

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

DINÁMICA POLINOMIAL ALTERNADA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
EDUARDO MONTIEL ORTEGA

DIRECTORES DE TESIS
J. FRANCISCO ESTRADA GARCÍA

PUEBLA, PUE.

ENERO 2018

Dedicatoria

A Lúlu, de quien soy un prisionero de sus ojos. Y a Alex quien una vez más es luz estelar, susurro en el viento.

Agradecimientos

A Lúlu y a Alex que me permiten encontrar la dicha en cada hoja de cada árbol. A mis padres y mis hermanos de quienes siempre he recibido más que un apoyo. A mis amigos que siempre estuvieron ahí. Al Maestro J. Francisco Estrada por todas las ideas que me ha compartido y quien ejemplifica.

Si puedes mirar, ve. Si puedes ver, repara.

Libro de los consejos.

Al CONACYT por el apoyo económico brindado para mis estudios de maestría. Y al CONCYTEP quien me ha otorgado una beca para la realización de la tesis.

Introducción

Dados dos polinomios cuadráticos complejos $p_{c_1} = z^2 + c_1$ y $p_{c_2} = z^2 + c_2$ y los polinomios alternados asociados p_{c_1, c_2} y p_{c_2, c_1} , nos preguntamos si las propiedades topológicas de los conjuntos de Julia J_{c_1} y J_{c_2} son preservadas por los conjuntos de Julia J_{c_1, c_2} y J_{c_2, c_1} . En este trabajo presentamos ejemplos para los cuales la pregunta tiene respuesta afirmativa. También, presentamos ejemplos para los cuales la respuesta es negativa. Esto da información sobre la relación que existe entre el conjunto de Mandelbrot y el espacio de parámetros de la familia alternada.

La familia de polinomios cuadráticos complejos cuyos elementos tienen la forma

$$p_c(z) = z^2 + c$$

es un modelo dinámico muy rico y representativo.

Dado un polinomio cuadrático p_c consideramos el conjunto de Julia asociado J_c , el cual tiene sólo dos posibilidades es conexo o bien es totalmente desconexo, de hecho en el último caso es homeomorfo a un conjunto de Cantor. El conjunto de parámetros que hacen al conjunto de Julia conexo se denomina conjunto de Mandelbrot. La dicotomía antes presentada depende de si la órbita del punto crítico es acotada o no, esta órbita recibe el nombre de órbita crítica y puede ocurrir que conste de un número finito de elementos, cuando esto ocurre el conjunto de Julia coincide con el conjunto de puntos en el plano cuya órbita es acotada, a este conjunto le llamamos Julia lleno. A los parámetros para los cuales la órbita crítica tiene cardinalidad finita se les llama parámetros de Misiurewicz y tienen la propiedad de ser densos en la frontera del conjunto de Mandelbrot.

Doaudy y Hubbard en [27] demostraron utilizando el teorema de la transformación de Riemann que el conjunto de Mandelbrot es conexo. Existe la

conjetura de que el conjunto de Mandelbrot es también localmente conexo, la importancia de la conjetura es que de probarse (también por un resultado de Douady y Hubbard) como consecuencia se tendría que las componentes hiperbólicas del Mandelbrot son densas en él. Decimos que p_c es hiperbólico si tiene un ciclo atractor, podemos definir las componentes hiperbólicas de periodo n del Mandelbrot como el conjunto de parámetros tal que el ciclo atractor de p_c es de orden n .

Para la dinámica racional y trascendente entera existen otros tipos de dinámica como por ejemplo, la parabólica, los Discos de Siegel y los anillos de Herman, para el caso polinomial y trascendente entera los anillos de Herman no pueden ocurrir. La clasificación antes mencionada es posible por el teorema de Sullivan sobre la inexistencia de dominios errantes. En el caso polinomial cuadrático el tipo de dinámica es excluyente.

Para el estudio de la conexidad local en los conjuntos de Julia una vez más Douady y Hubbard introdujeron el concepto de rayo externo, este concepto puede ser aplicado también al conjunto de Mandelbrot. Dos teoremas bases para este tema son el teorema del mapeo de Riemman y el teorema de Carathéodory.

En nuestro trabajo consideramos la familia de polinomios cuárticos de la forma

$$p_{c_1, c_2}(z) = (z^2 + c_1)^2 + c_2.$$

Cuando ambos parámetros son iguales obtenemos las iteraciones pares de un polinomio cuadrático. Un primer interés en la familia cuártica es que dado un polinomio cuadrático p_{c_1} podemos escoger un polinomio en la familia cuártica $p_{c_1, c_1+\epsilon}$ con ϵ suficientemente pequeño y observar qué propiedades topológicas se preservan. En particular tenemos interés en determinar cuando el tipo de dinámica cuadrática se preserva al caso alternado asociado. Para el caso alternado, el tipo de dinámica ya no es excluyente, lo cual enriquece la problemática de estudio.

Índice general

Introducción	I
Lista de símbolos	III
1. Preliminares	1
1.1. Algunos resultados útiles	1
1.1.1. Funciones holomorfas y conformes	1
1.1.2. Familias normales	6
1.1.3. Teorema de la representación conforme	8
1.2. Variedades y superficies de Riemann	11
1.2.1. Variedades y grupo fundamental	11
1.2.2. Cubrientes	18
1.2.3. Superficies de Riemann	22
1.3. Dinámica polinomial	26
1.3.1. Sistemas dinámicos discretos y conjugación	26
1.3.2. El conjunto de puntos que escapan y el conjunto de Julia lleno	28
1.3.3. Propiedades básicas del conjunto de Julia lleno	32
1.3.4. Comportamiento dinámico cerca de un punto fijo	35
1.3.5. Algunos otros resultados sobre los conjuntos de Julia y Fatou	47
1.3.6. Conjuntos de Julia localmente conexos	49
1.4. Polinomios y rayos externos	54
1.5. Polinomios cuadráticos	58
1.6. Multibrot sets	67
1.7. Árboles de Hubbard	69

2. El caso alternado	75
2.1. Primeros resultados	75
2.2. No invarianza de la conexidad	79
2.2.1. El caso conexo	80
2.2.2. El caso totalmente desconexo	82
2.3. El conejo gordo y el conejo flaco	84
2.3.1. Conejo flaco	86
2.3.2. Conejo gordo	86
2.3.3. Estudio de \mathbb{T}/\sim_{c_1} y \mathbb{T}/\sim_{c_2}	87
2.3.4. Comportamiento dinámico de los polinomios alternados	94
2.3.5. Estudio de los conjuntos $\mathbb{T}/\sim_{c_1,c_2}$ y $\mathbb{T}/\sim_{c_2,c_1}$	98
3. Conclusiones	103
Bibliografía	105

Dinámica polinomial alternada

Eduardo Montiel Ortega

Enero 2018

Lista de símbolos

Utilizaremos las siguientes notaciones:

$$D(a, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\} \quad a \in \mathbb{C}, r > 0$$

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} = D(0, 1) \quad \text{disco unitario}$$

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \partial\Delta \quad \text{circulo unitario}$$

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad \text{esfera de Riemann}$$

$$\Delta^* := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} \cup \{\infty\} \quad \text{exterior del disco unitario}$$

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{im}(z) > 0\} \quad \text{semiplano superior}$$

$$f^m := f \circ \cdots \circ f \text{ (} m \text{ veces)} \quad m - \text{ésima iterada de } f$$

$$F_f \quad \text{conjunto de Fatou de } f$$

$$J_f \quad \text{conjunto de Julia de } f$$

$$K_f \quad \text{conjunto de Julia lleno de } f$$

$$\mathcal{M} \quad \text{conjunto de Mandelbrot}$$

$$\mathcal{R}(K_f, t) \quad \text{rayo externo de ángulo } t \text{ de } K_f$$

$\mathcal{R}(\mathcal{M}, t)$	rayo externo de ángulo t de \mathcal{M}
$A(z_0)$	cuenca de atracción de z_0
$A^*(z_0)$	cuenca inmediata de atracción de z_0
$p_c(z) := z^2 + c$	<i>Polinomio cuadrático</i>
I_p	conjunto de puntos que escapan para un polinomio
C_p	conjunto de puntos críticos de un polinomio p
F_c	conjunto de Fatou de $z^2 + c$
J_c	conjunto de Julia de $z^2 + c$
K_c	conjunto de Julia lleno de $z^2 + c$
$\mathcal{O}^+(z)$	órbita hacia adelante de z_0
$\mathcal{O}^-(z)$	órbita hacia atrás de z_0
$\mathcal{GO}^-(z)$	órbita grande de z_0
$^+(p)$	órbita hacia adelante de C_p
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$	números naturales

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Algunos resultados útiles

Una de las herramientas utilizadas para analizar la conexidad local de los conjuntos de Julia es la combinatoria topológica de los mismos conjuntos de Julia. Para poder entender esta herramienta es necesario el conocimiento y dominio del teorema del mapeo de Riemann (teorema de la representación conforme), el cual fue planteado en la tesis doctoral de Riemann.

1.1.1. Funciones holomorfas y conformes

En esta sección daremos una revisión de algunos resultados esenciales de las transformaciones holomorfas y conformes. Para una discusión mas completa acerca de estos temas se pueden consultar [1], [20], [21].

Definición 1.1.1. *Un subconjunto Ω de la esfera de Riemann (o del plano complejo) es un dominio si es abierto y conexo.*

Definición 1.1.2. *Por una curva γ en $\hat{\mathbb{C}}$ entendemos una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Si γ' existe y es continua diremos que la curva γ es diferenciable. Si además la derivada no se anula llamamos a γ regular.*

Definición 1.1.3. *Por un arco de Jordan (o curva simple) entendemos una curva γ en $\hat{\mathbb{C}}$ inyectiva, es decir, que no se autointersecta.*

Definición 1.1.4. Por una curva cerrada entendemos una curva γ en $\hat{\mathbb{C}}$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$. Si además la curva es simple entonces γ se dice curva de Jordan, es decir una curva que es homeomorfa a una circunferencia.

Por el teorema de la curva de Jordan, una curva de Jordan γ divide el plano en dos componentes una acotada y una no acotada que tienen por frontera común a γ . A la componente acotada le llamamos *dominio de Jordan*.

Definición 1.1.5. Dadas dos curvas diferenciables γ_1, γ_2 tal que $\gamma_1(t_1) = z_0 = \gamma_2(t_2)$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}, t_1, t_2 \in [0, 1]$, definimos el ángulo entre las curvas como el ángulo medido del vector velocidad de γ_1 en t_1 y el vector velocidad γ_2 en t_2 .

Observación 1.1.1. En los puntos donde la derivada de la curva es cero no tiene sentido hablar de ángulo.

Definición 1.1.6. Una función diferenciable (en el sentido real) de un dominio Ω a la esfera de Riemann $f : \Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ se dice conforme en $z_0 \in \Omega$, si para cualquier par de curvas diferenciables γ_1, γ_2 que se intersectan en z_0 el ángulo entre γ_1 y γ_2 en z_0 es igual al ángulo entre las curvas $f(\gamma_1)$ y $f(\gamma_2)$ en $f(z_0)$. Si el ángulo entre las curvas $f(\gamma_1)$ y $f(\gamma_2)$ en $f(z_0)$ es el negativo del ángulo entre las curvas γ_1 y γ_2 en z_0 entonces la función se dice anticonforme en z_0 . La transformación se dice conforme si es conforme para todo $z_0 \in \Omega$, se dice anticonforme si es anticonforme para todo $z_0 \in \Omega$.

Definición 1.1.7. Podemos escribir a f una función de un dominio Ω a la esfera de Riemann de la forma $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, definimos los operadores formales siguientes:

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \quad y$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

Donde f_x, f_y representan las derivadas parciales, del mismo modo que u_x, u_y, v_x y v_y .

Observación 1.1.2. Para una función f continuamente diferenciable (en el sentido real) en un dominio Ω se tiene:

f es holomorfa si y sólo si $f_{\bar{z}} \equiv 0$ en Ω ;

si $\text{Det}(J(f)) > 0, f_z \neq 0$ y $f_{\bar{z}} = 0$, entonces f es conforme;

si $\text{Det}(J(f)) < 0, f_{\bar{z}} \neq 0$ y $f_z = 0$, entonces f es anticonforme.

Donde $\text{Det}(A)$ denota el determinante de la matriz A y $J(f)$ el Jacobiano de f .

Dada una función f definida en una vecindad de infinito, decimos que f es holomorfa en ∞ (o que f tiene un polo de orden k en ∞ , o que f es conforme en ∞), si la función g definida en una vecindad del cero por

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

es holomorfa en 0 (o g tiene un polo de orden k en 0, o g es conforme en 0).

Ejemplo 1.1.1. La función $f(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$ o escrita en variable compleja $f(z) = z^2$ no es conforme en cualquier dominio que contenga al punto 0, pero es conforme en cualquier dominio que omita dicho punto, y es holomorfa en cualquier dominio.

La función $f(x, y) = x - iy$ o $f(z) = \bar{z}$ es anticonforme en cualquier dominio y no es holomorfa.

Para una función holomorfa f definida en un dominio Ω tenemos que f es conforme en $z_0 \in \Omega$ si y sólo si $f'(z_0) \neq 0$ es decir si y sólo si z_0 no es un punto crítico de f .

Siguiendo esta línea de ideas entre la relación entre conformidad y holomorfía, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1. Si $f \in \text{Hol}(\Omega)$ e inyectiva en un dominio $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ entonces f es conforme en Ω y f es un biholomorfismo entre Ω y $f(\Omega)$.

Ahora podemos hacernos la siguiente pregunta cuáles son las transformaciones conformes que transforman al plano en si mismo?, análogamente para la esfera de Riemann, el disco unitario y el semiplano superior.

Definición 1.1.8. Por una transformación de Möbius entendemos una transformación $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.

Con las consideraciones $f(\infty) = \frac{a}{c}$ y $f(-\frac{d}{c}) = \infty$.

Es posible demostrar que las transformaciones de Möbius son biyecciones conformes (por consecuencia holomorfas) de la esfera de Riemann.

Proposición 1.1.2. *Las transformaciones de Möbius de la forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ son las únicas biyecciones conformes (biholomorfismos) del plano complejo \mathbb{C} .*

Proposición 1.1.3. *Las transformaciones de Möbius son las únicas biyecciones conformes (biholomorfismos) de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.*

Como una consecuencia del lema de Schwarz tenemos:

Proposición 1.1.4. *Las transformaciones de Möbius de la forma $f(z) = \frac{az+b}{bz+a}$ con $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 - |b|^2 \neq 0$ son las únicas biyecciones conformes (biholomorfismos) del disco unitario Δ .*

En ocasiones es útil escribir las transformaciones anteriores de la forma:

$$f(z) = \frac{e^{i\theta}(z - z_0)}{1 - \bar{z}_0 z},$$

donde $z_0 \in \Delta$.

Proposición 1.1.5. *Las transformaciones de Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$ son las únicas biyecciones conformes (biholomorfismos) del semiplano superior \mathbb{H} .*

Recordemos que si una función f es holomorfa e inyectiva en un dominio $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ entonces es conforme, a estas funciones también las llamamos univalentes.

Denotamos por S la clase de funciones univalentes en Δ de la forma

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

es decir normalizadas por las condiciones $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

También denotamos por Σ la clase de funciones univalentes en Δ^* excepto por un polo simple en infinito con residuo 1, esto es de la forma

$$f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}.$$

Observación 1.1.3. *Notemos que la conjugación mediante la inversión en el círculo es decir la función $f(z) = \frac{1}{z}$ relaciona las dos clases definidas arriba.*

De estas clases de funciones podemos recordar algunos teoremas importantes, para las demostraciones se pueden consultar [7] y [33].

Teorema 1.1.1. *(Teorema de área). Si $g \in \Sigma$, entonces*

$$\text{área de } E = \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2\right),$$

donde E representa al complemento del conjunto imagen bajo g .

En particular como el área de E es positiva tenemos la desigualdad $\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leq 1$.

Teorema 1.1.2. *Si $f \in S$, entonces*

$$|a_2| \leq 2.$$

Teorema 1.1.3. *(Teorema de un cuarto de Koebe). Si $f \in S$, entonces $f(\Delta) \supset D(0, 1/4)$*

Combinando este resultado con el lema de Schwarz, si $f \in S$ obtenemos

$$\frac{1}{4} \leq \text{dist}(0, \partial f(\Delta)) \leq 1.$$

Donde dist representa la distancia de un punto a un conjunto.

Este resultado se generaliza con el siguiente teorema.

Teorema 1.1.4. *Si f es univalente en un dominio Ω , y $z_0 \in \Omega$ entonces*

$$\frac{1}{4} |f'(z_0)| \text{dist}(z_0, \partial\Omega) \leq \text{dist}(f(z_0), \partial(f(\Omega))) \leq 4 |f'(z_0)| \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$$

Dada una función $f \in S$ podemos considerar la transformación de Koebe de f respecto a $z_0 \in \Delta$, es decir la función

$$h(\zeta) = \frac{f((\zeta + z_0)/(1 + \bar{z}_0\zeta)) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2)f'(z_0)} = \zeta + \left[\frac{1}{2}(1 - |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \bar{z}_0\right]\zeta^2 + \dots$$

Notemos que $h \in S$, luego podemos aplicar el Teorema 1.1.2 para obtener

Lema 1.1.5. *Si $f \in S$, entonces*

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

Ahlfors en [2] relaciona este lema con la convexidad de una función. Usando este lema obtenemos el teorema de la distorsión.

Teorema 1.1.6. *(Teorema de la distorsión). Si $f \in S$ entonces*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

y

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Combinando este resultado con la cota inferior en el teorema de la distorsión obtenemos:

Si $f \in S$ entonces

$$\frac{1}{16}(1-|z|^2) \leq \text{dist}(f(z), \partial f(\Delta)), \quad z \in \Delta.$$

También, usando el teorema de la distorsión tenemos.

Teorema 1.1.7. *Si $f \in S$, entonces*

$$|a_n| \leq n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n}$$

1.1.2. Familias normales

El concepto esencial para definir el conjunto de Fatou es el de familia normal. En este apartado damos una introducción al tema y presentamos algunos resultados, para mayores detalles y las pruebas de los teoremas se pueden consultar [1], [10].

Denotaremos por \mathcal{F} a una familia de funciones f definida en un dominio fijo Ω y que toman valores en un espacio métrico (S, d) .

Definición 1.1.9. *Una familia \mathcal{F} de funciones se dice equicontinua en un conjunto $E \subseteq \Omega$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ si $|x - y| < \delta$ donde $x, y \in E$, simultáneamente para toda $f \in \mathcal{F}$.*

Definición 1.1.10. Una familia \mathcal{F} de funciones se dice normal en Ω si toda sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω .

Nos interesa definir una métrica en el espacio de funciones definidas en Ω y con valores en S , para la cual convergencia respecto a esta métrica correspona a convergencia uniforme en subconjuntos compactos de Ω . Para esto consideremos una sucesión de subconjuntos compactos $\{E_k\} \subset \Omega$ tal que todo subconjunto compacto $E \subset \Omega$ está contenido en algún E_k . Definamos ahora la métrica

$$\delta(a, b) = \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b)}.$$

Sean f y g dos funciones definidas en Ω y con valores en S , la distancia entre esas dos funciones en E_k se define como

$$\delta_k(f, g) = \sup_{z \in E_k} \delta(f(z), g(z)).$$

Finalmente definimos la distancia entre f y g en Ω

$$\rho(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(f, g) 2^{-k}.$$

Observe que convergencia en la distancia ρ es equivalente a convergencia en subconjuntos compactos de Ω . Por el teorema de Bolzano-Weierstrass aplicado a la familia \mathcal{F} equipada con la métrica ρ tenemos que \mathcal{F} es compacta si y sólo si \mathcal{F} es normal y si las funciones límite están en \mathcal{F} . Por otro lado, si \mathcal{F} es normal también lo es su cerradura $\bar{\mathcal{F}}$. Resumiendo tenemos

Teorema 1.1.8. La familia \mathcal{F} es normal si, y sólo si \mathcal{F} es relativamente compacta respecto a la métrica ρ .

Si el espacio métrico S es completo la familia \mathcal{F} es normal si, y sólo si está totalmente acotada. El siguiente teorema caracteriza la propiedad de acotación total en términos de la distancia original d del espacio métrico S .

Teorema 1.1.9. La familia \mathcal{F} está totalmente acotada si, y sólo si para todo subconjunto compacto $E \subset \Omega$ y para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar una cantidad finita de funciones $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ se cumple $d(f, f_j) < \epsilon$ en E para alguna f_j .

Presentamos ahora un teorema que relaciona los conceptos de equicontinuidad y normalidad

Teorema 1.1.10. (*Arzela-Ascoli*) *Una familia \mathcal{F} de funciones continuas con valores en un espacio métrico S es normal en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si y sólo si:*

1. \mathcal{F} es equicontinua en cada subconjunto compacto $E \subset \Omega$;
2. Para toda $f \in \mathcal{F}$, $f(\Omega)$ está contenido en un subconjunto compacto de S .

Considerando funciones holomorfas, $S = \mathbb{C}$ equipado con el valor absoluto. Tenemos

Teorema 1.1.11. *Una familia \mathcal{F} de funciones holomorfas en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es normal si y sólo si las funciones en \mathcal{F} están uniformemente acotadas en todo subconjunto compacto de Ω .*

O de manera equivalente

Teorema 1.1.12. *Una familia \mathcal{F} de funciones holomorfas en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es normal si y sólo si \mathcal{F} es localmente acotada.*

Además la acotación local se hereda para las derivadas es decir,

Teorema 1.1.13. *Una familia \mathcal{F} de funciones holomorfas localmente acotada, tiene derivadas localmente acotadas.*

El siguiente resultado es esencial para el estudio de la dinámica.

Teorema 1.1.14. (*Teorema de Montel*). *Si una familia \mathcal{F} de funciones holomorfas en un dominio Ω es tal que la unión $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(\Omega)$ evita tres puntos en $\hat{\mathbb{C}}$ entonces \mathcal{F} es normal.*

1.1.3. Teorema de la representación conforme

La definición de un conjunto simplemente conexo generalmente se da utilizando la noción de *grupo fundamental* y por tanto de *homotopía*, pero para dominios en la esfera de Riemann podemos usar una equivalencia como definición, a saber

Definición 1.1.11. Un dominio $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ se dice simplemente conexo si su complemento $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ es conexo.

Equivalentemente Ω es simplemente conexo si y sólo si su frontera $\partial\Omega$ es conexa.

El siguiente teorema establece una relación entre objetos geométricos (conjuntos simplemente conexos) y objetos analíticos (transformaciones conformes).

Teorema 1.1.15. (Teorema de la transformación de Riemann) Sean $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ un dominio simplemente conexo distinto del plano complejo \mathbb{C} , $w_0 \in \Omega$ y $0 \leq \alpha < 2\pi$. Entonces existe una única transformación conforme ψ de Δ sobre Ω tal que $\psi(0) = w_0$ y $\arg \psi'(0) = \alpha$.

A la transformación conforme obtenida del teorema la conocemos como representación conforme de Ω . Para una demostración del teorema de la transformación de Riemann se puede consultar [1] o [20]. En la Figura 1.1 se observan algunos ejemplos de dominios simplemente conexos.

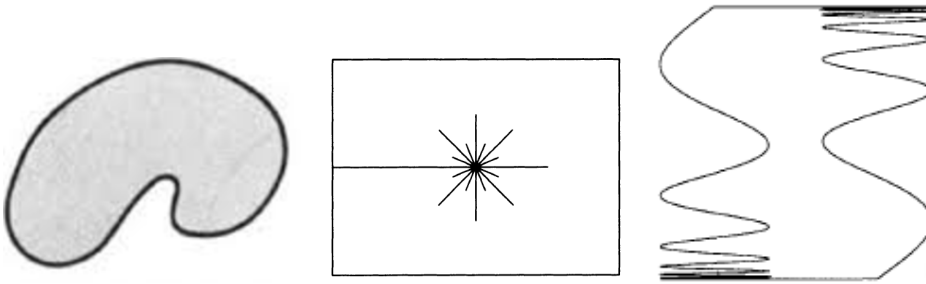


Figura 1.1: Dominios simplemente conexos

Ahora nos concierne el problema del comportamiento de la representación conforme en la frontera del disco unitario, para esto necesitamos el concepto de conexidad local.

Definición 1.1.12. Un espacio topológico X es localmente conexo en $x \in X$ si para toda vecindad abierta V de x existe un conjunto abierto conexo U tal que $x \in U \subset V$. X es localmente conexo si lo es en cada uno de sus puntos.

Utilizaremos también la siguiente caracterización: Un subconjunto compacto K en el plano complejo es localmente conexo en un punto $z_0 \in K$ si

para toda sucesión $z_n \subset K$ convergente a z_0 existe, para n grande, un conjunto conexo $L_n \subset K$ tal que $z_0, z_n \in L_n$ y $\text{diam}(L_n) \rightarrow 0$.

Presentamos ahora la relación entre la representación conforme y la conexidad local de un dominio simplemente conexo. Una demostración del siguiente resultado puede verse en [7], [20] o [21].

Teorema 1.1.16. *(Teorema de Carathéodory). Sea $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ un dominio simplemente conexo, distinto del plano complejo \mathbb{C} . Entonces $\partial\Omega$ es localmente conexa si y sólo si la representación conforme $\psi : \Delta \rightarrow \Omega$ se extiende continuamente al disco unitario cerrado $\bar{\Delta}$.*

Usando este resultado se puede demostrar el teorema siguiente.

Teorema 1.1.17. *Sea $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ un dominio simplemente conexo, distinto del plano complejo \mathbb{C} . Entonces $\partial\Omega$ es una curva de Jordan si y sólo si la representación conforme $\psi : \Delta \rightarrow \Omega$ se extiende a un homeomorfismo al disco unitario cerrado $\bar{\Delta}$ a $\bar{\Omega}$.*

De este teorema se obtiene los siguientes corolarios.

Corolario 1.1.1. *Si ψ es una transformación conforme del disco unitario Δ sobre un dominio de Jordan $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces ψ se extiende a un homeomorfismo $\hat{\mathbb{C}}$ sobre si mismo.*

Corolario 1.1.2. *(Teorema de Schoenflies). Un homeomorfismo entre dos curvas de Jordan en el plano complejo se puede extender a un homeomorfismo de la esfera de Riemann sobre si misma.*

Corolario 1.1.3. *Si γ es una curva de Jordan, entonces existe un homeomorfismo ϕ del plano complejo sobre si mismo tal que $\phi(\gamma) = \partial\Delta$.*

Por un ángulo de Stolz en un punto $\zeta_0 \in \partial\Delta$ entendemos un sector en Δ con vértice en ζ_0 y apertura estrictamente menor que π . Cuando tratamos el comportamiento de la representación conforme de manera local es útil el siguiente resultado:

Teorema 1.1.18. *Sean $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ un dominio simplemente conexo distinto del plano complejo \mathbb{C} , $\psi(\zeta)$ la representación conforme de Δ sobre Ω . Sea γ un arco de Jordan $\gamma \subset \bar{\Omega}$ tal que $\gamma \cap \partial\Omega = z_0$. Entonces la curva $\psi^{-1} \circ \gamma$ termina en un punto $\zeta_0 \in \partial\Delta$, y $\psi(\zeta) \rightarrow z_0$ cuando $\zeta \rightarrow \zeta_0$ dentro de cualquier ángulo de Stolz en ζ_0 .*

Definición 1.1.13. Decimos que un subconjunto compacto (respectivamente abierto acotado) $U \subset \mathbb{R}^2$ es pleno si $\mathbb{R}^2 \setminus U$ es conexo.

El siguiente teorema revela la interesante estructura de cada componente del interior de un compacto pleno (del plano complejo), conexo y localmente conexo, una demostración de dicho teorema se encuentra en [15].

Teorema 1.1.19. Si $K \subset \mathbb{C}$ un compacto pleno, conexo y localmente conexo, y denotamos por $(U_i)_{i \in I}$ la familia de componentes (conexas) de $\text{Int}(K)$. Entonces

1. Para todo $i \in I$, $\overline{U_i}$ es homeomorfo a $\overline{\Delta}$.
2. $\text{diam}(U_i) \rightarrow 0$ (es decir, $\forall \varepsilon > 0$ el conjunto de elementos de I tal que $\text{diam}(U_i) > \varepsilon$ es finito).

1.2. Variedades y superficies de Riemann

Originalmente Riemann pensó estas superficies como solución al problema de continuación analítica de funciones multivaluadas, siguiendo esta concepción una superficie de Riemann debe de ser un espacio topológico que localmente tiene las mismas propiedades topológicas y analíticas del plano complejo, donde una función multivaluada definida en el plano complejo sea un función univaluada definida en la superficie. En esta sección damos una breve introducción a las superficies de Riemann, en particular estamos interesados en el cubriente universal y en el teorema de Uniformización de Riemann.

1.2.1. Variedades y grupo fundamental

Definición 1.2.1. Una variedad de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff conexo, arco conexo M de tal modo que todo punto $x \in M$ tiene una vecindad U que es homeomorfa a un subconjunto abierto V de \mathbb{R}^n . Dicho homeomorfismo

$$f : U \rightarrow V$$

es llamado una carta (coordenada).

Por un atlas entenderemos una familia de cartas $\{U_\alpha, f_\alpha\}$, donde U_α es una cubierta abierta de M .

Nota 1.2.1. Un punto $p \in U_\alpha$ está unívocamente determinado por $f_\alpha(p)$ y frecuentemente lo identificaremos con $f_\alpha(p)$. Incluso podremos omitir el índice α , y nombrar a las componentes de $f(p) \in \mathbb{R}^n$ las coordenadas de p . Una variedad de dimensión 2 es llamada una superficie.

Definición 1.2.2. Un atlas $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ donde U_α en una variedad es llamado diferenciable si todas las cartas de transición

$$f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son diferenciables de clase C^∞ ($U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$). Una carta es llamada compatible con un atlas diferenciable si agregando dicha carta al atlas este continua siendo un atlas diferenciable. Tomando todas las cartas compatibles con un atlas diferenciable obtenemos una estructura diferenciable.

Una variedad diferenciable de dimensión d es una variedad de dimensión d junto con una estructura diferenciable.

Nota 1.2.2. Es suficiente mostrar que la variedad posee un atlas diferenciable para considerarla variedad diferenciable, ya que de todo atlas diferenciable podemos obtener una estructura diferenciable.

