Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

Propiedades Reversibles de Whitney; Continuos Kelley y semi-Kelley

Tesis que para obtener el título de

Maestra en Ciencias Matemáticas

presenta

Ana Luisa Ramírez Bautista

bajo la dirección de

Dr. Mauricio Esteban Chacón Tirado
Dr. Raúl Escobedo Conde

Puebla, Pue. Enero 2020

Dedicatoria

A mis padres.
"Ya no están a mi lado, pero los siento tan cerca como siempre".

A mis hermanos.
Raquel, Javier, Fernando, Magdalena e Israel.
"Nacimos del mismo árbol; y aunque nuestras ramas crezcan en diferentes direcciones, siempre nos unirán nuestras raíces ".

A Gonzalo.
"Todos necesitamos alguna vez un cómplice, alguien que nos ayude a usar el corazón".

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por acompañarme y guiarme a lo largo de mi vida, darme la oportunidad de llegar a este momento tan importante en mi vida, así mismo por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad.

Agradezco a mis hermanos, quienes con su apoyo, cariño y ejemplo me han mostrado el camino para alcanzar mis metas, porque me han demostrado que la familia siempre está para apoyarse, aún en las situaciones más difíciles. Gracias por todos los consejos que me dan y por creer en mi. A mis sobrinos, los cuales han llegado para llenar mi vida de alegría y amor, porque me han motivado a seguir adelante y espero que algún día pueda ser un ejemplo para ellos. A Gonzalo por acompañarme a lo largo de esta etapa, gracias por el apoyo, compañía, amor y amistad que me brinda.

Agradezco a mis asesores el Dr. Raúl Escobedo Conde y el Dr. Mauricio Esteban Chacón Tirado, por su apoyo, consejos, atenciones y por los conocimientos que me han brindado, agradezco el hecho de que hayan aceptado dirigir este trabajo. A mis revisores, Dr. David Herrera Carrasco, Dr. Fernando Macías Romero, Dra. María de Jesús López Toriz y la Dra. Paula Ivón Vidal Escobar, quienes con sus comentarios y observaciones han mejorado enormemente este trabajo, pero sobre todo por tomarse el tiempo para revisarlo.

Finalmente, quiero expresar mi gratitud al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, por la beca otorgada durante mis estudios de maestría.

De todo corazón, muchas gracias.

Luisa.

Introducción

La teoría de continuos surge dentro de la matemática en el área de topología aproximadamente en la década comprendida entre 1910 y 1920, teniendo como objeto de estudio los espacios métricos, compactos, conexos y no vacíos. De hecho a un espacio topológico con estas propiedades se le llama continuo. Su estudio adquirió gran importancia debido a la necesidad de un entendimiento profundo de la topología de espacios cartesianos para su aplicación en el análisis real y complejo. Posteriormente la teoría de continuos tuvo distintas ramificaciones como la teoría de hiperespacios de continuos, dendritas, continuos homogéneos, continuos indescomponibles, etc. La teoría de continuos se empezó a trabajar de manera creciente en México a partir de la década de los años ochenta, motivada por la llegada de los matemáticos polacos Janusz J. Charatonik y Wlodzimierz J. Charatonik así como la organización constante de seminarios de teoría de continuos organizados principalmente por Adalberto García-Máynez, Isabel Puga, Luis Montejano, Sergio Macías y Alejandro Illanes.

El objeto de estudio de esta tesis es sobre los continuos con la propiedad de Kelley (continuos de Kelley) y la propiedad de semi-Kelley (continuos semi-Kelley) y ver que estas propiedades cumplen con ser propiedades reversibles de Whitney. La noción de semi-Kelley tiene poco tiempo de haber sido introducida y pocos investigadores han estudiado esta propiedad por lo cuál hay bastante camino por recorrer. Se pretende dar un panorama quizá básico pero detallado sobre esta noción así como resultados y ejemplos. Además, de contribuir con alguna generalización en relación con la propiedad de semi-Kelley.

La estructura de nuestro trabajo es la siguiente. En el primer capítulo se encuentran los preliminares con definiciones y algunos resultados ya conocidos dentro de la teoría de continuos e hiperespacios. Definimos la función de Whitney, además garantizamos su existencia; enunciamos algunos resultados sobre niveles de Whitney y como parte final de este capítulo vemos las siguientes definiciones: Propiedad de Whitney, propiedad reversible de Whitney, propiedad fuerte reversible de Whitney y propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney.

El segundo capítulo esta compuesto por tres secciones. La primera está relacionada con las definiciones de continuo límite máximo y de continuo límite máximo fuerte, se dan algunos ejemplos y resultados los cuales serán de gran utilidad posteriormente. En la segunda sección se da la definición de continuo de Kelley, ejemplos de continuos que son y que no son Kelley, así como algunos resultados con relación a esta propiedad como son: equivalencia de ser continuo de Kelley y la versión puntual (Proposición 2.17), equivalencia con las definiciones de continuo límite máximo y continuo límite máximo fuerte (Teorema 2.26), la propiedad de Kelley se preserva bajo homeomorfismos (Teorema 2.25), damos la demostración detallada del resultado que nos dice que si un continuo no es Kelley, entonces este contiene un subcontinuo con un continuo límite máximo fuerte propio y no degenerado (Lema 2.27), vemos una demostración alternativa de que la propiedad de Kelley es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney (Teorema 2.28), en consecuencia es una propiedad reversible de Whitney, y finalmente damos a conocer un continuo el cual prueba que la propiedad de Kelley no es una propiedad de Whitney (Ejemplo 2.32).

En la tercera sección se introduce la definición de continuo semi-Kelley, ejemplos de continuos que son y que no son semi-Kelley, así como los resultados: equivalencia de continuo semi-Kelley y las definiciones de continuo límite máximo y continuo límite máximo fuerte (Teorema 2.37), demostramos que si un continuo no es semi-Kelley, entonces este contiene un subcontinuo con dos continuos límites máximos fuertes, propios, no degenerados e incomparables (Lema 2.38), damos una prueba completa de que la propiedad de semi-Kelley es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney (Teorema 2.40), en consecuencia, propiedad reversible de Whitney, damos a conocer un continuo el cual prueba que la propiedad de semi-Kelley no es una propiedad de Whitney (Ejemplo 2.44). Finalmente, daremos un ejemplo de un continuo que da respuesta negativa a la siguiente pregunta: Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos tal que $\lim t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es semi-Kelley para cada $n \in \mathbb{N}$, ¿es X de Kelley? (Ejemplo 2.51).

Contenido

Antecedentes

A principios de la década de 1930, Hassler Whitney construyó tipos especiales de funciones en espacios de conjuntos con el propósito de estudiar familias de curvas, [20]. En 1942, John L. Kelley hizo un uso significativo de las funciones de Whitney en el estudio de hiperespacios, [12]. En la década de 1970, las relaciones entre las funciones de Whitney y la estructura de los hiperespacios fueron investigadas extensamente y sistemáticamente por numerosos autores. Una función de Whitney es una función continua $\mu : 2^X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$ y $\mu(\{x\}) = 0$, para cada $x \in X$. Actualmente las funciones de Whitney establecen una manera de medir el tamaño de los elementos de 2^X y son una herramienta muy útil para estudiar la estructura para los hiperespacios.

Para estudiar lo que es una propiedad de Whitney, se requiere de una definición esencial que es la de nivel de Whitney, el cual se trabaja para funciones de Whitney definidas en $C(X)$. Sean X un continuo, $\mu : C(X) \longrightarrow [0, \infty)$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu(X)]$, el nivel de Whitney para $C(X)$ en t es el conjunto $\mu^{-1}(t)$. Ahora, una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una propiedad de Whitney, si para todo continuo con la propiedad $\mathcal{P}$, para cada función de Whitney se tiene que cada nivel de Whitney tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una propiedad reversible de Whitney si para todo continuo y toda función de Whitney tal que todo nivel de Whitney tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces el continuo tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

La noción de propiedad reversible de Whitney se formalizó por Sam B. Nadler, Jr. en 1980, [14]. Cabe mencionar que Sam B. Nadler, Jr. en conjunto con Carl Eberhart, demostraron que para cualquier continuo X y cualquier μ función de Whitney para $C(X)$, μ es monótona y abierta con lo que Kazimierz Kuratowski dió el siguiente resultado: Si X es cualquier continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$, entonces $\{\mu^{-1}(t) : 0 \leq t \leq \mu(X)\}$ es una descomposición continua monótona de $C(X)$. Esta forma de ver las propiedades de Whitney motivó para dar la definición de una noción "inversa". Sam B. Nadler, Jr. muestra los primeros resultados sobre las propiedades reversibles de Whitney así como su terminología e intoduciendo de igual forma la definición de propiedad fuerte reversible de Whitney.

Un continuo (X, d) tiene la propiedad de Kelley, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualesquiera dos puntos a y b de X con $d(a, b) < \delta(\varepsilon)$ y para cada subcontinuo A de X que contenga al punto a, existe un subcontinuo B de X tal que $b \in B$ y $H(A, B) < \varepsilon$, donde H es la métrica de Hausdorff en $C(X)$. Decimos que X es un continuo de Kelley si posee esta propiedad.

La propiedad de Kelley fue introducida en 1942 por John L. Kelley en [12]. En dicho trabajo, la propiedad de Kelley se estableció como la "property 3.2". Algunos otros artículos hacen referencia a dicha propiedad como J. L. Kelley o propiedad [K]. La simplicidad y belleza de la propiedad de Kelley ha hecho que sea objeto de estudio por varios autores como: Wlodzimierz J. Charatonik, Janusz J. Charatonik, Sam. B. Nadler, Jr., Roger W. Wardle, Hisao Kato, Pawel Krupski, entre otros. En 1977, Roger W. Wardle hizo un estudio sistemático sobre la propiedad de Kelley en el cual consideró una versión puntual, [18]. Finalmente, demostró que la propiedad de Kelley dada puntualmente es equivalente a la propiedad de Kelley.

Algunos resultados que obtiene Roger W. Wardle son los siguientes:

- Si el producto cartesiano de dos continuos no degenerados tiene la propiedad de Kelley, entonces cada espacio factor la tiene.
- Si el hiperespacio $C(X)$ de un continuo X tiene la propiedad de Kelley, entonces X tiene la propiedad de Kelley.
- Si el hiperespacio 2^X de un continuo X tiene la propiedad de Kelley, entonces X tiene la propiedad de Kelley.
- Si X es un continuo con la propiedad de Kelley, entonces los hiperespacio $C(X)$ y 2^X son contráctiles.

En este estudio Roger W. Wardle se pregunta si la propiedad de Kelley es una propiedad de Whitney. Tratando de resolver esta pregunta, Hisao Kato demuestra en 1991 que para obtener una respuesta afirmativa es suficiente probar que si X tiene la propiedad de Kelley, entonces $X \times [0, 1]$ tiene la propiedad de Kelley, [11]. Fue en 2008 que Wlodzimierz J. Charatonik y Janusz J. Charatonik responden negativamente a la pregunta de Hisao Kato, es decir, dan un ejemplo de un continuo X que tiene la propiedad de Kelley y que $X \times [0, 1]$ no tiene dicha propiedad y como consecuencia se tiene que la propiedad de Kelley no es propiedad de Whitney, [7].

Posteriormente, en 1998 Wlodzimierz J. Charatonik y Janusz J. Charatonik introducen y estudian la propiedad de semi-Kelley la cuál es una forma más débil de la propiedad de Kelley y generalizan algunos resultados que se tenían sobre la propiedad de Kelley:

- Si el producto cartesiano de dos continuos no degenerados es semi-Kelley, entonces cada espacio tiene la propiedad de Kelley.
- Si el hiperespacio $C(X)$ de un continuo X es semi-Kelley, entonces X tiene la propiedad de Kelley.
- Si el hiperespacio 2^X de un continuo X es semi-Kelley, entonces X tiene la propiedad de Kelley.

En su estudio y referente a la pregunta de Hisao Kato, Wlodzimierz J. Charatonik y Janusz J. Charatonik se preguntan si un continuo X es de Kelley, entonces ¿$X \times [0,1]$ es semi-Kelley? Esta pregunta fue contestada recientemente en 2017 por Enrique Castañeda e Ivón Vidal, quienes mencionan que el continuo X que dan Wlodzimierz J. Charatonik y Janusz J. Charatonik en [7] cumple ser de Kelley y $X \times [0,1]$ no es semi-Kelley, además demuestran que la propiedad de semi-Kelley no es propiedad de Whitney, [4]. Finalmente, en 2017 Alejandro Illanes se pregunta si la propiedad de ser semi-Kelley es una propiedad reversible de Whitney. Esta pregunta fue contestada de forma afirmativa en 2018 por Alicia Santiago e Ivón Vidal. Se demostró que ser semi-Kelley es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney y como consecuencia es una propiedad reversible de Whitney, [17].

Cabe mencionar que la siguiente pregunta hasta el momento sigue estando abierta: Si X es un continuo semi-Kelley, ¿es cierto que los hiperespacio $C(X)$ o 2^X son contráctiles?

Capítulo Primero

Preliminares

En este capítulo se enuncian algunos conceptos y resultados que son necesarios para el desarrollo de esta tesis. Suponemos que el lector está familiarizado con las propiedades elementales de compacidad, conexidad, funciones continuas, y la topología de los espacios métricos (véase [3] y [19]). Durante todo el trabajo la letra d denotará una métrica para el espacio métrico X y la letra ρ una métrica para el espacio métrico Y. Si X es un continuo y A un subconjunto de X, los símbolos $fr(A)$, $int(A)$ y $Cl(A)$ denotan la frontera de A, el interior de A y la cerradura de A en X, respectivamente. Si $A \subset Y \subset X$, entonces $fr_Y(A)$, $int_Y(A)$ y $Cl_Y(A)$ denotan la frontera de A, el interior de A y la cerradura de A en el subespacio Y de X, respectivamente. El símbolo $\mathring{\cup}$ denota la unión disjunta de conjuntos. Para una función $f : X \longrightarrow Y$ y $A \subset X$, denotaremos por $f[A]$ a la imagen del conjunto A bajo la función f. Un homeomorfismo entre dos espacios topológicos es una función continua, biyectiva y que tiene función inversa continua. En caso de que exista un homeomorfismo entre X y Y, decimos que X y Y son homeomorfos.

1.1 Continuos e Hiperespacios

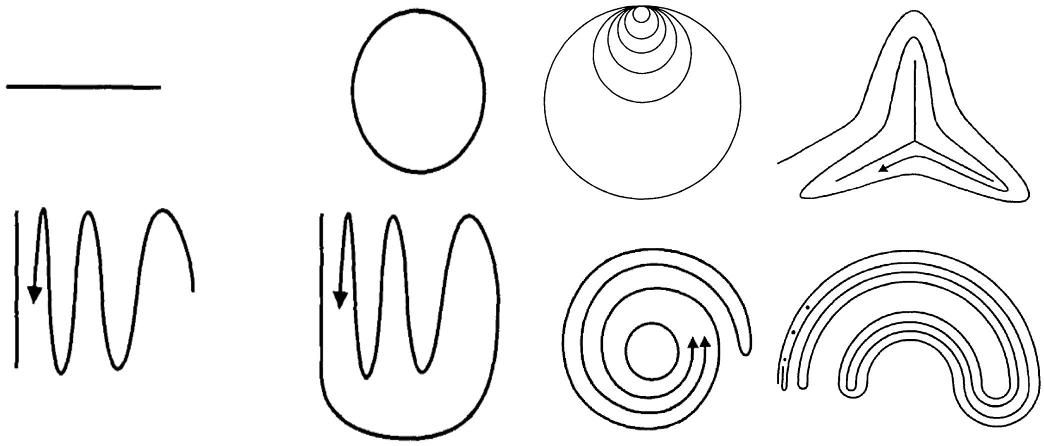
Nociones y resultados básicos

En esta sección presentamos conceptos y resultados que son de gran utilidad para la exposición de este trabajo. Las nociones de teoría de continuos e hiperespacios, que en este trabajo revisamos, se encuentran en las referencias [9], [15] y [16].

Definición 1.1 *Diremos que X es un* **continuo** *si es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un subconjunto no vacío A de X, es un* **subcontinuo** *de X si A es cerrado y conexo.*

Si X es un continuo que consta de un solo punto, diremos que es un continuo degenerado; de lo contrario, diremos que X es no degenerado.

Ejemplos de Continuos:



Los hiperespacios se definen como colecciones de subconjuntos de un continuo que satisfacen alguna propiedad topológica.

Definición 1.2 *Sea X un continuo. Se definen los siguientes* **hiperespacios** *de X: (veáse la Figura 1.1).*

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\},$$
$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}; \text{ y para } n \in \mathbb{N},$$
$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

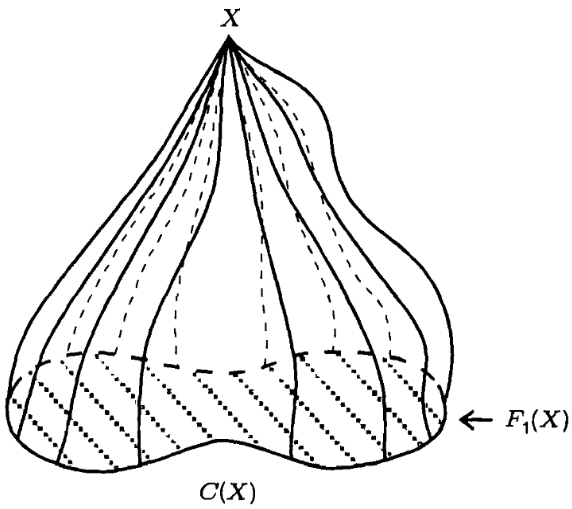


Figura 1.1: $C(X)$.

Notemos que los elementos de $C(X)$ son todos los subcontinuos de X, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n(X)$ se denomina n-ésimo producto simétrico de X. En particular, $F_1(X)$ es el hiperespacio de singulares de X. Además, $C(X)$ y $F_n(X)$ son subespacios de 2^X por lo que es suficiente dotar a 2^X de una métrica. La métrica considerada es conocida como la métrica de Hausdorff definida por Felix Hausdorff en 1914.

Definición 1.3 *Sea X un continuo con métrica d. Dados $\varepsilon > 0$, $x \in X$ y $A \in 2^X$, se definen:*

(1) *La* **bola abierta** *de radio ε y centro en x como:*

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}.$$

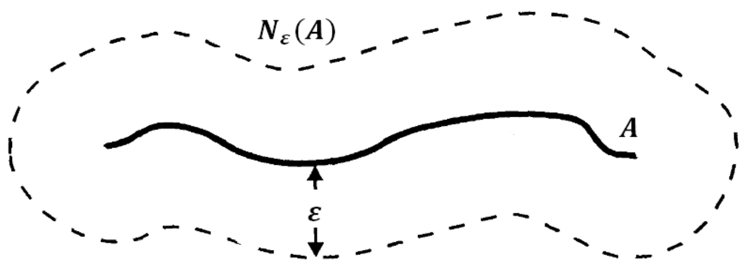
(2) *La* **nube** *de radio ε y centro en A como:*

$$N_\varepsilon(A) = \{q \in X : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } d(x,q) < \varepsilon\}.$$

Observemos que si X es un continuo y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subset B$, entonces se tiene que $A \subset N_\varepsilon(B)$.

(3) *Dados A y B elementos en 2^X se define la* **métrica de Hausdorff** *de A a B como la función $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$H(A,B) = \text{ínf}\left\{\varepsilon > 0 : A \subset N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subset N_\varepsilon(A)\right\}.$$



En los siguientes teoremas enunciamos algunas propiedades elementales de las nubes sobre los elementos de 2^X. Por su simplicidad, la prueba se omite.

Teorema 1.4 *[8, Teorema 2.2 pág. 14] Sea X un continuo y sean $A, B \in 2^X$, $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$. Entonces:*

(1) $N_\varepsilon(A) = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$.

(2) *Si $A \subset B$ y $\delta < \varepsilon$, entonces $N_\delta(A) \subset N_\varepsilon(B)$.*

(3) $N_\varepsilon(A) \cup N_\varepsilon(B) = N_\varepsilon(A \cup B)$.

Notemos que de la primera afirmación del teorema anterior se tiene que el conjunto $N_\varepsilon(A)$ es abierto en X. Observemos también que $A \subset N_\varepsilon(A)$.

Teorema 1.5 *[8, Teorema 2.3, pág. 15] Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Si U es un abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $N_\varepsilon(A) \subset U$.*

Teorema 1.6 *[9, Teorema 2.2, pág. 11] Sea X un continuo. La función H es una métrica en 2^X.*

En este trabajo denotaremos por H a la métrica de Hausdorff.

Teorema 1.7 *Sea X un continuo y sean $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $H(A, B) < \varepsilon$ si, y solo si, $A \subset N_\varepsilon(B)$ y $B \subset N_\varepsilon(A)$.*

Demostración. $\Rightarrow|$ Supongamos que $H(A, B) < \varepsilon$. Por definición de la métrica H, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$, $A \subset N_\delta(B)$ y $B \subset N_\delta(A)$. Por el Teorema 1.4, $N_\delta(B) \subset N_\varepsilon(B)$ y $N_\delta(A) \subset N_\varepsilon(A)$, entonces $A \subset N_\varepsilon(B)$ y $B \subset N_\varepsilon(B)$.

$\Leftarrow|$ Supongamos que $A \subset N_\varepsilon(B)$ y $B \subset N_\varepsilon(A)$. Como $A \subset N_\varepsilon(B)$, entonces $A \subset \bigcup\limits_{0<\delta<\varepsilon} N_\delta(B)$. Por compacidad de A, existen $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ tales que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} N_{\delta_i}(B)$. Sea $\gamma = \text{máx}\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$. Así, $A \subset N_\gamma(B)$. Análogamente, como $B \subset N_\varepsilon(A)$ podemos encontrar $\eta > 0$ tal que $B \subset N_\eta(A)$ y $\eta < \varepsilon$. Sea $\beta = \text{máx}\{\gamma, \eta\}$. Tenemos que $\beta < \varepsilon$, $A \subset N_\beta(B)$ y $B \subset N_\beta(A)$. Así, $H(A, B) < \varepsilon$. ∎

El siguiente resultado es consecuencia de los "Teoremas de Golpes de la Frontera" ([15, Teorema 5.4, 5.6 y 5.7, pág. 73-75]) el cual nos dice que todo continuo no degenerado contiene un subcontinuo propio no degenerado.

Proposición 1.8 *[15, Corolario 5.5, pág. 74] Sea X un continuo no degenerado y sea B un subcontinuo propio de X. Si U es un abierto en X tal que $B \subset U$, entonces existe un subcontinuo K de X distinto de B tal que $B \subset K$ y $K \subset U$.*

Definición 1.9 *Dado un subconjunto A de un continuo X. Consideremos las siguientes subcolecciones del hiperespacio 2^X.*

$$\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\},$$

$$\Lambda(A) = \{B \in 2^X : A \cap B \neq \emptyset\} \text{ y}$$

$$\Phi(A) = \{B \in 2^X : A \subset B\}.$$

Proposición 1.10 *Sean X un continuo y A subconjunto de X. Entonces:*

(1) *Si A es abierto en X, entonces $\Gamma(A)$ y $\Lambda(A)$ son abiertos en 2^X.*

(2) *Si A es cerrado en X, entonces $\Gamma(A)$, $\Lambda(A)$ y $\Phi(A)$ son cerrados en 2^X.*

Demostración.

(1) Sea A un abierto en X. Veamos que $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X. Sea $B \in \Gamma(A)$, entonces $B \in 2^X$ y $B \subset A$. Como A es abierto en X, por el Teorema 1.5 existe $\varepsilon > 0$ tal que $N_\varepsilon(B) \subset A$. Veamos que $B_\varepsilon(B) \subset \Gamma(A)$. Sea $C \in B_\varepsilon(B)$, entonces $H(B, C) < \varepsilon$ y por el Teorema 1.7, $C \subset N_\varepsilon(B)$ y como $N_\varepsilon(B) \subset A$, entonces $C \subset A$. Así, $C \in \Gamma(A)$ y por tanto $B_\varepsilon(B) \subset \Gamma(A)$, es decir, para cada $B \in \Gamma(A)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(B) \subset \Gamma(A)$. En consecuencia, $\Gamma(A)$ es abierto en 2^X.

Ahora, veamos que $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X. Sea $B \in \Lambda(A)$, entonces $B \in 2^X$ y $B \cap A \neq \emptyset$. Sea $x \in B \cap A$. Como A es abierto en X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$. Veamos que $B_\varepsilon(B) \subset \Lambda(A)$. Sea $C \in B_\varepsilon(B)$, entonces $H(B, C) < \varepsilon$ y así $B \subset N_\varepsilon(C)$ (Teorema 1.7). Como $x \in B$ existe $y \in C$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, es decir, $y \in B_\varepsilon(x)$. Así, $y \in A$ y por tanto $y \in C \cap A$ de manera que $C \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, $C \in \Lambda(A)$ y así $B_\varepsilon(B) \subset \Lambda(A)$, es decir, para cada $B \in \Lambda(A)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(B) \subset \Lambda(A)$. En consecuencia, $\Lambda(A)$ es abierto en 2^X.

(2) Sea A un cerrado en X, entonces $X - A$ es un abierto en X. Veamos que $\Gamma(A)$ es cerrado en 2^X. Notemos que $\Gamma(A) = 2^X - \Lambda(X - A)$ y por (1), $\Lambda(X - A)$ es un abierto en 2^X. Así, $\Gamma(A)$ es cerrado en 2^X.

Ahora, veamos que $\Lambda(A)$ es cerrado en 2^X. De (1) se sigue que $\Gamma(X - A)$ es abierto en 2^X , por lo que $2^X - \Gamma(X - A)$ es cerrado en 2^X. Además, notemos que $2^X = \Lambda(A) \cup \Gamma(X - A)$ y $\Lambda(A) \cap \Gamma(X - A) = \emptyset$. Por lo tanto, $\Lambda(A)$ es cerrado en 2^X.

