1.24}$$

Para terminar la demostración sólo es nesesario observar que para todo z que pertenezca a $(0, a)$, existe un intervalo cerrado I que contiene a z, intervalo que puede coniderarse en todo el desarrollo anterior, de forma que en (1.24) es posible sustituir I por $(0, a)$.

Queda demostrado entonces que w es una función propia en un sentido fuerte, lo que a su vez significa que es elemento de $H^{2m}(0, 1)$, para todo natural m, probando que w es una función propia en un sentido clásico del operador de segunda derivada (*ver Teorema A.3*). □

Notación 2. *Para toda función f de cuadrado integrable en Γ denotaremos por f_k al k-ésimo coeficiente de Fourier de f en $L^2(\Gamma)$ respecto de la base $\{v_k\}$, $f_k = \int_\Gamma f v_k dx$.*

Teorema 1.20. *Sean $\Omega = \Gamma \times [0, a]$, $\Sigma = \partial\Gamma \times [0, a]$, $\Gamma_D = \Gamma_a$ y $\Gamma_N = \Gamma_0$. La solución débil del problema de contorno* (1.6) *es de la forma*

$$u_k(x; z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k \phi_k cosh(z\lambda_k) + \psi_k senh((a - z)\lambda_k)}{\lambda_k cosh(a\lambda_k)} \right) v_k(x). \tag{1.25}$$

Demostración. Si u es solución débil del problema (1.6), entonces es un elemento de $H^1(\Omega)$, los lemas 1.17 y 1.18 prueban que existen $w_1, w_2, \ldots$ de $H^1(0, a)$ tales que

$$u(x; z) = \sum_{k=1}^{\infty} w(z) v_k(x). \tag{1.26}$$

Aplicando al lado derecho de (1.26) la definición 7 se sigue

$$\int_\Omega \nabla \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k v_k \right) \nabla v d(x; z) = 0, \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega);$$

en particular para cualesquiera j en $\mathbb{N}$, $w \in C_0^\infty(0, a)$ y $v = wv_j$, es decir

$$\int_\Omega \nabla \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k v_k \right) \nabla (wv_j) \, d(x; z) = 0, \ \forall w \in C_0^\infty(0, a).$$

Como la serie en el integrando converge en la norma de $H^1(\Omega)$ es posible derivar, en el sentido de Sobolev, bajo el signo de la serie. Por ser $C_0^\infty(0,a)$ denso en $H_0^1(0,a)$, por el teorema de Fubini y en virtud de (1.3) se satisface

$$\int_0^a \frac{dw_j}{dz}\frac{dw}{dz}dz = -\lambda_k^2 \int_0^a w_j w dz,\ \forall w \in H_0^\infty(0,a). \tag{1.27}$$

De la relación (1.27) se desprende que w_k es un valor propio generalizado del operador de segunda derivada en $H^2(0,a) \cap H^1(0,a)$. Como lo establece el Teorema 1.19, w_k es una función propia en el sentido clásico, para todo k; es decir, $\frac{d^2 w_k}{dz} = \lambda_k^2 w_k$, con $\lambda_k^2 > 0$. Se infiere la existencia de escalares α_k y β_k tales que

$$w_k(z) = \alpha_k e^{\lambda_k z} + \beta_k e^{-\lambda_k z}, \quad \forall k \in \mathbb{N}; \tag{1.28}$$

que implica

$$u_k(x;z) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k e^{\lambda_k z} + \beta_k e^{-\lambda_k z}) v_k(x). \tag{1.29}$$

En Γ_0 el vector normal es el vector constante $\eta = (\mathbf{0};-1)$, mientras que en Γ_a se tiene $\eta = (\mathbf{0};1)$, por lo que $\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_0} = -\left.\frac{du}{dz}\right|_{\Gamma_0}$ y $\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_a} = \left.\frac{du}{dz}\right|_{\Gamma_a}$. Aplicando el Lema 1.18, con atención al desarrollo de la demostración, se sigue que el k-ésimo coeficiente de Fourier de $\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_0}$ coincide con el límite de $\frac{dw}{dz}(z)$ cuando z tiende a 0, es decir:

$$\psi_k = \left(\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_0} \right)_k = -\lambda_k(\alpha_k - \beta_k). \tag{1.30}$$

Se conocen además las relaciones

$$\phi_k = \left(u|_{\Gamma_a} \right)_k = \alpha_k e^{a\lambda_k} - \beta_k e^{-a\lambda_k}. \tag{1.31}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1.30)-(1.31) se obtiene

$$\alpha_k = \frac{\lambda_k \phi_k - \psi_k e^{-z_0\lambda_k}}{2\lambda_k cosh(z_0\lambda_k)}, \quad \beta_k = \frac{\lambda_k \phi_k + \psi_k e^{z_0\lambda_k}}{2\lambda_k cosh(z_0\lambda_k)};$$

sustituyendo en (1.29) se sigue

$$u_k(x;z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k \phi_k cosh(z\lambda_k) + \psi_k senh(a\lambda_k)}{\lambda_k cosh(a\lambda_k)} \right) v_k(x).$$

□

Observación 5. *El Teorema 1.20 establece que, en el caso de las regiones cilíndricas a las que se refiere, el operador A es simétrico:*

$$A\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k}{cosh(a\lambda_k)} v_k(x), \quad A'\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k senh(a\lambda_k)}{\lambda_k cosh(a\lambda_k)} v_k(x). \tag{1.32}$$

4.1. Propiedades de $E^{1/2}(\Gamma)$ y datos de Cauchy exactos. Como lo establece el Teorema 1.16, el problema de identificación del dato de Dirichlet para el problema de Cauchy (1.17) es mal planteado, debido a que el operador A es compacto, por lo que A^{-1} no es continuo y su dominio se encuentra propiamente contenido en $L^2(\Gamma)$. Es decir, en general, dadas φ y ψ, no es posible garantizar la existencia de ϕ en $E^{1/2}(\Gamma)$ para la cual tenga sentido la expresión formal

$$A\phi = \varphi - A'\psi. \tag{1.33}$$

En el Teorema 1.20 se brinda una forma explícita de la solución del problema de contorno (1.6), donde de forma implícita se encuentran características fundamentales tanto de $\mathcal{M}$ como de $E^{1/2}(\Gamma)$, relevantes para el estudio del problema de identificación que aquí atañe. El contenido de la presente sección está dedicado a la revisión de las propiedades que serán relevantes sobre los espacios de Hilbert que resultarán de utilidad en la etapa de regularización de este trabajo.

Lema 1.21. *ϕ de cuadrado integrable pertenece $H_0^1(\Gamma)$ si la sucesión $\{k^{\frac{1}{n}}\phi_k\}$, $\phi_k = \int_\Gamma \phi v_k dx$.*

Demostración. Para cada k, se recuerda la ya conocida relación de orden

$$C_0 k^{\frac{2}{n}} \le \lambda_k^2 \le C_1 k^{\frac{2}{n}},$$

por lo que la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{2}{n}} \phi_k^2$ es equivalente a la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \phi_k^2$.

