



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD  
AUTÓNOMA DE PUEBLA**

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS MAESTRÍA  
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO EN  
MATEMÁTICAS: TRES SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA 1°  
DE SECUNDARIA**

**TESIS**

PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

PRESENTA

**JOSÉ LUIS CORIA GONZÁLEZ**

DIRECTOR

**DR. JUAN CARLOS MACÍAS ROMERO**

PUEBLA, PUE. JUNIO 2018



**BUAP**

**DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**  
**SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el Lic.

**JOSÉ LUIS CORIA GONZÁLEZ**

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 25 de junio de 2018, con la tesis titulada:

**“APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO EN MATEMÁTICAS:  
TRES SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA 1o. DE SECUNDARIA”**

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

**A T E N T A M E N T E.**  
H. Puebla de Z. a 26 de junio de 2018

*P.A. Lidia Aurora Hernández Rebollar*

**DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV**  
**COORDINADOR DE LA MAESTRIA**  
**EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**



Cop Archivo  
DR. JSI / lagm\*

Facultad  
de Ciencias  
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,  
Ciudad Universitaria, Col. San  
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570  
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

## **Agradecimientos institucionales**

Expreso mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca económica otorgada durante mi estancia de dos años en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla cursando la Maestría en Educación Matemática, incentivo que me permitió realizar la investigación presentada y culminar satisfactoriamente mis estudios de posgrado.

Igualmente, expreso mi agradecimiento a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla por ser una institución con visión teniendo en su oferta académica el posgrado Maestría en Educación Matemática necesario para contribuir al desarrollo educativo de calidad en nuestro país.

Mi agradecimiento también al posgrado Maestría en Educación Matemática por la apertura otorgada para poder realizar los estudios correspondientes, por la preocupación en la adecuación y comodidad de sus instalaciones, y por la selección acertada de todos los que colaboran dentro de este posgrado, personas que siempre están apoyando permitiendo lograr tu crecimiento personal y profesional. Vivir la maestría y convivir con los profesores ha ampliado, cambiado y mejorado mi visión de la enseñanza de las matemáticas.

## **Agradecimientos personales**

La elaboración de este trabajo no hubiera sido posible sin la colaboración y el apoyo incondicional de muchas personas que contribuyeron a su perfeccionamiento. Quiero agradecer, de manera específica, a estas personas que por su disposición y profesionalismo otorgado fueron las que más me apoyaron para la realización de este trabajo. Las presento en el orden que las fui conociendo.

A Abigail García Martínez por su amabilidad, su disposición, su ánimo y su ayuda para poder realizar todos los trámites requeridos en cada momento que se necesitaba.

A mis profesores, doctor Antonio Juárez López por su paciencia y tranquilidad mostrada durante sus clases, y por sus recomendaciones siempre actualizadas de lecturas significativas sobre educación matemática. Doctor Josip Slisko Ignjatov por sus clases tan amenas y prácticas sobre métodos de investigación. Doctor Eric Flores Medrano por el amplio y variado campo de lecturas y documentos que nos proporcionó en sus clases, permitiendo contemplar el desarrollo, investigaciones y propuestas de la matemática educativa. Doctora Dinazar Escudero Ávila por su profesionalismo compartido y por entender mis constantes cuestionamientos en sus clases. Doctora Honorina Ruiz Estrada por sus clases tan analíticas y metódicas que nos hizo entender algunas situaciones de abstracción de la matemática

Al doctor Juan Carlos Macías por dirigir tan atinadamente mi trabajo de tesis contribuyendo a precisar y a reafirmar muchas ideas que teníamos en común respecto a la forma en que se debería impartir una clase de matemáticas.

A la doctora Lidia Hernández Rebollar por su amabilidad y precisión para corregir tan oportunamente este trabajo.

A la doctora María Araceli Juárez Ramírez por ser miembro del jurado y por sus comentarios tan positivos hacia este trabajo.

## **Dedicatorias**

Hay personas que no laboran dentro de la Maestría, pero que igualmente sin su apoyo no hubiera logrado concluir esta etapa de mi vida. A ellas dedico este trabajo.

A mi padre, Eleazar Coria Durán que, sin ser una persona cariñosa, luchó y tuvo la preocupación por darle a su familia un lugar seguro donde vivir y porque siempre tuviera lo indispensable.

A mi madre, Alicia González Cabrera, por su sobreprotección, por su apoyo para que siempre pudiera estudiar y por todo su amor sembrado en mí, el cual me convirtió en una persona de bien dando frutos para crecer sin muchos conflictos emocionales.

A mi abuela materna, Victoria, por su trato y cuidado que siempre eran una manifestación de amor que finalmente te hacen valorar la vida.

A mis hermanos, Silverio por todas sus enseñanzas, Marco Antonio por siempre cuidarme, y Lucero por su constante apoyo incondicional.

A mi esposa, Belia Tlecuitl Delgado, por ser una persona tan sensible, atenta y bondadosa, y que decidió compartir su vida conmigo. Por su fortaleza para aguantar los momentos difíciles que hemos vivido, pero en especial por ese amor que siempre me ha manifestado y por su gran apoyo para hacerse cargo de nuestra familia pudiendo dedicarme a estudiar y concluir este posgrado.

A mis hijos José Luis, Rodrigo, Alejandro y Ricardo, el amor hacia ellos fue el motor que me obligó a superarme.

A mi querida suegra, Yolanda Delgado Flores, por estar tan pendiente, preocupada y ocupada de que siempre estemos bien.

A mis cuñadas, Lucia y Marisol, por salvarnos como familia ante situaciones difíciles que nos ha tocado vivir.

A mi profesor de quinto y sexto de primaria, Saul Tenorio, por su trato amable y su forma agradable de conducir sus clases.

A mi profesor de matemáticas de tercero de secundaria, Dionisio Cruz Valderrabano, por la disciplina, el orden y su forma de impartir sus clases (enseñanza no tradicional) que sembraron en mí el entendimiento de la matemática.

Al mi director de la Normal Superior Benavente, el hermano José Manuel Velazco Arzac por su gran calidad humana y por su gran insistencia para titularme del nivel licenciatura.

A mi exalumna Verónica Alcázar López, que fui su profesor de matemáticas en secundaria y ahora ella es maestra de matemáticas, por su insistencia y su ánimo para inscribirme en este posgrado, sin el cual no lo hubiera hecho.

A mis compañeros de maestría, Domiciano Domínguez Campos, Lázaro García Caraveo y Brenda Rosales Ángeles por su amistad, apoyo y compañía.

# Índice

<b>Resumen</b> .....	1
<b>Abstract</b> .....	1
<b>Presentación</b> .....	2
<b>Capítulo 1. Antecedentes y perspectivas de la educación matemática</b> .....	9
1.1. La enseñanza de la matemática como arte.....	9
1.2. Enseñanza tradicional de la matemática.....	11
1.3. La didáctica de la matemática como ciencia.....	12
1.4. La educación matemática como investigación.....	14
<b>Capítulo 2. Consideraciones para la realización de esta tesis</b> .....	16
2.1. Consideraciones generales.....	16
2.2. Algunas dificultades en el aprendizaje de la matemática.....	18
2.3. Justificación.....	22
2.4. Hipótesis.....	23
2.5. Pregunta de investigación.....	24
2.6. Objetivos.....	24
<b>Capítulo 3. fundamentos teóricos</b> .....	25
3.1. El aprendizaje por descubrimiento.....	25
3.2. Aprendizaje por descubrimiento de Jerome Bruner.....	29
3.3. David Ausubel, detractor del aprendizaje por descubrimiento.....	30
3.4. Antony Orton, ¿pueden los alumnos descubrir las matemáticas por si mismos?.....	31
3.5. Desarrollo cognitivo de Jerome Bruner.....	33
3.6. Contrato didáctico y efecto Topaze.....	37
3.7. Transposición didáctica de Yves Chevallard.....	39
3.8. Estructura de las secuencias.....	41
<b>Capítulo 4. Metodología de investigación</b> .....	43
4.1. Método.....	43
4.2. Población.....	43
4.3. Procedimiento.....	45

<b>Capítulo 5. Secuencia didáctica 1</b>	46
5.1. Resumen	46
5.2. Justificación	46
5.3. Objetivo	48
5.4. Sustento teórico de la estructura de la secuencia	48
5.5. Material didáctico y/o manipulativo a utilizar	48
5.6. Conocimientos previos	49
5.7. Sesiones y tiempos	49
5.8. Pregunta inicial	49
5.9. Pre-test	49
5.10. Descripción de la secuencia	49
5.12. Post-test	59
5.11. Aplicación de la secuencia	59
5.13. Observaciones, resultados y consideraciones	60
<b>Capítulo 6. Secuencia didáctica 2</b>	69
6.1. Resumen	69
6.2. Justificación	69
6.3. Objetivo	70
6.4. Sustento teórico de la estructura de la secuencia	70
6.5. Material didáctico y/o manipulativo a utilizar	71
6.6. Conocimientos previos	71
6.7. Sesiones y tiempos	72
6.8. Pregunta inicial	72
6.9. Pre-test	72
6.10. Descripción de la secuencia	73
6.11. Actividades y ejercicios	77
6.12. Aplicación de la secuencia	81
6.13. Post-test	81
6.14. Observaciones, resultados y consideraciones	82

<b>Capítulo 7. Secuencia didáctica 3</b> .....	89
7.1. Resumen.....	89
7.2. Justificación.....	89
7.3. Objetivo.....	90
7.4. Hipótesis.....	90
7.5. Sustento teórico de la estructura de la secuencia.....	90
7.6. Material didáctico y/o manipulativo a utilizar.....	91
7.7. Conocimientos previos.....	91
7.8. Sesiones y tiempos.....	91
7.9. Pregunta inicial.....	91
7.10. Pre-test.....	92
7.11. Descripción de la secuencia.....	92
7.12. Guía de preguntas sugeridas.....	96
7.13. Aplicación de la secuencia.....	97
7.14. Post-test.....	98
7.15. Observaciones, resultados y consideraciones.....	98
<b>Conclusiones</b> .....	110
<b>Referencias bibliográficas</b> .....	117
<b>Anexos</b> .....	118
1. Plan de clase para la secuencia 1.....	118
2. Plan de clase para la secuencia 2.....	120

## **Resumen**

Se describen tres secuencias didácticas de matemáticas, enfocadas para 1° de secundaria, su puesta a prueba, las observaciones realizadas y los resultados de su aplicación. Cada secuencia se diseñó para experimentar el Aprendizaje por Descubrimiento y la Teoría de Desarrollo Cognitivo propuestos por Jerome Bruner. En la primera intervención se aborda la identificación de fracciones, como parte todo, que están involucradas en las piezas de un tangram. En la segunda intervención se aborda el establecimiento de la ley de los signos para la suma de números enteros utilizando fichas de colores. En la tercera intervención se aborda la ampliación y el fortalecimiento, en el alumno, de la noción del número Pi utilizando tapas circulares. Las secuencias están diseñadas para aplicarse en 1° de secundaria, aunque, siguiendo la línea de investigación experimental, pudieran ser aplicadas en grados anteriores o posteriores. Cada intervención se presenta en un formato sugerido para facilitar la aplicación y la experimentación ante grupo. Al final de este trabajo, se anexan los planes de clase correspondientes respaldados de acuerdo a la guía propuesta por Ángel Díaz Barriga.

## **Abstract**

Three didactic sequences of Mathematics are described in this research. Mainly, focused for 1st grade of junior high school. The observations are made and the results of its application by testing. Each sequence is designed to apply the Discovery Learning and Theory of Cognitive Development proposed by Jerome Bruner. The first intervention addresses the identification of fractions, as part of everything, that are involved in the pieces of a tangram. In the second intervention the establishment of the law of signs to add whole numbers using colored cards. In the third intervention the expansion and strengthness, in the student, of the notion of Pi number using circular covers is addressed. The sequences are focused to be applied in 1st grade of junior high school, although, is following the line of experimental research, they could be applied in previous or later school grades. Each intervention is presented as a suggested format to facilitate application and experimentation before a group. At the end of this work, the corresponding class plans are backed up according to the guide proposed by Ángel Díaz Barriga.

## Presentación

De acuerdo a la visión de la Didáctica de las Matemáticas como “una ciencia de diseño de procesos y recursos para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática”, resaltada por autores como Wittman, Hjalmarson, Lesh y Sriramn (Godino, Batanero y Contreras, 2013. p. 1), y considerando algunas inquietudes personales, que como profesores de matemáticas tenemos, nacientes dentro de nuestra práctica educativa, decidimos enfocar este trabajo hacia el diseño, la elaboración y la puesta a prueba de secuencias didácticas que propiciaran en el alumno el aprendizaje por descubrimiento.

Las inquietudes mencionadas corresponden a algunas ideas y actividades que creemos son didácticas y que de diversas formas ya han sido experimentadas en nuestra práctica docente. Al considerar que la puesta en práctica de dichas ideas y actividades nos han dado buenos resultados en el aprendizaje de los estudiantes, se contempló que estuvieran presentes, de una manera formal, en las secuencias a diseñar. Las ideas y actividades que decidimos involucrar son:

- a) La participación constante del alumno durante la clase.
- b) La utilización de un material manipulativo como una forma de atraer la atención y ayudar a visualizar en el alumno lo que va a aprender.
- c) El planteamiento, como inicio de clase, de una pregunta o un problema para motivar e interesar al alumno.
- d) Implementar la clase a manera de juego.
- e) No desarrollar la clase como una simple presentación de los conocimientos.
- f) Conducir al alumno a que por sí mismo llegue a lo que se pretende enseñar.
- g) Que dicha conducción se realice exclusivamente a manera de preguntas.

Todo lo anterior se decidió involucrar al considerarlo como una guía adecuada para lograr un aprendizaje por descubrimiento. La noción que teníamos al respecto es que los estudiantes, si son guiados adecuadamente por su profesor, pueden llegar a visualizar y a obtener el conocimiento por sí mismos.

Al buscar información, en diferentes medios, sobre aprendizaje por descubrimiento, nos encontramos con un autor norteamericano representativo de este tipo de aprendizaje que promueve su aplicación en las aulas, nos referimos a Jerome Bruner. Debido a las virtudes que se le asignan a este tipo de aprendizaje, y debido también a que coincidieron con algunas de nuestras

ideas a involucrar, decidimos entonces considerar sus aportaciones al respecto en el diseño de nuestras secuencias. Jerome Bruner también aporta una teoría de desarrollo cognitivo que observamos se asemejaba y se adaptaba a la forma en que pretendíamos diseñar nuestras secuencias didácticas, por lo cual también decidimos considerarla en nuestro trabajo. En esta última teoría, Bruner contempla un proceso de aprendizaje que se establece a través de tres formas o fases las cuales son: enactiva, icónica y simbólica. Se describen, en este trabajo, algunas ideas sobre descubrimiento, las principales ideas de Jerome Bruner del aprendizaje por descubrimiento y su teoría del desarrollo cognitivo.

Debido a la existencia de polémica en cuanto a la efectividad del aprendizaje por descubrimiento, incluimos las características más importantes de dos opiniones diferentes que hablan al respecto. Una opinión es la de Anthony Orton tomada del capítulo “¿Pueden los estudiantes aprender por descubrimiento?” de su libro titulado “Didáctica de las matemáticas”. La segunda opinión es de David Ausubel que en su libro titulado “Psicología Educativa” incluye un capítulo que habla exclusivamente sobre Aprendizaje por Descubrimiento y que, en el papel de detractor, cuestiona y se contrapone a los que apoyan este tipo de aprendizaje, entre ellos a Jerome Bruner.

Como una forma de justificar las razones de elaboración de las secuencias propuestas, creemos importante entender el desarrollo que ha tenido la didáctica de la matemática, que hoy ya no se puede ver como un arte y que ha luchado por, y logrado obtener, su carácter de ciencia. Precisamente en algunos países, a la didáctica de la matemática como ciencia se le denomina Educación Matemática. Es por esta razón que este trabajo inicia con el capítulo denominado “Antecedentes y perspectivas de la Educación Matemática” dando un breve recorrido histórico de la misma enfocando la enseñanza tradicional de la matemática y las necesidades actuales de cambio en su aprendizaje.

Como una manifestación de expresar parte de lo aprendido significativamente en los cursos de la Maestría de Educación Matemática, se presenta este trabajo como una propuesta diferente de realizar una clase de matemáticas, que se contrapone a la enseñanza tradicional de la matemática, en donde se aplican algunas teorías y conceptos propuestos por la didáctica de la matemática como ciencia. La esencia de las secuencias didácticas es mostrar el aprendizaje por descubrimiento, el cual involucra la participación activa de los estudiantes, y la forma en que se guía a los estudiantes a encontrar el conocimiento.

La explicación de cada secuencia se complementa con partes previas y posteriores que ayudan a visualizar la estructura de la secuencia y la experiencia realizada. En total son 15 partes que integran cada presentación siendo las siguientes:

- 1) Resumen
- 2) Justificación
- 3) Hipótesis
- 4) Objetivo
- 5) Sustento teórico de la estructura de la secuencia
- 6) Material didáctico y/o manipulativo a utilizar
- 7) Conocimientos previos
- 8) Sesiones y tiempos
- 9) Pregunta inicial
- 10) Pre-test
- 11) Descripción de la secuencia
- 12) Actividades y ejercicios
- 13) Aplicación de la secuencia
- 14) Post-test
- 15) Observaciones y resultados

Asimismo, se proporcionan para las secuencias 1 y 2 sus correspondientes planes de clase. Los tiempos, las sesiones y las preguntas que se plantean en las secuencias son sugeridos y cada profesor los puede adaptar a su conveniencia.

Las secuencias 1 y 2 no incluyen la parte 3) de hipótesis debido a que inicialmente no se consideró incluirla. Para las secuencias 1 y 3 se omite la parte 12) de actividades y ejercicios ya que no se realizaron como una sola parte. Hay una parte más que no se incluye como tal debido a que se presenta, para cada secuencia, en momentos diferentes, es la correspondiente a una guía de preguntas sugeridas, las cuales son las que se van planteando a los estudiantes para conducirlos hacia el aprendizaje. La parte 11) de descripción de la secuencia se presenta como un formato a seguir para facilitar la aplicación ante grupo si es que algún profesor se encuentra interesado en hacerlo.

Debido a que creemos que un proceso didáctico debe comenzar con la introducción de nociones y la adquisición de conceptos, y debido también a que el nivel escolar en el que

principalmente nos dedicamos a impartir clases es en secundaria, los temas tratados en las secuencias didácticas son referentes a la visualización de nociones matemáticas por parte del estudiante. Para la selección de las nociones a tratar influyó la búsqueda del material didáctico-manipulativo que queríamos se utilizara en cada secuencia. Se buscó un material simple, común, económico y fácil de conseguir. De igual forma, la selección obedeció a la búsqueda de algunos conceptos que consideramos son esenciales para la construcción de una cultura matemática básica y, al mismo tiempo, fueran conceptos fundamentales y transversales del plan de estudios para la educación básica.

Después de algunas revisiones, nos decidimos por tratar, en la primera secuencia, la noción de fracción como parte-todo, en la segunda secuencia, la noción de suma de números enteros, y en la tercera secuencia, la noción del número Pi, tratando de abarcar tres nociones de ramas diferentes de la matemática. Estamos conscientes del riesgo de tratar los dos primeros temas porque estas nociones ya han sido presentadas en muchas investigaciones y desde varias perspectivas. Aun así, no quisimos dejar de plantear nuestras propuestas porque, en el caso del tema de fracciones, no encontramos reportes de pruebas de secuencias didácticas que consideran el uso del tangram ni desde las perspectivas teóricas de Jerome Bruner. Por el lado de la suma de números enteros, la propuesta de manejar fichas de colores se encuentra en algunos libros de matemáticas para maestros, pero no se especifica exactamente cómo realizar la actividad ni una guía didáctica para aplicarla, igualmente tampoco encontramos reportes de aplicación y resultados de esta propuesta enfocada con las metodologías de Jerome Bruner. Finalmente, en el caso del número Pi, algunos libros de texto incluyen realizar la actividad junto con su maestro, pero sin una guía específica y metódica de cómo realizarla. Aunque la noción del número Pi también se aborda de varias formas en casi todos los libros de texto y en los planes y programas oficiales de matemáticas, normalmente se refieren a explicar su definición y a cómo encontrar su valor con diferentes fórmulas, pero tampoco encontramos reportes de resultados de experiencias físicas simples que los estudiantes hayan realizado, permitiéndoles obtener un valor aproximado del número Pi para clarificar su noción.

Tal vez, lo novedoso de las secuencias no son los temas escogidos ni la estructura didáctica planteada, pero creemos que lo novedoso es la presentación práctica del desarrollo cognitivo propuesto por Jerome Bruner, la experimentación de cada una de las secuencias, y los resultados obtenidos. Pensamos que esto debería motivar a profesores de matemáticas, interesados

en enriquecer la cultura matemática de sus estudiantes, a experimentar las secuencias para comparar resultados y compartir conclusiones.

Ya se nos ha cuestionado el hecho del por qué seleccionamos, como respaldo para las secuencias elaboradas, una teoría un tanto antigua (que al parecer no ha tenido continuidad), y no escogimos alguna teoría más actual y de moda. Hay varias razones que explican la selección, en primer lugar, porque creemos que una forma en que los estudiantes deberían iniciarse en el aprendizaje de la matemática es por medio del descubrimiento. En segundo lugar, porque las dos propuestas didácticas de Jerome Bruner nos parecieron interesantes y decidimos rescatarlas, revivirlas y ponerlas en práctica para investigar su funcionalidad. En tercer lugar, al realizar una lectura más reflexiva sobre las dos teorías mencionadas de Jerome Bruner, encontramos muchas coincidencias de sus propuestas con la forma en que queríamos diseñar nuestras secuencias. En cuarto lugar, porque queríamos presentar un planteamiento diferente a lo que normalmente observamos se realiza en clases de matemáticas y el planteamiento de Bruner nos daba los elementos que nos parecieron diferentes e innovadores. Y, en quinto lugar, porque percibimos que aquí en México actualmente se está mirando más hacia la educación matemática francesa, y nosotros quisimos mirar hacia otro lado (ya que lo teníamos, Estados Unidos) para tener una perspectiva diferente de trabajo. Es muy fácil señalar y criticar situaciones negativas de la enseñanza y aprendizaje de la matemática sin dar soluciones. Creemos que es urgente un cambio en la forma de presentar la matemática en las clases escolares y visualizamos que ya no se puede seguir enseñando la matemática desde la perspectiva tradicional de sólo compartir información (reglas y definiciones). Lo que se pretende con el diseño y la experimentación de las secuencias didácticas es plantear, a manera de ejemplo, lo que sería una clase práctica con las características mencionadas y mostrando el cambio deseado respecto a la enseñanza tradicional. Las secuencias pretenden mostrar también un ejemplo de lo que se denomina Transposición Didáctica, es por lo que también se incluye un apartado en donde se describe brevemente en qué consiste este término de acuerdo al autor Ives Chevallard.

Las secuencias procuran llevar a los estudiantes a una reinención del conocimiento con la finalidad de que se apropien de él. Aquí es donde se presenta la esencia de las secuencias en cuanto a que las nociones seleccionadas no se presentan pasivamente por el profesor al estudiante, ahora el estudiante se involucra en su aprendizaje y se convierte en protagonista. El proceso consiste en llevar al alumno a visualizar la noción a base de cuestionamientos y utilizando algún

material didáctico-manipulativo sacando de su contexto dicha noción. Es en este proceso que se está contemplando la Transposición Didáctica.

Existen muchos temas de interés que se relacionan en el desarrollo y estructuras de las secuencias. Era nuestra intención incluir en este trabajo la descripción de algunos de esos temas como, por ejemplo, el constructivismo, la adquisición de conceptos, el diseño propio de una secuencia, la visión de un laboratorio de matemáticas, o la epistemología de la matemática educativa, pero fue nuestro sentir que nos alejaríamos del tema central de las intervenciones, por lo cual, decidimos omitirlos y considerar sólo los más directamente conectados.

En cuanto a las referencias utilizadas, enfatizamos que nos remitimos tal cual a los libros utilizados señalando el año de la última impresión o reimpresión reportado en dicho libro.

La estructura de la tesis se organizó en 8 capítulos, los primeros 4 capítulos describen y justifican los elementos necesarios para la elaboración de las secuencias y la metodología de investigación utilizada. Los capítulos 5, 6 y 7 corresponden a la descripción, tanto de su estructura como de su aplicación, de cada una de las intervenciones realizadas. Finalmente, en el capítulo 8 se presentan las consideraciones finales resultado de la puesta a prueba de cada una de las secuencias.

En el capítulo 1 se aborda una breve historia de la Educación Matemática iniciando con la descripción de la enseñanza de la matemática como arte, dando algunos antecedentes, su desarrollo, y su consolidación como ciencia hasta llegar a su postura actual.

En el capítulo 2 se describen las inquietudes que propiciaron la elaboración de este trabajo de tesis y la forma en que se fueron elaborando las secuencias propuestas. Se inicia comentado algunas dificultades existentes en el aprendizaje de la matemática y se justifican los contenidos, la estructura de las secuencias y los temas seleccionados. Se especifica la hipótesis, la pregunta de investigación y los objetivos.

El capítulo 3 contiene lo referente al respaldo teórico utilizado para la elaboración de las secuencias. Hablamos del aprendizaje por descubrimiento, de la propuesta de Jerome Bruner, y de su Teoría de Desarrollo Cognitivo. Asimismo, hablamos de la postura que tiene Anthony Orton sobre la utilización viable del aprendizaje por descubrimiento en las aulas, y la postura de David Ausubel como opositor a las bondades que se le asignan a este tipo de aprendizaje. Incluimos también en este capítulo la descripción breve de “contrato didáctico”, “efecto Topaze” y de “transposición didáctica”.

El capítulo 4 está conformado por la metodología de investigación utilizada, que consiste en un estudio de caso, las poblaciones donde se aplicó cada secuencia y el procedimiento realizado.

El capítulo 5 contiene la descripción de la primera secuencia didáctica, en este caso se aborda la noción de fracción desde un enfoque parte-todo, es decir, desde una perspectiva de dividir un “todo” (un cuadrado de papel) en diferentes tamaños y formas (las partes de un tangram). La intervención inicia desde la construcción de un tangram, con hojas de papel, por cada alumno, hasta la utilización de sus partes como material didáctico- manipulativo para llevar al alumno a formarse la idea física de la estructura de una fracción (numerador y denominador). La secuencia se titula “Secuencia didáctica para que los estudiantes identifiquen las fracciones (como parte-todo) que están representadas en las piezas de un tangram”.

En el capítulo 6 se describe la segunda secuencia didáctica que lleva por título “Secuencia didáctica para que los alumnos establezcan la ley de los signos para la suma de números enteros utilizando fichas de colores”. En esta intervención se aborda la realización de sumas de números positivos y negativos, se inicia con la representación de dichos números con fichas de dos diferentes colores. Posteriormente, manipulando sus fichas, previa indicación de cómo manejarlas, los estudiantes serán capaces de visualizar el resultado, junto con su signo (positivo o negativo), de diferentes sumas propuestas por su profesor.

El capítulo 7 presenta la tercera secuencia didáctica, el título es “Secuencia didáctica para que los estudiantes amplíen y fortalezcan su noción del número Pi utilizando tapas circulares”. En esta secuencia se contempla que los alumnos manejen una tapa circular y tiras de papel para encaminarlos a obtener un valor aproximado del número Pi.

El capítulo 8 corresponde a las observaciones, opiniones y reflexiones generales del trabajo realizado. Se especifican las formas viables de aplicación de las secuencias contemplando las actividades propuestas y considerando las teorías aplicadas. Compartimos comentarios diversos de la experiencia y redactamos algunas conclusiones.

## Capítulo 1

# ANTECEDENTES Y PERSPECTIVAS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Como un antecedente y como una forma de justificar la elaboración de las secuencias didácticas que proponemos, creemos necesario presentar un breve recorrido histórico de la evolución que ha tenido la Educación Matemática. Iniciaremos con la revisión de algunos aspectos de la enseñanza tradicional de la matemática y terminaremos con algunas indicaciones del porqué la Educación Matemática se ha consolidado como ciencia.

### 1.1. LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA COMO ARTE

En el ámbito educativo predomina la idea de que, para ser un buen maestro, además de conocer eficazmente la materia que se imparte, es necesario motivar a los estudiantes presentando los conocimientos con cierta emoción y dramatismo. Esto generaría entonces gusto en los alumnos por la materia impartida. Los profesores tenían que volverse una especie de actores frente a grupo para impartir y enseñar su materia, así es como se origina la enseñanza como arte. Por supuesto que el ánimo y las ganas de enseñar de los maestros influye en el gusto de la materia y en el aprendizaje de los estudiantes. Pero, la enseñanza de la matemática como arte no garantiza el aprendizaje de los estudiantes, al respecto se apunta:

“Antiguamente se consideraba que la enseñanza de las matemáticas era un arte y, como tal, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas. Se suponía que el aprendizaje de los alumnos dependía sólo del grado en que el profesor dominase dicho arte y, en cierto sentido, de la voluntad y la capacidad de los propios alumnos para dejarse moldear por el artista” (Chevallard, Bosch y Gascón, 1998. p. 71).

De inicio, la enseñanza de la matemática se estableció como un arte debido a que siguió el esquema general de la didáctica. La didáctica de la matemática como arte se fundamentaba en el supuesto lógico que dice: si se mejora el proceso de enseñanza, entonces automáticamente mejorará el proceso de aprendizaje, pero al parecer esto sólo era una ilusión, como señala Moreno Armella:

“La enseñanza como simple proceso de instrucción, agravada por la hipótesis sobre la capacidad del estudiante de absorber lo que se dice “bien”, no es una concepción, es una ilusión” (D’Amore, 2011. p. 51).

La didáctica como arte se sustentaba en situaciones empíricas, pero ante resultados poco óptimos, se empiezan a vislumbrar las pruebas empíricas con oportunos y bien estudiados dispositivos experimentales. Nace así la investigación experimental del aprendizaje de la matemática y nace también la didáctica de la matemática como ciencia. Es así como “se entra en el campo de la epistemología del aprendizaje” (D’Amore, 2011. p. 65).

El aumento de interés y de investigación de hechos didácticos ha hecho que la didáctica de la matemática evolucione y ha generado el cambio de la concepción clásica de la didáctica. Ahora se ve la necesidad de analizar los procesos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas para poder incidir en el rendimiento de los alumnos (Chevallard, Bosch y Gascón, 1998. p. 71).

Es en esta fase, que la didáctica de la matemática muestra un nuevo campo de actividad, el de investigación científica. Al respecto, Kilpatrick nos comparte: “La investigación en la enseñanza de las matemáticas requiere de una indagación metódica de la naturaleza y el contexto de los procesos utilizados por los profesores para ayudar a los estudiantes a desarrollar sus habilidades y conocimientos matemáticos” (Kilpatrick, Gómez y Rico, 1995. p. 6).

La enseñanza de la matemática practicada como arte muestra la preocupación de los maestros de vocación por enseñar matemáticas. Junto a esto, muchos maestros han creado auténticos métodos para enseñar matemáticas y han mostrado su eficacia en su aprendizaje. Bruno D’Amore señala:

“La didáctica de la matemática como arte produjo, como veremos, resultados interesantes. El objeto de trabajo de quien eligió esta forma de didáctica es esencialmente el siguiente: la enseñanza de la matemática; y el objetivo: crear situaciones (bajo forma de clases, actividades, objetos, ambientes, juegos...) para una mejor enseñanza de la matemática” (D’Amore, 2006. p. 50).

Al no existir un cuerpo docente que organizara, concentrara y compartiera todas estas creaciones individuales, se han perdido muchas buenas ideas y excelentes trabajos practicados.

La enseñanza de la matemática como arte no es suficiente para un buen aprendizaje de la matemática, pero no por esto debe desaparecer. Tiene aspectos positivos que se deben rescatar para pasar a formar parte de la nueva didáctica de la matemática que se enfoca ahora en su

aprendizaje (la didáctica de la matemática como ciencia). Los maestros de matemáticas de hoy deben considerar dos situaciones en su práctica: arte en la enseñanza y ciencia en el aprendizaje. El arte en la enseñanza comienza desde la preparación personal, la preparación de sus clases, la motivación en sus alumnos, la empatía, hasta la búsqueda de formas para el logro del aprendizaje. El maestro debe fundamentar e implementar sus clases en las nuevas propuestas científicas existentes para el aprendizaje de la matemática. La perspectiva de hoy es que no cualquier persona que domine la matemática puede ser un maestro de matemáticas, aún con buenas intenciones le haría falta conocer y aplicar las tendencias de la didáctica matemática como ciencia. El compromiso de un maestro de matemáticas con vocación tiene que ver, en la actualidad, con un arte supremo: despertar en sus alumnos el gusto por la matemática, la creatividad para solucionar problemas, la necesidad de saber, y la búsqueda del conocimiento.