Ejemplo 1.2.1. La esfera n -dimensional

$$\mathbb{S}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

es una variedad diferenciable de dimensión n . Las cartas pueden ser elegidas de la siguiente forma: En $U_1 := \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) := \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right),$$

y en $U_2 := \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, -1)\}$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) := \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right).$$

Ejemplo 1.2.2. Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ linealmente independientes sobre \mathbb{R} , es decir $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$, definimos

$$L := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{nw_1 + mw_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Observe que \mathbb{C} es un grupo abeliano aditivo y como L es un subgrupo, L es además normal. Definimos al toro determinado por L como el cociente $T := \mathbb{C}/L$, el cual es un grupo por nuestras consideraciones anteriores, de hecho si consideramos a \mathbb{C} como un grupo topológico (dotado con la topología usual) entonces T también lo es con la topología cociente, es decir, la topología más fina que hace a la proyección natural

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}/L \\ \pi(z) &= z + L\end{aligned}$$

continua, se sabe además que la proyección es abierta.

Podemos considerar a T como una variedad diferenciable, para esto sea $\epsilon > 0$ tal que todos los puntos $nw_1 + mw_2$ distintos de cero en T cumplan la condición $|nw_1 + mw_2| > \epsilon$. Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ definamos

$$U_\alpha := \{\zeta + L : |\zeta - \alpha| < \epsilon, \zeta \in \mathbb{C}\} = \pi(\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \alpha| < \epsilon\})$$

y

$$f_\alpha := (\pi|_{U_\alpha})^{-1}$$

es decir $f_\alpha(\zeta + L) = \zeta$.

Definición 1.2.3. Una transformación continua $h : M \rightarrow M'$ entre dos variedades M y M' con cartas $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ y $\{U'_\alpha, f'_\alpha\}$ se dice diferenciable si las transformaciones $f'_\beta \circ h \circ f_\alpha^{-1}$ son diferenciables (de clase C^∞) donde quiera que estén definidas.

Definición 1.2.4. Dos transformaciones continuas $f_1, f_2 : S \rightarrow M$ entre dos variedades diferenciables S y M son homotópicas, si existe una transformación continua

$$F : S \times [0, 1] \rightarrow M$$

tal que

$$\begin{aligned}F|_{S \times \{0\}} &= f_1, \\ F|_{S \times \{1\}} &= f_2.\end{aligned}$$

En esta situación escribimos $f_1 \approx f_2$.

Definimos una curva en M de la misma manera que definimos curva en la esfera de Riemann, es decir, como una función continua del intervalo unitario a M . Procedemos a definir el concepto de homotopía de curvas con los mismos extremos.

Definición 1.2.5. Sean $g_1, g_2 : [0, 1] \rightarrow M$ dos curvas con

$$\begin{aligned} g_1(0) &= g_2(0) = p_0, \\ g_1(1) &= g_2(1) = p_1. \end{aligned}$$

Decimos que g_1 y g_2 son homotópicas si existe una transformación continua

$$G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$$

tal que

$$\begin{aligned} G|_{\{0\} \times [0, 1]} &= p_0, & G|_{\{1\} \times [0, 1]} &= p_1, \\ G|_{[0, 1] \times \{0\}} &= g_1, & G|_{[0, 1] \times \{1\}} &= g_2. \end{aligned}$$

También denotamos esto por $g_1 \approx g_2$.

La clase de homotopía de una transformación f (o de una curva g) es la clase de equivalencia que consiste de todas las transformaciones homotópicas a f (o de todas las curvas con los mismos extremos, homotópicas a g); denotamos esta clase por f (respectivamente g). La clase de homotopía de g no cambia bajo parametrización.

Definición 1.2.6. Sean $g_1, g_2 : [0, 1] \rightarrow M$ dos curvas con

$$g_1(1) = g_2(0).$$

Entonces el producto $g_2 g_1 := g$ es definido como

$$g(t) := \begin{cases} g_1(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g_2(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

De la definición del producto si $g_1 \approx g'_1$ y $g_2 \approx g'_2$ entonces

$$g_2 g_1 \approx g'_2 g'_1.$$

Entonces la clase de homotopía de $g_1 g_2$ solamente depende de las clases de homotopía de g_1 y g_2 , así podemos definir la multiplicación de clases de homotopía por

$$\{g_1\} \cdot \{g_2\} = \{g_1 g_2\}.$$

Definición 1.2.7. Sea M una variedad, para todo punto $p_0 \in M$, el grupo fundamental $\pi_1(M, p_0)$ es el grupo de clases de homotopía de curvas $g : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $g(0) = g(1) = p_0$, es decir curvas cerradas que tienen como punto inicial y final a p_0 .

Nota 1.2.3. El grupo fundamental $\pi_1(M, p_0)$ es un grupo con la multiplicación de clases de homotopía. Es claro que la operación siempre está definida ya que todas nuestras curvas son cerradas, la ley asociativa se obtiene ya que $(g_1 g_2) g_3$ es a lo más una reparametrización de $g_1(g_2 g_3)$. El elemento identidad del grupo es la clase de homotopía de la curva constante $g_0 \equiv p_0$, denotemos este elemento por 1 . Finalmente el inverso g^{-1} de una curva g es el mismo arco recorrido en sentido contrario, es decir,

$$g^{-1}(t) = g(1 - t) \quad t \in [0, 1]$$

de este modo

$$(g^{-1}g)(t) := \begin{cases} g(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2(1-t)) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

observe que una homotopía entre g_0 y $(g^{-1}g)$ está dada por

$$G(t, s) := \begin{cases} g(2ts) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s(1-t)) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

por lo tanto

$$\{g^{-1}\} \cdot \{g\} = \{g^{-1}g\} = 1$$

es decir $\{g\}^{-1} = \{g^{-1}\}$. Hemos demostrado que el grupo fundamental es de hecho un grupo.

Usualmente escribiremos g en vez de $\{g\}$.

Lema 1.2.4. Para cualesquiera $p_0, p_1 \in M$, los grupos $\pi_1(M, p_0)$ y $\pi_1(M, p_1)$ son isomorfos.

Demostración. Como M es arco conexo, tomemos γ una curva en M de tal forma que $\gamma(0) = p_0$ y $\gamma(1) = p_1$ consideremos la función

$$\varphi : \pi_1(M, p_1) \rightarrow \pi_1(M, p_0)$$

$$\{g\} \mapsto \{\gamma^{-1}g\gamma\}$$

afirmamos que φ es un isomorfismo. En efecto

$$\begin{aligned} \{g_1\} = \{g_2\} &\Leftrightarrow \{\gamma^{-1}\}\{g_1\}\{\gamma\} = \{\gamma^{-1}\}\{g_2\}\{\gamma\} \Leftrightarrow \{\gamma^{-1}g_1\gamma\} = \{\gamma^{-1}g_2\gamma\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \varphi(\{g_1\}) = \varphi(\{g_2\}) \end{aligned}$$

lo que prueba que φ está bien definida y es inyectiva. Además

$$\begin{aligned} \varphi(\{g_2\}\{g_1\}) &= \varphi(\{g_2g_1\}) = \{\gamma^{-1}g_2g_1\gamma\} = \{\gamma^{-1}g_2\gamma\gamma^{-1}g_1\gamma\} = \\ &= \{\gamma^{-1}g_2\gamma\}\{\gamma^{-1}g_1\gamma\} = \varphi(\{g_2\})\varphi(\{g_1\}) \end{aligned}$$

es decir φ es un homomorfismo. Finalmente, si $\{h\} \in \pi_1(M, p_0)$ entonces $\{\gamma h \gamma^{-1}\} \in \pi_1(M, p_1)$ y $\varphi\{\gamma h \gamma^{-1}\} = \{\gamma^{-1}\gamma h \gamma^{-1}\gamma\} = \{h\}$, por lo cual φ es sobreyectiva. □

El isomorfismo de grupos del lema anterior no es único, pues depende de la elección de la curva γ . En vista del lema anterior podemos dar la siguiente definición

Definición 1.2.8. *El grupo abstracto $\pi_1(M)$ es llamado el grupo fundamental de M .*

Definición 1.2.9. *Decimos que M es simplemente conexa si $\pi_1(M) = \{1\}$.*

Proposición 1.2.1. *Si M es simplemente conexo, entonces cualesquiera dos curvas g_1, g_2 en M tal que $g_1(0) = g_2(0)$ y $g_1(1) = g_2(1)$ son homotópicas.*

Demostración. observe que la curva $g_2^{-1}g_1$ es cerrada en p_0 , luego como M es simplemente conexo $\{g_2^{-1}g_1\} = 1$, es decir, $\{g_2\}^{-1}\{g_1\} = 1$ por lo que $\{g_1\} = \{g_2\}$. Por lo tanto g_1 y g_2 son homotópicas. □

Definición 1.2.10. *Una curva $g : [0, 1] \rightarrow M$ con $g(0) = g(1) = p_0$ que es homotópica a la curva constante $g_0(t) \equiv p_0$ es llamada homotópica nula.*

Proposición 1.2.2. *Sean M y N dos variedades y $f : M \rightarrow N$ una transformación continua. Consideremos $p_0 \in M$ y $q_0 := f(p_0)$. Entonces f induce un homomorfismo*

$$f_* : \pi_1(M, p_0) \rightarrow \pi_1(N, q_0)$$

de grupos fundamentales.

Demostración. Observemos primero que si g_1, g_2 son curvas en M tales que $g_1 \approx g_2$ con extremos p_0 y p_1 , entonces existe una homotopía h de g_1 a g_2 . Luego como f es continua entonces la transformación $f \circ h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow N$ es continua, además

$$\begin{aligned}(f \circ h)|_{\{0\} \times [0,1]} &= f(p_0) = q_0, & (f \circ h)|_{\{1\} \times [0,1]} &= f(p_1) = q_1, \\ (f \circ h)|_{[0,1] \times \{0\}} &= f \circ g_1, & (f \circ h)|_{[0,1] \times \{1\}} &= f \circ g_2.\end{aligned}$$

es decir, $f \circ g_1 \approx f \circ g_2$. En vista de lo anterior el homomorfismo entre grupos fundamentales definido por $f_*g = f \circ g$, está bien definido. Además dados $\{g_1\}, \{g_2\}$ en $\pi_1(M, p_0)$ tenemos que

$$\begin{aligned}f_*(\{g_2\}\{g_1\}) &= f_*(\{g_2g_1\}) = \{f(g_2g_1)\} = \{f(g_2)\}\{f(g_1)\} = \\ &= f_*(\{g_2\})f_*(\{g_1\}),\end{aligned}$$

por lo tanto f_* es un homomorfismo. \square

Proposición 1.2.3. *Bajo las condiciones de la proposición anterior. Si f es un homeomorfismo entonces f_* es un isomorfismo.*

Demostración. En vista de la proposición anterior es suficiente probar que f_* es una biyección. Como f tiene inversa continua f^{-1} entonces existe un homeomorfismo $(f^{-1})_*$ de $\pi_1(N, q_0)$ a $\pi_1(N, p_0)$ dado por $(f^{-1})_*\{h\} = \{f^{-1}(h)\}$. Sea $\{g\} \in \pi_1(M, p_0)$ entonces $(f^{-1})_*(f_*(\{g\})) = (f^{-1})_*\{f(g)\} = \{f^{-1}(f(g))\} = \{g\}$, es decir $(f^{-1})_* \circ f_* \equiv Id_{\pi_1(M, p_0)}$, análogamente se obtiene $f_* \circ (f^{-1})_* \equiv Id_{\pi_1(N, q_0)}$. Por lo tanto f_* es un isomorfismo con inversa $f_*^{-1} = (f^{-1})_*$. \square

El siguiente hecho es útil para demostrar que un espacio topológico es simplemente conexo.

Teorema 1.2.5. *Dado un espacio topológico X , si existen subconjuntos abiertos simplemente conexos U y V tal que $U \cup V = X$, y $U \cap V$ es no vacío y arco conexo. Entonces X es simplemente conexo.*

Ejemplo 1.2.3. \mathbb{R}^n es simplemente conexo. En verdad, es suficiente mostrar que toda curva cerrada g con punto inicial y final en 0 es homotópica a la curva constante $g_0 \equiv 0$, una homotopía es dada por

$$G(t, s) := sg(t).$$

Ejemplo 1.2.4. \mathbb{S}^n es simplemente conexo para $n \geq 2$. Recordemos que $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^n y por lo tanto $U_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$ y $U_2 = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, -1)\}$ son abiertos simplemente conexos tal que $U_1 \cup U_2 = \mathbb{S}^n$ y $U_1 \cap U_2 = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1), (0, 0, \dots, 0, -1)\}$ es arco conexo (observe que si $n = 1$, $U_1 \cap U_2$ no es arco conexo.), luego por el Teorema 1.2.5 \mathbb{S}^n es simplemente conexo.

Más adelante probaremos que \mathbb{S}^1 y el toro T no son simplemente conexos.

1.2.2. Cubrientes

Para el estudio de variedades son útiles los conceptos de transformación cubriente y espacio cubriente, en particular veremos la relación entre los elementos del grupo fundamental y los espacios cubrientes, este hecho permite definir y probar la existencia del cubriente universal.

Definición 1.2.11. Dadas dos variedades M' y M , definimos un homeomorfismo local por una transformación $\pi : M' \rightarrow M$ de tal forma que cada punto $x \in M'$ tiene una vecindad U homeomorfa mediante π a un abierto de M . En particular $\pi(U)$ debe ser abierto en M .

Definición 1.2.12. Un homeomorfismo local $\pi : M' \rightarrow M$ entre dos variedades M' y M es llamado una transformación cubriente si cada $x \in M$ tiene una vecindad (conexa) V tal que toda componente de $\pi^{-1}(V)$ es homeomorfa mediante π a V . En este caso decimos que M' es un espacio cubriente de M .

Nota 1.2.6. Las definiciones anteriores tienen sentido aún si M' y M son sólo espacios topológicos.

Ejemplo 1.2.5. La transformación $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $p(t) = e^{it}$ es una transformación cubriente. Primero veamos que p es un homeomorfismo local, sea $t \in \mathbb{R}$, elijamos U un intervalo abierto de longitud menor que 2π entonces $p|_U$ es un homeomorfismo. Ahora sea $x \in \mathbb{S}^1$, tomemos un arco V en \mathbb{S}^1 que contiene a x tal que la longitud del conjunto de ángulos que determinan el arco sea menor a 2π entonces cada componente de $p^{-1}(V)$ es enviada de manera homeomorfa a V .

Ejemplo 1.2.6. La transformación $\pi_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $\pi_\alpha(x) = e^{i\alpha x}$ es una transformación cubriente $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$.

Ejemplo 1.2.7. La transformación $\pi_n : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ definida por $\pi(z) = z^n$ es una transformación cubriente $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.2.8. La transformación $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ definida por $\pi(z) = e^z$ es una transformación cubriente.

Contraejemplo 1.2.1. La transformación $\pi : (0, 10) \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $\pi(t) = e^{it}$ es un homeomorfismo local pero no una transformación cubriente.

Contraejemplo 1.2.2. La transformación $\pi_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $\pi_\alpha(x) = e^{i\alpha x}$ es un homeomorfismo local pero no una transformación cubriente $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Contraejemplo 1.2.3. La inclusión $\pi : M' \hookrightarrow M$, donde $M' \subsetneq M$ es abierto no vacío, definida por $\pi(x) = x$ es un homeomorfismo local pero no una transformación cubriente.

Lema 1.2.7. Si $\pi : M' \rightarrow M$ es un cubriente, entonces $\pi^{-1}(x)$ tiene el mismo número para cada $x \in M$, es decir todo punto de M es cubierto el mismo número de veces.

Lema 1.2.8. Sean $\pi : M' \rightarrow M$ un cubriente, $p_0 \in M$, $p'_0 \in \pi^{-1}(p_0)$ y g una curva en M con $g(0) = p_0$. Entonces existe una curva g' en M' tal que $g'(0) = p'_0$ y

$$\pi \circ g' = g.$$

La curva g' está unívocamente determinada por la elección de p'_0 .

A la propiedad anterior se le conoce como levantamiento de arcos, el lema entonces nos dice que todo cubriente tiene la propiedad de levantar arcos. Es natural pensar ahora en lo que pasa al levantar curvas homotópicas en M' , el siguiente lema responde la pregunta.

Lema 1.2.9. Sean $\pi : M' \rightarrow M$ un cubriente, Γ una homotopía entre las curvas $\gamma_0 := \Gamma(\cdot, 0)$ y $\gamma_1 := \Gamma(\cdot, 1)$ con extremos $p_0 = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ y $p_1 = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ y $p'_0 \in \pi^{-1}(p_0)$. Entonces Γ puede ser levantada (como en el lema anterior) a una homotopía Γ' en M' con punto inicial p'_0 , es decir $\pi \circ \Gamma' = \Gamma$. En particular, las curvas levantadas γ'_0 y γ'_1 tienen el mismo punto final $p'_1 \in \pi^{-1}(p_1)$ y son homotópicas.

Corolario 1.2.1. Sean $\pi : M' \rightarrow M$ un cubriente, g una curva cerrada en p_0 y g' un levantamiento de g . Supongamos que g es homotópica a la curva constante p_0 . Entonces g' es cerrada y homotópica a una curva constante.

Si en el lema anterior escojemos $p'_0 \in \pi^{-1}(p_0)$ y g' el levantamiento de g tal que $g'(0) = p'_0$, entonces si g es nula homotópica entonces g' es nula homotópica.

Usando los resultados anteriores se puede demostrar el siguiente importante hecho.

Teorema 1.2.10. *Sean $\pi : M' \rightarrow M$ un cubriente, S una variedad simplemente conexa y $f : S \rightarrow M$ una transformación continua. Entonces existe una función continua $f' : S \rightarrow M'$ tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} & & M' \\ & \nearrow^{f'} & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

conmuta. Es decir $\pi \circ f' = f$.

Definición 1.2.13. *Una función f' como la del teorema anterior es llamada un levantamiento de f .*

Definición 1.2.14. *Sean $\pi_1 : M'_1 \rightarrow M$ y $\pi_2 : M'_2 \rightarrow M$ dos cubrientes. Decimos que (π_2, M'_2) domina a (π_1, M'_1) si existe un cubriente $\pi_{21} : M'_2 \rightarrow M'_1$ tal que $\pi_2 = \pi_1 \circ \pi_{21}$. Los dos cubrientes se dicen equivalentes si existe un homeomorfismo $\pi_{21} : M'_2 \rightarrow M'_1$ tal que $\pi_2 = \pi_1 \circ \pi_{21}$.*

En lo siguiente relacionaremos los conceptos de grupo fundamental y cubriente.

Lema 1.2.11. *El conjunto $G_\pi := \{g\} : g \text{ es levantamiento de } g \text{ y cerrada}$ es un subgrupo de $\pi_1(M, p_0)$.*

Nota 1.2.12. *Observe que G_π depende de la elección de $p'_0 \in \pi^{-1}(p_0)$. Cuando queremos ser precisos podemos escribir $G_\pi(p'_0)$. Si p''_0 es otro punto de $\pi^{-1}(p_0)$ y γ' es una curva que va de p'_0 a p''_0 , entonces $\gamma := \pi(\gamma')$ es una curva cerrada en p_0 . Si g es una curva cerrada en p_0 entonces el levantamiento de g con punto inicial en p'_0 es cerrada precisamente cuando el levantamiento de $\gamma g \gamma^{-1}$ con punto inicial en p''_0 es cerrada. De esta forma*

$$G_\pi(p''_0) = \{\gamma\} \cdot G_\pi(p'_0) \cdot \{\gamma^{-1}\}.$$

Es decir $G_\pi(p'_0)$ y $G_\pi(p''_0)$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(M, p_0)$. Recíprocamente, todo subgrupo conjugado a $G_\pi(p'_0)$ se obtiene de esta forma. Se

puede demostrar que dos cubrientes equivalentes dan origen a las misma clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(M, p_0)$.

Teorema 1.2.13. *Sea $\pi : M' \rightarrow M$ un cubriente. Entonces el grupo fundamental de M' , $\pi_1(M')$ es isomorfo a G_π . De este modo obtenemos una biyección entre las clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(M)$ y clases de equivalencia de cubrientes de M .*

Corolario 1.2.2. *Si M es una variedad simplemente conexa, entonces todo cubriente $\pi : M' \rightarrow M$ es un homeomorfismo.*

Corolario 1.2.3. *Si $G = \{1\}$, y $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ es el cubriente correspondiente, entonces $\pi_1(\widetilde{M}) = \{1\}$. Además una curva $\widetilde{\gamma}$ en \widetilde{M} es cerrada precisamente cuando $\pi(\widetilde{\gamma})$ es cerrada y nula homotópica. En particular si $\pi_1(M) = \{1\}$, entonces $\widetilde{M} = M$.*

Ejemplo 1.2.9. *La circunferencia unitaria \mathbb{S}^1 no es simplemente conexo ya que admite cubrientes que no son homeomorfismos.*

Ejemplo 1.2.10. *El toro del Ejemplo 1.2.2 no es simplemente conexo, ya que la transformación $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L$ que consideramos en la construcción de dicho toro es un cubriente pero no un homeomorfismo.*

Definición 1.2.15. *El espacio cubriente \widetilde{M} de M con $\pi_1(\widetilde{M}) = \{1\}$ es llamado el cubriente universal de M .*

Teorema 1.2.14. *Sean $f : M \rightarrow N$ una función continua, $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ y $\pi' : \widetilde{N} \rightarrow N$ los cubrientes universales de M y N . Entonces existe un levantamiento $\widetilde{f} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$, es decir una transformación continua \widetilde{f} tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{N} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

conmuta.

Definición 1.2.16. *Sea $\pi : M' \rightarrow M$ un homeomorfismo local. Decimos que un homeomorfismo $\varphi : M' \rightarrow M'$ es un cubrimiento si $\pi \circ \varphi = \pi$.*

Observación 1.2.1. *Los cubrimientos forman un grupo al que denotaremos H_π .*

Lema 1.2.15. *Si φ es un cubrimiento distinto de la identidad, entonces φ no fija ningún punto.*

De este resultado se desprende que si dos cubrimientos coinciden en un punto entonces deben ser iguales.

Teorema 1.2.16. *Si $\pi : M' \rightarrow M$ un cubriente entonces el grupo de cubrimientos H_π es isomorfo a $N(G_\pi)/G_\pi$. En particular si π es el cubriente universal de M , entonces H_π es isomorfo a $\pi_1(M)$.*

1.2.3. Superficies de Riemann

Las superficies de Riemann constituyen una herramienta importante en el estudio de la dinámica holomorfa como podemos apreciar en los trabajos de Sullivan, Milnor y . El desarrollo de estas superficies es bastante amplio, en esta tesis damos una breve presentaci3n de ellas junto con los resultados que ser3n convenientes para nuestro estudio.

Definici3n 1.2.17. *Una variedad de dimensi3n dos es llamada una superficie.*

Cuando hablamos de superficies podemos considerar que las cartas tienen su imagen en \mathbb{C} .

Definici3n 1.2.18. *Un atlas de una superficie S con cartas $z_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ es llamado conforme si las funciones de transici3n*

$$z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son holomorfas. Una carta es compatible con un atlas conforme si al agregarla al atlas este sigue siendo conforme. Al considerar todas las cartas compatibles de un atlas conforme obtenemos una estructura conforme. Una superficie de Riemann es una superficie junto con una estructura conforme.

Definici3n 1.2.19. *Dadas dos superficies de Riemann S_1 y S_2 con atlas $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ y $\{U'_\beta, z'_\beta\}$ respectivamente, decimos que una funci3n continua $h : S_1 \rightarrow S_2$ es holomorfa si las funciones $z'_\beta \circ h \circ z_\alpha^{-1}$ son holomorfas donde sea que est3n definidas. Una funci3n holomorfa h cuya derivada es distinta de cero en todos los puntos es llamada conforme.*

Ejemplo 1.2.11. *La esfera de Riemann, puede ser considerada una superficie de Riemann con las cartas que consideramos antes.*

Ejemplo 1.2.12. *El toro, es considerado una superficie de Riemann con las cartas que consideramos antes.*

Teorema 1.2.17. *(Teorema de singularidades removibles). Sean U un abierto de una superficie de Riemann, $a \in U$ y $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$ una función holomorfa en $U \setminus \{a\}$. Si f es acotada en $U \setminus \{a\}$, entonces f se puede extender analíticamente en todo U , es decir, existe una función $\tilde{f} \in \mathcal{H}(U)$ tal que $\tilde{f}|_{U \setminus \{a\}} = f$.*

Teorema 1.2.18. *(Teorema de identidad). Sean S_1, S_2 superficies de Riemann y $h_1 : S_1 \rightarrow S_2, h_2 : S_1 \rightarrow S_2$ funciones holomorfas que coinciden en un conjunto $A \subset S_1$ que contiene un punto de acumulación $A \in S_1$, entonces h_1 y h_2 son idénticamente iguales.*

Definición 1.2.20. *Sean S_1 una superficie de Riemann y $U \subset S_1$ un subconjunto abierto de S_1 . Decimos que una función h es meromorfa si existe un subconjunto abierto $U' \subset U$ donde $h : U' \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y se satisfacen las siguientes condiciones*

1. $U \setminus U'$ contiene solamente puntos aislados.
2. para todo $p \in U \setminus U'$ tenemos

$$\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty \quad (1-2)$$

los puntos de $U \setminus U'$ son llamados los polos de h . La clase de funciones meromorfas definidas en U son denotadas por $\mathcal{M}(U)$.

Observación 1.2.2. *Sea (U, z) una vecindad y una carta coordenada de un polo p de h tal que $z(p) = 0$, entonces h admite una expansión en serie de Laurent*

$$h = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n \quad (1-1)$$

donde k es un entero positivo y representa el orden del polo.

Ejemplo 1.2.13. *Si consideramos un polinomio definido en la esfera de Riemann y al plano complejo como subconjunto abierto de esta, entonces el polinomio es una función holomorfa del plano en el plano, además como el límite cuando tendemos al punto al infinito en la esfera de Riemann es infinito, tenemos que todo polinomio es una función meromorfa del plano.*

Teorema 1.2.19. Sean S una superficies de Riemann y $h \in \mathcal{M}(S)$. Si definimos el valor de h en cada polo p de h como $h(p) := \infty$, entonces $h : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es una función holomorfa. Recíprocamente si $h : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es una función holomorfa entonces h es la función constante ∞ o $h^{-1}(\infty)$ consiste de puntos aislados y $h : S \setminus h^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función meromorfa.

Teorema 1.2.20. Sean S_1, S_2 superficies de Riemann, $h : S_1 \rightarrow S_2$ una función holomorfa no constante, $a \in S_1$ y $b := h(a)$. Entonces existe un entero $k \geq 1$ y cartas $z : U \rightarrow \mathbb{C}$ en S_1 y $w : U' \rightarrow \mathbb{C}$ en S_2 tales que:

1. $a \in U$, $z(a) = 0$, $b \in U'$, $w(b) = 0$;
2. $h(U) \subset U'$; y
3. la transformación $F := w \circ h \circ z^{-1} : z(U) \rightarrow w(U')$ esta dada por $F(\zeta) = \zeta^k$ para todo $\zeta \in z(U)$.

Corolario 1.2.4. Sean S_1, S_2 superficies de Riemann. Si $h : S_1 \rightarrow S_2$ es una función holomorfa no constante, entonces h es abierta.

Corolario 1.2.5. (Principio del máximo). Sea S una superficies de Riemann. Si $h : S \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa no constante, entonces el valor absoluto de h no alcanza su máximo.

Teorema 1.2.21. Sean S_1, S_2 superficies de Riemann, con S_1 compacta. Si $h : S_1 \rightarrow S_2$ es una función holomorfa no constante, entonces S_2 es compacta y h es sobreyectiva.

Corolario 1.2.6. Sean S una superficies de Riemann compacta. Si $h : S \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces h es constante.

Observe que podemos obtener el teorema de Liouville utilizando el teorema de singularidades removibles y este último corolario, ya que si tenemos una función holomorfa acotada definida en el plano complejo entonces podemos extenderla a una función holomorfa definida en toda la esfera de Riemann que es compacta por tanto la función es constante.

Corolario 1.2.7. Sean S una superficies de Riemann compacta y $h : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa, entonces h es racional.

Finalmente enunciamos el teorema que permite clasificar a las superficies de Riemann de acuerdo a su cubriente universal.

Teorema 1.2.22. (*Teorema de uniformización de Riemann*). *El cubriente universal de una superficie de Riemann es conformemente equivalente a una y sólo una de las siguientes superficies: el disco unitario, el plano complejo o la esfera de Riemann.*

El teorema de uniformización clasifica a todas las superficies de Riemann en las siguientes clases: Diremos que una superficie es elíptica si su cubriente universal es conformemente equivalente a la esfera de Riemann. Las superficies parabólicas que son aquellas cuyo cubriente universal es conformemente equivalentes al plano. Y las superficies hiperbólicas son las superficies son cubriente universal conformemente equivalentes al disco unitario.

Se sabe¹ que toda superficie elíptica es de hecho conformemente equivalente a la esfera de Riemann. En el caso parabólico se tienen las siguientes posibilidades la superficie es conformemente equivalente al plano complejo, o es conformemente equivalente a un cilindro infinito, o bien es conformemente equivalente a una retícula 2-dimensional. Todos los otros casos de superficies de Riemann son hiperbólicas, como ejemplo se tienen el disco agujerado y cualquier anillo.

Una *métrica riemanniana* en un subconjunto abierto del plano $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ puede ser descrita como una expresión de la forma

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2$$

donde $[g_{jk}]$ es una matriz definida positiva que depende de manera suave de $z = x + iy$. Se dice que la métrica es *conforme* si $g_{11} = g_{22}$ y $g_{12} = 0$, por lo tanto la matriz $[g_{jk}]$ evaluada en cualquier punto z es un múltiplo positivo de la matriz identidad. Es decir una métrica conforme puede ser escrita como $ds^2 = u(x + iy)^2(dx^2 + dy^2)$ o de manera mas corta $ds = u(z)|dz|$, donde la función u es suave y estrictamente positiva.

Definición 1.2.21. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $ds = u(z)|dz|$ una métrica conforme en Ω , entonces la curvatura Gaussiana de la métrica ds en un punto $z \in \Omega$ se define como*

$$\kappa(z) = -\frac{\Delta \log(u(z))}{u(z)^2}.$$

¹para más detalles consulte [24]

Donde Δ representa el operador Laplaciano. Un hecho importante es que la curvatura Gaussiana es un invariante conforme, para una demostración vease [Complex analysis krants].

Definición 1.2.22. *Dada una superficie hiperbólica S . Definimos la métrica hiperbólica o métrica de Poincaré en S como la única métrica Riemanniana completa y conforme con curvatura Gaussiana constante 1.*

Definición 1.2.23. *Sean S una superficie hiperbólica con métrica de Poincaré ds . La integral $\int_{\gamma} ds$ sobre la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ donde γ es C^1 a trozos es llamada la longitud de Poincaré de esta curva. Dados $z_1, z_2 \in S$ la distancia de Poicaré $\text{dist}(z_1, z_2)$ se define como el ínfimo de las longitudes de curva que conectan z_1 y z_2 .*

1.3. Dinámica polinomial

1.3.1. Sistemas dinámicos discretos y conjugación

El tratado de sistemas dinámicos discretos es muy amplio y de gran interés matemático, en particular el estudio de los sistemas dinámicos holomorfos ha demostrado ser una gran fuente de problemas e ideas, que exige el conocimiento de teorías como superficies de Riemann, transformaciones holomorfas y conformes, transformaciones casi-conformes, teoría de Caratheodory, por mencionar algunas.

