Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

TEOREMAS DEL PUNTO FIJO PARA FUNCIONES MONÓTONAS Y SUS APLICACIONES

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

por

Roque Vidal Luciano Gerardo

Director de tesis

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna

Puebla, Pue. Diciembre de 2018

Dedicatoria

Agradecimientos

A mis hermanas, a Dulce por abrir el camino para seguir estudiando la universidad, a Yasmin por ser mi guía durante estos 6 años de la carrera, y a Karen por ser quien da esquina cuando se requiere dar un respiro.

A mamá Rafa y a mis tías Chayo, Lupe, Corazón y Rosa, por todo el apoyo hacia mi persona, sin ellas creo que mi vida habría sido más difícil y con menos color. A mi primo Jhon por los momentos que hemos pasado juntos, y a mi novia Brendita por las horas en la sala de estudiantes que pasamos trabajando juntos.

A mis amigos Gustavo, Juan, Rubén y Peña, por ayudarme a mi crecimiento académico en más de una forma. A todos mis amigos que hicieron de esta carrera algo más grato.

A mi asesor, el Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna por toda la ayuda brindada en las secciones en su cubo, y esa gran paciencia para explicar temas complicados de manera sencilla.

A mis sinodales, el Dr. Gabriel Kantún, el Dr. Jacobo Oliveros y la Dra. Daniela Tzompanti por leer mi trabajo de tesis y ayudarme a entender mejor el tema y el idioma español mediante sus observaciones.

Introducción

La teoría del punto fijo es un área activa de investigación con una amplia gama de aplicaciones en varios campos de la ciencia como la economía, las matemáticas y la física. Algunas de las preguntas fundamentales que se abordan en la Teoría del Punto Fijo son: ¿Qué propiedades debe cumplir un conjunto no vacío X y una función $f : X \longrightarrow X$ para que exista un elemento x en X tal que $f(x) = x$? A tal punto se le llama punto fijo. En caso de existir un punto fijo, ¿bajo qué condiciones es único? Si son varios puntos fijos, ¿qué propiedades cumple el conjunto de puntos fijos? y ¿existen algoritmos que permitan calcularlos?

Desde el punto de vista histórico, los primeros teoremas del punto fijo surgieron en el contexto de demostrar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales e integrales. Poincaré fue el primero en trabajar en este campo, en 1886. Luego Brouwer, en 1912, probó un teorema del punto fijo para un cuadrado, una esfera y sus contrapartes en dimensión n.

Uno de los primeros resultados trascendentales en el campo de la Teoría del Punto Fijo en espacios métricos fue presentado en 1922 por Stefan Banach, su célebre teorema conocido como el Principio de Contracción de Banach, es considerado como uno de los principios fundamentales en el campo del Análisis Funcional. Uno de los problemas principales del Teorema del Punto Fijo de Banach es que las funciones contractivas en el sentido de Banach son uniformemente continuas, es decir, se restringe a trabajar únicamente con funciones uniformemente continuas.

Este trabajo da a conocer algunos teoremas del punto fijo para poder resolver problemas especificos de ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales en el cuarto capítulo. Mediante la teoría del punto fijo se garantiza la existencia de soluciones, se proporciona un algoritmo iterativo para encontrar dichas soluciones y no en todos ellos se requiere la hipótesis de continuidad o compacidad en los problemas mencionados anteriormente. Esta tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

Primer capítulo.

Contiene un repaso de los conceptos y teoremas básicos de la teoría de espacios métricos, en particular de espacios normados, los cuales nos serán útiles para entender mejor la Teoría del Punto Fijo que se presentará en los siguientes capítulos.

Segundo capítulo.

Se trabaja con algunos teoremas clásicos de punto fijo para espacios métricos con funciones contractivas tales como el teorema del punto fijo de Banach y otros teoremas que no implican necesariamente la continuidad de la función tales como el teorema del punto fijo de Kannan y el teorema del punto fijo de Chatterjea. Estos dos teoremas proporcionan el mismo algoritmo iterativo para encontrar el punto fijo que el teorema del punto fijo de Banach. En el caso del teorema del punto fijo de Banach se proporcionan ejemplos de aplicaciones en ecuaciones diferenciales ordinarias.

Tercer capítulo.

En este capítulo se introducen conceptos relacionados con conjuntos parcialmente ordenados, tales como la cota superior, la cota inferior, el supremo y el ínfimo de un conjunto. También se estudia el concepto de espacio vectorial ordenado, para esto se agrega el concepto de cono y se trabaja con la relación de orden inducida por el cono. Por último se presentan algunos resultados de la teoría del punto fijo para conjuntos que poseen una relación de orden.

Cuarto capítulo.

Se trabaja con funciones que están definidas en un espacio de Banach ordenado, con valores que toman en el mismo espacio y que son monótonamente crecientes o decrecientes.

Por último se usa la teoría expuesta para asegurar la existencia de las soluciones a ecuaciones integrales y se proporciona un algoritmo que obtenga dichas soluciones, en particular las soluciones que surgen de problema no lineales en áreas como la física nuclear (véase [4]).

Este trabajo no pretende ser original, nuestra contribución es la manera en que lo organizamos, detallamos más algunas demostraciones y comentarios sobre algunos temas tratados. Se espera principalmente que este trabajo sea útil para aquellos que inicien en la Teoria del Punto Fijo.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos conceptos y teoremas básicos sobre espacios métricos y espacios normados que facilitan la lectura de este trabajo.

1.1. Espacios métricos

Definición 1.1.1. *Sean* X *un conjunto diferente del vacío y* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *una función. Se dice que* d *es una métrica o distancia en* X*, si para cada* x*,* y*,* $z \in X$*,* d *cumple con las siguientes propiedades:*

(M1) $d(x, y) \geq 0$.

(M2) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Simetría).*

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(desigualdad del triángulo).*

Si X *es un conjunto y* d *es una métrica en* X*, entonces a la pareja* (X, d) *se le llama espacio métrico. Cuando no haya confusión, le llamaremos espacio métrico* X *sin hacer referencia a la métrica* d*.*

Ejemplo 1.1.1. *(Espacio discreto).*

Sea X *un conjunto no vacío. Para cada* $x,\ y$ *en* X *se define la siguiente métrica* d *sobre* X*:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y, \\ \\ 1 & si \quad x \neq y. \end{cases}$$

A esta métrica se le conoce como la métrica discreta en X*.*

Ejemplo 1.1.2. *(La recta real).*

Sea $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$d(x,y) = |x - y|.$$

Entonces d *es una métrica sobre* X*, llamada la métrica Euclidiana en* $\mathbb{R}$ *y se denota por* $|\cdot|$ *.*

Ejemplo 1.1.3. *Sean* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$*,* $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *en* $\mathbb{R}^n$*, se define* $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *como:*

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

A esta métrica se le conoce como la métrica del taxista.

A continuación se presentan las siguientes definiciones, las cuales se usarán en capítulos posteriores.

Definición 1.1.2. *Sea* (X,d) *un espacio métrico, para cada* $x \in X$ *y* $r \in \mathbb{R}$ *tal que* $r > 0$*, se definen los siguientes subconjuntos de X:*

1. *La bola abierta con centro en* x *y radio* r *es el conjunto :*
   $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$

2. *La bola cerrada con centro en* x *y radio* r *es el conjunto :*
   $B[x,r] = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$

3. *La esfera con centro en x y radio r es el conjunto :*
   $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) = r\}$.

Observación 1. *Si el radio r es un número estrictamente positivo entonces la bola abierta y la bola cerrada son conjuntos diferentes del vacío, pues al menos contienen a su centro.*

Las siguientes definiciones generalizan el concepto de bola abierta y bola cerrada de un conjunto.

Definición 1.1.3. *Un subconjunto A de un espacio métrico (X,d) es:*

1. *Abierto, si para cada $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$.*

2. *Cerrado, si $X \setminus A = A^c$ es abierto.*

Definición 1.1.4. *Sea (X,d) un espacio métrico, $x \in X$ y $A \subset X$. Se dice que x es:*

1. *Un punto interior de A, si existe $\epsilon > 0$, tal que $B(x,\epsilon) \subset A$.*

2. *Un punto adherente de A, si para cada $r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.*

Usualmente en la definición de punto interior el ϵ depende de x. Pero, en lugar de escribir ϵ_x se dejará ϵ bajo el entendido que se comprende que existe esta dependencia.

Definición 1.1.5. *Sea A un subconjunto de un espacio métrico (X,d), el interior de A que se denota por $\mathring{A}$ o $int(A)$ se define como:*
$int(A) = \{x \in X : x \text{ es punto interior de } A\}$.

Definición 1.1.6. *Sea A un subconjunto de un espacio métrico (X,d), la cerradura de A que se denota con $\overline{A}$ se define como:*
$\overline{A} = \{x \in X : x \text{ es punto adherente de } A\}$.

Definición 1.1.7. *Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión en (X, d), es una función $f : \mathbb{N} \to X$.*

Donde $f(n)$ se representa como x_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y se usará la notación usual para sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{x_n\}$ o simplemente (x_n).

Nota. *No se deberá confundir $\{x_n\}$ que es la notación de una función $f : \mathbb{N} \to X$ con $f(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que es el rango de la sucesión.*

Definición 1.1.8. *Sean (X, d) un espacio métrico, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y x un elemento de X, se dice que:*

1. *$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x si para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ de tal forma que para cada $n \geq k$ se cumple que $d(x_n, x) < \epsilon$.*

2. *$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ de tal forma que para cada $m, n \geq k$ se cumple que $d(x_m, x_n) < \epsilon$.*

Una sucesión no convergente se llamará divergente.

Teorema 1.1.1. *Toda sucesión convergente en un espaco métrico (X, d), es una sucesión de Cauchy.*

El recíproco del Teorema 1.1.1 no es verdadero, es decir, una sucesión de Cauchy no siempre será convergente en un espacio métrico X.
Contraejemplo: Sea $X = (0, 1)$ con la métrica euclidiana en $\mathbb{R}$. La sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ es de Cauchy en $(0, 1)$. Se sabe que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Pero $0 \notin (0, 1)$. Por lo tanto, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ no es convergente en $(0, 1)$.
Ya que no en todo espacio métrico una sucesión de Cauchy es convergente, surge la siguiente definición.

Definición 1.1.9. *Un espacio métrico (X, d) es completo, si toda sucesión de Cauchy es convergente en X.*

Definición 1.1.10. *Sea A un subconjunto de no vacío en (X, d) espacio métrico. Se dice que A es acotado, si existe $k > 0$ tal que para todo $x, y \in A$, se tiene que*

$$d(x, y) \leq k.$$

Una sucesión en un espacio métrico se dice que es acotada si su imagen es acotada.

Teorema 1.1.2. *Toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico X es acotada.*

El recíproco del Teorema 1.1.2 no siempre es cierto, es decir, una sucesión acotada no siempre es de Cauchy.
Contraejemplo: La sucesión $\{(-1)^n\}$ es acotada, pero es fácil comprobar que tal sucesión no es de Cauchy.

Definición 1.1.11. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Sea $\{n_k\}$ una sucesión de números naturales estrictamente creciente. A la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se le llama subsucesión de $\{x_n\}$.*

Teorema 1.1.3. *Si una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X, d) admite una subsucesión convergente, entonces $\{x_n\}$ es convergente y ambas tienen el mismo límite.*

Definición 1.1.12. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) dos espacios métricos, x_0 en X y $f : X \to Y$ una función. Se dice que la función f es continua en el punto x_0, si se cumple la siguiente condición: para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que si $x \in X$ y $d_X(x, x_0) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.*

En realidad, se debería decir que f es $d_X - d_Y$ continua en el punto x_0 ya que, en general, la continuidad de f depende de las métricas que se estén considerando.

Definición 1.1.13. *Sea $A \subset X$. Se dice que la función $f : X \to Y$ es continua en A, si f es continua en cada punto de A.*
Cuando ocurra que $A = X$, se dirá que f es continua.

Definición 1.1.14. *Sean* (X, d_X), (Y, d_Y) *dos espacios métricos, se dirá que la función* $f : X \to Y$ *es uniformente continua en* X *si* f *cumple que: para cada* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$, *tal que si* $x_1, x_2 \in X$ *y* $d_X(x_1, x_2) < \delta$, *entonces* $d_Y(f(x_1); f(x_2)) < \epsilon$.

Note que δ depende de ϵ. De esta manera, se debería escribir como $\delta(\epsilon)$, pero se dejará como δ bajo el entendido que se comprende lo anterior. Además, a diferencia de la definición de continuidad de una función en este caso se tiene que δ no depende de x.

1.2. Espacios normados

Definición 1.2.1. *Un conjunto* X *no vacío es un espacio vectorial sobre un campo* K, *si en* X *están definidas dos operaciones binarias, denotadas por* $+$ *(llamada suma y que es una operación interior) y* $\cdot$ *(producto por un escalar que es una operación exterior) tales que para cada* $x, y, z \in X$ *y* $\alpha,\beta \in K$ *se cumple:*

(V1) $x + y \in X$ *y* $\alpha \cdot \beta \in K$,

(V2) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

(V3) $x + y = y + x$,

(V4) Existen $0 \in X$ *y* $1 \in K$ *tales que* $x + 0 = x$ *y* $1 \cdot x = x$,

(V5) Existe $-x \in X$ *tal que* $x + (-x) = 0$,

(V6) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

(V7) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

(V8) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$.

En adelante usaremos $\alpha \cdot x = \alpha x$, $\alpha \cdot \beta$=$\alpha\beta$ y llamaremos a los elementos de X vectores y a los elementos de K escalares.

Definición 1.2.2. *Si X es un espacio vectorial sobre K y si $W \subseteq X$ no es vacío, entonces W es un subespacio de X si bajo las operaciones de X, W forma un espacio vectorial sobre K.*

Proposición 1.2.1. *Si X es un espacio vectorial sobre K y $W \subseteq X$ no vacío, entonces W es un subespacio de X siempre que $w_1, w_2 \in W$ y $\alpha, \beta \in K$ implique que $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$.*

Definición 1.2.3. *Si x_1,...,x_n son vectores y α_1,...,α_n escalares, el vector*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

es una combinación lineal del sistema de vectores $\{x_i\}_{i=1}^{n}$.

Definición 1.2.4. *Dado un sistema de vectores $\{x_i\}_{i=1}^{n}$, se dice que es linealmente independiente cuando*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

implica que α_i=0 para todo $1 \leq i \leq n$.

Definición 1.2.5. *Sea X un espacio vectorial sobre un campo K (K=$\mathbb{R}$ o K=$\mathbb{C}$). La función $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ se llama norma en X si para cada x,$y \in X$ y para cualquier $t \in K$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(N1) $\| x \| \geqslant 0$.

(N2) $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(N3) $\| tx \| = | t | \, \| x \|$.

(N4) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Si $\| \cdot \|$ es una norma en X, al par $(X, \| \cdot \|)$ se le llama espacio normado o espacio vectorial normado.

Lema 1.2.1. *Sea* $(X, \| \cdot \|)$ *un espacio normado. La función* $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *dada por* $d(x, y) =\| x - y \|$ *para* $x, y \in X$ *es una métrica para* X*.*

Demostración. Sean x, y, z en X, la función d cumple:

(N1) $d(x, y) =\| x - y \| \geqslant 0$

(N2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \| x - y \| = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(N3) $d(x, y) =\| x - y \| =\| (-1)(y - x) \| =| -1 | \| y - x \| =\| y - x \| = d(y, x)$ luego $d(x, y) = d(y, x)$

(N4) $d(x, y) =\| x - y \| =\| (x - z) + (z - y) \| \leq \| x - z \| + \| z - y \| = d(x, z) + d(z, y)$.

Por lo tanto, d es una métrica para X, es decir, (X, d) es un espacio métrico. ■

Observación 2. *En lo que resta del trabajo cuando se hable de la métrica de un espacio normado, será la métrica definida en el Lema 1.2.1, a menos que se especifique lo contrario.*

Ejemplo 1.2.1. *Sea* $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \text{ para cada } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

La pareja $(X, \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio normado.*

El siguiente lema será de gran utilidad para probar el Lema 4.1.1.

Lema 1.2.2. *Sea* $(X, || \cdot ||)$ *un espacio normado y* $A \subset X$ *no vacío tal que para todo* x *en* A *y* $r > 0$*, se cumple que* rx *pertenece a* A*.*
Entonces para todo x^* *en* $int(A)$ *y* $\lambda > 0$ *implica* $\lambda x*$ *pertenece a* $int(A)$*.*

Demostración. Sea x^* en $int(A)$ implica que existe $s > 0$ tal que $B(x^*, s) \subset A$.
Sea $\lambda > 0$, observe que z pertenece a $B(\lambda x^*, \lambda s)$, si y sólo si, $||z - \lambda x^*|| < \lambda s$. Lo que es equivalentemente a $||\frac{1}{\lambda}z - x^*|| < s$. Por lo tanto, z pertenece a $B(\lambda x^*, \lambda s)$, si y sólo si, $\frac{1}{\lambda}z$ pertenece a $B(x^*, s) \subset A$. Así, $\frac{z}{\lambda}$ pertenece a A, por lo que $z = \lambda\frac{1}{\lambda}z$ pertenece a A, lo que concluye que $B(\lambda x^*, \lambda s) \subset A$. Por lo cual, $\lambda x*$ pertenece a $int(A)$. ■

Definición 1.2.6. *Sea X un espacio normado. Se dice que X es un* ***espacio de Banach****, si X es un espacio completo.*

Los espacios de Banach reciben su nombre en honor al matemático polaco, Stefan Banach. Estos son uno de los objetos de estudio más importantes en el Análisis Funcional.
El siguiente ejemplo se usará con frecuencia en el capítulo 4.

Ejemplo 1.2.2. *Sean $X = C([a,b], \mathbb{R}) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} |\ f \text{ es continua en } [a,b]\}$ y $\|\cdot\|_\infty : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \text{ para cada } x \text{ en } [a,b]\}.$$

La pareja $(X, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

1.3. Compactos

Este capítulo nos dota de herramientas para simplificar algunas de las pruebas de las aplicaciones del capítulo 4.

Definición 1.3.1. *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Si $A \subset U_{\alpha \in I} U_\alpha$, con U_α conjunto abierto en X; a la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se le llama* ***cubierta abierta*** *de A. Si $I' \subset I$ es tal que $A \subset U_{\alpha \in I'} U_\alpha$, entonces la subfamilia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I'}$ es una* ***subcubierta*** *de A. Si, además I' es un conjunto finito, diremos que la subfamilia es una* ***cubierta finita*** *de A.*

Definición 1.3.2. *Sea (X, d_X) un espacio métrico X. Decimos que $A \subset X$ es compacto, si toda cubierta abierta de A, tiene una subcubierta finita.*

El siguiente ejemplo es fácil de probar por definición.

Ejemplo 1.3.1. *Sea (X, d_X) un espacio métrico X. Si $A \subset X$ finito, entonces A es compacto.*

Los siguientes resultados nos ayudan a dar caracterizaciones de cuando un conjunto es o no es compacto. Sus respectivas pruebas se pueden encontrar en [3].

Teorema 1.3.1. *Sean X un espacio métrico y $K \subset X$. Si K es compacto, entonces K es cerrado y acotado.*

Observación 3. *El recíproco no es necesariamente cierto.*
Contraejemplo: Sea $X = (0,1)$ con la métrica euclidiana en $\mathbb{R}$. El conjunto $G := \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ es cubierta abierta de X, pero no existe una subcubierta finita de A. Por tanto, X no es compacto, pero X es cerrado y acotado en X.

Teorema 1.3.2. *Sean X espacio métrico compacto y $K \subset X$. Si K es cerrado, entonces K es compacto.*

Observación 4. *Si X espacio métrico compacto y $K \subset X$. Como $\bar{K}$ es cerrado, entonces $\bar{K}$ compacto.*

Teorema 1.3.3. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) dos espacios métricos, $A \subset X$ compacto y $f : X \longrightarrow Y$ continua en X, entonces $f(A)$ es compacto en Y.*

Definición 1.3.3. *Sea $F \subseteq C([a,b], \mathbb{R})$ una familia de funciones. Se llama* ***equiacotada****, cuando existe un número K tal que*
$|f(x)| < K$ para todo $x \in [a,b]$ y toda $f \in F$.