Por otro lado, v_k es una función generalizada propia del operador de Laplace $(-\Delta, H^2(\Gamma) \cap H_0^1(\Gamma)$, por lo que cualquier combinación lineal de las mismas pertenece a $H_0^1(\Gamma)$ y por (1.3) se cumple

$$\left\| \nabla \sum_{k=1}^{m} \phi_k v_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2 \phi_k^2, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Si $\{\lambda_k \phi_k\}$ es de cuadrado integrable, entonces $\{\sum_{k=1}^{m} \phi_k v_k\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $H_0^1(\Gamma)$converge en la norma $\|\nabla \cdot\|$. Pero, por hipótesis, $\{\sum_{k=1}^{m} \phi_k v_k\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a ϕ en $L^2(\Gamma)$, concluyendo así la demostración. □

Lema 1.22. *Sean $\Omega = \Gamma \times [0,a]$, $\Sigma = \partial\Gamma \times [0,a]$, $\Gamma_D = \Gamma_a$ y $\Gamma_N = \Gamma_0$. Si u es la solución débil del problema de Cauchy, en el sentido de la definición 11, entonces*

$$\|\nabla u\| = \sum_{k=1} \infty \left(\lambda_k \phi_k^2 \frac{senh(a\lambda_k)}{cosh(a\lambda_k)} + (\phi_k + \varphi)\psi_k \right).$$

Demostración. Sabiendo que w_k es una función propia del operador de Laplace en el intervalo $[0,a]$ e integrando por partes se sigue

$$\int_0^a \left(\frac{dw_k}{dz}\right)^2 dz = w_k \frac{dw_k}{dz}\bigg|_0^a - \lambda_k^2 \int_0^a w_k^2 dz. \tag{1.34}$$

Si u es la solución débil del problema de Cauchy (1.17); entonces, por (1.34), el Lema 1.18 y la propia definición 11, se observa

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \frac{dw_k}{dz}\bigg|_0^a.$$

Aplicar el Teorema 1.20 termina la prueba. □

El Lema 1.22 establece que $\|\nabla u\|$, u solución débil del prolema de Cauchy o cualquier problema de contorno presentado con anterioridad, queda determinada por las parejas de datos de Neumann y Dirichlet en Γ_0 y Γ_a, siendo esto un avance significativo en la búsqueda de caracterizaciones de los conjuntos de dates exactos de Cauchy y de soluciones del problema de identificación relacionado.

Del lema 1.22 se desprenden además los siguientes resultados.

Lema 1.23. *La función ϕ es elemento de $E^{1/2}(\Gamma_a)$ si y solamente si $(k^{\frac{1}{2n}}\phi_k)$ es una sucesión de cuadrado sumable.*

Demostración. Dada ϕ en $E^{1/2}(\Gamma_a)$, por los lemas 1.6 y 1.22 se sabe:

$$\|\nabla \Upsilon_1 \phi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \phi_k^2 senh(a\lambda_k)}{cosh(a\lambda_k)}.$$

Empleando el criterio del cociente para la convergencia de series se prueba que la convergencia de la serie en el extremo derecho de la ecuación anterior es equivalente a la convergencia de la serie con término general $\lambda_k \phi_k^2$.

La relación $C_0 k^{\frac{2}{n}} \leq \lambda_k^2 \leq C_1 k^{\frac{2}{n}}$ en 1.5 concluye la prueba. □

Notación 3. *El Lema 1.23 exhibe que la pertnencia de ϕ a $E^{1/2}(\Gamma_a)$ no depende de $a > 0$, (lema 1.23), por lo que aquí será empleada la notación $E^{1/2}(\Gamma)$ en lugar de $E^{1/2}(\Gamma_a)$.*

Teorema 1.24. *El par (φ, ψ) en $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ es un dato exacto de Cauchy (ver definición 11) si y solamente si es de cuadrado sumable la sucesión real con término general:*

$$(\varphi_k - \frac{\psi_k}{\lambda_k})\sqrt{\lambda_k} e^{a\lambda_k}.$$

Demostración. Por el Teorema 1.20, la demostración es equivalente a probar la existencia de ϕ en $E^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\begin{aligned} u(x;z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k \lambda_k cosh(z\lambda_k) + \psi_k senh((a-z)\lambda_k)}{\lambda_k cosh(a\lambda_k)} v_k(x) \quad &\in \quad H^1(\Omega), \\ \phi_k + \frac{\psi_k}{\lambda_k} senh(a\lambda_k) \quad &= \quad \varphi_k cosh(a\lambda_k); \end{aligned}$$

debido a que el Teorema 1.20 proporciona la forma explícita de u en función de (ϕ, ψ), toda vez que u sea elemento de $H^1(\Omega)$.

Expresantodo ϕ_k en función del par (φ, ψ) y sustituyndo en ϕ_k en la expresión que caracteriza a u_k en el Teorema 1.20:

$$u_k(x;z) = \varphi_k cosh(z\lambda_k) - \frac{\psi_k(senh(a\lambda_k)cosh(z\lambda_k) - senh((a-z)\lambda_k))}{\lambda_k cosh(a\lambda_k)}.$$

Pero

$$senh(a\lambda_k)cosh(z\lambda_k) - senh((a-z)\lambda_k) = cosh(a\lambda_k)senh(z\lambda_k),$$

se deduce que la prueba del teorema es entonces equivalente a probar que existe ϕ en $E^{1/2}(\Gamma_a)$ que verifique

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k cosh(z\lambda_k) - \frac{\psi_k}{\lambda_k} senh(z\lambda_k) \quad &= \quad \in H^1(\Omega) \\ \varphi_k cosh(a\lambda_k) - \frac{\psi_k}{\lambda_k} senh(a\lambda_k) \quad &= \quad \phi_k. \end{aligned}$$

Entonces, por el Lema 1.22,

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2 \quad &= \quad \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left[(\varphi_k^2 + \frac{\psi_k^2}{\lambda_k^2}) senh(2a\lambda_k) - 2\varphi_k \frac{\psi_k}{\lambda_k} cosh(2a\lambda_k) \right] \\ &= \quad \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left[(\varphi_k - \frac{\psi_k}{\lambda_k})^2 e^{2a\lambda_k} - (\varphi_k + \frac{\psi_k}{\lambda_k})^2 e^{-2a\lambda_k} \right]. \end{aligned}$$

Por ser φ y ψ funciones de cuadrado integrable, se deduce que la pertenencia de u_0 a $H^1(\Omega)$ es equivalente al hecho de que sea de cuadrado sumable la sucesión con término general

$$(\varphi_k - \frac{\psi_k}{\lambda_k})\sqrt{\lambda_k} e^{a\lambda_k}.$$

□

Los lemas y teoremas antes demostrados brindan caracterizaciones de $E^{1/2}(\Omega)$ y $\mathcal{M}$ en función los coeficientes de Fourier de los datos de contorno y los valores propios del operador de Laplace en Γ, información útil al definir normas que serán consideradas en la formulación operacional del problema de identificación del dato de Dirichlet.

Por el Teorema 1.21, $\Lambda, \Lambda_e : L^2(\Gamma) \to H_0^1(\Gamma)$ quedan bien definidos por

$$\Lambda\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{\lambda_k} v_k, \quad \Lambda_e \phi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k}{e^{a\lambda_k}} v_k. \tag{1.35}$$

Claramente Λ y Λ_e son operadores lineales positivos y simétricos. Para Λ en particular, se presta atención a la existencias de $(\Lambda^{1/2}, L^2(\Gamma))$ tal que $\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2} = \Lambda$. Por la propia definición de Λ, es fácil ver que $\Lambda^{1/2}\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{\lambda_k^{1/2}} v_k$.

Se sabe además, por el lema 1.23, que $\Lambda^{1/2}(L^2(\Gamma)) = E^{1/2}(\Gamma)$.