Finalmente, veamos que $\Phi(A)$ es cerrado en 2^X. Sea $B \in Cl(\Phi(A))$ y supongamos que $B \notin \Phi(A)$, entonces $A \not\subset B$. Sea $a \in A - B$. Notemos que $d(B, a) > 0$. Sea $\varepsilon = d(B, a)$. Como $B \in Cl(\Phi(A))$, tenemos que $\Phi(A) \cap B_\varepsilon(B) \neq \emptyset$. Tomemos $E \in \Phi(A)$ tal que $H(B, E) < \varepsilon$, entonces $E \subset N_\varepsilon(B)$ (Teorema 1.7). Como $a \in A$ y $E \in \Phi(A)$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. Como $d(a, B) \leq d(a, b)$, tenemos que $\varepsilon < \varepsilon$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, $B \in \Phi(A)$. Así, $Cl(\Phi(A)) \subset \Phi(A)$. En consecuencia, $\Phi(A)$ es cerrado en 2^X. ■

Teorema 1.11 *[10, Corolario 6.13, pág.93] Sea X un continuo. Entonces los hiperespacios $C(X)$ y 2^X son continuos.*

Definición 1.12 *Dados un continuo X y A un subcontinuo de X, definimos el* **hiperespacio de continuos anclados en** *A, denotado por $C(A, X)$, como:*

$$C(A, X) = \{B \in C(X) : A \subset B\}.$$

Para simplificar la notación de la definición anterior, cuando el subcontinuo en cuestión sea el singular $p \in X$, escribimos $C(p, X)$ en lugar de $C(\{p\}, X)$.

Proposición 1.13 *Sea X un continuo. Para cada $p \in X$, $C(p, X)$ es compacto en $C(X)$.*

Demostración. Sea $p \in X$. Por definición $C(p, X) \subset C(X)$ y es no vacío pues $X \in C(p, X)$. Notemos que:

$$\begin{aligned} C(X) - C(p, X) &= \{A \in C(X) : A \notin C(p, X)\} \\ &= \{A \in C(X) : p \notin A\} \\ &= \{A \in C(X) : A \subset X \text{ y } p \notin A\} \\ &= \{A \in C(X) : A \subset X - \{p\}\} = \mathit{\Gamma}(X - \{p\}). \end{aligned}$$

Como $\{p\}$ es cerrado en X, entonces $X - \{p\}$ es abierto en X, luego por la Proposición 1.10, $C(X) - C(p, X)$ es abierto en $C(X)$ y por tanto $C(p, X)$ es cerrado en $C(X)$ y dado que $C(X)$ es compacto (Teorema 1.11), entonces $C(p, X)$ es compacto en $C(X)$. ■

Convergencia en 2^X

En vista de que 2^X es un espacio métrico, podemos hablar de convergencia de una sucesión en 2^X, utilizando la definición usual.

Definición 1.14 *Una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en 2^X* **converge** *a un elemento $A \in 2^X$ con respecto a la métrica de Hausdorff si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \varepsilon$, para todo $n \geq \mathbb{N}$.*

Teorema 1.15 *Sean X un espacio métrico, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$ para algunos $A, B \in 2^X$. Entonces $\lim A_n \cup B_n = A \cup B$.*

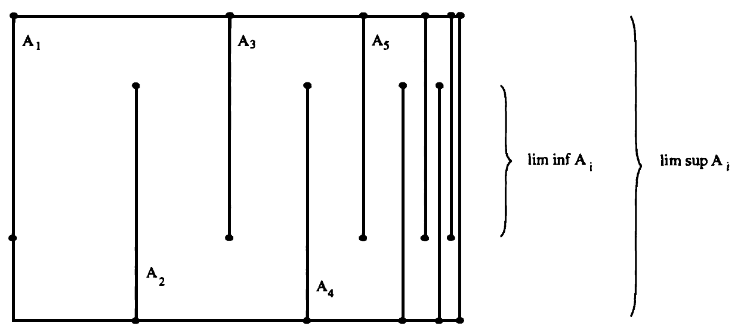
Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $H(A_n, A) < \varepsilon$, para todo $n \geqslant N_1$ y $H(B_n, B) < \varepsilon$, para todo $n \geqslant N_2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces para todo $n \geqslant N$ se tiene $A_n \cup B_n \subset N_\varepsilon(A) \cup N_\varepsilon(B) \subset N_\varepsilon(A \cup B)$ y $A \cup B \subset N_\varepsilon(A_n) \cup N_\varepsilon(B_n) \subset N_\varepsilon(A_n \cup B_n)$ de donde $H(A_n \cup B_n, A \cup B)$. ■

Límite inferior y Límite superior

Observemos que en la noción de convergencia vista en la sección anterior estamos pensando que los elementos de la sucesión son puntos de 2^X. Sin embargo, otra manera de hablar de convergencia en 2^X, se obtiene pensando que cada elemento de la sucesión es un subconjunto de X como se mostrará en esta sección.

Definición 1.16 *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X. Entonces definimos:*

- $\text{lím inf } A_n = \{x \in X : \textit{ para toda } \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \textit{ para casi toda } n\}$.
- $\text{lím sup } A_n = \{x \in X : \textit{ para toda } \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \textit{ para una infinidad de } n's\}$.



Ahora veamos la noción de convergencia en términos de la Definición 1.16.

Definición 1.17 *Decimos que una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en 2^X* **converge** *a A y escribimos $\lim A_n = A$, si $\text{lím inf } A_n = \text{lím sup } A_n = A$.*

El siguiente Teorema nos dice que las Definiciones 1.14 y 1.16 son equivalentes en espacios compactos.

Teorema 1.18 *[15, Teorema 4.11, pág. 57] Sean X un espacio métrico compacto, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en 2^X y $A \in 2^X$. Entonces $\lim A_n = A$ si y solo si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A con respecto a la métrica de Hausdorff.*

Proposición 1.19 *Sean X un espacio métrico, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X y $x \in X$. Entonces:*

(1) *$x \in \liminf A_n$ si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim x_n = x$ y $x_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

(2) *$x \in \limsup A_n$ si y solo si existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ y existen puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $\lim x_{n_k} = x$.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ | Sea $x \in \liminf A_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $x_n \in A_n$ de tal forma que $d(x_n, x) = \min\{d(x,y) : y \in A_n\}$. Observemos que los $x_n's$ están bien definidos ya que A_n es cerrado en X y por tanto compacto en X. Veamos que $\lim x_n = x$. Sea $\varepsilon > 0$, como $x \in \liminf A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. De manera que, para cada $n \geq N$, existe $a_n \in A_n$ tal que $d(x, a_n) < \varepsilon$. Dado que $d(x_n, x) = \min\{d(x,y) : y \in A_n\} \leq d(x, a_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ y así $\lim x_n = x$.

$\Leftarrow$ | Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $\lim x_n = x$ y $x_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, entonces $x_n \in B_\varepsilon(x)$ y $x_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $x_n \in B_\varepsilon(x) \cap A_n$ para todo $n \geqslant N$. Así, $x \in \liminf A_n$.

(2) $\Rightarrow$ | Sea $x \in \limsup A_n$, entonces existe $J_1 \subset \mathbb{N}$ tal que J_1 es infinito y $B_1(x) \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \in J_1$. Sean $n_1 \in J_1$ y $x_{n_1} \in B_1(x) \cap A_{n_1}$, entonces $d(x_{n_1}, x) < 1$ y $x_{n_1} \in A_{n_1}$. De manera análoga, existe $J_2 \subset \mathbb{N}$ tal que J_2 es infinito y $B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \in J_2$. Podemos elegir $n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_2 > n_1$ y $x_{n_2} \in B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A_{n_2}$, entonces $d(x_{n_2}, x) < \frac{1}{2}$ y $x_{n_2} \in A_{n_2}$. Continuando inductivamente existen naturales $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tales que $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$ y por tanto $\lim x_{n_k} = x$.

$\Leftarrow$ | Sea una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ y sean puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tales que $\lim x_{n_k} = x$. Sea

$\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ si $k \geq N$ por lo que $x_{n_k} \in B_\varepsilon(x) \cap A_n$ para todo $k \geqslant N$. Sea $J = \{n_k : k \geqslant N\}$, entonces $J \subset \mathbb{N}$, J es infinito y $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n_k \in J$. Por lo tanto, $x \in \text{lím sup}\, A_n$. ■

Corolario 1.20 *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en 2^X tal que $\text{lím}\, A_n = A$, para algún $A \in 2^X$. Si $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en X tal que $x_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}\, x_n = x$ para algún $x \in X$, entonces $x \in A$.*

Demostración. Como $\text{lím}\, A_n = A$, entonces $\text{lím inf}\, A_n = A$. Además, como $x_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}\, x_n = x$, por la Proposición 1.19, se tiene que $x \in \text{lím inf}\, A_n = A$. ■

Teorema 1.21 *Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ sucesiones en 2^X tales que $\text{lím}\, A_n = A$ y $\text{lím}\, B_n = B$ para algunos $A, B \in 2^X$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) *Si $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$.*

(2) *Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.*

Demostración.

(1) Sea $a \in A$. Dado que $\text{lím}\, A_n = A$, entonces $\text{lím inf}\, A_n = A$ por lo que $a \in \text{lím inf}\, A_n$. Por la Proposición 1.19 existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ en X tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}\, a_n = a$. Como $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $a_n \in B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y dado que $\text{lím}\, a_n = a$ de la Proposición 1.19 se sigue que $a \in \text{lím inf}\, B_n$ y como $\text{lím}\, B_n = B$, entonces $\text{lím inf}\, B_n = B$ por lo que $a \in B$. Por lo tanto, $A \subset B$.

(2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in A_n \cap B_n$. Entonces $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en X. Como X es compacto, podemos suponer que existe $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\text{lím}\, x_{n_k} = x$. Así, por la Proposición 1.19, $x \in \text{lím inf}\, A_n$ y $x \in \text{lím inf}\, B_n$. Como $\text{lím inf}\, A_n = A$ y $\text{lím inf}\, B_n = B$, entonces $x \in A \cap B$, es decir, $A \cap B \neq \emptyset$. ■

Proposición 1.22 *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en 2^X. Entonces:*

(1) $\text{lím inf}\, A_n \subset \text{lím sup}\, A_n$.

(2) $\text{lím inf}\, A_n$ *y* $\text{lím sup}\, A_n$ *son cerrados en X.*

(3) $\text{lím sup}\, A_n \neq \emptyset$.

Demostración.

(1) Se sigue de las definiciones.

(2) Veamos que $\text{lím inf } A_n = Cl(\text{lím inf } A_n)$. Solo basta probar que $Cl(\text{lím inf } A_n) \subset \text{lím inf } A_n$. Sean $x \in Cl(\text{lím inf } A_n)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $(\text{lím inf } A_n) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Así, sea $y \in (\text{lím inf } A_n) \cap B_\varepsilon(x)$. De manera que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$, para todo $n \geqslant N$. Por lo tanto, $x \in \text{lím inf } A_n$ y en consecuencia $Cl(\text{lím inf } A_n) \subset \text{lím inf } A_n$. Así, $\text{lím inf } A_n$ es cerrado en X. De forma análoga se prueba que $\text{lím sup } A_n$ es cerrado en X.

(3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in A_n$ y consideramos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como X es compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\text{lím } x_{n_k} = z$, para algún $z \in X$. Por la Proposición 1.19, se tiene que $z \in \text{lím sup } A_n$ y por tanto $\text{lím sup } A_n \neq \emptyset$. ■

Algunas funciones

Para un continuo X, del Teorema 1.11 se tiene que 2^X es un continuo por lo que podemos hablar de su hiperespacio: $2^{2^X} = \{\mathcal{A} \subset 2^X : \mathcal{A} \text{ es cerrado y no vacío}\}$. La siguiente función es conocida como la **función unión**, la cual nos será útil más adelante para algunas demostraciones.

Lema 1.23 *[16, Lema 1.48, pág. 78] Sea X un continuo. Si $\mathcal{A} \subset 2^X$ y $\sigma(\mathcal{A}) = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}$, entonces:*

(1) $\sigma(\mathcal{A}) \in 2^X$.

(2) $\sigma : 2^{2^X} \longrightarrow 2^X$ *es una función continua.*

Definición 1.24 *Sean X y Y continuos, $f : X \longrightarrow 2^Y$ una función y $x_0 \in X$. Decimos que f es* **semicontinua superiormente en x_0** *si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que* $\text{lím } x_n = x_0$ *se tiene que* $\text{lím sup } f(x_n) \subset f(x_0)$. *Decimos que f es* **semicontinua superiormente** *si lo es en cada punto de X.*

Definición 1.25 *Sean X, Y continuos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Decimos que f es* **abierta** *si $f[U]$ es abierto en Y, para todo abierto U en X.*

Recordemos que para un espacio topológico X y A subconjunto de X se dice que A es una componente de X si A es conexo y para cualquier subconjunto conexo B de X tal que $A \subset B$ se tiene $B = A$.

Definición 1.26 *Sean X, Y continuos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Decimos que f es* **confluente** *si para cada subcontinuo K de Y y cada componente A de $f^{-1}(K)$ se tiene que $f(A) = K$.*

Teorema 1.27 *[15, Teorema 13.14, pág.285] Toda función entre continuos abierta es confluente.*

Sea f es una función continua entre los continuos X y Y. Entonces para $A \in 2^X$ el conjunto $f[A] \in 2^Y$ por ser la imagen bajo una función continua de un conjunto compacto y no vacío. Si además, pedimos que $A \in C(X)$, entonces $f[A] \in C(Y)$. Por tanto, podemos definir las funciones $2^f : 2^X \longrightarrow 2^Y$ y $C(f) : C(X) \longrightarrow C(Y)$ tales que $2^f(A) = f[A]$ y $C(f)(A) = f[A]$. A estas funciones se les conoce como funciones inducidas. Uno de los resultados a cerca de estas funciones es el siguiente Teorema.

Teorema 1.28 *Sean X y Y continuos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Si f es continua, entonces:*

(1) 2^f *es continua.*

(2) $C(f)$ *es continua.*

Demostración.

(1) Supongamos que f es continua y sea $\varepsilon > 0$. Luego, f es uniformemente continua, así existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Sean $A, B \in 2^X$ tales que $H(A, B) < \delta$. Veamos que $f(A) \subset N_\varepsilon(f(B))$ y $f(B) \subset N_\varepsilon(f(A))$. Sean $a' \in f(A)$ y $a \in A$ tal que $f(a) = a'$. Como $A \subset N_\delta(B)$ existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$, luego $\rho(f(a), f(b)) = \rho(a', f(b)) < \varepsilon$. Por tanto, $a' \in B_\varepsilon(f(b))$, de donde $f[A] \subset N_\varepsilon(f[B])$. De manera similar se prueba que $f[B] \subset N_\varepsilon(f[A])$. De lo anterior y del Teorema 1.7, se tiene que $H(2^f(A), 2^f(B)) = H(f[A], f[B]) < \varepsilon$ y por tanto, 2^f es continua.

(2) Como la restricción de una función continua es nuevamente continua, entonces $C(f)$ es continua. ■

Observación 1.29 Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y X, Y son espacios métricos compactos, entonces se tiene que 2^f y $C(f)$ son uniformemente continuas.

Para un espacio topológico (X, τ) no vacío y $\mathscr{D}$ una colección de subconjuntos de X, no vacíos y mutuamente disjuntos tales que $\cup\mathscr{D} = X$. Se verifica que $\tau(\mathscr{D}) = \{\mathscr{U} \subset \mathscr{D} : \cup\mathscr{U} \in \tau\}$ es una topología y es llamada la topología de descomposición y el espacio $(\mathscr{D}, \tau(\mathscr{D}))$ es llamado espacio de descomposición de X o espacio cociente y se donota por $X/\sim$.

Definición 1.30 *Sean (X, τ), (Y, η) espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función sobreyectiva. Decimos que f es una* **función cociente** *si η es la topología más grande para Y tal que f es continua.*

Sea $\mathbb{P} : X \longrightarrow \mathscr{D}$ la función que manda a un punto $x \in X$ al único elemento de $\mathscr{D}$ que contiene a x, entonces $\mathbb{P}$ es una función cociente y además es sobreyectiva.

Teorema 1.31 *Sean X, Y, Z espacios topológicos y sean $f : X \longrightarrow Y$ una función cociente y $g : X \longrightarrow Z$ una función continua. Si g es constante en cada fibra $f^{-1}(y)$, para cada $y \in Y$, entonces existe una función continua $l : Y \longrightarrow Z$ tal que $l \circ f = g$.*

Demostración. Para cada punto $y \in Y$, fijamos un punto $x \in f^{-1}(y)$ y definimos $l(y) = g(x)$, entonces $l : Y \longrightarrow Z$. Observemos que para cada $y \in Y$, $l(y)$ está bien definida ya que g es constante en el conjunto $f^{-1}(y)$. Por otra parte, es claro que para todo $x \in X$, $l(f(x)) = g(x)$. Ahora, veamos que l es continua. Sea U abierto en Z, entonces por continuidad de g se tiene que $g^{-1}(U)$ es abierto en X, es decir, $(l \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(l^{-1}(U))$ es abierto en X. Dado que f es una función cociente se tiene que $l^{-1}(U)$ es abierto en Y y por tanto l es continua. ∎

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \arrow[dl, "l = g \circ f^{-1}"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Figura 1.2: Diagrama.

1.2 Funciones de Whitney

Definición y Resultados

Las funciones de Whitney resultan en la actualidad una herramienta esencial para el estudio de los hiperespacios, la primera construcción de las funciones de Whitney se realizó en los años 1930's por Hassley Whitney, pero en el año 1942, Kelley fue el primero en usar este tipo de funciones, (veáse [20] y [12]).

Definición 1.32 *Sea X un continuo.* **Una función de Whitney** *para el hiperespacio 2^X es una función continua $\mu : 2^X \longrightarrow [0,1]$ que satisface las siguientes condiciones:*

(i) Para cada $x \in X$, se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$;

(ii) Para cada $A, B \in 2^X$, se tiene que $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$.

Una **función de Whitney** *para el hiperespacio $C(X)$ es una función continua de $C(X)$ en $[0,1]$ que satisface las condiciones (i) y (ii).*

Las funciones de Whitney nos proporcionan una manera de medir el tamaño de los elementos de 2^X y establecen una herramienta para estudiar la estructura de los hiperespacios. Varias construcciones de funciones de Whitney se pueden revisar en [16, págs. 24-27]. A continuación daremos un ejemplo sencillo de una función de Whitney y de una función que no es de Whitney.

Lema 1.33 *Si X es un continuo, entonces la función diámetro diám $: 2^X \longrightarrow [0,1]$ definida por diám$(A) = \sup\{d(a,b) : a, b \in A\}$, es continua, para cada $A \in 2^X$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $A, B \in 2^X$ tales que $H(A,B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por compacidad de A, existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $\text{diám}(A) = d(x_1, x_2)$. Como $x_1, x_2 \in A$ y $A \subset N_{\frac{\varepsilon}{2}}(B)$ (Teorema 1.7), existen $y_1, y_2 \in B$ tales que

$$d(x_1, y_1) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } d(x_2, y_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por desigualdad triángular tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{diám}(A) &= d(x_1, x_2) \\
&\leqslant d(x_1, y_1) + d(y_1, x_2) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + d(y_1, x_2) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + d(y_1, y_2) + d(y_2, x_2) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + d(y_1, y_2) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= d(y_1, y_2) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, $\text{diám}(A) < \text{diám}(B) + \varepsilon$. En consecuencia, $\text{diám}(A) - \text{diám}(B) < \varepsilon$. Similarmente, se tiene que $-\varepsilon < \text{diám}(A) - \text{diám}(B)$. Por tanto, $|\text{diám}(A) -$

diám$(B)| < \varepsilon$. De aquí, la función diám es uniformemente continua y por tanto, continua. ∎

Ejemplo 1.34 La función diám : $2^{[0,1]} \longrightarrow [0,1]$ no es una función de Whitney para $2^{[0,1]}$, pues diám$([0,1]) =$ diám$(\{0,1\})$, es decir, no cumple con (ii) de la Definición 1.32. Sin embargo, si restringimos esta función a $C([0,1])$ sí es una función de Whitney para $C([0,1])$.

En general, la Proposición 1.41 nos dice que la restricción a $C(X)$ de una función de Whitney para 2^X es una función de Whitney para $C(X)$, y el recíproco de este resultado no se cumple como se puede ver en el ejemplo anterior.

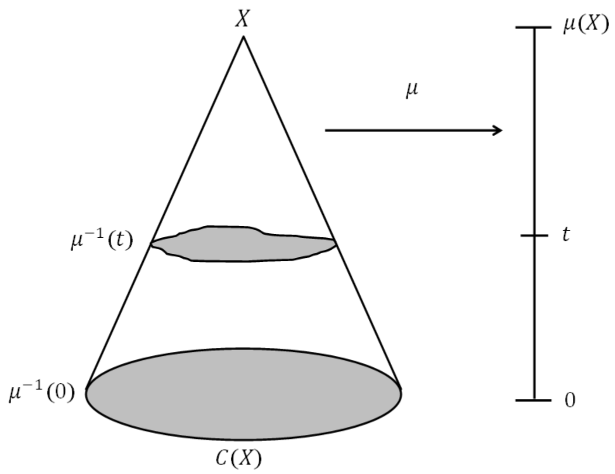


Figura 1.3: Función de Whitney.

Teorema 1.35 *Si X es un continuo, entonces existen funciones de Whitney para el hiperespacio 2^X.*

Demostración. Sean X un continuo y $Z = \{z_1, z_2, z_3, ...\}$ un subconjunto denso numerable de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función $f_n : X \longrightarrow [0,1]$ dada por $f_n(x) = \frac{1}{1+d(z_n,x)}$, para cada $x \in X$. Observemos que f_n es una función continua, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces por el Teorema 1.28, la función $2^{f_n} : 2^X \longrightarrow 2^{[0,1]}$ es continua, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, la función diám : $2^{[0,1]} \longrightarrow [0,1]$ es continua (Lema 1.33). Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos por $\mu_n =$ diám $\circ\, 2^{f_n} : 2^X \longrightarrow [0,1]$. Se sigue que, μ_n es una función continua, para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos además que, $\frac{\mu_n(A)}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y, para cada $A \in 2^X$. Como la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, por el criterio M de Weierstrass, la función $\mu : 2^X \longrightarrow [0,1]$ dada por $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}$ es una función continua, para cada $A \in 2^X$.

Veamos ahora que $\mu : 2^X \longrightarrow [0,1]$ es una función de Whitney.

(i) Dado que $\mu(\{x\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n} = \frac{\text{diám}(\{f_n(x)\})}{2^n} = 0$, se tiene que $\mu(\{x\}) = 0$, para cada $x \in X$.

(ii) Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Como $A \subset B$, entonces $f_n(A) \subset f_n(B)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\mu_n(A) \leqslant \mu_n(B)$. Así, para probar que $\mu(A) < \mu(B)$ basta probar que:

$$(*) \text{ Existe } i \in \mathbb{N} \text{ tal que } \mu_i(A) < \mu_i(B).$$

Sea $y \in B - A$. Notemos que $d(A, y) > 0$. Sea $r = \frac{d(A,y)}{2} > 0$. Dado que Z es denso en X, existe $z_i \in Z$ tal que $d(y, z_i) < r$. Entonces, $d(y, z_i) + 1 < r + 1$. Luego, $\frac{1}{r+1} < \frac{1}{1+d(y,z_i)} = f_i(y)$. Como $d(A, y) > r$, $f_i(x) = \frac{1}{1+d(z_i,x)} < \frac{1}{1+r}$, para cada $x \in A$. Así, $\sup f_i(A) \leqslant \frac{1}{1+r}$, luego $\sup f_i(A) < f_i(y)$. Dado que $y \in B$, se sigue que $\sup f_i(A) < \sup f_i(B)$. Como $A \subset B$, $\text{diám}(f_i(A)) < \text{diám}(f_i(B))$, es decir, $\mu_i(A) < \mu_i(B)$ para algún $i \in \mathbb{N}$. Esto prueba $(*)$. De (i) y (ii) se sigue que μ es una función de Whitney para 2^X. ■

Teorema 1.36 *[10, Teorema 6.7, pág. 89] Sea X un continuo y sean A, B subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un subcontinuo C de X tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.*

Lema 1.37 *Si A y B son subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$, $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ es una función de Whitney y $t \in [\mu(A), \mu(B)]$, entonces existe $C \in C(X)$ tal que $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) = t$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}([t,1]) \cap \{D \in C(X) : A \subset D \subset B\}$. Como μ es una función continua se tiene que $\mu^{-1}([t,1])$ es cerrado en $C(X)$ y por la Proposición 1.10, $\{D \in C(X) : A \subset D \subset B\}$ es cerrado en $C(X)$ y es no vacío por el Teorema 1.36, por tanto $\mathcal{A}$ es cerrado en $C(X)$ y en consecuencia compacto. Dado que $B \in \mathcal{A}$ se tiene que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, de manera que μ alcanza su mínimo en $\mathcal{A}$, es decir, existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) \leq \mu(D)$, para todo $D \in \mathcal{A}$. Ahora, sea $\mathcal{B} = \mu^{-1}([0,t]) \cap \{D \in C(X) : A \subset D \subset E\}$ por el mismo argumento anterior $\mathcal{B}$ es compacto y como $A \in \mathcal{B}$ se tiene que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, así μ alcanza su máximo en $\mathcal{B}$, es decir, existe $F \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(D) \leq \mu(F)$, para todo $D \in \mathcal{B}$. Si $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$ podemos tomar a $C = E$ o $C = F$ y terminamos. Supongamos entonces que $\mu(F) < t < \mu(E)$, como $F \subsetneq E$ (Por definición de $\mathcal{B}$) por el Teorema 1.36, existe $G \in C(X)$ tal que $A \subset F \subsetneq G \subsetneq E$ y por tanto $\mu(F) < \mu(G) < \mu(E)$. Si $\mu(G) > t$, entonces $G \in \mathcal{A}$ y $\mu(G) < \mu(E)$ contradiciendo el hecho de que $\mu(E) \leq \mu(D)$ para todo

$D \in \mathcal{A}$. Ahora, si $\mu(G) < t$ entonces $G \in \mathcal{B}$ y $\mu(G) > \mu(F)$ contradiciendo el hecho de que $\mu(D) \leq \mu(F)$ para todo $D \in \mathcal{B}$. Así, $\mu(G) = t$ y podemos considerar $C = G$. ∎

Niveles de Whitney

Definición 1.38 *Sea X un continuo, $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu(X)]$, el* **nivel de Whitney** *para $C(X)$ en t es el conjunto $\mu^{-1}(t)$.*

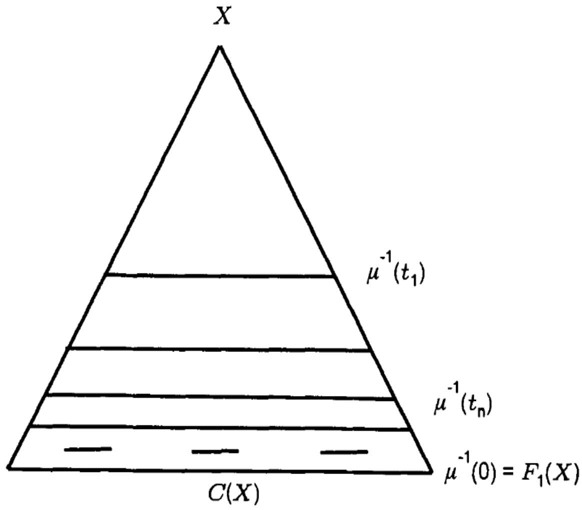


Figura 1.4: Niveles de Whitney.