Ejemplo 1.3.2. *Sean $x,\ y \in \mathsf{C}^1([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} |\ f$ tiene derivada continua en $[a,b]\}$ tales que $x(t) \leq y(t)$ para todo en $[a,b]$. Se define $F := \left\{ f \in \mathsf{C}^1([a,b]) \mid x(t) \leq f(t) \leq y(t) \right\}$. Se afirma que F es equiacotada.*

Demostración. Sean $x \in [a,b]$ y $f \in F$, entonces $f \in \mathsf{C}^1([a,b])$. Lo cual implica que $x,\ f,\ y$ son continuas en $[a,b]$ y $x(t) \leq f(t) \leq y(t)$ para toda $t \in [a,b]$. Por lo tanto, existen $x_{min} := \{x(t) : t \in [a,b]\}$, $y_{max} := \{y(t) : t \in [a,b]\}$ y $x_{min} \leq f(t) \leq y_{max}$ para toda $t \in [a,b]$. Si se define $N := max\{|x_{min}| + 1,\ |y_{max}| + 1\} > 0$, entonces $\forall t \in [a,b]$

y $f \in F$ se cumple que $|f(t)| < N$.

Por lo tanto, F es equiacotada. ■

Definición 1.3.4. *Sea $F \subseteq C([a,b], \mathbb{R})$ una familia de funciones. Se llama* ***equicontinua****, cuando para cada $\epsilon > 0$ hay una $\delta > 0$ tal que para toda $f \in F$ y para todo $x,\ y \in [a,b]$, si $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Ejemplo 1.3.3. *Sean $x,\ y \in \mathsf{C}^1([a,b])$ tales que $x(t) \leq y(t)$ para todo en $[a,b]$. Se define $F := \left\{f \in \mathsf{C}^1([a,b]) \mid x(t) \leq f(t) \leq y(t)\right\}$.*
Se afirma que F es equicontinua.

Demostración. Sean $x \in [a,b]$ y $f \in F$, entonces $f \in \mathsf{C}^1([a,b])$. Lo cual implica que $x',\ f',\ y'$ son continuas en $[a,b]$ y $x'(t) \leq f'(t) \leq y'(t)$ para toda $t \in [a,b]$. Por lo tanto, existen $x_{min} := \{x'(t) : t \in [a,b]\}$, $y_{max} := \{y'(t) : t \in [a,b]\}$ y $x_{min} \leq f'(t) \leq y_{max}$ para toda $t \in [a,b]$. Si se define $N := max\{|x_{min}| + 1,\ |y_{max}| + 1\} > 0$, entonces $\forall t \in [a,b]$ y $f \in F$ se cumple que $|f'(t)| < N$. De esto se sigue que $|x(t_2) - x(t_1)| \leq N|t_2 - t_1|$ para todo $t_1,\ t_2 \in [a,b]$.
Sean $\epsilon > 0$ y $f \in F$. Se define $\delta := \dfrac{\epsilon}{N}$, si $t_1,\ t_2 \in [a,b]$ y $|t_2 - t_1| < \delta$, entonces $|f(t_2) - f(t_1)| \leq N|t_2 - t_1| < \epsilon$.
Por lo tanto, F es equicontinua. ■

Definición 1.3.5. *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Se dice que A es relativamente compacto si $\bar{A}$ es compacto.*

Teorema 1.3.4 (ARZELÁ)**.** *Sea $F \subseteq C([a,b], \mathbb{R})$ una familia de funciones. F es relativamente compacto si y solamente si F es equiacotada y equicontinua.*

Ejemplo 1.3.4. *Sean $x,\ y \in \mathsf{C}^1([a,b])$ tales que $x(t) \leq y(t)$ para todo en $[a,b]$. Se define $F := \left\{f \in \mathsf{C}^1([a,b]) \mid x(t) \leq f(t) \leq y(t)\right\}$.*
Se afirma que F es relativamente compacto.

Demostración. En los ejemplos 1.3.2 y 1.3.3 se demostró que F es equiacotada y equicontinua. Por el Teorema 1.3.4 se tiene que F es relativamente compacto. ■

1.4. Teoría del Punto Fijo

Definición 1.4.1. *Sea X un conjunto no vacío y $f : X \longrightarrow X$ una función. Un elemento x en X es un punto fijo de f si $f(x) = x$.*

A continuación se dan ejemplos de funciones que tienen puntos fijos en el conjunto donde están definidas, así como funciones que no tienen puntos fijos en dichos conjuntos.

Ejemplo 1.4.1. *Mediante inspección se puede verificar que:*

(1) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - x - 3$. Los puntos fijos de f son -1 y 3.

(2) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Los puntos fijos de f son 0 y 1.

(3) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 3$. En este ejemplo f no tiene puntos fijos.

(4) $X \neq \emptyset$ y sea $f : X \longrightarrow X$ definida por $f(x) = x$. El conjunto de sus puntos fijos de f es X.

Definición 1.4.2. *Para cada $x \in X$ y $n \in \{1, 2, \ldots\}$ se define inductivamente $f^n(x)$ como $f^0(x) = x$ y $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ para $n \geq 1$. A la sucesión $\{f^n(x)\}$ se le llama: sucesión de iterados de Picard, sucesión de iterados o sucesión de aproximaciones sucesivas.*

Teorema 1.4.1. *Sean X un espacio métrico, x en X y $f : X \longrightarrow X$ una función continua en x. Si existe $x_0 \in x$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_o) = x$, entonces x es un punto fijo.*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) \\
&= \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_o) \\
&= x.
\end{aligned}
$$

■

El siguiente teorema servirá para simplificar en el capítulo 2 las pruebas del teorema de punto fijo de Banach, Kannan y Chatterjea.

Teorema 1.4.2. *Sean (X, d) un espacio métrico completo, $x_0 \in X$, $f : X \to X$ una función, C una constante y $a \in (0, 1)$. Si $d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq a^n C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces,*

1. *$\{f^n(x_0)\}$ converge a un punto en X,*
2. *$d(f^n(x_0), f^m(x_0)) \leq \dfrac{a^n}{1-a} C$, para todo m en $\mathbb{N}$ que cumpla $m > n$.*

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, con $m > n$.

Se cumple que:

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^m(x_0)) &\leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + \cdots + d(f^{m-1}(x_0), f^m(x_0)) \\ &\leq a^n C + \cdots + a^{m-1} C \\ &\leq a^n C(1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-n-1}) \\ &= a^n C \frac{1 - a^{m-n}}{1-a} \leq a^n C \frac{1}{1-a} \\ &= \frac{a^n}{1-a} C. \end{aligned}$$

Así, para $m > n$ se tiene lo siguiente:

$$d(f^n(x_0), f^m(x_0)) \leq \frac{a^n}{1-a} C. \tag{1.1}$$

De (1.1) y $a \in (0, 1)$ se concluye que $\{f^n(x_0)\}$ es una sucesión de Cauchy y como X es completo, existe $x \in X$ tal que la sucesión $\{f^n(x_0)\}$ converge a x. ■

Capítulo 2

Teorema del Punto Fijo para funciones contractivas

En este capítulo se introduce el concepto de función α-contractiva, contractiva en el sentido de Kannan y contractiva en el sentido de Chatterjea junto con algunos de los teoremas que proporcionan un criterio para la existencia y unicidad de un punto fijo. Además, estos toeremas garantizan que mediante los iterados de Picard de cualquier elemento del dominio se obtiene tal punto fijo.

2.1. Teorema del punto fijo de Banach

Definición 2.1.1. *Sean X un espacio métrico, $\alpha \in (0,1)$ y $f : X \longrightarrow X$ una función. Se dirá que f es α-contractiva en X, si*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y), \text{ para toda } x, y \in X.$$

A f también se le llamará α-contractante o simplemente contracción.

Teorema 2.1.1. *Sean (X,d) un espacio métrico, $\alpha \in (0,1)$ y $f : X \longrightarrow X$ una función α-contractiva en X. Entonces f es uniformemente continua en X.*

Demostración. Sean x, y en X y $\epsilon > 0$. Se elige a $\delta = \dfrac{\epsilon}{\alpha} > 0$. Luego, como f es una función α-contractiva en X se obtiene que:

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) < \alpha\delta = \alpha\left(\frac{\epsilon}{\alpha}\right) = \epsilon,$$

lo que implica $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Por tanto, f es uniformemente continua. ■

Teorema 2.1.2. *Sean X un espacio métrico completo, $\alpha \in (0,1)$ y $f : X \longrightarrow X$ una función α-contractiva, entonces f tiene a lo más un punto fijo $x \in X$.*

Demostración. Supóngase que x, y son dos puntos fijos de f.

Entonces, $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$, lo cual implica $0 \leq (1 - \alpha)d(x, y) \leq 0$. Como $0 < \alpha < 1$, entonces $d(x, y) = 0$, es decir, $x = y$. ■

Teorema 2.1.3 (Teorema del punto fijo de Banach)**.** *Sean X un espacio métrico completo, $\alpha \in (0,1)$ y $f : X \longrightarrow X$ una función α-contractiva. Entonces, f tiene un único punto fijo $x \in X$. Además, dado $x_0 \in X$, se tiene:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (f^n(x_0)) = x$.

b) Estimación del error:
$d(f^n(x_0), x) \leq \left(\dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) d(x_0, f(x_0))$.

Demostración. Por el Teorema 2.1.2, f tiene a lo más un punto fijo.

Note que para cada $n \in \{1, 2, \ldots\}$ tenemos que:

$$d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq \alpha d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x_0, f(x_0)),$$

esto es,

$$d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq \alpha^n d(x_0, f(x_0))$$

con α en $(0, 1)$, entonces por el Teorema 1.4.2 se tiene lo siguiente:

$$d(f^n(x_0), f^m(x_0)) \leq \left(\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) d(x_0, f(x_0)). \tag{2.1}$$

Además, la sucesión $\{f^n(x_0)\}$ converge a algún x en X.

Como consecuencia de que f es continua por el Teorema 2.1.1 y del Teorema 1.4.1, se tiene que x es un punto fijo de f. Luego aplicando el límite cuando $m \to \infty$ en la desigualdad 2.1 se obtiene:

$$d(f^n(x_0), x) \leq \left(\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\right) d(x_0, f(x_0)).$$

■

Para complementar este teorema se dará una generalización del Teorema del Punto fijo de Banach. El siguiente Teorema de punto fijo es necesario para alcanzar dicha generalización.

Teorema 2.1.4. *Sean X un espacio métrico completo y $f : X \longrightarrow X$ una función. Si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si*

$$d(x, f(x)) < \delta, \quad \text{entonces } f(B(x, \epsilon)) \subset B(x, \epsilon) \tag{2.2}$$

y para algún $\mu \in X$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} (d(f^n(\mu),\ f^{n+1}(\mu))) = 0,$$

entonces la sucesión $\{f^n(\mu)\}$ converge a un punto fijo de f.

Demostración. Sea $\mu_n = f^n(\mu)$. Se demostrará que $\{\mu_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Sean $\epsilon > 0$ y $\delta = \delta\left(\frac{\epsilon}{2}\right) > 0$ tal que cumple con (2.2).
Como

$$\lim_{n\to\infty} (d(f^n(\mu),\ f^{n+1}(\mu))) = 0,$$

existe N en $\mathbb{N}$ tal que, si n en $\mathbb{N}$ y $n \geq N$, entonces $d(\mu_n, \mu_{n+1}) < \delta$. En particular se tiene que $d(\mu_N, \mu_{N+1}) < \delta$ y por 2.2, implica que

$f\left(B\left(\mu_N, \frac{\epsilon}{2}\right)\right) \subset B\left(\mu_N, \frac{\epsilon}{2}\right)$ y así $f\left(\mu_N\right) = \mu_{N+1} \in B\left(\mu_N, \frac{\epsilon}{2}\right)$.

Por inducción se probará que $f^K(\mu_N) = \mu_{N+K} \in B(\mu_N, \epsilon)$.

Para $K = 1$ se cumple ya que $f(\mu_N) = \mu_{N+1} \in B(\mu_N, \epsilon)$.

Suponga que para $K \in \mathbb{N}$ se cumple $f^K(\mu_N) = \mu_{N+K} \in B(\mu_N, \epsilon)$.

Como $N + K \geq N$, entonces $d(\mu_{N+K}, \mu_{N+K+1}) < \delta$. Luego, por (2.2) implica que $f\left(B\left(\mu_{N+K}, \frac{\epsilon}{2}\right)\right) \subset B\left(\mu_{N+K}, \frac{\epsilon}{2}\right)$ y así $f(\mu_{N+K}) = \mu_{N+K+1} \in B\left(\mu_{N+K}, \frac{\epsilon}{2}\right)$.

Luego, para $K, l \in \mathbb{N}$ si $K, l \geq N$, entonces $d(\mu_K, \mu_l) \leq d(\mu_K, \mu_N) + d(\mu_N, \mu_l) < 2\epsilon$. Por lo cual, $f(\mu_{N+K}) = \mu_{N+K+1} \in B(\mu_N, \epsilon)$.

Por lo tanto, μ_n es una sucesión de Cauchy y como X es un espacio métrico completo, existe $y \in X$ con $\mu \longrightarrow y$.

Se demostrará que y es un punto fijo de f, es decir, que $f(y) = y$. Se hará por contradicción. Supóngase que $r = d(y, f(y)) > 0$. Por (2.2) existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, f(x)) < \delta$, entonces $f\left(B\left(x, \frac{r}{3}\right)\right) \subseteq B\left(x, \frac{r}{3}\right)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(\mu_n, y) < \frac{r}{3}$ y $d(\mu_n, \mu_{n+1}) < \delta$, por (2.2) se tiene que $f\left(B\left(f^n(\mu), \frac{r}{3}\right)\right) \subseteq B\left(f^n(\mu), \frac{r}{3}\right)$.

Como $d(\mu_n, y) < \frac{r}{3}$, se tiene que $d(f(y), f^n(\mu)) < \frac{r}{3}$, entonces

$r = d(y, f(y)) \leq d(y, f^n(\mu)) + d(f^n(\mu), f(y)) \leq \frac{2}{3}r$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $f(y) = y$. ■

Teorema 2.1.5. *Sean X un espacio métrico completo, $f : X \longrightarrow X$ una función y $\phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ una función creciente con $\lim_{n\to\infty} \phi^n(t) = 0$ para todo $t > 0$. Supóngase que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \phi(d(x, y)), \text{ para cada } x, y \in X.$$

Entonces, f tiene un único punto fijo $u \in X$ y $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = u$, para cada $x \in X$.

Demostración. Primero se demostrará que $\phi(t) < t$ para cada $t > 0$.

Se hará por contradicción. Supóngase que existe $t > 0$ tal que $\phi(t) \geq t$. Entonces, como ϕ es creciente tenemos que $\phi(t) \leq \phi(\phi(t))$ y por lo tanto $t \leq \phi^2(t)$. Por inducción se tiene que $t \leq \phi^n(t)$. Esto es una contradicción, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \phi^n(t) = 0$.

Además,

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq \phi^n(d(x, f(x))), \text{ para cada } x \in X.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^{n+1}(x)) = 0, \text{ para cada } x \in X.$$

Sea $\epsilon > 0$ y se elige $\delta = \delta(\epsilon) = \epsilon - \phi(\epsilon)$, observe que $\delta > 0$.

Si $d(x, f(x)) < \delta(\epsilon)$, entonces, para cada $z \in B(x, \epsilon)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
d(f(z), x) &\leq d(f(z), f(x)) \ + \ d(f(x), x) \\
&\leq \phi(d(f(z), f(x))) \ + \ d(f(x), x) \\
&< \phi(d(f(z), f(x))) \ + \ \delta(\epsilon) \\
&< \phi(\epsilon) \ + \ (\epsilon - \phi(\epsilon)) \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Así, $f(z) \in B(x, \epsilon)$. En consecuencia $f(B(x, \epsilon)) \subset B(x, \epsilon)$.

Luego por el Teorema 2.1.4 se tiene que f tiene un punto fijo μ con $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = \mu$, para cada $x \in X$.

Ahora se verá que f tiene un único punto fijo.

Supóngase que existen x y y puntos fijos distintos de f , entonces

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \phi(d(f(x), f(y))) = \phi(d(x, y)).$$

Por lo tanto,

$$0 < d(x, y) \leq \phi(d(x, y)).$$

Lo cual contradice que $\phi(t) < t$ para $t > 0$. En conclusión, f tiene como único punto fijo a μ. ■

Observación 5. *El Teorema del Punto Fijo de Banach 2.1.3 es un caso especial del Teorema 2.1.5; basta tomar $\phi(t) = \alpha t$.*

2.2. Teorema del punto fijo de Kannan

En el Teorema 2.1.1 se demostró que toda función α-contractiva es uniformemente continua. Una de las preguntas que surgen es ¿hay una definición de función contractiva que no implique que la función sea continua? Una respuesta afirmativa es dada en 1968 por el matématico de apellido Kannan.

Definición 2.2.1. *Sean X un espacio métrico, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $f : X \longrightarrow X$ una función. Decimos que f es α-contractiva en el sentido de Kannan, si*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha[d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \text{ para todo } x, y \text{ en } X.$$

A α la llamamos constante de contracción de Kannan.

Se da un ejemplo de este tipo de funciones en la página 28.

Teorema 2.2.1. *Sea X un espacio métrico completo, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $f : X \longrightarrow X$ una función α-contractiva en el sentido de Kannan. Entonces, f tiene a lo más un punto fijo $x \in X$.*

Demostración. Supongamos que x e y son dos puntos fijos de f. Entonces

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha(d(x, f(x)) + d(y, f(y))) = \alpha(d(x, x) + d(y, y)) = 0.$$

Entonces, $d(x, y) = 0$, es decir, $x = y$. ■

Teorema 2.2.2. *Sean X un espacio métrico completo y $f : X \longrightarrow X$ una función contractiva en el sentido de Kannan con constante de contracción α. Entonces, para cada x,$y \in X$ tenemos*

a) $d(f(x), f(y)) \leq \left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(x, y) + \left(\dfrac{2\alpha}{1-\alpha}\right) d(x, f(x)).$

b) $d(f(x), f(y)) \leq \left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(x, y) + \left(\dfrac{2\alpha}{1-\alpha}\right) d(y, f(y)).$

Demostración. Basta demostrar el inciso a), ya que el inciso b) se demuestra intercambiando el papel de x e y en a).

a) Sean x,$y \in X$, entonces

$$
\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &\leq \alpha[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \\
&\leq \alpha[d(x, f(x)) + d(x, y) + d(x, f(y))] \\
&\leq (d(x, y)) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) \\
&\leq \alpha[d(x, f(x)) + d(x, y) + d(x, f(x)) + d(f(x), f(y))].
\end{aligned}
$$

De lo que se obtiene,

$(1 - \alpha)d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) + 2\alpha d(x, f(x))$,

esto es,

$d\left(f(x), f(y)\right) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(x, y) + \left(2\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(x, f(x)).$ ■

Teorema 2.2.3 (Principio de aproximaciones sucesivas)**.** *Sean X un espacio métrico, $f : X \longrightarrow X$ una función contractante en el sentido de Kannan con constante de contracción α y x_o, x en X.*

Si $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = x$ entonces x es un punto fijo de f.

