Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

Potencias del Núcleo de Dirichlet y Aproximación

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:

Lic. Jose Daniel Torres Campos

Director de Tesis:

Dr. Jorge Bustamante González

Puebla, Puebla. Julio 2024

Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

Potencias del Núcleo de Dirichlet y Aproximación

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Presenta:
Lic. Jose Daniel Torres Campos

Director de Tesis:
Dr. Jorge Bustamante González

Puebla, Puebla. Julio 2024

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

JOSÉ DANIEL TORRES CAMPOS

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 14 de mayo de 2024, con la tesis titulada:

Potencias del núcleo de Dirichlet y aproximación

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 3 de junio de 2024

DR. RAÚL ESCOBEDO CONDE
COORDINADOR DEL POSGRADO EN MATEMÁTICAS.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS · SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Av. San Claudio y 18 sur, edif. FM1 Ciudad Universitaria, Col. San Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
(222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnología **(CONAHCYT)** por el apoyo económico otorgado para concluir el posgrado. **No. CVU 1138003**.

Al Dr. Jorge Bustamante González, por haber aceptado dirigir esta tesis y a su amplio conocimiento, paciencia, compresión y supervisión para realizar este proyecto de investigación.

A mis sinodales Dr. Slaviša V. Djordjević, Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dr. David Herrera Carrasco y Dr. Netzahualcóyotl Carlos Castañeda Roldán, por haber dedicado tiempo en la revisión de este trabajo y gracias a sus observaciones y correciones realizadas lo favorecierón.

A todos los docentes con quien tuve el gusto de conocer y tomar cursos con ellos, agradezco el que me otorgaran los conocimientos necesarios para realizar esta tesis y dejaran en mi la inquietud e inspiración para la investigación.

Índice

Introducción

Esta tesis se relaciona con algunos problemas de la Teoría de la Aproximación. En particular, se enmarca dentro del estudio de la aproximación de funciones reales continuas y periódicas con la ayuda de operadores lineales y positivos.

En el trabajo $\mathbb{N}$ denota a los números naturales y $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Mediante $C_{2\pi}$ denotamos al espacio de las funciones reales, continuas y 2π-periódicas con la norma del supremo. Esto es, si $f \in C_{2\pi}$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{-\pi \le x \le \pi} |\, f(x)\,| \,.$$

Para $1 \le p < \infty$, $\mathbb{L}^p = \mathbb{L}^p[0,2\pi]$ es el espacio de (clases de equivalencia de) funciones 2π-periódicas e integrables en el sentido de Lebesgue con la norma

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\, f(t)\,|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Para simplificar pondremos

$$X^p = \begin{cases} C_{2\pi}, & \text{si} \quad p = \infty, \\ \mathbb{L}^p, & \text{si} \quad 1 \le p < \infty. \end{cases}$$

Un polinomio trigonométrico de grado no mayor que n es una función del tipo

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Denotamos por $\mathbb{T}_n$ a la colección de todos los polinomios trigonométricos de grado no mayor que n. Esto es $T \in \mathbb{T}_n$ si

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big), \tag{1}$$

donde $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

A las aplicaciones lineales $L_n : X^p \to \mathbb{T}_n$ les llamaremos operadores polinomiales trigonométricos.

Recordemos que a cada función $f \in \mathbb{L}^1$ se le asocia la serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx) \Big), \tag{2}$$

donde

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \qquad \text{y} \qquad b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx.$$

Dada $f \in \mathbb{L}^1$ y $n \in \mathbb{N}$ se define la **suma parcial** n-ésima de las series de Fourier (2) como

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx) \Big). \tag{3}$$

Un resultado antiguo (debido a Dirichlet) asegura que la suma (3) se puede representar en la forma

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt, \tag{4}$$

donde $D_n(x)$ es el llamado el **núcleo de Dirichlet** de orden n y se define como

$$D_n(x) = \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \qquad (\sin(x/2) \neq 0). \tag{5}$$

Un problema clásico, asociado a la Teoría de las Series, está relacionado con la convergencia de la serie (2). En 1873 du Bois-Reymond [8] presentó el primer ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier diverge. En 1923 Kolmogorov [13] demostró la existencia de funciones en $\mathbb{L}^1$ tales que su serie de Fourier diverge casi dondequiera, y en 1926 verificó que existen funciones en dicho espacio que divergen dondequiera [14].

Actualmente la existencia de funciones $f \in C_{2\pi}$ cuya serie de Fourier diverge se infiere de un teorema de Banach y Steinhaus conocido como el principio de acotación uniforme.

Teorema 0.1 (Banach-Steinhaus) *Sean E y F espacios de Banach y $\{L_n\}$, $L_n : E \to F$ una sucesión de operadores lineales y acotados. Para un operador $L : E \to F$ las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(i) *Para todo $x \in E$,*

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(x) - L(x)\| = 0.$$

(ii) *La sucesión $\{\|L_n\|\}$ está acotada y existe un conjunto G denso en E tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(y) - L(y)\| = 0, \tag{6}$$

para cada $y \in G$.

¿Cómo se relaciona el teorema anterior con las sumas parciales de las series de Fourier? Primero se verifica que, si para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos a $S_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ definido por (4), entonces se obtiene un operator lineal y continuo cuya norma es

$$\|S_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | D_n(t) | \, dt.$$

Luego se prueba que existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1 \ln(n+1) \le \|S_n\|_1 \le C_2 \ln(n+1),$$

véase [5, p. 42]. Luego, según el teorema anterior, existe al menos una función continua tal que las sumas parciales de su serie de Fourier no convergen a la función en la norma uniforme.

Aprovechamos el ejemplo anterior para mostrar que las dos condiciones en el **Teorema 0.1** son independientes. En efecto, si $m \in \mathbb{N}$ y $T_m \in \mathbb{T}_m$, entonces $S_n(T_m) = T_m$ para toda $n \ge m$. Luego hay convergencia uniforme en un conjunto denso (los polinomio trigonométricos).

Como las sumas parciales de las series de Fourier no se pueden utilizar para aproximar a todas las funciones continuas, es lógico intentar construir otras sucesiones de operadores que tengan mejores propiedades aproximativas. En este sentido, el primer resultado relevante se debe a Fejér (ver [9]) quien, en lugar de las sumas parciales, consideró las medias aritméticas de dichas sumas. Esto es, definió

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x), \tag{7}$$

$(S_0(f,x) \equiv 1)$.

En 1900 Fejér [9] demostró que, para toda $f \in C_{2\pi}$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0.$$

Un estudio más detallado se presentó en [10]. Un resultado similar se prueba en los espacios $\mathbb{L}^p$, pero ese tipo de problemas no los vamos a estudiar en este trabajo.

Si, como es usual, definimos el **núcleo de Fejér** de orden n como

$$F_n(x) = \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{(n+1)\sin^2(x/2)}, \qquad (\sin(x/2) \neq 0), \tag{8}$$

entonces los operadores (7) se pueden escribir en la forma

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_n(t)\,dt. \tag{9}$$

Los resultados de Fejér motivaron la construcción de otras familias de operadores con propiedades similares (véanse [5], [7] y [15]). Esos operadores no serán estudiados aquí.