Recordemos que para X un continuo, $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$. De la definición de función de Whitney es fácil ver que $\mu^{-1}(0) = \{\{x\} : x \in X\} = F_1(X)$. Podemos notar que X y $F_1(X)$ son homeomorfos de forma natural mediante la asociación x con $\{x\}$, para cada $x \in X$.

El siguiente Teorema es equivalente a la existencia de arcos ordenados en $C(X)$ que se dará más adelante en el Teorema 1.44.

Teorema 1.39 *Sea X un continuo. Si $A, B \in C(X)$ y $A \subsetneq B$, entonces existe una función continua $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(r) \subset \alpha(s)$ si $r < s$ y $r, s \in [0,1]$.*

Proposición 1.40 *Sean X un continuo y $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney. Entonces:*

(1) *$\mu^{-1}(t)$ es no degenerado y no vacío, para cada $t \in [0, \mu(X))$.*

(2) *Para cada* $t \in [0, \mu(X)]$, *se tiene* $\cup\mu^{-1}(t) = X$.

Demostración.

(1) Si $t = 0$, $\{x\} \in \mu^{-1}(t)$ para cada $x \in X$ por lo que $\mu^{-1}(t)$ es no degenerado y no vacío. Sea $0 < t < \mu(X)$. Veamos que $\mu^{-1}(t)$ es no vacío. Sea $x \in X$, entonces por el Teorema 1.39 existe $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(X)$ función continua tal que $\alpha(0) = \{x\}$, $\alpha(1) = X$ y $\alpha(r) \subsetneq \alpha(s)$ si $r < s$. Por continuidad de $\mu \circ \alpha$, existe $u \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha(u)) = t$. Así, $\alpha(u) \in \mu^{-1}(t)$ y por tanto $\mu^{-1}(t) \neq \emptyset$. Ahora, veamos que $\mu^{-1}(t)$ es no degenerado. Como $\mu(\alpha(u)) = t$ y $t < \mu(X)$, entonces $\alpha(u) \subsetneq X$. Sea $y \in X - \alpha(u)$, por el Teorema 1.39 existe $\beta : [0,1] \longrightarrow C(X)$ función continua tal que $\beta(0) = \{y\}$, $\beta(1) = X$ y $\beta(r) \subsetneq \beta(s)$ si $r < s$. Por continuidad de $\mu \circ \beta$, existe $s' \in [0,1]$ tal que $\mu(\beta(s')) = t$. Como $y \in \beta(s') - \alpha(u)$, entonces $\beta(s') \neq \alpha(u)$. Así, $\mu^{-1}(t)$ es no degenerado.

(2) Como $\cup\mu^{-1}(t) \subset X$ basta ver que $X \subset \cup\mu^{-1}(t)$. Sea $x \in X$, por el Teorema 1.39 existe $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(X)$ función continua tal que $\alpha(0) = \{x\}$, $\alpha(1) = X$ y $\alpha(r) \subsetneq \alpha(s)$ si $r < s$. Por continuidad de $\mu \circ \alpha$, existe $u \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha(u)) = t$ y $x \in \alpha(u)$. Luego, $\alpha(u) \in \mu^{-1}(t)$ y por tanto $x \in \cup\mu^{-1}(t)$. Así, $\cup\mu^{-1}(t) = X$. ∎

Proposición 1.41 *Sean* X *un continuo,* $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ *una función de Whitney, y* $A \in C(X)$. *Entonces:*

(1) $\mu|_{C(A)}$ *es una función de Whitney para* $C(A)$.

(2) $\left(\mu|_{C(A)}\right)^{-1}(t) = \mu^{-1}(t) \cap C(A)$, *para cada* $t \in [0, \mu(A)]$.

(3) *Para todo* $t \in [0, \mu(X)]$ *y para todo* $B \in \mu^{-1}([t, \mu(X)])$, *se tiene que*

$$\bigcup \left(C(B) \cap \mu^{-1}(t)\right) = B.$$

Demostración.

(1) Dado que μ es una función continua, entonces $\mu|_{C(A)}$ es continua. Sea $x \in A$. Como $\mu|_{C(A)}(\{x\}) = \mu(\{x\})$ y $\mu(\{x\}) = 0$, se sigue que $\mu|_{C(A)}(\{x\}) = 0$. Sean $B, C \in C(A)$ con $B \subsetneq C$. Como $\mu|_{C(A)}(B) = \mu(B)$, $\mu|_{C(A)}(C) = \mu(C)$ y $\mu(B) < \mu(C)$ se tiene $\mu|_{C(A)}(B) < \mu|_{C(A)}(C)$. Así, $\mu|_{C(A)}$ es una función de Whitney para $C(A)$.

(2) Se sigue de las propiedades de la función restricción.

(3) Se sigue de la Proposición 1.40 (2). ∎

Arcos ordenados

Definición 1.42 *Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Una función continua $\alpha : [0,1] \longrightarrow 2^X$ se llama* **arco ordenado** *de A a B si cumple lo siguiente:*

(i) $\alpha(0) = A$ *y* $\alpha(1) = B$*; y*

(ii) Si $s, t \in [0,1]$ tales que $s < t$, entonces $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

Si en la definición anterior cambiamos 2^X por $C(X)$, obtenemos la noción de arco ordenado de A a B en $C(X)$. Observemos que la condición (ii) dice que la función α es inyectiva, así α es un homeomorfismo sobre su imagen.

Dados $A, B \in 2^X$, tales que $A \subsetneq B$ ¿existe un arco ordenado en 2^X de A hasta B? La respuesta es no.

Ejemplo 1.43 Sea X el arco con puntos extremos p y q. Sean $A = \{p\}$ y $B = \{p, q\}$. Notemos que $A \subsetneq B$. Ahora, supongamos que $\alpha : [0,1] \longrightarrow 2^X$ es un arco ordenado de A hasta B. Podemos observar que para todo $t \in (0,1)$, $\{p\} \subsetneq \alpha(t) \subsetneq \{p, q\}$ lo cual es una contradicción ya que $\alpha(t) \in \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$.

Sin embargo, restringiendo la función a $C(X)$ se puede garantizar la existencia de arcos ordenados como se obtiene en el siguiente teorema.

Teorema 1.44 *Para todo $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$ existe un arco ordenado en $C(X)$ de A hasta B.*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney. Sea $D = \{t \in \mathbb{Q} : \mu(A) < t < \mu(B)\} \cup \{\mu(A), \mu(B)\}$. Entonces, D es un conjunto numerable y denso en $[\mu(A), \mu(B)]$, consideremos $r_1, r_2, r_3, \ldots$ una numeración para D tal que $r_1 = \mu(A)$, $r_2 = \mu(B)$ y $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$.

Afirmación 1. Existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = r_n$ y, si $r_n \leqslant r_m$, entonces $A_n \subset A_m$.

Prueba de Afirmación 1. Sean $A_1 = A$, $A_2 = B$. Como $r_3 \in (r_1, r_2)$, por el Lema 1.37, existe $A_3 \in C(X)$ tal que $A_1 \subset A_3 \subset A_2$ y $\mu(A_3) = r_3$. Supongamos que hemos construido subcontinuos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ con las propiedades mencionadas en la afirmación. Por la densidad de D, consideremos el número r_{n+1}, luego, existen $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $r_i < r_{n+1} < r_j$

y $(r_i, r_j) \cap \{r_1, r_2, ..., r_n\} = \emptyset$, por el Lema 1.37, existe $A_{n+1} \in C(X)$ tal que $A_i \subset A_{n+1} \subset A_j$ y $\mu(A_{n+1}) = r_{n+1}$. Por lo tanto, de forma inductiva, hemos obtenido la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ que deseamos. Observemos que $A \subset A_n \subset B$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Sea $\mathcal{A} = Cl_{C(X)}(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$.

Afirmación 2. Para todo $E, F \in \mathcal{A}$ se tiene $E \subset F$ o $F \subset E$ y además $A \subset E \subset B$.

Prueba de Afirmación 2. Sean $E, F \in \mathcal{A}$, entonces existen sucesiones de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $\lim A_{n_k} = E$ y $\lim A_{m_k} = F$. Consideremos las sucesiones de números reales $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{r_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $r_{n_k} \leq r_{m_k}$ o $r_{m_k} \leq r_{n_k}$ y dado que los naturales son un conjunto infinito, existe una sucesión $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ de números naturales tal que $r_{n_{k_j}} \leq r_{m_{k_j}}$ o $r_{m_{k_j}} \leq r_{n_{k_j}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Si $r_{n_{k_j}} \leq r_{m_{k_j}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces $A_{n_{k_j}} \subset A_{m_{k_j}}$ y por tanto $\lim A_{n_{k_j}} \subset \lim A_{m_{k_j}}$, es decir, $E \subset F$. Análogamente, si $r_{m_{k_j}} \leq r_{n_{k_j}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, obtenemos que $F \subset E$. Ahora, veamos que $A \subset E \subset B$. Observemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ $r_1 \leq r_{n_k} \leq r_2$, por lo que $A_1 \subset A_{n_k} \subset A_2$, es decir, $A \subset A_{n_k} \subset B$ para cada $k \in \mathbb{N}$, luego $\lim A \subset \lim A_{n_k} \subset \lim B$. Así, $A \subset E \subset B$. □

Afirmación 3. Existe un arco ordenado

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow C(X) \text{ tal que } \alpha([0, 1]) = \mathcal{A}.$$

Prueba de Afirmación 3. Veamos que la función $\mu|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow [r_1, r_2]$ es un homeomorfismo.

- $\mu|_{\mathcal{A}}$ continua: Se sigue inmediatamente dado que μ es una función continua.
- $\mu|_{\mathcal{A}}$ es inyectiva: Sean $U, V \in \mathcal{A}$ tales que $U \neq V$. Por la Afirmación 2 se tiene que $U \subset V$ o $V \subset U$, luego por definición de función de Whitney $\mu|_{\mathcal{A}}(U) < \mu|_{\mathcal{A}}(V)$ o $\mu|_{\mathcal{A}}(V) < \mu|_{\mathcal{A}}(U)$. Así, $\mu|_{\mathcal{A}}(U) \neq \mu|_{\mathcal{A}}(V)$.
- $\mu|_{\mathcal{A}}$ es supreyectiva: Dado que para todo $E \in \mathcal{A}$ se tiene que $A \subset E \subset B$, entonces $\mu(\mathcal{A}) \subset [r_1, r_2]$. Ahora, sea $t \in [r_1, r_2]$, entonces existe $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión en el conjunto $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\lim r_{n_k} = t$. Por compacidad de $C(X)$, existe $\{A_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim A_{n_{k_j}} = E$ para algún $E \in C(X)$ por lo que $E \in \mathcal{A}$. Luego, $\mu(E) = \lim \mu(A_{n_{k_j}}) = \lim r_{n_{k_j}} = t$. Por lo tanto, $\mu(\mathcal{A}) = [r_1, r_2]$.

Tenemos que $\mu|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow [r_1, r_2]$ es una biyección continua entre un espacio compacto y un espacio de Hausdorff, así $\mu|_{\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo. $\square$

Sea $\varphi : [0,1] \longrightarrow [r_1, r_2]$ un homeomorfismo creciente. Definimos $\alpha = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1} \circ \varphi : [0,1] \longrightarrow \mathcal{A}$, entonces α es un homeomorfismo y además $\alpha(0) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(\varphi(0)) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(r_1) = A$ y $\alpha(1) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(\varphi(1)) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(r_2) = B$. Ahora, sean $s, t \in [0,1]$ tales que $0 \leq s < t \leq 1$, entonces $\varphi(s) < \varphi(t)$, ya que φ es creciente. Sea $C = (\mu|_{\mathcal{A}})^{1}(\varphi(s))$ y $D = (\mu|_{\mathcal{A}})^{1}(\varphi(t))$, se tiene que $\mu(C) = \varphi(s)$ y $\mu(D) = \varphi(t)$, así $\mu(C) < \mu(D)$.

Dado que $C, D \in \mathcal{A}$, entonces $C \subset D$ o $D \subset C$. Como $\mu(C) < \mu(D)$ y μ es una función de Whitney, se sigue que $C \subset D$, es decir, $\alpha(s) \subset \alpha(t)$. Así, α es un arco ordenado de A hacia B tal que $\alpha([0,1]) = \mathcal{A}$. $\blacksquare$

Si $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(X)$ es un arco ordenado, $A, B \in C(X)$ tales que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(t) = C$ para algún $t \in (0,1)$, diremos que α es un arco ordenado desde A hasta B pasando por C.

Corolario 1.45 *Si X es un continuo no degenerado y $A \in C(X)$, entonces para cada $x \in A$, existe un arco ordenado desde $\{x\}$ hasta X pasando por A.*

Demostración. Si $A = \{x\}$ o $A = X$ se sigue inmediatamente del Teorema 1.44. Supongamos entonces $\{x\} \subsetneq A \subsetneq X$. Sean α_1, α_2 dos arcos ordenados, $\alpha_1, \alpha_2 : [0,1] \longrightarrow C(X)$, desde $\{x\}$ hasta A y de A hasta X, respectivamente. Observemos que $\alpha_1(1) = A = \alpha_2(0)$. Definamos la función continua $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(X)$ dada por, para cada $t \in [0,1]$,

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & \text{si} \quad t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_2(2t-1) & \text{si} \quad t \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Entonces, $\alpha(0) = \{x\}$, $\alpha(\frac{1}{2}) = A$ y $\alpha(1) = X$. Sean $s, t \in [0,1]$ tales que $s < t$, entonces se tiene:

- Si $t \leq \frac{1}{2}$, entonces $0 \leq 2s < 2t \leq 1$ por lo que $\alpha(s) = \alpha_1(2s) \subset \alpha_1(2t) = \alpha(t)$;
- Si $s < \frac{1}{2} < t$, entonces $2s < 1$ y $0 < 2t - 1$ por lo que $\alpha(s) = \alpha_1(2s) \subset \alpha_1(1) = A = \alpha_2(0) \subset \alpha_2(2t-1) = \alpha(t)$; y
- Si $\frac{1}{2} \leq s$, entonces $0 \leq 2s - 1 < 2t - 1 \leq 1$ por lo que $\alpha(s) = \alpha_2(2s-1) \subset \alpha_2(2t-1) = \alpha(t)$.

Es decir, $\alpha(s) \subset \alpha(t)$, para cada $s, t \in [0,1]$ tales que $s < t$. Así, α es un arco ordenado de $\{x\}$ hasta X pasando por A. $\blacksquare$

Teorema 1.46 *Sea X un continuo. Si α es un arco ordenado en 2^X tal que $\alpha(0) \in C(X)$. Entonces $\alpha(t) \in C(X)$ para toda $t \in [0,1]$.*

Demostración. Supongamos que existe $t \in [0,1]$ tal que $\alpha(t)$ no es conexo. Entonces, existen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in 2^X$ tales que $\alpha(t) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Como $\alpha(0)$ es conexo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha(0) \subset \mathcal{U}$. Definamos

$$\mathcal{H} = \{A \in 2^X : A \subset \mathcal{U}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{K} = \{A \in 2^X : A \cap \mathcal{V} \neq \emptyset\}.$$

Sean $H = \alpha^{-1}(\mathcal{H})$, $K = \alpha^{-1}(\mathcal{K})$. Veamos que H y K son dos cerrados no vacíos y ajenos de $[0,1]$ tales que $H \cup K = [0,1]$. Por la Proposición 1.10, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son cerrados en 2^Xy dado que α es continua, entonces H y K son cerrados en $[0,1]$. Además, $0 \in H$ y $t \in K$ por lo que H y K son no vacíos. Supongamos que $H \cap K \neq \emptyset$, y sea $s \in H \cap K$. Entonces, $\emptyset \neq \alpha(s) \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ lo cual contradice que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Por tanto, $H \cap K = \emptyset$. Ahora, sea $s \in [0,1]$. Si $s \leq t$, entonces $\alpha(s) \subset \alpha(t) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ por lo que $\alpha(s) \subset \mathcal{U}$ o $\alpha(s) \cap V \neq \emptyset$, así $s \in H \cup K$. Si $s \geq t$, entonces $\alpha(t) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \subset \alpha(s)$ y así $\mathcal{V} \subset \alpha(s)$, de aquí se sigue que $s \in K$. Por tanto, $H \cup K = [0,1]$, es decir, $H \cup K$ es una disconexión de $[0,1]$, lo cual es una contradicción. Así, $\alpha(t) \in C(X)$. ■

Lema 1.47 *Sean X un continuo, $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney y $t > 0$. Si A, B son elementos del nivel $\mu^{-1}(t)$ tales que $A \neq B$ y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces para cada subcontinuo K de $A \cap B$, existe un arco γ en $\mu^{-1}(t)$ con puntos extremos A y B tal que para cada $L \in Im\ \gamma$ se tiene que $K \subset L$ y $L \subset A \cup B$.*

Demostración. Sea K un subcontinuo de $A \cap B$, entonces $A, K \in C(X)$ y $K \subset A \cap B \subset A$. Por el Teorema 1.44, existe un arco ordenado $\alpha_1 : [0,1] \longrightarrow C(X)$ de K hasta A. De hecho, $\alpha_1 : [0,1] \longrightarrow C(A)$. Análogamente, existe un arco ordenado $\alpha_2 : [0,1] \longrightarrow C(B)$ de K hasta B. Observemos que $\alpha_1(u) \in C(A)$ y $\alpha_2(v) \in C(B)$ para todo $u, v \in [0,1]$ por lo que $\alpha_1(u) \cup \alpha_2(v) \subset A \cup B$ y por tanto $\alpha_1(u) \cup \alpha_2(v) \in C(A \cup B)$.

Fijemos $r \in [0,1]$ y consideremos $\alpha_1(r) \cup \alpha_2 : [0,1] \longrightarrow C(A \cup B)$ definida como $(\alpha_1(r) \cup \alpha_2)(w) = \alpha_1(r) \cup \alpha_2(w)$, para cada $w \in [0,1]$. Tenemos que $\alpha_1(r) \cup \alpha_2(0) = \alpha_1(r) \cup K \subset A \cup K = A$, es decir, $\alpha_1(r) \cup \alpha_2(0) \subset A$, entonces $\mu(\alpha_1(r) \cup \alpha_2(0)) \leq \mu(A) = t$. Por otra parte, $B \subset \alpha_1(r) \cup B = \alpha_1(r) \cup \alpha_2(1)$, es decir, $B \subset \alpha_1(r) \cup \alpha_2(1)$ por lo que $t = \mu(B) \leqslant \mu(\alpha_1(r) \cup \alpha_2(1))$.

Sea $J = [\mu(\alpha_1(r) \cup \alpha_2(0)), \mu(\alpha_1(r) \cup \alpha_2(1))]$, entonces $t \in J$. Observemos que $\mu \circ (\alpha_1(r) \cup \alpha_2) : [0,1] \longrightarrow J$ es una función continua y por el Teorema de valor intermedio existe $s \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha_1(r) \cup \alpha_2(s)) = t$ (notemos que s depende de r). En general, para cada $r \in [0,1]$, existe $s_r \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha_1(r) \cup \alpha_2(s_r)) = t$. Así, $\alpha_1(r) \cup \alpha_2(s_r) \in \mu^{-1}(t) \cap C(A \cup B)$.

Afirmación. La función $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mu^{-1}(t) \cap C(A \cup B)$ definida como $\gamma(r) = \alpha_1(r) \cup \alpha_2(s_r)$ es un arco de B hasta A cuya imagen está contenida en $\mu^{-1}(t) \cap C(A \cup B)$ tal que para cada $L \in Im\gamma$ y $K \subset L$.

Prueba de Afirmación. Primero veamos que si $r, s \in [0,1]$ son tales que $\mu(\alpha_1(r) \cup \alpha_2(s)) = t$, entonces $\alpha_1(r) \cup \alpha_2(s_r) = \alpha_1(r) \cup \alpha_2(s)$, es decir, la elección de s_r no influye al tomar $\gamma(r)$. Supongamos que $s \leqslant s_r$, entonces $\alpha_2(s) \subset \alpha_2(s_r)$. De manera que $\alpha_1(r) \cup \alpha_2(s) \subset \alpha_1(r) \cup \alpha_2(s_r)$, y como ambos conjuntos miden lo mismo bajo μ, entonces $\alpha_1(r) \cup \alpha_2(s) = \alpha_1(r) \cup \alpha_2(s_r)$. Similarmente, si $s_r \leqslant s$ se tiene que $\alpha_1(r) \cup \alpha_2(s_r) = \alpha_1(r) \cup \alpha_2(s)$.

Ahora veamos que γ es continua. Sean $q \in [0,1]$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $[0,1]$ tal que $\lim q_n = q$. Entonces para cada $q_n \in [0,1]$, existe $s_{q_n} \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha_1(q_n) \cup \alpha_2(s_{q_n})) = t$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\lim s_{q_n} = l$ para algún $l \in [0,1]$. Por continuidad de α_1 y α_2 se tiene que $\lim \alpha_1(q_n) = \alpha_1(q)$ y $\lim \alpha_2(s_{q_n}) = \alpha_2(l)$ y por tanto $\lim \alpha_1(q_n) \cup \alpha_2(s_{q_n}) = \alpha_1(q) \cup \alpha_2(l)$, luego $\lim \gamma(q_n) = \alpha_1(q) \cup \alpha_2(l)$. Dado que $t = \mu(\gamma(q_n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y μ es continua se sigue que $\lim \mu(\gamma(q_n)) = \mu(\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l))$, entonces $\mu(\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l)) = t$. Ahora, si $l \leqslant s_q$ entonces $\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l) \subset \alpha_1(q) \cup \alpha_2(s_q)$ esto implica que $\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l) \subset \gamma(q)$ y como $\mu(\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l)) = \mu(\gamma(q))$ entonces $\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l) = \gamma(q)$. De manera análoga, si $s_q \leqslant l$ se tiene que $\alpha_1(q) \cup \alpha_2(l) = \gamma(q)$. Así, $\lim \gamma(q_n) = \gamma(q)$ y por tanto γ es continua. □

Finalmente, notemos que $\gamma(0) = \alpha_1(0) \cup \alpha_2(s_0) \subset K \cup B = B$, luego $t = \mu(\gamma(0)) \leqslant \mu(B) = t$ y así $\gamma(0) = B$. Por otro lado, $\gamma(1) = \alpha_1(1) \cup \alpha_2(s_1) = A \cup \alpha_2(s_1)$ y $A \subset A \cup \alpha_2(s_1)$, luego $A \subset \gamma(1)$ y así $t = \mu(A) \leqslant \mu(\gamma(1)) = t$ por lo que $\gamma(1) = A$.

Así, γ es el arco con extremos A y B deseado. ■

Teorema 1.48 *Los niveles de Whitney son conexos.*

Demostración. Sean $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney, $t \in (0,1)$ y $\mu^{-1}(t)$ un nivel de Whitney. Supongamos que $\mu^{-1}(t)$ no es conexo. Como $\mu^{-1}(t)$ es compacto, existen dos conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ de $\mu^{-1}(t)$ tales que $\mu^{-1}(t) = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$.

Sean $H_0 = \cup\{H : H \in \mathcal{H}\}$ y $K_0 = \cup\{K : K \in \mathcal{K}\}$. Dado que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son no vacíos entonces H_0 y K_0 son no vacíos. Veamos que H_0, K_0 son cerrados en X. Sea $x \in Cl(H_0)$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en H_0 tal que $\lim x_n = x$. Como $x_n \in H_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_n \in H_n$ para algún $H_n \in \mathcal{H}$ y por ser $\mathcal{H}$ compacto (por ser un subconjunto cerrado de un compacto) existe $\{H_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim H_{n_k} = H$ para algún $H \in \mathcal{H}$. Dado que $x_{n_k} \in H_{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, por el Corolario 1.20, $x \in H$ y así $x \in H_0$, es decir, $Cl(H_0) \subset H_0$ y por tanto H_0 es cerrado en X. De manera análoga se tiene que K_0 es cerrado en X.