## **1.2. ENSEÑANZA TRADICIONAL DE LA MATEMÁTICA**

La forma de enseñanza que nos tocó vivir en la escuela hacia 1970, se establecía dentro de una relación compuesta por tres elementos: el profesor, el conocimiento y el alumno. Dicha relación consistía principalmente en que el profesor “describía” los conocimientos a sus alumnos para que ellos, por el simple hecho de verlos, los aprendieran. Este tipo de enseñanza predominó por muchos años y todavía en la actualidad se sigue practicando en muchos lugares. La forma de retroalimentación, es decir, la forma de verificar si los estudiantes habían aprendido lo enseñado, la mayoría de las veces, consistía en la presentación de un examen. Dicho examen equivalía a un cuestionario escrito que los alumnos debían contestar acertadamente. Así, el maestro verificaba los conocimientos adquiridos por sus alumnos otorgando una calificación.

La situación descrita de enseñanza es lo que se conoce como una enseñanza tradicional o una enseñanza clásica. Este tipo de enseñanza se utilizaba para todas las materias curriculares incluyendo a la matemática. Al parecer, la enseñanza tradicional originó un aprendizaje memorístico, el estudiante, en el mejor de los casos, se aprendía de memoria lo que suponía era lo más significativo o importante de los temas presentados en clase por su maestro, o lo que suponía podría preguntarle su maestro en el examen. La forma de calificar, o de evaluar, los conocimientos adquiridos, originó también que los estudiantes se interesaran solamente en obtener una “buena” calificación y no se interesaran por obtener “buenos” conocimientos.

Entendemos por enseñanza tradicional de la matemática aquella en la que los conocimientos se presentan al estudiante mediante una simple exposición y el aprendizaje de los estudiantes dependía de la forma en que los conocimientos fueran presentados por el profesor. Al respecto consideramos un párrafo que expresa Guy Brousseau:

“Con frecuencia la enseñanza es concebida como las relaciones entre el sistema educativo y el alumno vinculadas a la transmisión de un saber dado y, de este modo, la relación didáctica se interpreta como una comunicación de informaciones”. “Habitualmente, este esquema es asociado a una concepción de la enseñanza en la que el profesor organiza el saber a enseñar en una serie de mensajes de los cuales el alumno toma lo que debe adquirir” (Brousseau, 2007. pp. 12 y 13).

Bajo este esquema de enseñanza, no se cuestiona ni se realiza un análisis de cómo aprenden los estudiantes ni de las relaciones que se establecen entre sus componentes. El éxito del sistema tradicional de enseñanza de la matemática se debe a que es una postura muy cómoda y sin mucha responsabilidad tanto para el profesor, los estudiantes, los padres de familia y el propio sistema educativo.

### **1.3. LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO CIENCIA**

Bruno D'Amore contempla dos modos diferentes de entender la didáctica de las matemáticas, la didáctica A y la didáctica B (D'Amore, 2006. pp. 53,54):

A: como divulgación de las ideas, fijando por lo tanto la atención en la fase de la enseñanza.

B: como investigación empírica, fijando la atención en la fase del aprendizaje.

Entendemos que la didáctica A se refiere a la enseñanza de la matemática vista como arte y que originó la enseñanza tradicional o clásica de la matemática. La didáctica B origina una nueva postura de la didáctica de la matemática que la lleva a realizar investigaciones de tipo experimental sobre el aprendizaje, considerando un proceso científico, aquí inicia la didáctica de la matemática vista como ciencia.

Para muchas experiencias de investigación, la didáctica de la matemática como ciencia, tuvo que recurrir a la psicología y a la metodología de investigación ampliando su campo de acción. En este punto creemos oportuno señalar la diferencia, si es que la hay, entre “didáctica matemática” y “educación matemática”. A la didáctica de la matemática como ciencia, en el mundo anglosajón,

se le ha denominado Educación Matemática debido a que el término educación es más general y comprensivo que el de didáctica. En otros países como Francia, Alemania, Italia, España, etcétera, normal y difusamente se le sigue llamando “didáctica de la matemática” (D’Amore, 2006. p. 76). En algunos otros países se manejan indistintamente ambos términos.

Entonces ¿qué es o a qué se dedica la educación matemática? Un punto de vista inicial actual que da Steiner, nos lo comparte Bruno D’Amore y en el cual se distinguen tres ámbitos de desarrollo (D’Amore, 2006. p. 109):

- “La acción práctica reflexiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática;
- La tecnología didáctica, que se propone poner a punto materiales para mejorar la eficacia de la instrucción matemática, usando los conocimientos científicos disponibles;
- La investigación científica, que se ocupa de comprender el funcionamiento de la enseñanza de la matemática, en su conjunto, así como el de los sistemas didácticos especiales (maestro, estudiantes y saber)”.

Más recientemente se han dado definiciones diferentes, tal vez más completas o precisas, de Didáctica de la Matemática y de Educación Matemática que marcan una diferencia entre ellas de acuerdo a lo que nos comparte también Bruno D’Amore (2006. p. 112):

- “Didáctica de la matemática: es la disciplina científica y el campo de investigación cuyo objetivo es identificar, caracterizar y comprender los fenómenos y los procesos que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.”
- “Educación matemática: es el sistema social complejo y heterogéneo que incluye teoría, desarrollo y práctica relativa a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Incluye la didáctica de la matemática como subsistema”.

Las definiciones anteriores implican que la educación matemática tenga que ampliar todavía más su campo de acción y tenga que involucrar, para seguirse desarrollando, a la semiótica, a la epistemología, a la sociología y a las ciencias de la educación como la pedagogía y la didáctica general, esto de acuerdo a la gráfica que nos comparte también D’Amore (2006. p. 111).

## 1.4. LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA COMO INVESTIGACIÓN

Las definiciones recientes de didáctica de la matemática y educación matemática descritas, nos permite ver que ahora una actividad importante de la educación matemática es la investigación desde una perspectiva científica. La investigación matemática “se ha desarrollado durante los últimos dos siglos debido a que matemáticos y educadores han enfocado su atención hacia qué matemáticas se enseñan y se aprenden en la escuela y cómo se llevan a cabo estos procesos; también se han interesado en el qué y en el cómo de las matemáticas que deberían enseñarse y aprenderse en la escuela” (Kilpatrick, Rico y Gómez, 1995. p. 1).

Ciencia muy joven, “la educación matemática y la investigación en educación matemática han tenido que luchar para lograr su propia identidad y han tratado de formular su propia problemática y sus propias formas de tratarla. La investigación en educación matemática ha intentado definirse a sí misma y constituir un grupo de personas que se auto-identifiquen como investigadores en educación matemática”. (Kilpatrick, Rico y Gómez, 1995. p. 1).

Kilpatrick nos comparte una definición concisa de lo que es la investigación en educación matemática: indagación metódica acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Agrega que el término indagación sugiere que el trabajo busca dar respuesta a una pregunta específica y el término metódica sugiere que la investigación puede ser guiada por conceptos y métodos de otras disciplinas. Nos dice también que el proceso de indagación debe poder examinarse y verificarse y que como todo buen trabajo científico debe ser erudito, público y abierto a la crítica y posible refutación (Kilpatrick, Rico y Gómez, 1995. p. 2).

Kilpatrick nos dice que la educación matemática y la investigación en educación matemática nacen dentro de las universidades. “Se esperaba entonces que las personas comprometidas con la formación de profesores de matemáticas dentro de una universidad, no sólo debían enseñar, sino también hacer investigación. Esto generó el comienzo de la actividad investigativa en educación matemática” (Kilpatrick, Rico y Gómez, 1995. p. 4). Agrega también que “hasta los años setentas, gran parte de la investigación en educación matemática, y especialmente la realizada en América del Norte, buscaba especificar el comportamiento de los estudiantes o los profesores y analizar este comportamiento en componentes. El mundo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas era visto como un sistema de variables que interactuaban entre sí. El propósito de la investigación era el de describir esas variables, descubrir

sus interrelaciones e intentar manipular algunas de ellas para obtener cambios en otras. Esta visión tiene todavía sus adherentes. Sin embargo, existen orientaciones alternativas” (Kilpatrick, Rico y Gómez, 1995. pp. 4 y 5).

Considerando algunos párrafos, que nos comparte Kilpatrick, completamos esta parte. “En diferentes países del mundo, se han utilizado diversas aproximaciones fenomenológicas a la investigación en educación desde hace tiempo. Recientemente, estas aproximaciones han comenzado a tener una influencia profunda en la investigación matemática. Cada una de las aproximaciones tiene que aportar en el campo, no es posible rechazar ninguna de ellas. La educación matemática requiere de las múltiples perspectivas que estas aproximaciones diferentes (lo mismo que otras-tanto las utilizadas actualmente, como aquellas que están por desarrollar-) pueden aportar a los fenómenos de enseñanza e instrucción” (Kilpatrick, Rico y Gómez, 1995. p. 5).

“En algunas ocasiones el choque de las diferentes aproximaciones metodológicas ha dado lugar a lo que se conoce como “el debate cualitativo-cuantitativo”. Los investigadores deben decidir entre adoptar métodos en los cuales la medición produce información numérica o métodos en los cuales la información que se obtiene no puede ser convertida en números. La aproximación sistémica domina actualmente la investigación en educación matemática. Pero los investigadores matemáticos no deben nunca casarse con una aproximación metodológica, una epistemología, un paradigma, un medio de representación o un método particular. Todos son parciales y provisionales; ninguno puede contar la historia completa. Algunos métodos dan lugar a investigación que satisface algunos criterios y otros no. La multiplicidad de métodos producirá un cuerpo de investigación con una calidad colectiva, aun si los estudios individuales son deficientes” (Kilpatrick, Rico y Gómez, 1995. p. 6).

Terminamos esta parte tomando el siguiente párrafo a manera de conclusión: “La investigación en la enseñanza de las matemáticas requiere de una indagación metódica de la naturaleza y el contexto de los procesos utilizados por los profesores para ayudar a los estudiantes a desarrollar sus habilidades y conocimientos matemáticos” (Kilpatrick, Rico y Gómez, 1995 p. 6).

## Capítulo 2

### CONSIDERACIONES PARA LA REALIZACIÓN DE ESTA TESIS

#### 2.1. CONSIDERACIONES GENERALES

La intención de elaborar y probar secuencias didácticas de matemáticas tiene como propósito aportar y compartir experiencias didácticas prácticas. En las secuencias a diseñar, estará contemplado el involucrar algunas ideas y actividades de origen personal, producto de nuestra práctica educativa, que suponemos ayudan a los estudiantes en su aprendizaje de la matemática. Dichas ideas y actividades son las siguientes:

- a) La participación constante del alumno durante la clase
- b) La utilización de un material manipulativo como una forma de atraer la atención y a ayudar al alumno a visualizar lo que va a aprender
- c) El planteamiento, como inicio de clase, de una pregunta o un problema para motivar e interesar al alumno
- d) Implementar la clase a manera de juego
- e) No desarrollar la clase como una simple presentación de los conocimientos
- f) Conducir al alumno a que por sí mismo llegue a lo que se pretende enseñar
- g) Que dicha conducción se realice exclusivamente a manera de preguntas.

Estas actividades tenían que ver con las experiencias empíricas didácticas realizadas en clase y que, convencidos de que nos daban buenos resultados, las hicimos parte de nuestro proceso de enseñanza en las clases de matemáticas que impartíamos.

Ante la búsqueda de un tema tratar en las secuencias a diseñar, y ante la pregunta de qué tipo de aprendizaje conviene emplear en las aulas para motivar el gusto por la matemática, se nos ocurrió sugerir que una forma ideal de aprender es dirigir a los estudiantes al descubrimiento.

La primera inquietud era saber si existía información y trabajos referentes al aprendizaje por descubrimiento. Por lo tanto, lo primero que hicimos fue buscar información sobre “aprendizaje por descubrimiento” y buscar la existencia de intervenciones didácticas que aplicaran este tipo de aprendizaje en clases de matemáticas.

Para empezar, se realizó una búsqueda en internet encontrando inmediatamente algunos artículos que se refieren a una teoría formal del aprendizaje por descubrimiento cuyo autor es Jerome Bruner. Al mismo tiempo, encontramos que dicha teoría del descubrimiento involucra y está respaldada por una teoría de desarrollo cognitivo propuesta por el mismo autor. En una nueva búsqueda sobre la aplicación de dichas teorías en clases de matemáticas, encontramos muy pocos artículos que involucraran dichas teorías de manera práctica. Estos artículos están enfocados a nivel medio superior y se han realizado en países como Cuba y Venezuela. No encontramos documentos realizados aquí en México que enfocaran y trataran la aplicación directa y práctica en las clases de matemáticas del aprendizaje por descubrimiento.

Las dos teorías que encontramos de Jerome Bruner nos parecieron interesantes y, después de revisarlas, observamos que se adaptaban al tipo de intervenciones didácticas que queríamos diseñar y a las actividades que queríamos involucrar. Esto nos llevó a considerarlas como respaldo teórico en la estructura y en la elaboración de las intervenciones que pretendíamos realizar.

Para dar una idea de la puesta en práctica de las teorías encontradas resaltamos, como características interesantes, por un lado, la posición que tiene el aprendizaje por descubrimiento que es contraria al aprendizaje pasivo y, por otro lado, las tres formas de aprendizaje secuenciales y complementarias que propone la teoría de desarrollo cognitivo de Jerome Bruner: enactiva, icónica y simbólica. Estas tres fases están involucradas en el desarrollo de las tres secuencias presentadas. También queremos resaltar el hecho de que estas dos teorías de aprendizaje son generales y que nosotros las particularizamos y adaptamos para el aprendizaje de la matemática. Jerome Bruner nació en New York y sus investigaciones comienzan hacia 1965, pero su trabajo continúa ampliando, reforzando y complementando sus teorías todavía hasta finales del siglo XX.

El proceso para la elaboración de las intervenciones fue gradual y se fue diseñando, creando y experimentando una intervención durante cada semestre transcurrido en la estancia de la Maestría. En el presente trabajo se describen las tres intervenciones tal como se redactaron y aplicaron (sólo con algunas modificaciones de precisión que se notaron después de su aplicación).

La finalidad de “descubrir” aplicada en las secuencias elaboradas se da en dos sentidos: descubrir desde la perspectiva de lo que está afuera de la mente de los estudiantes, pero también descubrir desde la perspectiva de lo que está dentro de la mente de los mismos.

Pensando que la base de un conocimiento matemático tiene que ver primeramente con su concepto, y por el nivel educativo en el que nos desempeñamos dando clases (secundaria), las secuencias didácticas propuestas se enfocaron en la adquisición de un concepto. Anthony Orton señala al respecto:

“El aprendizaje de esta materia (la matemática) consiste en la construcción de un entendimiento de nuevos conceptos, basándose en aspectos previamente comprendidos” (Orton, 2013, p. 46).

Fue nuestra intención, al mismo tiempo, abarcar tres temas transversales, importantes y diferentes del programa de estudios de la matemática. Buscamos tres conceptos elementales, significativos, esenciales y que visualizamos como algunos de los que tienden a presentar una mayor dificultad de aprendizaje en los estudiantes. Bajo este esquema David Ausubel menciona:

“Enseñarles a los estudiantes la manera de hacer un mejor uso de los conceptos que ya conocen quizá representa la tarea principal que ha de realizarse en el adiestramiento en investigación” (Ausubel, 2014).

Este, y el siguiente párrafo, nos confirman que nuestra intuición de decidir y seleccionar los conceptos como un primer acercamiento de los niños a la matemática fue lo adecuado:

“Los conceptos constituyen un aspecto importante de la teoría de la asimilación debido a que la comprensión y la resolución significativa de problemas dependen en gran parte de la disponibilidad en la estructura cognoscitiva del alumno de los conceptos” (Ausubel, 2014, p. 86).

## **2.2. ALGUNAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA**

En nuestro desempeño como profesores de Matemáticas nos damos cuenta y coincidimos con algunos autores cuando señalan la dificultad que existe en su enseñanza y en su aprendizaje. De acuerdo a nuestra experiencia suponemos que algunas causas que originan dicha dificultad pueden ser: las ideas imprecisas de conceptos matemáticos que se forman los estudiantes, la aplicación de razonamientos inadecuados o la nula aplicación en sus procesos, y la suspensión de sentido lógico al resolver problemas. La profesora española Laura Jiménez Márquez se refiere, en un taller que imparte respecto a lo que realmente aprenden de matemáticas los estudiantes en la escuela, a la situación de “suspensión de sentido común” cuando los estudiantes resuelven

problemas de matemáticas, nosotros expresamos la misma idea, pero refiriéndonos a “suspensión de sentido lógico”.

Sin tener que recurrir a una encuesta formal podemos conocer lo que piensan la mayoría de los estudiantes, o las personas en general, respecto a la matemática: que son difíciles y que no son para ellas. A lo largo de nuestra experiencia como estudiantes, y como profesores, hemos percibido esta situación por los comentarios que expresan compañeros y alumnos. De igual forma, sin tener el respaldo de una investigación, se hace evidente, para las personas que tienen un cierto dominio de las matemáticas, que en el común de la población se expresan y se establecen muchos errores e incongruencias del saber matemático dentro y fuera de las aulas. Pero la población no es la culpable de expresar este tipo de situaciones que dejan entrever la existencia común de una suspensión de su sentido lógico y un desconocimiento elemental de la matemática.

Se hace necesario, si se quieren disminuir las incongruencias y los errores matemáticos frecuentes que cometen los estudiantes, y la población en general, modificar e incrementar adecuadamente la cultura matemática existente. Aunque no se trata de buscar culpables para enjuiciarlos, sí se trata de buscar fallas en el sistema educativo para poder dar soluciones. Lo primero que debemos considerar es que no se puede seguir enseñando la matemática como se ha venido haciendo porque no se están obteniendo los resultados deseados.

La forma tradicional de enseñanza de la matemática ha sido expositiva por parte de los maestros y recurrente, en estudiantes y maestros, a la memorización y aplicación de reglas y definiciones para poder obtener un resultado numérico. La consecuencia en los estudiantes ha sido una “mecanización” para trabajar la matemática, hecho que origina precisamente la suspensión del sentido lógico mencionada, la ausencia de razonamiento en los procesos que realiza y la nula aplicación de propiedades matemáticas.

Las reglas que nos enseñaban, y se siguen enseñando en primaria y secundaria, para pretender aprender y trabajar la matemática, algunas llamadas algoritmos y fórmulas, son:

- a) algoritmos para sumar y restar números naturales
- b) algoritmos para multiplicar y dividir números naturales
- c) regla de tres
- d) regla para calcular el tanto por ciento
- e) fórmulas para calcular perímetros
- f) fórmulas para calcular áreas

- g) fórmulas para calcular volúmenes
- h) reglas para encontrar el m.c.m. y el M.C.D.
- i) reglas para sumar y restar fracciones
- j) reglas para multiplicar y dividir fracciones
- k) regla para simplificar fracciones complejas
- l) reglas para sumar y restar números enteros
- m) reglas para multiplicar y dividir números enteros
- n) reglas para manipular variables
- o) reglas para operar símbolos de agrupación
- p) reglas para trabajar con exponentes
- q) reglas para obtener productos notables
- r) reglas para resolver ecuaciones

Aunque nos aprendíamos estas reglas (anotamos 18, tal vez haya más, y en preparatoria este número aumenta) que nos enseñaban nuestros maestros y tratábamos de aplicarlas de acuerdo a los ejemplos que nos mostraban, nunca quedábamos satisfechos con esta postura, en su caso siempre nos surgía el saber el porqué y el cómo funcionaban. No es que estemos en contra de estas reglas, en lo que no estamos de acuerdo es que se expongan como inicio y base de un tema y sin conducir al alumno a encontrar una explicación. Al respecto Anthony Orton apunta:

“Evidentemente, el empleo de algoritmos hace uso de la memoria, pero aquí los chicos han de recordar un procedimiento paso a paso. Una característica preocupante de los algoritmos en matemáticas es que gran parte de lo que esperamos que los chicos recuerden y usen con seguridad carece, en términos de conocimiento valioso, de significación para ellos y a veces resulta completamente irrelevante” (Orton, 2003. p. 44)

Entonces, el alumno identifica a la matemática como una materia que consiste en aplicar reglas y en dar un resultado numérico, la mayoría de las veces, aunque no sea congruente con el contexto. Es aquí donde empiezan a surgir algunas de las complicaciones de su aprendizaje. Los estudiantes se acostumbran a buscar y a aplicar una regla para resolver cualquier problema y buscan dar un resultado, aunque no sea el adecuado. En empatía con esta idea tomamos una frase que da inicio al capítulo 3 titulado “El contrato didáctico” del libro “Didáctica de la matemática” y que coincide con la idea descrita anteriormente:

“Al estudiante se le proporciona una regla y unos ejemplos, y por su parte el maestro puede decir que quiere decir algo que, aunque no enunciado, se transmite indirectamente a través de los ejemplos. Pero el maestro mismo no tiene más que la regla y los ejemplos. (...) Es una ilusión creer que se producirá significado en la mente de alguien a través de los medios indirectos, a través de la regla y los ejemplos” (D’Amore, 2006. p. 113).

Guy Brousseau señala la misma situación, pero amplía su comentario hacia una nueva postura de lo que debería ser “saber matemáticas”:

“Saber matemáticas no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y de aplicarlos, es ocuparse de los problemas en un sentido amplio que incluye encontrar buenas preguntas tanto como encontrar soluciones” (Chevallard, Bosch y Gascón, 1998. p. 213).

Retomando y resumiendo algunas ideas de lo expresado sobre la enseñanza tradicional de la matemática, podemos decir que este tipo de enseñanza no contribuye a desarrollar el raciocinio de los estudiantes. Tratar la enseñanza de la matemática, que es una ciencia de razonamiento, desde el esquema tradicional, genera que el estudiante no se vea en la necesidad de utilizar su raciocinio. Guy Brousseau señala:

“La matemática constituye el campo en el que el niño puede iniciarse más tempranamente en la racionalidad. En el que puede forjar su razón en el marco de relaciones autónomas y sociales” (Brousseau, 2007. p. 11).

Entonces, un punto a destacar del porqué aprender matemáticas en la escuela es precisamente el contribuir al desarrollo de la racionalidad en los estudiantes, pero abordar la enseñanza de las matemáticas desde el sistema clásico no lo permite debido a las razones expuestas. Otro punto a destacar del porqué aprender matemáticas en la escuela es el propiciar una sociedad con una cultura matemática suficiente, hecho que se debería manifestar en una mayor calidad de vida individual y social, pero la enseñanza tradicional de la matemática tampoco lo está haciendo.

Paralelamente a los problemas de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática, la Educación Matemática ha detectado y nombrado algunos fenómenos causantes de originar errores en las respuestas que dan los estudiantes como, por ejemplo, lo que se denomina “contrato didáctico” que describiremos en el capítulo 3. Dicha detección y denominación permite exponer y explicitar los fenómenos para empezar a plantear e investigar posibles formas de solución.

Viendo a la educación como una forma de adquirir la cultura para adaptar a los individuos a la sociedad, es nuestro sentir que la escuela no está cumpliendo adecuadamente este papel. Por el lado matemático, aunque se le da la importancia necesaria, los estudiantes no adquieren las habilidades básicas, ni las destrezas necesarias, ni una cultura matemática indispensable, para que puedan opinar y resolver problemas de carácter matemático dentro y fuera del aula.

Elementos fundamentales, entre algunos otros, que deben estar presentes en los estudiantes para aprender sólidamente la matemática son: el interés, el análisis, el razonamiento, la capacidad de deducción, la aplicación de sentido lógico, la comprensión de procesos y la disciplina, los cuales la enseñanza tradicional no fomenta. Nos parece que nosotros pudimos aprender matemáticas porque el sistema tradicional no nos atrapó, en su caso siguieron predominando en nuestro aprendizaje dichos elementos fundamentales. Es decir, las clases en la escuela sirvieron de guía para los conocimientos que deberíamos ir adquiriendo, pero siempre tratábamos de comprender, analizar, deducir y razonar la información que nos compartían nuestros profesores sin caer sólo en la memorización o “mecanización”.

Al enfocarse en un aprendizaje y aplicación de reglas rígidas para operar la matemática, no se contribuye a desarrollar el pensamiento lógico de los alumnos. Los alumnos vislumbran la matemática como una materia en la que siempre se requiere obtener y dar una respuesta numérica aplicando un algoritmo.

### **2.3. JUSTIFICACIÓN**

Convencidos de que en nuestra infancia aprendemos muchas cosas por descubrimiento y de que la enseñanza tradicional, desde los primeros años de estancia en la escuela, hace que esa capacidad de descubrimiento vaya disminuyendo, considerando los resultados poco óptimos de la enseñanza tradicional de la matemática, y tomando en cuenta algunas tendencias actuales de la didáctica de la matemática, nos surgió la inquietud de saber si es viable aplicar formalmente, en el aula, un método para aprender por descubrimiento que contribuya a mejorar el aprendizaje de la matemática.

Esto nos motivó a diseñar algunas secuencias didácticas para clases de matemáticas en las cuales estuvieran presentes las teorías encontradas, la teoría del descubrimiento y la teoría del

desarrollo cognitivo propuestas por Jerome Bruner. En tales secuencias se incluirían, de una manera formal, nuestras ideas y actividades empíricas mencionadas. Debido a que el diseño y la creación de las secuencias no era suficiente para mostrarnos su viabilidad, se consideró necesario poner a prueba las secuencias para contemplar su funcionamiento.

Como una forma, alternativa y complementaria, de querer modificar y mejorar el aprendizaje de la Matemática, alejándonos de la enseñanza tradicional, y tratando de abarcar las virtudes que se le atribuyen al aprendizaje por descubrimiento, queremos proponer la práctica, en nuestras aulas, de este tipo de aprendizaje. La propuesta se respaldará mediante la elaboración y experimentación de secuencias didácticas encaminadas a utilizar este método con la finalidad de compartir resultados.

Dicha propuesta se enfocará en el aprendizaje de algunas nociones básicas y transversales incluidas en los programas de Matemáticas de la Educación Básica para 1° de secundaria. El esquema de las secuencias consistirá en llevar al estudiante a experiencias que le permitan ampliar la precisión de las nociones seleccionadas y a motivar el uso de su sentido lógico y de su raciocinio.

## **2.4. HIPÓTESIS**

La aplicación de las secuencias didácticas elaboradas, permitirá a los estudiantes el descubrimiento de los temas abordados en cada secuencia, ampliando y fortificando en los participantes las nociones presentadas. Asimismo, se desea lograr que el desempeño de los estudiantes, durante la intervención, se manifieste de acuerdo a las ideas y actividades propuestas. Se realizará la observación y la descripción del desempeño que manifiesten los estudiantes para poder validar la funcionalidad didáctica de la secuencia y de las actividades propuestas. De acuerdo a lo planeado, se realizarán tanto los pasos diseñados para el logro del descubrimiento, como las fases del desarrollo cognitivo de Jerome Bruner. Se espera contemplar un aumento en los resultados del post-test al compararlos con los resultados del pre-test.

## **2.5. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN**

¿Qué aspectos del aprendizaje por descubrimiento y del desarrollo cognitivo, propuestos por Jerome Bruner, favorecen el aprendizaje de las matemáticas en 1° de secundaria?

## **2.6. OBJETIVOS**

### **OBJETIVO GENERAL:**

Identificar los aspectos que favorecen el aprendizaje por descubrimiento y del desarrollo cognitivo, propuestos por Jerome Bruner, al aplicarlos en una clase de matemáticas para 1° de secundaria.

### **OBJETIVOS ESPECÍFICOS:**

- Diseñar secuencias didácticas de matemáticas, para el primer grado de secundaria, que contemplen la aplicación del aprendizaje por descubrimiento y la teoría de desarrollo cognitivo propuestos por Jerome Bruner.
- Poner a prueba dichas secuencias para comprobar su funcionamiento.
- Observar y describir el desempeño de los estudiantes durante la intervención para identificar las características que favorecen el aprendizaje de acuerdo a lo planeado.
- Situar el aprendizaje de los estudiantes de acuerdo a la comparación de resultados entre el pre-test y el post-test.

## Capítulo 3

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### 3.1. APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO

Al consultar la definición de “descubrir” en la RAE, encontramos las siguientes opciones:

1. Manifestar, hacer patente.
2. Destapar lo que está tapado o cubierto.
3. Hallar lo que estaba ignorado o escondido, principalmente tierras o mares desconocidos.
4. Registrar o alcanzar a ver.
5. Venir en conocimiento de algo que se ignoraba.

Podemos seleccionar, para fines adaptables a este trabajo, las opciones 2, 3, 4 y 5. En nuestro trabajo de elaboración de las secuencias didácticas propuestas, el descubrimiento al que hacemos referencia se relaciona con estas situaciones, especialmente a la definición indicada con el número 5, pero enfocado al aprendizaje de temas matemáticos. Concretamente se trabajó en el descubrimiento de la noción de fracción (como parte-todo), el descubrimiento de la ley de los signos al sumar números enteros, y el descubrimiento de la noción del número Pi.

El aprendizaje por descubrimiento se contrapone a la enseñanza expositiva y al aprendizaje pasivo. La principal característica del aprendizaje por descubrimiento es que el estudiante es el protagonista de su aprendizaje y debe permanecer activo, el profesor es un guía y motivador del aprendizaje.

Ya mencionamos que, desde la perspectiva de la enseñanza tradicional de la matemática, presentar a los alumnos, como inicio de un tema, los algoritmos y reglas para realizar procedimientos matemáticos, genera una suspensión de su sentido lógico, falta de aplicación de propiedades matemáticas y ausencia de razonamientos en dichos procedimientos. De acuerdo a las virtudes dadas al aprendizaje por descubrimiento suponemos que utilizando en lo posible esta forma de aprendizaje ayudamos a contrarrestar este tipo situaciones. Al respecto encontramos:

“El hecho de que unas relaciones matemáticas puedan ser descubiertas y comunicadas de tan diversas maneras es lo que sitúa a las matemáticas al alcance de niños y adultos de todas las capacidades” (Orton, 2003. p. 110).

A nosotros nos gusta descubrir. Creemos que mucho de lo que hemos aprendido, incluyendo la matemática, lo hemos hecho a través del descubrimiento. Pensamos que el gusto que tenemos por esta ciencia es, entre otras cosas, porque es una ciencia que nos permite estar en constantes cuestionamientos y retos reflexivos. Parte importante, de este gusto, es la satisfacción de encontrar respuestas a nuestras dudas por nosotros mismos. La razón a esta conducta suponemos que es debida a que el descubrimiento es una actitud de aprendizaje natural en el ser humano. Si observamos a los niños podemos darnos cuenta de que su vida transcurre en una sucesión de dudas, sorpresas y descubrimientos.

La historia de la ciencia es una historia de descubrimientos y la matemática no es la excepción. Esto no quiere decir que la matemática se deba enseñar siguiendo la forma en que se descubrió. La matemática es descubrimiento, pero también es invención (Jiménez, 2010). La matemática inventa formas de escribir y transmitir sus descubrimientos (un lenguaje propio) y procedimientos para explicarlos. La enseñanza de la matemática debe considerar estos aspectos y adaptarlos para un adecuado aprendizaje, pero pensamos que algunas nociones matemáticas se pueden adquirir y aplicar sin considerar la parte simbólica y procedimental formal que tiene la matemática.