Recordemos algunos hechos relacionados con la discretización de integrales.

Desde el punto de vista del análisis numérico, el cálculo de integrales (como las que aparecen en (4) y (9)) pueden ser complicado e involucrar grandes gastos computacionales. Por ello algunos autores han buscado definir operadores discretos, en el sentido de que no involucran integrales (por ejemplo, ver [3]).

Aquí recordaremos sólo algunos ejemplos relacionados con nuestro proyecto propuesto.

Para $r \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$, denotemos

$$x_{r,k} = \frac{2k\pi}{(r+1)}.$$

Además, consideremos la normalización del **núcleo de Dirichlet** dada por

$$\mathscr{D}_n(x) = \frac{1}{2n+1} D_n(x).$$

Kis and Vértesi estudiaron en [12] los operadores

$$K_{4n}(f,x) = 4L_{2n,3}(f,x) - 3L_{2n,4}(f,x), \tag{10}$$

donde

$$L_{n,i}(f,x)=\sum_{k=0}^{2n}\mathscr{D}_n^i(x-x_{2n,k})f(x_{2n,k}). \tag{11}$$

Nótese que $L_{n,i}$ es una suma de Riemann de la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathscr{D}_n^i(x-t)\,dt.$$

Por otro lado Saxena and Srivastava en [19] consideron los operadores

$$S_{6n}(f,x)=\frac{25}{3}L_{2n,4}(f,x)-\frac{32}{3}L_{2n,5}(f,x)+\frac{10}{3}L_{2n,6}(f,x). \tag{12}$$

De hecho, en [19] se estudió una modificación para analizar funciones no periódicas.

Buscando obtener operadores similares, pero con una mayor velocidad de convergencia, en [2] se introdujeron los operadores

$$Q_{3n}(f,x)=C_n\sum_{k=0}^{4n}f(x_{4n,k})\left(\mathscr{D}_n^2(x-x_{4n,k})+\mathscr{D}_n^3(x-x_{4n,k})\right), \tag{13}$$

donde

$$C_n=\frac{(2n+1)^3}{(7n^2+7n+2)(4n+1)}.$$

Nótese que en (11), (12) y (13), realmente se están considerando potencias del **núcleo de Dirichlet**. En (11) y (12) se utilizan otras notaciones, pero una observación simple muestra que sus enunciados son equivalentes a los que hemos presentado aquí. La pregunta es: ¿Qué otras potencias del **núcleo de Dirichlet** se pueden utilizar?

Los estudios dados en [2] nos permiten formular varias preguntas.

1.- ¿Se pueden considerar otras combinaciones lineales de los operadores (11), diferentes de los operadores (10) y (12), con similares propiedades aproximativas?

2.- De las combinaciones lineales de los operadores (11), ¿cuáles conducen a operadores lineales y positivos?

3.- En [2] sólo se presentó un resultado del tipo directo. Esto significa que se demostró una desigualdad del tipo

$$\|Q_{3n}^2(f) - 2Q_{3n}(f) + f\| \leq 14\omega_2\Big(f, \frac{2\pi}{n+1}\Big), \tag{14}$$

donde $\omega_2(f,t)$ denota al módulo de continuidad usual de segundo orden. Se necesita encontrar un resultado inverso. ¿Se pueden utilizar los operadores Q_{3n} para caracterizar a todas las funciones $f \in C_{2\pi}$ que satisfagan la condición

$$\omega_2(f,t) \leq C_f t^{\alpha},$$

$0 < \alpha \leq 2$? Dicho en otros términos, se quiere verificar si es cierta la afirmación siguente: $\omega_2(f,t) \leq C_f t^{\alpha}$ sí y sólo si existe una constante C tal que

$$\|Q_{3n}^2(f) - 2Q_{3n}(f) + f\| \leq \frac{K_f}{n^{\alpha}}.$$

Aquí C_f y K_f son constantes que dependen de f.

En la investigación se buscará dar respuestas (al menos parciales) a algunas de las preguntas formuladas más arriba.

Las técnicas introducidas por el director en [2] son novedosas y evidencian que se pueden aplicar en otras situaciones. Esto asegura que se pueden encontrar algunas respuestas a las preguntas **1.-** y **2.-**.

Esta investigación tiene como objetivo extender los estudios realizados por Kiss-Vértesi [12], Saxena-Srivastava [19] y recientemente Bustamante [2], para así contribuir al desarrollo de la teoría de la aproximación mediante la introducción de nuevos operadores polinomiales lineales y positivos, definidos con la ayuda de discretizaciones de potencias del **núcleo de Dirichlet**, relacionados con las funciones continuas 2π-periódicas.

El primer Capítulo está dedicado a recordar algunos conceptos muy usados en la Teoría de la Aproximación, además de representar algunas fórmulas las cuales serán útiles para los cálculos y construcción de los operadores incluidos en los capítulos siguientes.

Para lograr los resultados que deseamos se necesitan tener representaciones precisas del desarrollo en series de Fourier de las potencias del núcleo de Dirichlet. De hecho, como se verá en el tercer Capítulo, necesitamos conocer con exactitud los coeficientes de Fourier de grado menor o igual que n. Los cálculos presentados en el Capítulo dos no son realmente complicados pero si largos y tediosos. Eso explica por qué no consideramos potencias muy altas del núcleo de Dirichlet.

En el tercer Capítulo se presentan los resultados principales, para ello se siguen los pasos siguientes.

1.- Para definir operadores discretos, utilizando fórmulas de cuadratura apropiadas, se definen los operadores Q_{4n}.

2.- Para simplificar las demostraciones se introducen los operadores $M_{6n,k}$ con $k \in \{2,3,4\}$. En particular se obtienen representaciones explícitas de como transforman estos operadores a los polinomios trigonométricos de grado menor o igual que n (véanse las **Proposiciones 3.2, 3.3** y **3.4**). Aquí es donde esencialmente se usa el hecho de que conocemos la forma de los coeficientes de Fourier de las potencias del **núcleo de Dirichlet** hasta el órden 4. Nótese que en los resultados dados en esas proposiciones aparecen distíntas derivadas de los polinomios y sus conjugadas. Esa es la razón por la cual en los Preliminares se incluyó la **Proposición 1.6**.

3.- Finalmente, en el **Teorema 3.1** se demuestra el resultado principal. Esto es para $f \in C_{2\pi}$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\|Q_{4n}(f) - f\| \leq E_n(f) + \frac{4}{7}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right).$$

Capítulo 1

Preliminares

A continuación incluimos algunas definiciones y resultados fundamentales de la Teoría de la Aproximación que nos ayudarán a simplificar la presentación de nuestro trabajo.