Demostración. Por el inciso (a) del Teorema 2.2.2 se tiene que:

$0 \leq d\left(f^n(x_0), f(x)\right) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(f^{n-1}(x_0), x) + \left(2\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)).$

De esta desigualdad se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} d(f^n(x_0), f(x)) \leq \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(f^{n-1}(x_0), x) + \left(2\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0))\right].$$

Por la continuidad de d se obtiene,

$$0 \leq d\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0), f(x)\right) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) d\left(\lim_{n\to\infty} f^{n-1}(x_0), x\right) + \left(2\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) d\left(\lim_{n\to\infty} f^{n-1}(x_0), \lim_{n\to\infty} f^n(x_0)\right).$$

Dado que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x \\
\text{y} \quad &\lim_{n\to\infty} f^{n-1}(x_0) = x.
\end{aligned}
$$

Se sigue que $0 \leq d(x, f(x)) \leq \left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(x, x) + \left(2\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(x, x)) = 0$.
Por lo cual, $f(x) = x$. ■

Teorema 2.2.4 (Teorema del punto fijo de Kannan)**.** *Sean X un espacio métrico completo, $f : X \longrightarrow X$ una función contractante en el sentido de Kannan con constante de contracción de Kannan α. Entonces, f tiene un único punto fijo $x \in X$. Además, dado $x_0 \in X$, se tiene que*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = x$.

b) Estimación del error:
$d(f^n(x_0), f(x)) \leq \left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \left(\dfrac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right) d(x_0, f(x_0))$.

Demostración. Por el Teorema 2.2.1, f tiene a lo más un punto fijo. Ahora se demostrará que la sucesión $\{f^n(x_0)\}$ es de Cauchy.

Note que para cada $n \in \{1, 2, \ldots\}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) &\leq \alpha[d((f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) + d((f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))] \\ &= \alpha d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) + \alpha d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)). \end{aligned}$$

Así,

$$d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) \leq \cdots \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n d(f(x_0), f(x_0)).$$

Además, se tiene que:

$$0 < \alpha < \frac{1}{2} \Longrightarrow 0 < \frac{\alpha}{1-\alpha} < 1.$$

Por el Teorema 1.4.2, tiene que para $m > n$ lo siguiente:

$$d(f^n(x_0), f^m(x_0)) \leq \left(\frac{b^n}{1-b}\right) d(x_0, f(x_0)) \text{ con } b = \frac{\alpha}{1-\alpha} \in (0, 1)\ .$$

Al sustituir b, para $m > n$ se cumple:

$$d(f^n(x_0), f^m(x_0)) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right) d(x_0, f(x_0)). \tag{2.3}$$

Como $b = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \in (0,1)$ y de la desigualdad 2.3 se concluye que $\{f^n(x_0)\}$ es una sucesión de Cauchy. Además, como X es un completo, existe x en X tal que la sucesión $\{f^n(x_0)\}$ converge a x. Por el Teorema 2.2.3, x es un punto fijo de f. Por último, aplicando límite cuando $m \to \infty$ en la desigualdad 2.3, se obtiene que:

$$d(f^n(x_0), x) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right) d(x_0, f(x_0)).$$

■

2.3. Teorema del punto fijo de Chatterjea

Definición 2.3.1. *Sean X un espacio métrico y $f : X \longrightarrow X$ una función. Decimos que f es contractante en el sentido de Chatterjea, si existe $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha(d(x, f(y)) + d(y, f(x)))$, para todo $x, y \in X$.*
A α la llamaremos constante de contracción de Chatterjea.

Un ejemplo de este tipo de funciones se da en la página 32.

Teorema 2.3.1. *Sean X un espacio métrico completo y $f : X \longrightarrow X$ una función contractiva en el sentido de Chatterjea con constante de contracción de Chatterjea $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Entonces, f tiene a lo más un punto fijo $x \in X$.*

Demostración. Supongamos que x e y son dos puntos fijos de f. Así,
$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha[d(x, f(y)) + d(y, f(x))] = \alpha[2d(x, y)]$,
entonces $0 \leq (1-2\alpha)d(x, y) \leq 0$, pero $1 - 2\alpha > 0$. Así, $d(x, y) = 0$.
Por lo tanto, $x = y$ ■

Teorema 2.3.2. *Sean X un espacio métrico, $f : X \longrightarrow X$ una función contractante en el sentido de Chatterjea con constante de contracción α y x_o, x en X.*
Si $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x$ entonces x es un punto fijo de f.

Demostración. Notemos que:

$0 \leq d(f^n(x_0), f(x)) \leq \alpha[d(f^{n-1}(x_0), f(x) + d(x, f^n(x_0))]$.

De esta desigualdad se obtiene que:

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} d(f^n(x_0), f(x)) &= d\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0), f(x)\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} [\alpha d(f^{n-1}(x_0), f(x) + \alpha d(x, f^n(x_0))] \\ &= \lim_{n\to\infty} \alpha d(f^{n-1}(x_0), f(x) + \lim_{n\to\infty} \alpha d(x, f^n(x_0)) \\ &= \alpha d\left(\lim_{n\to\infty} f^{n-1}(x_0), f(x)\right) + \alpha d\left(\lim_{n\to\infty} x, \lim_{n\to\infty} f^n(x_0)\right). \end{aligned}$$

Se sabe que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x \\ \text{y} \quad &\lim_{n\to\infty} f^{n-1}(x_0) = x. \end{aligned}$$

Se sigue que $0 \leq d(x, f(x)) \leq \alpha d(x, f(x)) + \alpha d(x, x)) = \alpha d(x, f(x))$.

Entonces, $0 \leq (1-\alpha) d(x, f(x)) \leq 0$, es decir, $d(x, f(x)) = 0$.

Por lo cual, $f(x) = x$. ■

Teorema 2.3.3 (Teorema del punto fijo de Chatterjea)**.** *Sean X un espacio métrico completo, $f : X \longrightarrow X$ una función contractante en el sentido de Chatterjea con constante de contracción de Chatterjea α. Entonces, f tiene un único punto fijo $x \in X$. Además, dado $x_0 \in X$, se tiene que*

a) $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x$.

b) Estimación de error:

$d(f^n(x_0), f(x)) \leq \left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \left(\dfrac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right) d(x_0, f(x_0))$.

Demostración. Por el Teorema 2.3.1, f tiene a lo más un punto fijo. Ahora demostraremos que la sucesión $\{f^n(x_0)\}$ es de Cauchy. Notemos que para cada $n \in \{1, 2, \ldots\}$

se tiene que

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) &\leq \alpha[d((f^{n-1}(x_0), f^{n+1}(x_0)) + d((f^n(x_0), f^n(x_0))] \\ &= \alpha d((f^{n-1}(x_0), f^{n+1}(x_0)) \\ &\leq \alpha[d((f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) + d((f^n(x_0), f^{n+1}(x_0))]. \end{aligned}$$

Así, $d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \leq \left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) \leq \cdots \leq \left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n d(f(x_0), f(x_0))$.
Además se tiene $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$, lo cual implica $0 < \dfrac{\alpha}{1-\alpha} < 1$.
Entonces, para $m > n$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} d(f^n(x_0), f^m(x_0)) &\leq d(x_0, f(x_0)) \frac{(\frac{\alpha}{1-\alpha})^n}{1 - (\frac{\alpha}{1-\alpha})} \\ &= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n d(x_0, f(x_0) \left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $m > n$ se tiene lo siguiente

$$d(f^n(x_0), f^m(x_0)) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right) d(x_0, f(x_0)). \tag{2.4}$$

De la desigualdad 2.4 y el hecho de que α está en $(0, 1)$, se concluye que $\{f^n(x_0)\}$ es una sucesión de Cauchy. Como X es un completo, existe $x \in X$ tal que la sucesión $\{f^n(x_0)\}$ converge a x. Por el Teorema 2.3.2, x es un punto fijo de f. Aplicando el límite cuando $m \to \infty$ en la desigualdad 2.4, tenemos que

$$d(f^n(x_0), x) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n \left(\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\right) d(x_0, f(x_0)).$$

■

2.4. Ejemplos

En esta sección se verá la independencia entre las definiciones de que una función f sea contracción den el sentido Banach, contracción en el sentido de Kannan y contracción en el sentido de Chatterjea.

Este primer ejemplo muestra una función α-contractiva en el sentido de Banach, pero no es contracción en el sentido de Kannan.

Ejemplo 2.4.1. *Sea $X = [0,1]$ con la métrica usual y definamos $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ por $f(x) = \dfrac{x}{3}$ para todo x en $[0,1]$.*

Se tiene que f es $\dfrac{1}{3}$-contractiva, pero no es α-contractiva en el sentido de Kannan para ningún $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

En efecto, supongamos que existe $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha[d(x, f(x)) + d(y, f(y))],$$

para toda $x, y \in X$. Si se elige $x = \dfrac{1}{3}$ e $y = 0$, se tiene

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{9} - 0\right| = \frac{1}{9}$$

y

$$\alpha(|f(x) - x| + |y - f(y)|) = \alpha[\left|\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right| + 0] = \alpha\left(\frac{2}{9}\right),$$

entonces $\dfrac{1}{9} \leq \alpha\left(\dfrac{2}{9}\right)$, es decir, $\dfrac{1}{2} \leq \alpha$ lo cual es una contradicción ya que $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Por lo tanto, f no es α-contractiva en el sentido de Kannan.

Ejemplo 2.4.2. *Sea $X = [0,1]$ con la métrica usual y definamos $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ por*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & si \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ \\ \dfrac{1}{5}x & si \quad x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Entonces f es contractiva en el sentido de Kannan pero no es contracción.

En efecto, como f no es continua en $\dfrac{1}{2}$, entonces f no es contracción.

Ahora probemos que f es $\dfrac{5}{11}$-contractiva en el sentido de Kannan.

Caso 1)

Sea $x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$*. Entonces*

$$\frac{5}{12}\left(\left|x - \frac{1}{2}x\right| + \left|y - \frac{1}{4}y\right|\right) = \frac{5}{12}\frac{3}{4}(x+y). \tag{2.5}$$

$$\left|\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y\right| \leq \frac{1}{4}(x+y) \leq \frac{5}{12}\frac{3}{4}(x+y). \tag{2.6}$$

De (2.5) y (2.6) se tiene

$$\left|\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y\right| \leq \frac{5}{12}\left(\left|x - \frac{1}{4}x\right| + \left|y - \frac{1}{4}y\right|\right).$$

Caso 2)

Sean $x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$\frac{5}{12}\left(\left|x - \frac{1}{5}x\right| + \left|y - \frac{1}{5}y\right|\right) = \frac{5}{12}\frac{4}{5}(x+y). \tag{2.7}$$

$$\left|\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y\right| \leq \frac{1}{5}(x+y) \leq \frac{5}{12}\frac{4}{5}(x+y). \tag{2.8}$$

De (2.7) y (2.8) se tiene

$$\left|\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y\right| \leq \frac{5}{12}\left(\left|x - \frac{1}{5}x\right| + \left|y - \frac{1}{5}y\right|\right).$$

Caso 3)

Los otros casos de hacen de manera similar.

Ejemplo 2.4.3. *Sean* $D = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \| (x_1, x_2) \| \leq 1\right\}$ *con la métrica usual en* $\mathbb{R}^2$ *y un número* $\alpha \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$.
Se define $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *por* $f(x_1, x_2) = \alpha(-x_1, x_2)$.

Se afirma que f *es contractiva en el sentido de Banach, pero no es contractiva en el sentido de Kannan ni Chatterjea.*

Primero se probará que es una contracción en el sentido de Banach.

Sean $x, y \in D$, *con* $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ *se tiene que:*

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \| \alpha(-x_1, x_2) - \alpha(-y_1, y_2) \| = \alpha \| (-x_1, x_2) - (-y_1, y_2) \| \\ &= \alpha\sqrt{(-x_1 + y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \alpha \| (x_1, x_2) - (y_1, y_2) \| = \alpha d(x, y). \end{aligned}$$

Lo cual prueba que f *es* α*-contractiva.*

Supóngase que f *es* β*-contractiva en el sentido de Kannan para algún* $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Se sigue que para todo $x, y \in D$,

$$d(f(x), f(y)) \leq \beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]. \tag{2.9}$$

En particular para $x = (0, 1),\ y = (0, -1)$. *Pero se tienen las siguientes igualdades*

$$d(f(x), f(y)) = \sqrt{(\alpha - (-\alpha))^2} = 2\alpha,$$

$$d(x, f(x)) = \sqrt{(1 - \alpha)^2} = 1 - \alpha,$$

$$d(y, f(y)) = \sqrt{(-1 - (-\alpha))^2} = 1 - \alpha,$$

que al sustituir en (2.9) se tiene $2\alpha \leq \beta(2(1 - \alpha))$, *entonces,* $\frac{\alpha}{1 - \alpha} \leq \beta$.

Por otro lado $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \alpha < 1$, *lo que implica* $0 < 1 - \alpha \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$,

entonces, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \leq \frac{1}{1 - \alpha}$, *por lo cual* $\frac{1}{\sqrt{3} - 1} \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha}$.

Pero, $1 = \frac{1 + 1}{2} < \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$.

Así, $\frac{1}{\sqrt{3} - 1} < \frac{\alpha}{1 - \alpha}$ *y* $\frac{\alpha}{1 - \alpha} \leq \beta$.

Por lo tanto, $1 < \beta$, *lo cual es una contradicción ya que* $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Así, f *no es contractiva en el sentido de Kannan.*

Por último se verá que f *no es contractiva en el sentido de Chatterjea.*

Supóngase que β*-contractiva en el sentido de Chatterjea para algún* $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Se sigue que para todo $x, y \in D$ *se cumple*

$d(f(x), f(y)) \leq \beta[d(x, f(y)) + d(y, f(x))]$.

En particular para $x = (1, 0)$, $y = (-1, 0)$. *Pero*

$$d(f(x), f(y)) = \sqrt{(\alpha - (-\alpha))^2} = 2\alpha$$

$$d(x, f(y)) = \sqrt{(1 - \alpha)^2} = 1 - \alpha$$

$$d(y, f(x)) = \sqrt{(-1 - (-\alpha))^2} = 1 - \alpha$$

Luego, $2\alpha \leq \beta(2(1 - \alpha))$, *entonces,* $\dfrac{\alpha}{1-\alpha} \leq \beta$ *y además* $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq \alpha < 1$, *lo cual implica que* $0 < 1 - \alpha \leq 1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, *así* $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1} \leq \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \leq \beta$, *entonces* $1 < \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} \leq \beta$, *lo cual es una contradicción ya que* $\beta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Ejemplo 2.4.4. *Sea* $X = [0, 1]$ *con la métrica usual y definamos* $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ *por*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & si \quad x \in [0, 1), \\ \\ 0 & si \quad x = 1. \end{cases}$$

Entonces f *es contractiva en el sentido de Kannan pero no el sentido de Chatterjea ni es contracción.*

Primero se verá que f *es contractiva en el sentido Kannan con* $\beta \geq \dfrac{1}{3}$.

Caso (1) Si $x, y \in [0, 1)$, *entonces,*

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right| = 0$$

y $\beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \geq 0$.

Caso (2) Si $x \in [0, 1)$ *y además* $y = 1$, *entonces*

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |\frac{1}{3} - 0| = \frac{1}{3},$$

$$d(x, f(x)) = |x - f(x)| = |x - \frac{1}{3}| \geq 0$$

y

$$d(f(x), f(y)) = |y - f(y)| = |1 - 0| = 1.$$

En consecuencia

$$\beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \geq \beta[d(x, f(x))] \geq \beta \geq \frac{1}{3}.$$

Por lo cual, f es contractiva en el sentido de Kannan.
Note que f no es Chatterjea, en caso contrario se tiene que existe $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq \beta[d(x, f(y)) + d(x, f(y))]$ para todo $x, y \in X$.
En particular para $x = 0,\ y = 1$, pero

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{3} - 0\right| = \frac{1}{3},$$

$$d(x, f(y)) = |x - f(y)| = |0 - 0| = 0$$

y

$$d(y, f(y)) = |y - f(x)| = \left|1 - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}.$$

Lo que implica, $\frac{1}{3} \leq \beta\frac{2}{3}$, equivalentemente $\frac{1}{2} \leq \beta$ lo cual es una contradicción.
Por último como f no es continua, por el Teorema 2.1.1 no es una contracción.

Ejemplo 2.4.5. *Sea $X = [0, 1]$ con la métrica usual y definamos $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in (0, 1], \\ \\ \frac{2}{3} & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Entonces f es contractiva en el sentido de Chatterjea pero no el sentido de Kannan ni es contracción.
Veamos primero que es contractiva en el sentido de Chatterjea con $\beta \geq \frac{1}{3}$.
Caso (1) Si $x, y \in (0, 1]$, entonces

$$d(f(x), f(y) = |f(x) - f(y)| = |1 - 1| = 0$$

y $\beta[d(x, f(y)) + d(x, f(y))] \geq 0.$

Caso (2) Si $x \in (0, 1]$ *además* $y = 0$, *entonces*

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left|1 - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3},$$

$$d(x, f(y)) = |x - f(y)| = \left|x - \frac{2}{3}\right| \geq 0$$

y

$$d(f(x), f(y)) = |y - f(x)| = |0 - 1| = 1.$$

En consecuencia

$$\beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \geq \beta[d(x, f(x))] \geq \beta \geq \frac{1}{3}.$$

Por lo cual, f *es Chatterjea.*

Observe que f *no es Kannan, en caso contrario existe* $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *tal que* $d(f(x), f(y)) \leq \beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$ *para todo* $x, y \in X$.

En particular para $x = 0,\ y = 1$, *pero*

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left|\frac{2}{3} - 1\right| = \frac{1}{3},$$

$$d(x, f(x)) = |x - f(x)| = \left|0 - \frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

y

$$d(y, f(y)) = |y - f(y)| = |1 - 1| = 0.$$

Lo que implica, $\frac{1}{3} \leq \beta\frac{2}{3}$, *equivalentemente* $\frac{1}{2} \leq \beta$ *lo cual es una contradicción.*

Por último como f no es continua, por el Teorema 2.1.1 f *no es una contración.*

2.5. Aplicaciones

Se usará el Teorema del punto fijo de Banach para demostrar la existencia y unicidad de la solución local del problema con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x' &= f(t,x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

cuando f cumple con ciertas condiciones.
La idea de la prueba consiste en construir una ecuación integral no lineal equivalente a (2.10) y usar el Teorema del punto fijo de Banach.

Lema 2.5.1. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en el rectángulo cerrado $A \subset \mathbb{R}^2$ y $(t_0, x_0) \in int(A)$. Sea I un intervalo cerrado y $t_0 \in I$. La función $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución de (2.10) en I, si y sólo si, x es solución de la ecuación integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(z, x(z))dz,$$

Demostración. [Necesidad] Dado que f es continua en A, x es continua en I y la composición de continuas es continua, podemos calcular las integrales definidas de las funciones involucradas en (2.10), entonces se tiene que

$$\int_{t_0}^{t} x'(z)dz = \int_{t_0}^{t} f(z, x(z))dz, \text{ para cada } t \in I.$$

Por el segundo teorema fundamental del cálculo, concluimos que

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(z, x(z))dz, \text{ para cada } t \in [a, b].$$

[Suficiencia] Por hipótesis, $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple que

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(z, x(z))dz.$$

Esto garantiza que la función x es continua en I, por lo que el integrando es una función continua en I, luego, por el teorema fundamental del cálculo, la función x es diferenciable en I y cumple que

$$x' = f(t,x),$$

$$x(t_0) = x_0.$$

$\blacksquare$

Para la demostración del Teorema 2.5.1 se usará la siguiente definición.

Definición 2.5.1. *Sea (X,d) un espacio métrico y $f : X \longrightarrow X$ una función. Se dirá que f es Lipschitz si existe una constante $\alpha \geq 0$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y) \text{ para todo } x, y \in X.$$

α se llama constante de Lipschitz.

Teorema 2.5.1 (Teorema de Picard de existencia y unicidad)**.** *Sea A un rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^2, (t_0, x_0) \in int(A)$ y una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f es continua en A y Lipschitz en la segunda variable con constante de Lipschitz $L > 0$. Entonces existe $r > 0$ y una única función $x : [t_0 - r, t_0 + r] \longrightarrow \mathbb{R}$ que es solución de (2.10).*

Demostración. Como $(t_0, x_0) \in int(A)$, existe $r_1 > 0$ tal que el conjunto

$$B = \{(t,x) : |t - t_0| \leq r_1, |x - x_0| \leq r_1\} \subset A.$$

Además, existe $M > 0$ tal que $|f(t,x)| \leq M$ para toda $(t,x) \in B$.
Sea $r = mín \left\{ \frac{1}{L}, r_1, \frac{r_1}{M} \right\}$. Consideremos el conjunto

$$X = \{x \in C([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{R}) : |x(t) - x_0| \leq r_1, \text{ para cada } t \in [t_0 - r, t_0 + r]\}.$$

Note que X con la métrica uniforme d_∞ es un subespacio cerrado de $C_\infty([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{R})$, por lo tanto, X es completo. Definamos el operador $T : X \longrightarrow X$ como $T(x) = y$

donde

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \;\; t \in [t_0 - r, t_0 + r].$$

Entonces, y es una función continua y

$$|y(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|ds \leq M|t - t_0| \leq Mr \leq r_1 \text{ para cada } t \in [t_0 - r, t_0 + r],$$

es decir, $y \in X$.