Nosotros estamos interesados en los sistemas dinámicos holomorfos y en particular la dinámica polinomial. Aquí damos la definición general de un sistema dinámico discreto, y evidenciamos la importancia de la conjugación.

Definición 1.3.1. *Sean X un espacio topológico y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Al par (X, f) lo llamamos un sistema dinámico discreto generado por f , y a la composición de f consigo misma m veces $f^m = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{m\text{-veces}}$ la llamamos la m -ésima iterada de f . Por convención tomamos $f^0 \equiv \text{Id}_X$.*

Estamos interesados en el estudio de los conjuntos de las iteradas de f en puntos de X , en los conjuntos invariantes y en el cambio de los anteriores cuando modificamos a f . Cuando f es una función holomorfa en algún dominio X llamamos al par (X, f) un sistema dinámico holomorfo, en nuestro

trabajo tomaremos a X como la esfera de Riemann y a f un polinomio de grado mayor o igual a 2.

Definición 1.3.2. Sean (X, f) un sistema dinámico discreto y $x_0 \in X$. Entenderemos por:

1. La órbita hacia adelante de x_0 al conjunto $\mathcal{O}^+(x_0) = \{f^m(x_0) \mid m \in \mathbb{N}\}$,
2. La órbita hacia atrás de x_0 al conjunto $\mathcal{O}^-(x_0) = \{x \in X \mid f^m(x) = x_0 \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}$,
3. La órbita grande de x_0 al conjunto $GO(x_0) = \mathcal{O}^+(x_0) \cup \mathcal{O}^-(x_0)$.

Definición 1.3.3. Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un polinomio (o una función holomorfa). Un punto periódico para f es un punto $x \in \hat{\mathbb{C}}$ tal que existe un $n > 0$ para el cual $f^n(x) = x$. El n más pequeño con tal propiedad es llamado el periodo k de x . Al conjunto $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k-1}(x)$ le llamamos el ciclo de x y al número $\lambda = (f^k)'(x) = \prod_i f'(f^i(x))$ el multiplicador del ciclo. Diremos que x es atractor si $|\lambda| < 1$, particularmente si $|\lambda| = 0$ diremos que es superatractor, repulsor si $|\lambda| > 1$, si $|\lambda| = 1$ diremos que es indiferente racional (también llamado parabólico) o irracional dependiendo del argumento de λ , es decir si existe un $m > 0$ tal que $\lambda^m = 1$ o no. En el caso particular de que $k = 1$ diremos que x es un punto fijo, Decimos que x es un punto pre-periódico si existe un entero $m > 1$ tal que $f^m(x)$ es periódico.

En el contexto de la dinámica holomorfa, es decir cuando el sistema dinámico está formado por una superficie de Riemann y una función holomorfa definida y con valores en dicha superficie, existen dos conjuntos que son de especial interés: el conjunto de Julia (o caótico) y el conjunto de Fatou (o estable).

Definición 1.3.4. Sean S y $f : S \rightarrow S$ una función holomorfa no constante. Definimos el conjunto de Fatou de f , F_f , como el conjunto de puntos $z \in S$ tal que existe una vecindad U de z en la cual la familia de iteradas f^n restringida a U es normal. Al complemento del conjunto de Fatou $J_f := S \setminus F_f$ lo llamamos el conjunto de Julia de f .

Una herramienta fundamental en los sistemas dinámicos es el concepto de conjugación, lo que nos permite obtener información de un sistema dinámico a partir de uno más simple.

Definición 1.3.5. Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos discretos, diremos que (X, f) es conjugado a (Y, g) si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

es decir, $h \circ f = g \circ h$.

Si en la definición anterior h es sólo una función continua y sobreyectiva decimos que los sistemas dinámicos son semiconjugados. Si h es un biholomorfismo y los sistemas dinámicos son holomorfos tenemos una conjugación holomorfa, nos referimos frecuentemente a esta última como un cambio de coordenadas holomorfo.

Ejemplo 1.3.1. Todo polinomio cuadrático complejo $f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ es conjugado a un polinomio cuadrático de la forma $g(z) = z^2 + c$. La conjugación puede ser vista como composición de tres conjugaciones, primero podemos conjugar a f con el polinomio mónico $z^2 + \beta z + \frac{\gamma}{\alpha}$ mediante el biholomorfismo αz , luego podemos mover uno de los dos puntos fijos al cero mediante una traslación, digamos $z - \left(\frac{1-\beta + \sqrt{(\beta-1)^2 - 4\frac{\gamma}{\alpha}}}{2}\right)$ obteniendo el polinomio $\lambda z + z^2$ donde λ es el multiplicador del punto fijo, finalmente moviendo el punto crítico a cero mediante $z + \frac{\lambda}{2}$ se obtiene el resultado, donde $c = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}$.

Observe que la conjugación preserva conjuntos invariantes, particularmente puntos fijos y órbitas. Además cuando la conjugación es holomorfa es también conforme y por tanto la dinámica de dos sistemas holomorfos conjugados holomorfa es prácticamente la misma.

1.3.2. El conjunto de puntos que escapan y el conjunto de Julia lleno

Consideraremos en adelante sólo sistemas dinámicos de la forma $(\hat{\mathbb{C}}, p)$ donde p es un polinomio de grado mayor o igual a 2, podemos suponer que p es mónico, ya que todo polinomio es conjugado a uno mónico por una transformación afín.

Observe que ∞ es un punto fijo para todo polinomio con multiplicador cero, recordemos que la derivada en ∞ se obtiene utilizando el cambio de cartas $1/z$, es decir, $p'(\infty) = s'(0)$ donde $s(z) = \frac{1}{p(1/z)}$.

Definición 1.3.6. Sea p un polinomio. Definimos al conjunto de puntos que escapan para p como

$$I_p := \{z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} p^n(z) = \infty\}$$

y al conjunto de Julia lleno de p como $K_p := \mathbb{C} \setminus I_p$. La frontera $\partial K_p := J_p$ es llamado el conjunto de Julia de p y su complemento $F_p := \mathbb{C} \setminus J_p$.

De la definición es claro que el conjunto de Julia lleno K_p consta de los puntos en el plano cuya órbita no tiende a infinito, en particular es no vacío ya que todo polinomio tiene puntos periódicos finitos. Sean $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ y $R = 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|$, si $|z| > R$ entonces $|p(z)| \geq \frac{|z|^n}{R}$. De esta manera

$$K_p = \bigcap p^{-m}(\bar{D}(0, R)).$$

Por lo tanto el conjunto de Julia lleno es un compacto. Notemos que $I_p = \bigcup p^{-m}(\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, R))$. Definamos los conjuntos $U_m := p^{-m}(\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, R))$. Observemos que U_0 es conexo, veamos por inducción que U_m es conexo para todo m . supongamos que U_m es conexo y U_{m+1} es desconexo. Sea V una componente acotada de U_{m+1} , la restricción $p : V \rightarrow U_m$ es una transformación propia (es decir la preimagen de todo conjunto compacto es un compacto) y por tanto sobreyectiva, lo que es una contradicción ya que p no tiene polos en V . Luego cada U_m es conexo. Por tanto I_p es conexo.

Del hecho de que I_p es conexo se desprende que toda componente (conexa) de $\text{Int}(K_p)$ es simplemente conexa, en verdad, como I_p es conexo entonces también lo es $\bar{I}_p = I_p \cup J_p$, por otro lado, sea V una componente (conexa) de $\text{Int}(K_p)$. Definamos Ω como la unión de \bar{I}_p y las otras componentes (digamos V_i) de $\text{Int}(K_p)$, observe que Ω es el complemento de V . Como $\partial V_i \subset \bar{I}_p$ para cada i , entonces $V_i \cup \bar{I}_p$ es conexo y así Ω también es conexo, por lo tanto V es simplemente conexo. Confrontese este resultado con el Teorema 1.1.19

Ejemplo 1.3.2.

Consideremos a $p(z) = z^2$, entonces tenemos que $K_p = \bar{\Delta}$, $I_p = \Delta^*$, $J_p = \mathbb{S}^1$ y $F_p = \Delta \cup \Delta^*$, observe también que 0 e ∞ son puntos fijos superatractores y que las órbitas de puntos en Δ tienden a 0. Es claro que la

órbita de los puntos en la circunferencia unitaria siempre está contenida en la circunferencia unitaria, pero podemos obtener más información sobre ellas. Identifiquemos a la circunferencia unitaria con el grupo de ángulos $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, tomando vueltas como unidad y no radianes. Más aún consideraremos la representación binaria de cada ángulo en \mathbb{T} para esto sea

$$\sum_2^+ := \{x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \{0, 1\}\}$$

el espacio de sucesiones en dos símbolos.

Definimos la transformación $\theta_2 : \sum_2^+ \rightarrow [0, 1]$ como $\theta_2(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{x_m}{2^m}$, es decir θ_2 asigna el número en el intervalo unitario determinado por su expansión en base 2. Observe que la transformación θ_2 es sobreyectiva pero no inyectiva.

Proposición 1.3.1. *Los puntos que admiten dos representaciones binarias son de la forma $\frac{1}{2^m}$ con $m \in \mathbb{N}$.*

Es decir la transformación θ_2 no es inyectiva sólo en una cantidad numerable de puntos. Definimos una métrica en \sum_2^+ por

$$d(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{|x_m - y_m|}{2^m}.$$

Veamos que θ_2 es Lipschitz, si $x, y \in \sum_2^+$ entonces

$$|\theta_2(x) - \theta_2(y)| = \left| \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\frac{x_m}{2^m} - \frac{y_m}{2^m} \right) \right| \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{|x_m - y_m|}{2^m} = d(x, y).$$

Es decir θ_2 es Lipschitz y por lo tanto continua. También se puede demostrar que para $x, y \in \sum_2^+$, $x_m = y_m$ para todo $n \leq N$ si y sólo si $d(x, y) \leq \frac{1}{2^N}$.

Definamos ahora la transformación $\psi_2 : \sum_2^+ \rightarrow \mathbb{S}^1$ por

$$\psi_2(x) = e^{2\pi i \theta_2(x)}$$

y la transformación de corrimiento de Bernoulli por $\sigma_2^+ : \sum_2^+ \rightarrow \sum_2^+$ como

$$\sigma_2^+(x) = y \quad \text{con} \quad y_n = x_{n+1}.$$

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2^+ & \xrightarrow{\sigma_2^+} & \Sigma_2^+ \\ \psi_2 \downarrow & & \downarrow \psi_2 \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{z^2} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

en este caso los sistemas dinámicos son semi-conjugados.

Observando la dinámica de Σ_2^+ podemos notar que los puntos periódicos y pre-periódicos corresponden a los ángulos racionales. Además de que existen puntos periódicos repulsores de todos los ordenes, de hecho con mutiplicador 2, y que los puntos periódicos así como los pre-periódicos son densos.

Notemos también que si cada combinación finita de 0's y 1's aparece en $x \in \Sigma_2^+$, entonces $x \in \Sigma_2^+$ tiene órbita densa. Como el conjunto de combinaciones finitas de 0's y 1's es numerable entonces basta poner una combinación tras de otra para obtener un punto de órbita densa, este proceso lo podemos realizar de una manera no numerable de formas, es decir existen puntos irracionales de órbita densa y además el conjunto de dichos puntos es denso y no numerable.

El punto $x_0 = 10110011100011110000\dots$, es decir el punto formado por un bloque de tamaño m de 1's seguido por un bloque de tamaño m de 0's para todo m natural, es irracional y su órbita no es densa, ya que los puntos periódicos formados por bloques de un tamaño de terminado de 0's y 1's por ejemplo 0011001100110011... y 000111000111000111... no son de acumulación, de hecho la órbita es un conjunto discreto numerable.

Se sabe que también se pueden encontrar puntos cuya órbita es homeomorfa a un conjunto de cantor.

Ejemplo 1.3.3.

Sea $p_{-2}(z) = z^2 - 2$, notemos que la órbita de 0 es $0, -2, 2, 2, 2, 2, \dots$, es decir 0 es un punto pre-periódico. Consideramos la función $h : \{z \mid |z| \geq 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $h(z) = z + \frac{1}{z}$, observemos que h es inyectiva en el exterior del disco unitario, en verdad si $h(z) = h(w)$ para $z, w \in \Delta^*$ con z entonces

$$z + \frac{1}{z} = w + \frac{1}{w} \Rightarrow z - w = \frac{z - w}{zw} \Rightarrow zw = 1,$$

lo que no es posible. Tenemos que h no es inyectiva en $S^1 \setminus \{0, 1\}$, pues si $z \in S^1 \setminus \{0, 1\}$ entonces $\frac{1}{z} \in S^1 \setminus \{0, 1\}$ y $h(z) = h(\frac{1}{z})$. Veamos ahora que h es sobreyectiva, si $\zeta \in \mathbb{C}$ entonces los puntos $z_1 = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4}}{2}$ y $z_2 = \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4}}{2}$ son tales que $h(z_1) = h(z_2) = \zeta$, como $z_1 z_2 = 1$ entonces existe al menos un punto en el dominio cuya imagen es ζ . Si $z \in S^1$ tenemos que $h(z) = z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$, es decir h transforma a $S^1 \setminus \{0, 1\}$ de modo 2 a 1 en el intervalo abierto $(-2, 2)$ y $h(S^1) = [-2, 2]$. Lo que también demuestra que h es un biholomorfismo entre $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ y Δ^* .

Aún más h semi-conjuga a z^2 y a $p_{-2}(z)$, es decir h hace al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta^* \cup S^1 & \xrightarrow{z^2} & \Delta^* \cup S^1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{z^2 - 2} & \mathbb{C} \end{array}$$

conmutativo. Entonces $K_p = [-2, 2] = J_p$ e $I_p = \mathbb{C} \setminus [-2, 2] = F_p$, Además la dinámica de $z^2 - 2$ en $[-2, 2]$ es entendida mediante la dinámica de z^2 en la circunferencia unitaria.

1.3.3. Propiedades básicas del conjunto de Julia lleno

En la sección esta dedicada a enunciar los resultados clásicos acerca del conjunto Julia lleno. Para más detalles el lector puede consultar [4], [5], [7] o [24].

Definición 1.3.7. *Decimos que un conjunto E es invariante hacia atrás bajo una función f si $f^{-1}(E) = E$, invariante hacia adelante si $f(E) = E$. Si E es invariante hacia atrás y adelante decimos que E es completamente invariante.*

Observe que si la función f es sobreyectiva y E es un conjunto invariante hacia atrás entonces $p(p^{-1}(E)) = E = p(E)$. Es decir si la función es sobreyectiva entonces basta con que el conjunto sea invariante hacia atrás para que sea completamente invariante.

Teorema 1.3.1. *Sea $p(z)$ un polinomio de grado mayor o igual a 2. Entonces los conjuntos K_p , I_p , J_p y F_p son completamente invariantes.*

Demostración. Sea $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ y $R = 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|$, como $K_p = \bigcap f^{-n}(\bar{D}(0, R))$ entonces $p^{-1}(K_p) = K_p$, además como p es sobreyectiva tendemos que K_p es completamente invariante y por lo tanto I_p también lo es. Dado que p es continua y abierta tenemos que $\text{int } K_p$ es completamente invariante, por lo tanto también lo son J_p y F_p . \square

Teorema 1.3.2. *Si p es un polinomio de grado mayor o igual a 2, entonces el conjunto de Julia lleno es perfecto, es decir cerrado y sin puntos aislados.*

Demostración. Sólo falta demostrar que K_p no tiene puntos aislados. Supongamos que K_p tiene un punto aislado digamos z_0 entonces podemos encontrar una curva de Jordan C en I_p con la propiedad de que su interior W intersectado con K_p se reduce a z_0 . Sea R como en el teorema anterior y $V = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$, sabemos que $p(V) \subset V$ y que $V \subset I_p$, por lo cual para todo $z \in I_p$ podemos encontrar un M natural tal que $p^M(z) \in V$, luego podemos encontrar un N tal que $p^N(C) \subset V$. Como $p^N(z_0)$ no está en V , entonces $\mathbb{C} \setminus V \subset p^N(W)$, pero entonces por la completa invarianza de I_p y de K_p , tenemos $K_p = z_0$, en particular $p^{-1}(z_0) = z_0$, entonces $p(z)$ debe ser de la forma $a(z - z_0)^n + z_0$, podemos conjugar este polinomio a uno de la forma $\frac{z^n}{a}$ mediante la función $h = \frac{1}{z - z_0}$ que intercambia el rol de z_0 con el de ∞ en los respectivos, luego el punto z_0 no puede ser aislado. \square

Definición 1.3.8. *Sea p un polinomio de grado mayor o igual a 2. Decimos que un punto $z \in \mathbb{C}$ es crítico si $p'(z) = 0$. Denotamos al conjunto de puntos críticos por C_p y lo llamaremos el conjunto crítico de p .*

Definición 1.3.9. *Definimos al conjunto post-crítico como la órbita hacia adelante del conjunto crítico y lo denotamos por $C^+(p)$, es decir,*

$$C^+(p) = \bigcup_{m=1}^{\infty} p^m(C_p).$$

El conjunto crítico C_p juega un papel muy importante en la conexidad del conjunto de Julia lleno. Como se puede ver en los siguientes teoremas.

Teorema 1.3.3. *(Fatou-Julia). Si p es un polinomio de grado mayor o igual a 2, entonces el conjunto de Julia lleno K_p es conexo si, y sólo si $I_p \cap C_p = \emptyset$.*

Demostración. Sea $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ y $R > 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|$, definimos $V_m = p^{-m}(D(0, R))$ para todo m .

Primero supongamos que $I_p \cap C_p = \emptyset$. Luego para todo m , $p : V_{m+1} \rightarrow V_m$ es un cubriente de grado n ramificado en $n - 1$ puntos, como V_0 es un disco entonces cada V_m es isomorfo a un disco para cada m , entonces del hecho de que $K_p = \bigcap \overline{V_m}$ se tiene que K_p es conexo.

Ahora supongamos que existe un punto crítico α que pertenece al conjunto de escape. Entonces existe un l tal que $\alpha \in V_l$ pero $p(\alpha) \notin V_l$, luego V_m es homeomorfo a un disco para todo $m \geq l$, y $p : V_{l+1} \rightarrow V_l$ es un cubriente no ramificado de grado n . Entonces para todo k , el conjunto abierto V_{l+k} tiene n^k componentes conexas homeomorfas a un disco. □

Como la frontera de un conjunto compacto pleno conexo es conexa entonces J_p también es conexo.

Teorema 1.3.4. *Sea p es un polinomio de grado mayor o igual a 2. Si $C_p \subset I_p$ entonces J_p es totalmente desconexo. En particular $K_p = J_p$.*

Demostración. Como todos los puntos críticos están contenidos en el conjunto de escape entonces la órbita hacia adelante del conjunto crítico

$\bigcup_{m=1}^{\infty} p^m(C_p)$ tiene como único punto de acumulación a ∞ , luego podemos

encontrar una curva de Jordan C de tal forma que su interior W contenga a K_p y el exterior $V = \mathbb{C} \setminus \overline{W}$ contenga a la órbita hacia adelante del con-

junto crítico. Podemos ver que $I_p = \bigcup_{m=1}^{\infty} p^{-m}(V)$, y de este modo existe

un N tal que $p^N(V \cup C_p) \subset V$, así para $m \geq N$ todas las ramas inversas $p^{-m} : \overline{W} \rightarrow W$ están definidas y son conformes. Sea $z_0 \in J_p$, entonces $p^m(z_0) \in J_p$, definimos f_m como la rama inversa de p^m que manda $p^m(z_0)$ a z_0 . Las f_m 's están uniformemente acotadas en una vecindad de \overline{W} y por tanto son una familia normal. Dado que para $z \in W \cap I_p$ la sucesión $f_m(z)$ se acumula en J_p , entonces toda función límite f debe mandar $W \cap I_p$ en J_p . Como J_p no contiene abiertos entonces f debe ser constante, de este modo el diámetro de $f_m(\overline{W})$ tiende a 0. Como $f_m(\partial\overline{W})$ no interseca a J_p entonces $\{z_0\}$ debe ser una componente conexa de J_p , y por lo tanto J_p es totalmente desconexo. □

1.3.4. Comportamiento dinámico cerca de un punto fijo

Los puntos fijos son determinantes en el comportamiento dinámico local y global, se puede ver por ejemplo que si la órbita hacia adelante de un punto z es convergente entonces el punto límite debe ser un punto fijo, algo parecido pasa para los puntos periodicos ya que estos son puntos fijos para alguna iterada. De manera intuitiva podríamos pensar que el comportamiento de la órbita de puntos que están cerca al punto fijo es de algún modo regular. Una vez más haremos uso de la conjugación para explicar el fenómeno dinámico alrededor de los puntos fijos en un sistema de coordenadas más conveniente.

Teorema 1.3.5. *Sea f una función holomorfa en una vecindad de z_0 con expansión de Taylor*

$$f(z) = z_0 + c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots, \quad c_k \neq 0, k \geq 2$$

es decir, tal que z_0 es un punto fijo superatractor. Entonces existen una vecindad U de z_0 y una transformación conforme $\phi : U \rightarrow D(0, r)$ (para algún r) tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ D(0, r) & \xrightarrow{z^k} & D(0, r) \end{array}$$

y $\phi(z_0) = 0$. Dicha ϕ es única salvo multiplicación por una $(k-1)$ -ésima raíz de 1. En particular podemos escoger ϕ tal que $\phi'(z_0) = 1$.

Demostración. (Existencia).

Podemos suponer que $z_0 = 0$, haciendo una conjugación mediante una transformación de Möbius, entonces f tiene expansión de Taylor en una vecindad del origen $f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots$, haciendo una conjugación más podemos suponer que $f(z) = z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \dots$. Sea r de tal forma que $f(D(0, r)) \subset \text{int } D(0, r)$ y $f^n(z) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $z \in D(0, R)$. Definimos $\phi_n(z)$ como la transformación conforme que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 D(0, R) & \xrightarrow{\phi_n} & \mathbb{C} \\
 f \searrow & & \swarrow z^{k^n} \\
 & \mathbb{C} &
 \end{array}$$

tal que $\phi'_n(0) = 1$. Es suficiente probar que la sucesión $\{\phi_n\}$ converge uniformemente a una transformación ϕ , ya que tendríamos

$$\phi \circ f = \lim_{n \rightarrow \infty} [f^{n+1}(z)]^{\frac{1}{k^n}}$$

y

$$[\phi(z)]^k = \lim_{n \rightarrow \infty} [f^{n+1}(z)]^{\frac{1}{k^n}} = \phi \circ f.$$

Por otro lado consideremos a $H(z) = \phi(z)/z$. Observe que $H(0) = 1$ y que se cumple la igualdad $\frac{\phi_{n+1}(z)}{\phi_n(z)} = \left[\frac{\phi_1(f^n(z))}{f^n(z)} \right]^{1/k^n} = [H(f^n(z))]^{1/k^n}$. Definiendo $\phi_0(z) = z$, tenemos que

$$\phi_{n+1}(z) = z \prod_{i=0}^{\infty} \frac{\phi_{i+1}(z)}{\phi_i(z)} = z \prod_{i=0}^{\infty} [H(f^i(z))]^{1/k^i}.$$

Tomando el logaritmo (la rama principal) del producto infinito, tenemos que es suficiente probar que la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k^i} \log[H(f^i(z))]$$

converge uniformemente. Por las condiciones sobre $D(0, r)$ para un i suficientemente grande podemos ver que $|H(f^i(z)) - 1| < 1/2$ y $|H(f^i(z)) - 1| \leq C|f^i(z)|$ para alguna constante C . Como $|H(f^i(z)) - 1| < 1/2$ entonces por el desarrollo logarítmico de $(H(f^i(z)) - 1) + 1$, tenemos que $\log[H(f^i(z))] \leq 2|H(f^i(z)) - 1|$ y por tanto $\log[H(f^i(z))] \leq 2C|f^i(z)|$. Así

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k^i} \log[H(f^i(z))] \leq 2C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|f^i(z)|}{k^i} \leq 2C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r}{k^i},$$

y por lo tanto nuestra serie converge uniformemente.

(Unicidad).

Si existen dos funciones tal que el diagrama conmuta, obtenemos una función φ que conjuga z^k consigo misma, es decir que cumple la ecuación $\varphi(z^k) = \varphi(z)^k$. Como la conjugación φ fija al 0 entonces tiene la forma $\varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, luego por la conjugación obtenemos que $a_1 z^k + a_2 z^{2k} + \dots = a_1^k z^k + a_1^{k-1} a_2 z^{k+1} + \dots$, comparando coeficientes tenemos que $a_n = 0$ para $n > 1$. Por tanto $\varphi(z) = a_1 z$, con $a_1^k = a_1$. Luego la conjugación es única salvo multiplicación de una $k - 1$ -ésima raíz de la unidad. \square

En particular cuando f es un polinomio de grado mayor o igual a 2, si consideramos a f como un endomorfismo de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, entonces ∞ es un punto superatractor, aplicando el teorema anterior y tomando la conjugación por $T(z) = 1/z$, obtenemos:

Teorema 1.3.6. *Sea p un polinomio de grado $k \geq 2$. Entonces existe un r y una transformación conforme ϕ de $V = \{|z| > r\}$ en $\hat{\mathbb{C}}$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{p} & V \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \phi(V) & \xrightarrow{z^k} & \phi(V) \end{array}$$

donde $\phi \in \Sigma$, es decir, tiene la forma $bz + b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots$. Dicha ϕ es única salvo multiplicación por una $(k - 1)$ -ésima raíz de la unidad.

A la función ϕ en los teoremas anteriores le llamamos la función de Böttcher para f en 0 (respectivamente p en ∞).

En el caso polinomial si $C_p \subseteq K_p$ podemos extender ϕ a una transformación conforme de I_p sobre $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$, como veremos más adelante. Observe que la ecuación $\phi(p(z)) = [\phi(z)]^k$ implica que $\log |(\phi(p(z)))| = k |\log(\phi(z))|$. Sea $g(z) = |\log(\phi(z))|$, como $I_p = \bigcup p^{-n}(V)$ podemos definir

$$g(z) = \frac{1}{k^n} g(p^n(z))$$

si $z \in p^{-n}(V)$, lo que nos permite definir g en todo I_p .

Además, g es armónica y tiende a 0 cuando z tiende a la frontera de $I_p \cup \{\infty\}$,

definiendo $g(z) = 0$ en K_p obtenemos una función continua subarmónica en todo C .

Sea $M = \max\{g(z_0) \mid z_0 \in C_p\}$. Si $R > M$ tenemos que $g(z) = R$ es una curva de Jordan, por lo tanto podemos encontrar una función armónica (multi-valuada) g^* conjugada de g tal que $G(z) = e^{g(z)+ig^*(z)}$ es univaluada en $\{|z| > R\}$, tomando la constante aditiva de g^* tal que $G(z) = \phi(z)$ cerca de ∞ obtenemos extensión conforme de $\phi(z)$ en $\{z \in \mathbb{C} \mid g(z) > M\}$. En particular si $C_p \subset K_p$ podemos extender ϕ a una transformación conforme de I_p sobre $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$.

Teorema 1.3.7. *Sea f una función holomorfa en una vecindad de 0 con expansión de Taylor*

$$f(z) = \lambda z + c_2 z^2 + \dots \quad (0 < |\lambda| < 1)$$

es decir, z_0 es un punto fijo atractor (no superatractor). Entonces existen una vecindad U del origen y una transformación conforme $\phi : U \rightarrow D(0, r)$ (para algún r) tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ D(0, r) & \xrightarrow{\lambda z} & D(0, r) \end{array}$$

y $\phi(z_0) = 0$. Dicha ϕ es única salvo multiplicación por una constante. En particular podemos escoger ϕ tal que $\phi'(z_0) = 1$.

Demostración. (Existencia).

Usaremos la misma técnica que en el caso superatractor. Para todo n consideremos la transformación $\phi_n = f^n(z)/\lambda^n = z + \dots$. Observe que

$$\phi_n(f(z)) = \frac{f^{n+1}(z)}{\lambda^n} = \lambda \phi_{n+1}(z).$$

Entonces si $\{\phi_n\}$ converge a ϕ , tenemos que para la transformación límite se cumple la igualdad $\phi(f(z)) = \lambda \phi(z)$.

Elijamos t tal que $t^2 < |\lambda| < t < 1$, y un r de modo que para todo $z \in D(0, r)$

$$|f(z)| < t|z| \quad \text{y} \quad |f(z) - \lambda z| \leq (|c_2| + 1)|z|^2.$$

Sea $\rho = t^2/|\lambda|$. Observemos que

$$\begin{aligned} |\phi_{n+1}(z) - \phi_n(z)| &= \left| \frac{f^{n+1}(z)}{\lambda^{n+1}} - \frac{f^n(z)}{\lambda^n} \right| = \left| \frac{f(f^n(z)) - \lambda f^n(z)}{\lambda^{n+1}} \right| \\ &\leq \frac{(|c_2| + 1) |f^n(z)|^2}{|\lambda^{n+1}|} \leq \frac{(|c_2| + 1) t^{2n}}{|\lambda^{n+1}|} = \frac{(|c_2| + 1) \rho^n |z|^2}{|\lambda|}. \end{aligned}$$

Como $\rho < 1$, $\{\phi_n\}$ converge uniformemente en $D(0, r)$ a

$$\phi(z) = \phi_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_{n+1}(z) - \phi_n(z)).$$

Observe que hemos escogido ϕ_n tal que $\phi'_n(0) = 1$, por tanto ϕ esta normalizada de tal modo que $\phi'(0) = 1$.

(Unicidad).

Si existen dos funciones tal que el diagrama conmuta, obtenemos una función φ que conmuta consigo misma, es decir que cumple la ecuación $\varphi(\lambda z) = \lambda \varphi(z)$. Como la conjugación φ fija al 0 entonces tiene la forma $\varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, luego por la conjugación obtenemos que $a_1 \lambda z + a_2 \lambda^2 z^2 + \dots = \lambda a_1 z + \lambda a_2 z^2 + \dots$, es decir, $a_n \lambda = a_n \lambda^n$ para todo n , esto es posible sólo si $a_n = 0$ para $n > 1$. Por tanto $\varphi(z) = a_1 z$. Luego la conjugación es única salvo multiplicación de una constante. \square

Definición 1.3.10. A la ecuación $\phi(f(z)) = \lambda \phi(z)$ la llamamos la ecuación de Schröder para f . Cuando esta ecuación tiene solución decimos que f es linealizable en 0.