Definición 12. *Sean Λ, $\Lambda^{1/2}$ y Λ_e como antes y $\Lambda_e(L^2(\Gamma)) = \mathcal{M}_e$, se definen*

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{2/n} &= \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k^{2/n}\varphi_k}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Gamma);\\
\|\phi\|_{1/n} &= \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/n}\phi_k}, \quad \forall \phi \in E^{1/2}(\Gamma);\\
\|\xi\|_e &= \left\|\Lambda_e^{-1}\xi\right\|, \qquad \forall \xi \in \mathcal{M}_e(\Gamma).
\end{aligned}$$

Observación 6. *$(H_0^1(\Gamma), \|\cdot\|_{2/n})$ y $(, E^{1/2}(\Gamma), \|\cdot\|_{1/n})$ son espacios de Banach en virtud de los resultados en la presente sección. Esta afirmación es válida también para $(\mathcal{M}_e(\Gamma), \|\cdot\|_e)$ debido a que Λ_e es un funcional lineal y acotado de $L^2(\Gamma)$.*

Además, son compactas las inmersiones canónicas de $(H_0^1(\Gamma), \|\cdot\|_{2/n})$, $(, E^{1/2}(\Gamma), \|\cdot\|_{1/n})$ y $(\mathcal{M}_e(\Gamma), \|\cdot\|_e)$ en $L^2(\Gamma)$ desde que

$$C_0 \|\cdot\|_{1/n} \leq \|\cdot\|_D \leq C_1 \|\cdot\|_{1/n} \leq C_1 \|\cdot\|_{2/n} \leq C_1 \|\cdot\|_e; \tag{1.36}$$

La desigualdad anterior prueba en realidad que cualquier conjunto acotado en alguna de las normas involucrada es un conjunto compacto en $L^2(\Omega)$ *(ver Observación 4).*

Corolario 1.25. $\mathcal{M}$ *es el conjunto de pares* (φ, ψ) *tales que* φ *pertenece a* $H_0^1(\Gamma)$ *y* $\xi = \varphi - \Lambda\psi$ *es elemento de* $\Lambda^{1/2}(\mathcal{M}_e)$.

Demostración. Por el Teorema 1.24, existe f en $\mathcal{M}$ tal que $\varphi = f + \Lambda\psi$. Por su parte, (1.36) establece la contención $\mathcal{M}_e \subset \Lambda(L^2(\Gamma))$, estableciendo con ello la pertenencia de φ a $\Lambda(L^2(\Gamma))$. Por último, el lema 1.21 garantiza la pertenencia de φ al espacio $H_0^1(\Gamma)$. □

La relevancia de $\|\cdot\|_{1/n}$ y $\|\cdot\|_e$ quedará establecida más adelante, cuando sea necesario abordar el tema de las condiciones *a priori* que pueden suponerse en la regularización de problemas inversos mal planteados.

Observaciones adicionales son las siguientes. Haciendo el cambio de variable $\xi = \varphi - \Lambda\psi$, para (φ, ψ) un dato de Cauchy exacto, se obtiene que la solución ϕ que completa el dato de Dirichlet para el problema de Cauchy (1.17) está dada por

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k cosh(a\lambda_k) - \frac{\psi_k}{\lambda_k} senh(a\lambda_k) v_k(x)\\ &= \frac{1}{2}\left(\Lambda_e^{-1}\xi + \Lambda_e(2\varphi - \xi)\right)\end{aligned}$$

Así que, por definición

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\Lambda_e^{-1}\xi + \Lambda_e(2\varphi - \xi)\right)_k^2 &= \left(cosh^2(a\lambda_k) - \frac{1}{2}\right)\xi_k^2 + \varphi_k^2\\ &\quad +(1 - e^{2a\lambda_4})\varphi_k\xi_k;\end{aligned}$$

de donde se sigue

$$\|\phi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(cosh^2(a\lambda_k) - \frac{1}{2}\right)\xi_k^2 + \varphi_k^2 + (1 - e^{2a\lambda_4})\varphi_k\xi_k\right]$$

y

$$\|\phi\|_{1/2}^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/n}\left[\left(cosh^2(a\lambda_k) - \frac{1}{2}\right)\xi_k^2 + \varphi_k^2 + (1 - e^{2a\lambda_4})\varphi_k\xi_k\right].$$

Es importante notar que λ_k es arbitrariamente grande conforme incrementa el valor del suíndice k, por lo que existe C_e, real positivo, tal que

$$\frac{C_{e,0}}{4}\xi_k^2 + \varphi_k^2 \leq \frac{1}{4}\left(\Lambda_e^{-1}\xi + \Lambda_e(2\varphi - \xi)\right)_k^2 \leq \frac{1}{2}\xi_k + \varphi_k^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por lo que, de las recientes caracterizaciones de $\|\phi\|$ y $\|\phi\|_{1/n}$ en función de φ y ξ, se obtienen las desigualdades siguientes:

$$\sqrt{\frac{C_{e,0}}{4}\|\xi\|^2 + \|\varphi\|^2} \leq \|\phi\| \leq \frac{1}{2}\|\xi\|_e + \|\varphi\| \tag{1.37}$$

y, siempre que γ en $\mathcal{M}_\rceil$ sea tal que $\Lambda^{1/2}\gamma = \xi$,

$$\sqrt{\frac{C_{e,0}}{4}\|\xi\|_{1/n}^2 + \|\varphi\|_{1/n}^2} \leq \|\phi\|_{1/n} \leq \frac{1}{2}\|\gamma\|_e + \|\varphi\|_{2/n}. \tag{1.38}$$

Capítulo 2

Regularización de la formulación operacional del problema de Cauchy en regiones cilíndricas

En adelante se reservará δ para denotar un escalar en el intervalo $(0,1)$, (φ,ψ) denotará un dato de Cauchy exacto y $(\tilde{\varphi}_\delta,\tilde{\psi}_\delta)$ una pareja de funciones de cuadrado integrable en Γ que verifica

$$\|\varphi-\tilde{\varphi}_\delta\|\leq\delta,\quad \left\|\psi-\tilde{\psi}_\delta\right\|\leq\delta. \tag{2.1}$$

El presente capítulo se concentra en la regularización del problema de identificación del dato de Dirichlet, y el problema de Cauchy relacionado, en regiones cilíndricas. Es decir, dado $(\tilde{\varphi}_\delta,\tilde{\psi}_\delta)$ un dato de Cauchy con error de orden δ, recuperar ϕ_δ que sea «suficientemente próxima» a ϕ en alguna de las normas $\|\cdot\|$ o $\|\cdot\|_{1/n}$, donde ϕ resuelve la ecuación

$$A\phi=\varphi-A'\psi,\quad (\varphi,\psi)\in\mathcal{M}.$$

Una forma inmediata de hacerlo es mediante la teoría general de regularización, pues mediante los cambios de variable $\rho=\varphi-A'\psi$ y $\tilde{\rho}_\delta=\tilde{\varphi}_\delta-A'\tilde{\psi}_\delta$ el problema se puede reescribir en la forma siguiente:

$$A\phi\approx\tilde{\rho}_\delta,\quad A\phi=\rho,\quad \|\tilde{\rho}_\delta-\rho\|\leq\delta(1+\|A'\|). \tag{2.2}$$

En este punto son pertinentes dos observaciones relevantes sobre el problema de identificación del dato de Dirichlet.

Conforme a lo expuesto con anterioridad y toda vez que Γ sea tal que son conocidos los valores propios λ_k y las funciones propias v_k; entonces, en regiones de la forma $\Omega=\Gamma\times(0,a)$, es posible disponer de cómodas caracterizaciones de todos los datos exactos, espacios normados y operadores involucrados en la regularización del problema.

En regiones cilíndricas se dispone particularmente de una caracterización de ϕ en términos del dato de Cauchy exacto y, más aún, es posible caracterizar al espacio de datos de Cauchy exactos. Se cuenta entonces con información adicional que puede ser empleada en el proceso de regularización, por ejemplo, en lugar de la terna (ϕ,φ,ψ), puede formularse el problema en términos de ϕ, φ y $\xi = \phi - \Lambda\psi$, de modo que la caracterización de los pares (φ, ξ) está dada por condiciones independientes de pertenencia de φ y ψ a espacios normados, contenidos en $L^2(\Gamma)$ y con inmersión compacta en dicho espacio.