Ahora se probará que T es una contracción.

Observe que si $x_1, x_2 \in X$, $y_1 = T(x_1)$, $y_2 = T(x_2)$ y $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$ entonces

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))|ds \\ &\leq L \int_{t_0}^{t} |x_1(t) - x_2(t)|ds \\ &\leq Lrd_\infty(x_1, x_2), \;\; \textit{con } Lr < 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe un único $x \in X$ tal que $T(x) = x$, es decir,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \;\; t \in [t_0 - r, t_0 + r].$$

Por el Lema 2.5.1, x es solución del problema con condiciones iniciales 2.10.

La elección del número r fue para garantizar que la imagen $T(x)$ sea un subconjunto de X y que T sea contracción. ■

Capítulo 3

Conjuntos Parcialmente Ordenados

En este capítulo se introducen algunas definiciones y resultados de la teoría de los conjuntos parcialmente ordenados, entre la que se encuentran las definiciones de Lattice, Lattice completa, Dedekind y el Teorema del Punto Fijo de Knaster-Tarski.

Después se introduce el concepto de cono en un espacio vectorial, el cual nos permite inducir un orden parcial en un espacio vectorial y nos permite utilizar la teoría desarrollada en este capítulo para conjuntos parcialmente ordenados, pero ahora en espacios vectoriales. Finalmente, se introducen en el capítulo los conceptos de espacio de Banach ordenado, cono normal, regular, completamente regular y sólido los cuales serán de gran utilidad en el siguiente capítulo.

3.1. Definiciones y Ejemplos

Definición 3.1.1. *Sean X un conjunto diferente del vacío y " $\leq$ " una relación binaria sobre X. Se dice que " $\leq$ " es una relación de orden o una relación de orden parcial sobre X, si para todo $a, b, c \in X$ se cumple que:*

(R1) $a \leq a$. (reflexiva)

(R2) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a = b$. (antisimétrica)

(R3) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.(transitiva)

Al par ordenado $(X, \leq)$ se le llama **conjunto parcialmente ordenado** o **conjunto ordenado**.

Definición 3.1.2. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Se dice que $(X, \leq)$ es una* ***cadena*** *si para toda $x, y \in X$, se tiene que $x \leq y$ ó $y \leq x$.*

A la cadena también se le conoce como **conjunto totalmente ordenado** o **conjunto linealmente ordenado**.

Observación 6. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y a, $b \in X$. La notación $a < b$ nos representa que $a \leq b$ y $a \neq b$.*

Definición 3.1.3. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subset X$.*

(1) $x_0 \in X$ es una ***cota superior*** *de A en X si para todo $a \in A$ tenemos que $a \leq x_0$.*

(2) A está ***acotado superiormente*** *en X si existe una cota superior de A en X.*

(3) Decimos que x_0 es el ***supremo*** *de A en X, y se escribe $x_0 = sup_X\ A$, si se cumple:*

(a) x_0 es cota superior de A en X.

(b) Si $y \in X$ es cota superior de A en X, entonces $x_0 \leq y$.

Análogamente se definen los conceptos de **cota inferior**, **acotado inferiormente** e **ínfimo** de un conjunto A en X.

Definición 3.1.4. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subset B \subset X$.*

(1) $x_0 \in B$ es una ***cota superior*** *de A en B si para toda $a \in A$ tenemos que $a \leq x_0$.*

(2) A está ***acotado superiormente*** *en B si existe una cota superior de A en B.*

(3) Decimos que x_0 es el ***supremo*** *de A en B, y se escribe $x_0 = sup_B\ A$, si se cumple:*

(a) x_0 es cota superior de A en B.

(b) Si $y \in B$ es cota superior de A en B, entonces $x_0 \leq y$.

*(4) Decimos que x_0 es el **máximo** de A en B, y se escribe $x_0 = max_B\ A$, si se cumple:*

(a) x_0 es supremo de A en B.

(b) Si x_0 pertenece a A.

Análogamente se definen los conceptos de **cota inferior**, **acotado inferiormente** e **ínfimo** de un conjunto A en B.

Observación 7. *a) Si b es cota superior de A en B, entonces b es cota superior de A en X, pero el recíproco no es verdadero ya que una cota superior de A en X no necesariamente pertenece a B.*

b) Si x_0 es el supremo de A en B no necesariamente x_0 es el supremo de A en X, ya que el conjunto A puede tener cotas superiores que no necesariamente pertenecen a B, el recíproco tampoco es verdadero, pues de igual manera el supremo de A en X no necesariamente pertenece a B.

Teorema 3.1.1. *Sean $A \subset B \subset X$, si $sup_X A$ existe y $sup_X A \in B$, entonces $sup_B A$ existe y $sup_X A = sup_B A$.*

Demostración. Como $sup_X A \in B$, entonces $sup_X A$ es cota superior de A en B. Sea $b \in B$ cota superior de A en B, entonces b es cota superior de A en X, en concecuencia $b \leq sup_X A$. Por lo tanto, $sup_X A = sup_B A$. ∎

Definición 3.1.5. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $x_0 \in X$.*
Se dice que x_0 es

*a) un **elemento maximal** de X si para cada $x \in X$ tal que $x_0 \leq x$, entonces $x_0 = x$,*

*b) un **elemento minimal** de X si para cada $x \in X$ tal que $x \leq x_0$, entonces $x_0 = x$.*

Observación 8. *Observar que el supremo (ínfimo) y el elemento maximal (minimal) de un conjunto son términos diferentes y que el elemento maximal (minimal) de X no necesariamente es único.*

Ejemplo 3.1.1. *Sean* $X = \{2, 3, 6, 9, 12\}$ *y* $A = \{2, 3, 6\}$. $(X, |)$ *es un conjunto parcialmente ordenado, donde* $|$ *es la relación,* $x \leq y$ *si* $x|y$.
Se tiene que el supremo de A *en* X *es 6, pero los elementos maximales son 9 y 12.*

Definición 3.1.6. *Sean* $(X, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado,* $A \subset X$ *y* $x_0 \in X$. *Se dice que* x_0 *es*

a) un ***elemento maximal*** *de* A *si para cada* $x \in A$ *tal que* $x_0 \leq x$, *entonces* $x_0 = x$,

b) un ***elemento minimal*** *de* A *si para cada* $x \in A$ *tal que* $x \leq x_0$, *entonces* $x_0 = x$.

Observe que un elemento maximal (minimal) de A no necesariamente es maximal (minimal) de X.
En el siguiente capítulo estaremos trabajando con intervalos cerrados, por lo cual se da la definición la cual es análoga al caso real.

Definición 3.1.7. *Sean* $(X, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado y* $a, b \in X$ *con* $a \leq b$. *Con el símbolo* $[a, b]$ *denotamos al conjunto* $\{x \in X : a \leq x \leq b\}$. *El conjunto* $[a, b]$ *es llamado un* ***intervalo ordenado cerrado*** *de* $(X, \leq)$. *Análogamente se define el* ***intervalo ordenado abierto***.

Muchas propiedades importantes de un conjunto parcialmente ordenado son expresadas en términos de supremos e ínfimos de un subconjunto del conjunto parcialmente ordenado, tres de las más importantes clases de conjuntos parcialmente ordenados son Lattice, Lattice completa y Dedekind completo. A continuación presentamos las definiciones de tales conjuntos así como algunos ejemplos.

Definición 3.1.8. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. X se denomina* ***Lattice ó Retículo*** *si para cada par de elementos $x, y \in A$, entonces $sup_X \{x, y\}$ y $ínf_X \{x, y\}$ existen en X.*

Definición 3.1.9. *Sean X una Lattice y $A \subset X$. A se denomina* ***Sublattice ó Subretículo*** *si para cada par de elementos $x, y \in A$, entonces $sup_X \{x, y\} \in A$ y $ínf_X \{x, y\} \in A$*

Observación 9. *En la definición 3.1.8, el supremo e ínfimo siempre existen en X, pero en la definición 3.1.9 se le está pidiendo que es supremo e ínfimo sean elementos de A.*

Definición 3.1.10. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. X se denomina* ***Lattice completa ó Retículo completo****, si todo subconjunto $A \neq \varnothing$ de X tiene supremo e ínfimo en X.*

Observación 10. *Una Lattice completa es una Lattice, el recíproco no necesariamente es verdadero.*

Definición 3.1.11. *Sean X una lattice completa y A contenido en X con A distinto del vacío. A se denomina* ***sublattice completa ó subretículo completo****, si todo subconjunto no vacío de A, entonces $sup_X A$ e $inf_X A$ pertenece a A.*

Definición 3.1.12. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que X es* ***Dedekind completo****, si todo subconjunto $A \neq \varnothing$ de X acotado superiormente tiene supremo en X y todo subconjunto $B \neq \varnothing$ acotado inferiormente tiene ínfimo en X.*

Observación 11. *Notemos que*

a) Toda lattice es Dedekind completo, pero no todo Dedekind completo es una Lattice.

b) Una Lattice completa es una Lattice, pero no necesariamente toda Lattice es una Lattice completa.

c) Toda Lattice completa es Dedekind completo, pero no todo Dedekind completo es necesariamente Lattice completa.

Teorema 3.1.2. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $[a, b]$ un intervalo ordenado cerrado de $(X, \leq)$, se cumplen que:*

a) Si $(X, \leq)$ es una Lattice, entonces $[a, b]$ es una Lattice y una sublattice.

b) Si $(X, \leq)$ una Lattice completa, entonces $[a, b]$ es una Lattice completa.

c) Si $(X, \leq)$ Dedekind completo, entonces $[a, b]$ es Dedekind completo.

Demostración.

a) Sean $I = [a, b]$ y $x, y \in I$ esto es

$$a \leq x \leq b \qquad y \qquad a \leq y \leq b, \tag{3.1}$$

entonces b es cota superior de $\{x, y\}$. Como $(X, \leq)$ es una lattice, $z = sup\{x, y\}$ pertenece a X, luego z es una cota superior de $\{x, y\}$ en X, así

$$x \leq z \qquad y \qquad y \leq z,$$

de (3.1) tenemos que

$$a \leq x \leq z \qquad y \qquad a \leq y \leq z,$$

esto es,

$$a \leq z. \tag{3.2}$$

Además, como z es la mínima cota superior de a, b, entonces

$$z \leq b. \tag{3.3}$$

Luego de (3.2) y (3.3), concluimos que $z \in I$. Análogamente se demuestra que $v = \text{ínf}\{x, y\} \in I$. Por lo tanto, $[a, b]$ es una lattice.

b) Sea $I = [a, b]$ y consideremos $\emptyset \neq S \subset I$. Sea $x \in S$, entonces

$$a \leq x \leq b, \tag{3.4}$$

es decir, a es cota inferior de S. Como $(X, \leq)$ es una lattice completa, entonces S tiene ínfimo en X, donde $\emptyset \neq S \subset X$, digamos $p = \text{ínf} S$ en X, entonces p es cota inferior de S, es decir, $p \leq x$ se sigue de (3.4) que $p \leq x \leq b$,
luego

$$p \leq b. \tag{3.5}$$

Además, como p es la máxima cota inferior de S, entonces

$$a \leq p, \tag{3.6}$$

así de (3.5) y (3.6) tenemos que $a \leq p \leq b$, luego $p \in I$. Análogamente se demuestra que $s = supS \in I$. Por lo tanto, $[a, b]$ es una lattice completa.

c) Sea $I = [a, b]$ y consideremos S acotado, donde $\emptyset \neq S \subset I$.
Sea $x \in S$, entonces

$$a \leq x \leq b, \tag{3.7}$$

es decir, b es cota superior de S. Como $(X, \leq)$ es Dedekind completo, entonces S está acotado superiormente, donde $\emptyset \neq S \subset X$. Se tiene que S y X tienen supremo en X. Supóngase que $t = \text{sup} S$ en X, entonces t es cota superior de S, es decir, $z \leq t$ se sigue de (3.7) que $a \leq z \leq t$,
es decir,

$$a \leq t. \tag{3.8}$$

Además, como t es la mínima cota superior de S, entonces

$$t \leq b, \tag{3.9}$$

así de (3.8) y (3.9) tenemos que $a \leq t \leq b$, luego $t \in I$. Análogamente se demuestra que $\bar{t} = \text{ínf} S \in I$. Por lo tanto, $[a, b]$ es Dedekind completo.

■

3.2. Teoremas del punto fijo en conjuntos parcialmente ordenados

Lema 3.2.1. *Sean* $(X, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado,* $f : X \longrightarrow X$ *una función creciente y* $P := \{x \in X : x \leq f(x)\}$. *Si* x_0 *es un elemento maximal de* P*, entonces* $f(x_0) = x_0$.

Demostración. Como $x_0 \in P$, entonces $x_0 \leq f(x_0)$. Como f es creciente, entonces $f(x_0) \leq f(f(x_0))$, así $f(x_0) \in P$. Como x_0 es un elemento maximal de P se tiene que $x_0 \geq f(x_0)$ y $x_0 \leq f(x_0)$, entonces $f(x_0) = x_0$. ■

Lema 3.2.2. *Sean* $(X, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado,* $f : X \longrightarrow X$ *una función creciente y* $Q = \{x \in X : f(x) \leq x\}$. *Si* x_1 *es un elemento minimal de* Q*, entonces* $f(x_{1)} = x_1$.

Demostración. Como $x_1 \in P$, entonces $f(x_1) \leq x_1$. Como f es creciente, entonces $f(f(x_1)) \leq f(x_1)$, así $f(x_1) \in P$. Como x_1 es un elemento minimal de P se tiene que $x_1 \leq f(x_1)$y $f(x_1) \leq x_1$, entonces $f(x_1) = x_1$. ■

Lema 3.2.3. *Sean* $(X, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado,* $f : X \longrightarrow X$ *una función creciente y* $P = \{x \in X : x \leq f(x)\}$ *distinto del conjunto vacío. Si existe el supremo de* P *en* X*, entonces* $sup_X P$ *es un punto fijo de* f.

Demostración. Sean $x_0 := sup_X P$ y $p \in P$. Como x_0 es el supremo de P en X, entonces $x_0 \geq p$. Además, por ser f creciente $x_0 \leq f(x_0)$ y $f(p) \leq f(x_0)$ para todo $p \in P$, es decir, $f(x_0)$ es cota superior de P. Lo que implica $f(x_0) = x_0$. ■

Lema 3.2.4. *Sean* $(X, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado,* $f : X \longrightarrow X$ *una función creciente y* $P = \{x \in X : x \leq f(x)\}$ *distinto del conjunto vacío. Si existe el ínfimo de* P *en* X*, entonces* $ínf_X P$ *es un punto fijo de* f.

Demostración. Sean $x_0 := \text{ínf}_X P$ y $p \in P$. Como x_0 es el ínfimo de P en X, entonces $x_0 \leq p$. Además por ser f creciente $x_0 \leq f(x_0)$ y $f(x_0) \leq f(p)$ para todo $p \in P$, es decir, $f(x_0)$ es cota inferior de P. Lo que implica $f(x_0) = x_0$. ■

Lema 3.2.5. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subset X$. Si x_0 es elemento maximal de X y $x_0 \in A$, entonces x_0 es elemento maximal de A.*

Demostración. Sea $x \in A$, con $x_0 \leq x$. Como x_0 es elemento maximal de X y $x \in X$, entonces $x_0 = x$. ■

Teorema 3.2.1 (Teorema del Punto Fijo de Knaster-Tarski). *([2], pág 16) Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado con la propiedad de que toda cadena en X tiene supremo en X. Sea $f : X \longrightarrow X$ una función creciente y supongamos que existe $a \in X$ tal que $a \leq f(a)$. Entonces, el conjunto de los puntos fijos de f es no vacío y tiene un punto fijo maximal.*

Demostración. Consideremos el conjunto $P = \{x \in X : x \leq f(x)\}$. El conjunto P es no vacío ya que $a \in P$. Sean C una cadena en P y $b = sup_X C$. Demostraremos que $b \in P$. Como b es cota superior de C, entonces para todo $c \in C$ se cumple que $c \leq b$, además como f es una función creciente, se tiene que

$$f(c) \leq f(b). \tag{3.10}$$

Como $c \leq f(c)$ para todo $c \in C$ y por (3.10) $c \leq f(b)$, se sigue $f(b)$ es cota superior de C, como b es la mínima cota superior de C, entonces $b \leq f(b)$ y así $b \in P$.

Así toda cadena en P tiene cota superior en P. Entonces, por el Lema de Zorn, P tiene un elemento maximal x_0 en P. Por el Lema 3.2.3, se tiene que

$$f(x_0) = x_0. \tag{3.11}$$

Por lo tanto, el conjunto de los puntos fijos de f es no vacío.

Sea $F_f = \{x \in X : f(x) = x\} \subset P$ el conjunto de los puntos fijos de f. Como $x \in F$ entonces $x \in P$ y x_0 es elemento maximal de P, entonces por el Lema 3.2.5, x_0 es un elemento maximal de F_f. Así por (3.11) tenemos que F_f tiene un punto fijo maximal. ■

Dos consecuencias inmediatas del Teorema 3.2.1 son las siguientes.

Corolario 3.2.1. *Sea $(X, \leq)$ Dedekind completo con la propiedad de que toda cadena en X tiene cota superior de X. Sea $f : X \longrightarrow X$ una función creciente y supongamos que existe $a \in X$ tal que $a \leq f(a)$. Entonces, el conjunto de los puntos fijos de f es no vacío y tiene un punto fijo maximal.*

Demostración. Se sigue del Teorema 3.2.1, ya que si X es Dedekind completo y toda cadena P en X tiene cota superior en X, entonces P tiene supremo en X. ■

Corolario 3.2.2. *Sea $(X, \leq)$ lattice completa. Sea $f : X \longrightarrow X$ una función creciente y supongamos que existe $a \in X$ tal que $a \leq f(a)$. Entonces, el conjunto de los puntos fijos de f es no vacío y tiene punto fijo maximal.*

Demostración. Se sigue del Teorema 3.2.1, ya que si X es Lattice completa, entonces toda cadena en X tiene supremo en X. ■

3.3. Espacio Vectorial Ordenado

Definición 3.3.1. *Sean X un espacio vectorial. Un* ***cono*** *en X es un subconjunto no vacío P tal que cumple las siguientes propiedades:*

(C1) Si $x, y \in P$, entonces $x + y \in P$.

(C2) Si $\lambda \geq 0$ y $x \in P$, entonces $\lambda x \in P$.

(C3) Si $x \in P$ y $-x \in P$, entonces $x = \bar{0}$.

Observación 12. *A la pareja (X,P) se le llama* ***espacio vectorial ordenado****. En general diremos simplemente espacio vectorial ordenado X.*

Definición 3.3.2. *Sea (X,P) un espacio vectorial ordenado. Entonces, en todo cono $P \subset X$ se define una relación de orden " $\leq$ " en X de la siguiente manera: $x \leq y$ si $y - x \in P$.*

Lema 3.3.1. *Sea (X,P) un espacio vectorial ordenado, entonces $\bar{0} \in P$.*

Demostración. Sea x en P, entonces $0 \cdot x = \bar{0} \in P$. ■

Teorema 3.3.1. *Sean (X,P) un espacio vectorial ordenado, $a, b, c \in X$ y $\lambda \geq 0$. Entonces,*

(1) $a \leq a$, (reflexiva)

(2) Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$, (antisimétrica)

(3) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$, (transitiva)

(4) Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$, (preserva el orden bajo la suma)

(5) $a \leq b$, entonces $\lambda a \leq \lambda b$, (preserva el orden bajo el producto por un escalar positivo).