Por otra parte, dada la Proposición 1.40, $X = \bigcup \mu^{-1}(t) = \bigcup(\mathcal{H} \cup \mathcal{K}) = H_0 \cup K_0$. Ahora, veamos que H_0 y K_0 son ajenos. Supongamos que existe $x \in H_0 \cup K_0$. Entonces existen $H \in \mathcal{H}$ y $K \in \mathcal{K}$ tales que $x \in H$ y $x \in K$. Por el Lema 1.47, existe una función continua $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mu^{-1}(t)$ tal que $\alpha(0) = H$ y $\alpha(1) = K$. Entonces $\alpha[[0,1]] \subset \mu^{-1}(t) \cap \mathcal{H}$ y $\alpha[[0,1]] \subset \mu^{-1}(t) \cap \mathcal{K}$ lo cual no puede ser ya que $\alpha[[0,1]]$ es conexo (por continuidad de α). Por tanto, H_0 y K_0 son ajenos. Podemos notar que H_0 y K_0 constituyen una separación del continuo X, lo cual contradice su conexidad. Por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ es conexo. ■

Corolario 1.49 *Los niveles de Whitney son continuos no degenerados.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.40, Teorema 1.48 y de la continuidad de μ. ■

Proposición 1.50 *Sean X un continuo, $Z \in C(X)$ y $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney. Entonces para $t \in (0,1]$, el conjunto*

$$\mathcal{A} = \{A \in C(X) : A \cap Z \neq \emptyset \text{ y } \mu(A) = t\} \text{ es conexo.}$$

Demostración. Sea $t \in (0,1]$.

Caso 1: $\mu(Z) \geqslant t$;

Afirmación: Para todo $A \in \mathcal{A}$ existe $E_A \in C(Z)$ y existe $\alpha_A : [0,1] \longrightarrow \mathcal{A}$ función continua tales que $\alpha_A(0) = A$ y $\alpha_A(1) = E_A$.

Prueba de Afirmación. Sea $A \in \mathcal{A}$ y sea $y \in A \cap Z$, entonces existe $E_A \in C(Z)$ tal que $y \in E_A$ y $\mu(E_A) = t$ (Teorema 1.37), observemos que $y \in A \cap E_A$. Por el Lema 1.47, existe $\alpha_A : [0,1] \longrightarrow \mu^{-1}(t)$ función continua tal que $\alpha_A(0) = A$, $\alpha_A(1) = E_A$ y $y \in \alpha_A(s)$ para todo $s \in [0,1]$. Entonces $y \in \alpha_A(s) \cap E_A$ y como $E_A \subset Z$, entonces $\alpha_A(s) \cap Z \neq \emptyset$ para todo $s \in [0,1]$, es decir, $\alpha_A(s) \in \mathcal{A}$. Así, $\alpha_A[[0,1]] \subset \mathcal{A}$ y por tanto $\alpha_A : [0,1] \longrightarrow \mathcal{A}$. $\square$

Se sigue que $\mathcal{A} = \bigcup\{\alpha_A[[0,1]] : A \in \mathcal{A}\}$.

Ahora, veamos que $\mu|_{C(Z)}^{-1}(t) \subset \mathcal{A}$. Sea $E \in \mu|_{C(Z)}^{-1}(t)$, entonces $E \in C(Z)$ y $\mu(E) = t$, así $E \cap Z \neq \emptyset$ y por tanto $E \in \mathcal{A}$. Por la Proposición 1.41 y el Teorema 1.48, $\mu|_{C(Z)}^{-1}(t)$ es conexo y por continuidad de α_A se tiene que $\alpha_A[[0,1]]$ es conexo. Notemos que $\alpha_A[[0,1]] \cap \mu|_{C(Z)}^{-1}(t) \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{A}$ lo cual implica que $\mathcal{A}$ es conexo pues es unión no vacía de conjuntos conexos que intersectan a un elemento conexo.

Caso 2: $\mu(Z) < t$;

Sea $E_t \in C(X)$ tal que $\mu(E_t) = t$ y $Z \subset E_t$ (Corolario 1.45). Se tiene que $E_t \in \mathcal{A}$ y por tanto $A \cap E_t \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Ahora, sea $A \in \mathcal{A}$. Análogamente al caso 1, existe $\alpha_A : [0,1] \longrightarrow \mathcal{A}$ función continua tales que $\alpha_A(0) = A$ y $\alpha_A(1) = E_t$.

Entonces $\mathcal{A} = \bigcup\{\alpha_A[[0,1]] : A \in \mathcal{A}\}$. Como $E_t \in \alpha_A[[0,1]]$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es conexo pues es unión no vacía de conjuntos conexos cuya intersección es no vacía. $\blacksquare$

Ejemplo 1.51 Los niveles de Whitney de un arco son arcos.

Sean $\mu : C([0,1]) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu([0,1]))$. Definimos $f : \mu^{-1}(t) \longrightarrow [0,1]$ por $f(A) = \min(A)$. Notemos que f es una función continua y veamos que f es inyectiva. Sean $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $f(A) = f(B)$, entonces $A = [a,c]$ y $B = [a,d]$ por lo que $A \subset B$ o $B \subset A$ y como $\mu(A) = \mu(B) = t$ se tiene que $A = B$, así f es inyectiva. Como $\mu^{-1}(t)$ es compacto, f es un homeomorfismo sobre su imagen, es decir, $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo $f[\mu^{-1}(t)]$, de aquí que $f[\mu^{-1}(t)]$ es un subcontinuo de $[0,1]$, además $\mu^{-1}(t)$ es no degenerado (Corolario 1.49), entonces $f[\mu^{-1}(t)]$ es no degenerado y en consecuencia es un subintervalo no degenerado de $[0,1]$. Así, $f[\mu^{-1}(t)]$ es un arco y por tanto $\mu^{-1}(t)$ es un arco.

Propiedades de Whitney y otras nociones

El estudio de las propiedades de Whitney ha sido muy extensivo y analizado por diferentes matemáticos del siglo XX; tales propiedades que son precisamente propiedades topológicas, nos permiten obtener información de los hiperespacios partiendo de un continuo. Es natural preguntarse cuáles de esas propiedades topológicas son preservadas bajo su aproximación por los niveles de Whitney. En la actualidad se estudian también las siguientes propiedades: reversibles de Whitney, fuertes reversibles de Whitney y secuenciales fuerte reversibles de Whitney, estas propiedades parten de la información que se da acerca de los niveles de Whitney, para poder afirmar qué comportamiento tiene el continuo. En [9], Capítulo VIII hay una completa discusión de lo que fue descubierto hasta 1999. Veamos cada una de estas definiciones.

Definición 1.52 *Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una:*

- **Propiedad de Whitney**, *si para todo continuo X con la propiedad $\mathcal{P}$, entonces para toda función de Whitney para $C(X)$ y para todo $t \in (0,1)$ se tiene que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

- **Propiedad reversible de Whitney**, *si para todo continuo X y toda función de Whitney μ para $C(X)$ tal que para todo $t \in (0,1)$ si $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

- **Propiedad fuerte reversible de Whitney**, *si para todo continuo X y para alguna función de Whitney μ para $C(X)$ y todo $t \in (0,1)$ tal que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

- **Propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney**, *si para todo continuo X y para alguna función de Whitney μ para $C(X)$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(0,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para cada n, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

Notemos que cada propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney es una propiedad fuerte reversible de Whitney y cada propiedad fuerte reversible de Whitney es una propiedad reversible de Whitney.

A continuación daremos algunos ejemplos de cada una de las propiedades definidas previamente. La demostración de estos ejemplos se pueden ver en [9, Capítulo VIII, pág. 231].

Definición 1.53 *Un continuo X es* **localmente conexo en un punto** *x si para cada abierto U de X que contiene a x, existe un abierto conexo V de X tal que $x \in V \subset U$. Diremos que X es* **localmente conexo** *si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Definición 1.54 *Sea X un continuo. Diremos que X es* **arco conexo** *si para cualesquiera dos puntos en X, existe un arco en X que los contiene. Diremos que X es* **hereditariamente arco conexo** *si cualquier subcontinuo A de X, es arco conexo.*

Ejemplo 1.55

- La propiedad de ser un continuo es una propiedad de Whitney, (Corolario 1.49).

- La propiedad de ser un arco es una propiedad de Whitney, (Ejemplo 1.51).

- La propiedad de ser localmente conexo es una propiedad de Whitney.

- La propiedad de ser arco conexo es una propiedad de Whitney.

Definición 1.56 *[9, pág. 76] Un compacto K se dice* **retracto absoluto** *siempre que K esté encajado en un espacio métrico, Y, la copia encajada de K es una retracción de Y.*

Ejemplo 1.57

- La propiedad de ser un retracto absoluto no es una propiedad de Whitney.

Definición 1.58 *Un continuo X se dice* **descomponible** *si se puede ver como la unión de dos subcontinuos propios de X.*

Ejemplo 1.59

- La propiedad de ser un retracto absoluto es una propiedad reversible de Whitney.

Ejemplo 1.60

- La propiedad de ser arco conexo no es una propiedad reversible de Whitney.

- La propiedad de ser descomponible no es una propiedad reversible de Whitney.

Ejemplo 1.61

- La propiedad de ser hereditariamente arco conexo es una propiedad fuerte reversible de Whitney.

- La propiedad de tener la propiedad cubriente es una propiedad fuerte reversible de Whitney, (veáse la Definición 2.45).

Ejemplo 1.62

- La propiedad de ser retracto absoluto no es una propiedad fuerte reversible de Whitney.

Ejemplo 1.63

- La propiedad de ser localmente conexo es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney.

- La propiedad de ser un arco es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney.

- La propiedad de ser encadenable es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney, (veáse la Definición 2.47).

Definición 1.64 *Un punto p en un continuo X es un* **punto de corte** *siempre que $X - \{p\}$ es disconexo.*

Ejemplo 1.65

- La propiedad de tener puntos de corte no es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney.

Continuos Kelley y semi-Kelley

2.1 Continuos límites máximos y máximos fuertes

Definición, ejemplos y algunos resultados

Los siguientes dos conceptos auxiliares desempeñan un papel importante en la investigación de una forma más débil de la propiedad de Kelley.

Definición 2.1 *Sea K subcontinuo de un continuo X. Decimos que $M \subset K$ es un* **continuo límite máximo** *de K, si existe una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $C(X)$ que converge a M tal que si $\{M'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión de elementos de $C(X)$ con $M_n \subset M'_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim M'_n = M' \subset K$, se tiene que $M = M'$.*

Definición 2.2 *Sea K subcontinuo de un continuo X. Decimos que $M \subset K$ es un* **continuo límite máximo fuerte** *de K, si existe una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $C(X)$ que converge a M tal que si $\{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{M'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $C(X)$ con $M_{n_k} \subset M'_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\lim M'_k = M' \subset K$, se tiene que $M = M'$.*

Observación 2.3 A partir de las Definiciones 2.1 y 2.2 se tiene que para cada continuo X y cada subcontinuo K, si M es un continuo límite máximo fuerte de K entonces M es un continuo límite máximo de K. Además, cada subcontinuo K de X es un continuo límite máximo fuerte (y por lo tanto un continuo límite máximo) en sí mismo. Para ver esto, consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n = K$, es decir, la sucesión constante K y veamos que cumple con la definición de continuo límite máximo fuerte. Sea $\{K_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ y sea $\{K'_j\}_{j=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $K_{n_j} \subset K'_j$, para cada $j \in \mathbb{N}$ y $\lim K'_j = K' \subset K$. Como $K_{n_j} \subset K'_j$, por el Teorema 1.21, se tiene que $K \subset K'$ y por tanto $K = K'$.

El siguiente ejemplo nos muestra que no todo continuo límite máximo es un continuo límite máximo fuerte.

Ejemplo 2.4 En el plano Euclidiano pq denota el segmento de línea recta que une al punto p con el punto q. Sean $v = (0,0)$, $a = (0,1)$, $b = (-1,0)$, $c = (1,0)$ y para $n \in \mathbb{N}$, sean $b_n = (-1, \frac{1}{n})$, $b_n = (1, \frac{1}{n})$, $p_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ y $q_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Definamos

$$X = va \cup vb \cup vc \cup \bigcup \{ap_n \cup p_n b_n \cup a_n q_n \cup q_n c_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ahora, sean $a' = (0, \frac{1}{2})$, $b' = (-\frac{1}{2}, 0)$ y $c' = (\frac{1}{2}, 0)$ los puntos medios de los segmentos va, vb y vc, respectivamente. Entonces $M = va'$ es un continuo límite máximo de $K = va' \cup vb' \cup vc'$. Sin embargo no es un continuo límite máximo fuerte de K. Para ver esto, sean p'_n y q'_n los puntos medios de los segmentos ap_n y aq_n, respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $M_{2n-1} = p'_n p_n$ y $M_{2n} = q'_n q_n$, obtenemos una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos que converge a M tal que para cada sucesión $\{M'_n\}_{n=1}^{\infty}$ de continuos convergente a un continuo M' con $M_n \subset M'_n$ y $\lim M'_n = M' \subset K$ se tiene $M' = M$, mientras que la condición para continuo límite fuerte de K no se cumple si consideramos la subsucesión $\{M_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$, (veáse la Figura 2.1).

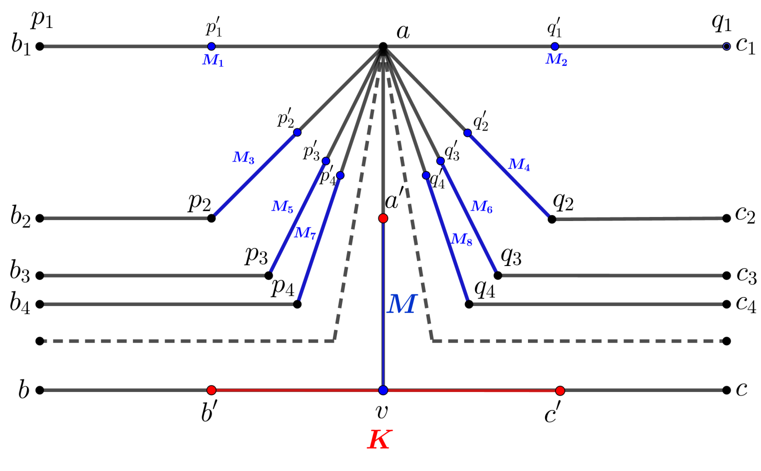


Figura 2.1: Continuo límite máximo que no es continuo límite máximo fuerte.

También se puede observar de la Definición 2.1 (Definición 2.2) que si M, L y K son subcontinuos de un continuo X tales que $M \subset L \subset K$ con M es un continuo límite máximo (fuerte) de K, entonces M es un continuo límite máximo (fuerte) de L. Sin embargo, si M es un continuo límite máximo (fuerte) de L no implica que M sea un continuo límite máximo (fuerte) de K y esto se muestra en el siguiente ejemplo.

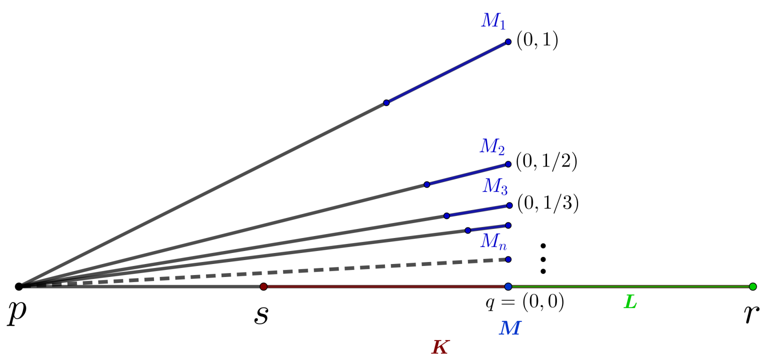


Figura 2.2: Abanico armónico de pata alargada.

Ejemplo 2.5 (Abanico armónico de pata alargada.) Consideremos la sucesión armónica $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Definamos $p=(-2,0)$, $q=(0,0)$, $r=(1,0)$ y $s=(-1,0)$ y, para $n\in\mathbb{N}$, sea $q_n=(0,\frac{1}{n})$. Entonces $X=\bigcup\{pq_n : n\in\mathbb{N}\}\cup pq\cup qr$. Consideremos los subcontinuos $K=sr$, $L=qr$ y $M=\{q\}$. Se tiene que $M\subset L\subset K$, M es un continuo límite máximo fuerte de L pero, sin embargo, no es un continuo límite máximo fuerte de K, (veáse la Figura 2.2).

Lema 2.6 *Sean X un continuo, K un subcontinuo de X y M un continuo límite máximo fuerte de K y sea $\mu : C(X)\longrightarrow[0,1]$ una función de Whitney. Entonces existe una sucesión $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\mu(B_j)=\mu(M)$, para cada $j\in\mathbb{N}$ y $\lim B_j=M$. Además, $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ cumple con la definición de continuo límite máximo fuerte para M en K.*

Demostración. Sea $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$ que cumple con definición de continuo límite máximo fuerte para M en K. Sean $x_n\in M_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$, tal que $\lim x_n=x$ para algún $x\in M$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea α_n un arco ordenado de $\{x_n\}$ hasta X que pasa por M_n (la existencia de α_n se da por el Corolario 1.45). Entonces por el Lema 1.37, existe $A_n\in C(X)$ tal que $x_n\in A_n$, $\mu(A_n)=\mu(M)$ y $A_n\subset M_n$ o $M_n\subset A_n$. Sea $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim A_{n_k}=A$. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$P=\{k\in\mathbb{N} : A_{n_k}\subset M_{n_k}\} \qquad \text{y} \qquad Q=\{k\in\mathbb{N} : M_{n_k}\subset A_{n_k}\}.$$

Supongamos que P es infinito, entonces existe una subsucesión $\{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $A_{n_{k_j}}\subset M_{n_{k_j}}$, para todo $j\in\mathbb{N}$ y por tanto $A\subset M$. Por otro lado, $\mu(A_{n_{k_j}})=\mu(M)$ para todo $j\in\mathbb{N}$ por lo que se tiene $\mu(A)=\mu(M)$ y así $A=M$. Por lo tanto, $\lim A_{n_{k_j}}=M$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $B_j=A_{n_{k_j}}$.

Veamos que la sucesión $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ cumple con la definición de continuo límite máximo fuerte para M en K. Sean $\{M'_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ y $\{B_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que $B_{j_k} \subset M'_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y lím $M'_k = M' \subset K$. Por demostrar que $M = M'$. Como $B_{j_k} \subset M'_k$, entonces $M \subset M'$. Por otra parte, como $A_{n_{j_k}} \subset M_{n_{j_k}}$ se tiene que $B_{j_k} \cap M_{n_{j_k}} \neq \emptyset$, además $B_{j_k} \subset M'_k$ por lo que $M'_k \cap M_{n_{j_k}} \neq \emptyset$. Así, $\{M'_k \cup M_{n_{j_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ tal que $M_{n_{j_k}} \subset M'_k \cup M_{n_{j_k}}$ y lím $M'_k \cup M_{n_{j_k}} = M' \cup M \subset K$. Por la elección de $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ se tiene que $M' \cup M = M$ y así $M' \subset M$. Por tanto, $M' = M$ y $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ cumple con la definición de continuo límite máximo fuerte para M en K.

Ahora, supongamos que Q es infinito, entonces existe una subsucesión $\{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $M_{n_{k_j}} \subset A_{n_{k_j}}$, para todo $j \in \mathbb{N}$ y por tanto $M \subset A$. Por otro lado, $\mu(A_{n_{k_j}}) = \mu(M)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ por lo que se tiene $\mu(A) = \mu(M)$ y así $A = M$. Por lo tanto, lím $A_{n_{k_j}} = M$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_j = A_{n_{k_j}}$.

Veamos que la sucesión $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ cumple con la definición de continuo límite máximo fuerte para M en K. Sean $\{M'_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ y $\{B_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que $B_{j_k} \subset M'_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y lím $M'_k = M' \subset K$. Por demostrar que $M = M'$. Como $M_{n_{j_k}} \subset A_{n_{j_k}}$ y $B_{j_k} \subset M'_k$, entonces $\{M'_k\}_{k=1}^{\infty}$ es sucesión en $C(X)$ con $M_{n_{j_k}} \subset M'_k$ y lím $M'_k = M' \subset K$. Por la elección de $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ se tiene que $M' = M$. Por tanto, $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ cumple con la definición de continuo límite máximo fuerte para M en K. ■

Proposición 2.7 *Sean X un continuo y $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces, para cada $(x,t) \in X \times [0,1]$ el conjunto*

$$\bigcup\{E \in C(X) : x \in E \text{ y } \mu(E) \leq t\} \text{ es un subcontinuo de } X.$$

Demostración. Denotemos por $\mathcal{F} = \bigcup\{E \in C(X) : x \in E \text{ y } \mu(E) \leq t\}$. Por el Lema 1.37, para todo $x \in X$ y para todo $t \in [0,1]$ existe $A \in C(X)$ tal que $x \in A$ y $\mu(A) = t$, entonces $A \in \mathcal{F}$ y por tanto $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Veamos que $\mathcal{F}$ es cerrado. Sea $p \in Cl(\mathcal{F})$, entonces existe una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ tal que lím $p_n = p$. Como $p_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $p_n \in E_n$ para algún $E_n \in C(X)$, $x \in E_n$ y $\mu(E_n) \leq t$. Dado que $C(X)$ es compacto (Teorema 1.11), existe una subsucesión $\{E_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que lím $E_{n_k} = E$ para algún $E \in C(X)$. Como lím $p_n = p$, lím $E_{n_k} = E$ y $\{x, p_{n_k}\} \subset E_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces $\{p, x\} \subset E$. Ahora, dado que $\mu(E_{n_k}) \leq t$, para toda $k \in \mathbb{N}$, por continuidad de μ se tiene que lím $\mu(E_{n_k}) = \mu(E)$ por lo que $\mu(E) \leq t$. Esto prueba que $E \in C(X)$, $\{p, x\} \subset E$ y $\mu(E) \leq t$ por lo que $p \in \mathcal{F}$. Así,

$\mathcal{F}$ es cerrado. Finalmente, $\mathcal{F}$ es unión no vacía de conjuntos conexos cuya intersección es no vacía (todos ellos contienen a x) por lo que $\mathcal{F}$ es conexo. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un subcontinuo de X. ■

En base a la Proposición 2.7 podemos dar la siguiente definición.

Definición 2.8 *Sean X un continuo y μ una función de Whitney. Definamos la función $F : X \times [0,1] \longrightarrow C(X)$ como:*

$$F(x,t) = \bigcup\{E \in C(X) : x \in E \text{ y } \mu(E) \leq t\}, \text{ para cada } (x,t) \in X \times [0,1].$$

Podemos observar que el único elemento de $C(X)$ que contiene a x y mide menor o igual que 0 es el conjunto $\{x\}$, por lo que $F(x,0) = \{x\}$, para todo $x \in X$. Como se vió en la Proposición 2.7, $F(x,t)$ es un subcontinuo de X, por lo que $F(x,1) \subset X$. Luego, para cualquier $x \in X$, X contiene a x y $\mu(X) \leq 1$, así $X \subset F(x,1)$, y por tanto $F(x,1) = X$, para todo $x \in X$.

Teorema 2.9 *La función F de la Definición 2.8 es semicontinua superiormente.*

Demostración. Sean $(x,t) \in X \times [0,1]$ y $\{(x_n,t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $X \times [0,1]$ tal que $\lim (x_n,t_n) = (x,t)$. De acuerdo con la Definición 1.24 debemos probar que $\limsup F(x_n,t_n) \subset F(x,t)$. Sea $a \in \limsup F(x_n,t_n)$, entonces existe $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ y existe $a_{n_k} \in F(x_{n_k},t_{n_k})$ tales que $\lim a_{n_k} = a$. Luego, $a_{n_k} \in \bigcup\{E \in C(X) : x_{n_k} \in E$ y $\mu(E) \leq t_{n_k}\}$ por lo que existe $E_{n_k} \in C(X)$ con $x_{n_k} \in E_{n_k}$, $\mu(E_{n_k}) \leq t_{n_k}$ y $a_{n_k} \in E_{n_k}$. Podemos suponer que $\lim E_{n_k} = E$, entonces $a \in E$, $x \in E$ y $\mu(E) \leq t$. Por lo tanto, $a \in F(x,t)$. ■

Proposición 2.10 *Sean X un continuo y $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney. Si $\mathfrak{M}$ es un conjunto cerrado no vacío en $C(X)$, entonces $\mathfrak{M}$ tiene al menos un elemento maximal y un elemento minimal respecto a la contención de conjuntos.*

Demostración. Como μ es continua y $\mathfrak{M}$ es cerrado y no vacío, entonces $\mu(\mathfrak{M})$ es un subconjunto cerrado no vacío de $[0,1]$. Sean $a = \min \mu(\mathfrak{M})$, $b = \max \mu(\mathfrak{M})$, por lo que existen $A, B \in \mathfrak{M}$ tales que $\mu(A) = a$ y $\mu(B) = b$. Veamos que A es minimal en $\mathfrak{M}$. Supongamos que existe $C \in \mathfrak{M}$ tal que $C \subset A$, entonces $\mu(C) \leq \mu(A) = a$ por lo que $\mu(C) = a$ y así $C = A$. Ahora, veamos que B es maximal en $\mathfrak{M}$. Supongamos que existe $D \in \mathfrak{M}$ tal que $B \subset D$, entonces $b = \mu(B) \leq \mu(D)$ por lo que $\mu(D) = b$ y así $D = B$. Por tanto, A es minimal y B es maximal en $\mathfrak{M}$. ■

Proposición 2.11 *Si K es un subcontinuo de un continuo X y $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ que converge a un subcontinuo de K, entonces cada elemento maximal en $C(K) \cap \text{lím sup}\, C(M_n, X)$ es un continuo límite máximo fuerte de K.*

Demostración. Observemos que $C(K) \cap \text{lím sup}\, C(M_n, X)$ es cerrado en $C(K)$ (Teorema 1.11) y el límite de la sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a $C(K) \cap \text{lím sup}\, C(M_n, X)$, es decir, $C(K) \cap \text{lím sup}\, C(M_n, X)$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $C(K)$. Por la Proposición 2.10 existe un elemento maximal. Sea $S \in C(K) \cap \text{lím sup}\, C(M_n, X)$ elemento maximal. Dado que $S \in \text{lím sup}\, C(M_n, X)$ existe $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ y existen $S_{n_j} \in C(M_{n_j}, X)$ tales que $\text{lím}\, S_{n_j} = S$. Por demostrar, que $\{S_{n_j}\}_{i=1}^{\infty}$ cumple con la definición de límite máximo fuerte para S en K. Sea $S' \in C(K)$ tal que existe una sucesión $\{S'_{n_{j_m}}\}_{m=1}^{\infty}$ en $C(X)$ con $S_{n_{j_m}} \subset S'_{n_{j_m}}$, para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}\, S'_{n_{j_m}} = S' \subset K$. Observemos que $S'_{n_{j_m}} \in C(M_{n_{j_m}}, X)$ para toda $m \in \mathbb{N}$, entonces $S' \in \text{lím sup}\, C(M_n, X)$ y $S \subset S'$ así, por maximalidad de S se tiene que $S = S'$. Por lo tanto, S es un continuo límite máximo fuerte de K. ∎

Como ya vimos anteriormente todo subcontinuo es continuo límite máximo fuerte en sí mismo (Observación 2.3), el siguiente resultado nos proporciona una manera de saber que otros continuos pueden ser continuos límites máximos en un subcontinuo de X. Para ver esto usaremos los conjuntos frontera, interior y cerradura de un conjunto, estas definiciones se pueden encontrar en [3] así como los resultados: $int(E)$ es un subconjunto abierto de X, $int(E) \subset E$ y $Cl(E) = fr(E) \mathring{\cup}\, int(E)$ que se usarán en la siguiente Proposición y en la demostración de la Observación 2.13.