Respecto a lo mencionado, me permito hablar de manera personal y relatar una experiencia de aprendizaje de matemáticas que me sucedió cuando cursaba el 5° grado de primaria, la recuerdo muy bien porque mi participación me valió para lograr un 10 de calificación mensual, y la rememoro ahora porque precisamente fue un descubrimiento que se adapta a la metodología que vamos a exponer posteriormente. La experiencia es la siguiente:

El tema que estábamos viendo en clases era el de volumen, previamente se había visto el tema de áreas incluyendo la del círculo. Ante la pregunta de mi maestro Saúl de ¿cómo obtener el volumen de un cilindro?, y ante el silencio de todo el grupo, me atreví a sugerir un método que coincidió con lo que efectivamente era. En días anteriores, mi tía Gema me puso a acomodar sus discos musicales, realmente no eran de música, eran de anuncios comerciales ya que estábamos en su área de trabajo, que era una cabina de prácticas radiofónicas. Ante tal desorden de discos, y previo a identificar sus fundas para meterlos en ellas, fui colocando un disco encima de otro

obteniendo lo que se asemejaba a una torre cilíndrica. Mi maestro ya había dibujado en el pizarrón verde un esquema de un cilindro señalando una medida específica para su altura y su radio. Al ver dicho esquema, me vino a la mente la torre cilíndrica que yo había formado con los discos y entonces pude razonar (yo supongo que razoné), que el volumen del cilindro sería equivalente a encimar discos que tendrían un área de acuerdo a la medida del radio indicado en la base. Tal “encimamiento” de discos correspondería a la altura indicada del cilindro. Creo que mi mente aprovechó el silencio que había en el salón y pudo reflexionar al respecto. Tímidamente levanté la mano, yo creo que era más bien miedo a propiciar burlas si me equivocaba, y le expresé a mi maestro Saúl que para obtener el volumen del cilindro dibujado primero habría que obtener el área de su círculo base y después multiplicarla por la medida de su altura. Mi maestro preguntó a mis demás compañeros qué si estaban de acuerdo, pero el silencio siguió predominando. Ante ninguna participación de sus alumnos, el maestro me felicitó y dijo que mi procedimiento era el correcto.

La noción de “volumen de un cilindro”, adquirida mediante una experiencia de construcción, fue la que me permitió realizar una semejanza mental tridimensional, pudiendo dar respuesta al problema planteado. Sin conocer ni aplicar una fórmula, y sin realizar ningún procedimiento, la experiencia de manipular los discos me llevó a descubrir, y a crear en mi mente, el concepto de volumen.

En el prefacio a la primera edición en inglés del libro “Cómo plantear y resolver problemas” George Polya se refiere, en su primer párrafo, al descubrimiento (Polya, 1965. p. 5):

“Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y en el carácter.”

El autor Isaac Asimov, en su libro “Nueve Futuros” (Asimov, 1985), incluye un cuento de ciencia ficción (de 62 páginas) titulado “Profesión” en el cual relata la forma futura en que los habitantes de la Tierra reciben su educación. El aprendizaje ya no se adquiere en la escuela, de hecho, las escuelas han desaparecido. Ahora, todos los habitantes, a la edad de ocho años, son llevados en el mes de septiembre (días de la lectura) a la gran sala de actos del Ayuntamiento Educativo en cada localidad. Estando allí, les conectaban electrodos en las sienes para intercambiar

información con una computadora, en un lapso de 15 minutos el cerebro recibía la información necesaria para saber leer. Los habitantes ya no tenían que preocuparse por aprender, la preocupación era ahora certificarse en una profesión, a la edad de 18 años, para competir por un buen empleo y ser seleccionado para trabajar en otros mundos. Las certificaciones (o diplomados) se realizaban en el mes de noviembre (días de la Educación) mediante un proceso semejante al utilizado en los días de la Lectura. Para entonces, las computadoras del Ayuntamiento ya tenían el perfil de desempeño laboral de cada habitante de la Tierra obtenido con información extraída de su mente precisamente el día de la Lectura. Pero algunos habitantes no eran considerados para ser educados (programados) por la computadora debido a que su cerebro no era apto para ser programado. Estos habitantes pasaban a ser protegidos por el Gobierno Terrestre y eran enviados a la “Residencia” para un tratamiento especial. Tal es el caso de George que, sintiéndose anormal, raro, rebelde, molesto, avergonzado, desesperado y con retraso mental, tiene la misión de “descubrir”, sin saberlo, para que está hecho. Aunque el cuento ya se percibe obsoleto en su contexto tecnológico (su primera publicación es de 1957), lo rescatable es la idea futurista de educación y aprendizaje. Curiosamente, en la “Residencia” hay salones de clases académicas y abundan los libros, lo único viable de hacer es leer y asistir a clases. George no acepta su destino, sobre todo cuando se da cuenta que está en un lugar antiguo y en donde observa que los internados se dedican a aprender de la forma corriente y desactualizada, como lo leyera en un libro cuando era chico y no pudo creer que eso fuera posible. George rechaza estar en un lugar en donde el aprendizaje se da poco a poco y sin conexión directa con una computadora. Creyendo que está injustamente en una residencia para débiles mentales, decide abandonar el lugar contrariado por su mala suerte de no ser tan afortunado y no poder certificarse, como todos sus contemporáneos conocidos que sí pudieron ser educados directamente conectados a una computadora y en un solo momento. La “Residencia” y sus encargados tienen la misión de encauzar a sus integrantes a descubrir que están en ese lugar porque tiene la habilidad de aprender por sí mismos a través de la lectura de libros, de acuerdo a lo que detectó la computadora el día de la Lectura. Después de algunas aventuras fuera de la “Residencia”, que realmente es el “Instituto de Estudios Avanzados”, George logra comprender su situación. Descubre que él es un caso excepcional, por su habilidad detectada, para ser uno de los pocos futuros inventores o científicos terrestres. Aunque nos parece un cuento cruel de ciencia-ficción, tal vez con tintes de realidad, lo consideramos porque contempla la subsistencia del aprendizaje por descubrimiento en un futuro.

De acuerdo a lo que nos relata la historia, tal vez la muestra más significativa de un aprendizaje por descubrimiento es la experiencia que tuvo Arquímedes cuando descubrió el principio que lleva su nombre. No vamos a relatar la historia completa, por muchos es conocida y fácil de encontrar, sólo nos centraremos en el final. Después de varios días y de mucho estar pensando, Arquímedes se sumerge en una tina, llena de agua, para tomar un baño. En el preciso momento en que se sumerge se da cuenta, sin intención de hacerlo, del agua que se desborda. Aquí, su mente, obligada por las circunstancias, realiza una conexión de necesidades-hechos-consecuencias que le proporcionan la visión para resolver el problema de la corona planteado por el rey Hierón. Ante tal visión, y aunque la historia no lo relata, pero con posibilidades de pena de muerte por parte del rey si no daba solución al problema, Arquímedes sale de la tina lleno de alegría y empieza a correr desnudo por las calles gritando la palabra que inmortalizó este descubrimiento, nos referimos a la conocida palabra “eureka”.

¿Qué se puede descubrir en matemáticas?, nosotros no lo sabemos exactamente. De acuerdo a lo que propone Bruner el lenguaje no es algo que se pueda descubrir (Bruner, 1987. p. 82). Nosotros pensamos que en matemáticas se pueden descubrir conceptos, procesos, propiedades secuencias y patrones. Tal vez, la forma más primitiva de descubrimiento sea la de patrones observados en la naturaleza.

Contemplando las dos variantes de descubrimiento, el descubrimiento fortuito y el descubrimiento buscado, conjeturamos que en ambos casos se facilitará su aparición si previamente hay o se da una experiencia física. El descubrimiento se establece cuando la mente realiza las conexiones necesarias y coinciden los elementos precisos. ¿En qué momento se puede presentar esta situación?, es difícil saberlo, pero entre más experiencias físicas de tipo matemático tenga una persona y haciéndola reflexionar mediante cuestionamientos, podemos ayudar a su mente a realizar conexiones y a propiciar coincidencias que permitan un descubrimiento.

### **3.2. APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO DE JEROME BRUNER**

Aunque Jerome Bruner dice que no comprende qué es el descubrimiento, si dice que se puede ayudar a las personas a que descubran cosas por sí mismas (Bruner, 1987. p. 81). Bruner también recomienda ser precavidos al hablar sobre el método de descubrimiento como vehículo principal de educación. De igual forma establece que, dentro de la cultura, la primera forma de

aprender no es principalmente el descubrimiento (Bruner, 1987. p. 82). Al respecto pone como ejemplo el aprendizaje de una lengua (la cual la considera como una aproximación a un invento) que se aprende como una presencia constante de un modelo.

Bruner establece que una forma de apropiarse de la cultura es mediante el descubrimiento. Asimismo, indica que el contexto escolar se esfuerza en desarrollar en los niños un método para continuar aprendiendo de forma tal que pueda utilizar la información para solucionar problemas., pero surge el problema de cómo organizar el ambiente de manera que los niños aprendan significativamente (Bruner, 1987. p. 83). En esta parte de la lectura, aunque no se especifica literalmente, suponemos que Bruner sugiere implementar el descubrimiento. Más adelante se refuerza esta idea porque menciona: “La enseñanza del descubrimiento, en general no implica tanto el proceso de guiar a los estudiantes para que descubran lo que está allí fuera, sino, en realidad, el descubrimiento de lo que hay dentro de sus propias mentes (Bruner, 1987. p. 85).

En este capítulo del libro de Jerome Bruner, capítulo 4 titulado “Elementos acerca del descubrimiento”, Bruner lo finaliza diciendo que una forma de controlar y facilitar el descubrimiento es recurriendo al contraste y destaca que su eficacia se debe al hecho de que un concepto requiere, para definirse, la elección de un caso negativo (Bruner, 1987. p. 93), lo que interpretamos como el uso de contraejemplos. “No se puede esperar que los chicos aprendan a través de definiciones. Necesitamos utilizar ejemplos y contraejemplos” (Orton, 2003. p. 47).

### **3.3. DAVID AUSUBEL, DETRACTOR DEL APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO**

En su libro “Psicología Educativa” David Ausubel dedica un capítulo (el 15) para hablar sobre aprendizaje por descubrimiento (Ausubel, 1983. p. 447). En una primera lectura creímos que el autor estaba totalmente de acuerdo en la utilización de este método como forma de enseñanza, pero en una lectura más analítica nos dimos cuenta de que realmente hace una crítica en desacuerdo con los atributos que se le asignan al aprendizaje por descubrimiento. De una lista de 12 puntos que se refieren a las bondades resultantes de utilizar el aprendizaje por descubrimiento, después de dar un referente histórico, describe las limitaciones psicológicas y educativas de cada punto. Dichas bondades que él detracta son las siguientes (Ausubel, 1983. p. 448):

1. Todo el conocimiento real es descubierto por uno mismo.

2. El significado es un producto exclusivo del descubrimiento creativo, no verbal.
3. El conocimiento sub-verbal es la clave de la transferencia.
4. El método de descubrimiento constituye el principal método para la transmisión del contenido de las materias de estudio.
5. La capacidad de resolver problemas constituye la meta primaria de la educación.
6. El adiestramiento en la heurística del descubrimiento es más importante que el entrenamiento en la materia de estudio.
7. Todo niño debe ser un pensador creativo y crítico.
8. La enseñanza basada en exposiciones es autoritaria.
9. El descubrimiento organiza el aprendizaje de un modo efectivo para su uso ulterior.
10. El descubrimiento es un generador singular de motivación y confianza en sí mismo.
11. El descubrimiento constituye una fuente primaria de motivación intrínseca.
12. El descubrimiento asegura la conservación de la memoria.

Puntual y preciso, como se aprecia en la redacción de su libro, David Ausubel cuestiona, dando variados argumentos, las virtudes que se le asignan al aprendizaje por descubrimiento, haciéndonos dudar y quedando en una posición de no saber que creer. No es nuestra finalidad detallar en este trabajo la argumentación presentada, solo mencionaremos que, aun así, analizando sus posicionamientos, nosotros estamos a favor y nos seguimos inclinando en propiciar este tipo de aprendizaje. “La eficacia o inutilidad de los métodos de descubrimiento continúan siendo, por lo demás objeto de debate” de acuerdo a lo que expresa Anthony Orton (Orton, 2003. p. 114).

### **3.4. ANTONY ORTON, ¿PUEDEN LOS ALUMNOS DESCUBRIR LAS MATEMÁTICAS POR SI MISMOS?**

En su libro “Didáctica de las Matemáticas”, Anthony Orton presenta algunos ejemplos de aprendizaje de la matemática por descubrimiento. En el capítulo VI titulado ¿Pueden los alumnos descubrir las matemáticas por sí mismos? cuestiona la efectividad de utilizar este método de aprendizaje. Al respecto dice:

“Parece que existe un momento en el que las matemáticas pueden ser descubiertas y el aprendizaje, cabría afirmarlo, será más profundo y completo cuando se haya logrado por este medio, en lugar de utilizar la mera exposición” (Orton, 2003. p. 109).

En este punto estamos de acuerdo con el autor en que no se puede afirmar que el aprendizaje por descubrimiento sea más efectivo que la enseñanza expositiva, aunque suponemos que este método es creador de más y mejores condiciones para que el sujeto aprenda. A continuación, el autor agrega:

“Sin embargo, existe también un momento en que el profesor, o alguna otra persona, necesitará quizá intervenir para introducir primeramente el lenguaje apropiado, luego para contribuir a aclarar el pensamiento y después para introducir el simbolismo y los métodos para hacer informes” (Orton, 2003. p. 109).

Coincidimos plenamente con lo mencionado por el autor en el párrafo anterior. Precisamente, cuando hicimos referencia de que “si a los estudiantes se les guía adecuadamente se puede propiciar en ellos el descubrimiento”, estábamos queriendo describir la misma situación que describe Orton.

Más adelante Anthony Orton describe situaciones sobre la efectividad del aprendizaje por descubrimiento poniendo algunos ejemplos de relaciones numéricas (entre ellos las fracciones de Fibonacci) y patrones en figuras geométricas, aclarando que no todos los alumnos van a poder descubrir todo y lo mismo. Señala también el desánimo que puede sentir el profesor cuando los alumnos no descubren y que lo puede orillar a proporcionarle la respuesta al estudiante o a regresarse al método expositivo.

De igual forma se enfatiza el hecho de que en la actualidad la enseñanza de la matemática debe ser activa independientemente si se utiliza el descubrimiento, la investigación o la resolución de problemas como medio a utilizar en la clase. La autora Edith Biggs también ha escrito al respecto:

“Los métodos de descubrimiento, investigación, o aprendizaje activo proporcionan a los alumnos la oportunidad de pensar por sí mismos y generan un interés real por las matemáticas” (Orton, 2003. p. 111).

“Biggs también hace una clasificación de cinco métodos de descubrimiento los cuales son: fortuito, libre y exploratorio, guiado, dirigido, y programado” (Orton, 2003. p. 111). Al observar a los niños. Notamos que en su crecimiento intelectual ellos aprenden por descubrimiento

del tipo fortuito, y del libre y exploratorio. La efectividad de estos métodos, en el logro de objetivos, si se utilizan en la escuela, no está garantizada.

En cuanto al descubrimiento guiado y dirigido, el autor no describe cada uno y no menciona su diferencia, pero menciona que algunos profesores creen que el descubrimiento guiado motiva más a los estudiantes y promueve la participación activa de los estudiantes, aunque las investigaciones no arrojan muchos datos al respecto. Tal parece que nosotros nos enfocamos a este tipo de método en el diseño de nuestras secuencias y tal parece que nosotros somos de este tipo de profesores.

Bajo este ambiente, es muy conocido el debate resultante entre los partidarios del aprendizaje por descubrimiento y sus detractores, concreta y principalmente está el caso de Jerome Bruner y David Ausubel, pero no se ha llegado a ningún acuerdo ni a ninguna conclusión. Previo a la aportación y al análisis de otros ejemplos de aprendizaje por descubrimiento, la descripción sobre la pregunta principal que hace Anthony Orton termina con dos comentarios (Orton, 2003. p. 114):

- 1) “La eficacia o inutilidad de los métodos de descubrimiento continúan siendo, por lo demás, objeto de debate.
- 2) “La investigación sobre aprendizaje por descubrimiento trata habitualmente de medir sólo la calidad del desarrollo cognitivo o lo que ha sido dominado. Los logros en actitud hacia la matemática y el incremento en la comprensión de la naturaleza de la materia no son fácilmente medidos.

### **3.5. DESARROLLO COGNITIVO DE JEROME BRUNER**

De acuerdo a lo que propone Jerome Bruner en su Teoría de Desarrollo Cognitivo, existen tres formas o fases en que los sujetos pueden aprender, a saber: la forma enactiva, la forma icónica y la forma simbólica. Estas formas de aprendizaje se basan en el manejo que los sujetos hacen de la información y en el modo que la representan. Algunos libros se refieren a formas o modos y otros libros se refieren a fases, esto se debe a la dinámica en la que se aborde dicha teoría. Cuando se consideran de manera independiente se les nombra formas o modos de aprendizaje, cuando se consideran como parte de un proceso se denominan fases.

En este trabajo de tesis, las formas de aprendizaje, las vamos a considerar como parte de un proceso y por lo tanto nos vamos a referir a ellas como fases. De acuerdo a esto, Bruno D'Amore señala que según Bruner estas formas de representación se dan y se desarrollan precisamente en esta sucesión y cada una es la base cognoscitiva necesaria para la sucesiva y, es más, se hallan conectadas entre ellas en modo evolutivo (D'Amore, 2006. p. 171). Precisamente, en la elaboración de las secuencias consideramos esta estructura, es decir, para lograr el aprendizaje propuesto y llegar a la fase simbólica, es necesario haber pasado antes por la fase simbólica, y para llegar a la fase icónica es necesario haber realizado la fase enactiva. A continuación, se describe en que consiste cada fase.

### FASE ENACTIVA

En algunos libros de Educación Matemática, que tratan el tema de Desarrollo Cognitivo propuesto por Jerome Bruner, la fase enactiva también es llamada ejecutora. Es el tipo de aprendizaje que se obtiene como producto de un acto motriz ((D'Amore, 2006. p. 171). La adaptación que se hizo, para las secuencias didácticas realizadas, consistió en proporcionar al alumno un medio físico o un objeto, para que interactuando y manipulando este medio, los estudiantes puedan obtener una noción de lo que se pretende aprender o descubrir.

Esta situación se relaciona y concuerda con la siguiente nota: “La mayoría de los investigadores que favorecen a los métodos de investigación señalan la necesidad de experiencias concretas y de estrategias de enseñanza para hacer inferencias a partir de datos o experiencias” (Ausubel, 2014. p. 484)

Aunque estamos conscientes de que no se debe confiar en la información contenida en Wikipedia, compartimos la definición proporcionada por ese medio, al ser la fuente más directa que explica este término:

“La palabra enacción es una castellanización de una derivación del verbo inglés 'to enact', el cual significa «evidenciar algo existente y determinante para el presente» (como en los casos de un actor dando vida a un rol en una pieza teatral); o (para el caso de una gestión gubernamental): «dar funciones a una legislación determinante para el futuro». Para decirlo de una manera más general, 'to enact' y 'enactuar' admiten el sentido de «actuar una parte en una obra, construcción,

desarrollo o crecimiento». Es por esto que la expresión «conocimiento enactivo» refiere a aquello que se adquiere a través de la acción del organismo en el mundo”.

“Este concepto es aplicable a una de las vías posibles para la organización del conocimiento, y asimismo la enacción postula y define una de las formas de interacción con el mundo. Jerome Bruner presentó una definición inicial en los años 1966 a 1968, asociando la enacción y distinguiéndola, con respecto a los otros dos caminos para la organización del conocimiento: el icónico y el simbólico.

### FASE ICÓNICA

Es el aprendizaje que se da mediante la creación de imágenes mentales abstractas producto de una manipulación concreta ejecutada, es decir, surge una re-imaginación. Se trata de un resumen mental de eventos reales ((D’Amore, 2006. p. 171).

Aunque el término icónico se refiere a una representación simbólica, dicha representación nace de un esquema mental para plasmarla posteriormente en una figura que conocemos como ícono. En esta fase que propone Jerome Bruner, debemos entender que no se trata de presentar el ícono a los estudiantes para que aprendan, se trata de que los estudiantes se formen un esquema mental basado en la experiencia física contemplada en la fase enactiva para que posteriormente aprendan el lenguaje matemático presentado en la fase simbólica.

### FASE SIMBÓLICA

Es la representación de un aprendizaje a través de símbolos. El contacto con estas representaciones da al estudiante la posibilidad de obtener un nuevo pensamiento abstracto (D’Amore, 2006. p. 171). Para esta fase es obvio que se debe enseñar a los estudiantes, previa o paralelamente, el lenguaje y la simbología adecuada y necesaria. La matemática tiene su lenguaje simbólico propio y muy específico, este lenguaje normalmente se adquiere en la escuela.

En esta fase se presenta a los estudiantes el lenguaje escrito, propio y utilizado por la matemática, que exprese el esquema mental adquirido en la fase icónica.

## EJEMPLOS DONDE SE OBSERVA EL DESARROLLO COGNITIVO DE JEROME BRUNER

Comentamos, como un primer ejemplo práctico de este proceso de aprendizaje, la forma en que los niños aprenden a contar. Cualquier persona que haya tenido contacto con niños pequeños, se da cuenta que para empezar a aprender a contar los niños utilizan los dedos sus manos (fase enactiva). Después de constantes intentos, correcciones de los adultos, y el aprendizaje de los vocablos correspondientes, el niño se logra dar cuenta de la relación existente entre un grupo de dedos de sus manos y el vocablo correspondiente. Esta relación que encuentran los niños es un gran descubrimiento que los lleva a un esquema mental en donde después ya no necesitan utilizar sus dedos para imaginarse el significado de cada vocablo que utilizamos para contar. Los niños logran realizar la abstracción del significado de número (fase icónica). Posteriormente, normalmente en la escuela, aprenden a utilizar los símbolos para indicar los vocablos que utilizan para numerar (fase simbólica). En todo este proceso podemos identificar las tres fases del desarrollo cognitivo propuesto por Jerome Bruner. La fase enactiva es la correspondiente al uso de los dedos, la fase icónica corresponde a la imaginación que tiene el niño del significado de cada vocablo que se utiliza para numerar, y finalmente, los símbolos que aprende para indicar los vocablos corresponden a la fase simbólica. Podemos extender este ejemplo para el aprendizaje de las sumas, pero preferimos exponer un ejemplo diferente. Agregamos solamente, que los dedos de nuestras manos sólo son suficientes para aprender a contar hasta 10, y a partir de aquí, para seguir aprendiendo a contar, recurrimos a otros medios físicos como el ábaco y la práctica con algunos tipos de granos (maíz o frijol) que sirven para continuar respaldando la fase enactiva.

Hablando nuevamente de manera personal, voy a referirme a la experiencia que tuve cuando estudiaba el 5° grado de primaria y que relaté en el capítulo 3. La noción de volumen un cilindro se estableció en mi mente al realizar la actividad de encimamiento de los discos. En este caso la fase enactiva se realizó al estar colocando un disco sobre otro. Esto permitió pasar a la fase icónica correspondiente a imaginarse la ampliación de una superficie circular y generar en mi mente una nueva estructura (un sólido). Posteriormente, en el salón de clase, se trasladó esta noción a una representación escrita llamada fórmula, que es lo que corresponde a la fase simbólica.

Planteamos otro ejemplo que no tiene que ver con la matemática. Es el aprendizaje del juego de Ajedrez, en el cual podemos observar las tres fases planteadas. Lo primero que se aprende

es el nombre y la posición inicial de las piezas sobre el tablero, posteriormente se aprende el movimiento de las piezas. Normalmente este aprendizaje se hace manipulando las piezas, es decir, lo que corresponde a la fase enactiva. El aprendizaje del movimiento correcto de las piezas genera un esquema mental (tal vez geométrico) que relaciona cada pieza con un tipo de movimiento. Sabiendo mover las piezas, empieza ahora el aprendizaje del objetivo del juego: dar Jaque Mate. A partir de aquí comienza la imaginación de nuevos esquemas mentales ahora para situar las piezas y lograr el objetivo, es decir, las “jugadas”. Estos esquemas mentales corresponden a la fase icónica. Existe en el juego de ajedrez una forma de anotar las jugadas usualmente utilizada cuando se juega en torneos. Una vez que se sabe jugar ajedrez el siguiente paso sería, si se tiene necesidad y para completar el proceso de aprendizaje de jugar ajedrez, aprender la simbología propia de anotación de jugadas, este aprendizaje correspondería a la fase simbólica. Se nota en este proceso de aprendizaje, al igual que en los dos descritos anteriormente, un proceso normal y natural de acuerdo a las fases propuestas por Jerome Bruner. Nunca nos habíamos planteado la posibilidad de aprender a jugar ajedrez aplicando las fases a la inversa, es decir, primero aprender la simbología, después aprender las jugadas y el objetivo del juego, para finalmente practicar el movimiento de las piezas sobre el tablero, pero nos parece que se complicaría el aprendizaje.

Aunque aprender a jugar ajedrez no es un tema de carácter matemático, presenta muchos requisitos similares de aprendizaje de la matemática (sentido lógico, razonamiento, ensayo y error) de forma tal que el aprendizaje de la matemática tendría que realizarse de acuerdo al orden que notamos normal y natural de las fases descritas en los tres ejemplos.

### **3.6. CONTRATO DIDÁCTICO Y EFECTO TOPAZE**

Dentro de los fenómenos que se dan en las clases de matemáticas, se ha detectado un comportamiento de los estudiantes denominado “contrato didáctico”. ¿Cuándo se originó?, ¿cómo originó?, ¿dónde se originó?, no se sabe exactamente. El contrato didáctico tiene su lugar dentro de la didáctica de la matemática porque se considera como una posible causa de dificultad del aprendizaje de las matemáticas. El contrato didáctico genera que los estudiantes den respuestas incorrectas a problemas planteados de matemáticas y por lo tanto exista un fracaso en su enseñanza y en su aprendizaje.

La idea fue introducida en el mundo de la investigación en didáctica de las matemáticas por Brousseau hacia 1970 (D'Amore, 2006. p. 113). Más adelante, de acuerdo a lo que señala Brousseau, a finales de los 80's, Yves Chevallard bautizó esta idea utilizando el término “contrato didáctico” (Brousseau, 2007. p. 74). El contrato didáctico se refiere al comportamiento de los estudiantes en dar la respuesta a un problema matemático, pero de forma inconsciente, sin aplicar sus propias capacidades, sin desarrollar sus propias competencias y sin formular sus propias estrategias, todo esto bajo un entorno de complacer con su respuesta al maestro.

Como ejemplos sencillos para visualizar este comportamiento, daremos dos que presenta el propio Brousseau, el primero es una versión muy resumida del ya famoso “problema del capitán” y el segundo, muy semejante, en donde se pide la edad de la maestra (Brousseau, 2007. p. 75):

- 1) En un navío se embarcan 28 ovejas y 18 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán?  
-44 años-dicen los alumnos.
- 2) En una clase hay 4 filas de siete alumnos cada una. ¿Cuál es la edad de la maestra?  
-28 años-responde más del 60% de la clase.

Por increíble que parezca, cuando se plantean estos problemas a los estudiantes, efectivamente responden de la forma indicada. Al parecer los estudiantes piensan que los datos son pistas que se les proporcionan para contestar las preguntas. En estos casos, los estudiantes consideran a los problemas de fácil solución en los que, para dar la respuesta, sólo es necesario realizar una simple operación y, al estar frente a una clase de matemáticas, piensan que el maestro está pidiendo una respuesta numérica. En estas circunstancias, los estudiantes se precipitan a dar una respuesta y caen en el contrato didáctico que incluye las características referidas a dicho comportamiento. Ante problemas no tan sencillos, los estudiantes manifiestan el mismo comportamiento agregando la situación de querer resolver los problemas sólo con la aplicación de una regla o una fórmula. El dar nombre y exponer este fenómeno (contrato didáctico), es el inicio para buscar y plantear posibles formas de solucionar este comportamiento. En resumen, podemos definir el contrato didáctico como esa obligación no formalizada, que se crean los estudiantes, de dar una respuesta (normalmente numérica) no consciente, a un problema planteado, con la ilusión de cubrir las expectativas de su profesor.

Por otro lado, un comportamiento que presentan los maestros es el denominado “efecto Topaze”. Este consiste en el desesperado intento, por parte del profesor, de ayudar a sus alumnos

a encontrar la respuesta a un problema proporcionándole pistas, o ayudándoles a realizar el proceso, sin permitir que el alumno se esfuerce o reflexione para encontrar por sí mismo la respuesta.

### **3.7. LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE YVES CHEVALLARD**

Existe una gran distancia y gran diferencia entre saber matemáticas y enseñar matemáticas. Sin embargo, por muchos años, ha predominado la idea de que si alguien sabe matemáticas fácilmente puede enseñar matemáticas, pero uno de los enfoques de la didáctica de la matemática actual (como ciencia) es modificar esta creencia. Precisamente, aunque la enseñanza tradicional de la matemática se da de buena voluntad y de buena fe, el enfoque citado es uno de los pilares que da motivos para que la Educación Matemática empiece a consolidarse como ciencia. Yendo más lejos, dentro de la Educación Matemática, también ya está contemplado el hecho de que enseñar matemáticas también está muy distante del hecho de aprender matemáticas, con lo cual, la didáctica de la matemática también se está enfocando más en los procesos de aprendizaje que en los de enseñanza.

Entonces, podemos suponer que, para enseñar un conocimiento matemático, debemos adaptarlo para que los estudiantes lo aprendan. En relación a lo anterior, Yves Chevallard apunta lo siguiente en su libro titulado “La transposición Didáctica”:

“Para que la enseñanza de un determinado elemento de saber sea meramente posible, ese elemento deberá haber sufrido ciertas deformaciones, que lo harán apto para ser enseñado” (Chevallard, 2013. p. 16).

A continuación, en una especie de juego de palabras y en vocablos propios, refuerza la misma idea diciendo:

“El saber-tal-como-es-enseñado, el saber sabio, es necesariamente distinto del saber-inicialmente-designado-como-el-que-debe-ser-enseñado, el saber a enseñar” (Chevallard, 2013. p. 17).

La idea descrita es el principio que propicia un nuevo concepto denominado “Transposición Didáctica”. El vocablo es atribuido a Yves Chevallard que en el libro al que nos referimos relata, diserta y explica los posicionamientos que originó este nuevo tema. “Del Saber Sabio Al Saber Enseñado” se aprecia como subtítulo del libro a manera de enfatizar el concepto y entenderlo intuitivamente que, aunque suena simple, no es tan sencillo de llevarlo a la práctica.

El concepto de transposición didáctica nos debe dar la idea de ese paso, de esa distancia, que separa los dos saberes. Para los didactas, esa distancia se convierte en una herramienta o en un instrumento que los va a encaminar a cuestionarse, a recapacitar y a separarse de la enseñanza matemática tradicional. Con esta visión, pareciera que el docente ya no va a enseñar nada y que por lo tanto no va a producir aprendizaje en sus alumnos, lo que propicia una resistencia al concepto.

En el capítulo 1 de su libro “La transposición didáctica”, titulado ¿Qué es la transposición didáctica?, en el punto 1.3, Chevallard dice que “un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza” (Chevallard, 2013. p. 45), y agrega que precisamente “el trabajo que transforma de un objeto de saber enseñar en un objeto de enseñanza es denominado la transposición didáctica”

Como toda nueva idea, el concepto fue aceptado por unos y rechazado por otros. Rechazado por aquellos docentes conformistas y en estado cómodo, aceptado por docentes entusiastas y activistas, pero en cualquier caso surgen muchas dudas respecto de cómo hacer la transposición didáctica, que más bien es cómo trabajar en la transposición didáctica. De hecho, antes de la aparición del concepto, muchos docentes de vocación, al preparar sus clases, han creado sus propias transposiciones didácticas de una forma intuitiva, al respecto Bruno D’Amore señala:

“La transposición didáctica consistiría entonces, desde el punto de vista del maestro, en el construir sus propias clases recabando de la fuente de los saberes, tomando en cuenta las orientaciones proporcionadas por las instrucciones y los programas (saber por enseñar) para adaptarlos a su propia clase: nivel de los estudiantes, objetivos perseguidos”. (D’Amore, 2006. p. 236).

Y Chevallard también escribe: “los contenidos de saberes designados como aquellos a enseñar (explícitamente: en los programas; implícitamente: por la tradición, evolutiva, de la interpretación de los programas), en general preexisten al movimiento que los designa como tales. Sin embargo, algunas veces (y por lo menos más a menudo de lo que se podría creer) son verdaderas creaciones didácticas, suscitadas por las necesidades de la enseñanza (Chevallard, 2013. p. 45).