1.1 Espacios $\mathbb{L}^p$ y series de Fourier

Sea $C_{2\pi}$ el espacio de todas las funciones continuas y 2π-periódicas. En este espacio consideramos la norma uniforme o norma del supremo, para $f \in C_{2\pi}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{-\pi \le x \le \pi} | f(x) | . \tag{1.1}$$

Dada $1 \le p < \infty$, denotamos por $\mathbb{L}^p$ al espacio de clases de equivalencia de funciones $2\pi-$periódicas f tales que $|f(t)|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue. En dicho espacio consideramos la norma

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f(t) |^p \, dt \right)^{1/p} . \tag{1.2}$$

Si $f \in \mathbb{L}^1$, la serie (formal) de Fourier se define como

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k(f) \cos(k\pi) + b_k(f) \sin(k\pi) \Big), \tag{1.3}$$

donde $a_k(f)$, $b_k(f)$ son llamados coeficientes de Fourier y están dados por

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \tag{1.4}$$

y

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx. \tag{1.5}$$

Si f es una función par, se puede probar que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$, luego, su serie de Fourier no contendrá términos con senos. Si f es una función impar para toda $n \in \mathbb{N}_0$, $a_n(f) = 0$, luego su serie de Fourier no contendrá términos cosenos.

En particular, si $k, m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(mx)\,dx = 0. \tag{1.6}$$

Por otro lado, utilizando la fórmula trigonométrica conocida para el $\cos(2x)$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(jx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2jx)}{2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 1, \tag{1.7}$$

mientras que, como $\cos(jx)$ y $\sin(jx)$ son 2π-periodicas, un cálculo directo da

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx)\,dx = 0.$$

Esto dice que la colección de las funciones $\{1, \sin(kx), \cos(mx) : k, m \in \mathbb{N}_0\}$ es un sistema ortogonal.

Usualmente, la suma parcial de orden n de la serie de Fourier de f se define como

$$S_n(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\Big). \tag{1.8}$$

Si T está dado por (1), el conjugado de T se define como

$$\widetilde{T}(x) = \sum_{k=1}^{n} \Big(-b_k\cos(kx) + a_k\sin(kx)\Big). \tag{1.9}$$

Una forma equivalente a (1) y (1.9) es

$$T(x) = \sum_{j=0}^{n} A_j(T,x) \tag{1.10}$$

y

$$\widetilde{T}(x) = \sum_{j=0}^{n} \widetilde{A_j}(T,x), \tag{1.11}$$

donde

$$A_j(T,x) = a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx) \quad y \quad \widetilde{A_j}(T,x) = -b_k\cos(kx) + a_k\sin(kx).$$

Denotamos al operador diferencial por D^r. Esto es, si f es r-veces continuamente diferenciable

$$D^r f = f^{(r)}. \tag{1.12}$$

1.2 Módulos de continuidad clásicos

Para $f \in C_{2\pi}$ y $h > 0$, el operador traslación $T_h : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ se define como

$$T_h(f,x) = f(x+h).$$

Si r es un entero positivo, $f \in C_{2\pi}$, para $t > 0$, el módulo usual de continuidad de orden r de f se define por

$$\omega_r(f,t) = \sup_{h\in(0,t]} |\Delta_h^r f(x)|, \tag{1.13}$$

donde

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k}\binom{r}{k} f(x+kh) = (T_h - I)^r f(x),$$

I es el operador identidad y T_h es el operador traslación.

Cuando $r = 1$ escribiremos $\omega(f,t)$ en lugar de $\omega_1(f,t)$.

Se conoce que el módulo de continuidad tiene las propiedades siguientes (ver [22, p. 103-104]).

Proposición 1.1 *Para $f \in C_{2\pi}$ y $r \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente.*

(i) La funcional $\omega_r(f,t)$ es no decreciente y continua como función de t. Además

$$\lim_{t\to 0^+} \omega_r(f,t) = 0.$$

(ii) Si $t_1, t_2 > 0$, entonces

$$\omega_r(f, t_1 + t_2) \le \omega_r(f,t_1) + \omega_r(f,t_2).$$

(iii) Si $\lambda > 0$ y $t > 0$, entonces

$$\omega_r(f, \lambda t) \le (\lambda + 1)^r \omega_r(f,t).$$

(iv) Si $0 < t_1 < t_2$, *entonces*

$$t_2^{-1}\omega_r(f,t_2) \le 2^r\, t_1^{-1}\omega_r(f,t_1).$$

La última propiedad en la afirmación 1. es importante cuando se desea acotar el error de un proceso de aproximación como se verá en el **Teorema 3.1**.

Teorema 1.1 (ver [20, p. 55]) *Si* $f \in C_{2\pi}$ *tiene segunda derivada continua, entonces*

$$\omega_2(f,t) \le t^2 \|f^{(2)}\|.$$

El **Teorema 1.2** no está explícitamente incluido en [5] pero se infiere de los cálculos dados en [5, p. 70].

Teorema 1.2 *Si* $n \in \mathbb{N}$, $f \in C_{2\pi}$ *y* σ_n *es el operador de Fejér, se cumple que*

$$\|f - \sigma_n(f)\| \le \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right),$$

donde $\omega_2(f,t)$ *está definido en* (1.13) *con* $r = 2$.

1.3 Convolución

Si $f, g \in \mathbb{L}^1$, se define la convolución de f y g como (ver [5, p.10])

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy. \tag{1.14}$$

Entre otras, la convolución tiene las propiedades siguientes (ver [5, p. 10] y [23, p. 36-37]).

Proposición 1.2 *Si* $f, g, h \in \mathbb{L}^1$, $a, b \in \mathbb{R}$, *entonces*

(i) Si $f \in \mathbb{L}^p$ *y* $g \in \mathbb{L}^1$, *entonces* $(f * g)(x)$ *existe casi donde quiera como una integral absolutamente convergente,* $f * g \in \mathbb{L}^p$, *y*

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1.$$

(ii) Conmutatividad:

$$f * g = g * f.$$

(iii) Asociatividad:

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

(iv) Linealidad:

$$(af + bg) * h = a(f * h) + b(g * h).$$

(v) Regla de derivación:

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg.$$

1.4 Operadores

En este trabajo utilizamos los siguientes operadores conocidos en la Teoría de Aproximación.

A) Se define al núcleo de Dirichlet de orden n como (ver [17, p. 150])

$$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \qquad x \neq 2j\pi, j \in \mathbb{Z} \tag{1.15}$$

y $D_n(x) = 2n + 1, \quad x = 2j\pi, j \in \mathbb{Z}$.