Definición 1.3.11. Sea f una función holomorfa de una superficie de Riemann S sobre sí misma, tal que z_0 es un punto fijo atractor. Definimos la cuenca de atracción de z_0 denotada por $A(z_0)$ como

$$A(z_0) = \{z \in S \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0\}.$$

A la componente conexa de $A(z_0)$ que contiene a z_0 la llamamos la cuenca inmediata de atracción y la denotamos por $A^*(z_0)$.

Observación 1.3.1. *que cuando f es un polinomio considerado como un endomorfismo de la esfera de Riemann, la cuenca de atracción de ∞ , $A(\infty) = I_p = A^*(\infty)$.*

Dada U una vecindad suficientemente pequeña de z_0 , tenemos que $A(z_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$.

En particular sea U como en el teorema anterior, entonces por la ecuación $\phi(f(z)) = \lambda\phi(z)$ podemos extender ϕ a todo $A(z_0)$, definiendo

$$\phi(z) = \frac{\phi(f^n(z))}{\lambda^n}$$

si $z \in f^{-n}(U)$.

Observe que $\phi(z) = 0$ si y sólo si $f^n(z) = z_0$ para algún $n \geq 1$. Por lo tanto la rama de ϕ^{-1} tal que $\phi^{-1}(0) = z_0$ puede ser extendida hasta que encontremos un punto crítico de f o hasta que salgamos del dominio de f . En el caso de una función racional la imagen de ϕ es todo \mathbb{C} y ϕ^{-1} es un cubriente ramificado de \mathbb{C} .

Los siguientes teoremas son válidos para funciones racionales, una demostración de tales resultados puede ser encontrada en [7].

Teorema 1.3.8. *Si z_0 es un punto periódico atractor, entonces la cuenca de atracción $A(z_0)$ es una unión de componentes del conjunto de Fatou, y la frontera de $A(z_0)$ coincide con el conjunto de Julia.*

Teorema 1.3.9. *Si z_0 es un punto periódico atractor, entonces la cuenca inmediata de atracción $A^*(z_0)$ contiene al menos un punto crítico.*

Si f una función holomorfa en una vecindad de 0 con expansión de Taylor

$$f(z) = \lambda z + c_2 z^2 + \dots \quad (|\lambda| > 1)$$

es decir, z_0 es un punto fijo repulsor. Entonces $f^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta}{\lambda} + \dots$ tiene un punto fijo atractor en 0, y de este modo podemos conjugar $f^{-1}(\zeta)$ a $\frac{\zeta}{\lambda}$ mediante una función ϕ . Dicha ϕ también conjuga $f(z)$ a λz .

Cuando p es un polinomio con punto fijo repulsor en 0, la ecuación $\phi^{-1}(\lambda z) = p(\phi^{-1})$ nos permite extender ϕ^{-1} a todo el plano complejo, dicha extensión es una función meromorfa. Para los detalles de la demostración consultese [7].

Estudiemos ahora el caso de un punto periódico parabólico, es decir tal que el multiplicador del punto periódico sea una raíz de la unidad.

Teorema 1.3.10. *Sea f una función racional (de grado mayor o igual a 2) con expansión de Taylor en 0*

$$f(z) = \lambda z + c_2 z^2 + \dots$$

tal que $\lambda^q = 1$ para algún $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\lambda^n \neq 1$ para $n = 1, \dots, q-1$, es decir, $\lambda = e^{2\pi i(p/q)}$ con $(p, q) = 1$. Esto es z_0 es un punto fijo indiferente racional. Entonces f no es linealizable en 0.

Demostración. Supongamos que f satisface la ecuación de Schröder $\phi(f(z)) = \lambda\phi(z)$ en 0, entonces ϕ es una transformación conforme entre dos vecindades de 0, digamos de U sobre V . Luego $\phi(f^q(\phi^{-1}(z))) = \lambda^q z = z$, de este modo $f^q \equiv \text{Id}_U$ y por continuación analítica $f^q \equiv \text{Id}_{\mathbb{C}}$ lo que contradice que f tenga grado mayor o igual a 2. \square

Observación 1.3.2. *Como f^q no es la identidad tenemos que $f^q(z) = z + az^{n+1} + \dots$ donde $n \geq 1$. Observemos que $f(f^q(z)) = f(z) + \lambda az^{n+1} + \dots$ y por otro lado $f^q(f(z)) = f(z) + a(f(z))^{n+1} + \dots = f(z) + a\lambda^{n+1}z^{n+1} + \dots$, entonces $\lambda^{n+1} = \lambda$ y por tanto n es un múltiplo de q . El número $n+1$ es llamado la multiplicidad (o bien el orden) del punto fijo.*

Mediante una conjugación podemos suponer que $f^q(z) = z + z^{n+1} + \dots = z(1 + z^n + \dots)$.

Consideremos el caso $\lambda = 1$.

En este caso podemos escribir $f(z) = z + z^{n+1} + O(z^{n+2}) = z(1 + z^n + O(z^{n+1}))$. Como $\lambda \neq 0$ podemos escoger una vecindad V del origen tal que f es un difeomorfismo de V sobre V' .

Definición 1.3.12. *Decimos que un dominio U con cerradura compacta $\bar{U} \subset V \cap V'$ es un pétalo atractor para f en el origen si $f(\bar{U}) \subset U \cup \{0\}$ y*

$$\bigcap_{k \geq 0} f^k(\bar{U}) = 0.$$

Diremos que $U' \subset V \cap V'$ es un pétalo repulsor para f en el origen si es un pétalo atractor para f^{-1} .

Diremos que un número complejo v es un vector de atracción (respectivamente de repulsión) si $nv^n = -1$ (respectivamente $nv^n = 1$). Estos vectores determinan n semirectas a partir del origen de la forma $\mathbb{R}^+v = \{rv \mid r \in [0, \infty]\}$ donde v es un vector de repulsión (respectivamente de atracción) las orientaciones de dichos vectores están separadas por $1/n$ vueltas una de otra, llamaremos a dichos conjuntos como ejes repulsores (respectivamente ejes atractores) de 0 para f .

Teorema 1.3.11. (Teorema de la flor de Leau-Fatou). Si el origen es un punto fijo parabólico de multiplicidad $n + 1 \geq 2$, entonces existen n pétalos atractores ajenos U_i y n pétalos repulsores ajenos U'_i , tal que la unión de los $2n$ pétalos junto con el origen forman una vecindad V_0 del origen. Los pétalos atractores y repulsores se encuentran distribuidos de manera alternada, de tal forma que cada U_i solamente interseca a U'_j y a U'_{j-1} (donde $U'_0 = U'_n$).

Demostración. Sea v_j un vector atractor, consideremos el sector $S_j = \{re^{i\theta}v_j \mid r > 0, |\theta| < (\pi/n)\}$ y el cambio de variable $w = \varphi(z) = 1/(-nz^n)$. Observe que $\varphi(z)$ es un biholomorfismo entre S_j y el plano cortado $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Por lo tanto existe una única rama analítica ψ_j de φ^{-1} que manda a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ sobre S_j , para cada uno de los n vectores atractores. Es decir obtenemos n ramas analíticas de $\varphi^{-1}(w) = \sqrt[n]{-1/(nw)}$.

Cuando z tiende a 0 tenemos que

$$f(z) = z(1 + az^n + o(z^n)),$$

donde la notación $o(z^n)$ representa un término residual que depende de z tal que $o(z^n)/z^n \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow 0$. Para analizar el comportamiento de f en S_j en puntos cercanos a cero es de utilidad considerar la transformación $F_j(w) = \varphi \circ f \circ \psi_j(w)$ definida en el exterior de un disco (suficientemente grande) en el w -plano cortado, dicha transformación toma valores en todo el w -plano. Tenemos que

$$f \circ \psi_j(w) = \sqrt[n]{-1/(nw)} \left(1 + \frac{-1}{nw} + o\left(\frac{1}{w}\right)\right)$$

cuando w tiende a ∞ . Luego

$$F_j(w) = w \left(1 + \frac{-1}{nw} + o\left(\frac{1}{w}\right)\right)^{-n} = w \left(1 - \frac{n}{-nw} + o\left(\frac{1}{w}\right)\right)$$

es decir, $F_j(w) = w + 1 + o(1)$ cuando $|w| \rightarrow \infty$.

De este modo podemos encontrar un $R > 0$ tal que $|F_j(w) - w - 1| < 1/2$ cuando $|z| > R$, en particular $\operatorname{Re}(F_j(w)) > \operatorname{Re}(w) + 1/2$. Además la pendiente del segmento que une w con $F_j(w)$ está acotada, de hecho $|\operatorname{Im}(F_j(w) - w)| < \operatorname{Re}(F_j(w) - w)$. Consideremos la región $\mathbb{H}_R = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) > R\}$ y su imagen $\mathcal{P}_j(R) = \psi_j(\mathbb{H}_R) = \{z \in S_j \mid \operatorname{Re}(\varphi(z)) > R\}$. Se tiene que $F_j(\overline{\mathbb{H}_R}) \subset \mathbb{H}_R$ y por lo tanto $f(\overline{\mathcal{P}_j(R)}) \subset \mathcal{P}_j(R)$. Observe que entonces las iteradas de $f|_{\mathcal{P}_j(R)}$ convergen uniformemente a la función constante 0. Con lo que obtenemos un pétalo atractor para f en el origen. Haciendo esto para los n vectores atractores conseguimos los n pétalos atractores. Haciendo un razonamiento análogo tomando los vectores repulsivos para definir los sectores podemos obtener n pétalos atractores para f^{-1} , o bien pétalos, repulsivos para f .

□

Observe que si U_i es un pétalo atractor, entonces la sucesión de iteradas $f^k|_{\overline{U_i}}$ converge uniformemente a cero. Y si U'_i es un pétalo repulsivo, entonces toda órbita que empieza en U'_i eventualmente debe salir de U'_i , de hecho debe de salir de la unión $U'_1 \cup U'_2 \cup \dots \cup U'_n$. Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.3.1. *No existe otra órbita periódica en V_0 aparte del punto fijo en el origen.*

Definición 1.3.13. *Sea f como arriba. Definimos la cuenca parabólica de atracción determinada por U_j como $\Omega_j := \{z \mid f^m(z) \in U_j \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}$. A la componente (conexa) de Ω_j la llamamos cuenca inmediata parabólica de atracción determinada por U_j . El conjunto $\Omega = \bigcup \Omega_j$ será llamado la cuenca parabólica de atracción de f en 0.*

Observación 1.3.3. *Las cuencas parabólicas de atracción determinadas por cada pétalo son disjuntas dos a dos.*

Ahora consideremos el caso general, es decir en el cual 0 es un punto periódico de periodo k con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$, entonces 0 es un punto fijo con multiplicador 1 de la iterada f^{kq} en 0 . Definiremos las cuencas parabólicas de atracción para f en 0 como las cuencas parabólicas de atracción de f^{kq} en 0 .

Corolario 1.3.2. *La familia f_{Ω}^k converge uniformemente a cero.*

Observe que la órbita bajo f de un punto $\mathcal{O}^+(z)$ tal que $0 \notin \mathcal{O}^+(z)$ converge a cero si y sólo si la órbita eventualmente está contenida en algún pétalo atractor U_j , y por tanto pertenece a la cuenca parabólica de atracción Ω_j .

Corolario 1.3.3. *Para cada cuenca de atracción se cumple que $\Omega_j \subset F_f$ y la frontera de cada cuenca $\partial\Omega_j \subset J_f$. En particular $0 \in J_f$ y cada pétalo repulsor U'_j intersecta a J_f .*

Demostración. Es claro que $\Omega_j \subset F_f$. Demostremos ahora que el punto fijo parabólico 0 pertenece al conjunto de J_f . Observe que $f^m(z) = z + mz^{n+1} + O(z^{n+2})$ luego su derivada $n + 1$ -ésima en 0 es $(n + 1)!m$ que es divergente cuando $m \rightarrow \infty$, por lo tanto ninguna subsucesión de iteradas f^{m_j} puede converger uniformemente en una vecindad del origen. Por lo tanto $0 \in J_f$, y por la invarianza del conjunto de Julia tenemos que la órbita hacia atrás de 0 debe estar contenida en J_f . Sea $z_1 \in \partial\Omega_j$ tal que su órbita no contenga a 0 . Como la órbita de z_1 no converge a cero entonces podemos extraer una subsucesión de la órbita de z_1 contenida en el complemento de alguna vecindad de cero, como la sucesión de iteradas $f_{\Omega_j}^k$ converge a 0 , entonces la sucesión f^k no es normal en ninguna vecindad del punto z_1 , por lo tanto $\partial\Omega_j \subset J_f$. Aún más cada pétalo repulsor U'_j intersecta a J_f . \square

Observación 1.3.4. *Cuando 0 es un punto periódico de periodo k con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ como el número de pétalos atractores n es un múltiplo de q digamos $n = mq$ entonces f debe permutar los n pétalos en m ciclos de longitud q .*

Definición 1.3.14. *Entenderemos por un sistema de pétalos atractores \mathcal{P}_i de f en el origen cada uno de los m ciclos de longitud q . La cuenca inmediata de \mathcal{P}_i denotada por $\mathcal{A}(\mathcal{P}_i)$ es la unión de las componentes conexas de $\Omega(\mathcal{P}_i)$.*

Teorema 1.3.12. *La cuenca inmediata $\mathcal{A}(\mathcal{P}_i)$ de un sistema de pétalos de un punto fijo parabólico de f contiene al menos un punto crítico.*

Corolario 1.3.4. *La cuenca inmediata Ω de un punto fijo parabólico de f contiene al menos m puntos críticos donde m es el número de ciclos de pétalos de f en el origen.*

Observación 1.3.5. *Si f una función racional (de grado mayor o igual a 2) con punto fijo indiferente en el origen, es decir $|f'(0)| = 1$, es linealizable en 0 entonces las iteradas de f en una vecindad de 0 corresponden a las iteradas de una rotación en un disco con centro en 0 y por lo tanto las iteradas de f forman una familia normal y 0 está en el conjunto de Fatou de f .*

Definición 1.3.15. *Un punto fijo indiferente irracional será llamado un punto de Siegel si existe una linealización y a la componente del conjunto de Fatou en la cual f es conformemente conjugada a una rotación del disco unitario la llamamos disco de Siegel. Si la linealización no es posible diremos que el punto fijo es un punto de Cremer.*

Dado un número irracional $\xi \in (0, 1)$ consideremos su expansión fraccionaria continua

$$\xi = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

donde los a_i son estrictamente positivos y están determinados de manera única. Los números racionales

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k-1}}}}}$$

son llamados los racionales convergentes a ξ .

Usaremos el hecho de que $|1 - \lambda^{q_k}| \leq \frac{2\pi}{q_{k+1}}$. Una prueba de este hecho se puede encontrar en [24].

Teorema 1.3.13. *Existe un ángulo $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que la ecuación de Schröder no tiene solución para ningún polinomio f .*

Demostración. Sea $f(z) = z^n + \dots + \lambda z$. Supongamos que existe una conjugación ϕ definida en $D(0, r)$ para algún r . Observemos que la iterada f^k tiene n^k puntos fijos, las soluciones de la ecuación

$$f^k(z) - z = z^{n^k} + \dots + (\lambda^k - 1)z = 0.$$

Es claro que un punto fijo es 0, denotemos a los otros por z_1, \dots, z_{n^k-1} . Como $f^k(z) = \phi(\lambda^k(\phi^{-1}(z)))$ entonces el 0 es la única raíz de $f^k(z) - z$ en $D(0, r)$, luego $r^{n^k} \leq \prod |z_j| = |1 - \lambda^k|$.

Construyamos una λ que no cumpla la desigualdad. Sea $q_1 < q_2 < \dots$ los denominadores de los números racionales convergentes a θ , por la desigualdad $|1 - \lambda^{q_k}| \leq \frac{2\pi}{q_{k+1}}$ basta tomar un ángulo de tal manera los q_n crezcan muy rápidamente para que la desigualdad anterior no se cumpla para todo n y todo r . \square

Decimos que un número irracional ξ cumple una condición diofantina de orden k si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{\varepsilon}{q^k}$$

para cada número racional p/q . El conjunto de tales números se denota por $\mathcal{D}(k)$. Observe que si $k < l$ entonces $\mathcal{D}(k) \subset \mathcal{D}(l)$. Se sabe que el conjunto $\mathcal{D}(k)$ es vacío para $k < 2$, que

$$\mathcal{D}(2+) = \bigcap_{k > 2} \mathcal{D}(k)$$

tiene medida total en la circunferencia \mathbb{R}/\mathbb{Z} en el sentido de Lebesgue y que $\mathcal{D}(2)$ tiene medida cero.

Teorema 1.3.14. (Siegel, 1942). *Si θ es un número que satisface una condición diofantina y si f tiene un punto fijo en el origen con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ entonces f es localmente linealizable en el origen.*

Diremos que un número irracional ξ cumple la condición de Brjuno si $\sum \frac{1}{q^n} \log(q_{n+1}) < \infty$ donde los q_n son los denominadores de los racionales convergente a ξ .

Teorema 1.3.15. (Brjuno, 1972). *Si θ es un número que satisface la condición de Brjuno y si f tiene un punto fijo en el origen con multiplicador $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ entonces f es localmente linealizable en el origen.*

Dado que todo número que cumple una condición diofantina cumple la condición de Brjuno este teorema es una versión más fina que el teorema de Siegel. En 1987 Yoccoz que el resultado de Brjuno es el mejor posible.

Teorema 1.3.16. (Yoccoz, 1987). *Si θ es tal que $\sum \frac{1}{q^n} \log(q_{n+1}) = \infty$ entonces la transformación $f(z) = z^2 + e^{2\pi i\theta} z$ tiene un punto de Cremer en el origen.*

La demostración de los dos resultados anteriores puede ser encontrada en [24].

1.3.5. Algunos otros resultados sobre los conjuntos de Julia y Fatou

Esta parte esta dedicada para enunciar algunos resultados clásicos sobre la dinámica racional, que en particular son válidos para el caso polinomial. El lector puede consultar cualquiera de las siguientes referencias [4], [7] o [24] para los detalles de las demostraciones.

Teorema 1.3.17. *El conjunto de Julia contiene todos los puntos fijos repulsores y todos los puntos fijos indiferentes que no corresponden a discos de Siegel. El conjunto de Fatou contiene todos los puntos fijos atractores y todos los puntos fijos indiferentes que corresponden a discos de Siegel.*

Teorema 1.3.18. *Para todo $N > 0$, el conjunto de Julia de una transformación racional R coincide con el de la transformación R^N .*

Teorema 1.3.19. *Si $z \in J_R$ entonces $\mathcal{O}^-(z)$ es densa en J_R .*

Teorema 1.3.20. *Si $U \subset J_R$ es completamente invariante entonces U es denso en J_R . Si D es una unión de componentes de F_R que es completamente invariante, entonces $J_R = \partial D$.*

Teorema 1.3.21. *El número de ciclos no repulsores es a lo más $6d - 6$. Donde d es el grado de la transformación racional.*

En su tesis de maestría Shishikura utilizando cirugía casi-conforme obtuvo la versión más fina del resultado acotando el número de ciclos no repulsores por $2d - 2$. Para los polinomios se tiene el siguiente resultado que fue probado por Douady.

Teorema 1.3.22. *Si p es un polinomio de grado $d > 1$. Entonces el número de ciclos acotados no repulsivos es a lo más $d - 1$.*

Teorema 1.3.23. *El conjunto de Julia de una transformación racional coincide con la cerradura de los puntos periódicos repulsivos.*

Teorema 1.3.24. *Si U un abierto tal que $U \cap J_R \neq \emptyset$, entonces existe un entero N tal que $R^N(U \cap J_R) = J_R$.*

Definición 1.3.16. *Sea U una componente (conexa) del conjunto de Fatou F_R .*

1. *Si $R(U) = U$, decimos que U es una componente fija de F_R ,*
2. *Si $R^n(U) = U$, para algún $n > 0$, decimos que U es una componente periódica de F_R . El menor n para el cual se cumple esto es llamado el periodo de la componente,*
3. *Si $R^m(U) = U$ es periódica, para algún $m > 0$, decimos que U es una componente pre-periódica de F_R ,*
4. *De otro modo, todos los $\{R^n(U)\}$ son distintos y decimos que U es una componente errante de F_R .*

Teorema 1.3.25. *Si U es una componente completamente invariante de F_R , entonces $J_R = \partial U$, y cualquier otra componente de F_R es simplemente conexa. Existen a lo más dos componentes de F_R completamente invariantes.*

Teorema 1.3.26. *El número de componentes del conjunto de Fatou sólo puede ser $0, 1, 2$ o ∞ , y todos los casos pueden ocurrir.*

Teorema 1.3.27. *Una transformación racional no tiene dominios errantes.*

El teorema anterior permite clasificar las componentes del conjunto de Fatou F_R .

Una componente periódica U de periodo n del conjunto de Fatou se dice *parabólica* si en su frontera existe un punto fijo indiferente ζ para R^n con multiplicador 1, tal que todos los puntos en U convergen a ζ bajo la iteración de R^n . Los dominios $U, R(U), \dots, R^{n-1}(U)$ forma un un *ciclo parabólico*. Su unión es la cuenca inmediata de atracción asociada con el pétalo atractor en ζ .

Una componente periódica de periodo n del conjunto de Fatou es llamada un *anillo de Herman* si es doblemente conexa y R^n es conjugada a una rotación sobre un anillo o bien a una rotación seguida de una inversión.

Teorema 1.3.28. *Sea U una componente periódica del conjunto de Fatou. Entonces exactamente una de las siguientes ocurre:*

1. U contiene un punto periódico atractor.
2. U es parabólica.
3. U es un disco de Siegel.
4. U es un anillo de Herman.

Observación 1.3.6. *En el caso polinomial los anillos de Herman no pueden ocurrir como consecuencia del principio del máximo, para los detalles vease [5]. Por lo tanto, para un polinomio toda componente periódica sólo tiene tres posibilidades.*

1.3.6. Conjuntos de Julia localmente conexos

Sea $K \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto conexo pleno, por el teorema de la transformación de Riemann existe una única pareja (r, φ) tal que $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ y φ es una transformación conforme entre $\mathbb{C} \setminus K$ y $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, r)}$ tangente a la identidad en infinito, es decir, $\varphi(z)/z \rightarrow 1$ cuando $|z| \rightarrow \infty$.

Definición 1.3.17. *Al número r en la definición anterior le llamamos la capacidad conforme de K .*

Observación 1.3.7. *Si f es un polinomio mónico de grado n mayor o igual a 2 de tal forma que K_f es conexo entonces la representación conforme tangente a la identidad es una extensión de la transformación de Bötcher que conjugue a f con z^n , como vimos anteriormente cuando K_f es conexo la imagen de dicha extensión es el exterior del disco unitario, por lo tanto la capacidad conforme de K_f es 1.*

Observación 1.3.8. *Si además de conexo K_f es localmente conexo por el teorema de Carathéodory la representación conforme $\psi = \varphi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta} \rightarrow \mathbb{C} \setminus K_f$ tangente a la identidad en infinito tiene una extensión continua*

a $\mathbb{C} \setminus \Delta$. Obtenemos entonces una transformación continua y sobreyectiva $\gamma : \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \partial K_f$ dada por $\gamma(t) = \psi(e^{2\pi it})$, esta curva es llamada el lazo de Carathéodory de K_f (o de f).

Definición 1.3.18. Sean $K \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto pleno, conexo y $t \in \mathbb{T}$. LLamaremos al conjunto $\mathcal{R}(K, t) = \{\varphi^{-1}(\rho e^{2\pi it}) \mid \rho > r\}$ el rayo externo de K de argumento t , donde φ es la representación conforme tangente a la identidad en infinito y r es la capacidad conforme de K . Si existe el límite $x \in K$ de $\varphi^{-1}(\rho e^{2\pi it})$ cuando $\rho \rightarrow r$, decimos que $\mathcal{R}(K, t)$ aterriza en x .

El siguiente método es usado cuando se quiere demostrar que un conjunto de Julia de un polinomio es localmente conexo.

Sean f un polinomio como arriba y $\gamma_0 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ un lazo (es decir γ_0 es una curva cerrada) tal que $\gamma_0(\mathbb{T}) \subset \mathbb{C} \setminus K_f$, $\gamma_0(0) \in \mathcal{R}(K_f, 0)$ y γ_0 de índice 1 respecto a un punto (y por tanto a todos los puntos) de K_f .

Observemos que la transformación $\varphi \circ \gamma_0(t)$ tiene la forma $\rho(t)e^{2\pi i\theta(t)}$ donde $\rho : \mathbb{T} \rightarrow (1, \infty)$ y $\theta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ son continuas con $\theta(0) = 0$, podemos levantar θ a $\tilde{\theta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\tilde{\theta}(0) = 0$ y $\tilde{\theta}(t+1) = \tilde{\theta}(t)$. De este modo podemos definir una sucesión de lazos γ_n tomando $\gamma_n(t) = \varphi^{-1}(\rho_n(t)e^{2\pi i\theta})$ donde $\rho_n(t) = \rho(d^n t)^{1/d^n}$ y $\theta_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ es dada por $\tilde{\theta}_n(t) = \frac{1}{d^n} \tilde{\theta}(d^n t)$. Observe que la sucesión γ_n cumple $f(\gamma_{n+1}(t)) = \gamma_n(d \cdot t)$.

Observación 1.3.9. Si K_f es localmente conexo ψ se extiende continuamente a $\mathbb{C} \setminus \Delta$ y entonces la sucesión $\gamma_n(t)$ converge uniformemente en \mathbb{T} a $\psi(e^{2\pi it})$, es decir $\lim(\gamma_n)$ es el lazo de Carathéodory de K_f .

Recíprocamente si $\gamma_n(t)$ converge uniformemente a una lazo $\gamma_\infty : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces para todo conjunto compacto de $\hat{\mathbb{C}} \setminus K_f$ existe un ε tal que $\hat{\mathbb{C}} \setminus K_f \subset \psi(\hat{\mathbb{C}} \setminus D(0, 1+\varepsilon))$. Además como $\rho_n \rightarrow 1$ uniformemente, entonces para cada vecindad V de K_f existe N tal que $\gamma_n(\mathbb{T}) \subset V$ para todo $n > N$. De estas dos afirmaciones obtenemos que $\gamma_\infty(\mathbb{T}) \subset \partial K_f$. Por otro lado sean $w \in \partial K_f$ y $y \in \mathbb{C} \setminus K_f$, consideremos una curva L en $\hat{\mathbb{C}} \setminus K_f$ que une a y con ∞ . Para n suficientemente grande $\gamma_n(\mathbb{T}) \cap L = \emptyset$, de este modo γ_n tiene índice 0 respecto a y y como γ_n tiene índice 1 respecto a w tenemos que $\gamma_n(\mathbb{T})$ interseca el segmento de línea que une w con y , esto es existe un t_n tal que $\gamma_n(t_n)$ está en dicho segmento, por lo cual $|\gamma_n(t_n) - w| < |y - w|$. Como y es un punto

arbitrario de $\mathbb{C} \setminus K_f$ podemos encontrar una sucesión (n_m) y una sucesión $s_m = t_{n_m}$ tal que $\gamma_{n_m}(s_m) \rightarrow w$. Extrayendo una subsucesión si es necesario, podemos suponer que (s_m) tiene límite s y entonces $\gamma_\infty(s) = w$. Por lo tanto tenemos $\partial K_f \subset \gamma_\infty(\mathbb{T})$.

Finalmente como $\partial K_f = \gamma_\infty(\mathbb{T})$ y la imagen de un compacto localmente conexo bajo una función continua es un compacto localmente conexo, entonces ∂K_f es localmente conexo y por tanto K_f es localmente conexo.

Las transformaciones expansivas y sub-expansivas juegan un papel muy importante en la conexidad local de J_f y por tanto de K_f . Veremos que si f es una transformación sub-expansiva en su conjunto de Julia entonces J_f es localmente conexo.

Definición 1.3.19. Sean Ω un abierto de \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una transformación holomorfa y K un subconjunto compacto de Ω . Decimos que f es expansiva en K si $f(K) \subset K$ y existen V vecindad de K en Ω , una métrica conforme $ds = u(z) |dz|$ en V y una constante $\beta > 1$ de forma que

$$u(f(z)) |f'(z)| \geq \beta u(z)$$

para todo $z \in K$.

Observación 1.3.10. Como

$$\frac{u(f^m(z))(f^m)'(z)}{u(z)} = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{u(f^{j+1}(z))}{u(f^j(z))} f'(f^j(z))$$

entonces $u(f^m(z)) |(f^m)'(z)| \geq \beta^m u(z)$ para todo $m \geq 1$.

Lema 1.3.29. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. f es expansiva en K .
2. Existe $a > 0$ y $\beta > 1$ tal que $|(f^m)'(z)| \geq a\beta^m$ para todo $z \in K$ y todo $m \geq 1$.
3. Existe $j \geq 1$ tal que $|(f^j)'(z)| \geq a$ para todo $z \in K$.

Como consecuencia de (3) tenemos que si f^m es expansiva en K para algún m entonces también lo es f , y también cada iterada de f .

Ejemplo 1.3.4. $f(z) = z^n$ es expansiva en la circunferencia unitaria ya que $|f'(z)| = n$ para todo $z \in \mathbb{S}^1$.

Definición 1.3.20. Una métrica conforme $ds = u(z) |dz|$ es admisible en Ω un abierto de \mathbb{C} si u está definida, es continua y positiva en $\Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, y si $m_i \leq u(z) \leq c_i / |z - a_i|^{\alpha_i}$, donde $m_i > 0$, $0 < \alpha_i < 1$ y $c_i < \infty$, en una vecindad de cada punto a_i .

Una métrica admisible permite definir una longitud finita para toda curva analítica real a trozos y una distancia compatible con la topología usual. Para más detalles se puede consultar en [7], [15] o [24].

Definición 1.3.21. Sean Ω un abierto de \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una transformación holomorfa y K un subconjunto compacto de Ω . Decimos que f es sub-expansiva en K si $f(K) \subset K$ y existen V vecindad de K en Ω , una métrica admisible $ds = u(z) |dz|$ en V y una constante $\beta > 1$ de forma que

$$u(f(z)) |f'(z)| \geq \beta u(z)$$

para todo $z \in K \setminus (\{a_i\}_i \cup f^{-1}(\{a_i\}_i))$ y cada $f(a_i)$ es igual a un a_j .

Definición 1.3.22. Decimos que un polinomio p es hiperbólico (respectivamente sub-hiperbólico) si p es expansivo (respectivamente sub-expansivo) en su conjunto de Julia J_p .

La demostración de los siguientes teoremas se puede encontrar en [7], [15],[24] o [27].

Teorema 1.3.30. Sea p un polinomio tal que K_p es conexo. Si p es sub-hiperbólico entonces K_p es localmente conexo.

Observe que si un polinomio es hiperbólico en particular es sub-hiperbólico.

Los siguientes teoremas nos brindan una caracterización de la hiperbolicidad y sub-hiperbolicidad en terminos del comportamiento de los puntos críticos.