Proposición 2.12 *Sea X un continuo. Si A y K son subcontinuos de X tales que $A \subsetneq K$ y $A \cap int(K) \neq \emptyset$, entonces A no es un continuo límite máximo de K.*

Demostración. Sea $\{A\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $\text{lím}\, A_n = A$. Sean $a \in A \cap int(K)$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}\, a_n = a$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in int(K)$ para todo $n \geq N$ y así $a_n \in K$ para todo $n \geq N$. Consideremos la sucesión $\{A_n \cup K\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$, entonces $A_n \subset A_n \cup K$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}\, A_n \cup K = K$ pero $A \neq K$ por lo que A no es continuo límite máximo de K. ∎

Observación 2.13 Si K es un subcontinuo de un continuo X, entonces $K = fr(K) \mathring{\cup}\, int(K)$. Así, de la Proposición 2.12, si A es continuo límite máximo de K se tiene que $A \subset fr(K)$.

2.2 Continuos de Kelley

Definición, ejemplos y algunos resultados

En esta sección presentaremos la noción de la propiedad de Kelley, que se define en todos los puntos de un continuo. Así mismo, veremos algunos resultados básicos sobre esta propiedad, además de una versión local de ella. Esta noción fue introducida en 1942 por John L. Kelley en [12]. En dicho trabajo, la propiedad de Kelley se estableció como la "property 3.2". Algunos otros artículos hacen referencia a dicha propiedad como J. L. Kelley o propiedad [K].

Definición 2.14 *Sea X un continuo. Decimos que X tiene la* **propiedad de Kelley**, *si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualesquiera dos puntos a y b de X con $d(a,b) < \delta(\varepsilon)$ y para cada subcontinuo A de X que contenga al punto a, existe un subcontinuo B de X tal que $b \in B$ y $H(A,B) < \varepsilon$. Diremos que X es un* **continuo de Kelley** *si posee esta propiedad.*

Lo que informalmente nos dice la definición anterior es que si un punto se encuentra en un subcontinuo dado, entonces cualquier otro punto cercano a él, también se encuentra en un subcontinuo que está cercano al subcontinuo dado. En otras palabras, la propiedad de Kelley establece una cierta preservación de cercanía entre puntos y subcontinuos.

En 1977, Roger W. Wardle hizo un estudio sistemático sobre la propiedad de Kelley en el cual consideró la siguiente versión puntual, [18].

Definición 2.15 *Sea X un continuo. Decimos que X tiene la* **propiedad de Kelley en un punto a** $\in X$, *si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ tal que si $b \in X$ con $d(a,b) < \delta$ y para cada subcontinuo A de X que contenga al punto a, existe un subcontinuo B de X tal que $b \in B$ y $H(A,B) < \varepsilon$.*

Lo que uno espera de las definiciones anteriores, es que la propiedad de Kelley dada puntualmente sea equivalente a la propiedad de Kelley. Este resultado es cierto y fue comentado sin demostración por Roger W. Wardle en [18, págs. 291 y 292].

Teorema 2.16 *[1, Teorema 2.6, pág. 49] Un continuo X es de Kelley si y solo si X tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos.*

Para determinar si un continuo tiene la propiedad de Kelley, en ocasiones es más conveniente utilizar la siguiente equivalencia con sucesiones. Es por ello que primero presentaremos este resultado para después mostrar un par de ejemplos.

Proposición 2.17 *Sea X un continuo. Son equivalentes:*

(1) *El continuo X tiene la propiedad de Kelley.*

(2) *Para todo $a \in X$, para todo $A \in C(a, X)$ y para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X con $\lim a_n = a$, existe $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim A_n = A$.*

(3) *Para todo $a \in X$, para todo $A \in C(a, X)$ y para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X con $\lim a_n = a$, existe $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y existe $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $a_{n_k} \in A_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\lim A_k = A$.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sean $a \in X$, $A \in C(a, X)$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X tales que $\lim a_n = a$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $A_n \in C(a_n, X)$ tal que

$$H(A, A_n) = \min\{H(A, B) : B \in C(a_n, X)\}.$$

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $C(a_n, X)$ es compacto en $C(X)$ (Proposición 1.13) y tenemos por tanto que el mínimo entre el punto $A \in C(X)$ y este conjunto existe. Además, A_n se escoge en $C(a_n, X)$ por lo que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación: $\lim A_n = A$.

Prueba de Afirmación. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim a_n = a$ para $\delta(\varepsilon) > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(a, a_n) < \delta(\varepsilon)$ y para cada $n \geqslant N$, existe $B_n \in C(a_n, X)$ tal que $H(A, B_n) < \varepsilon$. De acuerdo a la propiedad de como elegimos A_n resulta que $H(A, A_n) \leqslant H(A, B_n) < \varepsilon$, para todo $n \geqslant N$. Así, $\lim A_n = A$. $\square$

(2) $\Rightarrow$ (3) Se sigue inmediatamente tomando la subsucesión como la sucesión de la hipótesis.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que X no tiene la propiedad de Kelley. Entonces,

($*$) Existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $a_n, b_n \in X$ con

$d(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$, y existe $A_n \in C(a_n, X)$ tal que para todo $B \in C(b_n, X)$ se tiene que $H(A_n, B) \geqslant \varepsilon$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que existen $A \in C(X)$ y $a \in X$ tales que $\lim A_n = A$ y $\lim a_n = a$. Dado que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Corolario 1.20 se tiene que $a \in A$. Notemos que $\lim b_n = a$ ya que $d(b_n, a) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b_n) < d(a, a_n) + \frac{1}{n}$. Por hipótesis, existe una subsucesión $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y existe una sucesión $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $b_{n_k} \in B_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\lim B_k = A$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geqslant N$ y para todo $n \geq N$, $H(b_k, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq N$ y $n_k \geq N$, se tiene que $d(a_{n_k}, a_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$, $B_k \in C(b_{n_k}, X)$ y $H(A_{n_k}, B_{n_k}) \leq H(A_{n_k}, A) + H(A, B_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ lo cual contradice $(*)$. Por tanto, X tiene la propiedad de Kelley. ■

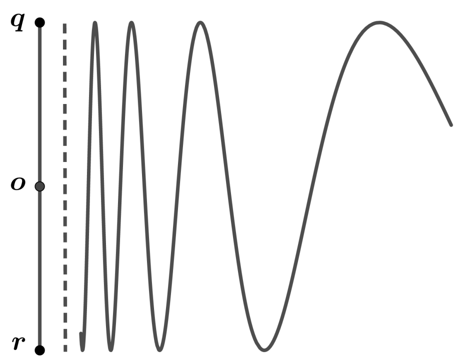


Figura 2.3: Continuo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$.

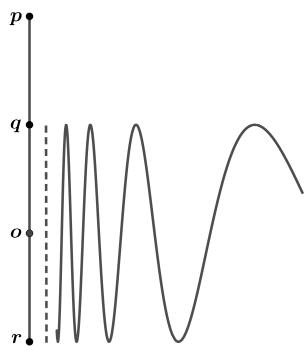


Figura 2.4: Continuo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ con pata alargada.

Ejemplo 2.18 (Continuo con la propiedad de Kelley) Sea $Y = J \cup R$, donde:

$$J = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\} \text{ y}$$

$$R = \{(x, \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\}.$$

Al continuo Y se le conoce como continuo $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ (Figura 2.3). Sean las funciones proyección $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\pi_1(x, y) = x$ y $\pi_2(x, y) = y$. Definamos los conjuntos

$$R_z = \{(x, \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, z]\}, \text{ para } z \in (0, 1] \text{ y}$$

$$\alpha_t^z = \{(x, \ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [t, z], t \leq z\}, \text{ para } t, z \in (0, 1].$$

Observemos que $R_z \subset R$ y α_t^z es homeomorfo a un arco contenido en R o a un punto, donde un arco es cualquier espacio topológico homeomorfo al intervalo

$[0, 1]$. Sean $q = (0, 1)$ y $r = (0, -1)$.

Veamos que Y es un continuo de Kelley. Sea $x \in Y$ y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en Y tal que $\lim x_n = x$. Sea $K \in C(x, Y)$.

Caso 1: Si $x \in Y - J$. Denotemos $t = \pi_1(x)$ y $z_n = \pi_1(x_n)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $t \leq z_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $K_n = K \cup \alpha_t^{z_n}$, es decir, K_n es la unión de K y el arco que une a x_n con x. Entonces $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(Y)$ con $x_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim K_n = K$.

Caso 2: Si $x \in J$, consideramos dos casos:

(2.1) Si $J \subset K$; Para $x_n \in R$ denotamos $z_n = \pi_1(x_n)$, y consideramos $K_n = K \cup R_{z_n}$. Para $x_n \in J$, consideramos $K_n = K$. Entonces $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(Y)$ con $x_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim K_n = K$.

(2.2) Si $K \subsetneq J$; Observemos que $K = q'r'$ para algún $q' \in qr - \{q\}$ y $r' \in qr - \{r\}$. Para $x_n \in R$, sean $\{q_n = (\frac{2}{(4n+1)\pi}, \operatorname{sen}(\frac{(4n+1)\pi}{2}))\}$ y $\{r_n = (\frac{2}{(4n+3)\pi}, \operatorname{sen}(\frac{(4n+3)\pi}{2}))\}$; existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in q_{n_j} r_{n_j}$ o $x_n \in q_{n_j} r_{n_j - 1}$. Tomemos q'_n y r'_n puntos en el segmento $q_{n_j} r_{n_j}$ o en el segmento $q_{n_j} r_{n_j - 1}$ según sea el caso tales que $x_n \in q'_n r'_n$, $\pi_2(q'_n) = \pi_2(q')$ y $\pi_2(r'_n) = \pi_y(r')$, observemos que $\lim q'_n = q'$ y $\lim r'_n = r'$. Consideremos así $K_n = q'_n r'_n$. Si $x_n \in J$ consideramos $K_n = K$. Así, $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(Y)$ con $x_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim K_n = K$.

Por lo tanto, de la Proposición 2.17 se tiene que Y es un continuo con la propiedad de Kelley.

En la Figura 2.5 se muestra otros ejemplos de continuos que tienen la propiedad de Kelley.

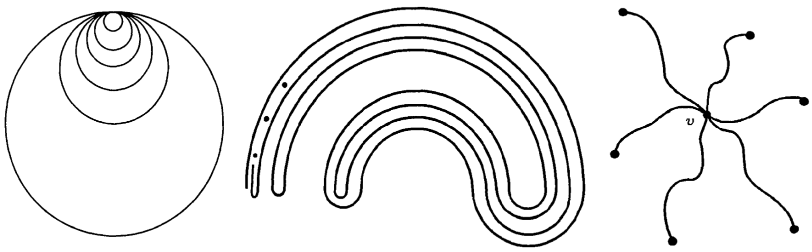


Figura 2.5: Continuos con la propiedad de Kelley.

Decimos que un rayo es un espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0, \infty)$. Una compactación de un espacio Y es un espacio Hausdorff y compacto X que contiene un subespacio denso homeomorfo a Y. Si X es una compactación de Y y Y' es un subespacio denso de X homeomorfo a Y, entonces $X - Y'$ es llamado el residuo de la compactación.

Lema 2.19 *[2, Lema 6.1, pág. 158] Sea X una compactación de $R = [0, \infty)$. Sea $S = X - R$ el residuo de X. Entonces cada subcontinuo A de X satisface una de las siguientes condiciones:*

(1) *A es subcontinuo de S.*

(2) *$A = S \cup [a, \infty)$ para algún $a \in R$.*

(3) *A es un subintervalo cerrado de R.*

El siguiente Lema nos permite verificar que para una compactación del rayo con residuo un continuo con la propiedad de Kelley tener la propiedad ($\bigstar$) es suficiente para que sea un continuo con la propiedad de Kelley.

Propiedad ($\bigstar$) : Sea Y un continuo con la propiedad de Kelley y sea $X = Y \cup R$ una compactación de $R = [0, \infty)$ con residuo Y. Para cualquier $p \in Y$, cualquier subcontinuo propio K de Y que contenga a p, y cualquier sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en R tal que $\lim p_n = p$, existe una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de R tal que $p_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim K_n = K$.

Lema 2.20 *Sea Y un continuo de Kelley y sea $X = Y \cup R$ una compactación del rayo con residuo Y. Entonces X es un continuo con la propiedad de Kelley si y solo si X satisface la* propiedad ($\bigstar$).

Demostración. Notemos que si X tiene la propiedad de Kelley se deduce de la Proposición 2.17 que X tiene la Propiedad ($\bigstar$). Ahora, supongamos que X satisface la Propiedad ($\bigstar$). Sean $p \in X$, $K \in C(p, X)$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en X tal que $\lim p_n = p$.

Consideramos los siguientes casos:

Caso 1: Supongamos que $p \in R$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $K_n = K \cup pp_n$. Observemos que $p_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim K_n = K$.

Caso 2: Supongamos que $p \in Y$ y que $Y \subset K$;

(a) Si $Y \subsetneq K$, entonces $p \in int(K)$, por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in int(K)$, para toda $n \geqslant N$. Así, definimos $K_n = K$, para toda $n \geqslant N$.

(*b*) Si $Y = K$, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n = \begin{cases} Y \cup [p_n, \infty) & \text{si} \quad p_n \in [0, \infty) \\ Y & \text{si} \quad p_n \in Y. \end{cases}$$

Caso 3: Supongamos que $p \in Y$ y que K es un subcontinuo propio de Y.

(*a*) Si todos los puntos de la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ excepto finitos puntos están en Y. Entonces existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant M$, $p_n \in Y$, por lo que definimos $K_n = X$, para cada $n < M$. Como $\{p_n\}_{n=M}^{\infty}$ es una sucesión contenida en Y que converge a p y Y tiene la propiedad de Kelley, existen $K_n \in C(Y)$ tales que $p_n \in K_n$ y $\lim K_n = K$, para cada $n \geqslant M$. Así, $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos de X tal que $p_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim K_n = K$.

(*b*) Si todos los puntos de la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ excepto finitos puntos están en R. Entonces existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant M$, $p_n \in R$, por lo que definimos $K_n = X$, para cada $n < M$. Como $\{p_n\}_{n=M}^{\infty}$ es una sucesión contenida en R que converge a p y X tiene la propiedad ($\bigstar$), existen $K_n \in C(R)$ tales que $p_n \in K_n$ y $\lim K_n = K$, para cada $n \geqslant M$. Así, $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos de X tal que $p_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim K_n = K$.

(*c*) Si infinitos puntos de la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ están en Y e infinitos puntos están en R, entonces como Y tiene la propiedad de Kelley existe una sucesión de subcontinuos de Y que contienen a la subsucesión de $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en Y. Por otra parte, como X tiene la propiedad ($\bigstar$) existe una sucesión de subcontinuos de R que continene a la subsucesión de $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en R. Tomamos la unión de las dos sucesiones de subcontinuos así obtenidas, obteniendo la sucesión de subcontinuos deseada. ∎

Lema 2.21 *[13, Lema 2.5, pág. 517] Sea X una compactación de un rayo con residuo un arco. Si X tiene la propiedad de Kelley, entonces X es homeomorfo al continuo sen$(\frac{1}{x})$ (e inversamente).*

Ejemplo 2.22 (Continuo que no tiene la propiedad de Kelley) Sea $X = Y \cup Z$, donde Y es el continuo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ y $Z = pq$, (veáse la Figura 2.4).

Veamos que X no es un continuo de Kelley. Sea $K = pq$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $q_n = (\frac{2}{(4n+1)\pi}, \operatorname{sen}(\frac{(4n+1)\pi}{2}))$, entonces $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ tal que $\lim q_n = q$. Sin embargo no es posible encontrar una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $q_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim K_n = K$.

Otros ejemplos de continuos que no tienen la propiedad de Kelley se ven en la Figura 2.6.

Figura 2.6: Continuos que no tienen la propiedad de Kelley.

Existen varias clases de continuos que tiene la propiedad de Kelley, una de estas clases fue dada por John L. Kelley la cual se involucra con la conexidad local.

Teorema 2.23 *Si X es un continuo localmente conexo en $a \in X$, entonces X tiene la propiedad de Kelley en a.*

Demostración. Sean $a \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como X es localmente conexo en a, existe V abierto y conexo de X tal que $a \in V \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$. Dado que V es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subset V$. Sean $b \in B_\delta(a)$ y $A \in C(X)$ con $a \in A$. Veamos que existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H(A, B) < \varepsilon$. Sea $B = Cl(V) \cup A$. Notemos que $Cl(V)$ y A son subcontinuos de X que contienen al punto a, por lo que $B \in C(X)$ y además $b \in B$. Como $A \subset B$ y $B \subset N_\varepsilon(B)$, entonces $A \subset N_\varepsilon(B)$. Por otra parte, veamos que $Cl(V) \subset B_\varepsilon(a)$. Sea $x \in Cl(V)$, entonces $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap V \neq \emptyset$. Sea $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap V$. Como $V \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) = N_{\frac{\varepsilon}{2}}(\{a\})$ existe $z \in \{a\}$ tal que $d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon$ por lo que $x \in N_\varepsilon(\{a\}) = B_\varepsilon(a)$, así $Cl(V) \subset B_\varepsilon(a)$. Por lo tanto, $B = Cl(V) \cup A \subset B_\varepsilon(a) \cup A \subset N_\varepsilon(A)$, es decir, $B \subset N_\varepsilon(A)$. Así, por el Teorema 1.7 se tiene que $H(A, B) < \varepsilon$. ■

Corolario 2.24 *Si X es un continuo localmente conexo, entonces X tiene la propiedad de Kelley.*

El siguiente teorema muestra que los homeomorfismos preservan la propiedad de Kelley, en su versión local y como consecuencia se tiene que la propiedad de Kelley es un invariante topológico.

Teorema 2.25 *Sean X, Y continuos y $h : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Si X tiene la propiedad de Kelley en $a \in X$, entonces Y es un continuo con la propiedad de Kelley en $h(a)$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $Q \in C(Y)$ tal que $h(a) \in Q$. Debemos demostrar:

($*$) Existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B_\delta(h(a))$ existe $L \in C(y, Y)$ tal que $H(Q, L) < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que la función inducida $C(h)$ cumple la condición de continuidad uniforme para $\varepsilon > 0$ (Observación 1.29). Como X tiene la propiedad de Kelley en a, existe $\delta_0 > 0$ tal que si $b \in B_{\delta_0}(a)$ y $A \in C(a, X)$, entonces existe $B \in C(b, X)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon_0$. Dado que h es abierta se tiene que $h[B_{\delta_0}(a)]$ es un abierto que contiene a $h(a)$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(h(a)) \subset h[B_{\delta_0}(a)]$. Sean $y \in B_\delta(h(a))$ y $b \in B_{\delta_0}(a)$ tales que $h(b) = y$. Denotemos por A a la componente de $h^{-1}(Q)$ tal que $a \in A$. Por el Teorema 1.27, $h[A] = Q$. Existe $B \in C(b, X)$ tal que $H(A, B) < \varepsilon_0$. Consideremos $L = h[B]$, entonces L es un subcontinuo de Y que contiene al punto y. Por la elección de ε_0 se tiene que $H(Q, L) = H(h[A], h[B]) = H(C(h)(A), C(h)(B)) < \varepsilon$. Así, Y tiene la propiedad de Kelley en $h(a)$. ∎

Podemos observar que en la demostración del Teorema 2.25 solo usamos que la función h fuera abierta y por tanto confluente, así que es suficiente pedir esta última condición. Es decir, la propiedad de Kelley se preserva bajo funciones confluentes.

El siguiente resultado caracteriza a los continuos que tienen la propiedad de Kelley en términos de las Definiciones 2.1 y 2.2.

Teorema 2.26 *Sea X un continuo. Son equivalentes:*

(1) *X tiene la propiedad de Kelley.*

(2) *Para cada $K \in C(X)$, el único continuo límite máximo en K es K.*

(3) *Para cada $K \in C(X)$, el único continuo límite máximo fuerte en K es K.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $K \in C(X)$. Como ya vimos K es continuo límite máximo en sí mismo. Veamos que cualquier otro subcontinuo propio de K no es continuo límite máximo de K. Sea $A \in C(K)$ tal que $A \subsetneq K$ y sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$. Sean $a \in A$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X tal que $a_n \in A_n$ y $\lim a_n = a$. Como $K \in C(a, X)$, existe $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $a_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim K_n = K$. Observemos que $a_n \in A_n \cap K_n$, entonces $\{A_n \cup K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es

una sucesión en $C(X)$ con $A_n \subset A_n \cup K_n$ y $\lim A_n \cup K = A \cup K = K$ pero $A \neq K$. Por tanto, A no es continuo límite máximo de K.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea A un continuo límite máximo fuerte de K, entonces A es un continuo límite máximo de K y por hipótesis $A = K$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sean $a \in X$, $K \in C(a, X)$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X tales que $\lim a_n = a$. Observemos que $a \in C(K) \cap \limsup C(a_n, X)$ por lo que esta intersección es cerrada y no vacía. Por la Proposición 2.10, existe $A \in C(K) \cap \limsup C(a_n, X)$ elemento maximal y por la Proposición 2.11, A es un continuo límite máximo fuerte de K. Así, por hipótesis $A = K$ y en consecuencia $K \in \limsup C(a_n, X)$, es decir, existe $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ y existen $K_j \in C(a_{n_j}, X)$ tales que $\lim K_j = K$ y por la Proposición 2.17 se tiene que X es de Kelley. ■

Teorema principal

Lema 2.27 *Si X es un continuo que no tiene la propiedad de Kelley, entonces X contiene un subcontinuo que tiene un continuo límite máximo fuerte propio y no degenerado.*

Demostración. Sea X un continuo que no es Kelley. Por el Teorema 2.26, existen $K \in C(X)$ y $A \in C(K)$ tales que $A \neq K$ y A es un continuo límite máximo fuerte en K. Si A es no degenerado se termina la prueba. Supongamos entonces que $A = \{p\}$, para algún $p \in K$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$ y que cumple con las condiciones de la definición de límite máximo fuerte. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $p_n \in A_n$ tal que $\lim p_n = p$.

Afirmación 1. Como A es un continuo límite máximo fuerte de K se tiene que $K \notin \limsup C(p_n, X)$.

Prueba de Afirmación 1. Supongamos que $K \in \limsup C(p_n, X)$, entonces existe $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ y existen $E_{n_j} \in C(p_{n_j}, X)$ tales que $\lim E_{n_j} = K$. Dado que $p_{n_j} \in E_{n_j} \cap A_{n_j}$, entonces $\{E_{n_j} \cup A_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ con $A_{n_j} \subset E_{n_j} \cup A_{n_j}$, para cada $j \in \mathbb{N}$ y $\lim E_{n_j} \cup A_{n_j} = K \cup \{p\} = K$. Por la elección de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ se tiene que $K = \{p\}$ lo cual contradice que $A \neq K$. □

Sean $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney y $F : X \times [0, 1] \longrightarrow C(X)$ la función dada como en la Definición 2.8, es decir, $F(x, t) = \cup\{E \in C(X) : x \in E \text{ y } \mu(E) \leq t\}$, para cada $(x, t) \in X \times [0, 1]$. Sea $\mathcal{U}$ un abierto en $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \cap \limsup C(p_n, X) = \emptyset$.

Afirmación 2.

(a) Existe $t_1 > 0$ tal que si $E \in C(p, X)$ y $\mu(E) \leq t_1$, entonces $K \cup E \in \mathcal{U}$.

(b) Existe $s > 0$ tal que si $s < t_1$, y para toda $y \in X$ se tiene $\mu(F(y, s)) < t_1$.

Prueba de Afirmación 2.

(a) Supongamos que t_1 no existe, así para toda $n \in \mathbb{N}$ sea $t_n \in (0, \mu(K))$ tal que $\lim t_n = 0$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $H_n \in C(X)$, $p \in H_n$, $\mu(H_n) \leq t_n$ y $K \cup H_n \in C(X) - \mathcal{U}$. Supongamos que $\lim H_n = H \in C(X)$, entonces $p \in H$ y $\mu(H) = 0$, es decir, $H = \{p\}$ por lo que $\lim K \cup H_n = K \cup H = K \cup \{p\} = K$ lo cual implica que $K \in C(X) - \mathcal{U}$ pero esta es una contradicción ya que $K \in \mathcal{U}$.