Se conoce que las sumas parciales de las series de Fourier se pueden escribir en términos de convoluciones con el núcleo de Dirichlet en la forma (ver [5, p. 42])

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt. \tag{1.16}$$

Para nuestro propósito es conveniente normalizar el núcleo de Dirichlet de la forma siguiente

$$\mathscr{D}_n(x) = \frac{1}{2n+1}D_n(x). \tag{1.17}$$

B) Si $f \in \mathbb{L}^1$ y $S_n(f)$ es la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f, la suma de Fejér de orden n de f se define como

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f, x). \tag{1.18}$$

El núcleo de Fejér de orden n se define como

$$F_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\cos(kx). \tag{1.19}$$

Se conoce que (ver [5, p. 43])

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right)^2, \qquad \sin(x/2) \neq 0 \tag{1.20}$$

y $F_n(x) = n+1$, si $\sin(x/2) = 0$.

En términos de convoluciones (1.18) se puede escribir de la forma (ver [5, p. 43])

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)\,dt. \tag{1.21}$$

Se sigue de (1.19) y (1.21) que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, σ_n es un operador lineal positivo de $\mathbb{L}^1$ a $\mathbb{T}_n$.

1.5 Identidades trigonométricas

Recordemos algunas de las identidades trigonométricas que serán útiles más adelante.

Para todo $a, b, x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sin a + \sin b &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),\\
\sin a - \sin b &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right),\\
\cos a + \cos b &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),\\
\sin a - \cos b &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right),
\end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \qquad \text{y} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

1.6 Fórmulas de cuadratura

Un método usado para la construcción de operadores es el uso de fórmulas de integración numérica (también llamadas de cuadratura). Estas son de la forma

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i), \tag{1.23}$$

donde los x_i son $n+1$ puntos distintos (o nodos) pertenecientes al intervalo $[a,b]$ y los A_i son coeficientes reales (denominados pesos).

Para este trabajo son importantes las fórmulas de cuadratura como la (1.23) que se conviertan en identidades cuando se le aplican a polinomios trigonométricos de un grado fijo. En particular, haremos uso del resultado siguiente.

Proposición 1.3 ([7, p. 20]) *Si $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $T \in \mathbb{T}_n$, se cumple que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T\left(x+\frac{2k\pi}{n+1}\right).$$

1.7 Derivadas de polinomios y la mejor aproximación

Recordemos un resutado demostrado en [2] relacionado con los polinomios conjugados.

Lema 1.1 *Si $T \in \mathbb{T}_n$ está dado por* (1.10) *y $W = D\widetilde{T}$, entonces*

$$W = \sum_{j=1}^{n} jA_j(T), \qquad D^2T = -\sum_{j=1}^{n} j^2 A_j(T),$$

$$D\widetilde{W} = -D^2T \qquad y \qquad D(\widetilde{D^2T}) = D^3\widetilde{T}.$$

Para pasar de los polinomios de grado no mayor que n a funciones continuas arbitrarias necesitamos algunos resultados conocidos.

Proposición 1.4 (ver [2]) *Si $n \in \mathbb{N}$, σ_n es el operador de Fejér, $T \in \mathbb{T}_n$ y $\widetilde{T}$ es el conjugado de T* (ver (1.9))

$$D\widetilde{T} = (n+1)(I-\sigma_n)T \qquad y \qquad D^3\widetilde{T} = (n+1)(I-\sigma_n)(D^2T).$$

Dada $f \in C_{2\pi}$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, se define la mejor aproximación de orden n mediante la expresión

$$E_n(f) = \inf_{T\in\mathbb{T}_n} \|f-T\|.$$

Se sigue de un teorema de Weierstrass que

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0.$$

Por otro lado, se conoce que (ver [17, p. 64 y 70]), para cada $f \in C_{2\pi}$ existe (y es único) el polinomio de la mejor aproximación. Esto es, existe $T_n \in \mathbb{T}_n$ tal que

$$E_n(f) = \|f - T_n\|. \tag{1.24}$$

A T_n se le llama el polinomio de la mejor aproximación de grado n para f.

Teorema 1.3 (ver [11, Teorema 2.5])

$$E_n(f) \leq \frac{5}{2}\omega_2\left(f, \frac{2\pi}{n+1}\right) \leq \frac{5}{2}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right),$$

En algunos casos, para estimar el error $\|L(f) - f\|$, donde L es un operador lineal y acotado, utilizamos la idea siguiente

$$\begin{aligned}\|L(f) - f\| &= \|L(f - T_n) - f + T_n + L(T_n) - T_n\| \\ &\leq 2\|L\|\|f - T_n\| + \|L(T_n) - T_n\|.\end{aligned}$$

Frecuentemente, tomaremos a T_n como el polinomio de la mejor aproximación de f de grado n. En tal caso una buena desigualdad se obtiene utilizando el **Teorema 1.3**. Nos quedaria trabajar con $\|L(T_n) - T_n\|$. En nuestro estudio L se cambia por una sucesión de operadores Q_{4n} que serán definidos en el **Capítulo 3**. Esto explica por qué dedicamos un tiempo a estudiar el comportamiento de dichos operadores en los polinomios trigonométricos de grado menor o igual a n. En la **Proposición 3.5** se prueba que dicha diferencia se puede escribir usando diversas derivadas de los polinomios. Luego, necesitamos resultados que nos permitan pasar de las derivadas de los polinomios a la función original. Esto se da en los resultados siguientes.

Proposición 1.5 (ver [2]) *Si $r, n \in \mathbb{N}$, $f \in C_{2\pi}$ y $T \in \mathbb{T}_n$, entonces*

$$\frac{1}{n^r}\|D^r T\| \leq \frac{1}{2^r}\omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + \|f - T_n\|.$$

Haremos uso de los siguientes resultados.

Proposición 1.6 (ver [2, Prop. 2.3]) *Si* $f \in C_{2\pi}$, $T \in \mathbb{T}_n$ *y* $E_n(f) = \|T - f\|$, *entonces*

$$\|D^2 T\| \leq n^2 \left(\frac{1}{4}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + E_n(f)\right),$$

$$\|D^3 T\| \leq n^3 \left(\frac{1}{4}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + E_n(f)\right),$$

$$\|D^3 \widetilde{T}\| \leq 2n^2(n+1) \left(\frac{1}{4}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + E_n(f)\right)$$

y

$$\|D^4 T\| \leq n^4 \left(\frac{1}{4}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + E_n(f)\right).$$

Capítulo 2

Sobre las potencias del núcleo

En este Capítulo obtendremos representaciones de las potencias del núcleo de Dirichlet de orden no mayor que cuatro.

Por convenio, consideramos que

$$\sum_{k=a}^{b} a(k) = 0, \quad \text{si} \quad b < a. \tag{2.1}$$

2.1 Segunda potencia del núcleo de Dirichlet

Como $D_n^2 \in \mathbb{T}_{2n}$ y es un polinomio par, queremos encontrar los coeficientes de Fourier $\varrho_{n,2}(k)$ tales que

$$D_n^2(x) = \sum_{k=0}^{2n} \varrho_{n,2}(k) \cos(kx). \tag{2.2}$$

Teorema 2.1 *Para toda $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$D_n^2(x) = 2n + 1 + 2\sum_{k=1}^{2n} \Big(2n + 1 - k\Big) \cos(kx). \tag{2.3}$$

Demostración. Según (1.19) y (1.20), si $F_{2n}(x)$ es el núcleo de Fejér, entonces

$$\frac{D_n^2(x)}{2n+1} = \frac{\sin^2((2n+1)x/2)}{(2n+1)\sin^2(x/2)} = F_{2n}(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{2n} \Big(1 - \frac{k}{2n+1}\Big) \cos(kx),$$

luego

$$D_n^2(x) = 2n+1+2\sum_{k=1}^{2n}\Big(2n+1-k\Big)\cos(kx).$$

$\square$

Esto es, los operadores de Fejér están asociados a la segunda potencia del núcleo de Dirichlet.