Teorema 1.3.31. Sea p un polinomio. Las siguientes condiciones son equivalentes

1. p es hiperbólico.
2. Todo punto crítico de p que pertenece a K_p converge bajo iteración (es atraído) a un ciclo atractor.
3. La cerradura del conjunto post-crítico es disjunta del conjunto de Julia J_p .

Teorema 1.3.32. *Sea p un polinomio. p es sub-hiperbólico si y sólo si todo punto crítico de p que pertenece a K_p es pre-periódico o es atraído a un ciclo atractor.*

Ejemplo 1.3.5. *Consideremos un polinomio cuadrático de la forma $p_c = z^2 + c$ que tenga un ciclo atractor acotado, entonces la cuenca inmediata de atracción contiene al punto crítico, de este modo p_c es hiperbólico y J_c es localmente conexo.*

Definición 1.3.23. *Decimos que $c \in \mathbb{C}$ es un punto Misiurewicz si para el polinomio $p_c = z^2 + c$ el punto crítico 0 es estrictamente pre-periódico.*

Ejemplo 1.3.6. *Si c es un punto Misiurewicz como el punto crítico es pre-periódico entonces su órbita no tiende a infinito y por lo tanto está en K_c , como además dicho punto es pre-periódico entonces $p_c = z^2 + c$ es sub-hiperbólico, luego J_c es conexo y localmente conexo.*

Observe que si c es un punto Misiurewicz entonces el ciclo en el que las iteradas de 0 eventualmente se encuentran no puede ser atractor, ya que si lo fuera, 0 tendría que estar en una componente periódica y por tanto debería ser periódico. Como p_c es sub-hiperbólico en J_c , entonces no puede existir un ciclo indiferente, por lo tanto el ciclo debe ser repulsor. Aún más como toda componente de K_c debe ser pre-periódica, entonces tenemos que $\text{Int}(K_c)$ es vacío. Por lo tanto J_c es una *dendrita*, es decir, es un conjunto compacto conexo por trayectorias localmente conexo denso en ninguna parte que no separa el plano. Recordemos que un conjunto es denso en ninguna parte si su cerradura tiene interior vacío, y un conjunto no separa al plano si su complemento es conexo.

Usando argumentos análogos a los de arriba se puede mostrar

Teorema 1.3.33. *Si p es un polinomio cuyo conjunto post-crítico finito y tal que ningún punto crítico finito es periódico. Entonces el conjunto de Julia J_p es una dendrita.*

Damos ahora dos propiedades de los polinomios hiperbólicos. La demostración del primer resultado se encuentra en [7], [15], [27] mientras que una demostración del segundo resultado puede ser consultada en [27].

Teorema 1.3.34. *Si p es un polinomio es sub-hiperbólico, entonces el conjunto de Julia J_p tiene medida de Lebesgue 0.*

Teorema 1.3.35. *Si p es un polinomio hiperbólico cuyo conjunto de Julia J_p es conexo y distinto de una circunferencia, de una línea, y también es distinto de todo sub-arco de una circunferencia o de una línea entonces J_p no tiene línea tangente en ningún punto, y por tanto no es localmente rectificable en ningún punto.*

Los conjuntos de Julia de polinomios sub-hiperbólicos no agotan las posibilidades de conjuntos de Julia localmente conexos.

Teorema 1.3.36. *Sea p es un polinomio. Supongamos que para cada punto crítico ω de p , una de las siguientes posibilidades ocurre*

1. ω es atraído a un ciclo atractor.
2. las iteradas de ω eventualmente (bajo un número finito de iteradas) entran en un ciclo repulsor.
3. ω es atraído por un ciclo indiferente racional.

Entonces K_p es conexo y localmente conexo.

No se dara demostración de este resultado, una vez más remitimos al lector a [7], [15].

Teorema 1.3.37. *Sea $p_c = z^2 + c$ un polinomio cuadrático con un ciclo indiferente racional. Como la cuenca inmediata parabólica de atracción contiene al punto crítico 0 entonces tenemos que J_c es conexo y localmente conexo.*

1.4. Polinomios y rayos externos

Recordemos que si p un polinomio de grado n mayor o igual a 2 tiene conjunto de Julia conexo (o equivalentemente conjunto de Julia lleno conexo), entonces por el teorema de la transformación de Riemann sabemos que $\mathbb{C} \setminus K_p$ es conformemente equivalente a $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$ mediante la representación conforme φ

la cual conjuga al polinomio p en el complemento de K_p con la transformación $g(w) = w^n$ en el exterior del disco unitario. La función continua $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(z) = \begin{cases} \log |\varphi(z)| & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus K_p \\ 0 & \text{si } z \in K_p \end{cases}$$

es llamada la *función de Green* para K_p .

Observación 1.4.1. Si $z \in \mathbb{C} \setminus K_p$ entonces $G(f(z)) = \log |f(\varphi(z))| = \log |\varphi(z)|^n = nG(z)$, además si $z \in K_p$ entonces $f(z) \in K_p$. Por lo tanto se cumple la identidad $G(f(z)) = nG(z)$ para todo z .

Cada uno de los conjuntos $G^{-1}(a) = \{z \mid G(z) = a\}$ con $a > 0$ es llamado una *curva equipotencial* alrededor del conjunto de Julia lleno K_p . Observe que el polinomio p es una transformación cubriente que envía cada equipotencial $G^{-1}(a)$ al equipotencial $G^{-1}(na)$ de modo n a 1. Además los rayos externos son trayectorias ortogonales a la familia de curvas equipotenciales para K_p .

Observación 1.4.2. Una vez más usando el hecho de que p es conjugado a z^n , obtenemos la identidad $p(\mathcal{R}(K_p, t)) = \mathcal{R}(K_p, nt)$. De lo cual tenemos que si $t \in \mathbb{T}$ es periódico bajo la multiplicación por n entonces el rayo $\mathcal{R}(K_p, t)$ es periódico.

Lema 1.4.1. Si el rayo $\mathcal{R}(K_p, t)$ aterriza en un punto $\gamma(t)$ de J_p entonces el rayo $\mathcal{R}(K_p, nt)$ aterriza en el punto $\gamma(nt) = p(\gamma(t))$. Más aún cada uno de los n rayos de la forma $\mathcal{R}(K_p, (t+j)/n)$ aterriza en uno de los puntos de $p^{-1}(\gamma(t))$, y cada punto en $p^{-1}(\gamma(t))$ es un punto donde aterriza al menos un rayo

Demostración. Existen dos casos, si $z \in J_p$ no es un punto crítico entonces existen vecindades U y V de z y $p(z)$ respectivamente tal que p es un difeomorfismo de U sobre V , de este modo p manda al conjunto $\mathcal{R}(K_p, s) \cap U$ en $\mathcal{R}(K_p, ns) \cap V$. Por lo cual si un rayo $\mathcal{R}(K_p, s)$ aterriza en z entonces el

rayo $\mathcal{R}(K_p, ns)$ aterriza en $p(z)$. Por otro lado si $\mathcal{R}(K_p, t)$ aterriza en $p(z)$ entonces para un únicamente determinado s de la forma $(t + j)/n$ el rayo $\mathcal{R}(K_p, s)$ aterriza en z . Si z es un punto crítico p es una transformación cubriente ramificada de U sobre V , de tal modo que cada rayo que aterriza en $p(z)$ es imagen de dos o más rayos que aterrizan en z . \square

Teorema 1.4.2. *El conjunto de ángulos para los cuales el rayo externo aterriza tiene medida total en \mathbb{T} .*

Demostración. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left(\int_A |\psi'(z)| |dz|^2 \right)^2 &\leq \left(\int_A |dz|^2 \right) \left(\int_A |\psi'(z)|^2 |dz|^2 \right) \\ &= \text{área}(A) \cdot \text{área}(\psi(A)) < \infty. \end{aligned}$$

De este modo $\int_1^2 |\psi'(\rho e^{2\pi it})| d\rho$ es finita para todo $t \in \mathbb{T}$ salvo un conjunto de medida cero. Es decir, la parte final de $\mathcal{R}(K, t)$ tiene longitud finita y por tanto $\mathcal{R}(K, t)$ converge para todo $t \in \mathbb{T}$ salvo un conjunto de medida cero. \square

Teorema 1.4.3. *(F. y M. Riesz). Sea $w_0 \in \partial K$ el conjunto de ángulos*

$$E = \{t \in \mathbb{T} \mid \lim_{\rho \rightarrow 1+} \psi(\rho e^{2\pi it}) = w_0\}$$

tiene medida cero.

Definición 1.4.1. *Un punto $w_0 \in \partial K$ es accesible si existe una curva en $\mathbb{C} \setminus K$ que converge a w_0*

Por un teorema de Lindelöf se sabe que un punto es accesible si y sólo si es accesible por una geodésica hiperbólica. Observe que el Teorema 1.1.18 tiene los siguientes corolarios

Corolario 1.4.1. *(Teorema de Lindelöf). Sea $w_0 \in \partial K$. Si $\psi(z)$ converge a w_0 cuando z tiende a $e^{2\pi it}$ a lo largo de una curva γ en $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$, entonces el rayo $\mathcal{R}(K, t)$ también aterriza en w_0 .*

Corolario 1.4.2. *Un punto en ∂K es accesible si y sólo si es el punto de aterrizaje de un rayo. De manera más precisa si δ es una curva en $\mathbb{C} \setminus K$ que converge a $w_0 \in \partial K$ entonces, $\gamma = \psi^{-1} \circ \delta$ converge a un punto $e^{2\pi it} \in \mathbb{S}^1$ y el rayo $\mathcal{R}(K, t)$ aterriza en w_0 .*

Teorema 1.4.4. *Si w_0 es un punto en ∂K tal que $K \setminus \{w_0\}$ tiene $m(> 1)$ componentes (conexas), entonces al menos m rayos externos aterrizan en w_0 .*

Corolario 1.4.3. *Si m rayos externos aterrizan en $w_0 \in \partial K$ entonces $K \setminus \{w_0\}$ tiene exactamente m componentes (conexas).*

Para más detalles de los teorema anteriores y consultar las demostraciones remitimos al lector a [26].

Teorema 1.4.5. *Sea p un polinomio cuyo conjunto de Julia J_p es conexo. J_p es localmente conexo si y sólo si todo rayo externo aterriza en un punto $\gamma(t)$, y la transformación γ es continua respecto al ángulo t .*

Demostración. La necesidad se sigue del teorema de Carathéodory.

La suficiencia: Sabemos que $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow J_p$ está bien definida y es continua, entonces $\gamma(\mathbb{T})$ es un subconjunto compacto no vacío de J_p . Por el lema 2.72 tenemos que $\{\bigcup p^{-n}(\gamma(0))\} \subset \gamma(\mathbb{T})$ y como la órbita hacia atrás de un punto en J_p es denso entonces tenemos que $\gamma(\mathbb{T}) = J_p$. Ahora recordando que si existe una función continua de un compacto localmente conexo sobre un Hausdorff, entonces el espacio de llegada debe ser compacto y localmente conexo, concluimos que J_p es localmente conexo. \square

Los siguientes resultados los presentamos sin demostración, el lector puede consultar las demostraciones en [15], [24].

Teorema 1.4.6. *Si p que tiene conjunto de Julia conexo y localmente conexo, entonces todo punto periódico en J_p es repulsor o parabólico. Más aún todo ciclo de discos de Siegel para p contiene al menos un punto crítico en su frontera.*

Corolario 1.4.4. *Si p es un polinomio con un punto de Cremer, o con un ciclo de discos de Siegel cuya frontera no contiene puntos críticos. Entonces el conjunto de Julia J_p no es localmente conexo.*

Lema 1.4.7. *Sean $2 \leq n \in \mathbb{Z}$ y $X \subset \mathbb{T}$ un subconjunto compacto que es enviado de manera homeomorfa en si mismo por la transformación $h(t) = nt \pmod{\mathbb{Z}}$. Entonces X es finito.*

Definición 1.4.2. *Un rayo externo $\mathcal{R}(K_p, t)$ se dice racional si t es racional, es llamado irracional si t es irracional y decimos que es periódico si t es periódico bajo la multiplicación por el grado n del polinomio, es decir, tal que $n^p t \equiv t \pmod{1}$ para algún $p \geq 1$.*

Observación 1.4.3. *Si t es racional con denominador q , entonces las sucesivas imágenes de $\mathcal{R}(K_p, t)$ bajo el polinomio p tienen ángulos $nt, n^2t, n^3t, \dots \pmod{\mathbb{Z}}$ cuyos denominadores son divisores de d , como sólo existe un número finito de tales racionales modulo \mathbb{Z} , esta sucesión se debe repetir eventualmente. En el caso especial cuando d y n son coprimos, los racionales con denominador d son permutados bajo la multiplicación por n modulo \mathbb{Z} , por tanto t es periódico. Por lo tanto el rayo $\mathcal{R}(K_p, t)$ es eventualmente periódico si y sólo si t es racional, y es periódico si y sólo si t es racional y su denominador es primo relativo a n .*

Teorema 1.4.8. *Si un rayo externo $\mathcal{R}(K_p, t)$ es periódico entonces aterriza en un punto periódico que es repulsor o parabólico. Si t es racional pero no periódico entonces el rayo $\mathcal{R}(K_p, t)$ aterriza en un punto que es pre-periódico.*

Teorema 1.4.9. *Todo punto repulsor o parabólico es el punto de aterrizaje de al menos un rayo periódico.*

Lema 1.4.10. *Si un rayo periódico aterriza en un punto z_0 , entonces sólo un número finito de rayos pueden aterrizar en z_0 , y todos esos rayos son periódicos con el mismo periodo (que puede ser mas grande que el periodo de z_0).*

Recordemos que el multiplicador en un punto parabólico es una q -ésima raíz de la unidad para algún $q \geq 1$, en este caso podemos obtener más información.

Teorema 1.4.11. *Si un rayo periódico aterriza en un punto z_0 que es parabólico con multiplicador una q -ésima raíz de la unidad entonces dicho rayo tiene exactamente periodo q . Más aun, para todo pétalo repulsor en z_0 existe al menos un rayo que aterriza en z_0 a través del pétalo.*

De hecho se sabe¹ que el número de rayos es 2 si $q = 1$ y 1 en cualquier otro caso.

1.5. Polinomios cuadráticos

En esta sección presentamos sin demostración algunos de los resultados conocidos para los polinomios cuadráticos, para las demostraciones el lector puede consultar [7] o bien [27].

¹Vease [15]

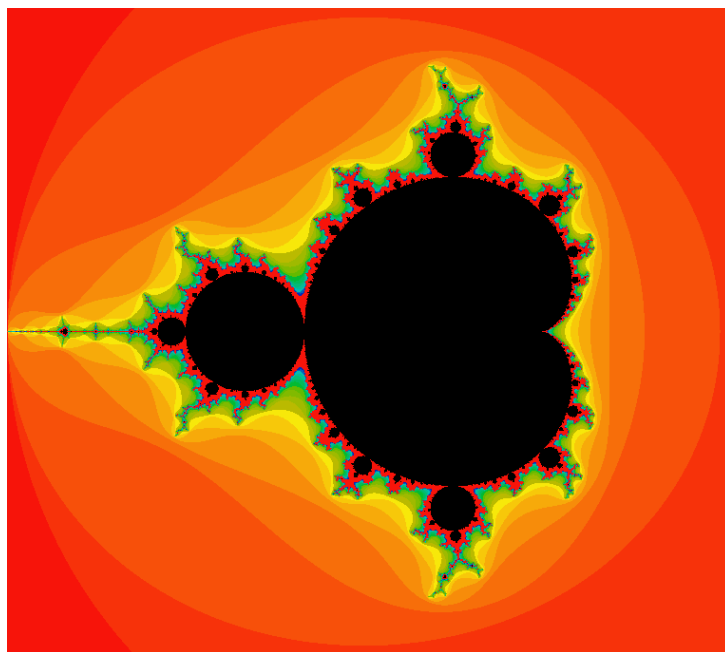


Figura 1.2: Conjunto de Mandelbrot

Recordemos que todo polinomio cuadrático es conjugado por una transformación afín a un polinomio de la forma $p_c = z^2 + c$, por el Teorema 1.3.3 tenemos que K_c es conexo (por lo tanto también J_c) si y sólo la órbita de 0 es acotada.

Definición 1.5.1. *Definimos el conjunto de Mandelbrot como*

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} \mid \mathcal{O}^+(0) \text{ es una sucesión acotada}\}.$$

Por la discusión anterior el conjunto de Mandelbrot consiste precisamente de los c tal que K_c es conexo, además si c está en el complemento de dicho conjunto entonces por el Teorema 1.3.4 tenemos que K_c es totalmente disconexo.

Teorema 1.5.1. *El conjunto de Mandelbrot es un subconjunto compacto del disco $D(0, 2)$ cuya intersección con el eje real es $[-2, 1/4]$ cuyo complemento $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ también es conexo. Más aún, \mathcal{M} consiste precisamente de los c tales que $|p_c^n(0)| \leq 2$ para todo $n \geq 1$.*

Teorema 1.5.2. *(Douady-Hubbard). El conjunto de Mandelbrot es conexo.*

Por el Teorema 1.3.22 existe a lo más un ciclo de componentes acotadas de F_c , por el Teorema 1.3.27 toda componente acotada de F_c eventualmente entra al ciclo, para los polinomios no pueden ocurrir anillos de Herman. Por el Teorema 1.3.28 tenemos las siguientes posibilidades para c en el conjunto de Mandelbrot.

1. Existe un ciclo atractor para p_c . Si tenemos un punto fijo entonces F_c tiene una única componente acotada. De otro modo tiene infinitas componentes. Por el Teorema 1.3.36 J_c es localmente conexo.
2. Existe un ciclo parabólico para p_c . Si tenemos un punto fijo (este caso ocurre sólo cuando $c = 1/4$) entonces F_c tiene una sola componente acotada. De otro modo tiene infinitas componentes. Por el Teorema 1.3.36 J_c es localmente conexo.
3. Existe un ciclo de discos de Siegel.
4. No existen componentes acotadas para F_c .

Teorema 1.5.3. *Para cada $\lambda \in \overline{\Delta}$, existe un único valor c que depende de λ tal que p_c tiene un punto fijo con multiplicador λ . Los valores de c tal que p_c tiene un punto fijo atractor forman una cardioide $D_1 \subset \mathcal{M}$, y $\partial D_1 \subset \partial \mathcal{M}$. Aún más, si $c \in D_1$ entonces J_c es una casi-circunferencia.*

Sabemos que $D_1 = \{c = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4} \mid |\lambda| < 1\}$. Análogamente se puede ver que el conjunto $D_2 = \{c \mid |4c + 4| < 1\}$ es el conjunto para de c tal que p_c tiene un ciclo atractor de periodo 2.

En particular en D_1 existe un único c tal que p_c tiene un punto fijo super-tractor, claramente $c = 0$, a D_1 se le conoce como la *cardioide principal*. De igual manera en D_2 existe un único c , se puede ver que $c = -1$, de forma que p_c tiene un ciclo super-tractor de periodo 2. Estos dos conjuntos son ejemplos de componentes del interior del conjunto de Mandelbrot, los puntos 0 y -1 son llamados los *centros* de dichas componentes. Continuando del mismo modo podemos definir los centros de las componentes del interior del Mandelbrot como los valores de c para los cuales el punto crítico forma un ciclo de un determinado periodo. Denotamos por E al conjunto de centros, es decir, $E = \{c \in \mathcal{M} \mid 0 \text{ es un punto periódico de } p_c\}$.

Teorema 1.5.4. *Si p_α tiene un ciclo atractor de periodo m , entonces α pertenece al interior de \mathcal{M} . Si denotamos por W a la componente del interior de \mathcal{M} que contiene a α , tenemos que p_c tiene un ciclo atractor $z_1(c), \dots, z_m(c)$ de periodo m para todo $c \in W$, donde cada $z_j(c)$ depende de manera analítica de c .*

De este teorema es claro que E está contenido en el interior de \mathcal{M} .

Teorema 1.5.5. *La cerradura de E contiene la frontera de \mathcal{M} . En particular el interior de \mathcal{M} es denso en \mathcal{M} .*

Las componentes del interior de \mathcal{M} que están asociados con ciclos atractores son llamadas las *componentes hiperbólicas* del interior de \mathcal{M} , por el Teorema 1.3.31 sabemos que p_c es hiperbólico si $c \notin \mathcal{M}$ o si p_c tiene un ciclo atractor. Por el teorema anterior sabemos que el interior de \mathcal{M} es denso en \mathcal{M} , pero no sabemos si la unión de las componentes hiperbólicas coinciden con el interior de \mathcal{M} .

Teorema 1.5.6. *Para cada componente hiperbólica W del interior de \mathcal{M} el multiplicador $\lambda(c)$ induce una transformación conforme $\lambda_W : W \rightarrow \Delta$ que se extiende continuamente de \overline{W} sobre $\overline{\Delta}$.*

Si p_α tiene un ciclo indiferente de longitud m , entonces $\alpha \in \partial W$ para alguna componente hiperbólica W asociada a ciclos atractores de longitud m . Más aún todo $c \in \partial W$ con $\lambda(c) \neq 1$ tiene un ciclo indiferente de longitud m . Si la longitud del ciclo de p_c es un divisor propio de m , entonces c está en la frontera de otra componente hiperbólica. El punto en ∂W en el cual $\lambda(c) = 1$ es llamado la *raíz* de W .

Presentamos ahora algunos resultados sobre rayos externos en el caso de los polinomios cuadráticos. Sea p_c un polinomio cuadrático, el punto de aterrizaje del rayo $\mathcal{R}(K_c, 0)$ es un punto fijo repulsor o parabólico de p_c al que llamamos β . El otro punto fijo de p_c es llamado α . El único caso cuando $\alpha = \beta$ es $p_c = z^2 + 1/4$, por lo tanto $\alpha = \beta = 1/2$.

Observación 1.5.1. *Por el lema 1.4.10 y del hecho de que el único punto fijo en \mathbb{T} bajo la multiplicación por 2 (mod 1) es el 0, tenemos que ningún otro rayo aterriza en β , luego por el Teorema 1.4.4 $K_c \setminus \{\beta\}$ es conexo. Esto demuestra*

Teorema 1.5.7. *El punto fijo β de un polinomio cuadrático no desconecta a su conjunto de Julia lleno.*

Corolario 1.5.1. *Un punto fijo x repulsor o parabólico desconecta a K_c si y sólo si $x = \alpha \neq \beta$.*

Demostración. Si x desconecta a K_c entonces por el teorema anterior $x = \alpha \neq \beta$. Por otra parte si α es repulsor o parabólico entonces por el Teorema 1.4.9 y del hecho de que 0 es el único punto fijo en \mathbb{T} bajo la multiplicación por 2 (mod 1) tenemos que al menos dos rayos aterrizan en α luego por el corolario 1.4.3 tenemos que α desconecta a K_c en al menos dos componentes. \square

Sea $\mathcal{O} = \{z_1, \dots, z_m\}$ una órbita periódica para p_c , supongamos que existen $v > 1$ rayos que aterrizan en cada punto del ciclo. A la pareja (\mathcal{O}, v) le llamamos *retrato de órbita*. Note que los v rayos que aterrizan en z cortan al plano en v dominios a los que llamaremos los *sectores* con base en el punto $z \in \{z_1, \dots, z_m\}$. Entenderemos por *amplitud angular* del sector S a la longitud del arco abierto I_S que consiste de todos los ángulos $t \in \mathbb{T}$ tal que $\mathcal{R}(K_c, t) \subset S$.

Teorema 1.5.8. *Sea $\{z_1, \dots, z_m\}$ una órbita periódica para p_c . Si existen $v > 1$ rayos que aterrizan en cada punto de $\{z_1, \dots, z_m\}$, entonces existe un único sector S_1 con base en algún punto $z_j \in \{z_1, \dots, z_m\}$ que contiene al valor crítico c y cuya cerradura no contiene otro punto (además de z_j) del ciclo $\{z_1, \dots, z_m\}$. Este sector S_1 es caracterizado, de entre todos los mv sectores basados en los distintos puntos del ciclo, como el único vector de menor amplitud angular y es llamado el sector del valor crítico.*

La demostración de este teorema puede ser encontrada en [23], [25].

Tratemos el caso de algunos polinomios cuadráticos cuyo conjunto de Julia J_c (o equivalentement conjunto de Julia lleno K_c) conexo y localmente conexo. Primero veamos que en este caso el conjunto de Julia J_c es un cociente topológico de la circunferencia unitaria \mathbb{S}^1

Sea p_c un polinomio cuyo conjunto de Julia lleno K_c conexo localmente conexo, sabemos que la inversa de la representación conforme $\psi = \varphi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta} \rightarrow \mathbb{C} \setminus K_c$ se extiende de manera continua a $\mathbb{C} \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{C} \setminus \text{Int}(K_c)$, además dicha transformación hace que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C} \setminus \Delta & \xrightarrow{z^2} & \mathbb{C} \setminus \Delta \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
\mathbb{C} \setminus \text{Int}(K_{c_1}) & \xrightarrow{p_c} & \mathbb{C} \setminus \text{Int}(K_{c_1})
\end{array}$$

sea conmutativo. En particular por el Teorema 1.4.5 existe el lazo de Carathéodory $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow J_c$ que es continuo y sobreyectivo, y además cumple la identidad $p_c(\gamma(t)) = \gamma(2t)$.

Observe que los puntos de J_c en los que aterriza más de un rayo corresponden a los puntos donde γ no es inyectiva. De manera natural podemos definir una relación de equivalencia de la siguiente manera

Definición 1.5.2. Sean p_c un polinomio cuadrático cuyo conjunto de Julia J_c es conexo y localmente conexo, y $\gamma_c : \mathbb{T} \rightarrow J_c$ el lazo de Carathéodory. Definimos la relación (determinada por p_c) en \mathbb{T} por $t_1 \sim_c t_2$ si $\mathcal{R}(K_c, t_1)$ y $\mathcal{R}(K_c, t_2)$ aterrizan en el mismo punto.

Claramente la relación anterior es una relación de equivalencia. Denotamos las clases de equivalencia por $[t]$.

Observación 1.5.2. γ_c es inyectiva para todo $t \in \mathbb{T}$ irracional.

Sean X, Y , espacios topológicos. Recordemos que una transformación $h : X \rightarrow Y$ sobreyectiva se dice (*transformación cociente*) si cumple que un subconjunto U de Y es abierto si y sólo si $h^{-1}(U)$ es abierto en X . Se sabe¹ que si $h : X \rightarrow Y$ es una transformación continua sobreyectiva que además es abierta o cerrada, entonces h es una transformación cociente. También recordemos que si X es un espacio topológico, A es un conjunto y $h : X \rightarrow A$ es una transformación sobreyectiva, entonces existe una única topología τ en A para la cual h es una transformación cociente, esta topología es llamada *topología cociente*.

Recordemos también que una transformación continua de un espacio topológico compacto sobre un Hausdorff es cerrada. Usando este hecho como \mathbb{T} es compacto y J_c es Hausdorff, tenemos que el lazo de Carathéodory es una transformación cerrada, más aún por ser sobreyectivo es una transformación cociente.

¹vease por ejemplo [28]

Definición 1.5.3. Sea X un espacio topológico, y sea X^* una partición de X en subconjuntos disjuntos tal que su unión es X . Sea $h : X \rightarrow X^*$ una transformación sobreyectiva que envía todo punto de X al elemento de X^* que lo contiene. Con la topología cociente inducida por h , el espacio X^* es llamado un espacio cociente de X .

La demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [28].

Teorema 1.5.9. Sean X, Z espacios topológicos y $g : X \rightarrow Z$ una transformación sobreyectiva y continua. Sea X^* la siguiente colección de subconjuntos de X :

$$X^* = \{g^{-1}(\{z\}) \mid z \in Z\}.$$

Dotemos a X^* con la topología cociente. Entonces

1. La transformación g induce una transformación biyectiva y continua $f : X^* \rightarrow Z$. La transformación f es un homeomorfismo si y sólo si g es una transformación cociente.
2. Si Z es Hausdorff entonces también lo es X^* .

Proposición 1.5.1. El cociente \mathbb{T}/\sim_c es homeomorfo al conjunto de Julia J_c .

Demostración. Como γ_c es una transformación cociente, aplicando el teorema obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{\gamma_c} & J_c \\ \text{Pr} \searrow & & \nearrow g \\ & \mathbb{T}/\sim_c & \end{array}.$$

Donde $Pr(t) = [t]$, y g es un homeomorfismo definido por $g([t]) = \gamma_c(t)$. □

Hemos demostrado por tanto que si un polinomio cuadrático tiene conjunto de Julia J_c conexo y localmente conexo entonces lo podemos ver como un cociente topológico de la circunferencia unitaria \mathbb{S}^1 . Observe que la demostración no depende del grado del polinomio, por lo tanto el resultado se

generaliza para todo polinomio cuyo conjunto de Julia es conexo y localmente conexo.

Ahora consideremos algunos casos especiales.

Las demostraciones de los siguientes teoremas pueden ser revisada en [25].

Lema 1.5.10. *Sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto pleno, conexo y localmente conexo, sea U una componente conexa del interior de K . Entonces la cerradura \overline{U} es homeomorfa al disco unitario cerrado, y existe una única retracción $\rho_U : \mathbb{C} \rightarrow \overline{U}$ sobreyectiva que envía cada rayo externo, y también cada componente conexa del complemento $K \setminus \overline{U}$ a un único punto de ∂U . Sea $z_0 \in \partial U$, dos rayos externos aterrizan en z_0 si y sólo si existe una componente conexa X de $K \setminus \overline{U}$ tal que $\rho_U(X) = z_0$.*

Teorema 1.5.11. *Sea $p_c = z^2 + c$ un polinomio cuadrático con un ciclo atractor de periodo $m > 1$. Denotemos por U_0 y U_1 a las componentes (conexas) del interior de K_c , que contienen al punto crítico 0 y al valor crítico c respectivamente. Entonces la retracción dada por el teorema anterior $\rho_{U_1} : \mathbb{C} \rightarrow \overline{U_1}$ envía la componente U_0 a un único punto $z_0 \in \partial U_1$ que es fijo bajo f^m . Por lo tanto al menos dos rayos externos aterrizan en dicho punto.*

Discusión 1. Primero supongamos que c es el centro de una componente hiperbólica de periodo m . Entonces p_c tiene un ciclo super-atractor digamos $\{a_0 = 0, a_1 = p_c(0), \dots, a_{m-1} = p_c^{m-1}(0)\}$, denotemos por U_i la cuenca inmediata de atracción que contiene a a_i , sabemos que estas cuencas de atracción están contenidas en el interior de K_c . Más aún si identificando U_0 con U_m tenemos que p_c envía U_0 de modo 2 a 1 sobre U_1 , y a U_i sobre U_{i+1} de modo 1 a 1 para $1 \leq i \leq m-1$. Además por el Teorema 1.3.27 sabemos que toda componente del interior es pre-periódica, por lo tanto cualquier otra componente de interior de K_c es enviada homeomorfamente a alguna de las U_i mediante un número finito de iteradas de p_c .