Como se verá, formular el problema de identificación del dato de Dirichlet en una forma operacional, incluyendo la caracterización de los datos exactos de Cauchy y de Dirichlet, permite esquemas de regularización con pocas y naturales condiciones *a priori* sobre el dado exacto de Cauchy. Bajo estos esquemas, las soluciones regularizadas son la imagen inversa de A aplicada a un dato de Cauchy exacto, en cierto modo equivalente a la proyección del dato con error sobre un subconjunto compacto y convexo de $\mathcal{M}$, donde A^{-1} es continuo.

Segundo, el operador A transforma trazas de funciones de $H^1(\Omega)$ en funciones con un orden de suavidad muy elevado, lo cual hace que la solución de la ecuación $A\phi = \rho$ sea severamente inestable, aún en vecindades de ρ restringidas a la imagen de A. En la Observación 5 se aprecia que, en orden descendente, el $k-$*ésimo* valor propio de A es $\frac{1}{cosh(a\lambda_k)}$, con lo que la convergencia a 0 de los valores propios del operador A es de orden exponencial, es decir, para k_0, C_0 y C_1 como en (1.5) y $k \geq k_0$ se observa

$$1 \leq \frac{e^{a\lambda_k}}{cosh(a\lambda_k)} = \left(2 - \frac{e^{-a\lambda_a}}{cosh(a\lambda_k)}\right) \leq 2.$$

Por lo que, de acuerdo con (1.5) y por ser A autoadjunto se sigue que su $k-$*ésimo* valor singular es $\frac{1}{cosh^2(a\lambda_k)}$, se llega así a las relaciones de desigualdad

$$\frac{1}{e^{2aC_1k^{\frac{2}{n-1}}}} \leq \frac{1}{cosh^2(a\lambda_k)} \leq \frac{2}{e^{2aC_0k^{\frac{2}{n-1}}}}; \tag{2.3}$$

es decir, el problema es del tipo exponencialmente mal planteado (*ver* **[9, 14]**), un tipo de problema que por su naturaleza requiere técnicas especiales de regularización.

Para las estrategias admisibles de regularización $\{R_\alpha\}$ construidas a partir de filtros de regularización, como se muestra en el libro de Kirsch **[7]**, toda vez que es deseable obtener una aproximado del error de regularización, los resultados generales requieren como condiciones de suficiencia *a priori* sobre ϕ la existencia de ζ en el dominio de A^* tal que

$$A^*\zeta = \phi, \quad \|\zeta\| \leq C;$$

condición que aquí significa la pertenencia de ϕ a $\mathcal{M}_e$ o, como lo define Hohage en **[4]**, significa que ϕ verifica condiciones de *fuente logarítmica*; no obstante, estas condiciones implican un orden de diferenciabilidad sobre ϕ que en la práctica no necesariamente puede garantizarse.

La información *a priori* es fundamental para la regularización, pero no siempre es posible disponer de la suficiente para lograr hallar un estimado de estabilidad; sin embargo, en lo sucesivo se mostrará que, en regiones cilíndricas, respecto de aplicaciones médicas, es hasta cierto punto natural el tipo de información *a priori* que es suficiente para proponer soluciones aproximadas y estrategias de regularización admisibles para el problema de identificación del dato de Dirichlet.

El resto de esta sección se centra en la propuesta de un esquema de regularización, así como en la presentación de perspectivas de desarrollo para un segundo esquema para el problema de identificación del dato de Dirichlet en regiones cilíndricas.

Como antes C_0 y C_1, serán las constantes en los extremos de (1.5), n se reservará para denotar la dimensión de la región Γ y a denotará la altura del cilindro considerado. En adelante se supondrá que son conocidas cotas para C_0 y C_1.

Definición 13. *Toda vez que (φ, ψ) y $(\tilde{\varphi}_\delta, \tilde{\psi}_\delta)$ sean como antes, entonces*

I. *Se entenderá por dato de Dirichlet exacto en Γ_a, o dato de entrada exacto, a ϕ solución de $A\phi = \varphi - A'\psi$;*
II. *$(\tilde{\varphi}_\delta, \tilde{\psi}_\delta)$ se dirá un dato de Cauchy con error;*
III. *δ delta será el orden del error, o simplemente error, en el dato de Cauchy,*
IV. *Se dirá aproximación del dato de Cauchy con estimado de error de regularización $K(\delta)$, a cualquier dato de Cauchy exacto $(\varphi_\delta, \psi_\delta)$ en función de $(\tilde{\varphi}_\delta, \tilde{\psi}_\delta)$ y δ que verifique*

$$\|\phi_\delta - \phi\| \leq K(\delta);$$

donde $A\phi_\delta = \varphi_\delta - A'\psi_\delta$, K como función de δ está definida en una vecindad derecha del origen, es positiva, decreciente y $K(\delta)$ converge a 0 cuando δ tiende a 0.

1. Truncamiento

Dado $0 < \alpha < 1$ y

$$R_\alpha(\rho) = \sum_{k=1}^{1/\alpha} \rho_k cosh(a\lambda_k) v_k,$$

se aprecia que R_α es un operador acotado para todo α en $(0,1)$ y

$$\lim_{\alpha \to 0} R_\alpha A\rho = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{k=1}^{1/\alpha} \rho_k v_k = \rho;$$

es decir, la familia $\{R_\alpha\}$ es un estrategia de regularización, veamos ahora que es admisible.

Sean $0 < \delta_0 \leq 1$, $\beta : (0, \delta_0) \to \mathbb{R}$ tal que $\beta(\delta)$ y $\frac{\delta}{\beta(\delta)}$ tienden a 0 cuando δ tiende a 0, $\frac{\delta}{\beta(\delta)}$ es creciente en $(0, \delta_0)$ y, para δ en $(0, \delta_0)$, se verifica $\delta e^{a\sqrt{C_1}} \leq \beta(\delta)$. Se define

$$N_\beta(\delta) = max\left\{m \in \mathbb{N} : \delta^2 \sum_{k=1}^{m} e^{2a\sqrt{C_1}k^{1/n}} \leq \beta^2(\delta)\right\} \cup \{0\},\ \ \alpha(\delta) = \frac{1}{N_\beta(\delta)}.$$

Notación 4. *Para ϕ_δ y k un natural, se empleará la notación $\phi_{\delta,k}$ para referirse al k-ésimo coeficiente de Fourier de ϕ_δ respecto de la base $\{v_k\}$. Se procederá de la misma forma para casos análogos que puedan presentarse confusiones con el uso de subíndices.*

Teorema 2.1. *Si, dado (φ, ψ), ϕ es solución de*

$$A\phi = \varphi - A'\psi$$

y

$$\tilde{\phi}_\delta = R_{\alpha(\delta)}\rho_\delta = \sum_{k=1}^{N_\beta(\delta)} (\tilde{\varphi}_{\delta,k} cosh(a\lambda_k) - \frac{\tilde{\psi}_{\delta k}}{\lambda_k} senh(a\lambda_k))v_k;$$

entonces, $\left\|\tilde{\phi}_\delta - \phi\right\|$ converge a 0 cuando δ tiende a 0 y se verifica

$$\left\|\tilde{\phi}_\delta - \phi\right\| \leq K_{\delta,p};$$

donde

$$K_{\delta,p} = \sqrt{\frac{\beta^2(\delta)}{4}(1 + C_0) + \delta^2 + \frac{\left\|\Lambda^{1/2}\xi\right\|_e^2}{4N_\beta^{1/2} e^{2a\sqrt{C_0}N_\beta^{1/n}(\delta)}} + \frac{\|\varphi\|_{2/n}}{C_0 N_\beta^{2/n}(\delta)}}.$$

Demostración. Claramente $\left(\sum_{k=1}^{N_\beta(\delta)} \tilde{\varphi}_{\delta,k} v_k, \sum_{k=1}^{N_\beta(\delta)} \tilde{\psi}_{\delta,k} v_k\right)$ pertenece a $\mathcal{M}$, por ser una combinación lineal de vectores propios del operador de Laplace.