2.2 Tercera potencia del núcleo de Dirichlet

Como $D_n^3 \in \mathbb{T}_{3n}$ y es un polinomio par, queremos encontrar los coeficientes de Fourier $\varrho_{n,3}(k)$ tales que

$$D_n^3(x) = \sum_{k=0}^{3n} \varrho_{n,3}(k)\cos(kx). \tag{2.4}$$

En [2] el autor describió los coeficientes $\varrho_{n,3}(k)$, pero sólo para $k \le n$. En esta sección los presentamos todos.

Lema 2.1 *Si $n \in \mathbb{N}$ y $a(k) = \varrho_{n,2}(k)$ $(0 \le k \le 2n)$, para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{2n} a(k)\sum_{i=1}^{n}\cos((i-k)x) = \sum_{k=1}^{n} a(k) + \sum_{m=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-m} a(k) + \sum_{k=m+1}^{n+m} a(k)\right)\cos(mx)$$
$$+\sum_{m=n}^{2n-1}\left(\sum_{k=m+1}^{2n} a(k)\cos(mx)\right).$$

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} a(k)\sum_{i=1}^{n}\cos((i-k)x) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} a(k)\cos((i-k)x)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i} a(k)\cos((i-k)x)\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i+1}^{2n} a(k)\cos((k-i)x)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=0}^{i-1} a(i-m)\cos(mx)\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{2n-i} a(i+m)\cos(mx)\right).\end{aligned}$$

Caso 1. Si $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{2} a(k)\sum_{i=1}^{n}\cos((i-k)x) = a(0) + a(2)\cos(x)$$

y esta expresión coincide con la fórmula anunciada (ver (2.1)).

Caso 2. Si $n > 1$,

$$\sum_{k=1}^{2n} a(k) \sum_{i=1}^{n} \cos((i-k)x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{m=0}^{i-1} a(i-m)\cos(mx) \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{2n-i} a(i+m)\cos(mx) \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{i=m+1}^{n} a(i-m) \right) \cos(mx) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n-1} a(i+m)\cos(mx) \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{m=n}^{2n-i} a(i+m)\cos(mx) \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{i=m+1}^{n} a(i-m) \right) \cos(mx) + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a(i+m) \right) \cos(mx)$$

$$+ \sum_{m=n}^{2n-1} \left(\sum_{i=1}^{2n-m} a(i+m) \right) \cos(mx)$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-m} a(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=m+1}^{n+m} a(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=n}^{2n-1} \left(\sum_{k=m+1}^{2n} a(k)\cos(mx) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a(k) + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-m} a(k) + \sum_{k=m+1}^{n+m} a(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=n}^{2n-1} \left(\sum_{k=m+1}^{2n} a(k)\cos(mx) \right).$$

□

Nótese que, si $n = 1$, de acuerdo con (2.1), la primera suma en la parte derecha del **Lema 2.2** se elimina.

Lema 2.2 *Si $n \in \mathbb{N}$ y $a(k) = \varrho_{n,2}(k)$ $(0 \le k \le 2n)$, para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{2n} a(k) \left(\sum_{i=1}^{n} \cos((i+k)x) \right) = \sum_{m=2}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m-1} a(k) \right) \cos(mx)$$

$$+ \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{m-1} a(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k) \right) \cos(mx).$$

Demostración. Consideramos las identidades siguientes

$$\sum_{k=1}^{2n} a(k) \left(\sum_{i=1}^{n} \cos((i+k)x) \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{2n} a(k)\cos((i+k)x) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{m=i+1}^{2n+i} a(m-i)\cos(mx) \right) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{m=i+1}^{n+1} + \sum_{m=n+2}^{2n} + \sum_{m=2n+1}^{2n+i} \right) a(m-i)\cos(mx) \right\}$$

$$= \sum_{m=2}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{m-1} a(m-i)\right)\cos(mx) + \sum_{m=n+2}^{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} a(m-i)\right)\cos(mx)$$
$$+ \sum_{m=2n+1}^{3n}\left(\sum_{i=m-2n}^{n} a(m-i)\right)\cos(mx)$$
$$= \sum_{m=2}^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{m-1} a(k)\right)\cos(mx) + \sum_{m=n+2}^{2n}\left(\sum_{k=m-n}^{m-1} a(k)\right)\cos(mx)$$
$$+ \sum_{m=2n+1}^{3n}\left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k)\right)\cos(mx)$$
$$= \sum_{m=2}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m-1} a(k)\right)\cos(mx) + \sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{k=m-n}^{m-1} a(k)\right)\cos(mx)$$
$$+ \sum_{m=2n+1}^{3n}\left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k)\right)\cos(mx),$$

y se tiene el resultado anunciado. □

Proposición 2.1 *Si $n \geq 2$ y $a(k) = \varrho_{n,2}(k)$ $(0 \leq k \leq 2n)$, para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$D_n^3(x) = \sum_{k=0}^{n} a(k) + \sum_{m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{k=0}^{n-m} + \sum_{k=0}^{n+m}\right) a(k)\right\}\cos(mx)$$
$$+ \sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{k=m-n}^{n+m} a(k)\right)\cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{3n}\left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k)\right)\cos(mx).$$