El trabajo realizado, en la preparación de sus clases, por muchos maestros ha venido siendo individual, aislado y tristemente desapercibido. Creemos que lo más valioso del concepto de transposición didáctica, respaldado por la Educación Matemática, es que ahora estos trabajos ya

se están compartiendo, haciendo de manera colectiva, y bajo un esquema de investigación científica para difundir resultados. En referencia a esto, D'Amore apunta: “en el trabajo de transposición didáctica, el maestro no es nunca un individuo aislado. Es de hecho lo colectivo, la institución maestro que objetiva y define en su especificidad el saber escolar, sus métodos, su racionalidad” (D'Amore, 2006. p. 236).

Entonces, ¿en qué consiste la transposición didáctica? Bruno D'Amore señala que “la transposición didáctica consiste en el extraer un elemento del saber de su contexto (universitario, social...) para re-contextualizarlo en el contexto siempre singular, siempre único, de su propia clase”. Agrega que “la transposición didáctica produce entonces un cierto número de efectos: simplificación y desdogmatización, creación de artefactos (Rumelhard, 1986) o producción de objetos totalmente nuevos” (D'Amore, 2006. p. 236).

Los conceptos matemáticos se deben abordar, en situaciones de aprendizaje, como objetos y como instrumentos. Hablamos de un concepto matemático como objeto, cuando se contempla como un dato cultural en el campo del saber matemático. Hablamos del mismo concepto como instrumento, cuando funciona en problemas que permite resolver. El proceso didáctico inicia con la introducción de la noción, y posteriormente señala D'Amore, “en el ámbito del funcionamiento didáctico debe activarse un mecanismo con base en el cual nos apropiamos de tal noción para hacer algo” (D'Amore, 2006. p. 237).

Un objeto de saber, para un profesor de matemáticas, incluye a las “nociones matemáticas”, como por ejemplo la noción de “resolución de una ecuación”. Junto a las nociones matemáticas se encuentran las nociones para-matemáticas, como por ejemplo la noción de “ecuación”. Normalmente las nociones para-matemáticas no son objeto de estudio para el matemático, pero sí las nociones matemáticas. Las nociones para-matemáticas son preconstruidas, sin embargo, en general, las nociones matemáticas son construidas (Chevallard, 2013. P. 58)

### **3.8. ESTRUCTURA DE LAS SECUENCIAS**

Entendiendo que una secuencia didáctica es la descripción de todos los momentos y pasos que se van a contemplar en una clase para el logro de un aprendizaje, organizamos la descripción, desde la primera secuencia, como si se tratara de un proyecto único de investigación.

Cada descripción incluye su estructura metodológica, su desarrollo, la forma en que se aplicó ante el grupo, las observaciones realizadas, los resultados obtenidos, y algunas consideraciones.

Las partes que integran la presentación de cada secuencia son las siguientes:

- 1) Resumen
- 2) Justificación
- 3) Hipótesis
- 4) Objetivo
- 5) Sustento teórico de la estructura de la secuencia
- 6) Material didáctico y/o manipulativo a utilizar
- 7) Conocimientos previos
- 8) Sesiones y tiempos
- 9) Pregunta inicial
- 10) Pre-test
- 11) Descripción de la secuencia
- 12) Actividades y ejercicios
- 13) Aplicación
- 14) Guía de preguntas sugeridas
- 15) Post-test
- 16) Observaciones, resultados y consideraciones

## Capítulo 4

### METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

#### 4.1. MÉTODO

La investigación a realizar contempla identificar las formas viables de aplicar secuencias didácticas de matemáticas, en un grupo de 1° de secundaria, fundamentadas en las características del aprendizaje por descubrimiento y en las tres fases del desarrollo cognitivo, ambas propuestas por Jerome Bruner, lo que la sitúa en un estudio de caso debido a que la identificación se logrará a través de la observación.

En un estudio de caso, el investigador “observa las características de una unidad individual, un niño, una pandilla, una clase, una escuela o una comunidad. El propósito de tal observación es probar profundamente y analizar intensamente el fenómeno diverso que constituye el ciclo vital de la unidad, con visión para esclarecer generalizaciones acerca de la más amplia población a la que pertenece tal unidad” (Cohen y Manion, 2002. p. 164).

Es así que nosotros lo queremos observar, al probar las secuencias, es lo relacionado con la aplicación de las ideas y actividades propuestas involucradas en el desarrollo de las secuencias, y con la aplicación de las dos teorías de Jerome Bruner que dan forma a su estructura, para conocer si son funcionales y proponer su generalización.

Al mismo tiempo, el diseño de las secuencias se realizó bajo la contemplación de una hipótesis, misma que nos indica el resultado probable de aplicación de las secuencias. Por consiguiente, la investigación es de tipo experimental ya que previamente se está organizando lo que supone va a ocurrir (a diferencia de una investigación descriptiva en donde el investigador cuenta lo que ya ha ocurrido) (Cohen y Manion, p. 101) para verificar, después del experimento, si las predicciones fueron acertadas.

#### 4.2. POBLACIÓN

Cada secuencia se experimentó en diferentes grupos y en diferentes periodos tal y como se describe a continuación:

## SECUENCIA 1

Para la aplicación de la secuencia 1 se seleccionó un grupo por disposición perteneciente a un colegio particular ubicado en una zona urbana de la ciudad de Puebla. Los alumnos pertenecen al primer grado de secundaria con edades que van de los once a los trece años, es un grupo heterogéneo integrado por 16 alumnos de los cuales 6 son mujeres y 10 son hombres. Por la convivencia con los alumnos se reconocen algunos alumnos con facilidad para aprender, algunos otros con mediana dificultad para aprender y dos con dificultad para aprender, La secuencia se aplicó a mediados del mes de octubre 2016.

## SECUENCIA 2

La secuencia 2 se aplicó en un grupo de primero de secundaria, formado por 17 alumnos, perteneciente a un colegio particular ubicado en la zona urbana de la ciudad de Puebla, Pue. Por corresponder a un tema del cuarto bimestre, de acuerdo a los planes y programas oficiales vigentes, la aplicación se realizó a principios del mes de febrero del año 2017. Es un grupo de estudiantes con edades entre 11 a 13 años de los cuales once son hombres y 6 son mujeres.

## SECUENCIA 3

Siguiendo la línea de investigación experimental y ante la disponibilidad de algunos estudiantes, que por su situación no pueden asistir regularmente a clases en escuelas de conveniencia, la secuencia se aplicó dentro de las instalaciones del Hospital del Niño Poblano en la ciudad de Puebla, Pue. Se esperaba la asistencia de 6 estudiantes de distintos grados de secundaria y bachillerato, pero solamente pudieron participar 4 estudiantes, de sexo masculino, de los cuales se encontraban uno de cada grado de secundaria y uno de 2° de bachillerato. La secuencia se aplicó a mediados del mes de noviembre del año 2017.

### **4.3. PROCEDIMIENTO**

La aplicación de las secuencias se contempla de acuerdo a la descripción hecha en cada una, a saber: seleccionar el grupo de estudiantes, explicar la finalidad de la clase a los estudiantes, plantear la pregunta inicial, aplicar el pre-test, repartir y explicar el uso del material manipulativo, realizar las tres fases del desarrollo cognitivo propuesto, plantear las preguntas sugeridas, y aplicar el post-test. Al ir realizando todas estas actividades, se tendrá especial interés en observar el comportamiento de los estudiantes y la forma en que se aplican las tres fases planeadas. La comparación del pre-test y post-test, nos permitirán identificar el desempeño de cada estudiante e identificar también el comportamiento de las respuestas que dieron después de la intervención.

Destacamos, en este apartado, que las propuestas involucradas, y las preguntas sugeridas a realizar, tienen la cualidad de evitar que los estudiantes caigan en el “contrato didáctico”, y los maestros deben evitar caer en el “efecto Topaze”, por lo cual, la observación también se tiene que dirigir hacia este plano.

## Capítulo 5

### **SECUENCIA DIDÁCTICA PARA QUE LOS ESTUDIANTES IDENTIFIQUEN LAS FRACCIONES (COMO PARTE TODO) QUE ESTÁN REPRESENTADAS EN LAS PIEZAS DE UN TANGRAM**

#### **5.1. RESUMEN**

Se describe la aplicación de una secuencia didáctica, junto con sus resultados, que tiene como objetivo que los alumnos lleguen a identificar las fracciones que pueden estar representadas en las piezas de un tangram. Se muestra la forma en que se guía a los alumnos a construir un tangram, preferentemente con hojas de papel de diferentes colores, para qué haciendo uso de él, y mediante cuestionamientos e indicaciones por parte del profesor, puedan visualizar y concebir las fracciones que están involucradas en sus piezas. La finalidad es que los alumnos puedan comparar las formas y los tamaños de las piezas que integran un tangram para reforzar la noción de fracción desde un enfoque parte-todo. Como sustento para el proceso cognitivo se consideran y se integran las tres formas de aprendizaje que propone la Teoría del Desarrollo Cognitivo de Jerome Bruner.

#### **5.2. JUSTIFICACIÓN**

De acuerdo a los Planes y Programas de Matemáticas (SEP, 2011) para la Educación Básica, se observa al tema de fracciones como un concepto transversal y fundamental en el estudio de la matemática. Al mismo tiempo, de acuerdo a la revisión de exámenes, al resultado de pruebas internacionales, y al desempeño de los estudiantes a lo largo de cursos básicos, se aprecia la dificultad, por parte de los alumnos, en el manejo de las fracciones. Muchas deben ser las causas de esta dificultad, pero consideramos que la principal es que los estudiantes no tienen una concepción adecuada de este término.

Considerando estas dos circunstancias, y bajo la perspectiva del descubrimiento, se decidió trabajar el concepto de fracción aprovechando las formas y las relaciones fraccionarias que se involucran en las piezas de un tangram. La finalidad es que los alumnos adquieran una visión complementaria y reafirmen el concepto de fracción como la representación de una parte de la

unidad, es decir, como una fracción parte-todo. Aclaremos que se trata de la visión de una fracción como parte-todo, para diferenciarlo de los otros usos que tiene una fracción, los cuales son: como razón, como cociente y como operador.

Aunque estamos conscientes que el tema de fracciones ya se ha abordado en muchas propuestas y desde diferentes perspectivas, no quisimos dejarlo a un lado por lo interesante y adecuado que nos pareció trabajarlo para el tipo de secuencias que nos propusimos redactar.

Las partes de un tangram se utilizan para la construcción de figuras planas en donde previamente se da la sombra de la figura y los alumnos tienen que encontrar qué piezas unir y cómo unirlas para igualar la forma de la sombra. La finalidad de esto es desarrollar la inteligencia espacial de los estudiantes, para lo cual se pide a los alumnos adquirir y llevar a clase un tangram ya construido. En esta secuencia se pretende dar un enfoque distinto al uso del tangram el cual consiste en que los alumnos experimenten la construcción del mismo, utilizando hojas de papel de diferentes colores, y que manipulen sus piezas para compararlas y poder conducirlos, a través de preguntas, a tener una idea más precisa del concepto de fracción sin tener que dar una definición.

También observamos en libros de texto de matemáticas que cuando se enseña la representación simbólica y gráfica de fracciones, se da a partir de la definición de fracción y a partir de la representación de una figura dividida en partes iguales entre sí. Aquí se pretende que los alumnos trabajen el criterio de fracción con figuras de diferente forma y tamaño como integrantes de una misma unidad.

Estos dos enfoques, aplicados en la secuencia, permiten enriquecer diferentes aspectos matemáticos los cuales nos conducirán a lograr el objetivo mencionado. También se involucran aspectos acerca de fracciones equivalentes, de simplificación de fracciones y de comparación de fracciones.

La secuencia está dirigida, por las características del tema, a estudiantes de 1° de secundaria, aunque por la cobertura del concepto, puede resultar útil e interesante aplicarlo desde 5° grado de primaria y, con otros enfoques, en 2° y 3° de secundaria, e inclusive en 1° de bachillerato.

### **5.3. OBJETIVO**

Los alumnos identificarán las fracciones, como parte-todo, que están representadas en las piezas de un tangram mediante su construcción, su manipulación, el análisis y la comparación de las piezas que lo forman. La actividad se desarrollará enfocando el aprendizaje por descubrimiento y aplicando el desarrollo cognitivo propuestos por Jerome Bruner.

### **5.4. SUSTENTO TEÓRICO DE LA ESTRUCTURA DE LA SECUENCIA**

La secuencia conducirá al alumno a involucrarse y a apropiarse de la noción de fracción, como parte-todo, considerando las tres fases del Desarrollo Cognitivo propuesto por Jerome Bruner: fracción como parte física para ser manipulada (fase enactiva), fracción como un esquema mental (fase icónica), y fracción en escritura matemática formal (fase simbólica). Para esto se encamina al estudiante mediante preguntas, construcción de un tangram, manipulación de sus partes, observación y análisis, a establecer las relaciones existentes entre las piezas que forman un tangram. Dichas relaciones se dan en tres formas diferentes: como una relación parte-todo, como una relación parte-parte y como una relación parte-forma. De esta manera, con la construcción y manejo del tangram, y con la serie de preguntas a realizar, consideramos que los alumnos se formarán una noción más adecuada del concepto de fracción, sin tener que recurrir a su definición. Se pudiera haber pedido a los estudiantes un tangram comercial ya fabricado, pero la fase enactiva comienza precisamente desde su construcción. Además, se perdería una parte importante correspondiente al uso del lenguaje geométrico y a la identificación física de este lenguaje al momento de doblar y cortar sus hojas de papel para construir su propio tangram

### **5.5. MATERIAL A UTILIZAR**

Hojas de papel de diferentes colores, regla de 30 cm y tijeras.

## **5.6. CONOCIMIENTOS PREVIOS**

En esta secuencia se involucran algunas palabras de uso común en el estudio de la geometría. Dichas palabras las utilizamos directamente en el desarrollo de la secuencia sin entrar en el formalismo de su definición. La finalidad es que los alumnos tengan contacto inmediato con estas palabras y puedan establecer una noción cercana de su definición. El contacto se realiza a través de cuestionamientos e indicaciones enfatizando las descripciones más adecuadas que aporten los estudiantes. Las palabras que utilizaremos son las siguientes:

figura geométrica, vértice, vértice opuesto, vértice no consecutivo, vértice contiguo, segmento, recta, ángulo, ángulo recto o de  $90^\circ$ , diagonal, punto medio, lado, lado más largo, mediana, lados paralelos, cuadrado, triángulo, triángulo isósceles, triángulo rectángulo, rectángulo, paralelogramo y trapecio.

## **5.7. SESIONES Y TIEMPOS**

Para la realización de esta actividad se requiere de seis sesiones con diferentes tiempos cada una, en total se estiman 180 minutos. En cada una de las sesiones se avanza con aspectos y criterios diferentes:

## **5.8. PREGUNTA INICIAL**

La pregunta inicial se realiza a los estudiantes después de haber construido su tangram debido a que la pregunta considera una pieza del tangram y a que se les muestra físicamente.

¿Qué fracción representa el triángulo más pequeño de un tangram?

## **5.9. PRE-TEST**

Para visualizar el conocimiento que tienen los alumnos del tema a tratar, se elaboró el siguiente cuestionario de seis preguntas y dos justificaciones. En este cuestionario se involucran los aspectos básicos de las fracciones los cuales nos permitirán conocer la noción que tienen los

alumnos acerca de ellas y la forma en que las representan. Previo a la aplicación del pre-test, ya se informó brevemente a los estudiantes de la actividad a realizar la cual se contemplará a manera de juego. También se les aclaró que el cuestionario a aplicar no se considera para su calificación.

1) ¿Qué entiendes por fracción?

\_\_\_\_\_

2) Para ti ¿qué representa la fracción “un medio”?

\_\_\_\_\_

3) Para ti ¿qué representa la fracción “un cuarto”?

\_\_\_\_\_

4) Para ti ¿cuánto es la mitad de un medio?

\_\_\_\_\_

5) ¿Será cierto que la fracción “un medio” se puede representar con fracciones de “un cuarto”?

Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

6) ¿Qué fracción consideras que es mayor: “un medio” o “un cuarto”?

Considero que es mayor: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

## 5.10. DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA

### PRIMERA SESIÓN

Aplicación del pre-test (10 -15 minutos)

En este primer acercamiento a los estudiantes para aplicar la secuencia, se plantea brevemente la finalidad, sin dar muchos detalles, de este momento de la clase y de las clases posteriores (la construcción del tangram debe ser una sorpresa). Previamente se han impreso los formatos para entregar a cada alumno el cuestionario de seis preguntas descrito en la evaluación diagnóstica. El cuestionario se revisará para comparar las respuestas con las del post-test.

Previendo que la segunda sesión se lleva un mínimo de 40 minutos, el profesor puede decidir, si pudiera abarcar mayor tiempo de clase, trabajar las dos primeras sesiones en una sola.

## SEGUNDA SESIÓN

Construcción del tangram (40 a 50 minutos)

Material necesario: hojas de papel de diferentes colores, regla y tijeras

Se reparte una hoja de papel a cada alumno, de preferencia de colores diferentes, y se van dando las preguntas e indicaciones para que los alumnos construyan su tangram. La finalidad es involucrar a los alumnos para que participen contestando las siguientes preguntas y realizando cada indicación:

- 1) ¿Cómo se puede trazar un cuadrado, que sea el de mayor área, en su hoja de papel?
- 2) Recortar el cuadrado trazado.
- 3) ¿Cuáles son los vértices de su cuadrado?
- 4) ¿Cómo se llama el segmento que une los vértices opuestos de su cuadrado?
- 5) Recortar el cuadrado por una de sus diagonales.
- 6) ¿Qué figuras se obtienen y que características tienen?
- 7) En uno de los triángulos obtenidos ¿cuál es el punto medio del lado más largo?
- 8) A partir de ese punto trazar una línea recta hacia su vértice opuesto.
- 9) ¿Cómo se llama la línea trazada y cuáles son sus características?
- 10) Recortar su figura sobre la línea trazada.
- 11) ¿Qué figuras se obtienen y cuáles son sus características?
- 12) En la otra figura obtenida inicialmente, localizar los puntos medios de los lados más cortos
- 13) Trazar una recta que una los puntos localizados.
- 14) Nombrar alguna característica de la línea trazada.
- 15) Recortar su figura sobre esta línea.
- 16) ¿Qué figuras se obtienen y cuáles son sus características?
- 17) En la figura obtenida de lados paralelos localizar los puntos medios de los lados paralelos.
- 18) Trazar una recta que una los puntos localizados.
- 19) Recortar la figura sobre la línea trazada.

- 20) ¿Qué figuras se obtienen y cuáles son sus características?
- 21) En una de las figuras obtenidas localizar el punto medio del lado más largo y trazar una perpendicular hacia el vértice opuesto.
- 22) Recortar la figura sobre la línea trazada.
- 23) ¿Qué figuras se obtienen y cuáles son sus características?
- 24) En la otra figura obtenida del punto 19, también localizar el punto medio del lado más largo y trazar ahora una recta hacia el vértice contiguo al ángulo recto.
- 25) Recortar la figura sobre la línea trazada.
- 26) ¿Qué figuras se obtienen y cuáles son sus características?
- 27) Preguntar finalmente si conocen el nombre del conjunto de figuras que acaban de obtener.

Para finalizar la sesión se pide a los estudiantes que intercambien piezas entre sus compañeros para que su tangram quede con diferentes colores. Se pide que reconstruyan su tangram y se recomienda que lo guarden ya que para la siguiente sesión se va a utilizar.

### TERCERA SESIÓN (FASE ENACTIVA)

#### Manipulación de las piezas de un tangram

Reconocimiento, manipulación, comparación, análisis y descubrimiento de las relaciones parte-todo, parte-parte y parte-forma de las piezas del tangram (30 a 40 minutos). Al final se anexa un formato de las preguntas sugeridas que deben hacerse a los alumnos (ANEXO 3) y que son la guía para el descubrimiento de la parte fraccionaria que existe en cada pieza del tangram.

Ya teniendo sus piezas listas se les pide que armen su tangram en la forma original (cuadrado). Cuando la mayoría hayan terminado se lanza entonces la pregunta inicial mostrando la pieza correspondiente:

¿Qué fracción representa el triángulo más pequeño de un tangram?

La predicción es que ninguno de los estudiantes va a contestar afirmativamente la pregunta y se aprovecha esta situación para explicar que con la actividad que van a realizar van a poder dar respuesta a la pregunta. Se procede a realizar un repaso de las formas, nombres, características y número de piezas que forman su tangram. Dado que se obtuvieron triángulos de

tres diferentes tamaños, conviene referirse a ellos como triángulo grande, triángulo mediano y triángulo chico.

Formar equipos de dos alumnos (los más cercanos) para apoyarse entre sí, para conjuntar piezas en caso necesario, y para contestar las preguntas.

Realizar las siguientes preguntas verbalmente o dar un cuestionario por escrito. Se pueden combinar ambas formas e involucrar a los alumnos en la lectura y respuesta de las preguntas. Dependiendo del desempeño del grupo se puede llegar hasta la última pregunta, pero para fines del objetivo se puede avanzar hasta la pregunta 12. Se pretende que en esta fase no se consideren todavía las fracciones formales para las respuestas que den los estudiantes, aunque algunos que ya tienen la noción se referirán en su respuesta a una fracción formal.

- 1) ¿Cuántos triángulos grandes se necesitan para formar un tangram igual al original?
- 2) ¿Qué parte del tangram consideras que representan dos triángulos grandes?
- 3) ¿Qué parte del tangram consideras que representa un triángulo grande?
- 4) ¿Qué parte del tangram consideras que representan tres triángulos grandes?
- 5) ¿Cuántos triángulos medianos se pueden sobreponer en un triángulo grande para formar otro igual?
- 6) ¿Cuántos triángulos medianos equivalen a un triángulo grande?
- 7) ¿Cuántos triángulos medianos equivalen a dos triángulos grandes?
- 8) ¿Cuántos triángulos medianos equivalen a cuatro triángulos grandes?
- 9) ¿Cuántos triángulos medianos se necesitan para formar un tangram igual al original?
- 10) ¿Qué parte del tangram consideras que representan cuatro triángulos medianos?
- 11) ¿Qué parte del tangram consideras que representan dos triángulos medianos?
- 12) ¿Qué parte del tangram consideras que representa un triángulo mediano?
- 13) ¿Cuántos triángulos chicos se pueden sobreponer en un triángulo mediano para formar otro igual?
- 14) ¿Cuántos triángulos chicos se pueden sobreponer en un triángulo grande para formar otro igual?
- 15) ¿Cuántos triángulos chicos se necesitan para formar un tangram igual al original?
- 16) ¿Qué parte del tangram consideras que representa un triángulo chico?
- 17) ¿Cuántas y qué partes se pueden sobreponer en la pieza cuadrada para formar otra igual?

- 18) ¿Cuántas piezas cuadradas se necesitan para formar un tangram igual al original?
- 19) ¿Cuántas y qué partes se pueden sobreponer en la pieza paralelogramo para formar otra igual?
- 20) ¿A qué pieza (o piezas) del tangram sería equivalente en tamaño la pieza paralelogramo?

#### CUARTA SESIÓN (FASE ICÓNICA)

Representación mental de fracciones (30 – 40 minutos)

Repartir el siguiente cuestionario y pedir que subrayen la respuesta que piensan es correcta. Conviene formar equipos de 2, 3 o 4 alumnos para que discutan y juntos seleccionen la respuesta adecuada expresando sus justificaciones. Los alumnos deberán apoyarse en su tangram para seleccionar su respuesta por lo que se les debe recomendar tenerlo preparado. Al terminar de contestar se pedirá a diferentes alumnos de cada equipo que lean una pregunta y la contesten explicando sus justificaciones. En consenso grupal se verificará si las respuestas son correctas.

- 1) ¿Un triángulo grande del tangram equivale en fracción a?
  - a) Un medio
  - b) Un cuarto
  - c) Un séptimo
  - d) Un octavo
- 2) ¿Un triángulo mediano del tangram equivale en fracción a?
  - a) Un medio
  - b) Un cuarto
  - c) Un séptimo
  - d) Un octavo
- 3) ¿Un triángulo chico del tangram equivale en fracción a?
  - a) Un cuarto
  - b) Un séptimo
  - c) Un octavo
  - d) Un dieciseisavo
- 4) ¿Dos triángulos grandes del tangram equivalen en fracción a?
  - a) Un medio
  - b) Un cuarto
  - c) Un octavo
  - d) Un dieciseisavo
- 5) ¿Cuatro triángulos grandes del tangram representan?

- a) Un medio
  - b) Un cuarto
  - c) Un octavo
  - d) Un entero
- 6) ¿Dos triángulos medianos del tangram equivalen en fracción a?
- a) Un medio
  - b) Un cuarto
  - c) Un octavo
  - d) Un dieciseisavo
- 7) ¿Cuatro triángulos medianos del tangram equivalen a?
- a) Un medio
  - b) Un cuarto
  - c) Un octavo
  - d) Un entero
- 8) ¿Ocho triángulos medianos del tangram representan?
- a) Un medio
  - b) Un cuarto
  - c) Un octavo
  - d) Un entero
- 9) ¿Dos triángulos chicos del tangram equivalen a?
- a) Un medio
  - b) Un cuarto
  - c) Un octavo
  - d) Un dieciseisavo
- 10) ¿Cuatro triángulos chicos del tangram equivalen a?
- a) Un medio
  - b) Un cuarto
  - c) Un octavo
  - d) Un dieciseisavo
- 11) ¿Ocho triángulos chicos del tangram equivalen a?
- a) Un medio
  - b) Un cuarto
  - c) Un octavo
  - d) Un dieciseisavo
- 12) ¿La pieza cuadrada del tangram equivale en fracción a?
- a) Un medio
  - b) Un cuarto
  - c) Un octavo
  - d) Un dieciseisavo
- 13) ¿La pieza paralelogramo del tangram equivale en fracción a?
- a) Un medio

- b) Un cuarto
  - c) Un octavo
  - d) Un dieciseisavo
- 14) ¿Cada pieza del tangram equivale en fracción a?
- a) Un medio
  - b) Un cuarto
  - c) Un séptimo
  - d) Diferentes fracciones

### QUINTA SESIÓN (FASE SIMBÓLICA)

#### Escritura formal de fracciones (40 a 50 minutos)

En esta última sesión se pedirá a los alumnos que expliquen la escritura formal de una fracción a partir de la idea de ver a las fracciones como la representación de “una parte de un todo dividido”. En nuestro caso el “todo dividido” es el tangram y las piezas son la “parte”. Se puede considerar como ejemplo el triángulo más chico del tangram, explicando que al ser una de dieciséis partes del tangram se representa como la fracción “uno sobre dieciséis” y que se lee “un dieciseisavo”. De igual forma se puede considerar la pieza cuadrada del tangram, que al ser uno de ocho partes, se representa como la fracción “uno sobre ocho” y que se lee como “un octavo”. Al mismo tiempo se señalan los nombres que reciben cada uno de los números que forman una fracción (numerador y denominador).

Para practicar y formalizar la escritura de fracciones se realizan las siguientes preguntas, a manera de ejercicios, en donde los alumnos pasan al pizarrón a escribir las respuestas. Para fines del objetivo y dependiendo del desempeño del grupo es suficiente contestar hasta la pregunta 22, las preguntas 23 a 30 son consideradas como introducción al tema de suma de fracciones bajo la misma perspectiva de esta secuencia. También se puede entregar el cuestionario de manera impresa.

- 1) ¿Cuál es la fracción que representa a un triángulo grande del tangram?
- 2) ¿Cuál es la fracción que representa a dos triángulos grandes del tangram?
- 3) ¿Cuál es la fracción que representa a tres triángulos grandes del tangram?
- 4) ¿Cuál es la fracción que representa a un triángulo mediano del tangram?
- 5) ¿Cuál es la fracción que representa a dos triángulos medianos del tangram?
- 6) ¿Cuál es la fracción que representa a tres triángulos medianos del tangram?
- 7) ¿Cuál es la fracción que representa a cuatro triángulos medianos del tangram?
- 8) ¿Cuál es la fracción que representa a cinco triángulos medianos del tangram?
- 9) ¿Cuál es la fracción que representa a un triángulo chico del tangram?
- 10) ¿Cuál es la fracción que representa a dos triángulos chicos del tangram?
- 11) ¿Cuál es la fracción que representa a tres triángulos chicos del tangram?
- 12) ¿Cuál es la fracción que representa a cuatro triángulos chicos del tangram?
- 13) ¿Cuál es la fracción que representa a cinco triángulos chicos del tangram?
- 14) ¿Cuál es la fracción que representa a la pieza paralelogramo del tangram?
- 15) ¿Cuál es la fracción que representa a la mitad de dos triángulos grandes del tangram?
- 16) ¿Cuál es la fracción que representa a la mitad de un triángulo grande del tangram?
- 17) ¿Cuál es la fracción que representa a la mitad de dos triángulos medianos del tangram?
- 18) ¿Cuál es la fracción que representa a la mitad de un triángulo mediano del tangram?
- 19) De las fracciones que representan a los tres triángulos diferentes del tangram, ¿cuál es la fracción mayor?
- 20) De las fracciones que representan a los tres triángulos diferentes del tangram, ¿cuál es la fracción menor?
- 21) Si dos fracciones tienen de numerador "1" pero diferente denominador, ¿cuál fracción es mayor?
- 22) Si dos fracciones tienen de numerador "1" pero diferente denominador, ¿cuál fracción es menor?
- 23) ¿Qué fracción representa a un triángulo grande y dos medianos del tangram?
- 24) ¿Qué fracción representa a dos triángulos grandes y dos medianos del tangram?
- 25) ¿Qué fracción representa a dos triángulos grandes y uno mediano del tangram?
- 26) ¿Qué fracción representa a un triángulo mediano y dos triángulos chicos del tangram?
- 27) ¿Qué fracción representa a dos triángulos medianos y dos triángulos chicos del tangram?

- 28) ¿Qué fracción representa a un triángulo grande y dos triángulos chicos del tangram?
- 29) ¿Qué fracción representa a un triángulo grande y un triángulo chico del tangram?
- 30) ¿Qué parte fraccionaria del tangram representan la pieza llamada paralelogramo y los dos triángulos chicos?

## PREGUNTAS OPCIONALES Y DE REFORZAMIENTO DEL TEMA PARA UNA SESIÓN COMPLEMENTARIA

Como una proyección de la secuencia para temas posteriores bajo el mismo esquema, compartimos una guía sugerida de preguntas que introducirán a los estudiantes a la noción de fracciones equivalentes.

- 1) ¿Cuántos medios forman un entero?
- 2) ¿Cuántos cuartos forman un entero?
- 3) ¿Cuántos octavos forman un entero?
- 4) ¿Cuántos dieciseisavos forman un entero?
- 5) ¿Dos mitades qué número natural forman?
- 6) ¿Dos cuartos qué fracción simplificada forman?
- 7) ¿Cuatro cuartos qué número natural forman?
- 8) ¿Dos octavos qué fracción simplificada forman?
- 9) ¿Cuatro octavos qué fracción simplificada forman?
- 10) ¿Ocho octavos que número natural forman?
- 11) ¿Dos dieciseisavos que fracción simplificada forman?
- 12) ¿Cuatro dieciseisavos que fracción simplificada forman?
- 13) ¿Ocho dieciseisavos que fracción simplificada forman?
- 14) ¿Dieciséis dieciseisavos que número natural forman?
- 15) ¿Cuántos cuartos forman un medio?
- 16) ¿Cuántos octavos forman un medio?
- 17) ¿Cuántos dieciseisavos forman un medio?
- 18) ¿Cuántos octavos forman un cuarto?
- 19) ¿Cuántos dieciseisavos forman un cuarto?

- 20) ¿Cuántos dieciseisavos forman un octavo?
- 21) ¿Cuánto es la mitad de un medio?
- 22) ¿Cuánto es la mitad de un cuarto?
- 23) ¿Cuánto es la mitad de un octavo?
- 24) ¿Cuánto es la cuarta parte de un medio?

## SEXTA SESIÓN

### Aplicación del post-test

La secuencia termina con la aplicación del post-test. Se recomienda aplicarlo por lo menos una semana después de aplicar la secuencia para tener una mayor confianza en los resultados (10 a 15 minutos).