Se define $\tilde{\xi}_\delta = \tilde{\varphi}_\delta - \Lambda\tilde{\psi}_\delta$, por la desigualdad (1.37) se sigue

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{\phi}_\delta - \phi\right\|^2 \ \ \leq \ \ & \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N_\beta(\delta)} (\tilde{\xi}_{\delta,k} - \xi_k)^2 e^{2aC_0k^{1/n}} + \sum_{k=1}^{N_\beta(\delta)} (\tilde{\varphi}_{\delta,k} - \varphi_k)^2 + \\ & \frac{1}{4}\sum_{k=N_\beta(\delta)+1}^{\infty} \xi_k e^{2a\lambda_k^{1/n}} + \sum_{k=N_\beta(\delta)+1}^{\infty} \varphi_k^2.\end{aligned}$$

Por hipótesis $(\tilde{\xi}_{\delta,k} - \xi_k)^2 < \delta^2(1 + C_0 k^{-\frac{1}{n}})$, en virtud de lo cual y por las desigualdades (1.5) se tiene

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{\phi}_\delta - \phi\right\|^2 &\leq \frac{\beta^2(\delta)}{4}(1 + C_0) + \delta^2 + \\ &+\frac{1}{4}\sum_{k=N_\beta(\delta)+1}^{\infty} \xi_k e^{2a\lambda_k^{1/n}} + \sum_{k=N_\beta(\delta)+1}^{\infty} (\varphi_k)^2.\end{aligned}$$

La caracterización del conjunto de datos de Cauchy exactos establece que ϕ es elemento de $H_0^1(\Gamma)$ y ξ pertenece a $\Lambda_e(E^{1/2}(\Gamma))$, es decir, existen f de cuadrado integrable en Γ y g en $E^{1/2}(\Gamma)$ para las cuales se satisface (*ver teorema A.8*),

$$\begin{aligned}\varphi_k^2 &= \frac{f_k^2}{\lambda_k^2}, \quad \|\varphi\|_{2/n} = \|f\|\,; \\ \xi_k^2 &= \frac{g_k}{\lambda_k e^{2a\lambda_k}}, \quad \left\|\Lambda^{1/2}\xi\right\|_e = \|g\|\,.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{\infty} \varphi_k^2 &= \sum_{k=N}^{\infty} \frac{f_k^2}{\lambda_k^2} \leq \frac{\|\varphi\|_{2/n}^2}{C_0 N_\beta^{2/n}}, \\ \sum_{k=N}^{\infty} \xi_k^2 &= \sum_{k=N}^{\infty} \frac{g_k^2}{\lambda_k e^{2a\lambda_k}} \leq \frac{\left\|\Lambda^{1/2}\xi\right\|_e^2}{N_\beta^{1/2} e^{2a\sqrt{C_0}N^{1/n}}}.\end{aligned}$$

De lo anterior se desprende

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{\phi}_\delta - \phi\right\|^2 &\leq \frac{\beta^2(\delta)}{4}(1 + C_0) + \delta^2 \\ &+\frac{\left\|\Lambda^{1/2}\xi\right\|_e^2}{4N_\beta^{1/2} e^{2a\sqrt{C_0}N_\beta^{1/n}(\delta)}} + \frac{\|\varphi\|_{2/n}^2}{C_0 N_\beta^{2/n}(\delta)};\end{aligned} \tag{2.4}$$

lo que prueba la desigualdad en el consecuente del resultado.

Por último, la forma en que se ha definido a $N_\beta(\delta)$ implica que es monótona y diverge cuando δ tiende a 0, lo cual termina la demostración. □

El teorema 2.1 ofrece una forma de proponer estrategias admisibles de regularización por truncamiento, $\alpha = N_\beta^{-1}(\delta)$, de forma que β puede ser elegida en función del tipo de información *a priori* disponible sobre los ordenes de magnitud de δ y el dato exacto de Cauchy (φ, ψ).

Dados δ_0 en $(0, 1)$ y la familia paramétrica de funciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \beta_p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \delta & \longmapsto & \beta_p(\delta) = e^{a\sqrt{C_1}}\delta^p \end{array} \right\}_{p\in(0,1)},$$

se emplearán $N_{\delta,p}$ y $K_{\delta,p}$ para denotar $N_{\beta_p}(\delta)$ y $K(\beta,\delta)$. Se definen además

$$
\begin{aligned}
C_{0,1} &= ((1+C_0)e^{2a\sqrt{C_1}})/4,\\
C'_{0,1} &= (a\sqrt{\frac{C_1}{C_0}})/2,\\
C''_{0,1} &= \frac{\sqrt{C_0}}{2^{1/n}\left(1+a\sqrt{C_1}\right)},\\
\underline{K}^2_{\delta,p} &= \left(\frac{\|\xi\|_e\,\delta^{1-p}}{e^{a\sqrt{C_1}}}\right)^2 + \left(\frac{C'_{0,1}\,\|\varphi\|_{2/n}}{a\sqrt{C_1}-(1-p)\ln(\delta)}\right)^2,\\
\overline{K}^2_{\delta,p} &= \left(\|\xi\|_e\,\delta^{-aC''_{0,1}(1-p)}\right)^2 + \left(\frac{\|\varphi\|_{H^1}}{C''_{0,1}(1-p)(-\ln(\delta))}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Lema 2.2. *Sea $(\tilde{\varphi}_\delta,\tilde{\psi}_\delta)$ un dato de Cauchy con error, $0<p<1$ y $0<\delta_0\le 1$. Entonces*

$$\underline{K}^2_{\delta,p} \le K^2_{\delta,p} - C_{0,1}\delta^{2p} - \delta^2 \le \overline{K}^2_{\delta,p}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición

$$e^{a\sqrt{C_1}N^{1/n}_{\delta,p}} \le \frac{\beta_p(\delta)}{\delta}, \tag{2.5}$$

luego

$$e^{-a\sqrt{C_1}}\delta^{1-p} \le e^{-a\sqrt{C_1}N^{1/n}_{\delta,p}}, \quad \frac{a\sqrt{C_1}}{a\sqrt{C_1}-(1-p)\ln(\delta)} \le N^{-1/n}_{\delta,p}. \tag{2.6}$$

Por (2.6) y la definición de $K_{\delta,p}$ se tiene

$$K^2_{\delta,p} \ge C_{0,1}\delta^{2p} + \delta^2 + \left(\frac{\|\xi\|_e\,\delta^{1-p}}{e^{a\sqrt{C_1}}}\right)^2 + \left(\frac{C'_{0,1}\,\|\varphi\|_{2/n}}{a\sqrt{C_1}-(1-p)\ln(\delta)}\right)^2;$$

quedando probada la primera desigualdad de la primera parte y simultáneamente la segunda parte del lema.