Demostración. Se sigue de los **Lemas 2.1** y **2.2** que

$$D_n^3(x) = D_n^2(x)D_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{2n} a(k)\cos(kx)\right)\left(1 + 2\sum_{i=1}^{n}\cos(ix)\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{2n} a(m)\cos(mx) + 2\sum_{k=0}^{2n} a(k)\left(\sum_{i=1}^{n}\cos(ix)\cos(kx)\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{2n} a(m)\cos(mx) + 2a(0)\sum_{i=1}^{n}\cos(ix) + 2\sum_{k=1}^{2n} a(k)\sum_{i=1}^{n}\cos(ix)\cos(kx)$$
$$= a(0) + \sum_{m=1}^{n}(2a(0) + a(m))\cos(mx) + \sum_{m=n+1}^{2n} a(m)\cos(mx)$$
$$+ \sum_{k=1}^{2n} a(k)\sum_{i=1}^{n}(\cos((i-k)x) + \cos((i+k)x))$$
$$= a(0) + \sum_{m=1}^{n}(2a(0) + a(m))\cos(mx) + \sum_{m=n+1}^{2n} a(m)\cos(mx)$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=1}^{n} a(k)+\sum_{m=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-m} a(k)+\sum_{k=m+1}^{n+m}\right) a(k)\cos(mx)\\
&+\sum_{m=n}^{2n-1}\left(\sum_{k=m+1}^{2n} a(k)\right)\cos(mx)+\sum_{m=2}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m-1} a(k)\right)\cos(mx)\\
&+\sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{k=m-n}^{m-1} a(k)\right)\cos(mx)+\sum_{m=2n+1}^{3n}\left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k)\right)\cos(mx)\\
=&\sum_{k=0}^{n} a(k)+\left(2a(0)+a(1)+\sum_{k=1}^{n-1} a(k)+\sum_{k=2}^{n+1} a(k)\right)\cos(x)\\
&+\sum_{m=2}^{n-1}\left(2a(0)+a(m)+\sum_{k=1}^{n-m} a(k)+\sum_{k=m+1}^{n+m} a(k)+\sum_{k=1}^{m-1} a(k)\right)\cos(mx)\\
&+\left(2a(0)+a(m)+\sum_{k=m+1}^{2n} a(k)+\sum_{k=1}^{m-1} a(k)\right)\cos(nx)\\
&+\sum_{m=n+1}^{2n-1}\left(a(m)+\sum_{k=m+1}^{2n} a(k)+\sum_{k=m-n}^{m-1} a(k)\right)\cos(mx)\\
&+\left(a(2n)+\sum_{k=n}^{2n-1} a(k)\right)\cos(2nx)+\sum_{m=2n+1}^{3n}\left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k)\right)\cos(mx)\\
=&\sum_{k=0}^{n} a(k)+\left(\sum_{k=0}^{n-1} a(k)+\sum_{k=0}^{n+1} a(k)\right)\cos(x)\\
&+\sum_{m=2}^{n}\left\{\left(\sum_{k=0}^{n-m}+\sum_{k=0}^{n+m}\right) a(k)\right\}\cos(mx)+\sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{k=m-n}^{n+m} a(k)\right)\cos(mx)\\
&+\sum_{m=2n+1}^{3n}\left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k)\right)\cos(mx)\\
=&\sum_{k=0}^{n} a(k)+\sum_{m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{k=0}^{n-m}+\sum_{k=0}^{n+m}\right) a(k)\right\}\cos(mx)\\
&+\sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{k=m-n}^{n+m} a(k)\right)\cos(mx)+\sum_{m=2n+1}^{3n}\left(\sum_{k=m-n}^{2n} a(k)\right)\cos(mx).
\end{aligned}
$$

$\square$

Verifiquemos que de la **Proposición 2.1** se obtienen los resultados similares a los dados en [2, Proposición 3.5].

Teorema 2.2 *Si $n \geq 2$ y $x \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$D_n^3(x) = 3n^2 + 3n + 1 + 2\sum_{k=1}^{n}(3n^2 + 3n + 1 - k^2)\cos(kx) + T_{3n}(x),$$

donde $T_{3n} \in \mathbb{T}_{3n}$ y, siendo S_k la suma parcial de Fourier de orden k, se cumple que $S_k(T_{3n}) = 0$, para $0 \leq k \leq n$. En particular

$$\varrho_{n,3}(k) = \begin{cases} 3n^2+3n+1, & \text{si} \quad k=0, \\ 2(3n^2+3n+1-k^2), & \text{si} \quad 1 \le k \le n, \\ 2(2n+1)\big((2n+1)-k\big), & \text{si} \quad n < k \le 2n, \\ 2(2n+1)^2+n^2+n-3(2n+1)k+k^2, & \text{si} \quad 2n < k \le 3n. \end{cases} \tag{2.5}$$

Demostración. Utilizando los coeficientes descritos en (2.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a(k) &= \sum_{k=0}^{n} \varrho_{n,2}(k) = 2n+1+2\sum_{k=1}^{n}(2n+1-k) \\ &= 4n^2+4n+1-n^2-n = 3n^2+3n+1. \end{aligned}$$

Para las sumas en la parte derecha de la ecuación dada en la **Proposición 2.1** consideramos varios casos.

Si $1 \le m \le n$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n-m}+\sum_{k=0}^{n+m}\right)a(k) = 2(2n+1)+2\sum_{k=1}^{n-m}(2n+1-k)+2\sum_{k=1}^{n+m}(2n+1-k)$$

$$\begin{aligned} &= 2(2n+1)(1+n-m+n+m)-(n-m)(n-m+1)-(n+m)(n+m+1) \\ &= 2(2n+1)^2-(n-m)^2-(n-m)-(n+m)^2-(n+m) \\ &= 8n^2+8n+2-n^2+2mn-m^2-n^2-2nm-m^2-2n \\ &= 6n^2+6n+2-2m^2 = 2(3n^2+3n+1-m^2). \end{aligned}$$

Mientras que, para $n < m \le 2n$,

$$\sum_{k=m-n}^{n+m} a(k) = \left(\sum_{k=1}^{n+m}-\sum_{k=1}^{m-n-1}\right)a(k) = \left(\sum_{k=1}^{n+m}-\sum_{k=1}^{m-n-1}\right)2(2n+1-k)$$

$$\begin{aligned} &= 2(2n+1)(n+m-m+n+1)-(n+m)(n+m+1)+(m-n-1)(m-n) \\ &= 2(2n+1)^2-(n+m)^2-(m+n)+(m-n)^2-(m-n) \\ &= 2(2n+1)^2-n^2-2nm-m^2+m^2-2mn+n^2-2m \\ &= 2\big((2n+1)^2-m(2n-1)\big) = 2(2n+1)\big((2n+1)-m\big). \end{aligned}$$

Por último para $2n < m \le 3n$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m-n}^{2n} a(k) &= \left(\sum_{k=1}^{2n} - \sum_{k=1}^{m-n-1}\right) a(k) = \left(\sum_{k=1}^{2n} - \sum_{k=1}^{m-n-1}\right) 2(2n+1-k) \\
&= 2(2n+1)(2n-m+n+1) - 2n(2n+1) + (m-n)(m-n-1) \\
&= 2(2n+1)^2 - 2(2n+1)(m-n) - 2n(2n+1) + (m-n)^2 - (m-n) \\
&= 2(2n+1)^2 - 2n(2n+1) - 2(2n+1)(m-n) + m^2 - 2mn + n^2 - m + n \\
&= 2(2n+1)^2 + n^2 + n - 4mn - 2m + m^2 - 2mn - m \\
&= 2(2n+1)^2 + n^2 + n - 3m(2n+1) + m^2.
\end{aligned}$$

□

2.3 Cuarta potencia del núcleo de Dirichlet

Como $D_n^4 \in \mathbb{T}_{4n}$ y es un polinomio par, queremos encontrar los coeficientes $\varrho_{n,4}(k)$ tales que

$$D_n^4(x) = \sum_{k=0}^{4n} \varrho_{n,4}(k)\cos(kx). \tag{2.6}$$

Intentaremos representar a los coeficientes $\varrho_{n,4}(k)$ en términos de $\varrho_{n,3}(k)$ (ver (2.4)).