(b) Supongamos que tal número no existe, entonces para todo $s > 0$ tal que $s < t_1$ existe $y \in X$ con $\mu(F(y, s)) \geqslant t_1$. Entonces, para $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < t_1$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $s_n = \frac{1}{n}$, por lo que existe $y_n \in X$ con $\mu(F(y_n, s_n)) \geqslant t_1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos $\lim y_n = y \in X$. Sea $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 2.9, F es semicontinua superiormente en $(y, 0)$, entonces existen V vecindad de y y $\delta > 0$ tales que para todo $(z, t) \in V \times (0, \delta)$ se tiene $F(z, t) \subset N_\varepsilon(F(y, 0)) = N_\varepsilon(\{y\})$. Luego, por la convergencia de $\{(y_n, s_n)\}_{n=1}^{\infty}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geqslant N$, $(y_n, \frac{1}{n}) \in V \times (0, \delta)$ por lo que $F(y_n, \frac{1}{n}) \subset N_\varepsilon(\{y\})$ además, podemos suponer que $\{y\} \subset N_\varepsilon(F(y_n, \frac{1}{n}))$. Así, para toda $n \geqslant N$, $\lim F(y_n, \frac{1}{n}) = \{y\}$ y $F(y_n, \frac{1}{n}) \in B_\varepsilon^H(\{y\})$, por la continuidad de μ se tiene $\lim \mu(F(y_n, \frac{1}{n})) = \mu(F(y, 0))$ pero $\mu(F(y_n, \frac{1}{n})) \geqslant t_1 > 0$ y $\mu(F(y, 0)) = 0$ lo cual es una contradicción. □

Sea $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{F(p_{n_k}, s)\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente. Sea $L \in C(p, X)$ tal que $L = \lim F(p_{n_k}, s)$. Como $\mu(F(p_{n_k}, s)) \geqslant s$, entonces $\mu(L) \geqslant s > 0$ y por tanto L es un subcontinuo no degenerado. Además, $\mu(F(p_{n_k}, s)) < t_0$ y por la Afirmación 2 (a) se tiene $K \cup L \in \mathcal{U}$. Observemos que $L \in \limsup C(p_n, X)$. Sea $K^* = K \cup L$, es claro que $K^* \in C(X)$, $L \in C(K^*)$. Notemos que $C(K^*) \cap \limsup C(p_n, X) \cap C(L, X)$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $C(X)$ (pues cada subconjunto de la intersección es cerrado y L pertenece a esta intersección), entonces podemos considerar su elemento maximal respecto a la inclusión de conjuntos. Sea M este elemento maximal.

Veamos que M es un continuo límite máximo fuerte propio y no degenerado en K^*. Dado que $M \in \limsup C(p_n, X)$, entonces $M \notin \mathcal{U}$ y como $K^* \in \mathcal{U}$ se tiene que $M \neq K^*$, es decir, M es propio. Luego, $M \in C(L, X)$ por lo que $L \subset M$ y como L es un subcontinuo no degenerado, entonces M es no degenerado. Finalmente, M es un elemento maximal en $C(K^*) \cap \text{lím sup}\, C(p_n, X)$ así, por la Proposición 2.11, M es un continuo límite máximo fuerte en K^*. ■

El siguiente Teorema se encuentra demostrado en [9, Teorema 50.4, pág. 277] y a continuación daremos una prueba distinta usando el Lema 2.27.

Teorema 2.28 *La propiedad de Kelley es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney.*

Demostración. Sea X un continuo. Supongamos que X no tiene la propiedad de Kelley. Por el Lema 2.27, existe un subcontinuo K de X y existe M un continuo límite máximo fuerte propio y no degenerado de K. Sea $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney. Definamos $m = \mu(M)$ y notemos que $0 < m < \mu(K)$. Sea $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tal que $\text{lím}\, t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ tiene la propiedad de Kelley, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por convergencia de $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_N \in (0, m)$. Definamos $\mathcal{K} = C(K) \cap \mu^{-1}(t_N)$. Por la Proposición 1.41 y el Teorema 1.48, $\mathcal{K}$ es un continuo y $\mathcal{K} \subset \mu^{-1}(t_N)$. Por otra parte, M es continuo límite máximo fuerte en K así por el Lema 2.6, existe una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\mu(M_n) = \mu(M)$, $\text{lím}\, M_n = M$ y que cumple con la definición de continuo límite máximo para M en K.

Definamos $\mathcal{M}_n = C(M_n) \cap \mu^{-1}(t_N)$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_n \neq \emptyset$ y $\mathcal{M}_n \in C(\mu^{-1}(t_N))$. Podemos suponer que $\text{lím}\, \mathcal{M}_n = \mathcal{M}$, para algún $\mathcal{M} \in C(\mu^{-1}(t_N))$ (Por compacidad de $C(\mu^{-1}(t_N))$).

Como $\mathcal{M}_n = C(M_n) \cap \mu^{-1}(t_N)$, entonces $\mathcal{M}_n \subset C(M_n)$. Por la Proposición 1.41, $\bigcup \mathcal{M}_n = M_n$. Por continuidad de la función unión (Lema 1.23) y dado que $\text{lím}\, \mathcal{M}_n = \mathcal{M}$ y $\text{lím}\, M_n = M$ se tiene que $\bigcup \mathcal{M} = M$. Ahora, sea $A \in \mathcal{M}$, entonces $A \in \bigcup \mathcal{M} = M$ por lo que $A \subset M$, así $A \in C(M)$ y por tanto $\mathcal{M} \subset C(M)$, es decir, $\mathcal{M} \subset C(M) \cap \mu^{-1}(t_N)$. Además, $M \subset K$ por lo que $C(M) \cap \mu^{-1}(t_N) \subset C(K) \cap \mu^{-1}(t_N)$. Así, $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$.

Sea $\mathcal{R} \in C(\mathcal{K}) \cap \text{lím sup}\, C(\mathcal{M}_n, \mu^{-1}(t_N))$ elemento maximal respecto a la inclusión de conjuntos. Por la Proposición 2.11, $\mathcal{R}$ es continuo límite máximo fuerte en $\mathcal{K}$. Si $\mathcal{R} = \mathcal{K}$, existe $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ y existen $\mathcal{A}_j \in C(\mathcal{M}_{n_j}, \mu^{-1}(t_N))$ tales que $\text{lím}\, \mathcal{A}_j = \mathcal{K}$, entonces $\mathcal{M}_{n_j} \subset \mathcal{A}_j$. Note que $M_{n_j} = \bigcup \mathcal{M}_{n_j} \subset \bigcup \mathcal{A}_j = \bigcup \mathcal{K} = K$ (Proposición 1.41) lo que contradice que $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumpla con la definición de continuo límite máximo fuerte para M en K y por tanto $\mathcal{R} \neq \mathcal{K}$, es decir, $\mathcal{R}$ es un continuo límite máximo fuerte propio en $\mathcal{K}$ lo cual es una contradicción pues $\mathcal{K}$ tiene la propiedad de Kelley y por la Proposición 2.26, $\mathcal{K}$ es el único continuo límite máximo fuerte en sí mismo. Por tanto, X tiene la propiedad de Kelley. ■

Corolario 2.29 *Sea X un continuo, entonces la propiedad de Kelley es:*

(1) *Una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney.*

(2) *Una propiedad fuerte reversible de Whitney.*

(3) *Una propiedad reversible de Whitney.*

Teorema 2.30 *[6, Teorema 1, pág. 342] Existe un continuo X con las siguientes propiedades:*

(1) *X tiene la propiedad de Kelley.*

(2) *Para cada función de Whitney $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ existe un número $\delta > 0$ tal que, para cada $t \in (0,\delta)$, el nivel $\mu^{-1}(t)$ no tiene la propiedad de Kelley.*

Corolario 2.31 *La propiedad de Kelley no es una propiedad de Whitney.*

El siguiente ejemplo es el continuo considerado en el Teorema 2.30.

Ejemplo 2.32 En coordenadas polares (r,θ) en el plano consideramos los cículos:

$$\mathbb{S} = \{(r,\theta) : r = 1\},$$
$$\mathbb{S}_n = \{(r,\theta) : r = 1 + \frac{1}{2\pi n}\}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

y las espirales:

$$\Sigma_1 = \{(r,\theta) : r = 1 + \frac{1}{\theta} \text{ y } \theta \in [1,\infty)\},$$
$$\Sigma_2 = \{(r,\theta) : r = 1 - \frac{1}{\theta} \text{ y } \theta \in [1,\infty)\}.$$

Definimos $X = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \mathbb{S} \cup (\bigcup\{\mathbb{S}_n : n \in \mathbb{N}\})$, (veáse la Figura 2.7).

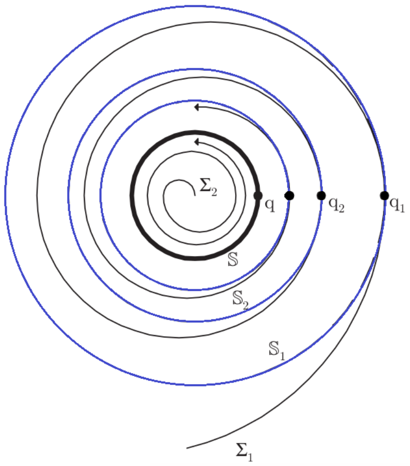


Figura 2.7: X.

2.3 Continuos semi-Kelley

Definición, ejemplos y algunos resultados

La propiedad de semi-Kelley es una forma más débil de la propiedad de Kelley, esta propiedad ha sido introducida y estudiada en 1998 por Wlodzimierz J. Charatonik y Janusz J. Charatonik, [6].

Definición 2.33 *Un continuo X es* **semi-Kelley** *siempre que para cada subcontinuo K y cualquiera dos continuos límites máximos M y N de K, se tiene que $M \subset N$ o $N \subset M$.*

Observación 2.34 Si un continuo tiene la propiedad de Kelley, entonces es semi-Kelley.

La implicación inversa de la Observación 2.34 no se cumple, ya que el continuo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ con pata alargada (Figura 2.4) es semi-Kelley (Ejemplo 2.35), mientras que no tienen la propiedad de Kelley (Ejemplo 2.22).

Ejemplo 2.35 (Continuo semi-Kelley): Sean π_1, π_2 y X como en el Ejemplo 2.22. Sean $p = (0, 2)$, $q = (0, 1)$ y $r = (0, -1)$. Definamos el conjunto

$$R_z = \{(x,\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, z]\} \text{ para } z \in (0, 1].$$

Veamos que X es un continuo semi-Kelley. Sea $K \in C(X)$ y denotemos por $\mathbb{M}(K) = \{A \in C(X) :\ \text{A es continuo límite máximo de } K\}$. Se tiene que

$\{K\} \subset \mathbb{M}(K)$.

Caso 1: Si $q \in X - K$;

(1.1) $K \subset Y - \{q\}$; sea $A \subsetneq K$ y sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$. Sean $a \in A$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim a_n = a$. Como Y tiene la propiedad de Kelley (Ejemplo 2.18), existe $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(Y)$ tal que $a_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim K_n = K$. Consideremos la sucesión $\{A_n \cup K_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$, entonces $A_n \subset A_n \cup K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim A_n \cup K_n = K \subset K$ pero $A \neq K$ por lo que A no es continuo límite máximo de K. Así, $\mathbb{M}(K) = \{K\}$.

(1.2) $K \subset Z - \{q\}$; sea $A \subsetneq K$ y sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$. Sean $a \in A$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en X tales que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim a_n = a$. Dado que los arcos son localmente conexos, entonces Z es localmente conexo y por el Corolario 2.24, Z tiene la propiedad de Kelley. Entonces existe $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(Z)$ tal que $a_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim K_n = K$. Consideremos la sucesión $\{A_n \cup K_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$, entonces $A_n \subset A_n \cup K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim A_n \cup K_n = K$ pero $A \neq K$ por lo que A no es continuo límite máximo de K. Así, $\mathbb{M}(K) = \{K\}$.

Así, en este caso probamos que $\mathbb{M}(K) = \{K\}$ y por tanto se cumple la condición de semi-Kelley.

Caso 2: Si $q \in K$; para el análisis de este caso usaremos la Observación 2.12, es decir, si A es continuo límite máximo de K se tiene que $A \subset fr(K)$.

(2.1) $r \in K$;

(a) Sea $K = sr \cup R_z$ con $s \in pq - \{p\}$ y $z \in (0,1)$. Entonces $fr(K) = \{s, z\}$. Veamos que $A = \{s\} \notin \mathbb{M}(K)$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$. Si $A_n \subset R$, sea $B_n = sr \cup R_{q_n}$ donde $q_n = \max(\pi_1(A_n))$. Si $A_n \subset pr$, sea $B_n = s_n r$ donde $s_n = (0, \max(\pi_2(A_n)))$. Entonces $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es sucesión en $C(X)$ con $A_n \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim B_n = sr \subset K$ pero $sr \neq A$. Para cuando $z = 1$, $fr(K) = \{s\}$ y similarmente a lo anterior se tiene $\{s\} \notin \mathbb{M}(K)$.
Ahora, veamos que $A = \{z\} \notin \mathbb{M}(K)$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$. Consideremos $B_n = sr \cup R_{z_n}$ donde $z_n = \max(\pi_1(A_n))$. Entonces $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es sucesión en $C(X)$ con $A_n \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim B_n = K \subset K$ pero $K \neq A$.

Para cuando $s = p$, $fr(K) = \{z\}$ y similarmente a lo anterior se tiene $\{z\} \notin \mathbb{M}(K)$.

(b) Sea $K = J$, entonces $fr(K) = J$. Sean $A \subsetneq K$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$. Si $q \notin A$ como en (1.1) se prueba que $A \notin \mathbb{M}(K)$. Ahora, si $q \in A$ para $A_n \subset R$, sea $B_n = J \cup R_{q_n}$ donde $q_n = \max(\pi_1(A_n))$. Para $A_n \subset pr$, sea $B_n = q_n' r$ donde $q_n' = (0, \max(\pi_2(A_n)))$. Entonces $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es sucesión en $C(X)$ con $A_n \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim B_n = J \subset K$ pero $J \neq A$ por lo que $A \notin \mathbb{M}(K)$.

(c) Sea $K = sr$ con $s \in pq - \{q\}$. Entonces $fr(K) = \{s\} \cup qr$. Para $A = \{s\}$ como en (a) se tiene que $A \notin \mathbb{M}(K)$. Ahora, sea $A \subset qr$ y sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$. Si $A_n \subset R$, sea $B_n = sr \cup R_{x_n}$ donde $x_n = \max(\pi_1(A_n))$. Si $A_n \subset pr$, sea $B_n = x_n' r \cup sr$ donde $x_n' = (0, \max(\pi_2(A_n)))$. Entonces $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es sucesión en $C(X)$ con $A_n \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim B_n = sr \subset K$ pero $sr \neq A$ por lo que $A \notin \mathbb{M}(K)$.

Por tanto, en este subcaso (2.1) probamos que $\mathbb{M}(K) = \{K\}$ cumpliendose la condición de semi-Kelley.

(2.2) $r \in X - K$;

(a) Sea $K = qs$ con $s \in J - \{r, q\}$. Entonces $fr(K) = qs$. Sean $A \subsetneq K$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$. Si $A_n \subset R$, observemos que $A_n \subset Y$ y $A \subset Y$. Como Y tiene la propiedad de Kelley, existe $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(Y)$ tal que $A_n \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim B_n = qs$. Si $A_n \subset pr$, observemos que $A_n \subset pr$ y $A \subset pr$. Como pr es localmente conexo, entonces pr tiene la propiedad de Kelley, por lo que existe $\{B_n'\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(pr)$ tal que $A_n \subset B_n'$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim B_n' = qs$. Como $qs \subset K$ y $A \neq qs$ se tiene que $A \notin \mathbb{M}(K)$. Por tanto, $\mathbb{M}(K) = \{K\}$.

(b) Sea $K = sz$ con $s \in pq - \{q\}$ y $z \in J - \{q, r\}$. Entonces $fr(K) = \{s\} \cup qz$. Para $A = \{s\}$ como en (2.1)(a) se tiene que $A \notin \mathbb{M}(K)$. Para $A \subsetneq qz$ como en (2.2)(a) se tiene que $A \notin \mathbb{M}(K)$. Ahora, sea $A = qz$ y sean $\{q_n = (\frac{2}{(4n+1)\pi}, \operatorname{sen}(\frac{(4n+1)\pi}{2}))\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{r_n = (\frac{2}{(4n+3)\pi}, \operatorname{sen}(\frac{(4n+3)\pi}{2}))\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en X, entonces $\lim q_n = q$ y $\lim r_n = r$. Sea $z_n \in q_n r_n$ tal que $\pi_2(z_n) = \pi_2(z)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos en X tal que $\lim z_n = z$. Consideremos $\{A_n = q_n z_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$, observemos que $\lim A_n = A$. Veamos que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple con la definición de continuo límite máximo fuerte para A en K.

Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ con $A_n \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim B_n = B \subset K$. Por demostrar, $B = A$. Basta ver que $B \subset A$. Supongamos que existe $b \in B - A$, entonces $\pi_2(b) > 1$. Sea $b_n \in B_n$ tal que $\lim b_n = b$, podemos suponer que $\pi_2(b_n) > 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $b_n \in pq - \{q\}$. Como $q_n \in A_n$ y $A_n \subset B_n$, entonces $q_n \in B_n$, es decir, $\{q, r\} \in B_n$ y dado que $B_n \in C(X)$ se tiene que $qr \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $r \in B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y así $r \in B$ pero $r \notin K$ lo que contradice que $B \subset K$. Por tanto, $B \subset A$ y así $A \in \mathbb{M}(K)$. Para cuando $z = q$, $fr(K) = \{s, q\}$ y de manera similar se demuestra que $A = \{q\} \in \mathbb{M}(K)$ y $A = \{s\} \notin \mathbb{M}(K)$.

Por tanto, en este subcaso probamos que $\mathbb{M}(K) = \{K\}$ o $\mathbb{M}(K) = \{K, qz\}$ cumpliendose la condición de semi-Kelley.

Así, X es un continuo semi-Kelley.

Otros ejemplos de continuos que son semi-Kelley se muestran en la Figura 2.8.

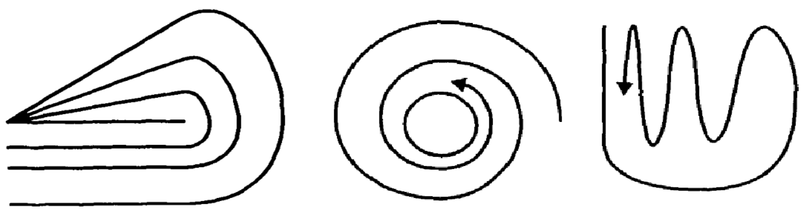


Figura 2.8: Continuos semi-Kelley.

Ejemplo 2.36 (Continuo que no es semi-Kelley)
Sean Y el continuo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, $Z = pp'$ y

$$Y' = \{(x,\ \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right) + 3) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0)]\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [2, 4]\}.$$

Consideremos $X = Y \cup Z \cup Y'$, (veáse la Figura 2.9). Sean $p = (0, 1)$ y $p' = (0, 2)$.

Veamos que X no es un continuo semi-Kelley. Sea $K = Z$, $M = \{p\}$ y $N = \{p'\}$. Como en caso (2.2)(b) del Ejemplo 2.35 se puede verificar que M y N son continuos límites máximos de K tomando las sucesiones, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n = (\frac{2}{(4n+1)\pi},\ \operatorname{sen}(\frac{(4n+1)\pi}{2}))$ y $p'_n = (-\frac{2}{(4n+1)\pi},\ \operatorname{sen}(-\frac{(4n+1)\pi}{2}) + 3)$ como se observan en la Figura 2.4. Sin embargo $M \not\subset N$ y $N \not\subset M$ y por tanto X no es semi-Kelley.

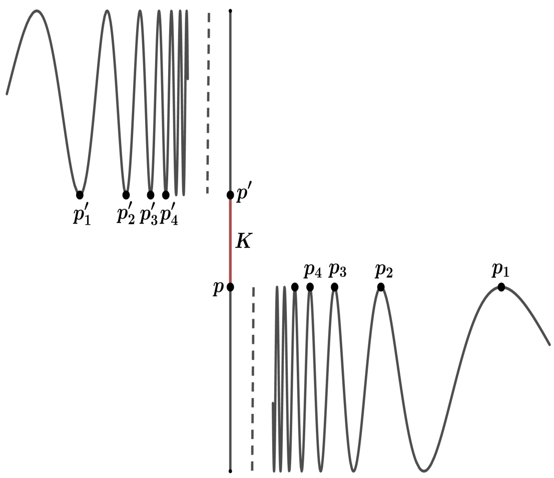


Figura 2.9: Continuo que no es semi-Kelley.

Otros ejemplos de continuos que no son semi-Kelley se muestran en la Figura 2.10.

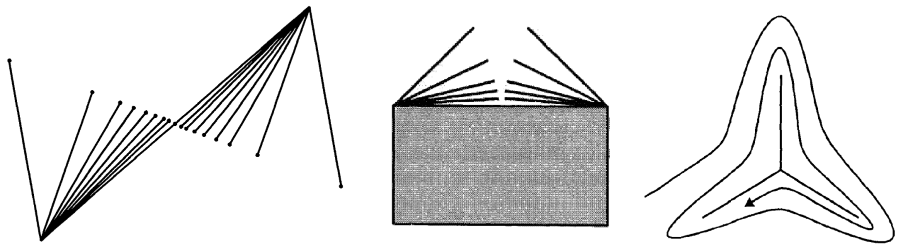


Figura 2.10: Continuos no semi-Kelley.

El siguiente Teorema demuestra que en la Definición 2.33 de un continuo semi-Kelley la condición se puede aplicar solo a los límites máximos continuos fuertes.

Teorema 2.37 *Sea X un continuo. Son equivalentes:*

(1) *X es un continuo semi-Kelley.*

(2) *Para cada subcontinuo K de X y cualesquiera dos continuos límites máximos fuertes, M y N de K se tiene $M \subset N$ o $N \subset M$.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sean $K \in C(X)$, M y N continuos límites máximos fuertes de K, entonces M y N son continuos límites máximos de K y dado que X es semi-Kelley se tiene que $M \subset N$ o $N \subset M$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que X no es semi-Kelley, entonces existe $K \in C(X)$ y existen M y N continuos límites máximos de K tales que $M \not\subset N$ y $N \not\subset M$. Sea $\mathfrak{M} = \{E \in C(K) : M \cup N \subset E\}$, por la Proposición 1.10 es un conjunto cerrado y no vacío en $C(K)$. Por la Proposición 2.10, existe $L \in C(K)$ elemento minimal que contiene a $M \cup N$, es decir, ningún subcontinuo propio de L contiene a $M \cup N$.

Afirmación 1.

(a) L es el único continuo límite máximo fuerte de L que contiene a M; o

(b) L es el único continuo límite máximo fuerte de L que contiene a N.

Prueba de Afirmación 1. Supongamos que (a) y (b) son falsos, entonces existen S y S' continuos límites máximos fuertes de L que contienen a M y N, respectivamente y $S \neq L$, $S' \neq L$. Por hipótesis, $S \subset S'$ o $S' \subset S$. Se sigue que $M \cup N \subset S$ o $M \cup N \subset S'$ y por minimalidad de L se tiene que $S = L$ o $S' = L$ lo cual es una contradicción. □

Sin pérdida de generalidad supongamos que (a) se cumple; y sea $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$ que cumple la definición de continuo límite máximo de M en K. Entonces:

Afirmación 2. Para toda $\{M_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ se tiene $L \in \text{lím sup}\, C(M_{n_k}, X)$.

Prueba de Afirmación 2. Sea $\{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ y sea $S \in C(L) \cap \text{lím sup}\, C(M_{n_k}, X)$ elemento maximal, entonces por la Proposición 2.11, S es un continuo límite máximo fuerte en L y $M \subset L$. Como ocurre (a) tenemos que $S = L$ y por tanto $L \in \text{lím sup}\, C(M_{n_k}, X)$. □

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos $\mathcal{F}_n = \{E \in C(X) : M_n \subset E\}$ es un conjunto cerrado y no vacío (Proposición 1.10), entonces podemos hablar del punto en $\mathcal{F}_n$ más cercano a L, con respecto a la métrica de Hausdorff. Así, tomemos un elemento $E_n \in \mathcal{F}_n$ tal que

$$H(L, E_n) = \text{mín}\{H(L, E) : E \in \mathcal{F}_n\}.$$

Afirmación 3. $\text{lím}\, E_n = L$.

Prueba de Afirmación 3. Sea $\{E_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión convergente de $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$; sea $\{M_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ la correspondiente subsucesión de $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $M_{n_k} \subset E_{n_k}$. Por la Afirmación 2, existe $\{M_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{M_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{A_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ subsucesión en $C(X)$ tales que $M_{n_{k_j}} \subset A_{n_{k_j}}$

y $\lim A_{n_{k_j}} = L$. Notemos que $A_{n_{k_j}} \in \mathcal{F}_{n_{k_j}}$ por lo que $H(E_{n_{k_j}}, L) \leq H(A_{n_{k_j}}, L)$, entonces $\lim H(E_{n_{k_j}}, L) = 0$. Así, se concluye que $\lim E_{n_{k_j}} = L$. □

Finalmente, de la Afirmación 3 y dado que M es un continuo límite máximo en K y $L \subset K$ se tiene que $M = L$ lo cual implica que $N \subset M$ lo que contradice que $N \not\subset M$. Por tanto, X es un continuo semi-Kelley. ■

Teorema Principal

Lema 2.38 *Si X es un continuo que no es semi-Kelley. Entonces X contiene un subcontinuo que tiene dos continuos límites máximos fuertes no degenerados e incomparables.*

Demostración. Sea X un continuo que no es semi-Kelley. Por el Teorema 2.37, existe $K \in C(X)$ y existen A_1, A_2 continuos límites máximos fuertes de K tales que $A_1 \not\subset A_2$ y $A_2 \not\subset A_1$. Si A_1 y A_2 son no degenerados terminamos. Supongamos que A_1 o A_2 son degenerados.