#### 5.11. POST-TEST

En el post-test se incluyen dos preguntas más y una justificación respecto al pre-test, esto se hizo con la finalidad de observar si hubo resultados óptimos después de aplicar la secuencia. La pregunta 7 se incluyó con la finalidad de saber si el estudiante podía comparar acertadamente dos fracciones, y la pregunta 8 para conocer si el estudiante podía contestar la pregunta inicial, pero sin que se refiriera al contexto del tangram. Las preguntas que se agregaron son:

- 7) ¿Qué fracción consideras que es mayor: “un cuarto” o “un octavo”?

Considero que es mayor: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

- 8) ¿Qué fracción representa la mitad de un cuarto?

\_\_\_\_\_

#### 5.12. APLICACIÓN DE LA SECUENCIA

Para la aplicación de la secuencia se seleccionó un grupo por disposición perteneciente a un colegio particular de la ciudad de Puebla. Los alumnos pertenecen al primer grado de

secundaria con edades que van de los once a los trece años, es un grupo heterogéneo integrado por 16 alumnos de los cuales 6 son mujeres y 10 son hombres. Por la convivencia con los alumnos se reconocen algunos alumnos con facilidad y algunos otros con mediana dificultad para aprender, lo cual se corroboró con los resultados del pre-test.

La secuencia se aplicó a mediados del mes de octubre 2016, lo cual nos muestra que los alumnos ya tenían un avance del primer bloque del programa de estudios oficial de primero de secundaria, es decir que los alumnos ya tenían contemplados algunos aspectos de las fracciones como: representación de fracciones en la recta numérica, conversión de una fracción a un número decimal, conversión de un número decimal a fracción y la escritura de fracciones equivalentes.



**FOTOGRAFÍA 1-1S**

### **5.13. EXPERIENCIAS, RESULTADOS Y CONSIDERACIONES**

Para la elaboración del pre-test se consideraron aspectos relativamente simples y elementales, pero fundamentales, sobre la concepción del término fracción. Para la valoración de las respuestas no se requirió de una definición o explicación estricta ni formal, sólo se requirió de una redacción en donde el alumno expresara la idea cercana a lo que se le preguntaba. El pre-test

incluyó seis preguntas y dos justificaciones (8 respuestas). La siguiente tabla nos muestra los resultados con el número de respuestas asertivas que dieron los 16 alumnos participantes:

<b>ALUMNO</b>	<b>PRE-TEST</b>	<b>% pre-test</b>
A-1	5	62
A-2	1	12
A-3	6	75
A-4	6	75
A-5	8	100
A-6	8	100
A-7	3	37
A-8	7	87
A-9	8	100
A-10	6	75
A-11	6	75
A-12	8	100
A-13	6	75
A-14	2	25
A-15	1	12
A-16	6	75
<b>TOTAL</b>	<b>87/128</b>	<b>68 %</b>

**TABLA 1-1S**

En TABLA 1-1S observamos que las respuestas son favorables en la mayoría de los alumnos. Cuatro alumnos contestaron de manera acertada las ocho preguntas-justificaciones, ocho alumnos se encuentran en el rango de contestar aceptablemente de cinco a siete preguntas-justificaciones, y cuatro alumnos se encuentran por debajo de contestar aceptablemente cuatro preguntas-justificaciones. Estos resultados “óptimos” suponemos que son debidos a tres causas: primero a que los alumnos muy recientemente habían tenido contacto con temas semejantes a los planteados en el pre-test. Segundo, el pre-test incluyó preguntas relativamente básicas y elementales sobre las fracciones. Y tercero, no se requirieron respuestas estrictas y se consideró aceptable si daban una idea cercana a lo que se les preguntaba.

De una manera intencionada y debido a que al finalizar la aplicación de la secuencia siguió la semana de exámenes bimestrales, y posteriormente otra semana de días inactivos y festivos, el post-test se aplicó dos semanas después de terminada la secuencia.

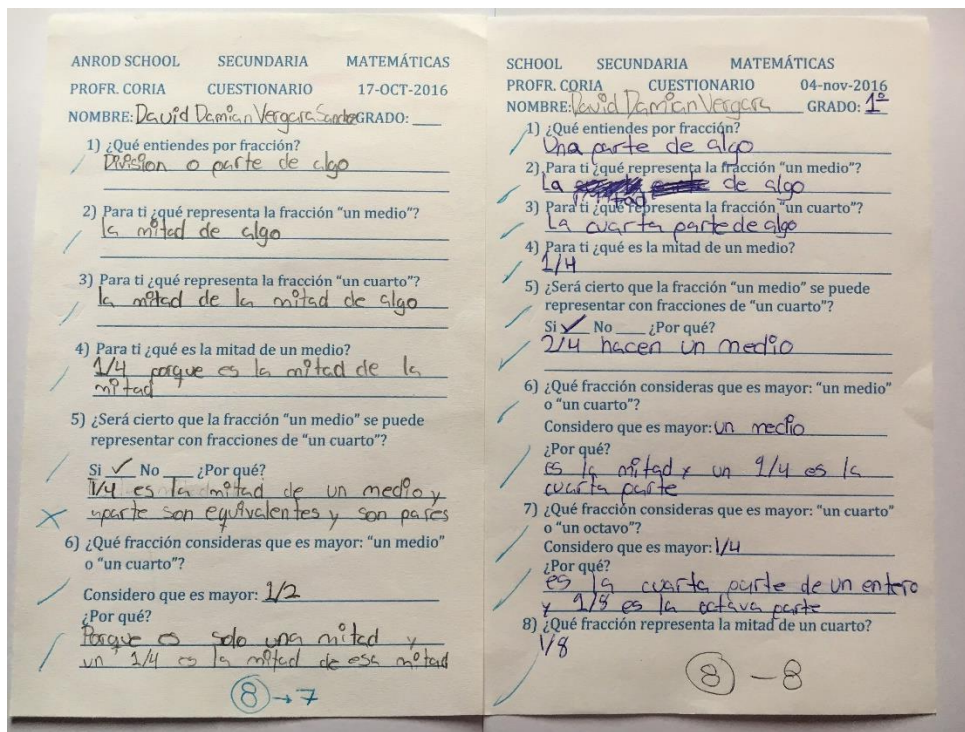
A continuación, se muestran los resultados del post-test con el número de respuestas asertivas que obtuvo cada alumno considerando los mismos 16 participantes:

<b>ALUMNO</b>	<b>POST-TEST</b>	<b>% post-test</b>
A-1	6	75
A-2	2	25
A-3	5	62
A-4	6	75
A-5	8	100
A-6	8	100
A-7	6	75
A-8	8	100
A-9	8	100
A-10	8	100
A-11	7	87
A-12	8	100
A-13	6	75
A-14	4	50
A-15	5	62
A-16	8	100
<b>TOTAL</b>	<b>103/128</b>	<b>80 %</b>

**TABLA 2-1S**

En la tabla 2-1S podemos observar que 7 alumnos contestaron acertadamente todas las preguntas-justificaciones del post-test, 7 estudiantes están en el rango de contestar aceptablemente de 5 a 7 preguntas-justificaciones, y sólo dos estudiantes se encuentra por debajo de este rango.

La siguiente imagen nos muestra las respuestas que proporcionó uno de los estudiantes en el pre-test y en el post-test:



FOTOGRAFÍA 2-1S

Presentamos ahora la TABLA 3-1S que conjunta los resultados del pre-test y del post-test para poder realizar su comparación:

COMPARATIVO NUMÉRICO Y PORCENTUAL DE RESPUESTAS CORRECTAS, OBTENIDAS POR CADA ALUMNO, EN EL PRE-TEST Y EN EL POST-TEST

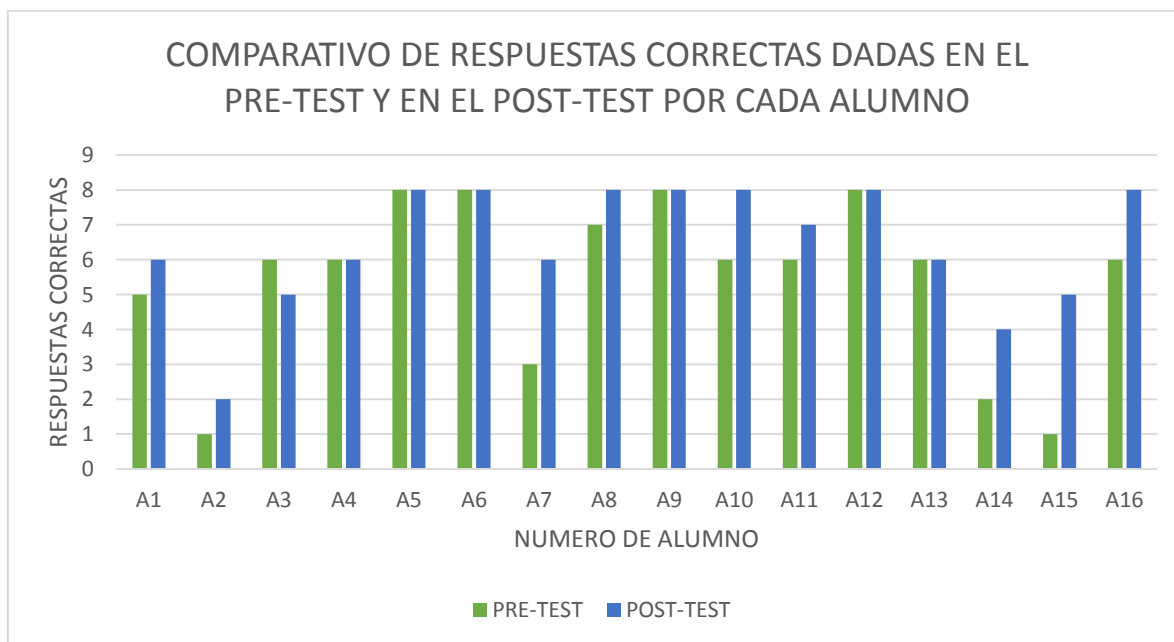
ALUMNO	PRE-TEST	POST-TEST	% pre-test	% post-test
A-1	5	6	62	75
A-2	1	2	12	25
A-3	6	5	75	62
A-4	6	6	75	75
A-5	8	8	100	100
A-6	8	8	100	100
A-7	3	6	37	75
A-8	7	8	87	100
A-9	8	8	100	100
A-10	6	8	75	100
A-11	6	7	75	87
A-12	8	8	100	100
A-13	6	6	75	75

A-14	2	4	25	50
A-15	1	5	12	62
A-16	6	8	75	100
<b>TOTAL</b>	<b>87/128</b>	<b>103/128</b>	<b>68 %</b>	<b>80 %</b>

**TABLA 3-1S**

Al visualizar la TABLA 3-1S, podemos comparar los resultados del pre-test con los del post-test observando una diferencia numérica de 16 puntos, lo que porcentualmente equivale a un aumento del 18 % respecto a los 87 puntos inicialmente obtenidos.

Proporcionamos la siguiente gráfica para visualizar las respuestas asertivas que dio cada alumno en ambas pruebas:



**GRÁFICA 1-1S**

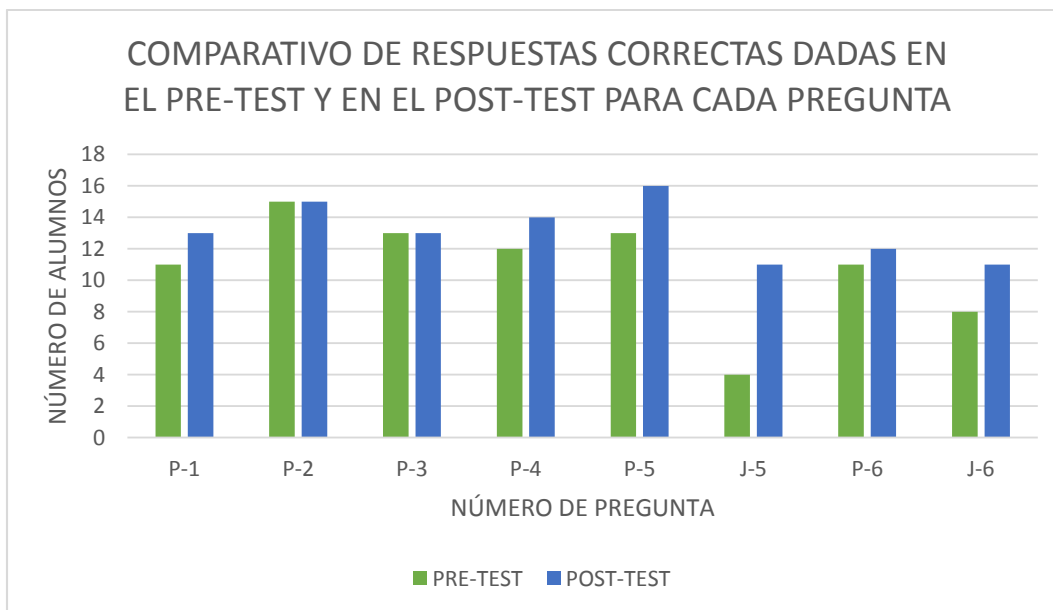
El alcance de las respuestas asertivas para cada pregunta, tanto en el pre-test como en el post-test, se muestra en la siguiente tabla:

PREGUNTA	PRE-TEST	POST-TEST	% pre-test	% post-test
P-1	11	13	69	81
P-2	15	15	94	94
P-3	13	13	81	81

P-4	12	14	75	87
P-5	13	16	81	100
J-5	4	11	25	69
P-6	11	12	69	75
J-6	8	11	50	69
<b>TOTAL</b>	<b>87/128</b>	<b>105/128</b>	<b>68 %</b>	<b>82 %</b>

**TABLA 4-1S**

La siguiente gráfica nos permite observar el comportamiento de las respuestas asertivas de cada pregunta para el pre-test y el post-test:



**GRÁFICA 2-1S**

Con la finalidad de observar el desempeño de los estudiantes en relación a la comparación de fracciones y a la respuesta de la pregunta inicial, al post-test se le agregaron dos preguntas y una justificación, las cuales son las siguientes:

7) ¿Qué fracción consideras que es mayor: “un cuarto” o “un octavo”?

Considero que es mayor: \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

8) ¿Qué fracción representa la mitad de un cuarto? \_\_\_\_\_

Los resultados de las respuestas que dieron los estudiantes a estas preguntas agregadas se presentan en la siguiente tabla (c respuesta correcta, x respuesta incorrecta):

<b>ALUMNO</b>	<b>P – 7</b>	<b>J – 7</b>	<b>P – 8</b>
A-1	X	X	C
A-2	X	X	X
A-3	C	X	C
A-4	C	X	C
A-5	C	C	C
A-6	C	C	C
A-7	X	X	X
A-8	C	C	C
A-9	C	C	C
A-10	C	C	C
A-11	C	C	C
A-12	C	C	C
A-13	C	C	C
A-14	X	X	C
A-15	C	C	C
A-16	C	C	C
<b>TOTAL</b>	<b>12</b>	<b>10</b>	<b>14</b>

**TABLA 5–1S**

De acuerdo a los resultados presentados en la TABLA 5–1S observamos que los estudiantes contestaron correctamente 36 preguntas de un total de 48.

Al momento de aplicar la secuencia observamos que desde el inicio hubo interés por parte de los alumnos y se presentó disposición para trabajar. Precisamente, en esta parte inicial, no se les indicó a los alumnos el objetivo de la actividad para mantener la expectativa de lo que iban a realizar. Hubo atención y trabajo en todo momento de tal manera que los alumnos estuvieron entretenidos y motivados.

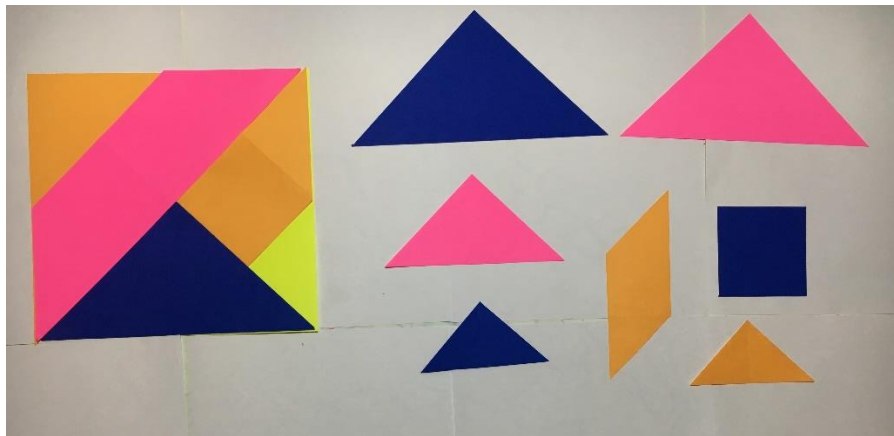
Se dio la participación individual y el apoyo en parejas durante los tres momentos de la secuencia que lo requerían: construcción, trabajo en equipo y respuesta a las preguntas. Hubo predicción de dos alumnos momentos antes de terminar de construir su tangram y en la mayoría hubo sorpresa al terminarlo. Pensamos que hubo gusto por la actividad y se realizó a manera de juego, ya que no observamos momentos de tensión o rostros de desagrado.

Se presentaron dos situaciones críticas, una al formar los equipos en donde una alumna no quiso participar con su compañero y prácticamente trabajaron de forma individual. La otra fue durante la fase de preguntas, en donde un alumno al no poder contestar, una de sus compañeras se levantó impulsivamente de su banca y fue al lugar de su compañero para mostrarle cómo debería sobreponer las piezas para que así pudiera dar respuesta a la pregunta.

Observamos que se dio la manipulación del material y se logró el descubrimiento ya que, sin ayudarles a contestar las preguntas y sin sugerirles que utilizaran su tangram, por sí mismos tuvieron iniciativa para acomodar y comparar sus piezas dando respuesta a la mayoría de las preguntas durante las tres fases del desarrollo cognitivo.

De acuerdo a la participación de los alumnos, por las respuestas que daban a los cuestionarios, y por el uso que daban al tangram, consideramos que hubo resultados óptimos ya que la mayoría contestaba acertadamente la mayoría de las preguntas. Lo anterior puede considerarse como una muestra de que cuando se aplica una secuencia didáctica en donde están contemplados y planeados todos los momentos y todas las actividades, se logran los objetivos y los resultados propuestos.

Durante el desarrollo de la secuencia también observamos que los alumnos, sin que se les indicara y sin considerar que esto iba a suceder, cuando estábamos realizando la fase icónica los estudiantes se regresaban a la fase enactiva para regresar nuevamente a la icónica. Igualmente, al estar trabajando en la fase simbólica, en varios momentos se regresaban a la icónica o a la enactiva, para revolver lo planteado en la fase simbólica.



## Capítulo 6

# SECUENCIA DIDÁCTICA PARA QUE LOS ALUMNOS ESTABLEZCAN LA LEY DE LOS SIGNOS PARA LA SUMA DE NÚMEROS ENTEROS UTILIZANDO FICHAS DE COLORES

### 6.1. RESUMEN

Se presenta una secuencia didáctica que tiene como finalidad llevar a los alumnos a establecer el signo (+ o -) de un resultado cuando realicen sumas de números enteros (positivos y negativos) utilizando fichas de dos diferentes colores las cuales, al manipularlas y representar una operación, le permitan descubrir el signo del resultado

### 6.2. JUSTIFICACIÓN

De acuerdo a los planes y programas de Matemáticas, observamos que la suma y resta de números positivos y negativos es un tema fundamental y transversal de la enseñanza de la matemática en el nivel Básico. Al mismo tiempo, por la experiencia que tenemos al impartir clases de matemáticas, observamos que este tema tiene cierto grado de dificultad, por parte de los alumnos, cuando lo realizan. Por tales motivos queremos plantear una forma, alterna y complementaria, de enseñar este tema basada en el aprendizaje por descubrimiento. Para la realización de esta actividad se enfocan tres características que se involucran en el aprendizaje por descubrimiento que son: el uso de material didáctico, el aprendizaje a través del juego y el aprendizaje manipulativo.

Las formas en que se aborda este tema, según observamos en diversos libros de 1° de secundaria, son mediante el uso de una recta numérica y mediante el aprendizaje memorístico de las leyes de los signos para la suma y la resta. El enfoque que queremos abordar en esta secuencia consiste en que, a través de la manipulación de fichas u otros objetos como tapas de plástico del mismo tamaño o palitos de colores, el estudiante visualice el signo (+ o -) que queda involucrado en el resultado de una suma o resta de números que también tienen signo (números enteros). De esta forma, sin que se le tenga que dar al alumno una ley, o una representación de los números y sus operaciones en la recta numérica, él solo sea capaz de obtener correctamente el resultado de

ejercicios planteados. Esta forma de enseñanza está planteada con el nombre de “modelo del equilibrio” en el libro titulado “Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria” (Carrillo, Contreras y Climent, 2016. p. 68) y en el libro titulado “Sistemas numéricos y su didáctica para maestros” (Godino, Batanero y Cid, 2003. p. 401) a manera de taller matemático nombrado “El modelo de las fichas bicolors”, pero en ninguno se describen resultados de su aplicación frente a grupo.

### **6.3. OBJETIVO**

El alumno determinará el resultado de sumas con números enteros utilizando fichas de dos colores diferentes enfatizando el signo, positivo o negativo que lo acompaña.

### **6.4. SUSTENTO TEÓRICO DE LA ESTRUCTURA DE LA SECUENCIA**

Se guiará al alumno a establecer el resultado de sumas con números enteros a través de las tres fases de aprendizaje cognitivo propuestas por Jerome Bruner. Las actividades que contempla cada fase son las siguientes:

- 1) FASE ENACTIVA. Se explicará al alumno el uso de las fichas enfocando la aplicación de la propiedad matemática denominada “inverso aditivo”. El alumno conjuntará fichas aplicando esta propiedad.
- 2) FASE ICÓNICA. El alumno manipulará las fichas para que distinga, agrupe y separe las fichas sobrantes al representar diversas operaciones que se dará en forma verbal.
- 3) FASE SIMBÓLICA. Se representarán, en forma escrita operaciones semejantes a las que se indicaron de forma verbal en la fase icónica.

Se recurre al uso de fichas de dos diferentes colores para representar, a manera de juego, la agrupación y la anulación de fichas. Se explicará a los alumnos que las fichas de un color representan a los números positivos y que las fichas de otro color a los números negativos. Es decir, cada ficha de un color que se selecciona está representado a un “uno positivo”, y cada ficha que se selecciona de otro color está representando a un “uno negativo”. Después se indica, como regla del

juego, que al juntar dos fichas de diferente color éstas desaparecen y ya no se contabilizan. El juego consiste en conjuntar diferentes cantidades de fichas de ambos colores para determinar cuántas no desaparecen y de qué color son. Se debe enfatizar que el color de las fichas que no desaparecen se nombra con la palabra “más” o “menos” según corresponda a fichas positivas o negativas. Todo este proceso corresponde a la fase enactiva.

En la fase icónica se realizarán, inicialmente, ejercicios sencillos en forma verbal para que el alumno vaya estableciendo un proceso mental de las operaciones y sus resultados. Mediante diversos ejercicios se guiará al alumno a darse cuenta de que, al agrupar fichas, se está representando una suma de números con signo y que las fichas que no se anulan representan el resultado de dicha operación. Todo éste proceso se realiza de manera verbal para que el alumno desarrolle un esquema mental de comparación entre la agrupación de fichas y una operación matemática de números con signo.

Por último, se establece la fase simbólica que consiste en formalizar la escritura de las operaciones representadas con las fichas al lenguaje matemático. Al mismo tiempo se enfatiza que el proceso de la anulación de fichas es también la representación de una propiedad matemática llamada “inverso aditivo”. En este caso esta propiedad se enuncia como “un uno positivo sumado con un uno negativo es igual a cero y se representa  $(+1) + (-1) = 0$ ”.

La secuencia termina con la realización de tres actividades, a manera de juego, para practicar y repasar diversas sumas confirmando el logro del objetivo.

## **6.5. MATERIAL DIDÁCTICO Y/O MANIPULATIVO A UTILIZAR**

Se utilizarán y prepararán para la clase, por lo menos 20 fichas por alumno de dos diferentes colores (10 de cada color), cinta adhesiva, y un par de dados numerados con puntos del 1 al 6 de diferente color que serán usados por el profesor en una de las actividades de cierre.

## **6.6. CONOCIMIENTOS PREVIOS**

Para la realización de esta secuencia se requiere familiarizar al alumno con el concepto de números positivos y negativos. De igual forma se requiere que conozca los tres diferentes usos que se le dan al signo menos: para indicar la operación resta, para indicar un número negativo y

para indicar el inverso de un número. Éstas tres situaciones se manejarán en la fase simbólica al momento de simplificar expresiones de restas con números negativos.

## 6.7. TIEMPOS Y SESIONES

La aplicación de esta secuencia contempla tres sesiones de 45 minutos cada una. En la primera sesión se contempla realizar la aplicación del pre-test, la fase enactiva y la fase icónica. En la segunda sesión se realizará la fase simbólica y la primera de tres actividades de reforzamiento a manera de juegos. En la tercera sesión se realizarán las dos restantes actividades y la aplicación del post-test.

## 6.8. PREGUNTA INICIAL

¿Cuál es el resultado de sumar  $-7$  con  $+4$ ?

## 6.9. PRE-TEST

Para poder comparar el conocimiento que tienen los alumnos del tema a tratar, antes y después de aplicar la secuencia, se elaboró el siguiente cuestionario de seis preguntas. En este cuestionario se involucran los aspectos básicos del tema a tratar y son los que nos permitirán visualizar el nivel previo de conocimientos que tienen los alumnos.

- 1) ¿Conoces los números negativos? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_
- 2) ¿Qué son para ti los números negativos:  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
- 3) Escribe un ejemplo de un número negativo: \_\_\_\_\_
- 4) ¿Qué resultado darías a la siguiente expresión?:  $(+1) + (-1) =$  \_\_\_\_\_
- 5) ¿Qué signo pondrías al resultado de  $2 - 5$ ? Positivo \_\_\_\_\_ Negativo \_\_\_\_\_
- 6) ¿Qué resultado darías a la siguiente operación?:  $3 - 7 =$  \_\_\_\_\_

Las primeras tres preguntas nos permiten determinar qué conocimientos tienen los alumnos de los números negativos. La pregunta cuatro nos servirá para visualizar si los alumnos entienden la propiedad del inverso aditivo. Las preguntas cinco y seis son precisamente las que nos darán información del conocimiento que tienen los alumnos del signo resultante al realizar una resta con números enteros.

En el post-test se agregaron tres preguntas relacionadas con la ley de los signos para la suma y resta de números con signo. Estas preguntas nos permitirán ver el descubrimiento alcanzado por los alumnos y el logro del objetivo.

## **6.10. DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA**

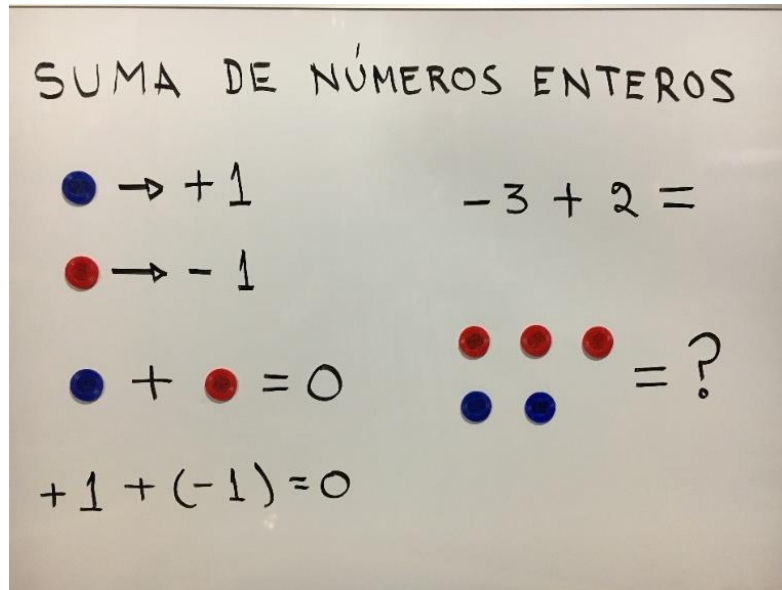
Para la realización de esta secuencia se contemplan tres sesiones de 50 minutos cada una. En la primera sesión se abordará lo correspondiente a la evaluación diagnóstica, la explicación del uso de las fichas a manera de juego (fase enactiva) y la manipulación de las fichas para realizar los primeros ejercicios (fase icónica). En la segunda sesión se realizarán las actividades para la formalización escrita de las operaciones (fase simbólica) y una actividad de cierre de la secuencia que corresponde al juego denominado “fútbol numérico”. En la tercera sesión se realizarán dos actividades más de cierre de la secuencia correspondientes a la aplicación de dos juegos matemáticos para practicar y reforzar el tema. Los juegos matemáticos propuestos se denominan “pirámides numéricas” y “basta numérico”. La sesión y la secuencia termina con la aplicación del post-test.

### **PRIMERA SESIÓN (FASE ENACTIVA E ICÓNICA)**

#### **Aplicación del pre-test y presentación de la actividad**

Se plantea a los alumnos la finalidad de la clase, de inicio se aplica el pre-test, el cual se les entrega impreso para que lo puedan contestar inmediatamente. Terminada la aplicación del pre-test, se les explica que la actividad a realizar es en forma de juego, se muestra las fichas explicando su funcionamiento (una ficha de un color representa un “uno positivo” y una ficha de otro color representa un “uno negativo”) y se da la regla del juego (al juntar dos fichas de diferente color desaparecen). Se les dice que el juego consiste en juntar fichas de diferentes colores, según

se les indique, para que observen cuántas desaparecen y expresen cuántas no desaparecen, enfatizando que observen de qué color son las que quedan pero que lo tienen que expresar en términos de positivo o negativo. Al respecto presentamos la siguiente fotografía:



FOTOGRAFÍA 1-2S

### FASE ICÓNICA

Después de la explicación inicial se dan cuatro ejemplos simples de representación y de cómo deben agrupar las fichas. La finalidad es separar las fichas que desaparecen y decir cuántas no desaparecen indicando el color en términos de positivo o negativo (más o menos). Utilizando cinta adhesiva podemos hacer la representación en el pizarrón, pegando las fichas, de los ejemplos propuestos. Vamos a suponer que las fichas con las que se trabaja son azules para indicar un “uno positivo” y rojas para indicar un “uno negativo”, los ejercicios que se proponen son los siguientes:

- 1) Si agrupamos dos fichas azules con otra ficha azul. ¿cuántas fichas quedan y de qué signo?
- 2) Si agrupamos dos fichas azules con una ficha roja. ¿cuántas fichas quedan y de qué signo?
- 3) Si agrupamos una ficha azul con dos fichas rojas. ¿cuántas fichas quedan y de qué signo?
- 4) Si agrupamos dos fichas rojas con otra ficha roja. ¿cuántas fichas quedan y de qué signo?

Para cada ejemplo se enfatiza que, al indicar el número de fichas que quedan, no se menciona el color de las fichas, sino se nombran haciendo referencia a positivo (azules) o negativo (rojas).

Se continúa con la repartición de fichas, que previamente se prepararon, 10 por cada alumno (5 de cada color) y se les indica, de manera verbal, que representen colocando sus fichas encima de su mesa, las siguientes agrupaciones:

(Se proponen los ejemplos suponiendo que las fichas son azules para indicar números positivos y rojas para indicar números negativos. Se sugiere utilizar, para cada ejercicio, la indicación “representa la agrupación de” y cuando hayan realizado su representación revisar y preguntar ¿cuántas fichas quedan y de qué signo son?)

- 1) 3 fichas azules y 2 fichas azules
- 2) 3 fichas azules y 2 rojas
- 3) 2 fichas azules y 3 fichas rojas
- 4) 4 fichas azules y 2 fichas rojas
- 5) 2 fichas azules y 4 fichas rojas
- 6) 1 ficha azul y 4 rojas
- 7) 2 fichas azules y 5 rojas
- 8) 2 fichas rojas y 3 fichas rojas

## FASE ICÓNICA

En esta fase se explicará a los alumnos que las agrupaciones que realizaron con sus fichas son comparables a realizar operaciones de suma y resta de números con signo. Para ello se les explicará que agregar fichas que representan “unos negativos” es equivalente a realizar una suma de un número negativo, o bien a realizar la resta de ese número. Según lo acordado se deben seguir nombrando las fichas sobrantes con positivo o negativo, y no por su color.