Lema 2.3 *Si $n \geq 2$ y $b(k) = \varrho_{n,3}(k)$ $(0 \leq k \leq 3n)$, para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3n} b(k) \sum_{i=1}^{n} \cos((i-k)x) &= \sum_{i=1}^{n} b(i) + \sum_{m=1}^{n} \left\{\left(\sum_{k=1}^{n-m} + \sum_{k=m+1}^{n+m}\right) b(k)\right\}\cos(mx) \\
&+ \sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{k=m+1}^{n+m} b(k)\right)\cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{3n-1}\left(\sum_{k=m+1}^{3n} b(k)\right)\cos(mx).
\end{aligned}$$

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3n} b(k) \sum_{i=1}^{n} \cos((i-k)x) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{3n} b(k)\cos((i-k)x)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i} b(k)\cos((i-k)x)\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i+1}^{3n} b(k)\cos((k-i)x)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=0}^{i-1} b(i-m)\cos(mx)\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{3n-i} b(i+m)\cos(mx)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= b(1) + \sum_{i=2}^{n} b(i) + \sum_{i=2}^{n} \left(\sum_{m=1}^{i-1} b(i-m)\cos(mx) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{m=1}^{n} b(i+m) + \sum_{m=n+1}^{2n-1} b(i+m) + \sum_{m=2n}^{3n-i} b(i+m) \right) \cos(mx) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} b(i) + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{i=m+1}^{n} b(i-m) \right) \cos(mx) + \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b(i+m) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{2n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} b(i+m) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2n}^{3n-1} \left(\sum_{i=1}^{3n-m} b(i+m) \right) \cos(mx) \\
&= \sum_{k=1}^{n} b(k) + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-m} b(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=m+1}^{n+m} b(k) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{2n-1} \left(\sum_{k=m+1}^{n+m} b(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2n}^{3n-1} \left(\sum_{k=m+1}^{3n} b(k) \right) \cos(mx) \\
&= \sum_{k=1}^{n} b(k) + \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n-m} + \sum_{k=m+1}^{n+m} \right) b(k) \right\} \cos(mx) + \left(\sum_{k=n+1}^{2n} b(k) \right) \cos(nx) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m+1}^{n+m} b(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{3n-1} \left(\sum_{k=m+1}^{3n} b(k) \right) \cos(mx) \\
&= \sum_{k=1}^{n} b(k) + \sum_{m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n-m} + \sum_{k=m+1}^{n+m} \right) b(k) \right\} \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m+1}^{n+m} b(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{3n-1} \left(\sum_{k=m+1}^{3n} b(k) \right) \cos(mx),
\end{aligned}
$$

donde consideramos el convenio establecido en (2.1). □

Lema 2.4 *Si $n \geq 2$ y $b(k) = \varrho_{n,3}(k)$ $(0 \leq k \leq 3n)$, para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3n} b(k) \left(\sum_{i=1}^{n} \cos((i+k)x) \right) &= \sum_{m=2}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m-1} b(k) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{m-1} b(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{k=m-n}^{m-1} b(k) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=3n+1}^{4n} \left(\sum_{k=m-n}^{3n} b(k) \right) \cos(mx).
\end{aligned}
$$

Demostración. Considerando las identidades siguientes

$$
\sum_{k=1}^{3n} b(k) \left(\sum_{i=1}^{n} \cos((i+k)x) \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{3n} b(k)\cos((i+k)x) \right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{m=i+1}^{3n+i} b(m-i)\cos(mx) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{m=i+1}^{n+1} + \sum_{m=n+2}^{2n} + \sum_{m=2n+1}^{3n} + \sum_{m=3n+1}^{3n+i} \right) b(m-i)\cos(mx) \right\} \\
&= \sum_{m=2}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{m-1} b(m-i) \right) \cos(mx) + \sum_{m=n+2}^{2n} \left(\sum_{i=1}^{n} b(m-i) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{i=1}^{n} b(m-i) \right) \cos(mx) + \sum_{m=3n+1}^{4n} \left(\sum_{i=m-3n}^{n} b(m-i) \right) \cos(mx) \\
&= \sum_{m=2}^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{m-1} b(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=n+2}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{m-1} b(k) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{k=m-n}^{m-1} b(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=3n+1}^{4n} \left(\sum_{k=m-n}^{3n} b(k) \right) \cos(mx) \\
&= \sum_{m=2}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m-1} b(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{m-1} b(k) \right) \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=2n+1}^{3n} \left(\sum_{k=m-n}^{m-1} b(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=3n+1}^{4n} \left(\sum_{k=m-n}^{3n} b(k) \right) \cos(mx),
\end{aligned}
$$

y se tiene el resultado anunciado. □

Proposición 2.2 *Si $n \geq 2$ y $b(k) = \varrho_{n,3}(k)$ $(0 \leq k \leq 3n)$, para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$
\begin{aligned}
D_n^4(x) &= \sum_{k=0}^{n} b(k) + \sum_{m=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n-m} + \sum_{k=0}^{n+m} \right) b(k) \right\} \cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=m-n}^{n+m} b(k) \right) \cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{4n} \left(\sum_{k=m-n}^{3n} b(k) \right) \cos(mx).
\end{aligned}
$$