Caso 1: Sin pérdida de generalidad supongamos que $A_1 = \{p\}$ para algún $p \in K$ y A_2 es no degenerado, entonces $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $\lim B_n = A_1$ y que cumple con las condiciones de la definición de límite máximo fuerte. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $p_n \in B_n$, entonces $\lim p_n = p$. Observemos que $K \neq A_1$ y $K \neq A_2$ pues $A_2 \subset K$ y $A_1 \not\subset A_2$.

Afirmación 1. Como A_1 es un continuo límite máximo fuerte en K se tiene:

(a) $K \notin \lim \sup C(p_n, X)$.

(b) $A_2 \notin \lim \sup C(p_n, X)$.

Prueba de Afirmación 1.

(a) Similarmente a la demostración de la Afirmación 1 del Lema 2.27.

(b) Supongamos que $A_2 \in \lim \sup C(p_n, X)$, entonces por la Proposición 1.19, existe $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ y existen $E_{n_j} \in C(p_{n_j}, X)$ tales que $\lim E_{n_j} = A_2$. Dado que $p_{n_j} \in E_{n_j} \cap B_{n_j}$, entonces $\{E_{n_j} \cup B_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $C(X)$. Luego, $B_{n_j} \subset E_{n_j} \cup B_{n_j}$, para cada $j \in \mathbb{N}$, y por el Teorema 1.15, $\lim E_{n_j} \cup B_{n_j} = A_2 \cup \{p\} \in C(X)$, es decir, $A_2 \cup \{p\}$ es conexo y por tanto $A_2 \cap \{p\} \neq \emptyset$ por lo que $p \in A_2$ lo que contradice que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. $\square$

Sea $\mathcal{U}$ un abierto en $C(X)$ tal que $K \in \mathcal{U}$, $A_2 \notin \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \cap \text{lím sup}\, C(p_n, X) = \emptyset$. Sea V un abierto en X tal que $p \in V$ y $V \cap A_2 = \emptyset$. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y sea $F : X \times [0,1] \longrightarrow C(X)$ la función dada como en la Definición 2.8.

Afirmación 2.

(a) Existe $t_1 > 0$ tal que si $E \in C(p, X)$ y $\mu(E) \leq t_1$, entonces $K \cup E \in \mathcal{U}$.

(b) Existe $t_2 > 0$ tal que si $E \in C(p, X)$ y $\mu(E) \leq t_2$, entonces $E \in \langle V \rangle$, es decir, $E \subset V$ y por tanto $E \cap A_2 = \emptyset$.

(c) Existe $t_3 > 0$ tal que si $L \in C(p, X)$, $\mu(L) \leq t_3$ y $M \in C(K \cup L) \cap \text{lím sup}\, C(p_n, X) \cap C(L, X)$, entonces $A_2 \not\subset M$.

(d) Sea $t_0 = \text{mín}\{t_1, t_2, t_3\}$, entonces para todo $E \in C(p, X)$ con $\mu(E) \leq t_0$ se tiene que $K \cup E \in \mathcal{U}$ y $E \cap A_2 = \emptyset$ y para todo $M \in C(K \cup E) \cap \text{lím sup}\, C(p_n, X) \cap C(E, X)$ se tiene $A_2 \not\subset M$.

(e) Existe $s > 0$ tal que si $s < t_0$, y para toda $y \in X$ se tiene $\mu(F(y, s)) < t_0$.

Prueba de Afirmación 2.

(a) Similarmente a la demostración de la Afirmación 2(a) del Lema 2.27.

(b) Supongamos que t_2 no existe, así para toda $n \in \mathbb{N}$ sea $t_n \in (0, \mu(K))$ tal que $\text{lím}\, t_n = 0$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $H_n \in C(X) - \langle V \rangle$, $p \in H_n$, $\mu(H_n) \leq t_n$ y $K \cup H_n \in C(X) - \mathcal{U}$. Supongamos que $\text{lím}\, H_n = H \in C(X) - \langle V \rangle$, entonces $p \in H$ y $\mu(H) = 0$, es decir, $H = \{p\}$ lo que implica que $\{p\} \in C(X) - \langle V \rangle$ contradiciendo que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

(c) Supongamos que t_3 no existe, así para toda $n \in \mathbb{N}$ sea $t_n \in (0, \mu(K))$ tal que $\text{lím}\, t_n = 0$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $L_n \in C(p, X)$ con $\mu(L_n) \leq t_n$ y existe $M_n \in C(K \cup L_n) \cap \text{lím sup}\, C(p_n, X) \cap C(L_n, X)$ tal que $A_2 \subset M_n$. Notemos entonces que $L_n \subset M_n \subset K \cup L_n$. Luego, $\text{lím}\, L_n = \{p\}$, $\text{lím}\, M_n = M$ para algún $M \in \text{lím sup}\, C(p_n, X)$ y $\text{lím}\, K \cup L_n = K$ así por el Teorema 1.21, $\{p\} \subset M \subset K$ y $A_2 \subset M$. Ahora, como $M \in \text{lím sup}\, C(p_n, X)$ por la Proposición 1.19, existe $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ y existen $E_{n_j} \in C(P_{n_j}, X)$ tal que $\text{lím}\, E_{n_j} = M$. Consideremos $\{E_{n_j} \cup B_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$, entonces $B_{n_j} \subset E_{n_j} \cup B_{n_j}$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Luego, $\lim E_{n_j} \cup B_{n_j} = M \cup \{p\} = M \subset K$ y dado que A_1 es continuo límite máximo fuerte se tiene que $M = A_1$ y por tanto $A_2 \subset A_1$ lo que contradice que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

(d) Se sigue de (a), (b) y (c).

(e) Similarmente a la demostración de la Afirmación 2(b) del Lema 2.27. □

Consideremos una subsucesión convergente $\{F(p_{n_k}, s)\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{F(p_n, s)\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $L_p \in C(p, X)$ tal que $L_p = \lim F(p_{n_k}, s)$. Como $\mu(F(p_{n_k}, s)) \geqslant s$, entonces $\mu(L_p) \geqslant s > 0$ y por tanto L_p es un subcontinuo no degenerado. Además, $\mu(F(p_{n_k}, s)) < t_0$ y por la Afirmación 2 (a) y (b) se tiene $K \cup L_p \in \mathcal{U}$ y $L_p \cap A_2 = \emptyset$. Observese que $L_p \in \limsup C(p_n, X)$ y dado que $K \in \mathcal{U}$ y $\limsup C(p_n, X) \cap \mathcal{U} = \emptyset$, entonces $L_p \neq K$. Denotemos $K^* = K \cup L_p$, es claro que $K^* \in C(X)$, $L_p \in C(K^*)$ y $A_2 \in C(K^*)$. Notemos que $C(K^*) \cap \limsup C(p_n, X) \cap C(L_p, X)$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $C(X)$ (pues cada subconjunto de la intersección es cerrado y L_p pertenece a esta intersección), entonces podemos considerar su elemento maximal respecto a la inclusión de conjuntos. Sea M este elemento maximal.

Veamos que M es un continuo límite máximo fuerte propio y no degenerado en K^*. Dado que $M \in \limsup C(p_n, X)$, entonces $M \notin \mathcal{U}$ y como $K^* \in \mathcal{U}$ se tiene que $M \neq K^*$, es decir, M es propio. Luego, $M \in C(L_p, X)$ por lo que $L_p \subset M$ y como L_p es un subcontinuo no degenerado, entonces M es no degenerado. Como M es un elemento maximal en $C(K^*) \cap \limsup C(p_n, X)$ por la Proposición 2.11, M es un continuo límite máximo fuerte en K^*.

Ahora veamos que A_2 es un continuo límite máximo fuerte en K^*. Supongamos que no es así, entonces para toda sucesión $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\lim D_n = A_2$, existe $\{D_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ y existe $\{D'_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $D_{n_k} \subset D'_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lim D'_k = D' \subset K^*$ y $A_2 \not\subset D'$. Sea $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ que cumple con la definición de límite máximo fuerte para A_2 en K. Por el Lema 2.6, existe $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tal que $\mu(E_n) = \mu(A_2)$, $E_n \cap D_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim E_n = A_2$ y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple con la definición de límite máximo fuerte para A_2 en K.

Afirmación 3. Existe $\varepsilon > 0$ tal que si $C \in C(A_2, X)$ y $\mu(C) < \mu(A_2) + \varepsilon$ con $\varepsilon < \frac{\mu(E) - \mu(A_2)}{2}$, entonces $C \cap L_p = \emptyset$.

Prueba de Afirmación 3. Supongamos que tal número no existe, así para toda $n \in \mathbb{N}$ sea $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $C_n \in C(A_2, X)$ con $\mu(C_n) < \mu(A_2) + \frac{1}{n}$ y $C_n \cap L_p \neq \emptyset$. Sea $C = \text{lím}\, C_n$ para algún $C \in C(A_2, X)$, entonces $A_2 \subset C$. Dado que μ es una función de Whitney y $\mu(C_n) < \mu(A_2) + \frac{1}{n}$ se tiene que $\mu(C) \leq \mu(A_2)$ y por tanto $C = A_2$. Luego, $C_n \cap L_p \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces por el Teorema 1.21, $\text{lím}\, C_n \cap L_p \neq \emptyset$, es decir, $A_2 \cap L_p \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción puesto que $A_2 \cap L_p = \emptyset$. $\square$

Así, para la sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ existe $\{E_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión y existe $\{E'_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión en $C(X)$ tal que $E_{n_k} \subset E'_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}\, E'_k = E' \subset K^*$ se tiene que $A_2 \not\subset D'$. Podemos suponer que $\mu(E'_k) \geqslant \mu(A_2) + \varepsilon$, entonces $\mu(E_{n_k}) = \mu(A_2) \leq \mu(A_2) + \varepsilon \leq \mu(E'_k)$ por lo que existe $B'_k \in C(X)$ tal que $\mu(B'_k) = \mu(A_2) + \frac{\varepsilon}{2}$ y $E_{n_k} \subset B'_k \subset E'_k$. Luego, podemos suponer que $\text{lím}\, B'_k = B$ con $\mu(B) = \mu(A_2) + \frac{\varepsilon}{2}$ teniendo así $A_2 \subset B \subset E \subset K^*$, y por la Afirmación 3, $B \cap L_p = \emptyset$ y por tanto $B = A_2$ ya que $\mu(B) > \mu(A_2)$.

Finalmente, veamos que $M \not\subset A_2$ y $A_2 \not\subset M$. Si $M \subset A_2$, entonces como $L_p \subset M$ se tendría que $L_p \subset A_2$ y $A_2 \cap L_p \neq \emptyset$ contradiciendo que $A_2 \cap L_p = \emptyset$, así $M \not\subset A_2$. Luego, por la Afirmación 2 (d) se tiene que $A_2 \not\subset M$.

Caso 2: Supongamos que $A_1 = \{p\}$ y $A_2 = \{q\}$ para algunos $p, q \in K$. Entonces podemos aplicar dos veces el Caso 1 y así obtener dos continuos límites máximos fuertes no degenerados y no comparables. ■

Corolario 2.39 *Si X es un continuo que no es semi-Kelley. Entonces X contiene un subcontinuo que tiene dos continuos límites máximos no degenerados e incomparables.*

Teorema 2.40 *La propiedad de semi-Kelley es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney.*

Demostración. Sea X un continuo. Supongamos que X no es semi-Kelley. Por el Lema 2.38, existe un subcontinuo K de X y existen dos continuos límites máximos fuertes M y N no degenerados de K tales que $M \not\subset N$ y $N \not\subset M$. Como $M \not\subset N$ podemos elegir $x_M \in M - N$ y por el Corolario 1.8, existe un continuo K_M de M tal que $x_M \in K_M \subset M - N$ y $x_M \neq K_M$. Similarmente, podemos encontrar un continuo K_N de N tal que $x_N \in K_N \subset N - M$ y $x_N \neq K_N$. Sea $\mu : C(X) \longrightarrow [0, 1]$ una función de Whitney. Definamos

$m = \mu(K_M)$ y $n = \mu(K_N)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m \leq n$. Notemos que $0 < \mu(K_M) < \mu(M)$ y $0 < \mu(K_N) < \mu(N)$. Sea $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tal que $\lim t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es semi-Kelley, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por convergencia de $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $t_J \in (0, m)$. Definamos $\mathcal{K} = C(K) \cap \mu^{-1}(t_J)$. Por la Proposición 1.41 y el Teorema 1.48, $\mathcal{K}$ es un continuo y $\mathcal{K} \subset \mu^{-1}(t_J)$. Por otra parte, M y N son continuos límites máximos en K así por el Lema 2.6, existen sucesiones $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ tales que $\mu(M_n) = \mu(M)$, $\mu(N_n) = \mu(N)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim M_n = M$ y $\lim N_n = N$ y que cumplen con la definición de continuo límite máximo.

Definamos $\mathcal{P}_n = C(M_n) \cap \mu^{-1}(t_J)$ y $\mathcal{Q}_n = C(N_n) \cap \mu^{-1}(t_J)$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n \neq \emptyset$, $\mathcal{Q}_n \neq \emptyset$ y $\mathcal{P}_n, \mathcal{Q}_n$ son subcontinuos de $\mu^{-1}(t_J)$. Podemos suponer que $\lim \mathcal{P}_n = \mathcal{P}$ y $\lim \mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}$ para algunos $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in C(\mu^{-1}(t_J))$. Como $\mathcal{P}_n = C(M_n) \cap \mu^{-1}(t_J)$, entonces $\mathcal{P}_n \subset C(M_n)$. Por la Proposición 1.41, $\cup \mathcal{P}_n = M_n$. Luego, por continuidad de la función unión (Lema 1.23) y dado que $\lim \mathcal{P}_n = \mathcal{P}$ y $\lim M_n = M$ se tiene que $\cup \mathcal{P} = M$. Ahora, sea $A \in \mathcal{P}$, entonces $A \in \cup \mathcal{P} = M$ por lo que $A \subset M$, así $A \in C(M)$ y por tanto $\mathcal{P} \subset C(M)$, es decir, $\mathcal{P} \subset C(M) \cap \mu^{-1}(t_J)$. Además, $M \subset K$ por lo que $C(M) \cap \mu^{-1}(t_J) \subset C(K) \cap \mu^{-1}(t_J)$. Así, $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$. De manera similar se tiene que $\mathcal{Q} \subset \mathcal{K}$.

Sean

$$\mathcal{R} \in C(\mathcal{K}) \cap \lim\sup C(\mathcal{P}_n, \mu^{-1}(t_J)) \text{ y}$$

$$\mathcal{S} \in C(\mathcal{K}) \cap \lim\sup C(\mathcal{Q}_n, \mu^{-1}(t_J))$$

elementos maximales. Por la Proposición 2.11, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son continuos límites máximos fuertes en $\mathcal{K}$.

Veamos que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son incomparables, es decir, $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{R}$. Dado que $\mathcal{R} \in \lim\sup C(\mathcal{P}_n, \mu^{-1}(t_J))$, existe $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ y existen $\mathcal{A}_{n_j} \in C(\mathcal{P}_{n_j}, \mu^{-1}(t_J))$ tales que $\lim \mathcal{A}_{n_j} = \mathcal{R}$. Veamos que $\cup \mathcal{R} \subset K$. Sea $x \in \cup \mathcal{R}$, entonces existe $A \in \mathcal{R}$ tal que $x \in A$ y como $\mathcal{R} \in C(\mathcal{K})$, entonces $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}$ y por tanto $A \in \mathcal{K}$, así $x \in A \subset K$, es decir, $\cup \mathcal{R} \subset K$. Observemos que $\mathcal{P}_{n_j} \subset \mathcal{A}_{n_j} \subset \mu^{-1}(t_J)$. Como $M_n \subset \cup \mathcal{P}_n$ y $\mathcal{P}_{n_j} \subset \mathcal{A}_{n_j}$, entonces $M_{n_j} \subset \cup \mathcal{P}_{n_j} \subset \cup \mathcal{A}_{n_j}$ y como $\lim \cup \mathcal{A}_{n_j} = \cup \mathcal{R} \subset K$ y M es un continuo límite máximo fuerte de K se tiene que $\cup \mathcal{R} = M$. Similarmente se tiene que $\cup \mathcal{S} = N$. Finalmente, si $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, entonces $\cup \mathcal{R} \subset \cup \mathcal{S}$ y por tanto $M \subset N$ lo cual contradice que $M \not\subset N$ y si $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, entonces $\cup \mathcal{S} \subset \cup \mathcal{R}$ y por tanto $N \subset M$ lo cual contradice que $N \not\subset M$. Así, $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{R}$ contradiciendo que $\mu^{-1}(t_J)$ es semi-Kelley. Por tanto, X es semi-Kelley. ∎

Corolario 2.41 *Sea X un continuo, entonces la propiedad de semi-Kelley es:*

(1) *Una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney.*

(2) *Una propiedad fuerte reversible de Whitney.*

(3) *Una propiedad reversible de Whitney.*

Teorema 2.42 *[4, págs. 359–369] Existe un continuo X con las siguientes propiedades:*

(1) *X tiene la propiedad de Kelley.*

(2) *Para cada función de Whitney $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ existe un número $\delta > 0$ tal que, para cada $t \in (0,\delta)$, el nivel $\mu^{-1}(t)$ no es semi-Kelley.*

Corolario 2.43 *La propiedad de semi-Kelley no es una propiedad de Whitney.*

El siguiente ejemplo es el continuo considerado en el Teorema 2.42.

Ejemplo 2.44 En coordenadas polares (r,θ) en el plano consideramos los cículos:

$$S = \{(r,\theta) : r = 1\} \text{ y } S^* = \{(r,\theta) : r = 3\};$$

Para cada $n, m \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \{(r,\theta) : r = 1 + \frac{1}{2\pi n}\} \text{ y } S^*_m = \{(r,\theta) : r = 3 - \frac{1}{2\pi m}\};$$

y las espirales:

$$\Sigma_S = \{(r,\theta) : r = 1 + \frac{1}{\theta} \text{ y } \theta \in [2\pi,\infty)\},$$

$$\Sigma_{S^*} = \{(r,\theta) : r = 3 - \frac{1}{\theta} \text{ y } \theta \in [2\pi,\infty)\},$$

$$\Sigma_1 = \{(r,\theta) : r = 1 - \frac{1}{\theta} \text{ y } \theta \in [2\pi,\infty)\},$$

$$\Sigma_2 = \{(r,\theta) : r = 3 + \frac{1}{\theta} \text{ y } \theta \in [2\pi,\infty)\},$$

y el arco

$$\Lambda = \{(r,\theta) : r = \frac{1-2\pi}{2\pi^2}\theta + 3 - \frac{1}{2\pi} \text{ y } \theta \in [0,2\pi]\}.$$

Definimos los continuos

$$X_1 = S \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n) \cup \Sigma_S \cup \Sigma_1, \text{(veáse la Figura 2.11)},$$

$$X_2 = S^* \cup (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} S_m^*) \cup \Sigma_{S^*} \cup \Sigma_2, \text{ (veáse la Figura 2.12)},$$

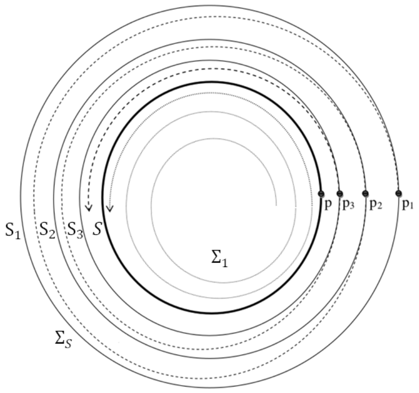


Figura 2.11: X_1.

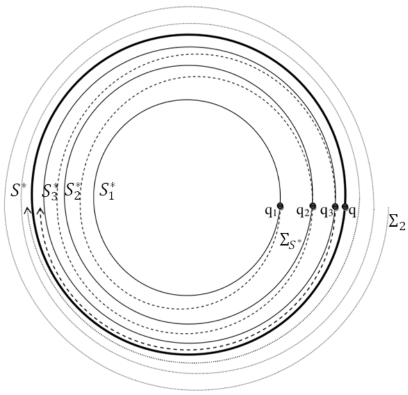


Figura 2.12: X_2.

y finalmente definamos $X = X_1 \cup X_2 \cup \Lambda$, (veáse la Figura 2.13).

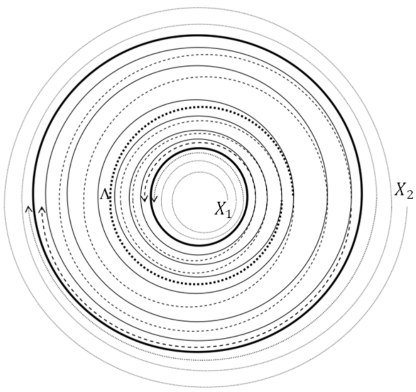


Figura 2.13: X.

En base a los resultados de J. J. Charatonik y W. J. Charatonik los cuales generalizan los resultados probados anteriormente por Roger W. Wardle podemos considerar la siguiente pregunta: Sean X un continuo y μ una función de Whitney. Si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos tal que $\lim t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es semi-Kelley para cada $n \in \mathbb{N}$, ¿es X de Kelley?

Antes de dar contestación a esta pregunta veamos el siguiente ejemplo que nos muestra que para el continuo sen$(\frac{1}{x})$ hay niveles que son homeomorfos al arco y niveles que son homeomorfos a el mismo, para esto comencemos con algunas definiciones y un resultado. Este ejemplo nos será de utilidad para contestar la pregunta anterior.

Definición 2.45 *Sean X un continuo, $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney y $t \in [0, \mu(X)]$. Decimos que X tiene la* **propiedad cubriente***, si para todo subcontinuo propio $\mathcal{A}$ de $\mu^{-1}(t)$ se tiene que $\cup\mathcal{A} \neq X$.*

Definición 2.46 *Sea X un espacio compacto. Una* **cadena** *en X es una colección finita $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ de subconjuntos abiertos $U_1, U_2, ..., U_n$ de X tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y solo si $|i - j| \leqslant 1$, para cada $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Un elemento de $\mathcal{U}$ se denomina* **eslabón** *de $\mathcal{U}$.*

Definición 2.47 *Sea X un continuo. Decimos que X es un continuo* **encadenable** *siempre que para cada $\varepsilon > 0$, existe una cadena en X que cubre a X y tal que el diámetro de cada eslabón es menor que ε.*

Ejemplo 2.48 *Continuos encadenables:*

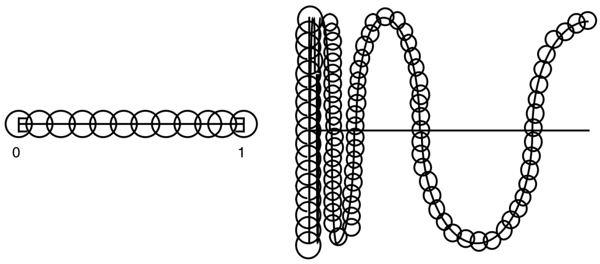


Figura 2.14: Continuos encadenables.

Lema 2.49 *[16, Lema 14.13.1, pág. 415] Todo continuo encadenable tiene la propiedad cubriente.*

Ejemplo 2.50 Los niveles del continuo sen$(\frac{1}{x})$.

Sean $Y = J \cup R$, $\mu : C(Y) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney y sean $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones proyección.

Caso 1: $t \geqslant \mu(J)$;

Sea $f : \mu^{-1}(t) \longrightarrow [0,1]$ dada por $f(A) =$mín $(\pi_1(A))$. f es una función continua. Veamos que f es inyectiva. Sean $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $f(A) = f(B)$, entonces mín $(\pi_1(A))$=mín $(\pi_1(B))$. Sean $a \in A$ y $b \in B$, $\pi_1(a) =$mín $(\pi_1(A))$ y $\pi_1(b) =$mín $(\pi_1(B))$ por lo que $\pi_1(a) = \pi_1(b)$.

Analizamos dos casos:

(1.1) $a \in J$; entonces A es homeomorfo a Y y, como $\pi_1(a) = \pi_1(b)$, $b \in J$ y por tanto B es homeomorfo a Y; Se sigue que $A \subset B$ o $B \subset A$. Así, como $\mu(A) = \mu(B)$ se tiene que $A = B$.

(1.2) $a \in X - J$; entonces $a \in R$ y por tanto $b \in R$ y $a = b$ por lo que $A \subset B$ o $B \subset A$. Así, como $\mu(A) = \mu(B)$ se tiene que $A = B$.

Así, f es una función continua e inyectiva y dado que $\mu^{-1}(t)$ es compacto, f es un homeomorfismo sobre su imagen. Luego, $f(\mu^{-1}(t))$ es un subcontinuo no degenerado de $[0, 1]$. Así, $f(\mu^{-1}(t))$ es un arco y, en consecuencia $\mu^{-1}(t)$ es un arco.

Caso 2: $t < \mu(J)$;

Sea $\varphi : \mu^{-1}(t) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\varphi(A) = (\min(\pi_1(A)), \min(\pi_2(A))).$$

Entonces φ es una función continua. Veamos que es una función inyectiva. Sean $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $\varphi(A) = \varphi(B)$, entonces $(\min(\pi_1(A)), \min(\pi_2(A))) = (\min(\pi_1(B)), \min(\pi_2(B)))$ y por tanto $(\min(\pi_1(A)) = \min(\pi_1(B)))$ y $(\min(\pi_2(A)), \min(\pi_2(B)))$.

(1) Si $A \subset J$; $(\min(\pi_1(A)) = 0 = \min(\pi_1(B)))$ y $B \subset J$ y como $(\min(\pi_2(A)), \min(\pi_2(B)))$, entonces $A = sr$ y $B = s'r$ para algunos $s, s', r \in J$ tales que $r < s$, $r < s'$. Por tanto, $A \subset B$ o $B \subset A$ y como $\mu(A) = \mu(B)$, entonces $A = B$.