Se pedirá ahora a los alumnos, de manera verbal, que representen con sus fichas las siguientes operaciones (se inicia con ejercicios simples y se sugiere iniciar cada ejercicio con las preguntas ¿cómo representas la operación...? y ¿cuál es su resultado?):

- 1)  $3 + 2 =$
- 2)  $3 - 2 =$

- 3)  $2 - 3 =$
- 4)  $4 - 2 =$
- 5)  $2 + (-4) =$
- 6)  $1 - 4 =$
- 7)  $2 - 5 =$
- 8)  $-2 + (-3) =$

Ahora se procederá con la realización de cuatro ejercicios de manera inversa, se les representarán, en el pizarrón, colecciones de fichas y se pedirá que ellos digan qué operación se está representando y que también den su resultado, por ejemplo:

- 1) 8 fichas azules y 5 rojas
- 2) 4 fichas rojas y 7 fichas azules
- 3) 6 fichas rojas y 6 fichas rojas
- 4) 4 fichas rojas y 9 fichas azules

## SEGUNDA SESIÓN (FASE SIMBÓLICA)

En esta fase se formalizará la escritura matemática de las operaciones realizadas en las fases anteriores. Para ello se explicarán de manera escrita el uso de los signos y paréntesis realizando la comparación de lo que hicieron con las fichas y las operaciones que simbolizan. En este momento se explica también que la conjunción de dos fichas de diferente color es la representación de una propiedad matemática llamada “inverso aditivo” que se expresa algebraicamente como  $a + (-a) = 0$ . Esta propiedad matemática es la que se aplica al momento de realizar las operaciones descritas.

En esta segunda sesión de la secuencia primero se trabajará de forma individual repasando y realizando operaciones con números que involucran unidades. Posteriormente se trabajará en parejas realizando ejercicios que involucran decenas. La finalidad de esto último es que los alumnos conjunten sus fichas, se apoyen entre sí, y puedan realizar los ejercicios. Finalmente se trabajará en equipos de cuatro personas, conjuntando nuevamente sus fichas, para

realizar ejercicios con números mayores. La sesión inicia explicando a los alumnos la dinámica de la clase y con la repartición de fichas que ahora son 20 por alumno (10 de cada color).

### 6.11. ACTIVIDADES Y EJERCICIOS

La sesión concluye con una primera actividad de cierre, a manera de juego, denominada “fútbol numérico” en donde se aplican sumas y restas de números con signo.

Los ejercicios que se sugiere plantear a los estudiantes para este juego son los siguientes:

De manera individual

1)  $5 + (-2) =$

2)  $2 - 5 =$

3)  $4 + (-6) =$

4)  $8 - 3 =$

5)  $3 - (-8) =$

6)  $4 - 7 =$

7)  $-3 - 6 =$

8)  $-8 - 5 =$

En parejas:

1)  $10 - 12 =$

2)  $10 + (-12) =$

3)  $-12 + 10 =$

4)  $15 - 18 =$

5)  $13 - (-6) =$

6)  $19 - 6 =$

7)  $-16 - (-18) =$

8)  $-16 - 18 =$

En equipos de 4

1)  $20 - 25 =$

2)  $18 - 24 =$

3)  $27 + (+20) =$

4)  $-26 + (+14) =$

5)  $29 - 35 =$

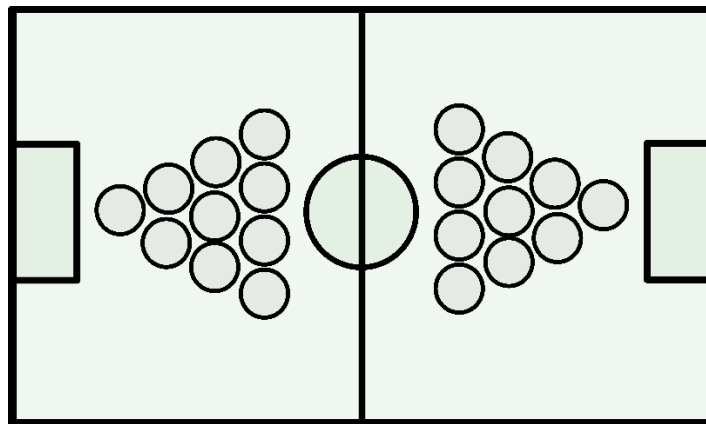
6)  $23 - (-17) =$

7)  $33 + (-39) =$

8)  $-32 + (-39) =$

### A) FUTBOL MATEMÁTICO

Esta actividad consiste en formar dos equipos con los alumnos del grupo, pidiendo que den nombre a cada equipo. Los integrantes de cada equipo se colocarán juntos sentados unos de un lado y otros del otro lado del salón. Posteriormente se traza, a la mitad del pizarrón, una línea vertical para simular una cancha de futbol. En ambos lados de la línea, y simétricamente, se trazan diez circunferencias, a manera de pirámide, apuntando hacia los extremos del pizarrón como se muestra en la siguiente imagen:



**ESQUEMA 1-2S**

Las circunferencias nos servirán para ir anotando el avance de cada equipo con una flecha dentro de cada circunferencia. El dibujo se completa anotando en la parte superior el nombre de cada equipo de acuerdo a como se hayan sentado los alumnos, a la izquierda o a la derecha del salón, y trazando dos rectángulos para simular las porterías.

El maestro explicará la dinámica del juego que consiste en que dos alumnos se acerquen, uno de cada equipo, a una banca o mesa previamente colocada al frente y a la mitad de

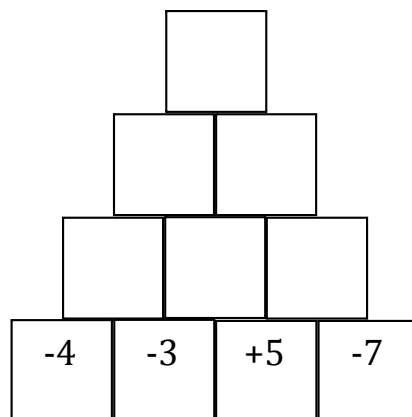
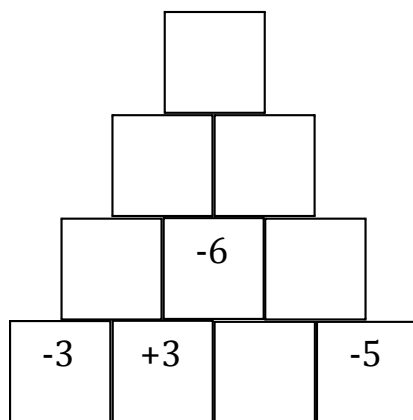
los dos equipos. El maestro tirará los dos dados, uno de cada color y, previo acuerdo, los puntos de uno de los dados de un color, siempre se restarán a los del otro dado de otro color. El alumno que diga primero la respuesta correcta será el que gane un avance para su equipo y se anotará, en el lado correspondiente, dibujando una flecha dentro de la primera circunferencia. De igual manera y sucesivamente irán pasando los demás alumnos hasta llegar a la décima circunferencia. Gana el equipo que meta un gol y que corresponderá a la flecha once anotada en el rectángulo correspondiente.

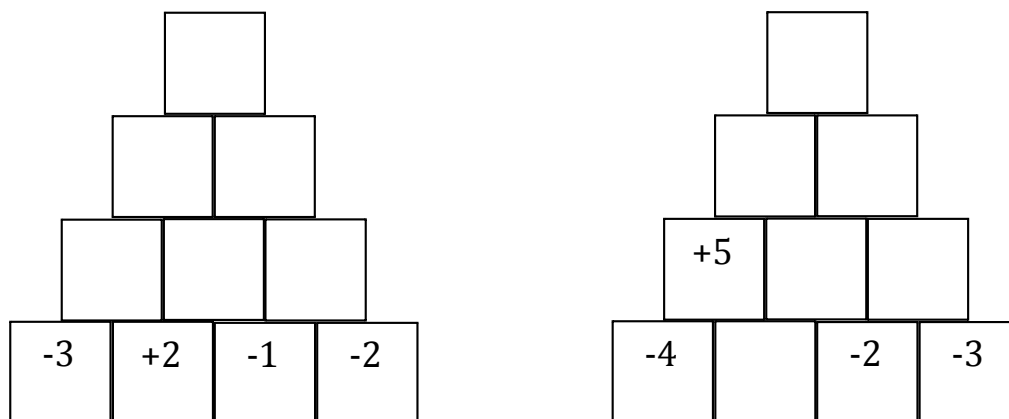
### TERCERA SESIÓN

En esta última y tercera sesión se realizarán dos actividades más de cierre de la secuencia que corresponden a dos juegos denominados “pirámide numérica” y “basta numérico”. Finalmente se aplica el post-test. Se presentan ejemplos de estos juegos. Al final se anexan formatos con estas actividades.

#### B) PIRÁMIDE ARITMÉTICA

Las pirámides matemáticas son esquemas en donde se proporcionan algunos números para que posteriormente los estudiantes completen los espacios vacíos realizando las sumas de los números que se encuentran juntos y colocando su resultado en el cuadro superior inmediato.





ESQUEMA 2-2S

### C) BASTA MATEMÁTICO

El basta matemático es muy similar al basta de palabras, solo que aquí se trabaja con sumas numéricas. Pueden jugarlo todos los integrantes del grupo de forma individual. Uno de los participantes seleccionará un número entre -10 y +10 y lo dirá a sus compañeros. Inmediatamente todos los integrantes del grupo tienen que sumar el número seleccionado con los números dados en la tabla, que se ha repartido previamente, anotando en la casilla inmediata de abajo el resultado obtenido. Cuando el primer alumno termina de hacer las operaciones, gritará “basta” y empezará a contar en voz alta del 1 al 10. En este momento todos dejan de realizar sumas y otro compañero selecciona un nuevo número. Al terminar de completar toda su tabla, se intercambian para proceder a una revisión entre ellos mismos dirigida con la ayuda de su profesor y pasando los estudiantes a completar la tabla en el pizarrón.

NÚMERO ELEGIDO	-1	+2	-4	+5	-6	RESULTADOS CORRECTOS
TOTAL						

NÚMERO ELEGIDO	-3	+4	-5	+6	-8	RESULTADOS CORRECTOS
TOTAL						

ESQUEMA 3-2S

### 6.11. APLICACIÓN DE LA SECUENCIA

La secuencia se aplicó en un grupo de primero de secundaria, formado por 17 alumnos, perteneciente a un colegio particular de la ciudad de Puebla, Pue. Por ser un tema correspondiente al cuarto bimestre, de acuerdo a los planes y programas oficiales vigentes, la aplicación se realizó a principios del mes de febrero del año 2017.

### 6.13. POST-TEST

Con la finalidad de observar la aplicación y la generalización que realizaron los estudiantes de acuerdo al objetivo y título de la secuencia, al post-test se le agregaron tres preguntas (7, 8 y 9), quedando de la siguiente forma:

1) ¿Conoces los números negativos? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

2) ¿Qué serían para ti los números negativos:

\_\_\_\_\_

3) Escribe un ejemplo de un número negativo: \_\_\_\_\_

4) ¿Qué resultado darías a la siguiente expresión?:

$(+1) + (-1) =$  \_\_\_\_\_

5) ¿Qué signo pondrías al resultado de  $2 - 5$ ?

Positivo \_\_\_\_\_ Negativo \_\_\_\_\_

6) ¿Qué resultado darías a la siguiente operación?:

$$3 - 7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

7) Si sumas dos números negativos, ¿qué signo tiene su resultado?

\_\_\_\_\_

8) Si sumas un número positivo con un número negativo y el positivo es mayor que el negativo, ¿qué signo tiene su resultado? \_\_\_\_\_

9) Si sumas un número positivo con un número negativo y el negativo es mayor que el positivo, ¿qué signo tiene su resultado? \_\_\_\_\_

#### 6.14. OBSERVACIONES, RESULTADOS Y CONSIDERACIONES

Los resultados asertivos de las preguntas contenidas en el pre-test los presentamos en la siguiente tabla:

ALUMNO	PRE-TEST	% pre-test
A-1	6	100
A-2	0	0
A-3	3	50
A-4	1	17
A-5	3	50
A-6	1	17
A-7	2	33
A-8	3	50
A-9	1	17
A-10	0	0
A-11	5	83
A-12	6	100
A-13	4	67
A-14	6	100
A-15	5	83
A-16	3	50
A-17	5	83
<b>TOTAL</b>	<b>54/102</b>	<b>53 %</b>

TABLA 1-2S

Se observa en la TABLA 1–2S que 3 alumnos contestaron acertadamente las 6 preguntas, 4 alumnos se encuentran en el rango de contestar acertadamente 4 y 5 preguntas, y 10 alumnos se encuentran debajo de este rango.

Presentamos los resultados asertivos en el post-test proporcionados por cada alumno en la siguiente tabla:

<b>ALUMNO</b>	<b>POST-TEST</b>	<b>% post-test</b>
A-1	6	100
A-2	4	67
A-3	6	100
A-4	5	83
A-5	6	100
A-6	4	67
A-7	4	67
A-8	5	83
A-9	6	100
A-10	3	50
A-11	6	100
A-12	6	100
A-13	6	100
A-14	5	83
A-15	6	100
A-16	6	100
A-17	6	100
<b>TOTAL</b>	<b>90/102</b>	<b>88 %</b>

**TABLA 2–2S**

Observamos en la TABLA 2–2S que 10 estudiantes contestaron acertadamente seis preguntas, 6 estudiantes quedaron en el rango de contestar acertadamente 4 y 5 preguntas, y sólo un estudiante quedó debajo de este rango.

Por las observaciones realizadas, durante la aplicación de la secuencia, podemos decir que los alumnos manifestaron gusto e interés por el tema. Al realizar la fase simbólica algunos estudiantes contestaban mencionando primero la cantidad de ficha y después la palabra positivo o negativo, a lo cual se les sugería la forma acordada de contestar.

De acuerdo a la comparación de respuestas correctas, dadas por los alumnos, entre el pre-test y el post-test, presentadas en la TABLA 3–2S, y de acuerdo a la comparación porcentual, podemos concluir que los resultados son satisfactorios. En porcentajes globales podemos observar

que en el pre-test hubo un 53 % de respuestas correctas mientras que en el post-test subió significativamente este porcentaje llegando a un 88 %.

COMPARATIVO NUMÉRICO Y PORCENTUAL DE RESPUESTAS CORRECTAS, DADAS POR CADA ALUMNO, EN EL PRE-TEST Y EN EL POST-TEST

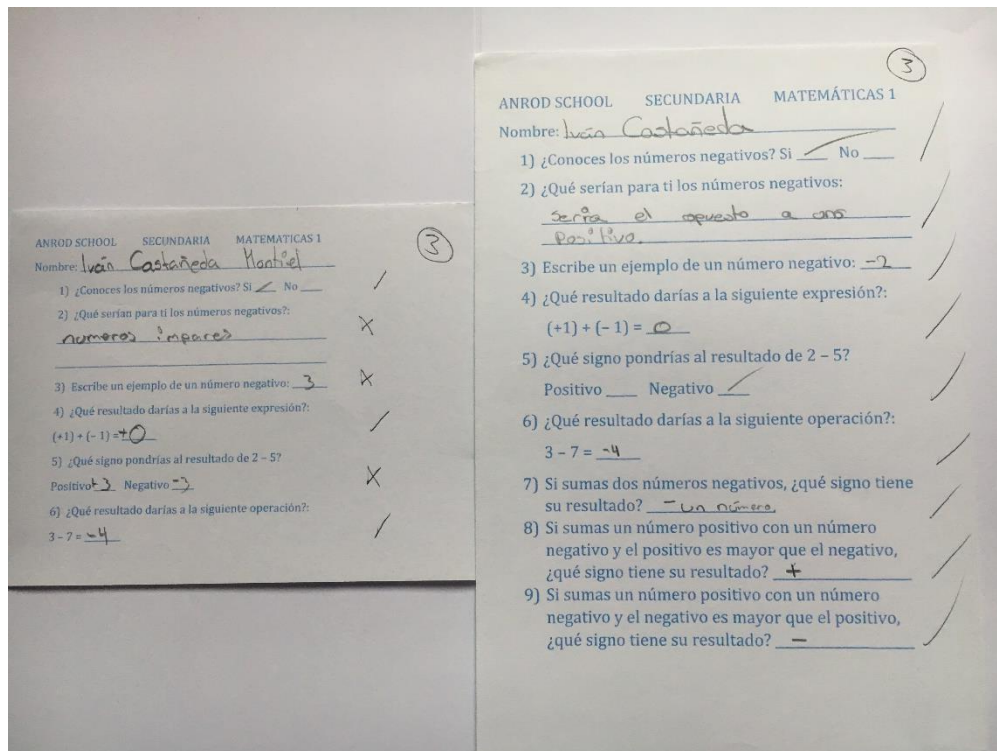
ALUMNO	PRE-TEST	POST-TEST	% pre-test	% post-test
A-1	6	6	100	100
A-2	0	4	0	67
A-3	3	6	50	100
A-4	1	5	17	83
A-5	3	6	50	100
A-6	1	4	17	67
A-7	2	4	33	67
A-8	3	5	50	83
A-9	1	6	17	100
A-10	0	3	0	50
A-11	5	6	83	100
A-12	6	6	100	100
A-13	4	6	67	100
A-14	6	5	100	83
A-15	5	6	83	100
A-16	3	6	50	100
A-17	5	6	83	100
<b>TOTAL</b>	<b>54/102</b>	<b>90/102</b>	<b>53 %</b>	<b>88 %</b>

TABLA 3 – 2S

Al observar los resultados del pre-test, los cuales se pueden considerar como un porcentaje alto, se observa que tres alumnos contestaron correctamente las 6 preguntas y otros tres contestaron correctamente 5 preguntas. Al respecto se cuestionó a algunos alumnos sobre su conocimiento previo al tema a tratar, algunos alumnos refirieron que ya tenían conocimiento del tema porque, en el último grado de su enseñanza primaria, su profesora les dio la introducción a dicho tema. Otros alumnos argumentaron que ya tenían información porque tienen hermanos mayores a los cuales ven trabajar y comentan sobre este y otros temas. Algunos otros alumnos comentaron que, por iniciativa e inquietud propia, consultan libros de matemáticas y aprenden por sí mismos, con lo cual ya habían tenido contacto con el tema a abordar. Aún con estos resultados

altos en el pre-test, los cuales se pronosticaron más bajos, la comparación con el post-test es relevante.

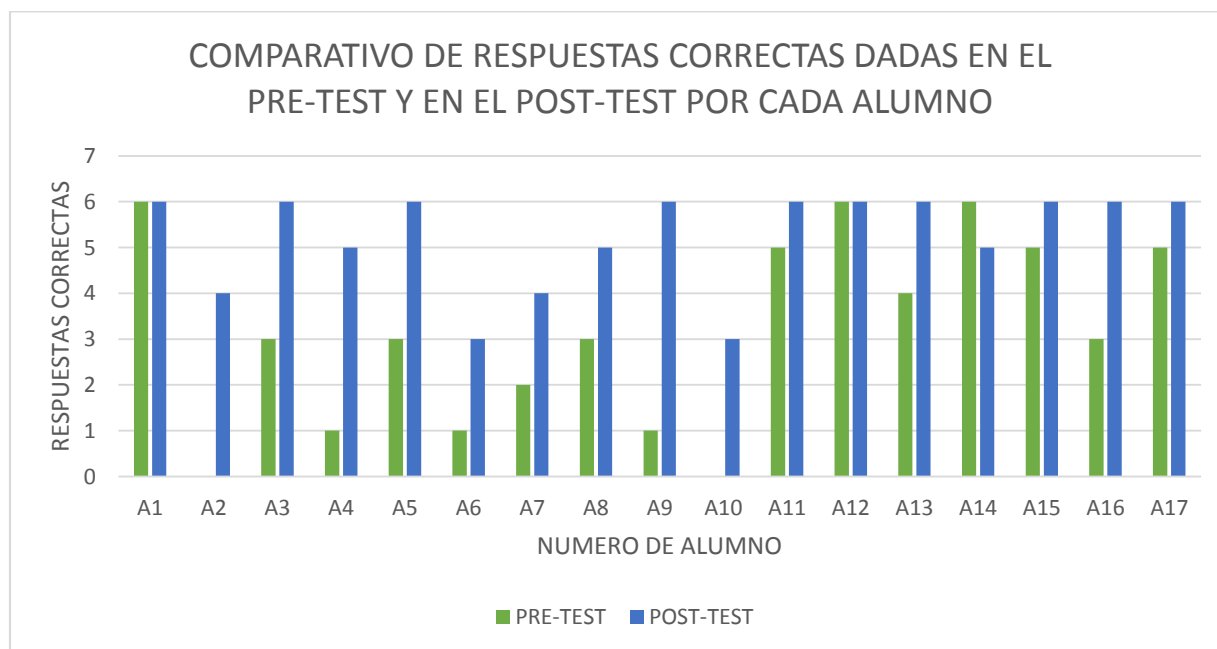
Presentamos en la siguiente imagen un ejemplo de las respuestas dadas en el pre-test y en el post-test por uno de los estudiantes:



FOTOGRAFÍA 1-2S

En los resultados del post-test se observa que diez alumnos contestaron correctamente las 6 preguntas, de los cuales dos alumnos son los mismos que contestaron también correctamente en el pre-test. Se observa también que, dentro de estos diez alumnos, tres alumnos son de los que contestaron también correctamente 5 preguntas en el pre-test. De igual forma se observa que tres alumnos contestaron correctamente 5 preguntas en el post-test, de los cuales uno de ellos había contestado correctamente las seis preguntas en el pre-test. En total son 13 alumnos con un desempeño alto en el post-test que, al compararlos con los 6 alumnos, en iguales circunstancias, considerados en el pre-test, nos muestran un desempeño significativo. Estos alumnos, junto con tres más que salieron muy bajos en el pre-test, pero subieron notablemente en el post-test, se pueden

considerar como representantes significativos de los resultados óptimos en la funcionalidad de la secuencia didáctica. La GRÁFICA 1–2S nos ayuda a visualizar estos comportamientos.



**GRÁFICA 1–2S**

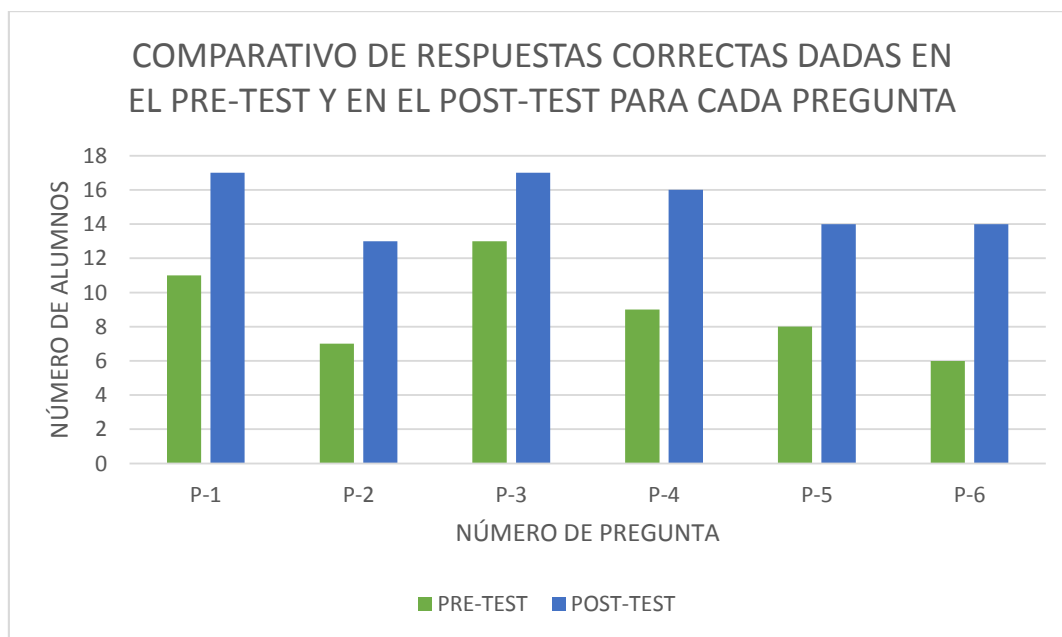
La siguiente tabla nos muestra la cantidad de alumnos que contestaron correctamente cada pregunta. Podemos observar que las preguntas que más alumnos contestaron correctamente, tanto en el pre-test como en el post-test, son la 1, 3 y 4.

**COMPARATIVO NUMÉRICO Y PORCENTUAL DE RESPUESTAS CORRECTAS, POR CADA PREGUNTA, DADAS EN EL PRE-TEST Y EN EL POS-TEST**

PREGUNTA	PRE-TEST	POST-TEST	% pre-test	% post-test
P-1	11	17	65	100
P-2	7	12	41	70
P-3	13	17	76	100
P-4	9	16	53	94
P-5	8	14	47	82
P-6	6	14	35	82
<b>TOTAL</b>	<b>54/102</b>	<b>90/102</b>	<b>53 %</b>	<b>88 %</b>

**TABLA 4–2S**

La GRÁFICA 2–2S nos ayuda a visualizar estos comportamientos.



**GRÁFICA 2–2S**

Con la finalidad de observar los resultados de la intervención respecto al título de la secuencia (ley de los signos para la suma de números enteros) se agregaron tres preguntas al post-test que tiene que ver con esta situación. Las preguntas agregadas son las siguientes:

- 7) Si sumas dos números negativos, ¿qué signo tiene su resultado?  
\_\_\_\_\_
- 8) Si sumas un número positivo con un número negativo y el positivo es mayor que el negativo, ¿qué signo tiene su resultado? \_\_\_\_\_
- 9) Si sumas un número positivo con un número negativo y el negativo es mayor que el positivo, ¿qué signo tiene su resultado? \_\_\_\_\_

Los resultados de las respuestas proporcionadas por los estudiantes para estas preguntas los presentamos en la siguiente tabla (c: respuesta correcta, x: respuesta incorrecta):

<b>ALUMNO</b>	<b>P – 7</b>	<b>P – 8</b>	<b>P – 9</b>
A-1	X	C	C
A-2	C	C	C
A-3	C	C	C
A-4	C	C	C
A-5	C	C	C
A-6	X	C	C
A-7	C	C	C
A-8	C	C	C
A-9	C	C	C
A-10	X	X	X
A-11	C	C	C
A-12	C	C	C
A-13	C	C	C
A-14	C	C	C
A-15	C	C	C
A-16	C	C	C
A-17	C	C	C
<b>TOTAL</b>	<b>14</b>	<b>16</b>	<b>16</b>

**TABLA 5–2S**

La TABLA 5–2s nos muestra que el total de respuestas correctas que dieron los estudiantes es de 46 contra 5 incorrectas.

## Capítulo 7

# SECUENCIA DIDÁCTICA PARA QUE LOS ESTUDIANTES AMPLIEN Y FORTALEZCAN SU NOCIÓN DEL NÚMERO PI UTILIZANDO TAPAS CIRCULARES

### 7.1. RESUMEN

Se presenta una secuencia didáctica que lleva a los alumnos a ampliar y a fortalecer su noción del número Pi. Se describe la forma en que se guía a los alumnos y la forma en la que utilizan las tapas redondas de diferentes tamaños para que puedan obtener un valor aproximado del número Pi. La finalidad es que los alumnos adquieran una noción más precisa de lo que es el número Pi contemplando las tres fases del desarrollo cognitivo propuesto por Jerome Bruner.

### 7.2. JUSTIFICACIÓN

El número Pi se utiliza muy a menudo en las clases de geometría para determinar la medida de una circunferencia, o el área de un círculo, cuando se conoce la medida de su diámetro o de su radio. Al ser el círculo y la circunferencia dos figuras geométricas significativas en el desarrollo y estudio de la matemática, conviene que los estudiantes tengan una noción más precisa del uso y del valor del número Pi.

Los libros de primero de secundaria abordan este número, en el cuarto bloque, dando su valor y aplicándolo en fórmulas para obtener las medidas de áreas y perímetros de círculos supuestos. Algunos libros dan una explicación muy breve de cómo se obtiene el valor del número Pi. Dicha explicación no es suficiente para que los estudiantes entiendan qué es el número Pi y cómo se obtiene su valor.

Pensamos que es importante respaldar con actividades manipulativas la obtención del valor del número Pi. Bajo este esquema y considerando el aprendizaje por descubrimiento se decidió trabajar el valor del número Pi enfocando un método relativamente simple e intuitivo para poder obtenerlo.

### **7.3. OBJETIVO**

Que el alumno amplíe y fortalezca su noción del número Pi obteniendo un valor aproximado del mismo utilizando tapas circulares.

### **7.4. HIPÓTESIS**

- a) La mayoría de los alumnos conocen, saben cuál es el símbolo, y saben cuál es el valor del número Pi
- b) Muy pocos alumnos saben cómo se obtiene el valor del número Pi y ningún alumno conoce un proceso para obtener dicho valor
- c) Los alumnos, al trabajar con sus tapas, encontrarán un proceso para obtener un valor aproximado del número Pi

### **7.5. SUSTENTO TEÓRICO DE LA ESTRUCTURA DE LA SECUENCIA**

La secuencia pretende llevar al alumno a descubrir qué es el número Pi y cómo se puede obtener un valor aproximado del mismo. Para este proceso se consideran las tres fases del Desarrollo Cognitivo propuesto por Jerome Bruner:

- 1) FASE ENACTIVA: uso de material manipulativo (tapas circulares, regla, hilo, listón o tiras de papel) para medir el contorno de sus tapas y su diámetro.
- 2) FASE ICÓNICA: realización de divisiones físicas. Cortes, correspondientes a la medida del diámetro, en las tiras de papel correspondientes a la medida de las circunferencias de las tapas.
- 3) FASE SIMBÓLICA: realización de divisiones numéricas entre la medida de una circunferencia y su diámetro. Visualización de la noción y del valor del número a partir de una generalización de los resultados de las divisiones hechas.

## **7.6. MATERIAL DIDÁCTICO Y/O MANIPULATIVO A UTILIZAR**

Tapas circulares de diferentes tamaños, preferentemente de plástico, para repartir a los alumnos (2 diferentes para cada uno), tramos de cuerda, listón o tiras de papel de longitud un poco mayor a la circunferencia de las tapas (una por cada tapa), regla de 30 cm, tijeras, y un lápiz o un plumón permanente.

## **7.7. CONOCIMIENTOS PREVIOS**

Para esta secuencia conviene que los alumnos tengan la noción y puedan identificar los siguientes elementos: contorno, perímetro, círculo, circunferencia, diámetro y número decimal. De igual forma es preferible que puedan realizar divisiones con números decimales.

## **7.8. SESIONES Y TIEMPOS**

Dependiendo del desempeño de los estudiantes, la secuencia se puede abordar en una o dos sesiones de 40 a 50 minutos cada una. Para la primera sesión se contempla describir la finalidad de la clase a los estudiantes, lanzar las preguntas de inicio, aplicar el pre-test, repartir las tapas, y obtener y anotar sus primeros datos. Esta sesión corresponde a realizar la fase enactiva y la fase icónica.

Para la segunda sesión se contempla la utilización de los datos obtenidos para que realizando algunas operaciones obtengan algunos resultados que los estudiantes identificarán como el valor del número Pi. Finalmente se llegará a una conclusión y se aplicará el post-test. Esta sesión es la correspondiente a realizar la fase simbólica.

## **7.9. PREGUNTA INICIAL**

En esta secuencia la pregunta inicial está estructurada con dos preguntas:

- 1) ¿Saben cómo se obtiene el valor del número Pi?
- 2) ¿Conocen algún procedimiento para obtener el valor del número Pi?

## 7.10. PRE-TEST

Para visualizar el conocimiento previo que tienen los alumnos del tema a tratar se elaboró el siguiente cuestionario:

- 1) ¿Conoces el número Pi? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_
- 2) ¿Conoces el símbolo del número Pi? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_
- 3) Escribe el símbolo que consideres representa al número Pi: \_\_\_\_\_
- 4) ¿Sabes cuál es el valor del número Pi? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_
- 5) Escribe el valor que consideras tiene el número Pi: \_\_\_\_\_
- 6) Describe ¿qué es para ti el número Pi?
- 7) ¿Sabes cómo se obtiene el valor del número Pi? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_
- 8) Describe un proceso que consideres sirva para obtener el valor del número Pi  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

La finalidad de las primeras cinco preguntas es saber si los estudiantes conocen el valor y el símbolo del número Pi. La predicción es que todos los estudiantes van a contestar acertadamente estas cinco preguntas. Son preguntas básicas que confirmarán la familiaridad que tienen los estudiantes con el número Pi. Las tres últimas preguntas tienen que ver con el objetivo de la secuencia. Se predice que los estudiantes contestarán negativamente y que después de la intervención podrán contestarlas acertadamente.