Por el Teorema de la representación conforme y por el Lema 1.5.10 sabemos que existe una transformación $h_i : \overline{U_i} \rightarrow \overline{\Delta}$ que es conforme en el interior del disco unitario y es un homeomorfismo en la frontera de tal forma que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{U}_i & \xrightarrow{p_c^m} & \overline{U}_i \\ h_i \downarrow & & \downarrow h_i \\ \overline{\Delta} & \xrightarrow{z^2} & \overline{\Delta} \end{array}$$

es conmutativo. En particular por el Teorema 1.5.11 ∂U_i es homeomorfa a \mathbb{S}^1 tenemos que existe un único punto $y_i \in U_i$ tal que $p_c^m(y_i) = y_i$. El punto y_i es llamado la *raíz* de U_i . Observe que los puntos y_i forman un ciclo bajo la iteración de p_c con periodo l , donde l tiene que ser un divisor de m , ya que $p_c(y_i) = y_{i+1}$. Es conocido² que el punto y_1 pertenece al conjunto de Julia J_c y es tal que los ángulos $\{\gamma_c^{-1}(y_1)\}$ son periódicos de periodo m bajo la multiplicación por 2 módulo \mathbb{Z} . Además por el Teorema 1.5.11 siempre existen dos rayos externos que aterrizan en y_1 de tal forma que U_1 está en el sector acotado por estos rayos cuya cerradura no contiene ningún otro punto del ciclo $(\{y_1, y_2, \dots, y_{l-1}\})$. A estos dos rayos los llamamos *rayos característicos*. Cuando $c = 0$ obtenemos esos dos rayos si contamos el eje real dos veces, con ángulos 0 y 1.

Discusión 2 Si c es un punto de Misiurewicz como vimos antes J_c es una dendrita y $\{\gamma_c^{-1}(c)\}$ está formado por ángulos que son estrictamente pre-periódicos bajo la multiplicación por 2 módulo \mathbb{Z} .

Recordemos que el conjunto de Mandelbrot es un compacto conexo por lo tanto existe una representación conforme $\phi_{\mathcal{M}}$ del complemento de \mathcal{M} al exterior del disco unitario, aún no se conoce si $\phi_{\mathcal{M}}^{-1} : \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ se extiende continuamente a la frontera. Es decir no sabemos si \mathcal{M} es localmente conexo. Aún así Douady y Hubbard probaron que todo rayo externo con ángulo racional t aterriza en un punto $\gamma_{\mathcal{M}}(t)$. La prueba del siguiente teorema puede ser encontrado en [15], [25].

Teorema 1.5.12. 1. Para cada ángulo racional $t = p/q$ el rayo externo $\mathcal{R}(\mathcal{M}, t)$ aterriza en un punto $c = \gamma_{\mathcal{M}}(t)$ el cual es una raíz de una componente hiperbólica o un punto Misiurewicz.

2. Si t es periódico de periodo m bajo la multiplicación por 2 (mod \mathbb{Z}) entonces c es una raíz de una componente hiperbólica W de periodo m . Denotemos por c_W el centro de W , sea y_1 la raíz de la componente

²vease [23]

U_1 del interior de K_{c_w} que contiene a c_w , y sean $\{t_1, t_2\} \subset \gamma_{c_w}^{-1}(y_1)$ los ángulos de los dos rayos externos característicos. Entonces $\gamma_{\mathcal{M}}^{-1}(c) = \{t_1, t_2\}$

3. Si t es estrictamente pre-periódico bajo la multiplicación por $2 \pmod{\mathbb{Z}}$, entonces $c = \gamma_{\mathcal{M}}(t)$ es un punto Misiurewicz y $\gamma_c^{-1}(c) = \gamma_{\mathcal{M}}^{-1}(c)$.

Teorema 1.5.13. Sea $\mathcal{O} = \{z_1, \dots, z_m\}$ una órbita periódica para p_c , tal que existen $v > 1$ rayos que aterrizan en cada punto de $\{z_1, \dots, z_m\}$. Denotemos por \mathcal{P} a la pareja $\{\mathcal{O}, v\}$. Sean $0 < t_- < t_+ < 1$ los ángulos de los rayos externos que acotan el sector crítico del valor crítico S_1 . Entonces los rayos $\mathcal{R}(\mathcal{M}, t_-)$ y $\mathcal{R}(\mathcal{M}, t_+)$ aterrizan en un punto en común $r_{\mathcal{P}} \in \mathcal{M}$. Entonces el conjunto $\mathcal{R}(\mathcal{M}, t_-) \cup \mathcal{R}(\mathcal{M}, t_+) \cup \{r_{\mathcal{P}}\}$ divide al plano en dos subconjuntos abiertos $W_{\mathcal{P}}$ y $\mathbb{C} \setminus W_{\mathcal{P}}$ con la siguiente propiedad: un polinomio cuadrático p_c tiene un ciclo repulsor de periodo m con v rayos aterrizando en cada punto del ciclo si y sólo si $c \in W_{\mathcal{P}}$, y un ciclo parabólico de periodo m con v rayos aterrizando en cada punto del ciclo si y sólo si $c = r_{\mathcal{P}}$.

La demostración del teorema anterior puede ser revisada en [25].

1.6. Multibrot sets

Dado un grado $d \geq 2$ fijo consideramos a la familia de polinomios de la forma $z^d + c$. En esta sección presentamos algunos resultados sobre dichas familias, para más detalles el lector puede consultar [Internal address Eike Lau] Del hecho de que los polinomios de dicha familia tiene al cero como único punto crítico finito podemos definir un conjunto análogo al conjunto de Mandelbrot.

Definición 1.6.1. Al conjunto $\mathcal{M}_d = \{c \in \mathbb{C} \mid 0 \notin I_{z^d+c}\}$ le llamamos conjunto Multibrot.

Observación 1.6.1. Por el Teorema 1.3.3 un polinomio de la forma $z^d + c$ tiene conjunto de Julia conexo si y sólo si $c \in \mathcal{M}_d$. Más aún, si $c \notin \mathcal{M}_d$ entonces por el Teorema 1.3.4 el conjunto de Julia de $z^d + c$ es totalmente desconexo.

El Teorema 1.5.4 puede ser generalizado para cualquier $d \geq 2$. Y por lo tanto podemos definir una componente hiperbólica de periodo n del conjunto Multibrot \mathcal{M}_d como una componente (conexa) del interior del Multibrot

asociada con un ciclo atractor de periodo n .

El Teorema 1.5.6 también puede ser generalizado. Usando este resultado tenemos que las imágenes inversas del rayo $[0, 1]$ dividen a cada componente hiperbólica en $d - 1$ regiones. A dichas regiones las llamaremos *sectores* de la componente. Las $d - 1$ imágenes inversas de 1 son llamadas las *raíces* de la componente. Una raíz se dice *principal* si dos rayos externos aterrizan en este punto y se dice *no principal* si sólo aterriza un rayo externo. Esto último tiene sentido por el siguiente teorema. Un punto c Misiurewicz se define de la misma manera que en el caso cuadrático, es decir, si cero es estrictamente pre-periódico.

Teorema 1.6.1. *Sea \mathcal{M}_d un conjunto Multibrot. \mathcal{M}_d tiene las siguientes propiedades:*

1. *Es conexo.*
2. *Todo rayo externo periódico de periodo n aterrizan en una raíz de una componente hiperbólica de periodo n . Más aún, en dichas raíces solo aterrizan rayos de periodo n .*
3. *Toda componente hiperbólica tiene $d-1$ raíces, una de ellas es principal y las demás son no principales. De este modo exactamente d rayos externos aterrizan en dichas raíces.*
4. *Si un raíz de una componente hiperbólica de periodo n pertenece a la frontera de otra componente hiperbólica, entonces esa componente tiene periodo k , donde k es un divisor propio de n . Además esa raíz es principal.*
5. *Si el parámetro c es una raíz de una componente hiperbólica, entonces los ángulos de los rayos externos que aterrizan en c son exactamente los rayos que aterrizan en el punto periódico parabólico que pertenece a la cerradura de la componente de Fatou del polinomio $z^d + c$ que contiene al valor crítico.*
6. *Todo rayo externo pre-periódico aterriza en un punto Misiurewicz, además los rayos externos con los mismo ángulos aterrizan en el valor crítico c en el conjunto de Julia de $z^d + c$.*

Definición 1.6.2. Sean \mathcal{M}_d un conjunto Multibrot (que puede ser el Mandelbrot) y c un parámetro de una componente hiperbólica. Decimos que c es una estrella si la cerradura de la componente hiperbólica que contiene a c intersecta a la única componente hiperbólica de periodo 1.

1.7. Árboles de Hubbard

En esta sección consideramos solamente polinomios de grado mayor o igual a 2 cuyo conjunto post-crítico es finito. Para las demostraciones de los resultados de esta sección se pueden consultar [on post-cri I u II] y biaccessibility in quadratic.

Sea p un polinomio como arriba, tenemos que todo punto crítico es periódico o pre-periódico. A la órbita de un punto crítico la llamamos *órbita crítica*. Se sabe que un punto x pre-periódico o periódico pertenece al conjunto de Fatou si y sólo si alguna iterada de x pertenece a un ciclo crítico.

Por el Teorema 1.3.36 tenemos que K_p es conexo y localmente conexo. Además como un espacio métrico compacto que es localmente conexo también es conexo por arcos (es decir curvas simples). Entonces K_p es también conexo por arcos.

Sea $K \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto pleno, conexo y localmente conexo. Sea $(U_i)_{i \in I}$ la familia de componentes conexas del interior de K . Para cada U_i un punto w_i . Entonces existe único homeomorfismo (salvo multiplicación por una constante de módulo 1) $\varphi_i : \overline{U_i} \rightarrow \overline{\Delta}$ cuya restricción a U_i es una transformación conforme sobre Δ tal que $\varphi_i(w_i) = 0$.

Definición 1.7.1. Un arco (curva simple) $\gamma \subset K$ es llamado permisible si para todo $i \in I$, $\varphi_i(\gamma \cap \overline{U_i})$ está contenido en la unión de dos rayos de $\overline{\Delta}$.

Teorema 1.7.1. Dados x y y dos puntos distintos de K . Entonces existe un único arco permisible γ que une x con y .

Denotamos por $[x, y]_K$ el arco permisible que une x y y . Esta notación depende de la elección de w_i . Si $x = y$, escribimos $[x, y]_K = x$. Los arcos permisibles tienen las siguientes propiedades.

Lema 1.7.2. Sean γ_1 y γ_2 dos arcos permisibles, entonces $\gamma_1 \cap \gamma_2$ es permisible.

Lema 1.7.3. Todo sub-arco de un arco permisible es permisible.

Lema 1.7.4. Sean $x, y, z \in K$, entonces existe $p \in K$ tal que $[x, y]_K \cap [y, z]_K = [p, y]_K$. En particular si $[x, y]_K \cap [y, z]_K = y$, el conjunto $[x, y]_K \cup [y, z]_K$ es un arco permisible.

Definición 1.7.2. Decimos que un subconjunto $X \subset K$ es permisiblemente conexo si para cualesquiera $x, y \in X$ tenemos $[x, y]_K \subset X$.

La unión de una familia de subconjuntos permisiblemente conexos con un punto en común es permisiblemente conexa. La intersección de una familia de subconjuntos permisiblemente conexos es permisiblemente conexa.

Definición 1.7.3. Dado un subconjunto $X \subset K$. A la intersección de todos los subconjuntos permisiblemente conexos de K que contienen a X le llamamos la envoltura permisible de X y la denotamos por $[X]$.

Teorema 1.7.5. Sean x_1, x_2, \dots, x_n puntos en K . la envoltura permisible $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ del conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es un árbol topológico finito.

Observación 1.7.1. Cada extremo de $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ es uno de los puntos x_i , pero pueden existir puntos x_i que no son extremos.

Lema 1.7.6. Sea $\gamma \subset K_p$ un arco permisible que no contiene puntos críticos de p , excepto posiblemente por sus extremos. Entonces $p|_\gamma$ es inyectivo y $p(\gamma)$ es un arco permisible.

Definición 1.7.4. Sea M un conjunto finito e invariante (bajo p) tal que $C(p) \subset M$. A la envoltura permisible $[M]_{K_p}$ la llamamos el árbol generado por M y la denotamos por $T(M)$. Al árbol generado por el conjunto post-crítico $M_0 = C^+(p)$ lo llamamos árbol de Hubbard (o árbol mínimo) de p .

Lema 1.7.7. Para un conjunto M finito e invariante que contiene al conjunto crítico de p , tenemos que $p(T(M)) = [p(M)]_{K_p}$.

Observación 1.7.2. Si $X \subset K(p)$ es arbitrario entonces $p(T(X)) \subset [p(X \cup C(p))]_{K_p}$.

Notación Denotamos por $T^*(M)$ a la familia cuyos elementos son las cerraduras de las componentes de $T(M) - C(p)$.

Lema 1.7.8. *El polinomio p induce una función continua de $T(M)$ en sí mismo, cuya restricción a cada elemento (componente) de $T^*(M)$ es inyectiva.*

Lema 1.7.9. *Sea $\gamma \subset K_p$ un arco permisible que no contiene puntos críticos de p , excepto posiblemente por sus extremos. Entonces cualquier levantamiento de γ por p es un arco permisible.*

Definición 1.7.5. *Dado un punto $x \in T(M)$, entenderemos por el número de incidencia $\nu_{T(M)}(x)$ de T_M en x al número de componentes de $T(M) - \{x\}$.*

En otras palabras $\nu_{T(M)}(x)$ es el número de ramas de $T(M)$ que inciden en x . Este número puede ser diferente del número de componentes (conexas) de $K_p - \{x\}$.

Un punto $x \in T(M)$ es llamado un *punto de ramificación* de $T(M)$ si $\nu_{T(M)}(x) > 2$ y un *extremo* si $\nu_{T(M)}(x) = 1$. El *conjunto predilecto* de $T(M)$ es $V_{T(M)} = M \cup \{z \in T(M) \mid \nu_{T(M)}(z) > 2\}$. Observe que el conjunto $V_{T(M)}$ es finito.

Proposición 1.7.1. *El conjunto predilecto $V_{T(M)}$ es invariante bajo p . Además, $T(M) = T(V_{T(M)})$.*

Corolario 1.7.1. *Sean M, M' conjuntos finitos invariantes que contiene a $C(p)$. Si $V_{T(M)} = V_{T(M')}$.*

Proposición 1.7.2. *Sean $x, x' \in J_p$ dos puntos periódicos. Si para todo $n \geq 0$, $p^n(x)$ y $p^n(x')$ pertenecen al mismo elemento (componente) de $T^*(M)$, entonces $x = x'$.*

Observación 1.7.3. *La proposición es verdadera incluso cuando x, x' son puntos pre-periódicos.*

Definimos la distancia entre dos puntos $x, x' \in V_{T(M)}$ como

$$d_{T(M)}(x, x') = \begin{cases} 0 & \text{si } x = x' \\ \#(V_{T(M)} \cap [x, x']_{K_p}) - 1 & \text{si } x \neq x' \end{cases} \quad (1.0)$$

donde $\#$ denota la cardinalidad de un conjunto. De este modo $d_{T(M)}$ mide el número de “aristas” entre x y x' .

Proposición 1.7.3. *Si dos puntos $x, x' \in V_{T(M)} \cap J_p$ satisfacen $d_{T(M)}(x, x') = 1$, entonces existe un $n \geq 1$ tal que $d_{T(M)}(p^n(x), p^n(x')) > 1$.*

Proposición 1.7.4. $p^{-1}(T(M)) = T(p^{-1}(M)) = T(p^{-1}(V_{T(M)}))$. En este caso los vertices del árbol son dados por $V_{T(p^{-1}(M))} = p^{-1}(V_T(M))$.

Corolario 1.7.2. $p^{-n}(T(M)) = T(p^{-n}(M)) = T(p^{-n}(V_{T(M)}))$. En este caso los vertices del árbol son dados por $V_{T(p^{-n}(M))} = p^{-n}(V_T(M))$.

Como $T(M) \subset p^{-1}(T(M))$ tenemos dos funciones de incidencia $\nu_{0,M} \equiv \nu_{T(M)}$ para $T(M)$ y $\nu_{-1,M} \equiv \nu_{T(p^{-1}(M))}$ para $p^{-1}(T(M))$. Tenemos que $\nu_{0,M}(x) \leq \nu_{-1,M}(x)$ para todo $x \in T(M)$.

Lema 1.7.10. Para todo $x \in p^{-1}(T(M))$ se tiene que $\nu_{-1,M}(x) = \nu_{0,M}(x) \deg_x(p)$. Donde $\deg_x(p)$ representa el grado local de p en x .

Estas desigualdades se generalizan para las funciones de incidencia $\nu_{-n,M}$ de los árboles $p^{-n}(T(M))$.

Proposición 1.7.5. Sea X una componente de $T^*(p^{-1}(M))$. Entonces p induce un homeomorfismo entre X y la componente T_α de $T(M)$ cortado siguiendo $p(C_p \cap X)$ que contiene a $p(X)$.

Definición 1.7.6. Un punto $x \in J_p$ es terminal si exactamente un rayo aterriza en x . De otro modo el punto x es un punto de incidencia. Un punto incidente es un punto de ramificación si existen más de dos rayos que aterrizan en el punto, y es un punto de no ramificación si exactamente dos rayos aterrizan en el.

Proposición 1.7.6. Sean p un polinomio (cuyo conjunto post-crítico es finito) y $x \in J_p$ un punto de ramificación. Entonces x es pre-periódico o periódico.

Proposición 1.7.7. Sean p un polinomio (cuyo conjunto post-crítico es finito) y $x \in J_p$ un punto periódico de incidencia. Entonces $x \in T(M_0)$, y de este modo $x \in T(M)$ para cualquier conjunto finito invariante $M \supset C_p$. Más aún, $\nu_{0,M}(x)$ no depende de M y es igual al número de componentes de $J_p - \{x\}$. En particular existen exactamente $\nu_{0,M_0}(x)$ rayos externos aterrizando en x .

Corolario 1.7.3. Sea $x \in J_p \cap T(M)$ tal que $p^n(x)$ es periódico. Entonces $\nu_{-n,M_0}(x)$ es igual al número de componentes de $J_p - \{x\}$. En particular existen exactamente $\nu_{-n,M_0}(x)$ rayos externos aterrizando en x .

Corolario 1.7.4. $T(M)$ contiene un punto fijo de p .

Teorema 1.7.11. *Sea $p(z) = z^d + c$ un polinomio de grado $d \geq 2$. Si p tiene conjunto post-crítico finito y c es una estrella, entonces la intersección del árbol de Hubbard de p y el conjunto de Julia de p es un punto fijo de p , es decir, $T(M_0) \cap J_p = \alpha$ donde α es un punto fijo.*

Corolario 1.7.5. *Sea $p(z) = z^d + c$ un polinomio de grado $d \geq 2$ tal que p tiene conjunto post-crítico finito y c es una estrella. Si en $x \in J_p$ aterriza más de un rayo externo, entonces existe un $n \geq 0$ tal que $p^n(x) = \alpha$.*

Capítulo 2

El caso alternado

En este capítulo estudiaremos la dinámica de la familia de polinomios cuárticos complejos de la forma $p_{c_1, c_2} = (z^2 + c_1)^2 + c_2$, donde c_1 y c_2 son (parámetros) complejos. A dicha familia la llamaremos familia alternada y al estudio de la familia alternada como dinámica polinomial alternada. Denotaremos al conjunto de Julia (respectivamente Julia lleno) de $p_{c_1, c_2} = (z^2 + c_1)^2 + c_2$ como J_{c_1, c_2} (respectivamente K_{c_1, c_2}).

Este capítulo es el tema central de esta tesis en el cual se busca responder a las siguientes preguntas:

1. Si c_i es tal que J_{c_i} es conexo para $i = 1, 2$, entonces ¿ J_{c_1, c_2} es conexo?.
2. Si c_i es tal que J_{c_i} es totalmente desconexo para $i = 1, 2$, entonces ¿ J_{c_1, c_2} es totalmente desconexo?.
3. Si c_i es tal que J_{c_i} es conexo y localmente conexo para $i = 1, 2$, entonces ¿ J_{c_1, c_2} es conexo y localmente conexo?.
4. ¿Cuáles son las condiciones sobre los parámetros para que dos conjuntos de Julia conexos y localmente conexos sean homeomorfos?

2.1. Primeros resultados

En esta sección iniciamos el estudio de la dinámica polinomial alternada.

Consideremos a $p_{c_1, c_2} = (z^2 + c_1)^2 + c_2$ un polinomio en la familia alternada. Los puntos críticos de p_{c_1, c_2} son los puntos $z \in \mathbb{C}$ tal que $p'_{c_1, c_2}(z) = 0$ es decir que cumplen la ecuación $4z(z^2 + c_1) = 0$. Por lo tanto el polinomio p_{c_1, c_2} tiene tres puntos críticos contando multiplicidad:

1. 0,
2. $\zeta_1 := \sqrt{-c_1}$ y
3. $\zeta_2 := -\sqrt{-c_1}$.

Observación 2.1.1. *Observe que los puntos críticos dependen únicamente del primer parámetro. Y que la órbita hacia adelante de los puntos críticos $\sqrt{-c}$ y $-\sqrt{-c}$ es la misma excepto por el primer elemento de la órbita.*

Dado un polinomio p_{c_1, c_2} tenemos las siguientes posibilidades:

1. $C_{p_{c_1, c_2}} \subset I_{p_{c_1, c_2}}$. Y por el Teorema 1.3.4, J_{c_1, c_2} es totalmente desconexo. Más aún J_{c_1, c_2} es homeomorfo a un conjunto de Cantor.
2. $a_1, a_2 \in I_{p_{c_1, c_2}}$ y $0 \notin I_{p_{c_1, c_2}}$. Y entonces por los Teoremas 1.3.4 y 1.3.3 J_{c_1, c_2} no es totalmente desconexo ni conexo.
3. $a_1, a_2 \notin I_{p_{c_1, c_2}}$ y $0 \in I_{p_{c_1, c_2}}$. En este caso J_{c_1, c_2} no es totalmente desconexo ni conexo.
4. $C_{p_{c_1, c_2}} \cap I_{p_{c_1, c_2}} = \emptyset$. Por el Teorema 1.3.3 J_{c_1, c_2} es conexo.

Por el Teorema 1.3.22 el polinomio p_{c_1, c_2} tiene a lo más 3 ciclos no repulsores acotados, pero por la observación anterior a lo más pueden existir 2 de este tipo, ya que un ciclo no repulsor está asociado al punto crítico 0 y el otro ciclo no repulsor está asociado a los puntos críticos a_1 y a_2 .

De este hecho se desprende que en el caso 2 y 3 de la descripción anterior sólo pueda existir un ciclo acotado no repulsor. Además por el Teorema 1.3.26 el conjunto de Fatou tiene infinitas componentes. Es decir, en estos casos tenemos las siguientes posibilidades :

1. Existe un ciclo atractor para p_{c_1, c_2} .
2. Existe un ciclo parabólico para p_{c_1, c_2} .

3. Existe un ciclo de discos de Siegel para p_{c_1, c_2} .
4. No existen componentes acotadas para $F_{p_{c_1, c_2}}$.

Los parámetros de los polinomios correspondientes al caso 4 corresponden a lo que llamaremos el *lugar de conexidad de la familia alternada*. Las posibilidades para un polinomio de este tipo son:

1. El único ciclo no repulsor es atractor y todos los puntos críticos son atraídos a dicho ciclo. Si tenemos un punto fijo $F_{p_{c_1, c_2}}$ puede tener una única componente acotada, pero esto no siempre ocurre. Si el ciclo es de tamaño mayor a 1 entonces $F_{p_{c_1, c_2}}$ tiene infinitas componentes. En cualquier situación por el Teorema 1.3.36 J_c es localmente conexo.
2. El único ciclo no repulsor es parabólico y todos los puntos críticos son atraídos a dicho ciclo. Si tenemos un punto fijo $F_{p_{c_1, c_2}}$ puede tener una única componente acotada, pero esto no siempre ocurre. Si el ciclo es de tamaño mayor a 1 entonces $F_{p_{c_1, c_2}}$ tiene infinitas componentes. En cualquier situación por el Teorema 1.3.36 J_c es localmente conexo.
3. El único ciclo no repulsor es un ciclo de discos de Siegel y no existen puntos críticos con órbita finita.
4. Existen dos ciclo atractores. Entonces $F_{p_{c_1, c_2}}$ tiene infinitas componentes. Por el Teorema 1.3.36 J_c es localmente conexo.
5. Existen un ciclo atractor y un ciclo parabólico. Entonces $F_{p_{c_1, c_2}}$ tiene infinitas componentes. Por el Teorema 1.3.36 J_c es localmente conexo.
6. Existen un ciclo atractor y un ciclo de Discos de Siegel. Entonces $F_{p_{c_1, c_2}}$ tiene infinitas componentes.
7. Existen un ciclo atractor y el otro (o los otros) puntos críticos son estrictamente pre-periódicos. Entonces $F_{p_{c_1, c_2}}$ tiene infinitas componentes. Por el Teorema 1.3.36 J_c es localmente conexo.
8. Existen dos ciclo parabólicos. Entonces $F_{p_{c_1, c_2}}$ tiene infinitas componentes. Por el Teorema 1.3.36 J_c es localmente conexo.
9. Existen un ciclo atractor y un ciclo de Discos de Siegel. Entonces $F_{p_{c_1, c_2}}$ tiene infinitas componentes.

10. Existen un ciclo parabólico y el otro (o los otros) puntos críticos son estrictamente pre-periódicos. Entonces $F_{p_{c_1, c_2}}$ tiene infinitas componentes. Por el Teorema 1.3.36 J_c es localmente conexo.
11. Existen dos ciclos de Discos de Siegel.
12. Existe un ciclo de discos de Siegel y el otro (o los otros) puntos críticos son estrictamente pre-periódicos.
13. No existen componentes acotadas para $F_{p_{c_1, c_2}}$.

No tenemos información sobre el lugar de conexidad de la familia alternada, ya que su estudio se complica porque la familia alternada depende de dos parámetros.

Ahora presentamos un estudio sobre los rayos externos en la familia alternada.

Observación 2.1.2. *Los puntos fijos en \mathbb{T} bajo la multiplicación por 4 (mod 1) son los puntos $0, 1/3$ y $2/3$.*

Consideremos p_{c_1, c_2} un polinomio en la familia alternada. A diferencia del caso cuadrático en el que siempre existe un punto fijo en el que aterriza un único rayo externo (el rayo externo de ángulo 0) para un polinomio en la familia alternada puede ocurrir que en cada punto fijo aterricen más de un rayo.

Como ejemplo de lo anterior supongamos que un polinomio p_{c_1, c_2} tiene dos puntos fijos atractores. Entonces los otros dos puntos fijos son repulsores. Por el Teorema 1.4.8 los rayos externos de ángulo $0, 1/3$ y $2/3$ aterrizan. Más aún los puntos de aterrizaje de tales rayos externos deben ser puntos fijos repulsores. Si además suponemos que rayos externos de ángulos $0, 1/3$ y $2/3$ aterrizan en el mismo punto fijo entonces por el Teorema 1.4.9 y de la observación anterior tenemos que al menos dos rayos externos aterrizan en el otro punto fijo repulsor. Por lo tanto existen polinomios para los cuales no existe un punto fijo en el que aterrice un único rayo.

También puede ocurrir que en ningún punto fijo aterrice más de un rayo. Por ejemplo si uno de los cuatro puntos fijos es atractor y en los restantes tres puntos fijos aterriza un rayo externo con ángulo fijo por la multiplicación

por 4 (mod 1).

Un caso peculiar es cuando cada uno de los tres ángulos fijos bajo la multiplicación por 4 (mod 1) corresponde a un punto fijo para p_{c_1, c_2} y en el punto fijo restante para p_{c_1, c_2} aterrizan más de un rayo. A un conjunto de puntos fijos con sus respectivos ángulos con esta forma se le denomina *retrato de órbita fijo elemental* y es usado para demostrar que dado un retrato de órbita *formal* es realizable. Para una discusión mas a fondo de este consultese [18].

Un teorema que es de gran utilidad es el Teorema 1.5.11. Sin embargo en la literatura (que seguimos) no existe una generalización de tal teorema para polinomios de grado mayor a 2, no obstante la demostración del Teorema ¹ se basa en el hecho de que el conjunto de Julia lleno sea un compacto pleno, conexo localmente conexo y que el punto crítico se encuentre en la cuenca inmediata de atracción de un ciclo atractor. Así que bajo pequeñas modificaciones de la prueba del Teorema 1.5.11 tenemos:

Lema 2.1.1. *Sea p_{c_1, c_2} un polinomio en la familia alternada con un ciclo atractor de periodo $m > 1$, de tal forma que todos los puntos críticos son atraídos a este ciclo. Sea y un punto crítico que pertenece a la cuenca inmediata de atracción del ciclo. Denotemos por U_{y_0} y U_{y_1} a las componentes (conexas) del interior de K_c , que contienen al punto crítico y y al valor crítico $p_{c, c'}(y)$ respectivamente. Entonces la retracción dada por el Teorema 1.5.10 $\rho_{U_{y_1}} : \mathbb{C} \rightarrow \overline{U_{y_1}}$ envía la componente U_y a un único punto $z_0 \in \partial U_{y_1}$ que es fijo bajo p_{c_1, c_2}^m . Por lo tanto al menos dos rayos externos aterrizan en dicho punto.*

2.2. No invarianza de la conexidad

Esta sección esta dedicada a responder las siguientes preguntas:

- Si c_i es tal que J_{c_i} es conexo para $i = 1, 2$, entonces $\imath J_{c_1, c_2}$ es conexo?.
- Si c_i es tal que J_{c_i} es totalmente desconexo para $i = 1, 2$, entonces $\imath J_{c_1, c_2}$ es totalmente desconexo?.

¹vease [25]

2.2.1. El caso conexo

Damos un ejemplo que muestra que la propiedad de ser conexo no es invariante.

Consideremos los polinomios cuadráticos $p_{c_1} = z^2 - 0,7$ y $p_{c_2} = z^2 + 0,5i$.

Lema 2.2.1. *Los conjuntos de Julia J_{c_1} y J_{c_2} son conexos.*

Demostración. Los parámetros de dichos polinomios corresponden a la cardioide principal del conjunto de Mandelbrot, es decir tienen un punto fijo atractor. Por el Teorema 1.5.3 los conjuntos de Julia J_{c_1} y J_{c_2} son casi-circunferencias, por lo cual dichos conjuntos son casi-conformemente equivalentes. En particular J_{c_1} y J_{c_2} son curvas de Jordan y por lo tanto topológicamente equivalentes (homeomorfos). Claramente los conjuntos J_{c_1} y J_{c_2} son conexos y localmente conexos. \square

Véanse las Figuras 2.1 y 2.2.