Para demostrar las desigualdades restantes se observa

$$N_{\delta,p} \ge max\left\{m\in\mathbb{N} : me^{a\sqrt{C_1}m^{1/n}} \le \delta^{p-1}\right\},$$

por lo que

$$\begin{aligned} N_{\delta,p}+1 &\geq min\left\{m\in\mathbb{N} : me^{a\sqrt{C_1}m^{1/n}} \geq \delta^{p-1}\right\} \\ &= min\left\{m\in\mathbb{N} : \ln(m)+a\sqrt{C_1}m^{1/n} \geq (1-p)(-\ln(\delta))\right\} \\ &\geq min\left\{m\in\mathbb{N} : (1+a\sqrt{C_1})m^{1/n} \geq (1-p)(-\ln(\delta))\right\}; \end{aligned}$$

se implica

$$N_{\delta,p}^{1/n} \geq \frac{(1-p)(-\ln(\delta))}{2^{1/n}(1+a\sqrt{C_1})} = \frac{C''_{0,1}(1-p)(-\ln(\delta))}{\sqrt{C_0}}.$$

De la definición de $K_{\delta,p}$ se desprende

$$K_{\delta,p}^2 \leq C_{0,1}\delta^{2p} + \delta^2 + \left(\|\xi\|_e \delta^{-aC''_{0,1}(1-p)}\right)^2 + \left(\frac{\|\varphi\|_{H^1}}{C''_{0,1}(1-p)(-\ln(\delta))}\right)^2.$$

□

Corolario 2.3. *Sean $(\tilde{\varphi}_\delta, \tilde{\psi}_\delta)$ un dato de Cauchy con error, $0<p<1$ y $0<\delta_0<1$; entonces, respecto de δ, la convergencia de estrategia de regularización $R_{1/N_{\delta,p}}$ a la solución exacta del problema de identificación, respecto de δ, es por a lo sumo del orden de δ^p .*

Demostración. La demostración es una consecuencia inmediata del lema 2.2, pues la velocidad de convergencia de la estrategia de regularización $R_{1/N_{\delta,p}}$ es mayorada por la velocidad con que $K_{\delta,p}$ converge a 0; que a su vez es mayorada por el término en el lado derecho de la segunda desigualdad del lema 2.2, término que converge a cero en con velocidad δ^p. □

Los resultados aquí presentados sobre la admisibilidad de la estrategia de regularización $R_{1/N_\beta(\delta)}$ ofrecen un mecanismo para la generación de estrategias de regularización admisibles, en función de la información *a priori* de la que se disponga para la regularización de cada en cada uno de los problemas de identificación de datos de contorno aquí atendidos.

Por ejemplo, si se conocen cotas superiores para el orden de magnitud del error δ, $\|\xi\|_e$ y $\|\varphi\|_{2/n}$; entonces, una forma de elegir una solución aproximada de ϕ consiste en proponer

$$R_{1/N_{\delta,p_0}}(\tilde{\rho}_\delta) = \tilde{\phi}_\delta,$$

donde p_0 minimiza $K_{\delta,p}$. Es decir, elegir entre una familia de estrategias de regularización admisibles, aquella que, dado δ, minimice el el estimado de error $K_{\delta,p}$. En estos casos, el valor N_{δ,p_0} se encuentra en función de δ, el dato de Cauchy exacto (φ,ψ) y la propia región Γ a través de las constantes C_0 y C_1 *ver figura 1.*

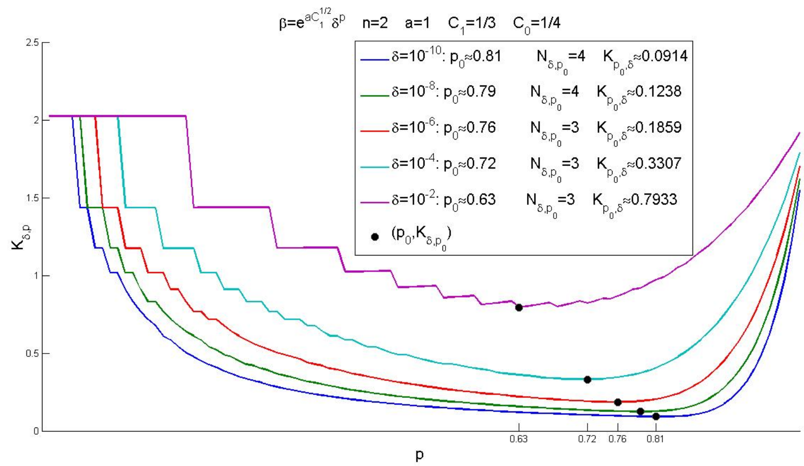

FIGURA 1. Ejemplo ficticio de p_0, para 5 ordenes distintos de magnitud de δ que sólo pretende ser ilustrativo la elección de p_0. Las constantes C_0 y C_1 fueron elegidas sólo para hacer evidente el comportamiento cualitativo de $K_{\delta,p}$, en función de p, para el caso en que se verifica $\|\xi\|_e = \|\varphi\|_{2/n} = 1$.

El lema 2.2 puede ser de utilidad para determinar cuál es el valor δ_0, lo suficientemente pequeño para lograr soluciones aproximadas de ϕ que sean de utilidad para fines específicos, toda vez que sea conocida información sobre el orden de magnitud de $\|\xi\|_e$ y $\|\varphi\|_{2/n}$.

2. Perspectivas de regularización

Supóngase que $\|\varphi\|_{2/n} \leq C_\varphi$ y existe ζ en $L^2(\Gamma)$ tal que

$$\xi = \lambda_e \lambda \zeta, \quad \|\zeta\| \leq C_\zeta,$$

entonces , ξ y φ pertenecen a $\overline{B_e(0, C_\zeta)}$ y $\overline{B_{H^1}(0, C_\varphi)}$, las bolas cerradas centradas en el origen y de radios C_ζ y C_φ en $\mathcal{M}_e$ y $H^1(\Gamma)$, respectivamente. La desigualdad (1.38) implica la pertenencia de ϕ a $\overline{B_{1/n}(0, (C_\varphi^2 + C_\zeta^2)^{1/2})}$, la bola cerrada centrada en el origen y de radio $\sqrt{C_\varphi^2 + C_\zeta^2}$ en la norma $\|\cdot\|_{1/n}$.

Ya se ha establecido previamente que los conjuntos $\overline{B_e(0, C_\zeta)}$, $\overline{B_{H^1}(0, C_\varphi)}$ y $\overline{B_{1/n}(0, (C_\varphi^2 + C_\zeta^2)^{1/2})}$ son compactos y convexos en $L^2(\Gamma)$, lo cual implica que son también conjuntos cerrados. Por lo que, de las teorías de regularización y optimización se sabe:

1. Para todo dato de Cauchy con error $(\tilde{\varphi}_\delta, \tilde{\psi}_\delta)$ existe un único $(\varphi_\delta, \psi_\delta)$ dato exacto de Cauchy tal que

$$\varphi_\delta \in \overline{B_{H^1}(0, C_\varphi)}, \quad \xi_\delta = (\varphi_\delta - \Lambda\psi_\delta) \in \overline{B_e(0, C_\zeta)}$$

   y

$$\begin{aligned} \|\varphi_\delta - \tilde{\varphi}_\delta\| &= min\{\|\varphi - \tilde{\varphi}_\delta\| : \varphi \in \overline{B_{H^1}(0, C_\varphi)}\}, \\ \left\|\xi_\delta - \tilde{\xi}_\delta\right\| &= min\{\|\xi - \tilde{\varphi}_\delta\| : \varphi \in \overline{B_e(0, C_\zeta)}\}. \end{aligned}$$

2. A^{-1} es continuo en $\overline{B_{1/n}(0, (C_\varphi^2 + C_\zeta^2)^{1/2})}$.

Las observaciones anteriores plantean el siguiente esquema de regularización por soluciones aproximadas:

$$\phi_\delta = A^{-1}(\Lambda_2^{-1}\xi_\delta + \Lambda_e(2\varphi_\delta - \xi_\delta)).$$