## 7.11. DESCRIPCIÓN DE LA SECUENCIA

Para la realización de esta actividad se requiere de dos sesiones de 50 minutos cada una. En la primera sesión se aplica el pre-test y se contempla realizar la fase enactiva y la fase icónica. En la segunda sesión se contempla realizar la fase simbólica y la aplicación del post-test. Se puede terminar la secuencia con una lectura o proyección de un video que trate sobre la historia del número Pi. Es recomendable que el profesor prepare y lleve el material a utilizar para repartirlo entre los alumnos o bien encargarlo previamente a los alumnos. Para comparar los resultados entre

el pre-test y el post-test es recomendable verificar que los alumnos anoten su nombre en ambos cuestionarios.

## PRIMERA SESIÓN

Se plantea a los alumnos la pregunta 7 del pre-test: ¿saben cómo se obtiene el valor del número Pi? Al tiempo de estar escuchando sus respuestas se preparan las tapas para repartirlas entre los alumnos (dos tapas de diferente tamaño para cada alumno). Después de escucharlos se les pregunta, al tiempo de mostrarles una tapa de plástico, que si ¿creen posible que utilizando tapas circulares puedan encontrar el valor del número Pi? Después de escucharlos se les comenta que la finalidad de la actividad es averiguar si es posible encontrar el valor del número Pi utilizando tapas de plástico. Se les indica que para conocer qué tanto saben sobre el número Pi se les aplicará un cuestionario de 8 preguntas. Previamente se ha impreso el pre-test y se entrega a los alumnos para que lo contesten inmediatamente (al final de la secuencia se anexa un formato sugerido para poder imprimirlo). En caso de que el profesor no lleve el material entonces se puede, también previamente, encargar el material a los alumnos junto con las tapas circulares, aunque es recomendable que sea el profesor quien lo lleve. Después de que hayan terminado de contestar su cuestionario se les pide que lo regresen ya contestado y se reparten las dos tapas a cada alumno.

## FASE ENACTIVA

Después de la explicación inicial, de la aplicación del pre-test y de la repartición de tapas, se plantea la pregunta, señalando una tapa, ¿cuál es el contorno de una tapa? Se espera que los estudiantes señalen con su dedo el contorno de una de sus tapas. Después de escucharlos y verificar que todos expresan la misma idea se plantea ahora la pregunta de ¿cómo pueden medir el contorno de sus tapas? Se da tiempo para que los alumnos piensen y expresen sus métodos de medición. Se prevé que, como primer intento para realizar su medición, traten de utilizar la regla de 30 y se den cuenta que es un método no recomendable por la imprecisión de medición al dificultarse el sobreponer la regla (normalmente rígidas) sobre el contorno de la tapa. Después de escuchar las estrategias iniciales se les deja que experimenten sus procesos de medición observando

cómo lo realizan. En caso de que todos los alumnos intenten su medición con la regla se les sugiere pensar en otra forma de medición un poco más precisa.

Ahora se les pregunta que si ¿creen que es posible medir el contorno de la tapa de una sola forma o existen otras formas? Se espera que algunos alumnos sugieran que es posible realizar la medición con una cuerda o una tira de papel. Se pregunta ahora que si saben ¿qué es la medición indirecta? Después de escuchar participaciones, se aclara que el tipo de medición que van a realizar es una medición indirecta ya que primero se va a comparar la medida del contorno de la tapa con el largo de la cuerda o la tira de papel y después se medirá, con la regla, el largo de la cuerda o tira de papel. Este momento se aprovecha para hacer la pregunta ¿qué es medir? Se escuchan respuestas y se interviene para conducirlos y seleccionar una noción de lo que entienden por medir. En caso de que los estudiantes den otras opciones de medición se seleccionan algunas de las más adecuadas y se deja a los alumnos que experimenten sobre sus métodos propuestos hasta seleccionar las formas más ideales. Con intención se han preparado o pedido tiras de papel, cordones y tramos de listón para que, cuando algunos alumnos propongan la medición con estos objetos, se les proporcione dicho material. Una vez que los estudiantes hayan experimentado diferentes formas, por consenso se seleccione las formas más adecuadas. Las formas más adecuadas serán las que faciliten y den la medición que se considere más precisa.

Dado que a cada alumno se le proporcionan dos tapas de diferente tamaño, nos vamos a referir a ellas como tapa chica y tapa grande. Se da la indicación que trabajen la medición con dos materiales diferentes (listón hilo, tiras de papel, cuerda). Ahora se les pide que recorten el material seleccionado para la medición con la misma medida que el contorno de cada una de las tapas. Ya recortado se pide que midan con su regla cada tramo y anoten las mediciones realizadas para cada una de las tapas refiriéndose al contorno de la tapa chica y al contorno de la tapa grande.

Ahora el momento de preguntarles si saben ¿cómo se le nombra matemáticamente al contorno de una tapa? Se espera que algunos estudiantes contesten que se le nombra perímetro o circunferencia. Después de escucharlos y llegar a un consenso, ahora se les pregunta qué si ¿saben que es un diámetro? Nuevamente se da tiempo para que participen con sus respuestas y se espera que algunos alumnos expresen las características del diámetro hasta llegar a un consenso. Posteriormente se pide trazar con un lápiz o con un plumón el diámetro en las dos tapas y recortar una tira de papel, un listón, o el material utilizado anteriormente, de la misma medida que los diámetros trazados. Ya recortados se pide que midan con su regla estos nuevos tramos y que

también anoten la medida de cada uno de ellos refiriéndose a diámetro de la tapa chica y diámetro de la tapa grande.

### FASE ICÓNICA

Ahora se procede a comparar los dos tramos recortados para cada una de las tapas y se pregunta a los estudiantes ¿cuántas veces creen que cabe el tramo más chico en el tramo más grande de cada una de las tapas? o ¿cuántos tramos de la misma medida al tramo más chico se pueden obtener del tramo más grande para cada una de sus tapas? Después de escuchar sus opiniones se les pide calcular cuántas veces cabe el tramo más pequeño en el más grande comparando dichos tramos para cada una de las tapas. Se da tiempo para que los estudiantes realicen sus cálculos y expresen sus resultados. Después de escuchar los diferentes resultados, se pide que recorten el tramo mayor de listón en tramos iguales al tramo menor para cada una de las tapas. Hecha esta actividad, ahora se pregunta ¿cuántos tramos obtuvieron del tramo más grande iguales al tramo más pequeño en cada una de sus tapas? Se espera que en este momento la mayoría de los alumnos van a coincidir en sus respuestas (tres más una parte). Para este momento se prevé que los estudiantes van a obtener tres tramos iguales más uno muy pequeño, el cual no van a tomar en cuenta y que es necesario enfatizar que no lo desechen porque es una parte de su resultado. Para terminar se les pregunta que si ¿el resultado obtenido les es conocido o familiar? Se espera que los estudiantes contesten afirmativamente y que algunos digan que se trata del número PI. Se les pregunta ahora si pueden decir ¿a que corresponden matemáticamente las partes de material utilizado que dividieron? Se espera que expresen de una manera aproximada que la división realizada corresponde a la medida de una circunferencia entre la medida de su diámetro.

### SEGUNDA SESIÓN (FASE SIMBÓLICA)

Se inicia la sesión recordando el trabajo realizado en la sesión anterior. Se les pide ahora, que realicen la división numérica de las medidas que anotaron de los tramos obtenidos. Después de dar el tiempo necesario para apoyarlos, aclarar dudas, y que realicen sus divisiones, se procede a anotar en el pizarrón las divisiones realizadas y los resultados obtenidos (se predice que los resultados anotados estarán en un rango de 3.0 a 3.5). Ahora se pregunta a los alumnos si tienen

idea, de manera general, qué representan las cantidades divididas, y qué representa el resultado obtenido. Se espera que los alumnos contesten que las medidas divididas corresponden al diámetro y a la circunferencia de un círculo, y que el número obtenido es el número Pi. Se pregunta si se puede representar de manera general todas las divisiones realizadas, la finalidad es que los alumnos propongan el uso de variables para representar el diámetro y la circunferencia hasta llegar a unificar la expresión de acuerdo a lo que proponga el grupo. Finalmente se pregunta cuál es el resultado general de la expresión acordada.

## 7.12. GUÍA DE PREGUNTAS SUGERIDAS

### PREGUNTAS DE INICIO:

- a) ¿Sabes cómo se obtiene el valor del número PI?
- b) ¿Creen posible que utilizando tapas circulares puedan encontrar el valor del número PI?

### PREGUNTAS PARA LA FASE ENACTIVA

- 1) ¿Cuál es el contorno de la tapa?
- 2) ¿Cómo pueden medir el contorno de la tapa?
- 3) ¿Solo es posible medir el contorno de la tapa de una forma o hay otras formas?
- 4) ¿Qué nombre se utiliza para indicar el contorno de la tapa?
- 5) ¿Qué es la medición indirecta?
- 6) ¿Qué es medir?
- 7) ¿Cómo se le nombra matemáticamente al contorno de una tapa?
- 8) ¿Qué es un diámetro?
- 9) ¿Saben qué es el diámetro?

### PREGUNTAS PARA LA FASE ICÓNICA

- 10) ¿Cuántas veces creen que cabe el tramo más chico en el tramo más grande para cada una de las tapas?

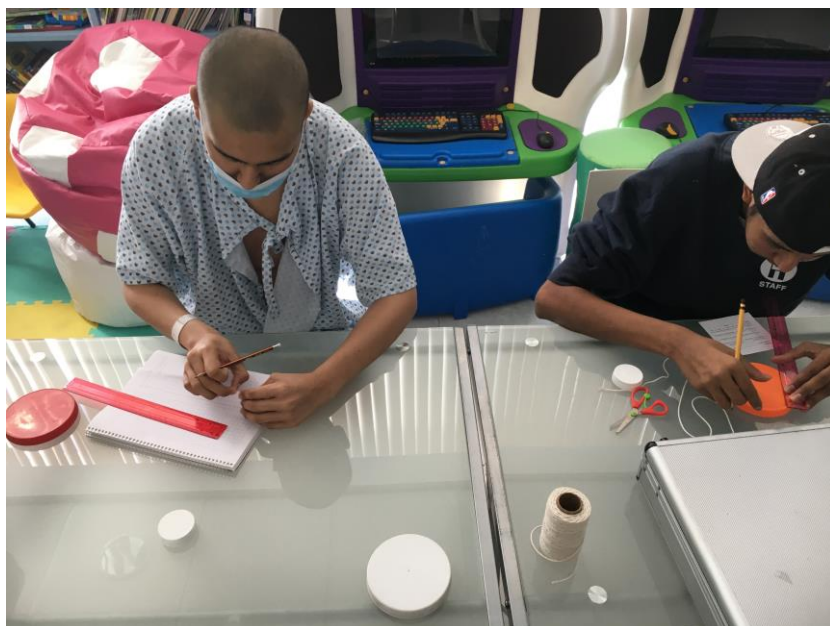
- 11) ¿Cuántos tramos obtuvieron del tramo más grande iguales al tramo más pequeño en cada una de sus tapas?
- 12) ¿El resultado obtenido les es conocido o familiar?
- 13) ¿A qué corresponden matemáticamente las partes de material utilizado que dividieron?

#### PREGUNTAS PARA LA FASE SIMBÓLICA

- 14) ¿Qué representan las divisiones realizadas y el resultado obtenido?
- 15) ¿Todas las divisiones realizadas se pueden representar de manera general?
- 16) ¿Cuál es el resultado general de las divisiones representadas en forma general?

### **7.13. APLICACIÓN DE LA SECUENCIA ANTE GRUPO**

Siguiendo la línea de investigación experimental y ante la disponibilidad de algunos estudiantes, que por su situación no pueden asistir regularmente a clases en escuelas de conveniencia, la secuencia se aplicó dentro de las instalaciones del Hospital del Niño Poblano en la ciudad de Puebla, Pue. Se esperaba la asistencia de 6 estudiantes de distintos grados de secundaria y bachillerato, pero solamente pudieron participar 4 estudiantes, de los cuales se encontraban uno de cada grado de secundaria y uno de 2° de bachillerato. La secuencia se aplicó a mediados del mes de noviembre del año 2017. Ante la disposición de tiempo, se decidió llevar toda la secuencia en una sola sesión teniendo una duración de dos horas aproximadamente. Debido a que fue un grupo por disposición, no se pudieron repasar los conocimientos previos, teniendo que improvisar los momentos en los que se requerían.



**FOTOGRAFÍA 1-3S**

#### **7.14. POST-TEST**

El post-test incluye las mismas preguntas que el pre-test.

#### **7.15. OBSERVACIONES, EXPERIENCIAS Y CONSIDERACIONES**

La intervención inició explicando a los estudiantes la finalidad de la clase. Posteriormente se aplicó el pre-test aclarando que los resultados no formaban parte de su calificación. Las preguntas iniciales fueron contestadas por los alumnos de acuerdo a lo previsto. A cada estudiante se le proporcionaron dos tapas circulares de plástico de diferente tamaño. A la pregunta de ¿cómo medir el contorno de la tapa? no esperábamos que los estudiantes se refirieran a utilizar una fórmula para hacerlo. Un estudiante de secundaria propuso que era posible hacer la medición del contorno con una escuadra o con un compás, pero no contemplamos preparar este material y por lo tanto no se le pudo proporcionar al estudiante para que nos mostrara su idea. La situación se encamino preguntando cómo podrían medir el contorno sin utilizar una fórmula o una escuadra o compás. Se observó que tuvieron dificultades para encontrar y dar propuestas al no contemplar la participación de los alumnos. Nos pareció que se imaginaron la dificultad manual

para medir el contorno con una regla ya que no lo propusieron y nosotros suponíamos que sería su primera propuesta.



**FOTOGRAFÍA 2-3S**

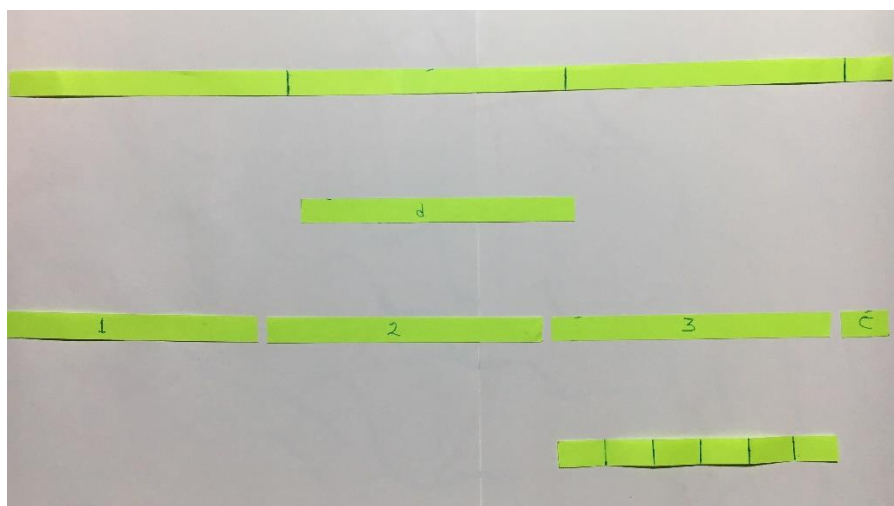
Dado que la intención era que probaran realizar la medición con una regla, se les preguntó ¿cómo pueden medir la longitud de un lápiz?, a lo cual contestaron que con una regla. Ahora se les preguntó qué si era posible medir el contorno de su tapa con una regla, a lo cual contestaron que sí. Se les preguntó que si se les proporcionaba una regla podrían hacer la medición, de igual forma contestaron que sí. Se les proporcionó una regla, pero al intentar realizar la medición se dieron cuenta de la dificultad. Uno de los estudiantes sugirió que necesitaba un flexómetro, pero tampoco preparamos este material por lo cual no se le pudo proporcionar. En este momento se intervino para preguntar ¿qué es medir? Dos estudiantes contestaron que medir era dar el número que se alcanzaba con la regla. Ahora se les preguntó que si sólo se podían hacer mediciones con una regla. El estudiante que había propuesto utilizar el flexómetro, nuevamente propuso la misma idea. La pregunta fue ahora ¿sólo se puede medir con reglas y flexómetros? Uno de los estudiantes recordó la medición antigua basada en la medida del antebrazo del Rey en turno y que cada nuevo reinado la medida se modificaba. Se les preguntó si habían jugado “retachitos” y si sabían lo que era una “cuarta”, contestando afirmativamente. Se les cuestionó para qué se utilizaba la “cuarta” y

contestaron que para medir. La pregunta siguiente fue ¿el largo de una mesa se puede medir con “cuartas”? Contestaron afirmativamente. Ahora se preguntó ¿entonces qué es medir? Uno de los alumnos mencionó que es hacer la comparación entre dos distancias. Al final de esta parte, los estudiantes pudieron concluir que se puede medir con diferentes objetos y de diferentes formas.

Nuevamente se preguntó acerca de otra forma posible de realizar la medición del contorno de sus tapas, a lo cual ya hubo dos propuestas. Un estudiante sugirió que con una cinta y otro con un cordón. A los otros dos estudiantes se les preguntó qué si estaban de acuerdo con las propuestas de sus compañeros, a lo cual contestaron que sí. Se les proporcionó dicho material (cuenda y listón) con longitudes indicadas por ellos mismos de acuerdo a lo consideraban iban a necesitar. Se indicó ahora que realizaran la medición pedida. Tres de los estudiantes marcaron primero su listón o cuenda con los 30 cm que indica la regla proporcionada, posteriormente sobrepusieron su material alrededor de su tapa más grande. Al hacer esto se dieron cuenta que la marca realizada quedaba antes de completar una vuelta sobre el contorno de su tapa. Ante esta dificultad recurrieron a realizar una nueva marca sobre su material precisamente en donde completaban una vuelta sobre sus tapas para posteriormente medir con su regla la parte de material entre las dos marcas realizadas. Sólo un estudiante sobrepuso directamente su material sobre la tapa y después hizo la medición de su material con la regla.

Aunque las tapas que utilizaron eran del mismo tamaño hubo diferencias en su medición, a lo cual se pidió que, entre parejas que tenían diferentes medidas, se revisaran las mediciones hechas entre sí. Después de dos o tres comprobaciones revisadas por el maestro, se dieron cuenta de su error y corrigieron su medición y su medida. Las medidas que se obtuvieron del contorno de las tapas fueron: de la tapa chica 16 cm y de la tapa grande 36 cm.

Dado que ningún alumno sugirió tomar la medida con una tira de papel, se les hizo la pregunta ¿creen posible que se pueda hacer la medición utilizando una tira de papel? La respuesta fue que sí, acto seguido se les proporcionaron tiras de papel y se les indicó que realizaran la medida de la circunferencia de sus tapas. La finalidad de tomar la medida con la tira de papel es que se dieran cuenta que se facilita el procedimiento con este material y al mismo tiempo preparar la actividad posterior en donde tienen que recortar sus tiras de papel. Una vez realizada la medida indicada se les pidió que verificaran si las medidas eran iguales que las que habían tomado con su listón o cuerda. La respuesta fue afirmativa y ahora se les preguntó ¿con qué material se les facilitó más realizar la medición? La respuesta general fue que con las tiras de papel.



**FOTOGRAFÍA 3-3S**

Se preguntó ahora que si existe una palabra matemática para indicar el contorno de la tapa. Las propuestas que se escucharon fueron radio, vértice, centro, punto, diámetro, círculo, hasta que uno de ellos sugirió circunferencia y otro de sus compañeros lo apoyó. Ante esta situación, los compañeros restantes respaldaron la propuesta de los dos estudiantes que indicaron que era circunferencia.

Con la finalidad de que anotaran las medidas que iban a obtener, se les proporcionó una hoja con una tabla de datos impresa para completar y con las leyendas en la parte superior “tapa chica” y “tapa grande” como se muestra a continuación:

TAPA CHICA	TAPA GRANDE
Medida de su contorno: _____	Medida de su contorno: _____
Medida de su diámetro: _____	Medida de su diámetro: _____
Resultado de la división _____ (realiza la división en la parte de atrás de esta hoja)	Resultado de la división _____ (realiza la división en la parte de atrás de esta hoja)

**ESQUEMA 1-3S**

Para la medición del contorno de la tapa chica, se siguió el mismo proceso que para la tapa grande utilizando una tira de papel. Una vez obtenidas las medidas de la circunferencia de las dos tapas, se les pidió que las anotaran en la hoja que se les había proporcionado.

La segunda parte de la actividad consistió en medir el diámetro de cada una de sus tapas. Se preguntó primero si sabían ¿qué es el diámetro?, a lo cual contestaron afirmativamente. Se les pidió que en sus tapas trazaran el diámetro, pero al realizarlo observamos que dos alumnos tenían dificultades para hacerlo, situación que no esperábamos. Al ver la dificultad decidimos repasar la noción de diámetro debido a que suponíamos que la dificultad para trazarlo radicaba en que no tenían la noción adecuada. A través de contraejemplos y apoyados por sus dos compañeros que sí pudieron trazar el diámetro, se les encaminó a visualizar las propiedades del diámetro hasta que indicaron el lugar donde debían trazarlo.

Un caso particular en el trazado del diámetro nos sorprendió porque uno de los estudiantes primero trazó un pentágono y después trazó segmentos desde los vértices del pentágono a la mitad del lado opuesto de cada vértice, encontrando precisamente el centro de la circunferencia de la tapa. Al cuestionarlo sobre cómo dibujó el pentágono y después de escuchar su explicación, vimos que fue un caso de coincidencia, ya que después de algunos intentos encontró la medida para poder trazar los lados del pentágono. Mostramos sus trazos en la siguiente fotografía:



**FOTOGRAFÍA 3-3S**

Observamos que otro estudiante realizó sin complicaciones el trazo de su diámetro, también se le cuestionó acerca de cómo lo hizo. Después de escuchar su explicación nos dimos

cuenta de que su trazado se facilitó porque su tapa tenía marcado el centro de la circunferencia. Después del repaso los estudiantes pudieron trazar el diámetro correspondiente a cada tapa. Con el diámetro trazado, se les pidió realizar la medición del mismo en cada una de sus tapas y anotarlo en su tabla en el cuadro correspondiente, actividad que no presentó ninguna dificultad, pero sí algunas diferencias. Al aclarar que las medidas de las tapas, al ser iguales, deberían tener la misma medida de diámetro, se les pidió trabajar en parejas para encontrar quién no estaba midiendo correctamente. Después de revisar sus medidas llegaron a un consenso entre los dos integrantes de cada pareja, pero hubo diferencia de uno y dos milímetros entre las dos parejas. Las medidas obtenidas quedaron: para la tapa chica de 4.9 cm y 5 cm, y para la tapa grande de 11 cm, 11.2 cm y 11.4 cm.

La tercera parte de la actividad consistió en recortar la tira de papel correspondiente a la circunferencia de cada tapa en medidas iguales a las de sus diámetros correspondientes. Mostrando las respectivas tiras de papel se les preguntó ¿cuántas veces creen que puede caber la tira corta en la tira larga? Dos estudiantes contestaron que cuatro veces, uno dijo que tres veces y el restante dijo que tres y media. Se les indicó que recortaran la tira grande en partes iguales a la tira corta correspondientes a cada tapa. Cuando se les indicó que mostraran sus tiras ya cortadas y se les preguntó que cuantas partes habían obtenido, todos contestaron que tres y un “cachito”. Previendo que no hicieran caso a la parte sobrante después de recortar su tira grande en tres partes iguales, se les indicó que conservaran todos sus recortes. En este momento se les preguntó ¿por qué el número de recortes de la tapa grande coincide con el número de recortes de la tapa chica? La respuesta que dieron dos de los estudiantes fue que las tapas crecen de forma proporcional y los otros dos estudiantes respaldaron esta respuesta. Dado que los estudiantes se refirieron a un “cachito” para indicar la parte de tira que les sobraba después de realizar sus recortes, se respetó esta expresión y así se siguió manejando, nosotros esperábamos que se refirieran a “una parte”.

Ahora se les cuestionó ¿cómo se puede expresar numéricamente ese “cachito” sobrante? siendo esta la cuarta parte de la actividad. Los estudiantes contestaron que por medio de una fracción o mediante un número decimal. Al preguntarles ¿cuál fracción o qué número decimal sería? uno de los estudiantes empezó a doblar una de las tiras recortadas en partes iguales al cachito o parte sobrante, de inmediato contestó que un sexto. Al preguntarle por qué afirmaba que un sexto, el estudiante contestó que porque el cachito cabía seis veces en la tira recortada. Se cuestionó a los estudiantes si su compañero tenía razón, a lo cual contestaron afirmativamente. Al preguntarles

¿cómo lo podrían comprobar?, imitaron el procedimiento que había realizado su compañero comprobando físicamente que el cachito cabía seis veces en el recorte más grande. Nuevamente se les preguntó con qué fracción se puede representar el cachito y ya todos estuvieron de acuerdo en que era un sexto.

La pregunta fue ahora ¿con cuál número decimal podría representarse ese cachito?, sugiriéndoles si podría ser con el número 0.5. Los alumnos contestaron que no podía ser 0.5. Se preguntó por qué y contestaron que porque el cachito no era la mitad del recorte grande. Entonces se preguntó qué número decimal sugerían y uno de ellos dijo que 0.3 y otros dos dijeron que 0.2. Al estudiante que había propuesto un sexto se le preguntó directamente ¿a cuánto equivalía un sexto en número decimal? pero contestó que no sabía. Se le sugirió si podría encontrar la equivalencia utilizando una división, a lo cual contestó que probablemente. Se aprovechó este momento para repasar la noción de una fracción como división. Ahora se les preguntó ¿saben cómo se representa una división? Después de contestar afirmativamente, se les pidió que indicaran en el pizarrón cómo la representan. La primera respuesta que dieron fue dando un ejemplo utilizando el símbolo “entre”, otro de los alumnos mencionó que con una diagonal y uno más dijo que con una casilla.

Ahora se les pidió que anotaran en el pizarrón la fracción un sexto en forma de división utilizando los símbolos propuestos. Hubo conflicto en la escritura al utilizar la “casilla” porque dos estudiantes anotaron el 1 fuera y el 6 dentro de la casilla. Nuevamente se les cuestionó sobre cuál era la forma correcta de escritura, a lo cual, el estudiante de preparatoria argumentó, a manera de ejemplo, que una división de 1 entre 2 se escribe un medio, y que un medio es igual .5, por lo tanto, el 1 debe ir dentro de la casilla y el dos afuera de ella. Se les preguntó a los demás alumnos si su compañero tenía razón respondiendo afirmativamente. Se les preguntó ahora que cómo podrían verificar la propuesta de su compañero. La participación fue ahora del estudiante de tercero de secundaria señalando en el pizarrón ambas formas de la división y diciendo que en una el resultado era 2 y en otra el resultado era “punto 5”, reafirmando que la división que daba “punto 5” era forma correcta porque un medio era igual a “punto 5”. Se les cuestionó si su compañero tenía razón y contestaron afirmativamente. Se les pidió entonces corregir la división para un sexto y realizarla en el pizarrón. Nuevamente intervino el estudiante de tercero de secundaria, pero al realizar la división no colocó el punto decimal obteniendo un número entero como respuesta. Al llegar a la parte repetitiva parece que recordó el punto decimal, colocándolo y preguntando que hasta cuántos

números más hacía la división. Se aclaró entonces que el número resultante era un decimal periódico y que no tenía caso seguir haciendo la división. Se indicó la forma en que se escribe este resultado utilizando puntos suspensivos o la barra encima del número que se repite. El número obtenido fue .166... tal y como lo escribió el estudiante. Esta parte finalizó preguntando a los estudiantes ¿cuál es el resultado de dividir la tira de papel correspondiente a la circunferencia de una de sus tapas entre la tira de papel correspondiente a su diámetro? Uno de los estudiantes dijo que entonces era 3 más el cachito, por lo tanto, era 3.16. Se preguntó a sus compañeros si estaban de acuerdo, contestando afirmativamente.

La quinta parte de la actividad fue la correspondiente a realizar la división de los datos obtenidos contemplando la medida de la circunferencia entre la medida de su diámetro. Ahora se les preguntó si era posible utilizar los datos obtenidos en una sola división para obtener el número que representa las veces que cabe la medida del diámetro en la medida de su circunferencia para cada una de sus tapas, a lo cual contestaron afirmativamente. Se les pidió entonces que escribieran la división que iban a realizar utilizando el signo “entre”, en forma de fracción y en una “casilla”. Se pidió a alumnos diferentes que pasaran al pizarrón a escribir cada forma sin encontrar dificultades. Al pedirles que hicieran la división, uno de los estudiantes preguntó si podía hacer la operación con calculadora, al pensarlo rápidamente se le contestó que sí y sus compañeros procedieron a hacer lo mismo. Se pidió entonces que anotaran sus resultados en sus formatos y que cada uno pasara al pizarrón también a anotarlos. Preguntaron con cuántos decimales anotaban el resultado y se les indicó que con 2 decimales era suficiente. Los resultados anotados fueron: para la tapa chica 3.2 y 3.30, y para la tapa grande 3.157, 3.21 y 3.27.