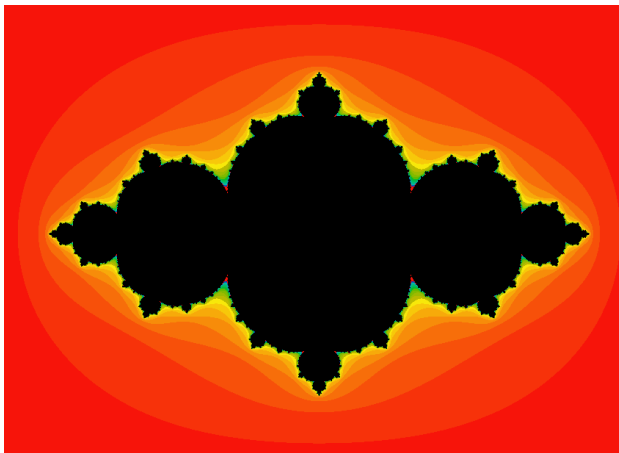


Figura 2.1: Conjunto de Julia lleno de $z^2 - 0,7$

Lema 2.2.2. *Los conjuntos de Julia J_{c_1, c_2} y J_{c_2, c_1} no son conexos. Más aún son totalmente desconexos.*

Demostración. El radio de escape para p_{c_1, c_2} es 3,39. Tenemos que $|p_{c_1, c_2}^6(0)| \approx 5,16$ y $|p_{c_1, c_2}^7(\zeta_i)| \approx 125,796$ para $i = 1, 2$. Por lo tanto $C_{p_{c_1, c_2}} \subset I_{p_{c_1, c_2}}$ y por el Teorema 1.3.4 J_{c_1, c_2} es totalmente desconexo. Usando la misma técnica se puede ver que J_{c_2, c_1} es totalmente desconexo. \square



Figura 2.2: Conjunto de Julia lleno de $z^2 + 0.5i$

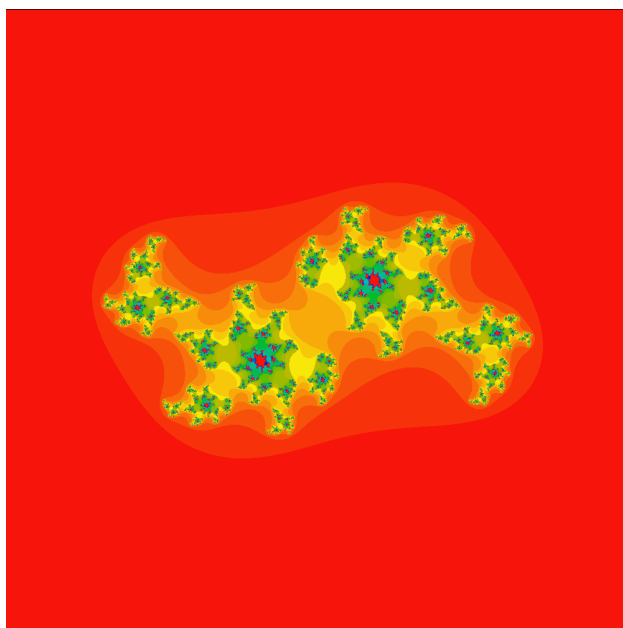


Figura 2.3: Julia lleno de $(z^2 - 0.7)^2 + 0.5i$

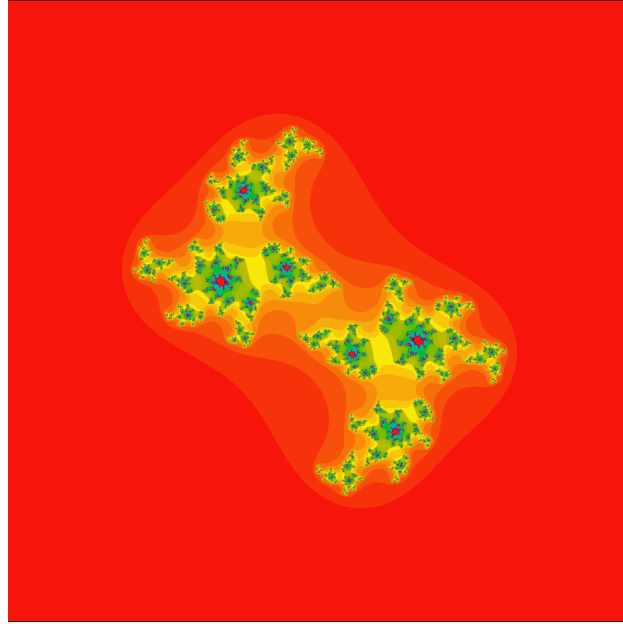


Figura 2.4: Julia lleno de $(z^2 + 0.5i)^2 - 0.7$

Por los Lemas 2.2.1 y 2.2.2 tenemos que la conexidad no es invariante bajo la alternancia.

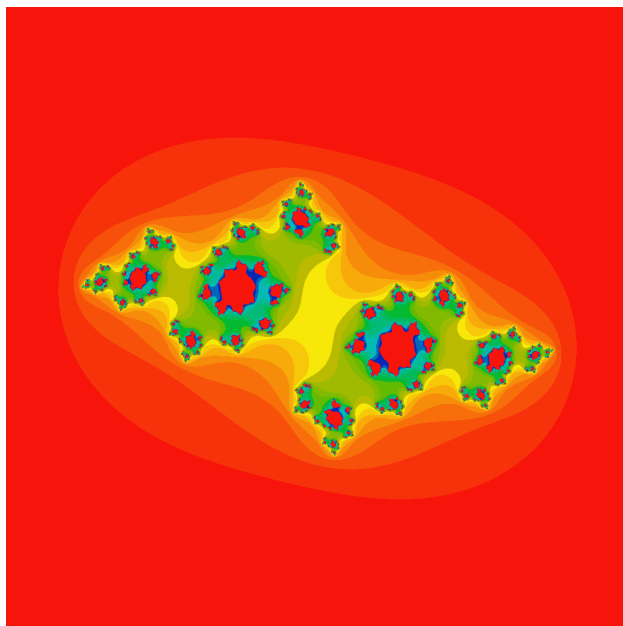
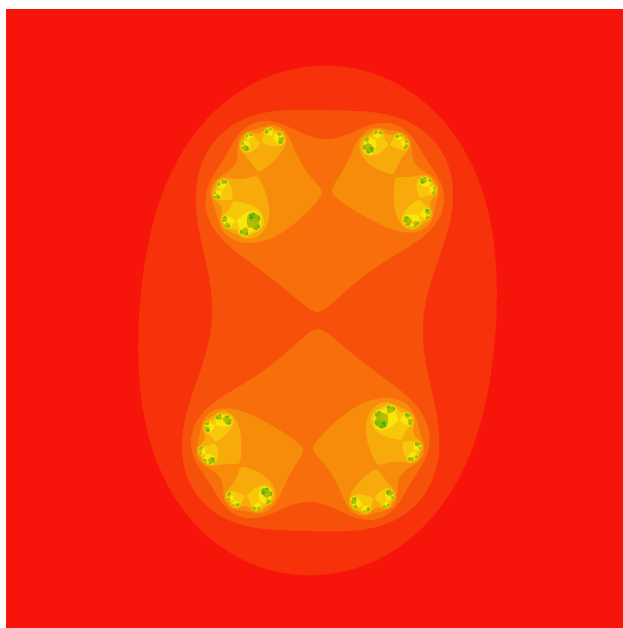
2.2.2. El caso totalmente desconexo

En esta subsección se dará un ejemplo donde dos polinomios tienen conjunto de Julia totalmente desconexo, pero los polinomios alternados tienen conjunto de Julia conexo.

Lema 2.2.3. Sean $c_1 = -0,75 + 0,4i$ y $c_2 = 0,68 - 0,1i$. Los conjuntos de Julia J_{c_1} y J_{c_2} son totalmente desconexos.

Demostración. El radio de escape para p_{c_1} es 1.85 y $|p_{c_1}^8(0)| \approx 2,52$. Por lo tanto $C_{p_{c_1} \subset I_{p_{c_1}}}$ y por el Teorema 1.3.4 J_{c_1} es totalmente desconexo. Del mismo modo se puede ver que J_{c_2} es totalmente desconexo. \square

Lema 2.2.4. Los conjuntos de Julia J_{c_1, c_2} y J_{c_2, c_1} no son totalmente desconexos. Más aún, son conexos.

Figura 2.5: Conjunto de Julia de $z^2 - 0.75 + 0.4i$ Figura 2.6: Conjunto de Julia de $z^2 + 0.68 - 0.1i$

Demostración. El polinomio p_{c_1, c_2} tiene un punto fijo atractor $x \approx 0,7441 - 0,1750i$ con multiplicador $\lambda \approx -0,6395 + 0,6036i$. Conjugando a p_{c_1, c_2} a un polinomio f de tal forma que el punto fijo sea el origen, tenemos que para todo $\zeta \in C_f$, $|f^{10}(\zeta)| < 0,9|\zeta|$ y $|f^{10}(\zeta) - \lambda\zeta| < 2,6|\zeta|^2$ por lo tanto como se vio en la prueba del Teorema 1.3.7, para todo $\zeta \in C_f$ la órbita de ζ tiende a cero. Es decir los tres puntos críticos son atraídos al punto fijo atractor. Por el Teorema 1.3.36 J_{c_1, c_2} es conexo y localmente conexo. Usando argumentos análogos podemos ver que J_{c_2, c_1} también es conexo y localmente conexo. \square

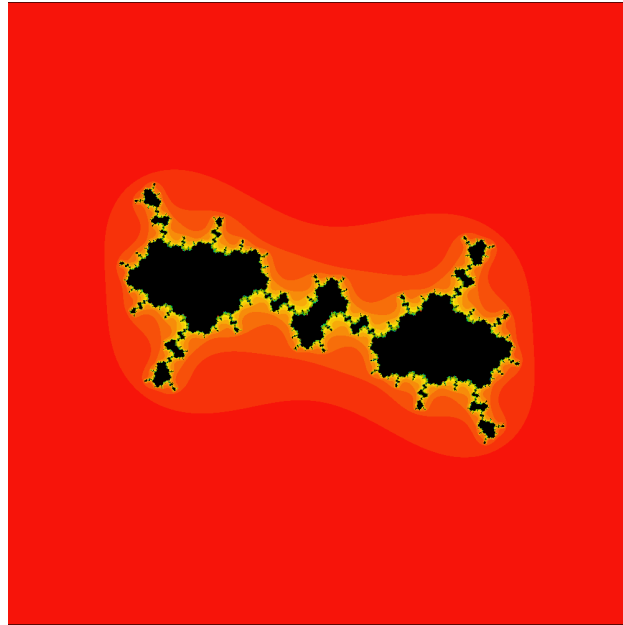


Figura 2.7: Julia lleno de $(z^2 - 0.75 + 0.4i)^2 + 0.68 - 0.1i$

Por los Lemas 2.2.3 y 2.2.4 tenemos que la propiedad de ser totalmente disconexo no es invariante bajo la alternancia.

2.3. El conejo gordo y el conejo flaco

Mediante la computadora podemos obtener dibujos de los conjuntos de Julia y de Julia lleno de manera sencilla, lo cual nos permite conjeturar el comportamiento dinámico y las propiedades topológicas de dichos conjuntos.

Esta sección está dedicada a dar un ejemplo de la siguiente situación: Existen c_1 y c_2 parámetros tales que:

1. J_{c_i} es conexo, localmente conexo para $i = 1, 2$.
2. J_{c_1} es homeomorfo a J_{c_2} .
3. El comportamiento dinámico de los polinomios p_{c_1} y p_{c_2} es distinto.
4. J_{c_1, c_2} y J_{c_2, c_1} son conexos y localmente conexos.
5. J_{c_1, c_2} y J_{c_2, c_1} son topológicamente equivalentes.

Para tal propósito seguiremos el plan:

1. Evidenciar que los comportamientos dinámicos de los polinomios p_{c_1} y p_{c_2} son distintos y demostrar que J_{c_i} es conexo, localmente conexo para $i = 1, 2$. Esto se realiza en las primeras dos subsecciones de esta sección.
2. Estudio de los conjuntos \mathbb{T}/\sim_{c_1} y \mathbb{T}/\sim_{c_2} , dicho de otro modo describir los puntos de J_{c_i} donde aterrizan más de un rayo externo, para $i = 1, 2$. Esto aparece en la tercera subsección.
3. Concluir en términos de 1 y 2 que los conjuntos de Julia J_{c_1} y J_{c_2} vistos como cocientes topológicos de la circunferencia unitaria (o equivalentemente de las clases de equivalencia de ángulos \mathbb{T}) son homeomorfos. Esto también se presenta en la tercera subsección.
4. Describir los comportamientos dinámicos de los polinomios p_{c_1, c_2} y p_{c_2, c_1} y demostrar que los conjuntos de Julia J_{c_1, c_2} y J_{c_2, c_1} son conexos y localmente conexos. Como consecuencia obtenemos que las características topológicas de conexidad y conexidad local de los conjuntos J_{c_1} y J_{c_2} es preservada bajo alternancia. Esto se realiza en la cuarta subsección.
5. Estudio de los conjuntos $\mathbb{T}/\sim_{c_1, c_2}$ y $\mathbb{T}/\sim_{c_2, c_1}$. Esto se encuentra en la quinta subsección de esta sección.
6. Concluir en términos de 4 y 5 que los conjuntos de Julia J_{c_1, c_2} y J_{c_2, c_1} vistos como cocientes topológicos de la circunferencia unitaria (o equivalentemente de las clases de equivalencia de ángulos \mathbb{T}) son homeomorfos. Esta conclusión aparece en la quinta subsección.

2.3.1. Conejo flaco

Consideremos el polinomio cuadrático $p_{c_1} = z^2 + c_1$ donde $c_1 \approx -0,12256 + 0,74486i$, para este polinomio el 0 es un punto periódico super-atractor de periodo 3, el conjunto de Julia del polinomio anterior es llamado el conejo de Douady, nosotros lo llamaremos el conejo flaco.

Como c_1 es el centro de una componente hiperbólica del conjunto de Mandelbrot, entonces claramente p_{c_1} es hiperbólico. Aplicando el Teorema 1.3.30 tenemos que J_{c_1} es conexo y localmente conexo.

p_{c_1} tiene un ciclo super-atractor $\{a_0 = 0, a_1 = c_1, a_2 = c_1^2 + c_1\}$. Denotemos por U_i la cuenca inmediata de atracción que contiene a a_i dichas cuencas están contenidas en el interior de K_{c_1} . Tenemos que p_{c_1} envía U_0 de modo 2 a 1 sobre U_1 , a U_1 de modo 1 a 1 sobre U_2 y a U_2 de modo 1 a 1 sobre U_0 . Además cualquier otra componente es enviada homeomorfamente a alguna de las U_i mediante un número finito de iteradas de p_{c_1} . Es decir el $\text{Int}(K_{c_1})$ coincide con la cuenca de atracción del ciclo. Vease la Figura 2.3.1.

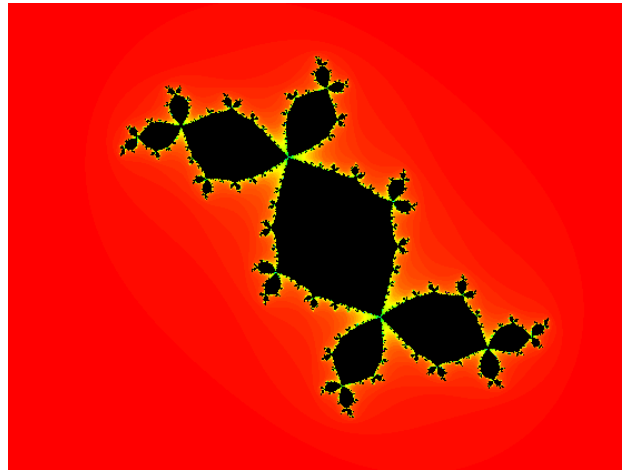


Figura 2.8: conejo flaco

2.3.2. Conejo gordo

La razón de poner el adjetivo de flaco es que si consideramos al polinomio $p_{c_2} = z^2 + c_2$ donde $c_2 = e^{2\pi i/3}/2 - e^{4\pi i/3}/4$, el cual tiene un punto fijo

indiferente racional de multiplicador $e^{2\pi i/3}$, obtenemos un conjunto de Julia visualmente muy parecido al conejo de Douady sólo que cada componente del interior del Julia lleno parece ser obtenida “inflando” cada componente del conejo de Douady.

El polinomio p_{c_2} tiene un punto fijo parabólico α_{c_2} con multiplicador $e^{2\pi i/3}$ y como $c_2 \in \mathcal{M}$ entonces por el Teorema 1.3.36 J_{c_1} es conexo localmente conexo. Para estudiar la dinámica del polinomio p_{c_2} es conveniente recordar que p_{c_2} es conformemente conjugado (de hecho mediante una transformación afín) al polinomio $g(z) = e^{2\pi i/3}z + z^2$ que tiene la ventaja de tener el punto fijo en 0. Calculando la tercera iterada de g tenemos que $g^3(z) = z[1+2[(9+\sqrt{3}i)z^3+(2-6\sqrt{3}i)z^4+(-8-4\sqrt{3}i)z^5+(-4+4\sqrt{3}i)+2z^7]]$, luego aplicando el Teorema de la flor de Leau-Fatou, Teorema 1.3.11, tenemos que existen exactamente tres pétalos atractores U_i , denotemos por $\Omega_i \supset U_i$ la cuenca parabólica de atracción determinada por U_i , recordemos que estas cuencas son disjuntas. Denotemos también a la cuenca parabólica de atracción de g en 0 por $\Omega = \bigcup \Omega_i$, sabemos que la cuenca inmediata para g en 0, es la unión de las componentes conexas Ω_i^* de Ω que contienen a los pétalos. Por el corolario 1.3.2 sabemos que la familia $g^k|_{\Omega_i^*}$ converge uniformemente a 0, por lo tanto la intersección de las cerraduras de las componentes conexas Ω_i^* contiene al punto 0 y $g(\Omega_i^*) \subset \Omega_i^*$, además por el corolario 1.3.3 sabemos que $0 \in J_g$. Como toda componente del interior de K_{c_2} es pre-periódica tenemos que $\text{Int}(K_{c_2})$ coincide con la cuenca parabólica de atracción Ω de g en 0. Vease la Figura 2.3.2.

2.3.3. Estudio de \mathbb{T}/\sim_{c_1} y \mathbb{T}/\sim_{c_2}

Las subsecciones precedentes ponen en evidencia el distinto comportamiento dinámico de los polinomios que hemos tratado. Y además ofrecen la demostración de que los conjuntos de Julia J_{c_1} y J_{c_2} son conexos y localmente conexos con lo cual concluimos el primer punto de nuestro plan.

Observación 2.3.1. *Como c_1 es el centro de una componente hiperbólica, entonces claramente p_{c_1} es hiperbólico, luego por el Teorema 1.3.35 tenemos que el conejo flaco no es diferenciable en ningún punto, por lo tanto el conejo flaco y el conejo gordo no pueden ser difeomorfos. (Se sabe¹ que el conejo*

¹vease [24]

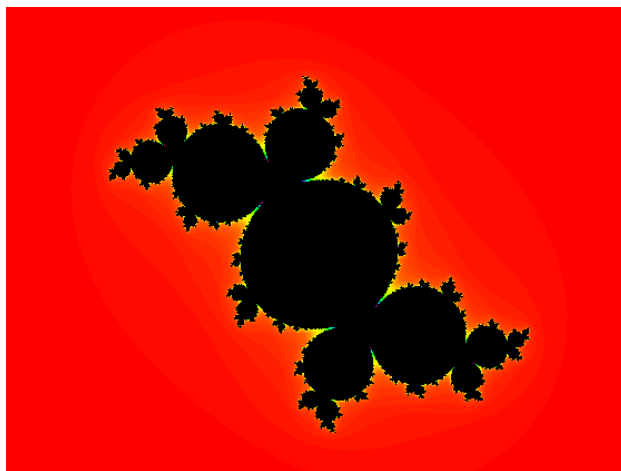


Figura 2.9: conejo gordo

gordo tampoco es diferenciable en ningún punto).

Sabemos que el polinomio p_{c_1} tiene un ciclo super-atractor de periodo 3, entonces por el Teorema 1.3.22 p_{c_1} tiene dos puntos fijos repulsores. De esta manera por el Corolario 1.5.1 al menos dos rayos aterrizan en un punto fijo. Por otro lado por el Teorema 1.5.11 existe un único punto en U_1 en el que aterrizan más de un rayo. Para nuestro estudio queremos saber si estos dos puntos están relacionados, la solución de este problema es el siguiente lema.

Lema 2.3.1. *Las cerraduras de las cuencas inmediatas de atracción U_0, U_1, U_2 se intersectan en un sólo punto x , más aún, $x = \alpha_{c_1}$. Donde α_{c_1} es el punto fijo repulsor que desconecta a K_{c_1} .*

Demostración. Sea y_i el único punto en ∂U_i que es fijo bajo p_{3c_1} , los puntos $\{y_0, y_1, y_2\}$ forman un ciclo de periodo m , donde m es un divisor de 3. Sabemos por el Teorema 1.5.11 que existen al menos dos rayos que aterrizan en cada y_i y que dichos rayos son periódicos de periodo 3. Como los rayos tienen periodo 3, entonces si t es el ángulo de un rayo de este tipo debe cumplir la congruencia $2^3 t \equiv t \pmod{1}$, por lo cual el ángulo $t \in \{1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7\}$. Mediante un cálculo podemos ver que $\mathcal{R}(K_{c_1}, 1/3)$ aterriza en α_{c_1} , luego por el lema 1.4.1 también aterrizan en este punto los rayos $\mathcal{R}(K_{c_1}, 2/3)$ y $\mathcal{R}(K_{c_1}, 4/3)$. Denotemos al otro ciclo de periodo 3 por $\{x, p_{c_1}(x), p_{c_1}^2(x)\}$, si $y_1 \in \{x, p_{c_1}(x), p_{c_1}^2(x)\}$ entonces los 6 rayos externos con ángulos $\{1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7\}$ aterrizan en el ciclo

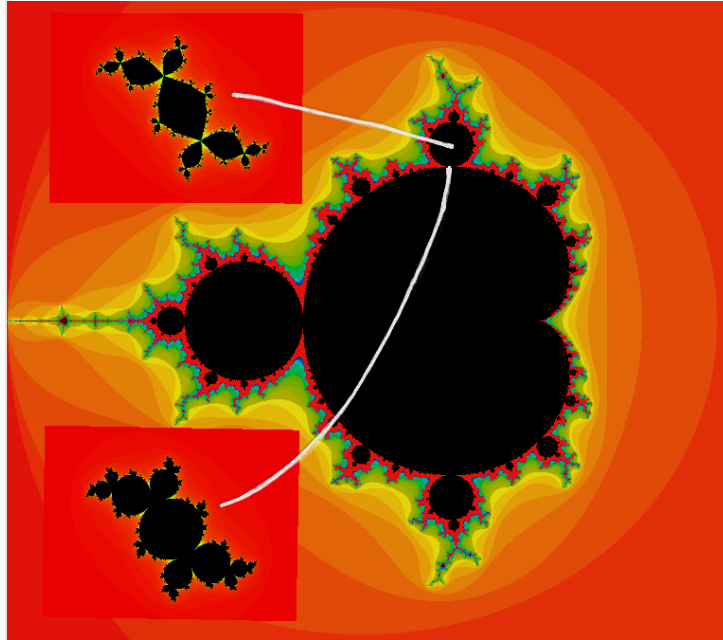


Figura 2.10: El conjunto de Madelbrot y los conejos.

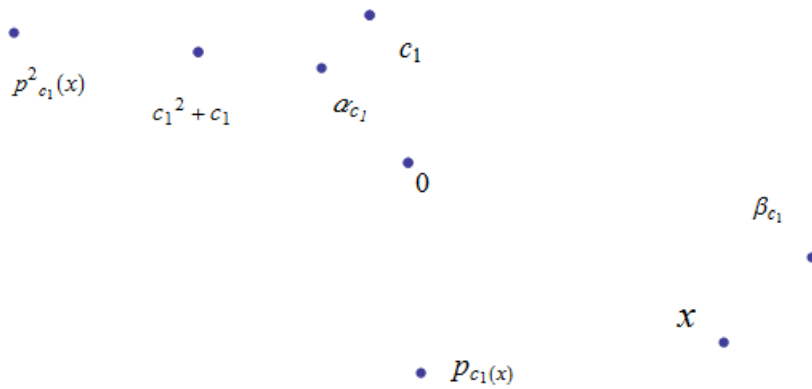


Figura 2.11: puntos fijos, ciclos de periodo 3 y órbita del punto f para p_{c_1}

$\{x, p_{c_1}(x), p_{c_1}^2(x)\}$, lo que no es posible. Por lo tanto $y_i = \alpha_{c_1}$ para todo i , y entonces, $\alpha_{c_1} \in \overline{U_0} \cap \overline{U_1} \cap \overline{U_2}$. Por otro lado por el Teorema 1.5.8 sabemos que existe un único sector acotado por dos rayos que aterrizan en α_{c_1} y que contiene al valor crítico c_1 , dicho sector es caracterizado por tener la menor amplitud angular, de este modo los únicos rayos que aterrizan en α_{c_1} corresponden a los ángulos $\{1/7, 2/7, 4/7\}$. Luego por el Teorema 1.4.3 $K_{c_1} \setminus \{\alpha_{c_1}\}$ tiene 3 componentes (conexas), cada una de las cuales contiene a un único $\overline{U_i}$, por lo tanto $\{\alpha_{c_1}\} = \overline{U_0} \cap \overline{U_1} \cap \overline{U_2}$. \square

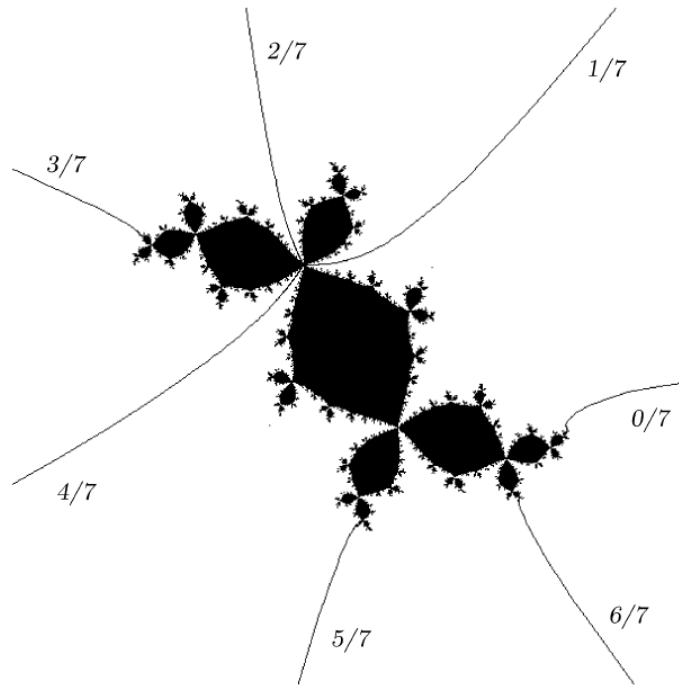


Figura 2.12: Algunos rayos del conejo flaco

Como la inversa de la transformación de Riemann también es conforme podemos ordenar los rayos como se muestra en la Figura 2.12.

Observación 2.3.2. *Por el lema anterior en α_{c_1} aterrizan exactamente 3 rayos entonces por el lema 1.4.1 en cada punto de $\{\bigcup p_{c_1}^{-n}(\alpha_{c_1})\}$ aterrizan 3 rayos externos, los ángulos de tales rayos son pre-periódicos pero no periódicos (excepto por los rayos que aterrizan en α_{c_1}).*

Para describir el conjunto \mathbb{T}/\sim_{c_1} es conveniente realizar un esquema para los ciclos periódicos y los rayos externos que aterrizan en los puntos de los ciclos antes mencionados, para esto consideremos la circunferencia unitaria e identifiquemos los ángulos que aterrizan en un punto, uniendo los ángulos mediante líneas a un punto seleccionado dentro del disco unitario. Además este esquema nos permite identificar el sector que contiene al valor crítico. Como un ejemplo presentamos el esquema para el punto fijo α_{c_1} en la Figura 2.13.

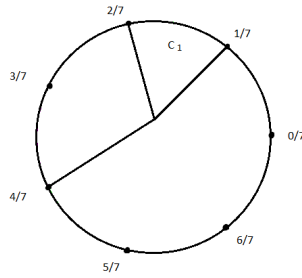


Figura 2.13: esquema para el punto fijo α_{c_1}

Este esquema nos ayuda a decidir cuando dos rayos aterrizan en un mismo punto, ya que las líneas representan rayos externos y dichos rayos (por la conformidad de la transformación de Riemann) no pueden intersectarse en el plano complejo. De este modo no podemos realizar esquemas que tengan líneas que se intersectan en un punto que no sea el que representa el punto de aterrizaje en común.

Lema 2.3.2. *Si z es un punto de J_{c_1} donde aterrizan más de un rayo externo, entonces $z \in \{\bigcup p_{c_1}^{-n}(\alpha_{c_1})\}$.*

Demostración. Supongamos que z es un punto donde aterrizan más de un rayo y z no es preimagen bajo iteración de α_{c_1} , por la observación y por el Teorema 1.4.8 tenemos que z es periódico o pre-periódico. Es suficiente probar el caso cuando z es periódico (ya que si z es pre-periódico podemos encontrar alguna iterada que envía a z a un punto periódico en el que aterrizan más

de un rayo). Denotemos por $\{z_0, z_1, \dots, z_{m-1}\}$ el ciclo de periodo m formado por z , este ciclo es repulsor (ya que p_c sólo tiene un punto crítico). En cada punto del ciclo aterrizan $v > 1$ rayos. Como el segmento de línea que une al punto 0 con c_1 en el Mandelbrot intersecta a la frontera del Mandelbrot en un sólo punto entonces por el Teorema 1.5.13 el ciclo $\{z_0, z_1, \dots, z_{m-1}\}$ no puede existir. \square

Combinando la observación de arriba y este lema tenemos que los únicos ángulos donde el lazo de Carathéodory no es inyectiva son de la forma $\{\gamma_{c_1}^{-1}(\bigcup p_{c_1}^{-n}(\alpha_{c_1}))\}$.