Por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} \|\varphi_\delta - \varphi\| &\leq \|\varphi_\delta - \tilde{\varphi}_\delta\| + \|\tilde{\varphi}_\delta - \varphi\|, \leq 2\delta \\ \|\xi_\delta - \xi\| &\leq \left\|\xi_\delta - \tilde{\xi}_\delta\right\| + \left\|\tilde{\xi}_\delta - \xi\right\| \leq 2\delta. \end{aligned}$$

Sin embargo, $\overline{B_{H^1}(0, C_\varphi)}$ y $\overline{B_e(0, C_\zeta)}$ son conjuntos compactos y convexos en $L^2(\Gamma)$, se sabe que las respectivas proyecciones φ_δ y ξ_δ dependen continuamente de $\tilde{\varphi}_\delta$ y $\tilde{\xi}_\delta$, lo cual es suficiente para probar

$$\lim_{\delta \to 0} \|\phi_\delta - \phi\| = 0.$$

Conclusiones

Dado el dato de Cauchy (φ, ψ), resolver el problema de de identificación del dato de Dirichlet para el operador de Laplace, puede formularse operacionalmente como un problema inverso, que consiste en resolver la ecuación

$$A\phi = \rho, \quad \rho = \varphi - A'\psi;$$

Donde A y A' son operadores lineales y compactos, definidos como la traza a Γ_N de las soluciones débiles de problemas de contorno auxiliares (1.8) y(1.9), respectivamente.

En regiones cilíndricas ($\Omega = \Gamma \times (0, a)$), ϕ puede ser expresada en forma de serie Fourier, en función de los coeficientes de φ y ψ, respecto de la base $\{v_k\}$ de funciones propias del operador de Laplace definido en Γ.

Para la obtención de soluciones aproximadas ϕ_δ del problema

$$A\phi \approx \tilde{\rho}_\delta, \quad \tilde{\rho}_\delta = \tilde{\varphi}_\delta - A'\tilde{\varphi}_\delta;$$

es de utilidad la caracterización del conjunto de datos de Cauchy exactos para la construcción de estrategias admisibles de regularización con velocidad de convergencia δ^p, con acotaciones conocidas para la magnitud del orden del error de aproximación $\|\phi_\delta - \phi\|$.

Respecto de la aplicación al problema inverso electrocardiográfico del problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en regiones cilíndricas, el siguiente paso natural es lograr determinar una transformación adecuada que haga equivalentes la solución débil de los respectivos problema de identificación del dato de Dirichlet, en los casos en que Ω es una región cilíndrica o una región con una cavidad.

Un problema adicional que atender para la aplicabilidad real de los resultados presentados en este trabajo, es aproximar las funciones y valores propios del operador de Laplace para funciones definidas en un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$.

Apéndice A

Los resultados contenidos en este apéndice pueden ser consultados en [**3, 5, 10, 11, 12**].

Teorema A.1 (Teorema de Convergencia Dominada de Lesbegue)**.** *Sea* $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R}\}$ *una sucesión de funciones integrables que converge casi donde quiera a una función medible* $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R}\}$*. Si existe una función integrable* g *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo natural* n*, entonces* f *es integrable y se verifica*

$$\int_\Omega f dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

Teorema A.2. *Sea* f *una función compleja representable en* Ω *por series de potencias y* $Z(f) = \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$*. Entonces,* $Z(f)$ *es vació o no tiene puntos de acumulación en* Ω*.*

Teorema A.3. *Sea* $k > m/2$ *y* Ω *acotado con frantera regular, entonces* $H^k(\Omega)$ *tiene inmersión compacta en* $C(\overline{\Omega})$*.*

Teorema A.4 (Compacidad de la inmersión entre espacios de Sobolev)**.** *Sea* Ω *una región acotada de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera regular y* $k_1 > k_2 \geq 0$*; entonces, la inmersión* $H^{k_1}(\Omega) \to H^{k_2}(\Omega)$ *es compacta.*

Teorema A.5 (trazas de las funciones en $H^k(\Omega)$, [**3**] p. 136)**.** *Sean* Ω *una región arbitraria de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera regular y* Γ *una superficie compacta de clase* C^∞ *y de dimensión* $p < n$ *contenida en* $\overline{\Omega}$*.*

i. *Si* $|\alpha| < k - \frac{n-p}{2}$*, la aplicación* $u \to D^\alpha\, u|_\Gamma$*, definida de* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *en* $C^\infty(\Gamma)$*, se extiende continuamente a una aplicación lineal*

$$T_\alpha : H^k(\Omega) \to H^{k-|\alpha|-\frac{n-p}{2}}(\Gamma);$$

de forma que T_α *es una transformación compacta.*

ii. *Si* Ω *es además acotada,* $\Gamma = \partial\Omega$ *y* $j < k - \frac{1}{2}$*, la aplicación* $u \mapsto \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j}$*, definida de* $C^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\partial\Omega)$*, donde* $\frac{\partial^j}{\partial\eta^j}$ *denota la derivada de orden* j *en la dirección normal exterior* η *a* $\partial\Omega$*, puede extenderse continuamente a una aplicación lineal*

$$N_j : H^k(\Omega) \longrightarrow H^{k-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

de forma que N_j es una aplicación compacta y sobreyectiva.

iii. *Existe una aplicación lineal y continua de levantamiento*

$$P_j : H^{k-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^k(\Omega)$$

que es inversa de N_j a la derecha.

Definición 14. *Sean Ω y Γ como en el teorema A.5. Si $|\alpha| < k - \frac{n-p}{2}$, la función $T_\alpha \in H^{k-|\alpha|-\frac{n-p}{2}}(\Gamma)$ se llama* traza en el sentido de Sobolev *de la derivada de orden α de la función $u \in H^k(\Omega)$.*

En particular, para $\alpha = 0$, la función $T_0(u) = u|_\Gamma$ cuando existe, se llama traza a Γ de la función $u \in H^k(\Omega)$.

Teorema A.6. *Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^{n+1}$ y S una superficie de dimensión n y de clase C^1 en $\overline{\Omega}$, entonces para toda f en $H^1(\Omega)$ existe la traza de f a S y se verifica la relación*

$$\| f|_S \|_{L^2(S)} \leq \|f\|_{H^1(\Omega)} .$$

Teorema A.7. *El espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ consta de los elementos en $H^1(\Omega)$ tales que su traza a la frontera de Ω es nula.*

Teorema A.8. *Sea Ω un dominio acotado de dimensión n y Γ una superficie regular de dimensión $n-1$ contenida en $\overline{\Omega}$, todo conjunto de trazas en Γ de un conjunto de funciones acotado en la norma de $H^1\Omega$ es compacto en $L^2(\Gamma)$.*

Teorema A.9 (Fórmula de integración por partes)**.** *Sea Ω una región acotada en $\mathbb{R}^n$ tal que $\partial\Omega$ es de clase C^1, mientras que f y g son elementos de $H^1(\Omega)$, entonces para todo $i = 1, ..., n$ es válida la fórmula de integración por partes*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g = \int_{\partial\Omega} f g \eta_i dS - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i};$$

donde $\eta_i = cos(\eta, x_i)$ es el coseno del ángulo entre la normal η, exterior a $\partial\Omega$, y el eje x_i.