Demostración. Sean $a, b, c \in X$ y $\lambda \geq 0$, se cumple que:

(1) Como $a - a = \bar{0}$ y por Lema 3.3.1 se tiene que $\bar{0} \in P$, entonces $a \leq a$.

(2) Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $(b - a), -(b - a) \in P$ lo que implica que $b - a = \bar{0}$. Así, $a = b$.

(3) Si $a \leq b$ y $b \leq z$, entonces $(b-a),\ (c-b) \in P$. Por tanto, $c-a = (c-b)-(b-a) \in P$, es decir, $a \leq c$.

(4) Si $a \leq b$ implica que $(b + c) - (c - a) = b - a \in P$, entonces $a + c \leq b + c$.

(5) $a \leq b$ implica $(b - a) \in P$, entonces $\lambda(b - a) \in P$, es decir, $\lambda a \leq \lambda b$.

■

Ejemplo 3.3.1. *Sean* X=$\mathbb{R}$ *y* $P_0 = [0, \infty)$. *Veamos que* P_0 *es un cono en* $\mathbb{R}$.
Sean $x, y \in P_0$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *con* $\lambda \geq 0$. *Se cumple*

(C1) *Si* $x \geq 0$ *y* $y \geq 0$, *implica* $x + y \geq 0$.
Así, $x + y \in P_0$.

(C2) *Si* $x \geq 0$ *y* $\lambda \geq 0$, *entonces* $\lambda x \geq 0$.
Así, $\lambda x \in P_0$.

(C3) *Si* $x \in P_0$ *y* $-x \in P_0$, *entonces* x = *0.*

Ejemplo 3.3.2. *Sean* $X = C[a, b]$ *y* $P_1 = \{f \in C[a, b] | \, f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [a, b]\}$.
Veamos que P_1 *es un cono en* X.
Sean $f, g \in P_1$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *con* $\lambda \geq 0$. *Se cumple*

(C1) *Si* $f(x) \geq 0$ *y* $g(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [a, b]$, *implica que* $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \geq 0$, *para todo* $x \in [a, b]$.
Así, $(f + g) \in P_1$.

(C2) *Si* $\lambda \geq 0$ *y* $f(x) \geq 0$, *para todo* $x \in [a, b]$, *entonces* $\lambda f(x) \geq 0$, *para todo* $x \in [a, b]$.
Así, $\lambda f \in P_1$.

(C3) *Si* $f(x) \in P_1$ *y* $-f(x) \in P_1$, *entonces* $f(x) \geq 0$ *y* $-f(x) \geq 0$.
Así, $f(x) = 0$ *para todo* $x \in [a, b]$.

Definición 3.3.3. *Sean* (X, P) *un espacio vectorial ordenado y* Y *subespacio vectorial de X. Si* $P_Y = P \cap Y$ *es un cono en Y, lo llamaremos* ***el cono*** P_Y ***generado por el cono*** *P.*

Observación 13. *Sean* (X, P) *un espacio vectorial ordenado. Entonces, se cumple:*

(a) $0 \in P$.
En efecto, como $P \neq \emptyset$, *existe* $x \in X$ *y* $0 * x = 0 \in P$

(b) $\{0\}$ *es un cono y se le conoce como cono trivial.*

(c) $\{0\}$ *es el único subespacio vectorial de* X *que es cono.*

Definición 3.3.4. *Sean (X,P) un espacio vectorial ordenado. Cualquier vector* $x \in X$ *que satisface* $x \geq 0$ *es llamado* ***vector positivo*** *y al conjunto de todos los vectores positivos* $X_+ = \{x \in X : x \geq 0\}$ *lo llamaremos* ***cono positivo*** *de* X*. El cono positivo también es denotado por* X^+*.*

Teorema 3.3.2. *Sea (X,P) un espacio vectorial ordenado. Entonces el cono positivo* X^+ *de* X *es un cono y* $X^+ = P$*.*

Demostración.

(C1) Si $x, y \in X^+$, entonces $x \geq 0$, $y \geq 0$. Lo que implica $x + y \geq x \geq 0$, es decir, $x + y \geq 0$.
Así, $x + y \in X^+$.

(C2) Si $x \in X^+$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda x \geq 0$.
Así, $\lambda x \in X^+$.

(C3) Si $x \in X^+$ y $-x \in X^+$, entonces $x \geq 0$ y $-x \geq 0$, es decir, $x - 0 = x \in P$ y $-x - 0 = -x \in P$.
Así, x=0.

Por lo tanto, X^+ es un cono de X. Si $x \in P$, si y sólo si $x - 0 \in P$, equivalentemente $x \geq 0$. Por lo cual $X^+ = P$. ■

En el capítulo anterior se definieron los conceptos de Lattice, Lattice completo y Dedekind completo. Ahora se complementan dichas definiciones con el concepto de Cono.

Definición 3.3.5. *Sea* (X, P) *un espacio vectorial ordenado.*

(a) P es un cono ***miniedral*** *(como* ***lattice****), si para todo $x, y \in X$, se tiene que sup $\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ existen en X. Se dice que (X, P) es un* ***espacio de Riesz*** ***(vector lattice****) si P es un cono miniedral.*

(b) P es un cono ***fuertemente miniedral*** *si para todo $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$ y E acotado superiormente, entonces $\sup E$ existe. Diremos que (X, P) es un* ***Dedekind completo (orden completo****) si P es un cono fuertemente miniedral.*

Observación 14. *Notemos que en la terminología de los conjuntos parcialmente ordenados, diríamos que el espacio vectorial X es Dedekind completo.*

Ejemplo 3.3.3. ***Ejemplos de conos miniedrales y fuertemente miniedrales***

(a) $P_1 = [0, \infty)$ es un cono en $\mathbb{R}$.

(b) $P_1 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0,\ i = 1, 2, \cdots, n.\}$ es un cono miniedral y fuertemente miniedral en $\mathbb{R}^n$.

(c) $P_3 = \{f \in C([a, b], \mathbb{R}) : f(x) \geq 0,\ \text{para toda } x \in [a, b]\}$ es un cono miniedral pero no es fuertemente miniedral en $C[a, b]$.

Definición 3.3.6. *Sea X un espacio normado, un* ***cono ordenador*** *en X es un subconjunto P no vacío en tal que P es un cono en X y P es cerrado en X.*

Ejemplo 3.3.4. *Sean $X = C[a, b]$ y $P = \{g \in C[a, b] : g(x) \geq 0\}$, donde la norma es $||\cdot||_\infty$, definida en el ejemplo 1.2.2. Se afirma que P es un cono ordenador. Se probó que en el ejemplo 3.3.2 que P es un cono en X. Ahora veremos que P es cerrado en X. Sea $y \in X - P$, entonces existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $y(t_0) < 0$. Defínase $r := -y(t_0) > 0$, observe que $z \in B(y, r)$, si y sólo si, $||z - y||_\infty < r$.*
Como $|z(t_0) - y(t_0)| \leq ||z - y||_\infty$, entonces $|z(t_0) - y(t_0)| < r = -y(t_0)$.
Así, $z(t_0) < 0$, es decir, $z \in X - P$. Por lo tanto, $B(y, r) \subseteq X - P$, entonces $X - P$ es abierto y, en consecuencia, P es cerrado en X. Lo cual prueba que P es un cono ordenado en X.

Definición 3.3.7. *Un* ***espacio de Banach ordenado*** *es un par* $(X.P)$*, donde* X *es un espacio de Banach y* P *es un cono ordenador en* X*.*

Definición 3.3.8. *Sea* (X, P) *un espacio de Banach ordenado. La sucesión* $\{x_n\}$ *está acotada superiormente en orden, si existe* $x \in X$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $x_n \leq x$*. Es acotada inferiormente en orden si existe* $x \in P$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $x \leq x_n$*. La sucesión es acotada en orden, si es acotada superiormente e inferiormente en orden.*

Teorema 3.3.3. *Sean* (X, P) *un espacio de Banach ordenado,* $x, y \in X$ *y dos sucesiones* $\{x_n\}$*,* $\{y_n\}$ *en* X *que convergen a* x *e* y *respectivamente. Supongamos que* $x_n \leq y_n$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces,* $x \leq y$*.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $y_n - x_n \in P$ y la sucesión $\{y_n - x_n\}$ converge a $y - x$, entonces $y - x \in \bar{P}$, entonces, como P es cerrado, entonces $y - x \in P$. Así, $x \leq y$. ∎

Observación 15. *Del Teorema 3.3.3 se sigue que para todo* (X, P) *espacio de Banach ordenado y* $a,\ b \in X$ *con* $a \leq b$*, el intervalo cerrado* $[a, b]$ *es realmente un conjunto cerrado.*

Teorema 3.3.4. *Sean* (X, P) *un espacio de Banach ordenado y* $A \subset X$ *acotado superiormente (inferiormente) en orden, entonces* $\bar{A}$ *es acotado superiormente (inferiormente) en orden.*

Demostración. Supongamos que A es acotado superiormente y sea $x_0 > 0$ tal que $x \leq x_0$ para cada $x \in A$. Sea $z \in \bar{A}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que converge a z. Entonces, $x_0 - x_n \in P$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_0 - x_n\}$ converge a $x_0 - z$. Entonces, por el Teorema 3.3.3 $x_0 - z \in P$, es decir, x_0 es cota superior de $\bar{A}$. ∎

Definición 3.3.9. *Sea* (X, P) *un espacio Banach ordenado. El cono es*

(a) ***Normal***, *si existe $M > 0$ tal que si para todo $x, y \in P$, $0 \leq x \leq y$, entonces $\| x \| \leq M \| y \|$. A la constante M se le llama a la* ***constante normal***.

(b) ***Regular***, *si toda sucesión creciente y acotada superiormente en orden es convergente en el espacio X.*

(c) ***Completamente regular***, *si cada sucesión creciente y acotada en la norma es convergente en el espacio X.*

Ejemplo 3.3.5. *Sean $X = C[a,b]$ y $P = \{g \in C[a,b] : g(x) \geq 0\}$, donde la norma es $||\cdot||_\infty$, definida en el ejemplo 1.2.2. Se afirma que P es un cono normal.*
Por el ejemplo 3.3.4, P ya es un cono ordenado en X.
Sean $f, g \in P$ tales que $f \leq g$, entonces $0 \leq f(t) \leq g(t)$, para todo $t \in [a,b]$. Así, $0 \leq |f(t)| \leq |g(t)|$, para todo $t \in [a,b]$. Por lo cual, $sup\{|f(t)|$ para todo $t \in [a,b]\} \leq sup\{|g(t)|$, para todo $t \in [a,b]\}$. Por lo tanto, $||f||_\infty \leq ||g||_\infty$, es decir, P es un cono normal con constante normal 1.

El siguiente toerema nos sirve para probar que si una sucesión en un espacio de Banach ordenado es acotada en orden por otras dos sucesiones tales que convergen a un mismo límite x^*, entonces esta converge al tambiém a x^* mientras el cono sea normal.

Teorema 3.3.5. *(Teorema del emparedado) Sean (X, P) un espacio Banach ordenado y $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ sucesiones en P tales que existe x^* en P con la propiedad de que $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ convergen a x^*. Si P es normal y para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple que $x_n \leq y_n \leq z_n$, entonces $\{y_n\}$ converge a x^*.*

Demostración. Como $x_n \leq y_n \leq z_n$, entonces $\bar{0} \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n$ y P normal implica que existe $M > 0$ tal que $||y_n - x_n|| \leq M||z_n - x_n|| \leq M\left[||x^* - x_n|| + ||x^* - z_n||\right]$.
Además, $||x^* - y_n|| \leq ||x^* - x_n|| + ||y_n - x_n||$.
Por lo tanto, $||x^* - y_n|| \leq (1 + M)||x^* - x_n|| + M||x^* - z_n||$.
Aplicando límite cuando $n \longrightarrow \infty$, se obtiene que $\{y_n\}$ converge a x^*. ∎

Definición 3.3.10. *Sea* (X, P) *espacio normado ordenado. Se dice que un elemento* x *en* X *es un límite subsecuencial de una sucesión* $\{x_n\}$ *si es límite de alguna subsucesión de* $\{x_n\}$.

Teorema 3.3.6. *Sean* (X, P) *un espacio normado ordenado y* $\{x_n\}$ *una sucesión creciente, entonces* $\{x_n\}$ *tiene a lo más un límite subsecuencial.*

Demostración. Supongamos que x e y son límites subsecuenciales de $\{x_n\}$. Entonces, existen $\left\{x_{n_j}\right\}$ y $\left\{x_{m_j}\right\}$ que convergen a x e y, respectivamente. Sea $n \in \mathbb{N}$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq m_j$, para cada $j \geq j_0$. Como la sucesión es creciente se tiene que $x_n \leq x_{m_j}$. Tomando el límite cuando $j \longrightarrow \infty$, en ambos lados de la desigualdad, se tiene $x \leq y$. De manera similar se demuestra que $y \leq x$. ■

Teorema 3.3.7. *Sea* (X, P) *un espacio normado ordenado. Sea* $A \subset X$ *compacto. Entonces, cada sucesión monótona de* A *es convergente en* A.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión creciente en A. Como A es compacto existe una subsucesión $\left\{x_{n_j}\right\}$ de $\{x_n\}$ y $x \in X$ tal que $\left\{x_{n_j}\right\}$ converge a x. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ no converge a x, entonces existe $\epsilon > 0$ y una subsucesión $\{x_{m_k}\}$ tal que

$$\| x_{m_j} - x \| \geq \epsilon.$$

Como A es compacto, entonces existe una subsucesión $\left\{x_{m_{k_j}}\right\}$ que converge a algún elemento z de X. Pero, por el Teorema 3.3.6, se tiene que $x = z$, lo cual contradice el Teorema 3.3.3. ■

Teorema 3.3.8. *Sea* (X, P) *un espacio normado ordenado. Supongamos que* P *es un cono normal en* X. *Entonces, todo intervalo cerrado es un conjunto acotado en norma.*

Demostración. Sean $a,\ b \in X$, con $a \leq b$. Como P es normal, existe $M \geq 0$ tal que si $0 \leq x \leq y$, entonces $|| \ x \ || \leq M|| \ y \ ||$. Sea $x \in [a, b]$, entonces $0 \leq x - a \leq b - a$. Así, $|| \ x - a \ || \leq M|| \ b - a \ ||$. De esta manera, $|| \ x \ || \leq || \ a \ || \ + \ M|| \ b - a \ ||$.
Por lo tanto $[a, b]$ es acotado en norma. ■

Teorema 3.3.9. *Sea (X, P) un espacio normado ordenado. Supongamos que P es un cono normal en X. Sean x_n una sucesión creciente y una subsucesión x_{n_j} de x_n. Si x_{n_j} que converge a algún elemento $x \in X$, entonces la sucesión x_n converge a x.*

Demostración. Como P es normal, existe $M \geq 0$ tal que si $0 \leq x \leq y$, entonces $|| \ x \ || \leq M|| \ y \ ||$. Sea $n \in \mathbb{N}$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq n_{j_0}$. Como la sucesión $\{x_n\}$ es creciente, entonces para cada $j_0 \leq j$ se cumple $x_n \leq x_{n_j}$. De esta manera, para cada $j_0 \leq j$ se tiene $|| \ x - x_n \ || \leq M|| \ x - x_{n_j} \ ||$.
Por hipótesis $\{x_{n_j}\}$ converge a x. Así, $\{x_n\}$ converge a x. ■ La prueba del Teorema 3.3.10 y el Lema 3.3.2 se pueden encontrar en [4] o en [10].

Teorema 3.3.10. *Sea (X, P) un espacio Banach ordenado. Si P es un cono regular, entonces P es un cono normal.*

Lema 3.3.2. *Sean (X, P) un espacio de Banach ordenado y P un cono regular, entonces*

1. *Cada conjunto acotado superiormente y totalmente ordenado en X tiene supremo en X,*

2. *Cada conjunto acotado inferiormente y totalmente ordenado en X tiene ínfimo en X.*

El Lema 3.3.3 nos ayuda a probar en el siguiente capítulo los Lemas 4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3. Para esto se necesita la siguiente definición.

Definición 3.3.11. *Sea (X, P) un espacio Banach ordenado. El cono es* ***sólido****, si $int(P) \neq \emptyset$.*

Lema 3.3.3. *Sean (X, P) un espacio de Banach ordenado. Si P es sólido, entonces*

(a) $\bar{0}$ no pertenece a $int(P)$,

(b) para todo x, y en $int(P)$, existen $r_1, \ r_2 > 0$ tales que:

1) Si $|\mu| < r_1$, *entonces* $x - \mu y \in int(P)$.

2) Si $|\lambda| > r_2$, *entonces* $y - \dfrac{x}{\lambda} \in int(P)$.

3) Si $0 < \mu < r_1$ *y* $\lambda > r_2$, *entonces* $\mu y \leq x \leq \lambda y$.

Demostración. *a*) Suponga que $\bar{0}$ pertenece a $int(P)$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(\bar{0}, r) \subset int(P)$. Sea x en $B(\bar{0}, r)$ con $x \neq \bar{0}$, entonces $-x \in B(\bar{0}, r)$ y $-x \neq \bar{0}$. Así, $x, -x$ pertencen a $B(\bar{0}, r) \subset P$ con $x \neq \bar{0}$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $\bar{0}$ no pertenece a $int(P)$.

b) Sean x, y en $int(P)$, existen $r_x,\ r_y > 0$ tales que $B(x, r_x) \subset int(P)$ y $B(y, r_y) \subset int(P)$. Además, por el inciso *a*) de este Lema se tiene que $||x|| > 0$ y $||y|| > 0$. Se definen $r_1 := \dfrac{r_x}{||y||} > 0$ y $r_2 := \dfrac{||x||}{r_y} > 0$. Sean $\mu,\ \lambda$ en $\mathbb{R}$ tales que $|\mu| < r_1$ y $|\lambda| > r_2$.

Para el caso en que $|\mu| < r_1$, entonces

$$||x - (x - \mu y)|| = ||\mu y|| = |\mu|\ ||y|| < r_x.$$

Así, $x - \mu y \in B(x, r_x) \subset int(P)$.

Para el caso en que $|\lambda| > r_2$, entonces

$$\Big|\Big|y - \Big(y - \frac{x}{\lambda}\Big)\Big|\Big| = \Big|\Big|\frac{x}{\lambda}\Big|\Big| = \frac{||x||}{|\lambda|} < r_y.$$

Así, $y - \dfrac{x}{\lambda} \in B(y, r_y) \subset int(P)$.

Si se cumplen *b*) inciso 1) y 2) para $\mu,\ \lambda > 0$, entonces $\mu y \leq x \leq \lambda y$. ■

Capítulo 4

Punto Fijo en Funciones monótonas

Este capítulo se consideran únicamente espacios de Banach ordenados (X, P). En la primera parte se consideran teoremas del punto fijo para funciones crecientes, definidas sobre intervalos cerrados o conos. En la segunda parte, se presentan teoremas del punto fijo para funciones decrecientes. Además, mediante un ejemplo se muestra que cambiando la condición de que el operador sea creciente por decreciente los Teoremas 4.1.1 y 4.1.2, no cumplen la convergencia de los iterados de Picard de los extremos a los puntos fijos. Pese a que existen teoremas del punto dijo sobre intervalos cerrados, sólo se trabajará con funciones decrecientes definidas sobre un cono. Aunque no es de nuestro interés existen más teoremas de punto fijo en relación al orden, para más información ver [4].

4.1. Punto Fijo de operadores crecientes

Inicialmente se presenta la definición de cono, luego la definición de operador creciente.

Definición 4.1.1. *Sean $D \subset X$ y $f : D \longrightarrow X$ una función. Se llama:*

(1) Operador creciente en D, si $x_1, x_2 \in D$ y $x_1 \leq x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(2) Operador estrictamente creciente en D, si $x_1, x_2 \in D$ *y* $x_1 < x_2$, *entonces* $f(x_1) < f(x_2)$.