Observación 2.3.3. *En el caso del polinomio p_{c_2} tenemos que existen 3 pétalos atractores para α_{c_2} , donde α_{c_2} es un punto fijo parabólico con multiplicador una raíz cúbica de la unidad luego por el Teorema 1.4.11 existen 3 rayos externos que aterrizan en α_{c_2} y dichos rayos son de periodo 3, luego los ángulos de dichos rayos están en el conjunto, $\{1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7\}$, mediante un cálculo podemos ver que los rayos que aterrizan en α_{c_2} tienen ángulos $\{1/7, 2/7, 4/7\}$.*

Lema 2.3.3. *Si z es un punto de J_{c_2} donde aterrizan más de un rayo externo entonces $z \in \{\bigcup p_{c_2}^{-n}(\alpha_{c_2})\}$.*

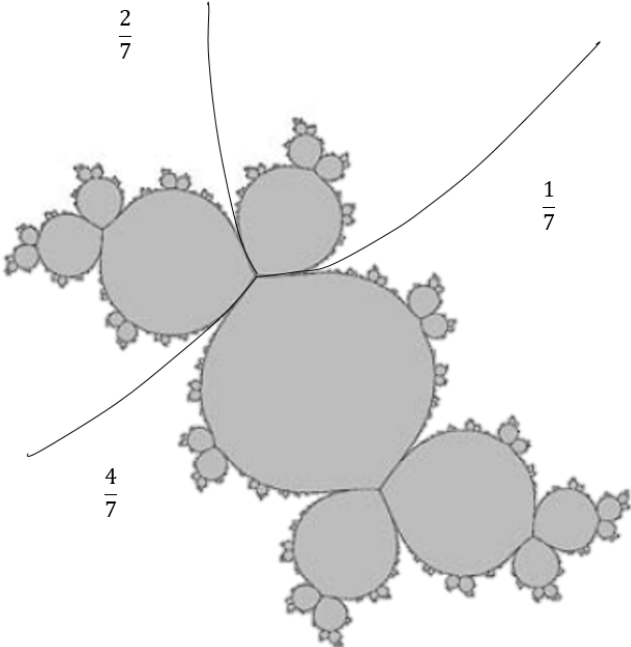
Demostración. La prueba es análoga a la del Lema 2.3.2. Ya que c_2 es la raíz de la componente hiperbólica de la cual c_1 es el centro. \square

Por la Observación 2.3.3 y el Lema 2.3.3, tenemos que los únicos ángulos donde el lazo de Carathéodory no es inyectiva son de la forma $\{\gamma_{c_2}^{-1}(\bigcup p_{c_2}^{-n}(\alpha_{c_2}))\}$.

Las discusiones de arriba concluyen con el punto 2 de nuestro plan. Más aún, ponen en claro que los conjuntos de clases de equivalencia \mathbb{T}/\sim_{c_1} y \mathbb{T}/\sim_{c_2} son iguales. Aplicando la Proposición 1.5.1 tenemos que \mathbb{T}/\sim_{c_1} es homeomorfo a J_{c_1} y \mathbb{T}/\sim_{c_2} es homeomorfo a J_{c_2} . Usando la igualdad antes mencionada obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1. *J_{c_1} y J_{c_2} son homeomorfos.*

Observe que el homeomorfismo digamos h entre los conos está dado por $h(\gamma_{c_1}(t)) = \gamma_{c_2}(t)$. Esto finiquita el punto 3 de nuestro plan.



2.3.4. Comportamiento dinámico de los polinomios alternados

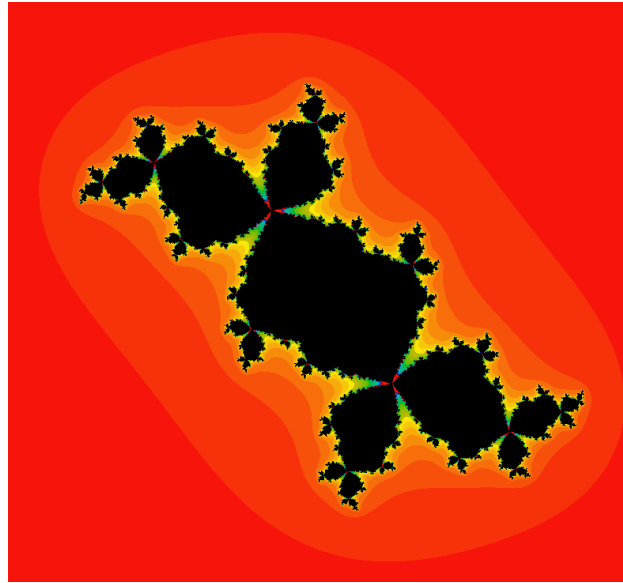
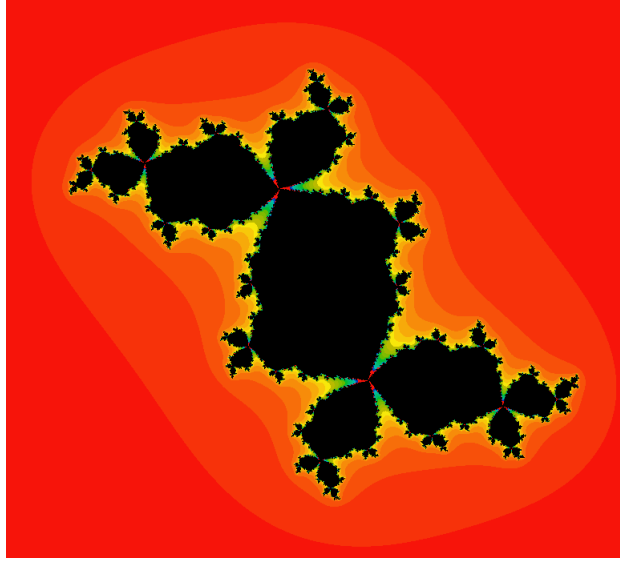


Figura 2.14: J_{c_1, c_2}

El polinomio p_{c_1, c_2} tiene un ciclo atractor de periodo 3: $\{a_0 \approx -0,1677 + 0,0304i, a_1 = p_{c_1, c_2}(a_0) \approx -0,6555 + 0,5094i, a_2 = p_{c_1, c_2}(a_1) \approx -0,1286 + 0,6568i\}$.

Los puntos críticos son 0 , $\sqrt{-c} \approx 0,6623 - 0,5622i$ y $-\sqrt{-c} \approx -0,6623 + 0,5622i$. Sabemos que la cuenca inmediata de atracción de dicho ciclo contiene al menos un punto crítico. Sin embargo usando la misma técnica que en el Lema 2.2.4 se puede ver que todos los puntos críticos son atraídos al ciclo atractor $\{a_0, a_1, a_2\}$ (veanse las Figuras 2.16, 2.17 y 2.18). De este modo la órbita de los puntos críticos es acotada luego aplicando el Teorema 1.3.3 tenemos que J_{c_2, c_1} es conexo. Ahora aplicando el Teorema 1.3.31 tenemos que p_{c_1, c_2} es hiperbólico, entonces por el Teorema 1.3.30 J_{c_2, c_1} es localmente conexo.

Denotemos por U_i la cuenca inmediata de atracción que contiene a a_i dichas cuencas están contenidas en el interior de K_{c_1, c_2} . Además como toda componente del interior de K_{c_1, c_2} es pre-periódica y no existe otro ciclo de

Figura 2.15: J_{c_2, c_1}

componentes con excepción del ciclo $\{U_0, U_1, U_2\}$, entonces cualquier otra componente es enviada homeomorficamente a alguna de las U_i mediante un número finito de iteradas de p_{c_1} . Es decir el $\text{Int}(K_{c_1, c_2})$ coincide con la cuenca de atracción del ciclo.

El polinomio p_{c_2, c_1} tiene un ciclo atractor de periodo 3: $\{a_0 \approx 0,0477 + 0,0769i, a_1 = p_{c_1, c_2}(a_0) \approx -0,5374 + 0,5758i, a_2 = p_{c_1, c_2}(a_1) \approx -0,0953 + 0,7346i\}$.

Los puntos críticos son 0 , $\sqrt{-c} \approx 0,6270 - 0,5178i$ y $-\sqrt{-c} \approx -0,6270 + 0,5178i$. Del mismo modo que para el polinomio p_{c_1, c_2} se puede demostrar que todos los puntos críticos son atraídos al ciclo atractor $\{a_0, a_1, a_2\}$ (veanse las Figuras 2.19, 2.20). De este modo la órbita de los puntos críticos es acotada luego aplicando el Teorema 1.3.3 tenemos que J_{c_2, c_1} es conexo. Ahora aplicando el Teorema 1.3.31 tenemos que p_{c_2, c_1} es hiperbólico, entonces por el Teorema 1.3.30 J_{c_2, c_1} es localmente conexo.

Denotemos por U_i la cuenca inmediata de atracción que contiene a a_i dichas cuencas están contenidas en el interior de K_{c_2, c_1} . Además como toda componente del interior de K_{c_2, c_1} es pre-periódica y no existe otro ciclo de componentes con excepción del ciclo $\{U_0, U_1, U_2\}$, entonces cualquier otra componente es enviada homeomorficamente a alguna de las U_i mediante un

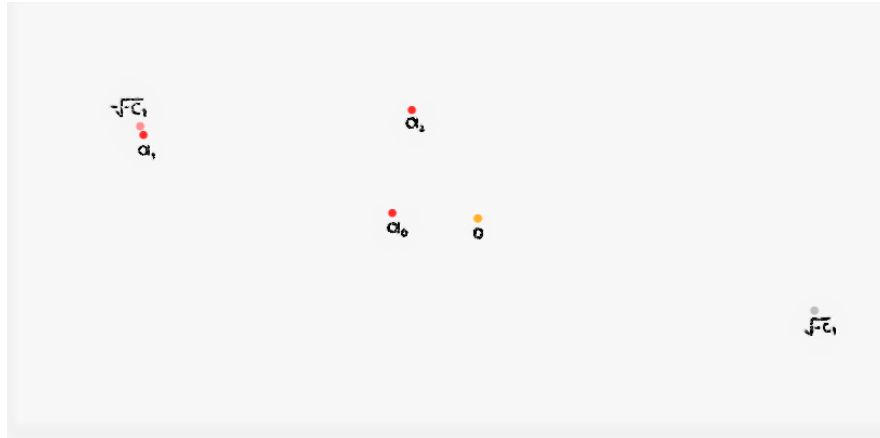


Figura 2.16: Puntos críticos y ciclo atractor para p_{c_1, c_2} .

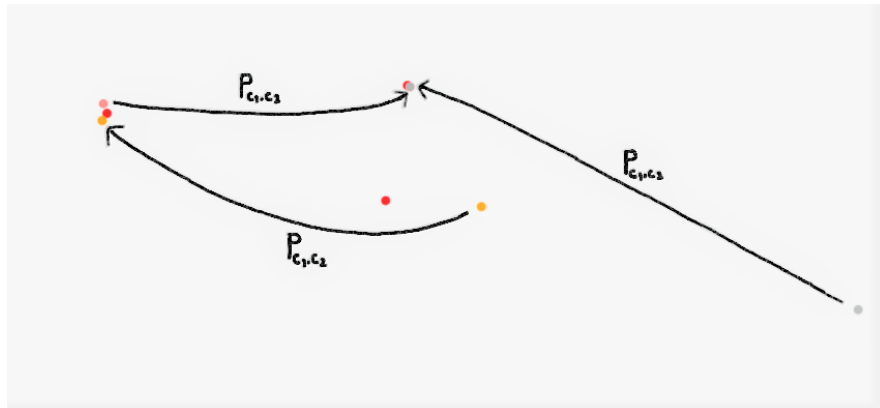


Figura 2.17: Ciclo atractor y primeros dos elementos de la órbita de cada punto crítico para p_{c_1, c_2} .

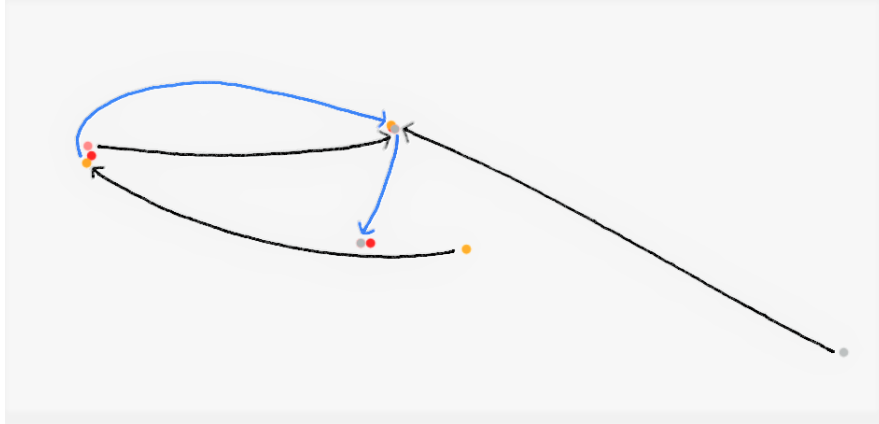


Figura 2.18: Ciclo atractor y primeros tres elementos de la órbita de cada punto crítico para p_{c_1, c_2} .

número finito de iteradas de p_{c_1} . Es decir el $\text{Int}(K_{c_2, c_1})$ coincide con la cuenca de atracción del ciclo.

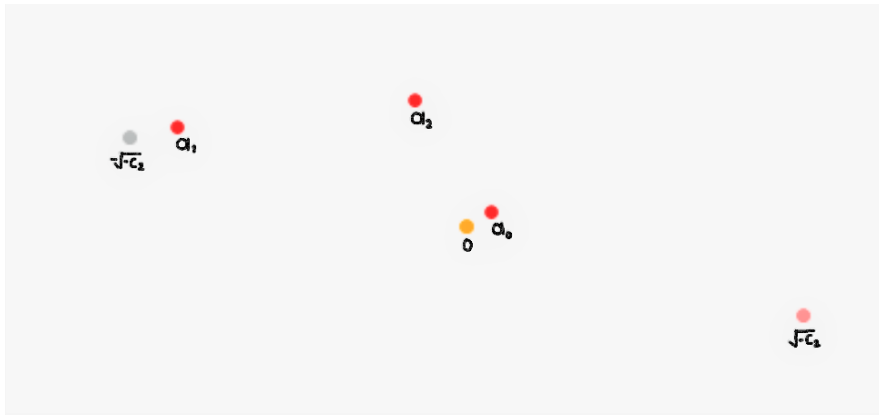


Figura 2.19: Puntos críticos y ciclo atractor para p_{c_2, c_1} .

De los párrafos anteriores es claro que los polinomios alternados tienen el mismo comportamiento dinámico. Más aún tenemos que los conjuntos de Julia de los polinomios alternados preservan las características topológicas de conexión y conexión local de los conejos, esto cubre con el punto (4) de nuestro esquema.



Figura 2.20: Ciclo atractor y primeros tres elementos de la órbita de cada punto crítico para p_{c_2, c_1} .

2.3.5. Estudio de los conjuntos $\mathbb{T}/\sim_{c_1, c_2}$ y $\mathbb{T}/\sim_{c_2, c_1}$

Observe que la relación de equivalencia \sim_c no depende del grado del polinomio, solamente depende de la conexidad y conexidad local del conjunto de Julia lleno del polinomio. Por lo tanto para un polinomio $p_{c, c'}$ un polinomio en la familia alternada podemos considerar el cociente $\mathbb{T}/\sim_{c, c'}$.

El conjunto de Julia lleno K_{c_1, c_2} es un compacto pleno, conexo y localmente conexo, entonces por el Teorema 1.4.5 existe el lazo de Carathéodory $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow J_{c_1, c_2}$ (continuo y sobreyectivo) que cumple la identidad $p_{c_1, c_2}(\gamma(t)) = \gamma(4t)$. Dado que todos los puntos críticos son atraídos al mismo ciclo atractor entonces los demás puntos periódicos de p_{c_1, c_2} son repulsores, en particular los cuatro puntos fijos de p_{c_1, c_2} , digamos x_1, x_2, x_3, x_4 , por lo tanto dichos puntos están en el conjunto de Julia. Por otro lado la transformación $h(t) = 4t \pmod{1}$ tiene solo tres puntos fijos en el conjunto de ángulos, a saber $0, 1/3$ y $2/3$, por lo cual alguno de los puntos x_i desconecta al conjunto de Julia lleno, es decir $K_{c_1, c_2} \setminus \{x_i\}$ es desconexo. Luego por el Teorema 1.4.4 en el punto x_i aterrizan al menos dos rayos.

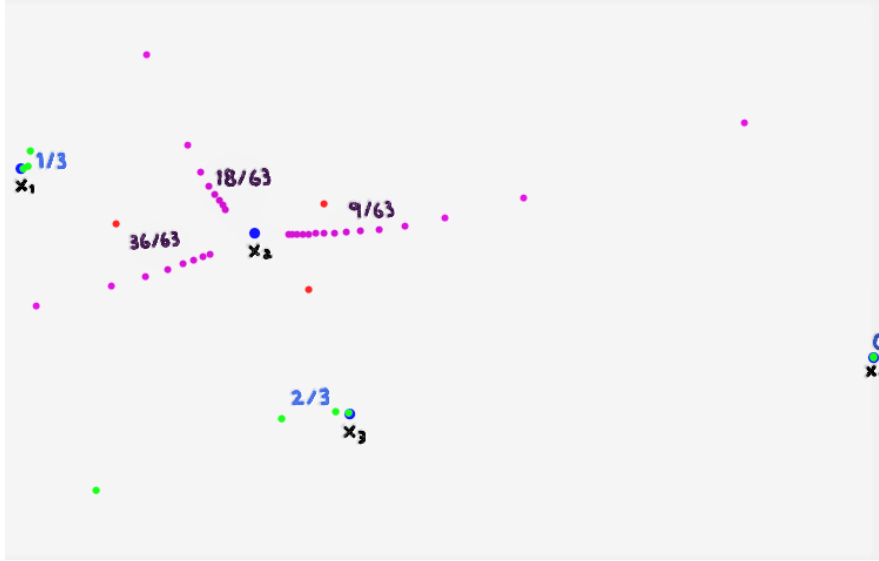


Figura 2.21: Puntos fijos y algunos puntos de los rayos externos para p_{c_1, c_2} .

Los cuatro puntos fijos de p_{c_1, c_2} son $x_1 \approx -0,8977 + 0,9111i$, $x_2 \approx -0,3046 + 0,4377i$, $x_3 \approx -0,0637 - 0,8795i$ y $x_4 \approx 1,2661 - 0,4694i$. Realizando algunos cálculos podemos ver que en el punto x_4 aterriza el rayo de ángulo 0, en el punto x_3 aterriza el rayo de ángulo $2/3$, en el punto x_2 aterrizan los rayos con ángulos $1/7$, $2/7$ y $4/7$ y finalmente en el punto x_1 aterriza el rayo de ángulo $1/3$. Véase la figura 2.21

De manera análoga al caso del conejo flaco queremos demostrar que las cuencas inmediatas de atracción U_0, U_1, U_2 se intersectan en el punto x_2 .

Lema 2.3.4. *Las cerraduras de las cuencas inmediatas de atracción U_0, U_1, U_2 se intersectan en el punto fijo x_2 .*

Demostración. Sea z_0 el único punto en ∂U_{y_1} que es fijo bajo p_{c_1, c_2}^3 , los puntos $\{z_0, p_{c_1, c_2}(z_0), p_{c_1, c_2}^2(z_0)\}$ forman un ciclo de periodo m , donde m es un divisor de 3. Sabemos que existen al menos dos rayos que aterrizan en cada punto del ciclo y que dichos rayos son periódicos de periodo 3. Como los rayos tienen periodo 3, entonces si t es el ángulo de un rayo de este tipo debe cumplir la congruencia $4^3 t \equiv t \pmod{1}$, por lo cual el ángulo $t = s/63$ donde s es un entero no cero y $t \in \mathbb{T}$. Por otro lado sabemos que los rayos $\mathcal{R}(K_{c_1, c_2}, 1/7)$,

$\mathcal{R}(K_{c_1, c_2}, 2/7)$ y $\mathcal{R}(K_{c_1, c_2}, 4/7)$ aterrizan en x_2 . Calculando los demas rayos externos con ángulo de la forma $s/63$ podemos ver que cada uno de dichos rayos (claramente con excepción de los de ángulo $1/7, 2/7$ y $4/7$) aterrizan en un punto distinto del conjunto de Julia lleno. Por lo tanto $z_0 = x_2$, y entonces, $x_2 \in \overline{U_0} \cap \overline{U_1} \cap \overline{U_2}$. Además los únicos rayos que aterrizan en x_2 corresponden a los ángulos $\{1/7, 2/7, 4/7\}$. Luego por el Teorema 1.4.3 $K_{c_1, c_2} \setminus \{x_2\}$ tiene 3 componentes (conexas), cada una de las cuales contiene a un único $\overline{U_i}$, por lo tanto $\{x_2\} = \overline{U_0} \cap \overline{U_1} \cap \overline{U_2}$. \square

Lema 2.3.5. *Si z en un punto de J_{c_1, c_2} donde aterrizan más de un rayo externo entonces $z \in \{\bigcup p_{c_1, c_2}^{-n}(x_2)\}$.*

Demostración. Denotemos al lugar de conexidad de los polinomios de la forma $p_{c_1, c'} = (z^2 + c_1)^2 + c'$, donde $c_1 \approx -0,12256 + 0,74486i$ y $c' \in \mathbb{C}$ por $\mathcal{M}(c_1)$. Los polinomios p_{c_1, c_2} y $p_{c_1, c_1} = p_{c_1}^2$ están en la misma componente de $\mathcal{M}(c_1)$, ya que los polinomios p_{c_1, c_2} y $p_{c_1}^2$ tienen un ciclo atractor de periodo 3 y c_1 y c_2 son bastante cercanos.

Si z en un punto de J_{c_1, c_2} donde aterrizan más de un rayo externo y $z \notin \{\bigcup p_{c_1, c_2}^{-n}(x_2)\}$, entonces debería existir un punto y en J_{c_1} donde aterrizan más de un rayo externo tal que $y \notin \{\bigcup p_{c_1}^{-n}(\alpha_{c_1})\}$, pero esto contradice al Lema 2.3.2. \square

Por el lema anterior los únicos ángulos donde el lazo de Carathéodory no es inyectiva son de la forma $\{\gamma_{c_1, c_2}^{-1}(\bigcup p_{c_1, c_2}^{-n}(x_2))\}$.

Para el polinomio p_{c_2, c_1} tenemos la misma situación. En un punto fijo x'_2 aterrizan exactamente tres rayos cuyos ángulos son $1/7, 2/7$ y $4/7$. Vease la figura 2.22. Además usando el mismo argumento que en el Lema 2.3.5, se puede demostrar el siguiente resultado.

Lema 2.3.6. *Si z en un punto de J_{c_2, c_1} donde aterrizan más de un rayo externo entonces $z \in \{\bigcup p_{c_2, c_1}^{-n}(x'_2)\}$.*

Por el Lema 2.3.6 los únicos ángulos donde el lazo de Carathéodory no es inyectiva son de la forma $\{\gamma_{c_2, c_1}^{-1}(\bigcup p_{c_2, c_1}^{-n}(x'_2))\}$.

Los Lemas 2.3.5 y 2.3.6 concluyen el punto 5 de nuestro plan. Más aún, tenemos que los conjuntos de clases de equivalencia $\mathbb{T}/\sim_{c_1, c_2}$ y $\mathbb{T}/\sim_{c_2, c_1}$

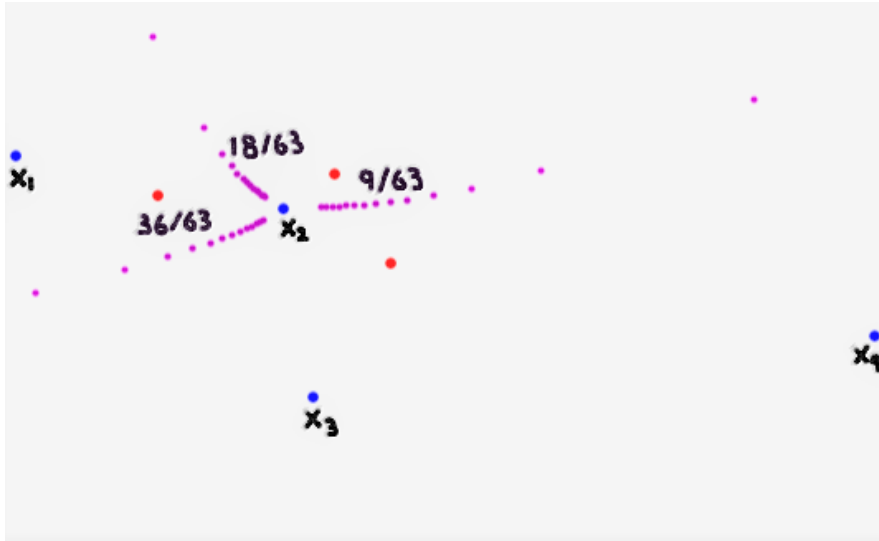


Figura 2.22: puntos fijos y algunos puntos de algunos rayos externos para p_{c_2, c_1}

son iguales. Aplicando la proposición 1.5.1 tenemos que $\mathbb{T}/\sim_{c_1, c_2}$ es homeomorfo a J_{c_1, c_2} y $\mathbb{T}/\sim_{c_2, c_1}$ es homeomorfo a J_{c_2, c_1} . Usando la igualdad antes mencionada obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.2. J_{c_1, c_2} y J_{c_2, c_1} son homeomorfos.

Con la proposición anterior concluimos nuestro plan.

Capítulo 3

Conclusiones

El estudio que hemos introducido en esta tesis, es decir la dinámica polinomial alternada, ofrece una buena cantidad de preguntas interesantes. Nuestro trabajo ha consistido en dar respuesta a algunas de ellas, para esto hemos utilizado herramientas ya conocidas en la dinámica polinomial.

La dinámica holomorfa se ha beneficiado de muchas áreas de la matemática, tales como las superficies de Riemann, geometría conforme, transformaciones casi-conformes, geometría hiperbólica, por mencionar algunas. Por falta de tiempo, en la tesis, no hemos usado muchas herramientas existentes, como la renormalización, ni hemos incursionado en todas las áreas de apoyo, como las transformaciones casi-conformes. El aprendizaje y la utilización de tales herramientas constituyen parte del trabajo posterior a esta tesis.

Una de las complicaciones al estudiar la dinámica polinomial alternada es que el espacio de parámetros es de dimensión compleja 2, y por ende se dificulta la visualización del lugar de conexidad de la familia. En particular, lo que buscamos es relacionar el caso cuadrático con el caso alternado. Además de que entender el caso alternado nos da pie a entender el caso cuártico.

La literatura, al menos la que nosotros conocemos, no profundiza en el estudio del caso alternado en lo correspondiente al estudio de rayos externos y la combinatoria determinada por los mismo, este hecho representa una oportunidad en la investigación.

La visualización de los conjuntos de Julia de los polinomios alternados,

así como los de algunas partes del lugar de conexidad de la familia alternada juegan un papel esencial en la heurística de este estudio.

En la tesis presentamos algunas de las ideas que consideramos principales para iniciarse en el estudio de la dinámica holomorfa.

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L., “Complex analysis”, MCGraw-Hill, 1959.
- [2] Ahlfors, L., “Conformal Invariants”, MCGraw-Hill, 1973.
- [3] Ahlfors, L., Sario, L., “Riemann Surfaces”, Pricenton University Press, 1960.
- [4] Beardon, A.F., “Iteration of rational functions”, Grad. Texts Math., **132**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [5] Blanchard, P. “Complex analysis on the Riemann Sphere”, *Bulletin (new series) of the AMS*, **11-1**, 1989.
- [6] Cano, L.A. & Estrada, J.F. “Convergencia de rayos externos racionales en los conjuntos de Julia y Mandelbrot”, *AVANZA*, **3**, 53-98, 2013.
- [7] Carleson, L. & Gamelin, T.W., “Complex dynamics”, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [8] Collingwood, E.F. & Lohwater, A.J., “The theory of cluster sets”, *Cambridge University Press*, Cambridge, 1966.
- [9] Courant, R., “Dirichlet’s principle, conformal mappings and minimal surfaces”, *Interscience publishers*, New York, 1950.
- [10] Conway, J.B., “Functions of one complex variable I”, Springer-Verlag, 1995.
- [11] Conway, J.B., “Functions of one complex variable II”, Springer-Verlag, 1995.

-
- [12] Devaney, R.L., “An introduction to chaotic dynamical systems”, Westview Press, Colorado, 2003.
- [13] Douady, A. & Hubbard, J.H., “Systèmes dynamiques holomorphes”, *Astérisque*, 105-106, 1983.
- [14] Douady, A. & Hubbard, J.H., “Etude dynamique des polynômes complexes,”, *Publications Math. d Orsay*, **84-02**, 1984.
- [15] Douady, A. & Hubbard, J.H., “Etude dynamique des polynômes complexes,”, *Publications Math. d Orsay*, **85-04**, 1985.
- [16] Duren, P.L. “Univalent Functions”, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [17] Estrada, J.F. & Poiset, J.E. “Transformaciones casiconformes y dinámica”, *AVANZA*, **2**, 21-56, 2012.
- [18] Goldberg, L. & Milnor, J. “Fixed Point Portraits”, *Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 26, 51-98, 1993.
- [19] Kawahira, T. “An algorithm to draw external rays of the Mandelbrot set”, Graduate School of Mathematics, Nagoya University, 2009.
- [20] Krantz, S.G., “Complex Analysis: The Geometric Viewpoint”, The Carus Mathematical Monographs, 2004.
- [21] Krantz, S.G., “Geometric function theory”, Birkhäuser Boston, 2006.
- [22] Lau, E. & Schleicher, D., “Internal addresses in the Mandelbrot set and irreducibility of polynomials”, *Stony Brook Preprint* 19, 1994.
- [23] Lyubich, M., “Conformal geometry and dynamics of quadratic polynomials”, *Advanced School and Workshop in Real and Complex Dynamics*, 2013.
- [24] Milnor, J.W., “Dynamics in one complex variable”, Princeton University Press, Wiesbaden, 2006.
- [25] Milnor, J.W., “Periodic orbits, external rays and the Mandelbrot set: an expository account”, *Stony Brook IMS*, 1999.
- [26] McMullen, C.T., “Complex Dynamics and Renormalization”, Princeton University Press, Princeton, 1994.

-
- [27] Morosawa, S., Nishimura, Y., Taniguchi, M. & Ueda, T., “Holomorphic dynamics”, Cambridge University Press, 2000.
- [28] Munkres, J.R., “Topology”, Prentice Hall, 2000.
- [29] Poirier, A., “On post critically finite polynomials Part one: Critical portraits”, Math Department, StonyBrook NY, 1993.
- [30] Poirier, A., “On post critically finite polynomials Part two: Hubbard trees”, Math Department, StonyBrook NY, 1993..
- [31] Pommerenke, C., “Boundary behaviour of conformal maps”, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [32] Pommerenke, C., “Univalent functions”, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [33] Zakry, C., “Univalent functions”, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.