(2) Si $A \subset R$; $(\min(\pi_1(A)) = x' = \min(\pi_1(B)))$ y $B \subset R$. Si $\alpha_y^z = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in [y, z]\}$ para $y, z \in (0, 1]$, entonces $A = \alpha_{x'}^{z}$ y $B = \alpha_{x'}^{z'}$. Por tanto, $A \subset B$ o $B \subset A$ y como $\mu(A) = \mu(B)$, entonces $A = B$.

Así, φ es una función continua e inyectiva. Luego, $\varphi(\mu^{-1}(t))$ es un subcontinuo de $\mathbb{R}^2$ homeomorfo a $\mu^{-1}(t)$.

Sea $\mu^{-1}(t) = \eta \cup \vartheta$ donde:

$$\eta = \{A \in C(X) : A \subset J \text{ y } \mu(A) = t\},$$

$$\vartheta = \{A \in C(X) : A \subset R \text{ y } \mu(A) = t\}.$$

Entonces, $\varphi(\mu^{-1}(t)) = \varphi(\vartheta) \cup \varphi(\eta)$. Como Y es de Kelley se tiene que $Cl(\vartheta) = \mu^{-1}(t)$, por lo que $\varphi(\mu^{-1}(t)) = \varphi(Cl(\vartheta)) = Cl(\varphi(\vartheta))$, es decir, $\varphi(\vartheta)$ es denso en $\varphi(\mu^{-1}(t))$.

Sea $D \in \mu^{-1}(t)$ tal que $e := (1, \text{sen}(\frac{1}{x})) \in D$. Observemos que D es el único elemento de $\mu^{-1}(t)$ que tiene al punto e. Sea $x_D = \text{mín}(\pi_1(D))$.

Afirmación 1: La función $\pi_1|_{\varphi(\vartheta)} : \varphi(\vartheta) \longrightarrow (0, x_D]$ es una biyección continua.

Prueba de Afirmación 1.

- Continuidad: Por ser restricción de una función continua.
- Inyectiva: Sean $a, b \in \varphi(\vartheta)$ tales que $\pi_1|_{\varphi(\vartheta)}(a) = \pi_1|_{\varphi(\vartheta)}(b)$. Entonces, $a = (\text{mín}(\pi_1(A)), \text{mín}(\pi_2(A)))$ y $b = (\text{mín}(\pi_1(B)), \text{mín}(\pi_2(B)))$ para algunos $A, B \in \vartheta$. Así, $\pi_1|_{\varphi(\vartheta)}(a) = \text{mín}(\pi_1(A))$ y $\pi_1|_{\varphi(\vartheta)}(b) = \text{mín}(\pi_1(B))$ por lo que $\text{mín}(\pi_1(A)) = \text{mín}(\pi_1(B))$. Entonces, $\pi_1(A) \subset \pi_1(B)$ o $\pi_1(B) \subset \pi_1(A)$ y por lo tanto $A = B$. En consecuencia, $a = b$.
- Sobreyectiva: Sea $x \in (0, x_D]$ y tomemos $s := (x, \text{sen}(\frac{1}{x}))$. Sea B el arco contenido en R con extremos s y e. Como $D \subset B$ se tiene $\mu(B) \geq t$, por lo que existe $A_x \in \mu^{-1}(t)$ tal que $s \in A_x \subset B$, $A_x \in \vartheta$ y por tanto $\varphi(A_x) \in \varphi(\vartheta)$. Además, $\varphi(A_x) = (x, \text{mín}(\pi_2(A)))$ y así $\pi_1|_{\varphi(\vartheta)}(\varphi(A_x)) = x$.
- Abierta: Sea $\mathcal{U}$ abierto en $\varphi(\vartheta)$. Por demostrar que $\pi_1|_{\varphi(\vartheta)}(\mathcal{U})$ es abierto en $(0, x_D]$. Sean $z \in \pi_1|_{\varphi(\vartheta)}(\mathcal{U})$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $(0, x_D]$ tales que $\text{lím}\, z_n = z$. Por sobreyectividad de $\pi_1|_{\varphi(\vartheta)}$ existen $w, w_n \in \varphi(\vartheta)$ tales que $\pi_1|_{\varphi(\vartheta)}(w) = z$ y $\pi_1|_{\varphi(\vartheta)}(w_n) = z_n$. Más aún $w \in \mathcal{U}$.

  Ahora, sean $A \in \vartheta$ tal que $\varphi(A) = w$ y $A_n \in \vartheta$ tal que $\varphi(A) = w_n$. Entonces se tiene $\varphi(A) = (\text{mín}(\pi_1(A)), \text{mín}(\pi_2(A)))$ y $\text{mín}(\pi_1(A)) = \pi_1(\varphi(A)) = \pi_1(w) = z$. Así, $(z, \text{sen}(\frac{1}{z})) \in A$. De manera similar, $(z_n, \text{sen}(\frac{1}{z_n})) \in A_n$. Se sigue que $\text{lím}\, A_n = A$.

  Por continuidad de φ se tiene que $\text{lím}\, \varphi(A_n) = \varphi(A)$ y así $\text{lím}\, w_n = w$, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $w_n \in \mathcal{U}$. Luego, para toda $n \geq N$, $\pi_1(w_n) \in \pi_1(\mathcal{U})$ por lo que, $z_n \in \pi_1(\mathcal{U})$ para todo $n \geq N$. Así, $z \in int(\pi_1|_{\varphi(\vartheta)}(\mathcal{U}))$ luego, $\pi_1|_{\varphi(\vartheta)}(\mathcal{U}) = int(\pi_1|_{\varphi(\vartheta)}(\mathcal{U}))$. En consecuencia, $\pi_1|_{\varphi(\vartheta)}(\mathcal{U})$ es abierto.

Así, $\varphi(\vartheta)$ es homeormorfo $(0, x_D]$, es decir $\varphi(\vartheta)$ es homeomorfo a un rayo. □

Afirmación 2: La función $\pi_2|_{\varphi(\eta)} : \varphi(\eta) \longrightarrow [-1, \frac{t}{2}]$ es una biyección continua.

Prueba de Afirmación 2. Análogamente a la demostración de la Afirmación 1. Así, $\varphi(\eta)$ es homeomorfo a $[-1, \frac{t}{2}]$, es decir, $\varphi(\eta)$ es homeomorfo a un arco. □

Dado que $\varphi(\mu^{-1}(t)) = \varphi(\vartheta)\cup\varphi(\eta)$ y $\varphi(\vartheta)$ es denso en $\varphi(\mu^{-1}(t))$, entonces se tiene que $\mu^{-1}(t)$ homeomorfo $\varphi(\mu^{-1}(t))$, es una compactación del rayo con residuo un arco.

Ahora, veamos que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad de Kelley.

Sea $\mu^{-1}(t) = \mathcal{J}\cup\mathcal{R}$, donde $\mathcal{J}$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$ y $\mathcal{R}$ es homeomorfo a $[0,\infty)$. Por el Lema 2.20 basta ver que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad ($\bigstar$). Sean $A\in\mathcal{J}$, $\mathcal{K}\in C(A,\mathcal{J})$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $\mathcal{R}$ tales que $\lim A_n = A$. Sean $a\in A$ y $a_n\in A_n$, $n\in\mathbb{N}$ tales que $\lim a_n = a$. Entonces $a\in A\subset\cup\mathcal{K}$, $\cup\mathcal{K}\in C(Y)$, y como Y tiene la propiedad de Kelley (Ejemplo 2.18), existe $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de subcontinuos en Y tales que $a_n\in K_n$ y $\lim K_n = \cup\mathcal{K}$. Dado que $a_n\in K_n\cap A_n$, entonces $K_n\cup A_n\in C(Y)$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Por el Teorema 1.15, $\lim K_n\cup A_n = \cup\mathcal{K}\cup A = \cup\mathcal{K}$.

Afirmación 3: $(a)\Rightarrow(b)$.

(a) Dado $\mathcal{K}\subset\mu^{-1}(t)$ si $\mathcal{K}\neq\mu^{-1}(t)$, entonces $\cup\mathcal{K}\neq Y$.

(b) Dado $\mathcal{K}\subset\mu^{-1}(t)$, se tiene $\mathcal{K} = C(\cup\mathcal{K})\cap\mu^{-1}(t)$.

Prueba de Afirmación 3. Sea $\mathcal{K}\subset\mu^{-1}(t)$. Se sigue inmediatamente que $\mathcal{K}\subset C(\cup\mathcal{K})\cap\mu^{-1}(t)$. Ahora, si suponemos que $\mathcal{K}\supsetneq C(\cup\mathcal{K})\cap\mu^{-1}(t)$, entonces $\mathcal{K}\neq\mu|_{\cup\mathcal{K}}^{-1}(t)$ y por tanto $\cup\mathcal{K}\neq\cup\mathcal{K}$ lo cual es una contradicción. Así, $\mathcal{K} = C(\cup\mathcal{K})\cap\mu^{-1}(t)$. □

Como Y es un continuo encadenable por el Lema 2.49, Y cumple (a) y por tanto (b) de la Afirmación 3. Sean $\mathcal{K}_n = C(K_n\cup A_n)\cap\mu^{-1}(t)$, entonces $A_n\in\mathcal{K}_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Por demostrar que $\lim\mathcal{K}_n = \mathcal{K}$. Supongamos que $\lim\mathcal{K}_n\neq\mathcal{K}$, elegimos $\{\mathcal{K}_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $\lim\mathcal{K}_{n_m} = \mathcal{L}\neq\mathcal{K}$.

Afirmación 4: $\mathcal{L}\subset\mathcal{K}$.

Prueba de Afirmación 4. Sea $L\in\mathcal{L}$, entonces existe $\{L_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $\lim L_{n_m} = L$, $L_{n_m}\in\mathcal{K}_{n_m}$ y $L_{n_m}\in\mu^{-1}(t)$, luego, $L_{n_m}\subset K_{n_m}\cup A_{n_m}$ y así $L\subset\cup\mathcal{K}\cup A = \cup\mathcal{K}$ y por tanto $L\in C(\cup\mathcal{K})\cap\mu^{-1}(t) = \mathcal{K}$. Luego, $\mathcal{L}\subsetneq\mathcal{K}$. □

Así, $\cup\mathcal{L}\neq\cup\mathcal{K}$. Por otro lado, $\lim\cup\mathcal{K}_{n_m} = \cup\mathcal{L}\neq\cup\mathcal{K}$ y como $\cup\mathcal{K}_{n_m} = K_{n_m}\cup A_{n_m}$, entonces $\lim\cup\mathcal{K}_{n_m} = \lim K_{n_m}\cup A_{n_m} = \cup\mathcal{K}\cup A = \cup\mathcal{K}$ lo cual es una contradicción y por tanto $\lim\mathcal{K}_n = \mathcal{K}$.

Entonces $\{\mathcal{K}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos de $\mu^{-1}(t)$ tal que $A_n\in\mathcal{K}_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$ y $\lim\mathcal{K}_n = \mathcal{K}$. Por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad de Kelley.

Finalmente, como $\mu^{-1}(t)$ es una compactación del rayo con residuo un arco y tiene la propiedad de Kelley se tiene por el Lema 2.21 que $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a Y. Entonces los niveles de Whitney para el caso en el que $t < \mu(J)$ son homeomorfos al continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$.

El siguiente ejemplo contesta negativamente a la pregunta dada anteriormente, es decir, nos muestra un continuo X tal que para cualquier función de Whitney y para una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números positivos tal que $\lim t_n = 0$ se tiene que los niveles $\mu^{-1}(t_n)$ son semi-Kelley pero que X no es de Kelley.

Ejemplo 2.51 Sea X = continuo $\text{sen}(\frac{1}{x})$ con pata alargada (Figura 2.4). Como ya vimos en el ejemplo 2.22, X no es de Kelley.

Recordemos que $X = Y \cup Z$, donde $Z = pq$ y $Y = J \cup R$ con

$J = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$, $R = \{(x,\ \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\}$.

Consideremos $Z' = [0, 1]$ y el espacio unión $Y \cup Z'$. Sean $A = \{Cl(q_1), q\}$, $g_1 : Y \cup Z' \longrightarrow X$ y $\mathbb{P} : Y \cup Z' \longrightarrow (Y \cup Z')/\sim$, dadas por:

$$g_1(x) = \begin{cases} (0, 2-x) & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ x & \text{si} \quad x \in Y. \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{si} \quad x \in (Y \cup Z') - A \\ A & \text{si} \quad x \in A. \end{cases}$$

Observemos que g_1 es es una función continua, sobreyectiva y constante en cada fibra de $\mathbb{P}^{-1}(x)$ y $\mathbb{P}$ es una función cociente. Luego, por el Teorema 1.31, existe $f_1 : (Y \cup Z')/\sim \longrightarrow X$ función continua tal que $f_1 \circ \mathbb{P} = g_1$. Dado que g_1 y $\mathbb{P}$ son funciones sobreyectivas, entonces f_1 es sobreyectiva. Veamos que f_1 es inyectiva. Sean $a, b \in (Y \cup Z')/\sim$ tales que $f_1(a) = f_1(b)$. Por demostrar que $a = b$.

(1) Para $f_1(a) = f_1(b) \neq q$, $g_1^{-1}(f_1(a))$ es singular. Sean $a', b' \in Y \cup Z'$ tales que $\mathbb{P}(a') = a$ y $\mathbb{P}(b') = b$. Por demostrar que $a' \in g_1^{-1}(f_1(a))$. En efecto, $g_1(a') = (f_1 \circ \mathbb{P})(a') = f_1(a)$ y así $a' \in g_1^{-1}(f_1(a))$. Similarmente, $b' \in g_1^{-1}(f_1(a))$ por lo que $a' = b'$ y $\mathbb{P}(a') = \mathbb{P}(b')$ y así $a = b$.

(2) Para $f_1(a) = f_1(b) = q$. Sean $a', b' \in Y \cup Z'$ tales que $\mathbb{P}(a') = a$ y $\mathbb{P}(b') = b$. Por demostrar que $a', b' \in \{Cl(q_1), q\} = g_1^{-1}(q)$. En efecto, $g_1(a') = (f_1 \circ \mathbb{P})(a') = f_1(a) = q$ y así $a' \in g_1^{-1}(q)$. Similarmente, $b' \in g_1^{-1}(q)$ por lo que $\mathbb{P}(a') = \mathbb{P}(b')$ y así $a = b$.

Entonces f_1 es una función continua y biyectiva entre continuos por lo que es un homeomorfismo y en consecuencia X es homeomorfo a $(Y \cup Z')/\sim$, (veáse la Figura 2.15).

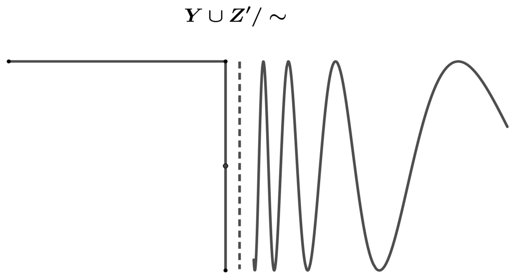


Figura 2.15: X homeomorfo a $(Y \cup Z')/\sim$.

Veamos que los niveles de X son semi-Kelley. Sea $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney.

Caso 1: $t \geqslant \mu(J)$;

Sea $f : \mu^{-1}(t) \longrightarrow [-1,1]$ dada por $f(A) =$mín $(\pi_1(A))$. f es una función continua. Veamos que f es inyectiva. Sean $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $f(A) = f(B)$, entonces mín $(\pi_1(A))$=mín $(\pi_1(B))$. Sean $a \in A$ y $b \in B$, $\pi_1(a) =$mín $(\pi_1(A))$ y $\pi_1(b) =$mín $(\pi_1(B))$ por lo que $\pi_1(a) = \pi_1(b)$.

Analizamos dos subcasos:

Subcaso 1: $a \in J$; entonces A es homeomorfo a Y y, como $\pi_1(a) = \pi_1(b)$, $b \in J$ y por tanto B es homeomorfo a Y; Se sigue que $A \subset B$ o $B \subset A$. Así, como $\mu(A) = \mu(B)$ se tiene que $A = B$.

Subcaso 2: $a \in X - J$; y analizamos dos subcasos:

(2.1) $a \in X - Y$; entonces $b \in X - Y$ y $a = b$ por lo que $A \subset B$ o $B \subset A$. Así, como $\mu(A) = \mu(B)$ se tiene que $A = B$.

(2.2) $a \in R$; entonces $b \in R$ y $a = b$ por lo que $A \subset B$ o $B \subset A$. Así, como $\mu(A) = \mu(B)$ se tiene que $A = B$.

Así, f es una función continua e inyectiva y dado que $\mu^{-1}(t)$ es compacto, f es un homeomorfismo sobre su imagen. Luego, $f(\mu^{-1}(t))$ es un subcontinuo no degenerado de $[-1,1]$. Así, $f(\mu^{-1}(t))$ es un arco y, en consecuencia $\mu^{-1}(t)$ es un arco. Dado que los arcos son de Kelley, por la observación 2.34 son semi-Kelley, es decir, en este caso $\mu^{-1}(t)$ es semi-Kelley.

Caso 2: $t < \mu(J)$;

Sean
$$\mathcal{A} = \{A \in C(X) : A \cap Z \neq \emptyset \text{ y } \mu(A) = t\} \text{ y}$$
$$\mathcal{B} = \{A \in C(X) : A \subset Y \text{ y } \mu(A) = t\}.$$

Observemos que:

(a) $\mu^{-1}(t) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$,

(b) $\mathcal{B} = \mu|_{C(Y)}^{-1}(t)$ y

(c) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{E\}$, donde $E = qs$ para algún $s \in qr$ tal que $\mu(E) = t$.

Veamos que $\mathcal{A}$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$. Sea $h_1 : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ dada por $h_1(A) = 2 - \text{ máx}(\pi_2(A))$.

- h_1 es continua: Por ser composición de funciones continuas.
- h_1 es inyectiva: Sean $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $h_1(A) = h_1(B)$, entonces $2 - \text{ máx}(\pi_2(A)) = 2 - \text{ máx}(\pi_2(B))$ y así $\text{máx}(\pi_2(A)) = \text{ máx}(\pi_2(B))$. Como $A \cap Z \neq \emptyset$, $B \cap Z \neq \emptyset$ y $\mu(A) = t = \mu(B) < \mu(J)$ entonces $A = p'r'$ y $B = p'r^*$ donde $p' \in [1,2)$ y $r', r^* \in (-1,2)$ por lo que $A \subset B$ o $B \subset A$ y por tanto $A = B$.
- h_1 es sobreyectiva: Observemos que $h_1(D) = 0$ para $D = ps'$, $s' \in pq$ tal que $\mu(D) = t$ y $h_1(E) = 1$. Así, $0, 1 \in h_1(\mathcal{A})$. Por la Proposición 1.50, $\mathcal{A}$ es un conjunto conexo y dado que h_1 es una función continua, entonces $h_1(\mathcal{A})$ es conexo en $[0,1]$ y por tanto $h_1(\mathcal{A}) = [0,1]$.

Así, h_1 es un homeomorfismo tal que $h_1(E) = 1$.

Sea $h_2 : \mathcal{B} \longrightarrow Y$ un homeomorfismo tal que $h_2(E) = q$ y sea $g_2 : Y \cup Z' \longrightarrow \mu^{-1}(t)$ dada por:

$$g_2(x) = \begin{cases} h_1^{-1}(x) & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ h_2^{-1}(x) & \text{si} \quad x \in Y. \end{cases}$$

Observemos que g_2 es es una función continua, sobreyectiva y constante en cada fibra de $\mathbb{P}^{-1}(x)$ y $\mathbb{P}$ es una función cociente. Luego, por el Teorema 1.31, existe $f_2 : (Y \cup Z')/\sim \longrightarrow \mu^{-1}(t)$ función continua tal que $f_2 \circ \mathbb{P} = g_2$. Dado que g_2 y $\mathbb{P}$ son funciones sobreyectivas, entonces f_2 es sobreyectiva. De manera similar a f_1 se demuestra que f_2 es inyectiva. Así, f_2 es una función continua y biyectiva entre continuos y por tanto es un homeomorfismo y en consecuencia, $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a $(Y \cup Z')/\sim$.

Como ya vimos X es homeomorfo a $(Y \cup Z')/\sim$ y $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a $(Y \cup Z')/\sim$, entonces $\mu^{-1}(t)$ es homeomorfo a X. Por el Ejemplo 2.35, X es semi-Kelley y así $\mu^{-1}(t)$ es semi-Kelley. Entonces se tiene que cada nivel, $\mu^{-1}(t)$, es semi-Kelley y sin embargo, X no es de Kelley (Ejemplo 2.22).

Capítulo Tercero

Conclusiones

En este capítulo, mencionaremos algunos de los resultados que probamos en el desarrollo de esta investigación.

Hemos visto dos conceptos, continuo límite máximo y continuo límite máximo fuerte, y vimos la relación que hay entre estos dos conceptos obteniendo que ser continuo límite máximo fuerte implica ser continuo límite máximo y describimos un ejemplo que muestra que no todo continuo límite máximo es continuo límite máximo fuerte (Ejemplo 2.4).

Posteriormente, dada la definición de propiedad de Kelley, mostramos una equivalencia que en ocasiones resulta más sencillo para verificar cuando un continuo satisface la propiedad de Kelley (o bien es un continuo de Kelley). Este resultado corresponde a la Proposición 2.17. La relación de continuo de Kelley y los conceptos de continuo límite máximo y continuo límite máximo fuerte se tiene en el Teorema 2.26, que nos dice: X es un continuo de Kelley si y solo si para cada subcontinuo K el único continuo límite máximo en K es K mismo si y solo si el único continuo límite máximo fuerte en K es K mismo.

El Lema 2.27 fue demostrado por Janusz J. Charatonik y Wlodzimierz J. Charatonik en [6, Proposición 3.15, pág. 77], sin embargo, damos una demostración más completa a este resultado. Además, este lema nos permitió dar una demostración alternativa al Teorema 2.28 que fue demostrado por Alejandro Illanes y Sam. B. Nadler, Jr. en [9, Teorema 50.4, pág. 277], este resultado nos dice que la propiedad de Kelley es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney y como consecuencia se tiene que la propiedad de Kelley es una propiedad reversible de Whitney, (Corolario 2.29).

Dado que la definición de continuo semi-Kelley depende del concepto de continuo límite máximo, el Teorema 2.37 nos da una equivalencia usando el concepto de continuo límite máximo fuerte. Uno de los resultados importantes de esta tesis es el Lema 2.38 que nos dice que si X es un continuo que no es semi-Kelley, entonces este contiene un subcontinuo K que tiene dos continuos límites máximos fuertes M y N no degenerados e incomparables, es decir, $M \not\subset N$ y $N \not\subset M$. Cabe mencionar también que este Lema nos permitió dar una prueba completa al Teorema 2.40, el cual fue demostrado por Alicia Santiago e Ivón Vidal en [17, Teorema 3.1, pág. 155] y nos demuestra que la propiedad de semi-Kelley es una propiedad secuencial fuerte reversible de Whitney y en consecuencia es una propiedad reversible de Whitney, (Corolario 2.41).

Finalmente, damos ejemplo de un continuo X tal que todos sus niveles son semi-Kelley y X no es continuo de Kelley, (Ejemplo 2.51), dando una respuesta negativa a la siguiente pregunta: Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos tal que $\lim t_n = 0$ y $\mu^{-1}(t_n)$ es semi-Kelley para cada $n \in \mathbb{N}$, ¿es X de Kelley? (Ejemplo 2.51). Esta pregunta fue formulada en base a las generalizaciones que demostraron Janusz J. Charatonik y Wlodzimierz J. Charatonik en [6] con respecto a los resultados de Roger W. Wardle en [18].

Bibliografía

[1] G. Acosta, *Hiperespacios y la Propiedad de Kelley*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Escuela de Matemáticas, Coahuila México, 1994.

[2] G. Acosta, A. Illanes, *Continua which have the property of Kelley hereditarily*, Topology and its Applications. 102 (2000) 151-162.

[3] F. Casarrubias, A. Tamariz, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, serie de textos nivel medio 37, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2012.

[4] E. Castañeda Alvarado, P. I. Vidal Escobar, *Property of begin semi-Kelley for the cartesian product and Hyperspaces*, Comment. Math. Univ. Carol. 58 (3) (2017) 359–369.

[5] J. J. Charatonik, *History of Continuum Theory*, Handbook of the history of general topology, Vol. 2, 703-786, Hist. Topol. 2, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1998.

[6] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, *A weaker form of the property of Kelley*, Topol. Proc. 23 (1998) 69–99.

[7] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, *Property of Kelley for the cartesian product and Hyperspaces*, Proceding of the American mathematical society, Vol. 136, No.1 (2008) 341-346.

[8] V. Córdova Salazar, *Elementos Básicos de Hiperespacios de Continuos*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2011.

[9] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[10] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Series de Textos 28, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[11] H. Kato, *A note on continuous mappings and the property of J.L. Kelley*, Proc. Amer. Math. Soc., 112(1991) 1143-1148.

[12] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc., 52 (1942), 22-36.

[13] S. B. Nadler, Jr., *Confluent images of the sinusoidal curve*, Houston Journal of the Mathematics, Vol. 3, No.4 (1977) 515-519.

[14] S. B. Nadler, Jr., *Whitney-reversible properties*, Fund. Math. (1980) 235–248.

[15] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics Series*, Vol 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel and Hong Kong, 1992.

[16] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets. A Text With Research Questions*, Aportaciones Matemáticas, Series de Textos 33, Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[17] A. Santiago Santos, P. I. Vidal Escobar, *Property of being semi-Kelley is a sequentially strong Whitney reversible property*, Topology and its Applications. 243 (2018) 153-158.

[18] R. W. Wardle, *On a property of J.L. Kelley*, Houston J. Math. 3 (1977) 291-299.

[19] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, 1998.

[20] H. Whitney, *Regular families of curves*, Annals Math. (1933) 244–270.

Índice alfabético