El Teorema 4.1.2 tiene garantizada la existencia de un punto fijo por el Teorema de Schauder, pero la ventaja sobre éste último es que el algoritmo de los iterados de Picard de los extremos del intervalo utilizado convergen a puntos fijos.

Teorema 4.1.1. *Sean* $\mu_0,\ v_0 \in X$ *con* $\mu_0 < v_0$ *y* $F : [\mu_0, v_0] \longrightarrow [\mu_0, v_0]$ *un operador creciente. Si P es regular y F es continua, entonces F tiene un punto fijo máximo* x^*, *un punto fijo mínimo* x_* *en* $[\mu_0, v_0]$ *y*

$$x_* = \lim_{n\to\infty}(\mu_n),\ \ x^* = \lim_{n\to\infty}(v_n),$$

donde $\mu_n = F(\mu_{n-1})$ *y* $v_n = F(v_{n-1})$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Además,*

$$\mu_0 \le \mu_1 \le \cdots \le \mu_n \le \cdots \le x_* \le x^* \le \cdots \le v_n \le \cdots \le v_1 \le v_0. \tag{4.1}$$

Demostración. Como F es un operador creciente y $\mu_0 \le F(\mu_0), F(v_0) \le v_0$, implica que

$$\mu_0 \le \mu_1 \le \cdots \le \mu_n \le \cdots \le v_n \le \cdots \le v_1 \le v_0. \tag{4.2}$$

Ahora, probaremos que la sucesión $\{\mu_n\}$ converge a un punto $x_* \in X$ y $F(x_*) = x_*$. Por (4.2), $\{\mu_n\}$ es creciente y acotada en orden. Como P es regular, existe $x_* \in X$ tal que $\mu_n \longrightarrow x_*$. Por la continuidad de F, tenemos que $\mu_n = F(\mu_{n-1}) \longrightarrow F(x_*)$. Entonces $x_* = F(x_*)$. Similarmente, se prueba que $v_n \longrightarrow x^* \in X$, cuando $n \longrightarrow \infty$ con $F(x^*) = x^*$ y

$$\mu_n \le x_* \le x^* \le v_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Por lo tanto, de (4.2), (4.3) se concluye (4.1).

Finalmente, probaremos que x_* es el punto fijo mínimo y x^* es el punto fijo máximo de F en $[\mu_0, v_0]$.

Sea $\bar{x}$ un punto fijo de X en $[\mu_0, v_0]$. Se probará por inducción que

$$\mu_n \le \bar{x} \le v_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Para $n = 0$, se tiene $\mu_0 \leq \bar{x} \leq v_0$. Supóngase que $\mu_{n-1} \leq \bar{x} \leq v_{n-1}$, entonces se tiene que

$$\mu_n = F(\mu_{n-1}) \leq F(\bar{x}) = \bar{x} \leq F(v_{n-1}) = v_n.$$

Por lo tanto,

$$\mu_n \leq \bar{x} \leq v_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Aplicando el límite cuando $n \longrightarrow \infty$ en la desigualdad 4.4, se tiene $x_* \leq \bar{x} \leq x^*$. ■

En el siguiente Teorema se debilita la condición sobre el cono P, pero se agrega una condición más fuerte sobre la función. Para esto se necesita la siguiente definición.

Definición 4.1.2. *Sean X, Y dos espacios normados. Un operador $F : X \longrightarrow Y$ se llama* ***operador completamente continuo*** *si:*

1. *F es continua y*

2. *Para cualquier subconjunto acotado M de X, $F(M)$ es relativamente compacto.*

Para el siguiente ejemplo es necesario recordar el Teorema de Arzela-Ascolí cuya demostración se puede ver en [11].

Ejemplo 4.1.1. *Sean $X = C(J)$ con la norma uniforme y $P = \{x \in C(J) : x(t) \geq 0,\ t \in J\}$.*

Defínase el operador $T : [\mu_0, v_0] \longrightarrow [\mu_0, v_0]$ por

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \text{ para cada } t \in J \text{ y } x \in P.$$

Se afirma que T es un operador completamente continuo.

Demostración. Se definen $\mu_{min} := \{\mu_0(t) : t \in [0, a]\}$ y $v_{min} := \{v_0(t) : t \in [0, a]\}$.
Observe que $x \in [\mu_0, v_0]$ implica $\mu_0(t) \leq x(t) \leq v_0(t)$, para todo $t \in [0, a]$,
así, $\mu_{min} \leq x(t) \leq v_{max}$. De esta manera el dominio de f se puede restringir a $[0, a] \times [\mu_{min}, v_{max}]$. Como f es continua en $[0, a] \times [\mu_{min}, v_{max}]$ y $[0, a] \times [\mu_{min}, v_{max}]$ es compacto, entonces f es uniformemente continua. Sea $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
si $||(s_1, s_2) - (s_3, s_4)||_2 < \delta$ implica $|f(s_1, s_2) - f(s_3, s_4)| < \dfrac{\epsilon}{a}$.

Sean $x,\ y \in [\mu_0, v_0]$ con $||y-x||_\infty < \delta$, entonces $||\left(\mu, y(\mu)\right) - \left(\mu, x(\mu)\right)||_2 < \delta$ para toda $\mu \in [0,a]$. Así, $|f\left(\mu, y(\mu)\right) - f\left(\mu, x(\mu)\right)| \leq \dfrac{\epsilon}{a}$.
Luego, para toda $t \in [0,a]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|T\left(y\right)\left(t\right) - T\left(x\right)\left(t\right)| &= \left|\int_0^t f\left(\mu, y\left(\mu\right)\right) d\mu - \int_0^t f\left(\mu, x\left(\mu\right)\right) d\mu\right| = \left|\int_0^t \left[f\left(\mu, y\left(\mu\right)\right) - f\left(\mu, x\left(\mu\right)\right)\right] d\mu\right| \\
&\leq \int_0^t |f\left(\mu, y\left(\mu\right)\right) - f\left(\mu, x\left(\mu\right)\right)| d\mu \leq \int_0^t \frac{\epsilon}{a} d\mu < \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $||T\left(y\right) - T\left(x\right)||_\infty < \epsilon$. Así, T es continuo.
Del ejemplo 1.3.4 y la observación 15, se sigue que $[\mu_0, v_0]$ es compacto. Como T es continuo en $T\left([\mu_0, v_0]\right)$, entonces por el Teorema 1.3.3 se tiene que $T\left([\mu_0, v_0]\right)$ es compacto. Por lo cual, es relativamente compacto.
Por tanto, T es completamente continuo.

$\blacksquare$

Teorema 4.1.2. *Sean $\mu_0,\ v_0 \in X$ con $\mu_0 < v_0$ y $F : [\mu_0, v_0] \longrightarrow [\mu_0, v_0]$ un operador creciente. Si P es normal y F es completamente continuo, entonces F tiene un punto fijo máximo x^*, un punto fijo mínimo x_* en $[\mu_0, v_0]$ y*

$$x_* = \lim_{n\to\infty} (\mu_n),\ x^* = \lim_{n\to\infty} (v_n),$$

donde $\mu_n = F(\mu_{n-1})$ y $v_n = F(v_{n-1})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además,

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \cdots \leq x_* \leq x^* \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0. \tag{4.5}$$

Demostración.
La demostración de:

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \cdots \leq x_* \leq x^* \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0, \tag{4.6}$$

es análoga a la que se hizo en el teorema anterior.

Ahora, probaremos que la sucesión $\{x_n\}$ converge a un punto $x_* \in X$ y $F(x_*) = x_*$. Como P es un cono normal y por (4.6), la sucesión $\{\mu_n\}$ es acotada en orden, entonces

$\{\mu_n\}$ es acotada en norma. Como F es completamente continuo, entonces existe una subsucesión $\{\mu_{n_j}\}$ de $\{\mu_n\}$ y $x_* \in X$ tal que $\{\mu_{n_j}\}$ converge a x_*. Entonces por el Teorema 3.3.9, $\{\mu_n\}$ converge a x_*, además $x_* \in [\mu_0, v_0]$. Por la continuidad de F, la sucesión $\{\mu_n\}$ converge a $F(x_*)$, entonces $x_* = F(x_*)$. Similarmente se prueba que $v_n \longrightarrow x^* \in X$, cuando $n \longrightarrow \infty$ y así, $F(x^*) = x^*$. Además,

$$\mu_n \leq x_* \leq x^* \leq v_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Por lo tanto, de 4.6 y 4.7, se concluye 4.5.

Finalmente, probaremos que x_* es el punto fijo mínimo y x^* es el punto fijo máximo.

Sea $\bar{x}$ un punto fijo de X en $[\mu_0, v_0]$. Se probará por inducción que

$$\mu_n \leq \bar{x} \leq v_n, \text{ para } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Para $n = 0$, se tiene $\mu_0 \leq \bar{x} \leq v_0$.

Supóngase que $\mu_{n-1} \leq \bar{x} \leq v_{n-1}$, entonces tenemos que

$$\mu_n = F(\mu_{n-1}) \leq F(\bar{x}) = \bar{x} \leq F(v_{n-1}) = v_n,$$

Por lo tanto,

$$\mu_n \leq \bar{x} \leq v_n. \tag{4.8}$$

Aplicando límite cuando $n \longrightarrow \infty$ en la desigualdad (4.8), se tiene que $x_* \leq \bar{x} \leq x^*$. ■

Al inicio del capítulo se comentó que en la primera parte se trabajaría con funciones crecientes definidas sobre un intervalo cerrado y después definidas sobre un cono. El siguiente ejemplo muestra que los teoremas análogos a los trabajados en el capítulo no son necesariamente ciertos cuando la función creciente está definida sobre un cono.

Ejemplo 4.1.2. *Sea $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, definida por $f(x) = x + 1$. Observemos que $[0, \infty)$ es un cono regular del espacio de Banach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y f es completamente continuo, pero f no tiene puntos fijos.*

El Teorema del punto fijo 4.1.3 es para funciones crecientes definidas sobre un cono, pero agregándole condiciones al cono y la función. Para abordar la demostración de los lemas siguientes necesitamos recordar la siguiente definición:
Sea (X, P) un espacio Banach ordenado. El cono es **sólido**, si $int(P) \neq \emptyset$.

Lema 4.1.1. *Sean P un cono sólido y x^* en $int(P)$, si existe $\{x_n\}$ sucesión en $int(P)$ tal que x_n converge a x^*, entonces existen $\{t_n\}$ y $\{s_n\}$ sucesiones reales tales que:*

1. *Para todo n en $\mathbb{N}$, se cumple*

$$0 < t_n \leq 1 \leq s_n \quad y \quad t_n x_n \leq x^* \leq s_n x_n. \tag{4.9}$$

2. *Cuando $n \longrightarrow \infty$, se tiene que $t_n \longrightarrow 1$ y $s_n \longrightarrow 1$.*

Demostración. Sea x^* en $int(P)$ y $\{x_n\}$ sucesión en $int(P)$ tal que x_n converge a x^*. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen $A_n := \{t > 0 : x^* \geq tx_n\}$ y $B_n := \{s > 0 : sx_n \geq x^*\}$. Como x_n y x^* pertenecen a P, por el Lema 3.3.3 se tiene que A_n y B_n son no vacíos y acotados superior e inferiormente respectivamente.
Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$t_n^* := supA_n \;\; y \;\; s_n^* := infB_n. \tag{4.10}$$

Observe que $t_n^* > 0, \;\; s_n^* > 0$ y $t_n * x_n \leq x^* \leq s_n^* x_n$, entonces $t_n^* \leq s_n^*$. Para cualquier $0 < \epsilon < 1$, se elige $0 < \epsilon^* < 1$ tal que

$$\frac{\epsilon^*}{1 - \epsilon^*} < \epsilon. \tag{4.11}$$

Por el Lema 1.2.2 se tiene que $\epsilon^* x^* \in int(P)$ y como $x_n \to x^*$, existe un entero positivo n_0 tal que, para $n > n_0$, $\epsilon^* x^* \pm (x_n - x^*) \geq \theta$ o $(1 - \epsilon^*)x^* \leq x_n \leq (1 + \epsilon^*)x^*$, esto es

$$\frac{1}{1 + \epsilon^*} x_n \leq x^* \leq \frac{1}{1 - \epsilon^*} x_n. \tag{4.12}$$

Por la definición de t_n^* y s_n^* se tiene que

$$\frac{1}{1+\epsilon^*} \leq t_n^* \leq s_n^* \leq \frac{1}{1-\epsilon^*}, \quad n > n_0. \tag{4.13}$$

De la desigualdad (4.11) se obtiene

$$\frac{1}{1-\epsilon^*} < 1+\epsilon, \quad \frac{1}{1+\epsilon^*} > \frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon} = 1 - \frac{\epsilon}{1+2\epsilon} > 1-\epsilon. \tag{4.14}$$

Por lo tanto, de las desigualdades (4.13) y (4.14) resulta que

$$1-\epsilon < t_n^* \leq s_n^* < 1+\epsilon, \quad n > n_0,$$

lo cual implica que $t_n^* \to 1$ y $s_n^* \to 1$, cuando $n \to \infty$. Sea $t_n = \text{mín}\{t_n^*, 1\}$ y $s_n = \text{máx}\{s_n^*, 1\}$.

Por lo tanto,

$s_n \geq 1 \geq t_n > 0$, $\;t_n \to 1, n \to \infty$ y $t_n x_n \leq x^* \leq s_n x_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. ■

Definición 4.1.3. *Sea (X, P) un espacio Banach ordenado. El cono es **sólido normal**, si P es un cono sólido y normal.*

Lema 4.1.2. *Sean P un cono sólido normal y $f : int(P) \longrightarrow int(P)$ un operador creciente, entonces*

existe r en $(0,1)$ tal que para todo x en int(P) y t en $(0,1)$ se cumple

$$f(tx) \geq t^r f(x),$$

si y sólo si, existe r en $(0,1)$ tal que para todo x en int(P) y $s > 0$ se cumple

$$s^r f(x) \geq f(sx).$$

Demostración. $(Necesidad)$. Sean $s > 1$ y $x \in int(P)$. Entonces

$f(x) = f(s^{-1}sx) \geq (s^{-1})^r f(sx)$, entonces $f(x) \geq (s^{-1})^r f(sx)$.

Por lo tanto, $s^r f(x) \geq f(sx)$.

$(Suficiencia.)$ Sean t en $(0,1)$ y $x \in int(P)$. Entonces

$f(x) = f(t^{-1}tx) \leq (t^{-1})^r f(tx)$, entonces $f(x) \leq (t^{-1})^r f(tx)$.

Por lo tanto, $t^r f(x) \leq f(tx)$. ■

Lema 4.1.3. *Sean P un cono sólido normal y $f : int(P) \longrightarrow int(P)$ un operador creciente. Si existe r en $(0,1)$ tal que*

$$f(tx) \geq t^r f(x), \text{ para todo } x \text{ en } int(P) \text{ y } t \text{ en } (0,1). \tag{4.15}$$

Entonces, f es continua.

Demostración. Sean x^* y $\{x_n\}$ sucesión en $int(P)$, tales que $\{x_n\} \longrightarrow x^*$, cuando $n \longrightarrow \infty$. Por el Lema 4.1.1, existen $\{t_n\}$ y $\{s_n\}$ sucesiones tales que $0 < t_n \leq 1 \leq s_n$, $t_n, s_n \to 1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $t_n x_n \leq x^* \leq s_n x_n$. Como f es creciente y cumple (4.15) se tiene que

$$t_n^r f(x_n) \leq f(t_n x_n) \leq f(x^*) \leq f(s_n x_n) \leq s_n^r f(x_n)$$

y

$$s_n^{-r} f(x^*) \leq f(x_n) \leq t_n^{-r} f(x^*) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Como P es normal, entonces $s_n^{-r} f(x^*) \to f(x^*)$ y $t_n^{-r} f(x^*) \to f(x^*)$. Por el Teorema 3.3.5, se tiene que $f(x_n) \to f(x^*)$. ■

Lema 4.1.4. *Sean P un cono sólido normal y $f : int(P) \longrightarrow int(P)$ un operador creciente. Si existe un r en $(0,1)$ tal que $f(tx) \geq t^r f(x)$, para todo x en $int(P)$ y t en $(0,1)$. Entonces, si x^* y $\bar{x}$ son puntos fijos de f implica que $x^* = \bar{x}$.*

Demostración. Sean x^* y $\bar{x}$ puntos fijos de f en $int(P)$. Se define $A := \{t > 0 : \bar{x} \geq tx^*\}$, por el Lema 3.3.3 se tiene que existen $\mu,\ \lambda > 0$ tales que $\mu x^* \leq \bar{x} \leq \lambda x^*$, es decir, A es no vacío y acotado superiormente. Por tanto, existe t_1 en $\mathbb{R}$ tal que $t_1 = supA$.
Se afirma $t_1 \geq 1$.
Supongamos que $0 < t_1 < 1$, entonces $\bar{x} = f(\bar{x}) \geq f(t_1^r x^*) \geq t_1^r f(x^*) = t_1^r x^*$. Así, $\bar{x} \geq t_1^r x^*$ y $t_1^r > t_1$ lo que contradice la definición de t_1. Por lo tanto, se tiene que $t_1 \geq 1$, entonces $\bar{x} \geq x^*$. Similarmente se puede probar que $x^* \geq \bar{x}$. Por lo cual, $\bar{x} = x^*$. ■

Teorema 4.1.3. *Sean P un cono sólido normal y $f : int(P) \longrightarrow int(P)$ un operador creciente. Si existe un r en $(0,1)$ tal que*

$$f(tx) \geq t^r f(x), \text{ para todo } x \text{ en } int(P) \text{ y } t \text{ en } (0,1). \tag{4.16}$$

Entonces, f tiene un único punto fijo x^* en $int(P)$. Además, dado x_0 en $int(P)$, se tiene que:

a) $x_n \longrightarrow x^*$,

b) existen $M > 0$ y τ en $(0,1)$ que dependen de x_0 tales que

$$||x_n - x^*|| \leq M(1 - \tau^{r^n}), \tag{4.17}$$

donde $x_n = f(x_{n-1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea x_0 en $int(P)$, se elige t_0 y s_0 tal que

$$0 < t_0 < 1 < s_0 \text{ y } {t_0}^{1-r} x_0 \leq f(x_0) \leq {s_0}^{1-r} x_0. \tag{4.18}$$

Sean $u_0 := t_0 x_0$ y $v_0 := s_0 x_0$, entonces $v_0 > u_0 > \theta$. De la desigualdad (4.16) y por el Lema 4.1.2 se tiene que

$$f(sx) \leq s^r f(x), \quad x \in P, \quad s > 1, \tag{4.19}$$

entonces,

$$f(u_0) \geq {t_0}^r f(x_0) \geq t_0 x_0 = u_0 \tag{4.20}$$

y

$$f(v_0) \leq {s_0}^r f(x_0) \leq s_0 x_0 = v_0. \tag{4.21}$$

Sea $u_n = f(u_{n-1})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como f es creciente, de (4.20) y (4.21) se deduce que

$$u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_n \leq ... \leq v_n \leq ... \leq v_1 \leq v_0. \tag{4.22}$$

Definimos $\tau := \dfrac{t_0}{s_0}$, de la desigualdad (4.18) se tiene que $0 < \tau < 1$. Como $u_0 = t_0x_0$ y $v_0 = s_0x_0$, entonces $u_0 = \tau v_0$.

Se afirma que

$$u_k \geq \tau^{rk} v_k, \ \textit{para cada } k \in \mathbb{N}. \tag{4.23}$$

Se procederá por inducción. Como $u_0 = \tau v_0$, entonces $u_k \geq \tau^{rk} v_k$, para $k = 0$.