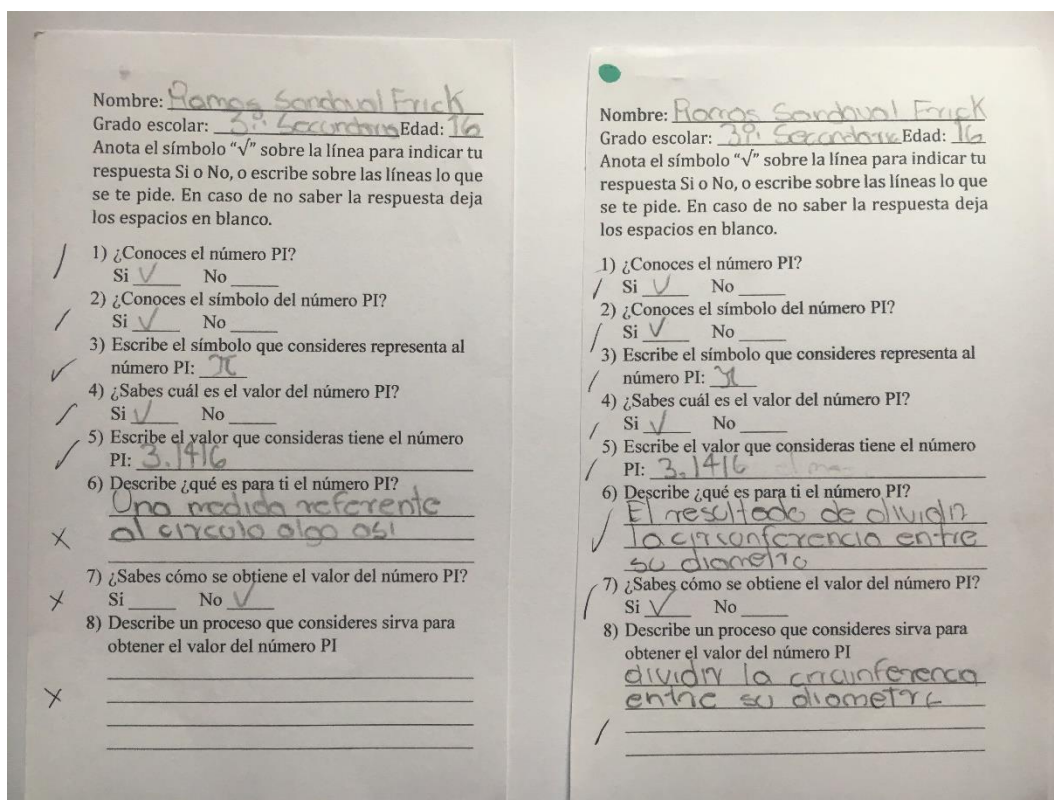
TAPA CHICA	TAPA GRANDE
Medida de su contorno: <u>16 cm</u>	Medida de su contorno: <u>36 cm</u>
Medida de su diámetro: <u>4.9 y 5 cm</u>	Medida de su diámetro: <u>11 cm, 11.2 cm y 11.4 cm</u>
Resultado de la división: <u>3.2 y 3.3</u> (realiza la división en la parte de atrás de esta hoja)	Resultado de la división: <u>3.157, 3.21 y 3.27</u> (realiza la división en la parte de atrás de esta hoja)

**ESQUEMA 2-3S**

En la sexta y última etapa se dirigió a los estudiantes a una generalización de las divisiones que habían efectuado. Aprovechando las divisiones anotadas en el pizarrón se les preguntó si los resultados, aunque con diferencia en su parte decimal, correspondía a algún número conocido. Dos estudiantes contestaron que era semejante al número Pi. Se les cuestionó el por qué los resultados obtenidos no coincidían con el valor conocido de Pi, contestaron porque las medidas hechas no eran exactas. Ahora se enfocó la atención a las divisiones anotadas escritas en forma de fracción preguntándoles que en forma general a qué correspondían las cantidades anotadas en las fracciones. Se escuchó que los números de arriba eran los contornos de las tapas y que los números de abajo eran sus diámetros. Se les dijo que estaban en lo correcto, pero se les aclaró que se refirieran al número de arriba como numerador y al número de abajo como denominador. Hecha esta aclaración, se preguntó ¿en forma general qué representan los numeradores y los denominadores? Después de guiarlos y meditarlo un poco, los estudiantes estuvieron de acuerdo en que el numerador representaba las circunferencias de las tapas y el denominador sus diámetros respectivos. Se les preguntó cómo se podía representar la medida del contorno de cualquier circunferencia y cómo se podía representar su diámetro, pero no hubo participación. Se cambió la pregunta a ¿hay algún símbolo mediante el cual se pueda representar la medida de cualquier circunferencia? Uno de los estudiantes preguntó que podría ser con una letra, entonces se preguntó a sus compañeros si estaban de acuerdo, contestaron afirmativamente. Se preguntó si podría ser con cualquier letra, nuevamente contestaron afirmativamente. Se les preguntó si convendría representar la medida de cualquier circunferencia con una letra en especial, uno de los estudiantes preguntó si podría ser la letra “c”. Se pidió a sus compañeros su opinión, diciendo que estaban de acuerdo. Ahora se preguntó ¿con qué letra se pueden representar la medida de cualquier diámetro?, inmediatamente se alcanzó a escuchar que con la letra “d”. Se aclaró que las letras sugeridas eran lo ideal, pero teniendo presente que dichas letras representaban un valor numérico y no sólo eran las letras iniciales de circunferencia y diámetro. Ahora se preguntó que cómo se puede representar la división de cualquier circunferencia entre su diámetro, un estudiante contestó que dividiendo “c” entre “d”. Se preguntó a sus compañeros si estaban de acuerdo, contestando afirmativamente. Se pidió a uno de los estudiantes que pasara al pizarrón a anotar la división propuesta en forma de fracción, escribió la fracción correcta. Se preguntó si estaban de acuerdo, contestando afirmativamente. Se les preguntó si sabían cuál era el resultado de la fracción escrita con símbolos (aquí se les ayudó señalando las fracciones numéricas previamente escritas), uno de los estudiantes

intervino diciendo que el resultado siempre iba a ser 3.1416. Se cuestionó a sus compañeros si estaban de acuerdo, contestaron afirmativamente. Se anotó entonces el resultado, utilizando el signo de igualdad, delante de la fracción simbólica. Finalmente, se les preguntó si hay algún símbolo para indicar el 3.1416, se alcanzó a escuchar que sí agregando que era el símbolo del número Pi, se pidió a un estudiante que pasara a escribir dicho símbolo, escribiéndolo correctamente. Se preguntó si en la última igualdad obtenida se podía escribir el símbolo en lugar de 3.1416, los estudiantes contestaron afirmativamente. Se pidió a uno de los estudiantes que escribiera en el pizarrón la nueva expresión, escribiéndola correctamente. La intervención terminó con la aplicación del post-test.

La siguiente imagen es un ejemplo de las respuestas dadas por uno de los alumnos en el pre-test y en el post-test:



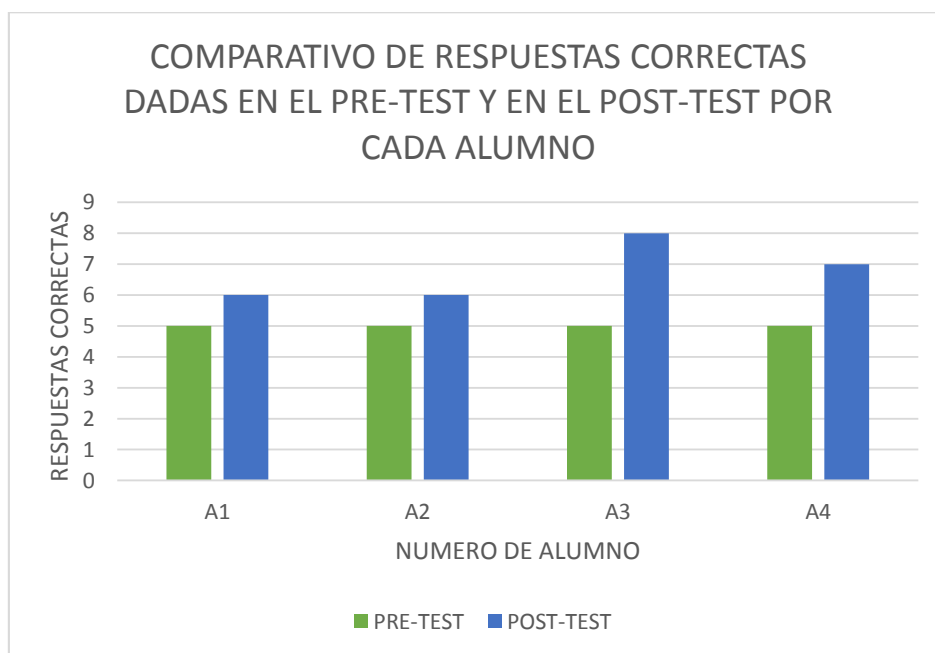
FOTOGRAFÍA 4-3S

En la siguiente tabla se presentan los resultados de las respuestas acertadas proporcionadas por los alumnos para cada pregunta en el pre-test y en el post-test:

ALUMNO	PRE-TEST	POST-TEST	% pre-test	% post-test
A-1	5	6	62	75
A-2	5	6	62	75
A-3	5	8	62	100
A-4	5	7	62	87
TOTAL	20/32	27/32	62 %	84 %

**TABLA 1-3S**

Se observa en la TABLA 1-3S que en el pre-test los cuatro alumnos contestaron acertadamente 5 preguntas y en el post-test subieron al rango de contestar acertadamente de 6 a 8 preguntas. Este comportamiento se puede apreciar mejor en la siguiente gráfica:



**GRÁFICA 1-3S**

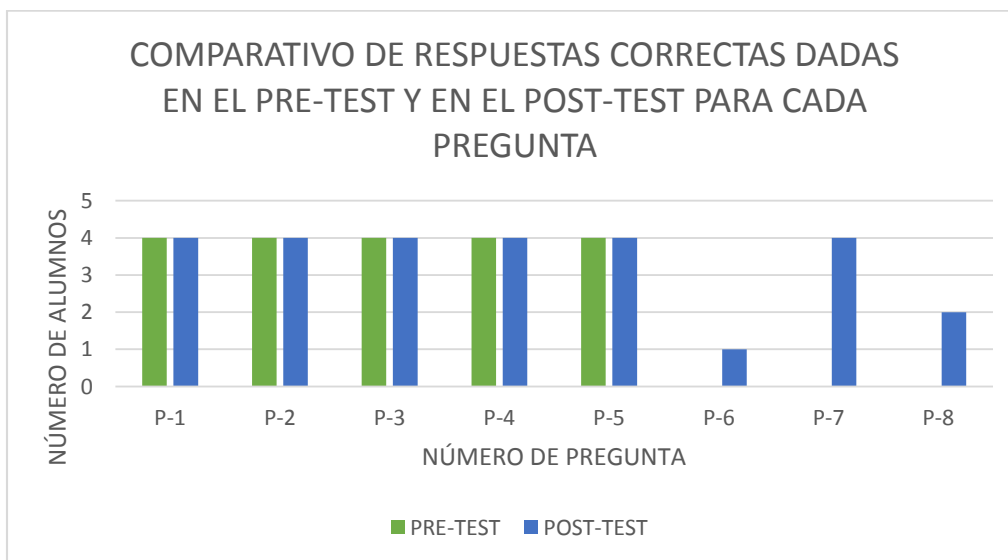
En la siguiente tabla presentamos los resultados de respuestas correctas proporcionadas por cada alumno para cada pregunta:

PREGUNTA	PRE-TEST	POST-TEST	% pre-test	% post-test
P-1	4	4	100	100
P-2	4	4	100	100
P-3	4	4	100	100
P-4	4	4	100	100
P-5	4	4	100	100

P-6	0	1	0	25
P-7	0	4	0	100
P-8	0	2	0	50
TOTAL	20/32	27/32	62 %	84 %

**TABLA 2-3S**

La siguiente gráfica se presenta para ayudarnos a visualizar los resultados de las respuestas correctas obtenidos en el pre-test y en el post-test para cada pregunta. En ella se muestra que, de acuerdo lo previsto, todos los estudiantes contestaron asertivamente las cinco primeras tanto en el pre-test como en el post-test. Las tres últimas preguntas no fueron contestadas en el pre-test de acuerdo a la predicción hecha. La pregunta 6 sólo fue contestada adecuadamente por un estudiante, la pregunta 7 fue contestada acertadamente por los cuatro alumnos, aunque sólo es respaldada por dos alumnos de acuerdo a lo que observamos en las respuestas asertivas de la pregunta 8.



**GRÁFICA 2-3S**

## Capítulo 8

### CONCLUSIONES

La lectura y el estudio inicial sobre Educación Matemática nos dieron muchas sorpresas y la adquisición de nuevos conceptos, vocablos, teorías y perspectivas educativas. Una de las primeras sorpresas fue saber que la didáctica de la matemática ya no se considera un arte, ya es considerada como una ciencia.

Una segunda sorpresa fue saber que la didáctica de la matemática, al consolidarse como ciencia, ya no trabaja sola, Ahora la didáctica de la matemática está asociada con la psicología, con metodologías de investigación, y con el estudio del propio saber matemático. En consecuencia, hablar de Educación Matemática es referirse a múltiples y diversos aspectos, teorías y autores.

Asimismo, una tercera sorpresa fue saber que algunos textos escolares de matemáticas, algunos de autores reconocidos, llegan a contener errores en los procesos de resolución, y en los resultados que proporcionan, de los problemas que presentan como ejemplos y, a veces también, en el contexto en el que los involucran. Uno supone que los autores son expertos en el manejo y aplicación de la matemática, y uno confía en que los libros han pasado por revisiones editoriales, lo que hace suponer que los libros no deberían presentar este tipo de errores, pero increíblemente si existen, en los textos escolares oficiales que utilizan los estudiantes, las situaciones descritas.

La sorpresa más significativa fue la referente a lo que uno, como estudiante, espera encontrar en una maestría de educación matemática, pero que no está presente. Es la situación de llegar a encontrar formas y métodos efectivos para enseñar matemáticas, pero debido a que la didáctica de la matemática es una ciencia de nueva creación, dichas formas y métodos están en fase de descubrimiento y construcción. Somos nosotros (los estudiantes de educación matemática) junto con los investigadores ya activos, los que tenemos que contribuir al desarrollo de esta ciencia.

De las últimas sorpresas que tuvimos, fue enterarnos de que, a pesar de ser maestros de matemática, algunos conceptos y temas que sabíamos, y enseñamos por muchos años, estaban en calidad de imprecisos. Al ser conscientes de esta situación se modificó nuestra concepción hacia esos temas.

Entre algunos nuevos vocablos, nacientes y exclusivos en la Educación Matemática, a los que nos enfrentamos están: contrato didáctico, situación didáctica, transposición didáctica y efecto Topaze.

Todo lo anterior, junto con las condiciones y formas de titularse en esta maestría, nos permitió contemplar algunos posibles caminos para poder encauzar este trabajo.

El planteamiento del objetivo de este trabajo se refiere a identificar los aspectos que favorecen el aprendizaje por descubrimiento y del desarrollo cognitivo, propuestos por Jerome Bruner, al aplicarlos en una clase de matemáticas para 1° de secundaria, de lo cual podemos decir que todos los aspectos contemplados favorecen el aprendizaje, como se detalla más adelante.

Respecto a la realización de las actividades durante las tres intervenciones contemplamos lo siguiente:

- a) En todo momento los estudiantes estuvieron activos y participando en las actividades propuestas en las secuencias.
- b) El material manipulativo designado se utilizó de la forma planeada y sirvió de apoyo para realizar la fase enactiva.
- c) La pregunta inicial cumplió su objetivo de generar duda, motivar e interesar al alumno para participar espontáneamente en las actividades.
- d) En la primera secuencia la construcción y manipulación del tangram mantuvo entretenidos a los estudiantes; en la segunda secuencia el uso de las fichas y la realización de las actividades se realizó de una forma divertida; en la tercera secuencia la tapa circular y el material para medirla generó expectativa provocando sorpresa en cuanto a su utilización. La mayor parte de las sesiones se pudieron presentar a manera de juego.
- e) Durante el desarrollo de las clases, los conocimientos que se pretendía aprendieran los estudiantes, no se abordaron como una simple y pasiva presentación.
- f) Las preguntas y los ejercicios fueron contestados y realizados exclusivamente por los estudiantes, sin ayuda directa de su maestro, mostrándonos que por sí mismos llegaron a lo que se pretendía enseñar.
- g) En todo momento la ayuda y guía que se les daba a los alumnos fue a manera de preguntas (lo que Brousseau llama dialéctica) que ponían al estudiante en conflicto cognitivo, haciendo que el estudiante planteara una nueva forma de solución a lo que estaban realizando.

Respecto a la aplicación de las teorías planteadas se observó lo siguiente:

- h) Debido a que la mayoría de los estudiantes, por sí mismos, dieron respuesta acertada a las preguntas iniciales y a los cuestionarios presentados, podemos determinar que se dio el descubrimiento basado en la definición de descubrimiento presentada.
- i) La fase enactiva se realizó de las formas descritas utilizando el material seleccionado adecuadamente y respaldando la siguiente fase de acuerdo a lo planeado. La respuesta acertada a los cuestionarios aplicados en la fase icónica sólo fue posible si la fase enactiva se realizó y cumplió su función eficazmente.
- j) La fase icónica se contempló efectiva debido a que la mayoría de los estudiantes pudieron dar respuestas acertadas a las preguntas realizadas, a los cuestionarios aplicados y en especial a la pregunta inicial.
- k) La fase simbólica respalda matemáticamente a la fase icónica. Las representaciones simbólicas de las nociones abordadas, al parecer no presentaron dificultad. Creemos que se debió a la relativa familiaridad que los estudiantes ya tenían al momento de las intervenciones. Esta fase sirvió más de precisión simbólica que de conocimiento inicial de la simbología respectiva, la cual era precisamente la finalidad.
- l) Los resultados del post-test presentan un aumento de respuestas acertadas tanto globalmente como en la mayoría de los estudiantes, al compararlos con los del pre-test, exceptuando la tercera intervención que, por el poco número de participantes, no se puede aplicar este criterio.
- m) Por la forma de participación de los estudiantes, por las respuestas acertadas que daban a los cuestionamientos, y por los resultados del post-test, las nociones abordadas se perciben más precisas y fortificadas en los estudiantes.

De manera general, de acuerdo al comportamiento y al desempeño que presentaron los estudiantes durante la intervención didáctica, las secuencias cumplieron su objetivo. Las inquietudes intuitivas y empíricas que se involucraron en las secuencias con intenciones didácticas contribuyeron al buen funcionamiento de la aplicación de las secuencias y al logro de resultados esperados. Podemos afirmar que los estudiantes, al encontrar las respuestas por sí mismos a las preguntas iniciales, y a la mayoría de las preguntas durante la intervención, realizaron el descubrimiento planteado en cada secuencia. Los resultados del post-test, al presentar un aumento respecto al pre-test, nos respaldan la funcionalidad de las secuencias.

Considerando entonces las perspectivas mencionadas, cada una de ellas nos muestra una característica de aplicación de las secuencias, que en conjunto nos muestra que el objetivo general y los objetivos específicos de este trabajo se cumplieron extensamente. Esto no es inusual debido a que dichas características ya se practicaban en nuestras clases, pero sin el formalismo propio de una investigación.

La aplicación del pre-test y del post-test se realizaron con la finalidad de comparar los conocimientos de los estudiantes antes y después de la intervención didáctica de forma tal que nos sirvieran de complemento para establecer la funcionalidad de la secuencia. Queremos aclarar que, por el tipo de investigación realizado (experimental dado que es un estudio de caso), los resultados obtenidos no son para uso estadístico que nos permitan hablar sobre la eficacia de la secuencia. Uno quisiera ilusionarse que la aplicación de las secuencias va a generar resultados óptimos visibles al 100 % en todos los participantes, pero debemos ser realistas y considerar que esto no es posible. La validación de la secuencia depende de la amplitud de la muestra donde se aplique, del seguimiento que se dé a los estudiantes, de la continuidad que tenga el proyecto, y del alcance a largo plazo que pueda tener la investigación.

Es notorio el aumento en descripción que se hace de la tercera intervención, en comparación a las dos primeras. Esto es debido a que en la tercera secuencia ya tenemos un panorama más claro de los aspectos y detalles que se tienen que tomar en cuenta en la realización de este tipo de investigaciones.

Al observar y tener cuidado en el tipo de preguntas que se les planteaban a los estudiantes, podemos indicar que los estudiantes no cayeron en el “contrato didáctico y nosotros tampoco caímos en el “efecto Topaze”.

Al aplicar la teoría de desarrollo cognitivo propuesto por Jerome Bruner, nos pudimos dar cuenta que la realización de una clase bajo el esquema tradicional de enseñanza de la matemática, si lo vemos enfocado desde sus tres fases, apunta a dirigir este desarrollo en forma invertida, es decir, a los estudiantes primero se les enseña la aplicación de fórmulas (fase simbólica), para después querer que apliquen la fórmula en la resolución de un problema sin considerar que el estudiante tenga clarificado los conceptos que implica manejar la fórmula (fase icónica), y finalmente se pretende que los estudiantes apliquen la fórmula en situaciones de la vida real cuando no se les ha llevado a procesos experimentales reales (fase enactiva). La realización a

la inversa de este desarrollo puede ser una de las explicaciones a las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la matemática.

Por los comentarios de la mayoría de los estudiantes, después de realizar las intervenciones didácticas, percibimos interés, por parte de ellos, hacia esta forma de desarrollar la clase, y agrado hacia las actividades realizadas. Los estudiantes, sin tener conocimientos de didáctica, se dan cuenta de la diferencia de metodología utilizada durante la intervención y valoran el trabajo realizado.

El uso de un material manipulativo durante la clase permitió la participación activa de los estudiantes y cumplió su objetivo como un medio de respaldar la fase enactiva para poder llegar a la fase simbólica.

Utilizar el método de aprendizaje de la matemática por descubrimiento no lo estamos proponiendo como un método único para enseñar matemáticas y 100% eficiente. Nuestra propuesta es considerarlo como un método alternativo, inicial y complementario a otras formas de aprendizaje que los profesores consideren adecuadas y efectivas.

Conjeturamos que trabajar las clases de matemáticas bajo las perspectivas propuesta hace que los estudiantes tengan mayor interés, mejor desempeño y gusto por la matemática.

Plantemos que una de las funciones de la fase enactiva es la de sembrar experiencias matemáticas en el estudiante esperando que, cuando se realicen las conexiones necesarias, florezcan en un nuevo conocimiento.

Es motivante y satisfactorio, para uno como profesor, ver los rostros de agrado de los estudiantes al estar participando activamente en las tres fases del desarrollo cognitivo aplicado en las intervenciones didácticas. Parte de la vocación como profesor, sin caer en vanidad, es vivir esta motivación y satisfacción.

Es cierto que el lenguaje de la matemática es de vital importancia para poder aprender y comunicarse matemáticamente, de aquí que se entienda que el camino para iniciar el aprendizaje de la matemática sea enseñar primero su lenguaje, pero de acuerdo a las secuencias propuestas, lo primero es crear el concepto (fase enactiva) para aplicarlo en una situación concreta (fase icónica) y lograr en el estudiante una necesidad del lenguaje (fase simbólica). Pensamos que un estudiante, o cualquier persona, puede resolver problemas matemáticos sin tener un lenguaje matemático, lo que equivaldría a tener y a aprender mediante las dos primeras fases (enactiva e icónica) sin tener que recurrir a la fase simbólica. Este hecho puede ser la explicación de la habilidad que tienen

algunos niños, y personas adultas también, para resolver operaciones y problemas matemáticos sin nunca haber ido a la escuela. Lógicamente la cultura matemática de los estudiantes estaría incompleta sino tienen y manejan el lenguaje matemático apropiadamente.

Siempre habíamos pensado que algo significativo que detonó nuestro gusto por la matemática fue el hecho de tener, en nuestro recorrido escolar, un “buen maestro” de matemáticas. Por supuesto que sí es algo muy influyente, pero nos hemos dado cuenta al analizar y aplicar la teoría del Desarrollo Cognitivo de Bruner, que muchos conocimientos matemáticos adquiridos en la escuela, tienen antecedentes en experiencias matemáticas vividas fortuitamente fuera de ella, lo cual es el equivalente a experimentar la fase enactiva propuesta por Bruner. Al conjuntarse estas dos situaciones tal vez se genere entendimiento por la matemática y en consecuencia gusto por ella.

Recomendamos fomentar en los niños y adolescentes, el uso de materiales y realización de actividades lúdicas-didácticas que tengan que ver con cualquier aspecto de la matemática como pueden ser el origami, el cubo de Rubik, la resolución de sudokus, el geoplano, rompecabezas, hexaflexágonos, y en especial el uso de bloques de construcción que contribuyen a desarrollar la imaginación espacial. Debemos mantener activos a los niños y su mente ocupada para propiciar fijaciones referentes a la fase enactiva, no podemos saber en qué momento de nuestra vida esa fijación puede unirse o ser el antecedente a la fase icónica para dar el respaldo a la fase simbólica. Igualmente, una de las actividades que se pueden aprovechar para incentivar el descubrimiento son el completar secuencias numéricas y encontrar el patrón de sucesiones geométricas.

El uso del ábaco japonés (sorobán) es un claro ejemplo milenario de la actividad manipulativa para aprender a contar y para aprender a hacer operaciones aritméticas; aquí se respalda también la propuesta del desarrollo cognitivo de Jerome Bruner, antes de que a los estudiantes se les proporcione un algoritmo, realizan suficientes operaciones con el sorobán. Ya algunas escuelas particulares están implementando clases extras con el uso del ábaco japonés, con maestros certificados, como complemento a sus clases de matemáticas. Se debiera contemplar incluir en los planes y programas de educación primaria el uso de sorobán.

En algunas propuestas recientes incluidas en libros y publicaciones, detectamos que la estrategia de aprendizaje a seguir tiene que ver con el descubrimiento, aunque no se menciona ni se especifica explícitamente. Por ejemplo, el planteamiento de preguntas y las actividades didácticas mostradas en el modelo 3UV (los tres usos de la variable en matemáticas) contemplamos

que están estructuradas para dirigir al estudiante hacia el descubrimiento (Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. 2008). Las dialécticas mencionadas por Brousseau y su teoría de situaciones didácticas igualmente las contemplamos como una forma de guiar al estudiante a descubrir. Y las actividades propuestas por Víctor Larios Osorio para estudiar el paralelismo mediante el uso del programa computacional CABRI-GEOMETRE (geometría dinámica), tienen la finalidad de que el estudiante descubra propiedades en los triángulos y cuadriláteros que se complicarían si se realizaran sólo mediante el uso de papel y lápiz.

Es viable, urgente y significativo cambiar el sistema tradicional de la enseñanza de la matemática, especialmente en secundaria y tal vez desde primaria, por las nuevas propuestas que nos está dando la educación matemática, es nuestra esperanza que el trabajo presentado sirva para motivar a maestros de vocación a iniciar este cambio.

La estructura de un edificio bien construido debe empezar y tener buenos cimientos. Los buenos cimientos en matemáticas son las nociones y el razonamiento. La estructura matemática (desarrollos y procesos) debe iniciar con buenos cimientos. Los cimientos entonces se deben construir en la educación pre-escolar y primaria, es decir, estas etapas se deben dedicar a fortalecer las nociones y desarrollar el razonamiento en sus estudiantes. Sólo de esta manera se podrán construir adecuados conocimientos matemáticos (edificio). Curiosamente, los cimientos de un edificio no se ven, lo mismo pasa con los conceptos y el razonamiento, tampoco se ven, pero si podemos detectarlo...

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Asimov, Issac. (1985). *Nueve futuros*. México: Ediciones Roca.
- Ausubel, D. P. (1983). *Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Argentina: Libros del Zorzal.
- Bruner, J. S. (1963). *El proceso de la educación*. México: Uteha.
- Bruner, J. S. (1969). *Hacia una teoría de la instrucción*. México: Uteha.
- Bruner, J. S. (1987). *La importancia de la educación*. España: Paidós.
- Cantoral, U. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. España: Editorial Gedisa.
- Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N. y Montes, M. (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria*. España: Ediciones Paraninfo.
- Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. España: La Muralla.
- Díaz, B. A. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. México: UNAM.
- Dolores, C., Martínez, G., Farfán, R. y Carrillo, C. (2007). *Matemática Educativa*. México: Ediciones Díaz de Santos.
- D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Godino, J., Batanero, C., Cid. C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. España: ReproDigital.
- Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (1995). *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Larios, V. (2005). *Un micromundo para el estudio de paralelismo con triángulos y cuadriláteros en la escuela secundaria*. Educación matemática, vol. 17. pp. 77-104. México: Santillana.
- Lee, C. (2010). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. España: Ediciones Morata.
- Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas: cuestiones, teoría y práctica en el aula*. España: Ediciones Morata.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B., (2011). *El carácter algebraico de la aritmética*. Argentina: Editorial Paidós.
- Ursini, S., Escareño, F. y Montes, D. (2008). *Enseñanza del álgebra elemental*. México: Trillas.

## ANEXO 1

### SECUENCIA DIDÁCTICA PARA QUE LOS ESTUDIANTES IDENTIFIQUEN LAS FRACCIONES (COMO PARTE-TODO) QUE ESTÁN REPRESENTADAS EN LAS PIEZAS DE UN TANGRAM

#### PLAN DE CLASE

CAMPO FORMATIVO: Habilidad numérica

EJE TEMÁTICO: Sentido numérico.

TEMA: Fracciones.

CONTENIDO: Representación de fracciones.

DURACIÓN DE LA SECUENCIA: 180 minutos.

NÚMERO DE SESIONES: 6 con diferentes tiempos.

OBJETIVO, PROPÓSITO O FINALIDAD: Adquirir por descubrimiento el concepto de fracción a través del tangram.

PROBLEMA, CASO O PROYECTO: Construir y utilizar un tangram para adquirir el concepto de fracción.

APRENDIZAJES ESPERADOS: Escritura, uso y comparación de fracciones.

COMPETENCIAS QUE SE DESARROLLAN: Comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados.

MATERIALES: Hojas de papel de diferentes colores, regla y tijeras.

ORIENTACIONES PARA LA EVALUACIÓN: Construcción de un tangram, respuesta a cuestionarios.

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS: Descubrir las relaciones fraccionarias que hay en las piezas de un tangram a través de la comparación parte-todo, parte-parte y parte-forma, pasando por las tres fases de desarrollo cognitivo: enactiva, icónica y simbólica.

SECUENCIA DIDÁCTICA (ACTIVIDADES Y TIEMPOS): Evaluación diagnóstica (10 minutos), construcción del tangram (40 minutos), identificación, manipulación y análisis de las piezas que forman un tangram (40 minutos), respuesta a cuestionario para descubrir la parte

fraccionaria en cada pieza del tangram (40 minutos), respuesta a cuestionario para escribir las diferentes fracciones que representan las piezas del tangram (40 minutos), evaluación final (10 minutos).

**APERTURA O INICIO:** Aplicación de evaluación diagnóstica (pre-test de 6 preguntas y 2 justificaciones), construcción de un tangram utilizando hojas de papel (guía de 17 pasos).

**DESARROLLO:** Formación de equipos de dos alumnos, respuesta a cuestionario para la fase enactiva (12-20 preguntas) y respuesta a cuestionario para la fase icónica (14 preguntas).

**CIERRE:** Respuesta a cuestionario para la fase simbólica (22-30 preguntas).

**CRITERIOS Y TIPOS DE EVALUACIÓN:** Participación, construcción del tangram, trabajo en equipos, respuesta a los cuestionarios, y respuestas correctas al cuestionario final.

**INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN:** Cuestionario escrito de 7 preguntas y 3 justificaciones (post-test).

**EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES:** Comparación de la evaluación diagnóstica (pre-test) con la evaluación final (post-test).

**RECURSOS:** construcción, manipulación, cuestionarios, descubrimiento.

**BIBLIOGRAFÍA:** lecturas de la historia del tangram.

## ANEXO 2

### SECUENCIA DIDÁCTICA PARA QUE LOS ESTUDIANTES ESTABLEZCAN LA LEY DE LOS SIGNOS DE LA SUMA DE NÚMEROS ENTEROS UTILIZANDO FICHAS DE COLORES

#### PLAN DE CLASE

CAMPO FORMATIVO: habilidad numérica

EJE TEMÁTICO: sentido numérico y pensamiento algebraico

TEMA: números y sistemas de numeración

CONTENIDO: suma y resta de números con signo.

DURACIÓN DE LA SECUENCIA: 150 minutos

NÚMERO DE SESIONES: 3

OBJETIVO, PROPÓSITO O FINALIDAD: aprender, por descubrimiento, la ley de los signos al realizar sumas y restas de números enteros.

PROBLEMA, CASO O PROYECTO: realizar sumas y restas utilizando fichas de dos colores diferentes para representar con un color a los números positivos y con otro a los números negativos. Utilizando la propiedad del inverso aditivo, y manipulando las fichas, se representarán cantidades entendiendo que dos fichas de diferente color se anulan (dan cero), para visualizar las fichas que no se anulan y determinar que éstas fichas representan el resultado de la operación, enfatizando que el color determina su signo (+ o -).

APRENDIZAJES ESPERADOS: determinar el signo del resultado cuando se realizan operaciones de suma y resta de números positivos y negativos.

COMPETENCIAS QUE SE DESARROLLAN: resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados, manejar técnicas eficientemente.

MATERIALES: fichas de dos colores diferentes, dos dados de diferentes colores numerados del 1 al 6.

ORIENTACIONES PARA LA EVALUACIÓN: desempeño en las actividades descritas en las actividades de cierre de esta secuencia.

## ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS (ACTIVIDADES Y TIEMPOS)

### SECUENCIA DIDÁCTICA

**APERTURA O INICIO:** ambientación a la clase que consiste en plantear un problema de cálculo mental. Aplicación del pre-test. Planteamiento de la actividad a desarrollar en clase a manera de juego.

**DESARROLLO:** se repartirán 20 fichas a cada alumno (10 de un color y 10 de otro) explicando para qué y cómo se van a utilizar. Se plantearán ejercicios de suma y resta de números con signo, que representarán con sus fichas, involucrando solamente números en unidades. Después los alumnos explicarán su procedimiento y su resultado. Posteriormente se trabajará en parejas para conjuntar sus fichas y realizar ejercicios que involucran números en decenas. Finalmente se trabajará en equipos de cuatro personas, conjuntando nuevamente sus fichas, para realizar ejercicios con números mayores.

**CIERRE:** Actividades lúdicas que consisten en tres diferentes juegos que involucran la suma y resta de números positivos y negativos (fútbol aritmético, completar pirámides numéricas y basta matemático).

**INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN:** pirámides con sumas y restas de números positivos y negativos, resolución del juego “basta” que integra suma y restas de números positivos y negativos, aplicación de post-test.

**CRITERIOS Y TIPOS DE EVALUACIÓN:** resultados de cuestionarios y desempeño en las actividades de juego.

**EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES:** el buen desempeño que muestren los alumnos en las actividades de cierre mostrará si se ha conseguido el objetivo.

**RECURSOS:** juegos aritméticos, material didáctico, manipulación, descubrimiento

**BIBLIOGRAFÍA:** libro de texto correspondiente