De la formula de integración por partes se deduce, para g, f_1,...,f_{n-1} y f_n en $H^1(\Omega)$ tales que $f = (f_i, \cdots, f_n)$:

$$\int_\Omega g div(f) dx = \int_{\partial\Omega} g \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{\partial\Omega} dS - \int_\Omega f \cdot \nabla g dx.$$

Teorema A.10. *Una función armónica en Ω es analítica en Ω.*

Definición 15 (Desigualdad de Poincaré, **[12]** p. 50)**.** *Si $1 \leq p \leq \infty$ y Ω es un conjunto abierto y no vacío en $\mathbb{R}^n$, se dice que se verifica la desigualdad de Poincaré en V, subespacio de $W^{1,p}$, si existe una constante C tal que $||u||_p \leq C||\nabla u||_p$ para todo u elemento de V.*

Lema A.11 ([**12**] p. 50). *Sean V y Ω como en la definición 15 y μ la medida de Lebesgue.*

I. *Si $\mu(\Omega) < \infty$ y la función constante 1 es elemento de V, entonces no se verifica en V la desigualdad de Poincaré.*
II. *La desigualdad de Poincaré no se verifica en $W_0^{1,p}$ si existen una sucesión $r_n \to \infty$ y $x_n \in \Omega$ tales que $B(x_n, r_n) \subset \Omega$.*
III. *Si existen $d >$ y $\zeta \in \mathbb{R}^n$ $||\zeta|| = 1$, $d = \beta - \alpha$ y $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha < x \cdot \zeta < \beta\}$, entonces $||u||_p \leq C_0 d ||\nabla u||_p$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, donde C_0 es una constante universal.*
IV. *La desigualdad de Poincaré se verifica en $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ si y sólo si existe una constante C tal que $d(x, \partial\Omega) < C$ para todo $x \in \Omega$, donde $d(\cdot,\cdot)$ denota la distancia euclideana.*
V. *Si $\mu(\Omega) < \infty$, entonces se verifica la desigualdad de Poincaré en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y se tiene $||u||_p \leq C(p)\mu(\Omega)^{\frac{1}{n}} ||\nabla u||_p$ para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*
VI. *Si es compacta la inmersión de V en $L^p(\Omega)$, entonces la desigualdad de Poincaré se verifica en el subespacio V si y sólo si la constante 1 no es elemento de V.*

Bibliografía

[1] Amel Ben Abda, Jacques Henry and Fadhel Jday, *Boundary data - completion: the methos of boundary value problem factorization*, IOP Publishing Inverse Problems 27, 2011.

[2] Berntsson F. and Eldén L., *Numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation*, IOP Publishing Inverse Problems 17, 2001: 839-853.

[3] Fraguela Collar Andrés, *Análisis Funcional Aplicado, VII Coloquio del - departamento de matemáticas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N.*

[4] Hohage Thorsten, *Regularization of exponentially ill-posed problems*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz 21, 2000:439-464.

[5] Isakov V, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer, New York 1998.

[6] Joakim Sundnes, Glenn Terje Lines, Xing Cai, Bjørn Fredrik Nielsen, Kent-Andre Mardal and Aslak Tveito, *Computing the Electrical Activity in the Heart*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2006.

[7] Kirsch A., *An introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Applied Mathematical Sciences, vol 120, Springer-Verlag, New York 1996.

[8] Kolmogorov A. N. and Fomin S. V., *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Mir, 2da. edición, Moscu, 1975.

[9] Michele Di Cristo and Luca Rondi, *Examples of exponential instability for elliptic inverse problems*, arXiv:math/0303126 [math.AP], 2003.

[10] Mijailov V.P.: *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*, MIR, Moscu 1978.

[11] Renardy Michel and Rogers Robert C.: *An Introduction to Partial - Differential Equations*, Texts in Applied Mathematics, vol 13, Springer-Verlag, New York 1993.

[12] Tartar Luc: *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2007.

[13] Tyn Myint-U and Lokenath Debnath: *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhaüser, Fourth Edition , Boston 2007.

[14] Solodky S.G. and Mosentsoval A., *Morozov's discrepancy principle for the Tikhonov regularization of exponentially ill - posed problems*, Computational Methods in Applied Mathematics, vol 8, No. 1, 2008: 86-98.

[15] Vladimirov V. S.: *Equations of Mathematical Physics*, MARCEL DEKKER, INC., New York 1971.

[16] Hernández Montero Ozkar, *Planteamiento operacional de un problema para estudiar la existencia y estabilidad de soluciones periódicas en un modelo de - actividad eléctrica en el corazón*, Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Puebla, 2013.

Índice de Notación

Los siguientes son, para Ω un dominio en $\mathbb{R}^{n+1}$, acuerdos de notación comunes en la literatura que cuya definición es obviada en el presente texto:

$\overline{\Omega}$	Clausura de Ω.
$\partial\Omega$	Frontera de Ω.
$C(\Omega)$	Conjunto de funciones complejas y continuas definidas en Ω.
$C^m(\Omega)$	Conjunto de funciones complejas con derivadas continuas en Ω hasta el orden m inclusive, m un entero no negativo y $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Se define $C^\infty(\Omega) = \cap_{m=1}^{\infty} C^m(\Omega)$.
$C^m(\overline{\Omega})$	Funciones de $C^m(\Omega)$ tales que cualquier derivada de orden menor o igual que m puede ser prolongada continuamente a $\overline{\Omega}$. Se define $C^\infty(\overline{\Omega}) = \cap_{m=1}^{\infty} C^m(\overline{\Omega})$.
$C_0^m(\Omega)$	Funciones de $C^m(\Omega)$ con soporte compacto en Ω, recordando que el soporte de una función compleja definida en Ω es el complemento en Ω del mayor subconjunto abierto de Ω donde f se anula. Se define $C_0^\infty(\Omega) = \cap_{m=1}^{\infty} C_0^m(\Omega)$.
$(A, D(A))$	Denota una transformación lineal entre espacios funcionales, con dominio $D(A)$, denso en un espacio de Banach, e imagen en un subespacio de Banach conocido por contexto.
$ker(A)$	Núcleo (Kernel) de $(A, D(A))$.
$Im(A)$	Rango o conjunto imagen de $(A, D(A))$.
$(A^*, D(A^*))$	Adjinto de $(A, D(A))$, *ver definición 9 en pag. 13.*
$u\|_\Gamma$	Traza de u a Γ (*ver teorema A.5*).
$\frac{\partial u}{\partial \eta}$	Derivada normal de u, o derivada de u en la dirección normal exterior (*ver teorema A.5*).
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto interior en un espacio de funciones de cuadrado integrable.
$\\|\cdot\\|$	Denota la norma en un espacio de funciones de cuadrado integrable. También denota la norma de una transformación lineal y acotada entre espacios de Banach que se conocen conocen por contexto.

Índice alfabético

$(A', L^2(\Gamma_D))$, 13
$(A, E^{1/2}(\Gamma_D))$, 13
$< \nabla\cdot, \nabla\cdot >$, 2
$E^{1/2}(S)$, 9
$E^{1/2}(\Gamma_D)$, 9
$E^{1/2}(\Gamma_a)$, 9, 23
$H^m(\Omega)$, 2
$H_0^1(\Omega)$, 2
$W^{m,p}(\Omega)$, 2
Γ_z, 17
Λ, 25
Υ_1, 12
λ_k, 17
$\|\cdot\|_{1/2}$, 9
$\|\cdot\|_D$, 12
$\|\nabla\cdot\|$, 2
p_0, 35
v_k, 17

dato de Cauchy exacto, 16

función
  propia, 3
  traza de, 42

Poincaré
  desigualdad de, 2

Sobolev
  derivada en el sentido de, 2
  trazas en el sentido de, 42
solución débil
  Problema de Cauchy, 16
  problema auxiliar, 8

valor propio, 3