Suponga que $u_k \geq \tau^{rk} v_k$, entonces

$$\mu_{k+1} = f(\mu_k) \geq f(\tau^{rk} v_k) \geq (\tau^{rk})^r f(v_k) = \tau^{rk+1} v_{k+1}.$$

Por lo tanto, de las desigualdades (4.22) y (4.23) se obtiene que

$$\theta \leq \mu_{n+p} - \mu_n \leq v_n - \mu_n \leq v_n - \tau^{rn} v_n = (1 - \tau^{rn}) v_n \leq (1 - \tau^{rn}) v_0. \tag{4.24}$$

Como P es normal, existe $M > 0$ tal que $||\mu_{2n+p} - \mu_n|| \leq (1 - \tau^{rn}) M ||v_0||$, entonces $\{\mu_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X. Así, existe μ_* en X, tal que μ_n converge a μ_*. Similarmente, de (4.22) y (4.23) se tiene que

$$\theta \leq v_n - \mu_{n+p} \leq v_n - \mu_{n+p} \leq v_n - \tau^{rn+p} v_{n+p} \leq (1 - \tau^{rn+p}) v_{n+p} \leq (1 - \tau^{rn}) v_0,$$

es decir, v_n converge a μ^*, para algún μ^* en X.

De (4.22) se tiene que

$$u_n \leq u^* \leq v^* \leq v_n, \quad \textit{con} \quad u^*, \ v^* \in P. \tag{4.25}$$

Del Lema 4.1.3 f es continua y entonces $u_{n+1} = f(u_n) \longrightarrow f(u^*)$ y $v_{n+1} = f(v_n) \rightarrow f(v^*)$ cuando $n \longrightarrow \infty$ lo cual implica que $f(u^*) = u^*$ y $f(v^*) = v^*$. De (4.24) y (4.25) tenemos que

$$\theta \leq v^* - u^* \leq v_n - u_n \leq (1 - \tau^{rn}) v_0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.26}$$

Como $\tau^{rn} \longrightarrow 1,$ cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces $u^* = v^*$. Esto implica que x^* pertenece a $int(P)$ y $f(x^*) = x^*$. Como

$$u_0 = t_0 x_0 < x_0 < s_0 x_0 = v_0, \tag{4.27}$$

entonces

$$u_n \leq x_n \leq v_n, \text{ donde } x_n = f(x_{n-1}) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{4.28}$$

Entonces de (4.24), (4.25) y (4.28) se obtiene

$$||x_n - x^*|| \leq ||x_n - u_n|| + ||u_n - x^*|| \leq 2N||v_n - u_n|| \leq 2N^2(1-\tau^{rn})||v_0||, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.29}$$

donde N es la constante de normalización de P. Entonces $x_n \to x^*$ cuando $n \to \infty$. Además, $||x_n - x^*|| \leq M(1 - \tau^{r^n})$, donde $M = 2N^2||v_0||$ y por el Lema 4.1.4 x^* es el único punto fijo de f. ■

4.2. Aplicaciones en Operadores Crecientes

Teorema 4.2.1. *Sean a en $\mathbb{R}^+$, $J = [0, a]$ y $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Supóngase que $\mu_0, v_0 \in C^1(J)$ son tales que $\mu_0(t) \leq v_0(t)$ para cada $t \in J$ y además,*

$$\begin{cases} \mu_0'(t) \leq f(t, \mu_0(t)), \quad t \in J, \\ \\ \mu_0(0) \leq x_0, \end{cases} \tag{4.30}$$

$$\begin{cases} v_0'(t) \geq f(t, v_0(t)), \quad t \in J, \\ \\ v_0(0) \geq x_0. \end{cases} \tag{4.31}$$

Supóngase también que f es creciente en la segunda variable, es decir,

$$si\ x < y,\ entonces\ f(t, x) \leq f(t, y)\ para\ cada\ t \in J. \tag{4.32}$$

Entonces el problema con condición inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J, \\ \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{4.33}$$

tiene una solución minimal $x_* \in C^1(J)$ *y una solución maximal* $x^* \in C^1(J)$ *en* $[\mu_0, v_0]$ *y* $\{\mu_n(t)\}$, $\{v_n(t)\}$ *convergen uniformemente a* $x_*, x^* \in J$, *respectivamente, donde*

$$\mu_n(t) = x_0 + \int_0^t f(s, \mu_{n-1}(s))ds,$$
$$v_n(t) = x_0 + \int_0^t f(s, v_{n-1}(s))ds.$$

Demostración. Sean $X = C(J)$ y $P = \{x \in C(J) : x(t) \geq 0,\ t \in J\}$. Por el ejemplo 3.3.5, P es un cono normal en X.

Defínase el operador $T : [\mu_0, v_0] \longrightarrow [\mu_0, v_0]$ por

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \text{ para cada } t \in J \text{ y } x \in P. \tag{4.34}$$

Se afirma que T es un operador creciente.

Sean x, y en $[\mu_0, v_0]$, con $x \leq y$. Por (4.32), se tiene que para todo $t \in J$ se cumple $f(t, x(t)) \leq f(t, y(t))$, entonces $\int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \leq \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds$. Por lo cual, $T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \leq x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds = T(y)(t)$ para cada $t \in J$ y $x \in P$. Por lo tanto, T es creciente. Además, T es completamente continuo e integrando en ambos lados de (4.30) y (4.31), se obtiene que $\mu_0 \leq T(\mu_0)$ y $T(v_0) \leq v_0$. El resultado se sigue del Teorema 4.1.2. ■

4.3. Punto Fijo en Operadores Decrecientes

Es esta sección se estudian los teoremas del punto fijo para funciones decrecientes. Para esto recordemos la definición de operador decreciente.

Definición 4.3.1. *Sean* $D \subset X$ *y* $f : D \longrightarrow X$ *un operador. Es llamado:*

(1) Operador decreciente en D. Si $x_1, x_2 \in D$ *y* $x_1 \leq x_2$, *entonces,* $f(x_1) \geq f(x_2)$.

(2) Operador estrictamente decreciente en D. Si $x_1, x_2 \in D$ *y* $x_1 < x_2$, *entonces* $f(x_1) > f(x_2)$.

Una de las preguntas naturales que surgen es: ¿Los Teoremas 4.1.1 y 4.1.2 son válidos cambiando la condición de que el operador sea creciente por que sea decreciente? La respuesta es no, el siguiente ejemplo es prueba de ello.

Ejemplo 4.3.1. *Sea* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, *definida por* $f(x) = 1 - x$.
Note que:

1. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$,
2. $\{f^n(0)\} = \{1, 0, 1, 0, ...\}$,
3. $\{f^n(1)\} = \{0, 1, 0, 1, ...\}$.

Es decir, aunque f *tiene punto fijo, las sucesiones de iterados de Picard de los extremos no convergen a este punto fijo.*

Definición 4.3.2. *Sea* $f : P \longrightarrow P$ *un operador. Si existe* $\epsilon \in (0,1)$ *tal que* $f^2(\theta) \geq \epsilon f(\theta)$, *se dice que* f *es:*
(H_1), *si para todo* $x \in P$ *y* $t \in [\epsilon, 1)$, *existe* $\eta = \eta(x,t) > 0$ *tal que:*

$$\epsilon f(\theta) \leq x \leq f(\theta), \text{ entonces } f(tx) \leq [t(1+\eta)]^{-1} f(x).$$

(H_2), *si para todo* $x \in P$ *y* $t^* \in [\epsilon, 1)$, *existen* $\eta = \eta(t^*) > 0$ *y* $\delta = \delta(t^*) > 0$ *tales que:*

$$\epsilon f(\theta) \leq x \leq f(\theta) \text{ y } t^* - \delta \leq t \leq t^* \text{ implican que } f(tx) \leq [t(1+\eta)]^{-1} f(x).$$

(H_3), *si para todo* $x \in P$, *existe* r *en* $(0,1)$ *tal que:*

$$\epsilon f(\theta) \leq x \leq f(\theta) \text{ y } \epsilon \leq t < 1 \text{ implican que } f(tx) \leq t^{-r} f(x).$$

Observación 16. $(H_2) \Rightarrow (H_1)$ *y* $(H_3) \Rightarrow (H_1)$.

El siguiente ejemplo es de un operador (H_1) que postariormente se va a trabjar con más detalle.

Ejemplo 4.3.2. *Sean* $X = C[0,1]$ *y* $P = \{\psi \in C[0,1] : \psi(x) \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1\}$. *Como se vio en el ejemplo 3.3.4,* (X,P) *es un espacio de Banach ordenado. Se define* $f : P \longrightarrow P$ *dado por* $(f\psi)(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} \cdot \frac{1}{1+\psi(x)} dy$ *para todo* ψ *en* P*, donde*

(I) $R(x,y)$ *es continua en* $0 \leq x,\ y \leq 1$. *Si* $x \geq y$*, entonces,* $R(x,y) \geq 0$. *Además, si* $x < y$ *entonces* $R(x,y) \leq 0$.

(II) *Existe* $v > 0$ *tal que*
$\mid R(x,y) \mid \leq M \mid x-y \mid^v S(x,y)$*, con* $0 \leq x,y \leq 1$,
donde $M > 0$ *es una constante, S(x,y) es no negativa, acotada con* $0 \leq x,y \leq 1$ *y* $\displaystyle\lim_{x,y \to 0^+} \frac{S(x,y)}{x+y} < \infty$.

Se afirma que f *es decreciente y* (H_1).

Sean h,g *en* P *tales que* $h \leq g$*, entonces* $0 \leq h(x) \leq g(x)$.

Así,

$$\frac{1}{1+h(x)} \leq \frac{1}{1+h(x)}$$

lo que implica

$$\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} \cdot \frac{1}{1+g(x)} dy \leq \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} \cdot \frac{1}{1+h(x)} dy.$$

Se sigue que f *es decreciente. Ahora veamos que* $f^2(\theta) \geq \epsilon f(\theta)$*, donde* $\epsilon = \left\{1 + \displaystyle\max_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} dy\right\}^{-1}$ *y* $\theta(x) = 0$ *para todo* $x \in [0,1]$. *Como*

$$(f\theta)(x) = \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} \cdot \frac{1}{1+\theta(x)} dy = \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} dy \leq \max_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} dy = \epsilon^{-1} - 1 = \epsilon^*(x)$$

y f *es decreciente, entonces*

$$\begin{aligned} f^2(\theta)(x) = f(f(\theta)) &= \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} \cdot \frac{1}{1+(f\theta)(x)} dy \geq \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} \cdot \frac{1}{1+\epsilon^*(x)} dy \\ &= \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} \epsilon dy = \epsilon \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} dy = \epsilon (f\theta)(x). \end{aligned}$$

Lo cual prueba que $f^2(\theta) \geq \epsilon f(\theta)$.

Ahora, para cualquier $\psi \in P$ *y* $0 < t < 1$ *tenemos*

$$f(t\psi(x)) = \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} \cdot \frac{1}{1+t\psi(x)} dy = \frac{1}{t} \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} \cdot \frac{1}{t^{-1}+\psi(x)} dy.$$

Se define

$$1+\eta := \min_{0<y\leq 1} \frac{t^{-1}+\psi(y)}{1+\psi(y)}.$$

Como $\eta = \eta(\psi, t) > 0$, *entonces tenemos que*

$$\begin{aligned} f(t\psi(x)) &\leq \frac{1}{t(1+\eta)} \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2} \cdot \frac{1}{1+\psi(x)} dy \\ &= [t(1+\eta)]^{-1} (f\psi)(x), \ \text{con } 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, f *es* (H_1) *y decreciente.*

Lema 4.3.1. *Sean* $f : P \longrightarrow P$ *un operador decreciente y* $\epsilon > 0$ *tales que* $\epsilon f(\theta) \leq f^2(\theta)$. *Sea* μ *en* P, *si* $f^2(\mu) = \mu$, *entonces* $\epsilon f(\theta) \leq \mu \leq f(\theta)$.

Demostración. Sea μ en P, entonces $\mu \geq \theta$ y como $f : P \longrightarrow P$ es un operador decreciente, se tiene que $\theta \leq f(\mu) \leq f(\theta)$.

Aplicando nuevamente que f es decreciente se obtiene que $f^2(\theta) \leq f^2(\mu) \leq f(\theta)$, pero $\mu = f^2(\mu)$. Así, $f^2(\theta) \leq \mu \leq f(\theta)$ y como f cumple que $\epsilon f(\theta) \leq f^2(\theta)$, entonces $\epsilon f(\theta) \leq \mu \leq f(\theta)$. ■

Lema 4.3.2. *Sea* $f : P \longrightarrow P$ *un operador decreciente que satisface la condición* (H_1). *Si* $\mu, v \in P$ *con* $f(\mu) = v$ *y* $f(v) = \mu$, *entonces* $\mu = v$.

Demostración. Como f es (H_1), se tiene que $\epsilon f(\theta) \leq f^2(\theta)$ y además f es decreciente. Por otro lado $f^2(\mu) = f(v) = \mu$ y $f^2(v) = f(\mu) = v$, por el Lema 4.3.1 se tiene que

$$\epsilon f(\theta) \leq \mu \leq f(\theta) \quad y \quad \epsilon f(\theta) \leq v \leq f(\theta).$$

Por lo tanto, $\mu \geq \epsilon v$ y $v \geq \epsilon \mu$.

Definamos $A := \{t > 0 : \ \mu \geq tv\}$, A es distinto del vacío pues ϵ pertenece al conjunto.

Si A no es acotado superiormente, en particular 1 no es cota superior de A, es decir, existe $t > 1$ tal que que $\mu \geq tv$ y $tv \geq v$, entonces $\mu \geq v$.

Si A es acotado superiormente. Como A es no vacío, por el axioma del supremo existe $t_0 := sup\{t > 0 : \; \mu \geq tv\}$, con $\epsilon \leq t_0 < \infty$.

Se afirma que $t_0 \geq 1$.

Supóngase que $t_0 < 1$, entonces $\epsilon \leq t_0 < 1$ y como f es $(H_1,)$ existe $\eta > 0$ tal que

$$f(t_0 v) \leq [t_0(1+\eta)]^{-1} f(v) = [t_0(1+\eta)]^{-1} \mu. \tag{4.35}$$

Por otra parte, para $\mu \geq t_0 v$, se tiene que

$$v = f(\mu) \leq f(t_0 v). \tag{4.36}$$

En consecuencia de las desigualdades (4.35) y (4.36), se obtiene que $v \leq [t_0(1+\eta)]^{-1} \mu$ o equivalentemente $\mu \geq t_0(1+\eta)v$, lo cual contradice la definición de t_0. Por lo tanto, $t_0 \geq 1$, es decir, $\mu \geq v$. De forma similar se puede definir $B := \{t > 0 : \; v \geq t\mu\}$ y probar que B no es acotado o que si $t_1 = supB$, entonces se tiene $t_1 \geq 1$, es decir, $v \geq \mu$. De esta manera se obtiene que $\mu = v$. ■

El siguiente resultado asegura que si f es (H_1) y decreciente, entonces f tiene a lo más un punto fijo, es decir, si f tiene un punto fijo x^*, entonces x^* es el único punto fijo.

Lema 4.3.3. *Sea $f : P \longrightarrow P$ un operador decreciente que satisface la condición (H_1). Si $\mu, v \in P$ con $f(\mu) = \mu$ y $f(v) = v$, entonces $\mu = v$.*

Demostración. Como f es H_1, se tiene que $\epsilon f(\theta) \leq f^2(\theta)$ y además f es decreciente. Por otro lado $f^2(\mu) = f(\mu) = \mu$ y $f^2(v) = f(v) = v$, por el Lema 4.3.1 se tiene que

$$\epsilon f(\theta) \leq \mu \leq f(\theta) \quad y \quad \epsilon f(\theta) \leq v \leq f(\theta).$$

Por lo tanto, $\mu \geq \epsilon v$ y $v \geq \epsilon\mu$.

Definamos $A := \{t > 0 : \; \mu \geq tv, \;\; v \geq t\mu\}$, A es distinto del vacío pues ϵ pertenece al conjunto.

Si A no es acotado superiormente, en particular 1 no es cota superior de A, es decir, existe $t > 1$ tal que que $\mu \geq tv$ y $v \geq t\mu$, pero $tv \geq v$ y $t\mu \geq \mu$, entonces $\mu \geq v$ y $v \geq \mu$. Por lo tanto, $v = \mu$.

Si A es acotado superiormente. Como A es no vacío, por axioma del supremo existe $t^* := supA$, con $\epsilon \leq t_0 < \infty$.

Se afirma que $t^* \geq 1$.

Supóngase que $t^* < 1$, entonces $\epsilon \leq t^* < 1$, $\mu \geq t^* v$ y $v \geq t^* \mu$. Además, como f es H_1, entonces existen $\eta_1 > 0$ y $\eta_2 > 0$ tales que

$$f(t^* v) \leq [t^*(1+\eta_1)]^{-1} f(v) = [t^*(1+\eta_1)]^{-1} v. \tag{4.37}$$

$$f(t^* \mu) \leq [t^*(1+\eta_2)]^{-1} f(\mu) = [t^*(1+\eta_2)]^{-1} \mu. \tag{4.38}$$

Por otro lado, se tiene que $v \geq t^* \mu$ y $\mu \geq t^* v$. Como f es decreciente, entonces

$$v = f(v) \leq f(t^* \mu) \quad y \quad \mu = f(\mu) \leq f(t^* v). \tag{4.39}$$

Luego, de las desigualdades (4.37), (4.38) y (4.39), se obtiene que $v \leq [t^*(1+\eta_2)]^{-1} \mu \quad y \quad \mu \leq [t^*(1+\eta_1)]^{-1} v$ o equivalentemente $\mu \geq t^*(1+\eta_2)v,\ v \geq t^*(1+\eta_1)\mu$.

Sea $\eta := \text{mín}\{\eta_1,\ \eta_2\} > 0$, entonces $\mu \geq t^*(1+\eta)v,\ v \geq t^*(1+\eta)\mu$, lo cual contradice la definición de t^*. Así, $t^* \geq 1$ lo que implica que $\mu \geq v$ y $v \geq \mu$.

De esta manera se obtiene que $\mu = v$. ■

El siguiente lema nos ayudará a demostrar que se tiene una convergencia global a un punto fijo, si existe alguno.

Lema 4.3.4. *Sea $f : P \longrightarrow P$ un operador decreciente. Sea $\{\mu_n\}$ la sucesión de iterados de Picard de $\mu_0 = \theta$, entonces $\theta = \mu_0 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_{2n} \leq ... \leq \mu_{2n+1} \leq ... \leq \mu_3 \leq \mu_1 = f(\theta)$.*

Demostración. Primero, se probará que $\mu_{2n} \leq \mu_{2n+2}$ para todo n en $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Como $\mu_2 \in P$, entonces $\mu_0 = \theta \leq \mu_2$. Así, $\mu_{2n} \leq \mu_{2n+2}$ para $n = 0$.

Supongamos que $\mu_{2n} \leq \mu_{2n+2}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $\mu_{2n+2} \leq \mu_{2n+4}$.

Como $\mu_{2n} \leq \mu_{2n+2}$ implica que $\mu_{2n+3} = f(\mu_{2n+2}) \leq f(\mu_{2n}) = \mu_{2n+1}$.

Así, $\mu_{2n+2} = f(\mu_{2n+1}) \leq f(\mu_{2n+3}) = \mu_{2n+4}$, es decir, $\mu_{2n+2} \leq \mu_{2n+4}$.

Por lo tanto, para todo n en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple que $\mu_{2n} \leq \mu_{2n+2}$, al aplicar que f es decreciente se obtiene que $\mu_{2n+3} \leq \mu_{2n+1}$ para todo n en $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Se afirma que $\mu_{2n} \leq \mu_{2n+1}$.

En efecto, para $n = 0$ se cumple que $\mu_0 = \theta \leq \mu_1$.

Supongamos que $\mu_{2n} \leq \mu_{2n+1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y veamos que $\mu_{2n+2} \leq \mu_{2n+3}$.

Como $\mu_{2n} \leq \mu_{2n+1}$ implica $\mu_{2n+2} = f(\mu_{2n+1}) \leq f(\mu_{2n+2}) = \mu_{2n+3}$.

Por último, como $\mu_{2n} \leq \mu_{2n+1}$ implica que para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \leq \mu_m$.

Por lo tanto, se cumple la ecuación:

$\theta = \mu_0 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_{2n} \leq ... \leq \mu_{2n+1} \leq ... \leq \mu_3 \leq \mu_1 = f(\theta)$. ■

Lema 4.3.5. *Sea $f : P \longrightarrow P$ un operador decreciente, donde P un cono normal y $\{\mu_n\}$ la sucesión de iterados de Picard de $\mu_0 = \theta$.*

Si $\{\mu_n\}$ converge a algún $x^* \in P$, entonces para todo $x_0 \in P$ la sucesión $\{x_n\}$ de iterados de Picard de x_0 converge a x^*.

Demostración. Probaremos por inducción que $\mu_{2n} \leq x_{2n+1} \leq \mu_{2n+1}$.

Como $\theta \leq x_0$, entonces, $\theta \leq f(x_0) \leq f(\mu_0)$. Además, $\mu_0 = \theta,\ x_1 = f(x_0)$ y $\mu_1 = f(\mu_0)$, entonces $\mu_0 \leq x_1 \leq \mu_1$.

Luego supongamos que

$$\mu_{2k} \leq x_{2k+1} \leq \mu_{2k+1}, \tag{4.40}$$

lo que implica

$$\mu_{2k+2} \leq x_{2k+2} \leq \mu_{2k+1}. \tag{4.41}$$

Aplicando que $\{\mu_{2n}\}$, $\{\mu_{2n+1}\}$ convergen a x^* y como P es normal, de las desigualdades (4.40) y (4.41) y por Teorema 3.3.5 se obtiene que x_{2n} converge a x^* y x_{2n+1} converge a x^*. Por lo tanto, x_n converge a x^*. ■

Definición 4.3.3. *Sean X, Y dos espacios normados. Un operador $F : X \longrightarrow Y$ se llama* ***operador compacto*** *si $F(X)$ es relativamente compacta en Y.*

Teorema 4.3.1. *Sea $f : P \longrightarrow P$ un operador decreciente que satisface la condición (H_1). Si satisface alguna de las siguientes dos condiciones:*

(a) P es normal y f es compacto,

(b) P es regular y f es continua.

Entonces f tiene un único punto fijo x^* en P y para todo $x_0 \in P$,

$$\| x_n - x^* \| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty, \tag{4.42}$$

donde

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.43}$$

Demostración. Sean $\mu_0 = \theta$ y $\mu_n = f(\mu_{n-1})$ para $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 4.3.4, se obtiene que

$$\theta = \mu_0 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_{2n} \leq ... \leq \mu_{2n+1} \leq ... \leq \mu_3 \leq \mu_1 = f(\theta).$$

Si se satisface la condición (a), entonces P es normal y por el Lema 4.3.4 se sigue que el conjunto $S = \{\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n, ...\}$ es acotado. Ya que f es compacto, por el Teorema 3.3.7 la sucesión $\{\mu_{2n}\}$ tiene una subsucesión $\{\mu_{2n_i}\}$ convergente a algún μ_* en X.
Luego, para $i, n \in \mathbb{N}$, si $n > n_i$, entonces $\mu_{2n_i} \leq \mu_{2n}$ lo que equivale $-\mu_{2n} \leq -\mu_{2n_i}$.
Así, $\theta \leq \mu_* - \mu_{2n} \leq \mu_* - \mu_{2n_i}$. Dado que P es normal existe $M > 0$, tal que
$\|\mu_* - \mu_{2n}\| \leq M\|\mu_* - \mu_{2n_i}\|$ y como $\{\mu_{2n_i}\}$ converge a μ_*, entonces la sucesión $\{\mu_{2n}\}$ converge a μ_*. Similarmente se prueba que $\{\mu_{2n+1}\}$ converge a algún μ^* en X.
Nótese que $\mu_{2n} \leq \mu_{2n+1}$, implica que para todo $m, n \in \mathbb{N},$ se tiene $\mu_{2n} \leq \mu_{2m+1}$.
Así,

$$\mu_{2n} \leq \mu_* \leq \mu^* \leq \mu_{2n+1}. \tag{4.44}$$

Además,

$$f(\mu_*) = f\left(\lim_{n\to\infty}(\mu_{2n})\right) = \lim_{n\to\infty} f(\mu_{2n}) = \lim_{n\to\infty}(\mu_{2n+1}) = \mu^*$$

y

$$f(\mu^*) = f\left(\lim_{n\to\infty}(\mu_{2n+1})\right) = \lim_{n\to\infty} f(\mu_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty}(\mu_{2n+2}) = \lim_{n\to\infty}(\mu_{2n}) = \mu_*.$$

Lo cual implica $f(\mu_*) = \mu^*$ y $f(\mu^*) = \mu_*$. Por el Lema 4.3.2, se tiene que $\mu^* = \mu_*$. Defínase $x^* = \mu^* = \mu_*$, entonces $f(x^*) = x^*$ y por Lema 4.3.3, x^* es el único punto fijo de f en P. Sean $x_0 \in P$ y $\{x_n\}$ su respectiva sucesión iterativa de Picard. Por Lema 4.3.5, $\{x_n\}$ converge a x^*. ■

Teorema 4.3.2. *Sea $f : P \longrightarrow P$ un operador decreciente que satisface la condición (H_2). Si P es normal, entonces f tiene un único punto fijo $x^* \in P$ y para todo $x_0 \in P$ se cumple que*

$$\| x_n - x^* \| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

donde la sucesión $\{x_n\}$ está definida por $x_n = f(x_{n-1})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Caso 1.

Si $f(\theta) = \theta$, como todo $x \in P$ cumple $\theta \leq x$ y dado que f es creciente, entonces $\theta \leq f(x) \leq f(\theta) = \theta$. En consecuencia $f(x) = \theta$.

En este caso, f tiene un único punto fijo $x^* = \theta \in P$ y como $x_n = f^n(\theta) = \theta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\| x_n - x^* \| = \| \theta - \theta \| = 0 \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Caso 2.

Si $f(\theta) > \theta$. Definimos $\mu_0 = \theta$ y $\mu_n = f(\mu_{n-1})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como f cumple (H_2), existe $0 < \epsilon < 1$ tal que $\mu_2 = f^2(\theta) \geq \epsilon f(\theta) = \theta\mu_1$

y por hipótesis $\mu_1 = f(\theta) > \theta = \mu_0$.

Luego, $\mu_2 \geq \epsilon\mu_1 > \mu_0$, entonces,

$$\mu_2 \geq \epsilon\mu_1 > \theta = \mu_0. \tag{4.45}$$

Po el Lema 4.3.4, tenemos que $\mu_{2n+1} \leq \mu_1$ y $\mu_2 \leq \mu_{2n}$, es decir,

$$\mu_{2n+1} \geq \mu_{2n} > \theta \quad y \quad \mu_{2n} \geq \epsilon\mu_{2n+1}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{4.46}$$

Sea $t_n = sup\{t > 0 : \mu_{2n} \leq t\mu_{2n+1}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Del Lema 4.3.4 y las desigualdades en (4.46), resulta que

$$\epsilon \leq t_1 \leq t_2 ... \leq t_n \leq ... \leq 1 \tag{4.47}$$

y

$$\mu_{2n} \geq t_n\mu_{2n+1}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{4.48}$$

Así, tenemos que

$$\epsilon \leq \lim_{n\to\infty} t_n = t^* \leq 1.$$

Veamos que

$$t^* = 1$$

Supongamos $t^* < 1$, por la condición (H_2), existen $\eta > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$\epsilon f(\theta) \leq x \leq f(\theta) \text{ y } \quad t^* - \delta \leq t \leq t^*, \text{ entonces } f(tx) \leq [t(1+\eta)]^{-1} f(x). \tag{4.49}$$

Elegimos un entero positivo m, tal que $t^* - \delta \leq t_n \leq t^*$, si $n \geq m$. Entonces, del Lema 4.3.4 y las desigualdades (4.3) y de (4.49), resulta que

$$f(t_n u_{2n+1}) \leq [t_n(1+\eta)]^{-1} f(u_{2n+1}) = [t_n(1+\eta)]^{-1} u_{2n+2}, \text{ si } \ n \geq m. \tag{4.50}$$

La expresión (4.50) y la desigualdad (4.48) implican que

$$\mu_{2n+3} \leq \mu_{2n+1} = f(\mu_{2n)} \leq f(t_n\mu_{2n+1}) \leq [t_n(1+\eta)]^{-1}\mu_{2n+2}, \text{ si } n \geq m,$$

esto es,

$$\mu_{2n+2} \geq t_n(1+\eta)\mu_{2n+3}, \text{ si } n \geq m.$$

Entonces,

$$t_{n+1} \geq t_n(1+\eta), \text{ si } n \geq m.$$

Por lo tanto,

$$t_{m+n} \geq t_m(1+\eta)^n \geq \epsilon(1+\eta)^n \longrightarrow \infty, \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Lo cual contradice las desigualdades de (4.47). Por lo tanto, $t^* = 1$. Por otra parte del Lema 4.3.4 y la desigualdad (4.48) resulta que

$$\theta \leq \mu_{2n+2p} - \mu_{2n} \leq \mu_{2n+1} - \mu_{2n} \leq (1-t_n)\mu_{2n+1} \leq (1-t_n)\mu_1, \quad n, p \in \mathbb{N}. \tag{4.51}$$

Del hecho $t^* = 1$, la normalidad de P y de (4.51) se tiene que μ_{2n} es una sucesión de Cauchy en X y así $\mu_{2n} \longrightarrow \mu_* \in X$. De manera similar, se demuestra que $\mu_{2n+1} \longrightarrow \mu^* \in X$. Como $\mu_{2n} \leq \mu_* \leq \mu^* \leq \mu_{2n+1}$ implica que

$$\mu_{2n+2} = f(\mu_{2n+1}) \leq f(\mu^*) \leq f(\mu_*) \leq f(\mu_{2n}) = \mu_{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cuando $n \longrightarrow \infty$, tenemos

$$\mu_* \leq f(\mu^*) \leq f(\mu_*) \leq \mu^*. \tag{4.52}$$

Por otro lado, de (4.44) y (4.51) se deduce que

$$\theta \leq \mu^* - \mu_* \leq \mu_{2n+1} - \mu_{2n} \leq (1-t_n)\mu_1 \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, por la normalidad de P y como $t^* = 1$, se obtiene que $\mu_* = \mu^*$. Además, por (4.52) tenemos que $\mu_* = f(\mu^*) = f(\mu_*) = \mu^*$. Sea $x^* = \mu_* = \mu^*$. Entonces $f(x^*) = x^*$. Ya que (H_2) implica (H_1), por el Lema 4.36, x^* es el único punto fijo de f en P. Se ha probado que la sucesión de iterados del Picard de θ converge a x^*, entonces por el Lema 4.3.5 se tiene que para todo $x_0 \in P$ la sucesión $\{x_n\}$ de iterados de Picard de x_0 converge a x^*. ∎

Teorema 4.3.3. *Sea $f : P \longrightarrow P$ un operador decreciente que satisface la condición (H_3). Si P es normal, entonces f tiene un único punto fijo $x^* \in P$ y para todo $x_0 \in P$ se cumple que*

$$\| x_n - x^* \| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

donde la sucesión $\{x_n\}$ está definida por

$$x_n = f(x_{n-1}) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Además, se tiene la siguiente estimación de velocidad de convergencia:

$$\| x_{2n+1} - x^* \| \leq 2N^2 \| f(\theta) \| (1 - \epsilon^{r^{n-1}}), \ n \in \mathbb{N}, \tag{4.53}$$

$$\| x_{2n+2} - x^* \| \leq 2N^2 \| f(\theta) \| (1 - \epsilon^{r^{n-1}}), \ n \in \mathbb{N}, \tag{4.54}$$

donde N es la constante normal de P.

Demostración.

La demostración de este teorema es análoga a la demostración del Teorema 4.3.2, excepto la demostración de $t^* = 1$.

Primero probamos por inducción que

$$t_n \geq \epsilon^{r^{n-1}}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.55}$$

Para $n = 1$.

$$\epsilon^{r^{n-1}} = \epsilon^{r^{1-1}} = \epsilon^{r^0} = \epsilon^1 = \epsilon. \tag{4.56}$$

De (4.47) se tiene que $\epsilon \leq t_1$.

Por lo cual, $t_n \geq \epsilon^{r^{n-1}}$ para $n = 1$.

Supongamos que $t_k \geq \epsilon^{r^{k-1}}$, para algún $k \in \mathbb{N}$, pero $t_k \leq 1$ y $\epsilon^{r^{k-1}} \geq \epsilon$. Entonces, $\epsilon \leq \epsilon^{r^{k-1}} < 1$, además, por la desigualdad (4.48) y la condición (H_3) se tiene que

$$\mu_{2k+1} = f(\mu_{2k}) \leq f(t_k \mu_{2k+1}) \leq f(\epsilon^{r^{k-1}} \mu_{2k+1}) \leq (\epsilon^{r^{k-1}})^{-r} f(\mu_{2k+1}) = \epsilon^{-r^k} \mu_{2k+2}.$$

Entonces,

$$\mu_{2k+2} \geq \epsilon^{r^k} \mu_{2k+1} \geq \epsilon^{r^k} \mu_{2k+3}.$$

Así, tenemos que $t_{k+1} \geq \epsilon^{r^k}$. Por lo cual $t_n \geq \epsilon^{r^{n-1}}$ y $t_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\epsilon^{r^{n-1}} \longrightarrow 1$, cuando $n \longrightarrow \infty$, se sigue que $t^* = 1$.

Finalmente, probaremos (4.53) y (4.54). De (4.44) y de la desigualdad $\mu_{2n} \leq x_{2n+1} \leq \mu_{2n+1}$, tenemos que

$$\| x_{2n+1} - x^* \| \leq \| x_{2n+1} - \mu_{2n} \| + \| \mu_{2n} - x^* \| \leq 2N \| \mu_{2n+1} - \mu_{2n} \| . \tag{4.57}$$

Por otro lado, de (4.51) y (4.55), se sigue que

$$\theta \leq \mu_{2n+1} - \mu_{2n} \leq (1 - \epsilon^{r^{n-1}}) f(\theta).$$

Entonces,

$$\| \mu_{2n+1} - \mu_{2n} \| \leq N \| f(\theta) \| (1 - \epsilon^{r^{n-1}}). \tag{4.58}$$

Observe que (4.57) y (4.58) implica (4.53). De manera similar, reemplazando (4.40) con (4.41), se demuestra (4.54). ■

Observación 17. *En el Teorema 4.3.2 y el Teorema 4.3.3 no requerimos la compacidad y la continuidad del operador f, pero las condiciones (H_2) y (H_3) son más fuertes que la condición (H_1).*

4.4. Aplicaciones en Operadores Decrecientes

Considere la ecuación integral no lineal:

$$1 = \Psi(x) + \Psi(x) \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2 - y^2} \Psi(x) dy, \tag{4.59}$$

con $0 \leq x \leq 1$, que proviene de la física nuclear, donde $\Psi(x)$ denota alguna probabilidad, $0 < \Psi(x) \leq 1$. Asumimos lo siguiente:

(I) $R(x,y)$ es continua en $0 \leq x$ y $y \leq 1$. Si $x \geq y$, entonces, $R(x,y) \geq 0$. Además, si $x < y$ entonces $R(x,y) \leq 0$.

(II) Existe $v > 0$ tal que

$\mid R(x,y) \mid \leq M \mid x - y \mid^v S(x,y)$, con $0 \leq x, y \leq 1$,

donde $M > 0$ es una constante, S(x,y) es no negativa, acotada con $0 \leq x, y \leq 1$ y $\lim\limits_{x,y \to 0^+} \dfrac{S(x,y)}{x+y} < \infty$.

Conclusión. La ecuación integral (4.59) tiene una única solución continua positiva $\Psi^*(x)$, y $0 < \Psi^*(x) \leq 1$. Además, para cualquier función continua $\Psi_0(x)$ definida en $[0,1]$ con $0 < \Psi_0(x) \leq 1$, se cumple que

$$\left\|\Psi_n - \Psi*\right\|_c \to 0, \text{cuando } n \to \infty, \tag{4.60}$$

donde

$$\Psi_n(x) = \left[1 + \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2 - y^2} \Psi_{n-1}(y) dy\right]. \tag{4.61}$$

Demostración. Haciendo la siguiente sustitución

$$\psi(x) = \frac{1}{\Psi(x)} - 1. \tag{4.62}$$

La ecuación (4.59) se convierte en

$$\psi(x) = \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2 - y^2} \cdot \frac{1}{1 + \psi(x)} dy. \tag{4.63}$$

Además, como $0 < \Psi(x) \leq 1$, resulta que $\psi(x) \geq 0$.

Sean $X = C[0,1]$ y $P = \{\psi \in C[0,1] : \psi(x) \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1\}$. Por el ejemplo 3.3.4, se tiene que P es un cono normal. Considere un operador definido por

$$(f\psi)(x) := \int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2 - y^2} \cdot \frac{1}{1 + \psi(x)} dy, \text{ para todo } \psi \text{ en } P.$$

Por el Ejemplo 4.3.2, se tiene que el operador $f : P \longrightarrow P$ es decreciente, H_1 y completamente continuo. Por el Teorema 4.3.1, la ecuación (4.63) tiene una solución única ψ^* en P. Además, para cualquier $\psi_0 \in P$ la sucesión de iterados

$$\psi_n = f(\psi_{n-1}), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \tag{4.64}$$

converge a ψ^*, es decir, $\|\psi_n - \psi*\|_c \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Por lo tanto, a partir de la sustitución (4.62), la ecuación (4.59) tiene una única solución continua positiva $\Psi^*(x)$ y $0 \leq \Psi^*(x) \leq 1$, donde

$$\Psi^*(x) = \frac{1}{1 + \psi^*(x)'}, \text{ con } 0 \leq x \leq 1 \tag{4.65}$$

para cualquier $\Psi_0 \in C[0,1]$ y $0 < \Psi_0(x) \leq 1$, tomando

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\Psi_0(x)} - 1.$$

Luego $\psi_0 \in P$. Por inducción, se demuestra que

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{1 + \psi_n(x)}\ , \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,, \tag{4.66}$$

donde $\{\psi_n\}$ y $\{\Psi_n\}$ son sucesiones definidas por (4.64) y (4.61), respectivamente. De convergencia de ψ_n a ψ^* y las ecuaciones (4.65) (4.66), se deduce (4.60). ■

Bibliografía

[1] Agarwal Ravi P., Meehan Maria y O'Regan Donal, *Fixed point theory and applications*, volumen 141. Cambridge University Press. First Edition. 2001.

[2] Agarwal Ravi P., O'Regan Donal y Sahu DR., *Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications,*, volumen 6. Springer.. 2009.

[3] Escamilla R. A., Mendoza T. J., Raggi C. M. G., *Introducción a la Teoría de Espacios Métricos.* Textos Científicos. Primera Edición. 2010.

[4] Guo D., Yeol J. C. y Jiang Z., *Partial Ordering Methods in Nonlinear Problems.* Science Plublishers Inc. 2004.

[5] Jeribi A. Krichen B., *Nonlinear Functional Analysis in Banach Spaces and Banach Algebras: Fixed Point Theory Under Weak Topology for Nonlinear Operators and Block Operator Matrices with Applications,* volumen 12. CRC Press. 2005.

[6] Rhoades Billy E. *A comparison of various definitions of contractive mappings* volumen 226. Transactions of the American Mathematical Society.1977.

[7] Shapiro Joel H., *A fixed point Farrago.* Springer. 2016 .

[8] Tarski Alfred, *A lattice theoretical fixpoint theorem and its applications,* volumen 5. Pacific journal of Mathematics. 1955.

[9] VANDANA GARG CHETAN, *A brief study of fixed point theorem.* Applied Sciences Department. 2017.

[10] VÁZQUEZ MARTÍNEZ ANEL, *Teorema del Punto Fijo en Espacios de Bananch Ordenados y Aplicaciones* (Tesis de Maestría). FCFM-BUAP. 2018.

[11] ZEIDLER EBERHARD, *Nonlinear Funcional Analysis and its Applications, Fixed-Point Theorem.* Springer-Verlag New York. 1986.