Demostración. Se sigue de los **Lemas 2.3** y **2.4** que

$$
\begin{aligned}
D_n^4(x) = D_n^3(x) D_n(x) &= \left(\sum_{k=0}^{3n} b(k)\cos(kx) \right) \left(1 + 2\sum_{i=1}^{n} \cos(ix) \right) \\
&= \sum_{m=0}^{3n} b(m)\cos(mx) + 2\sum_{k=0}^{3n} b(k) \left(\sum_{i=1}^{n} \cos(ix)\cos(kx) \right) \\
&= \sum_{m=0}^{3n} b(m)\cos(mx) + 2b(0)\sum_{i=1}^{n} \cos(ix) + 2\sum_{k=1}^{3n} b(k) \sum_{i=1}^{n} \cos(ix)\cos(kx) \\
&= b(0) + \sum_{m=1}^{n} (2b(0) + b(m))\cos(mx) + \sum_{m=n+1}^{3n} b(m)\cos(mx)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \sum_{k=1}^{3n} b(k) \sum_{i=1}^{n} \Big(\cos((i-k)x) + \cos((i+k)x)\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} b(k) + \sum_{m=1}^{n} \big(2b(0) + b(m)\big)\cos(mx) + \sum_{m=n+1}^{3n} b(m)\cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{n} \left\{\left(\sum_{k=1}^{n-m} + \sum_{k=m+1}^{n+m}\right) b(k)\right\}\cos(mx) + \sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{k=m+1}^{n+m} b(k)\right)\cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=2n+1}^{3n-1}\left(\sum_{k=m+1}^{3n} b(k)\right)\cos(mx) + \sum_{m=2}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m-1} b(k)\right)\cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{k=m-n}^{m-1} b(k)\right)\cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{3n}\left(\sum_{k=m-n}^{m-1} b(k)\right)\cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=3n+1}^{4n}\left(\sum_{k=m-n}^{3n} b(k)\right)\cos(mx) \\
&= \sum_{k=0}^{n} b(k) + \left(2b(0) + b(1) + \sum_{k=1}^{n-1} b(k) + \sum_{k=2}^{n+1} b(k)\right)\cos(x) \\
&\quad + \sum_{m=2}^{n}\left(2b(0) + b(m) + \sum_{k=1}^{n-m} b(k) + \sum_{k=m+1}^{n+m} b(k) + \sum_{k=1}^{m-1} b(k)\right)\cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{2n}\left(b(m) + \sum_{k=m+1}^{n+m} b(k)\right)\cos(mx) + \sum_{k=m-n}^{m-1} b(k)\cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=2n+1}^{3n-1}\left(b(m) + \sum_{k=m+1}^{3n} b(k)\right)\cos(mx) + \sum_{k=m-n}^{m-1} b(k)\cos(mx) \\
&\quad + \left(b(3n) + \sum_{k=2n}^{3n-1} b(k)\right)\cos(3n) + \sum_{m=3n+1}^{4n}\left(\sum_{k=m-n}^{3n} b(k)\right)\cos(mx) \\
&= \sum_{k=0}^{n} b(k) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} b(k) + \sum_{k=0}^{n+1} b(k)\right)\cos(x) \\
&\quad + \sum_{m=2}^{n}\left\{\left(\sum_{k=0}^{n-m} + \sum_{k=0}^{n+m}\right) b(k)\right\}\cos(mx) + \sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{k=m-n}^{n+m} b(k)\right)\cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=2n+1}^{3n}\left(\sum_{k=m-n}^{3n} b(k)\right)\cos(mx) + \sum_{m=3n+1}^{4n}\left(\sum_{k=m-n}^{3n} b(k)\right)\cos(mx) \\
&= \sum_{k=0}^{n} b(k) + \sum_{m=1}^{n}\left\{\left(\sum_{k=0}^{n-m} + \sum_{k=0}^{n+m}\right) b(k)\right\}\cos(mx) \\
&\quad + \sum_{m=n+1}^{2n}\left(\sum_{k=m-n}^{n+m} b(k)\right)\cos(mx) + \sum_{m=2n+1}^{4n}\left(\sum_{k=m-n}^{3n} b(k)\right)\cos(mx).
\end{aligned}
$$

Luego se tiene el resultado anunciado. $\square$

En lo que sigue denotamos

$$R(n) = 3n^2 + 3n + 1 - \frac{n(n+1)}{3}.$$

En la demostración del teorema siguiente se muestran todos los coeficientes de Fourier hasta el grado $4n$, pero para nuestros objetivos sólo utilizaremos los coeficientes de grado menor o igual a n.

Teorema 2.3 *Si $n \geq 3$ y $x \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$D_n^4(x) = (2n+1)R(n) + 2(2n+1)\sum_{m=1}^{n}\left(R(n) - m^2\right)\cos(mx) + T_{4n}(x),$$

donde $T_{4n} \in \mathbb{T}_{4n}$ y, siendo S_k la suma parcial de Fourier de orden k, se cumple que $S_k(T_{4n}) = 0$, para $0 \leq k \leq n$. En particular

$$\varrho_{n,4}(k) = (2n+1)\left(3n^2 + 3n + 1 - \frac{n(n+1)}{3}\right), \qquad \text{si} \quad k = 0,$$

y

$$\varrho_{n,4}(k) = 2(2n+1)\left(3n^2 + 3n + 1 - \frac{n(n+1)}{3} - k^2\right), \quad \text{si} \quad 1 \leq k \leq n.$$

Demostración. En primer lugar

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} b(k) = \sum_{k=0}^{n} \varrho_{n,3}(k) &= 3n^2 + 3n + 1 + 2\sum_{k=1}^{n}(3n^2 + 3n + 1 - k^2) \\ &= (2n+1)(3n^2 + 3n + 1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}.\end{aligned}$$

Además, para $1 \leq m \leq n$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n-m} + \sum_{k=0}^{n+m}\right) b(k) &= 2b(0) + \left(\sum_{k=1}^{n-m} + \sum_{k=1}^{n+m}\right) b(k) \\ &= 2b(0) + 2\sum_{k=1}^{n-m}(3n^2 + 3n + 1 - k^2) + 2\sum_{k=1}^{n+m}(3n^2 + 3n + 1 - k^2) \\ &= 2b(0) + (2(n-m) + 2(n+m))(3n^2 + 3n + 1) - 2\sum_{k=1}^{n-m} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n+m} k^2 \\ &= 2b(0) + 4n(3n^2 + 3n + 1) - \frac{(n-m)(n-m+1)(2(n-m)+1)}{3} \\ &\quad - \frac{(n+m)(n+m+1)(2(n+m)+1)}{3}.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
&(n-m)(n-m+1)(2(n-m)+1)+(n+m)(n+m+1)(2(n+m)+1)\\
&\quad= (n-m)(2(n-m)^2+3(n-m)+1)+(n+m)(2(n+m)^2+3(n+m)+1)\\
&\quad= 2(n-m)^3+3(n-m)^2+n-m+2(n+m)^3+3(n+m)^2+n+m\\
&\quad= 2(n-m)^3+2(n+m)^3+3(n-m)^2+3(n+m)^2+2n\\
&\quad= 4n^3+12nm^2+6n^2+6m^2+2n=4n^3+6n^2+2n+12nm^2+6m^2.
\end{aligned}$$

Se tiene que, para $1 \le m \le n$,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n-m}+\sum_{k=0}^{n+m}\right)b(k) &= 2(2n+1)(3n^2+3n+1)-2\frac{2n^3+3n^2+n+3(2n+1)m^2}{3}\\
&= 2(2n+1)(3n^2+3n+1)-2\frac{n(n+1)(2n+1)+3(2n+1)m^2}{3}\\
&= 2(2n+1)\Big(3n^2+3n+1-\frac{n(n+1)+3m^2}{3}\Big).
\end{aligned}$$

Mientras que, para $n < m \le 2n$,

$$\sum_{k=m-n}^{n+m} b(k) = \left(\sum_{k=1}^{n+m}-\sum_{k=1}^{m-n-1}\right)b(k) = \left(\sum_{k=1}^{n+m}-\sum_{k=1}^{m-n-1}\right)2(2n+1)\Big((2n+1)-k\Big)$$

$$\begin{aligned}
&= 2(2n+1)^2(n+m-m+n+1)-(2n+1)\Big((n+m)(n+m+1)-(m-n-1)(m-n)\Big)\\
&= 2(2n+1)^3-(2n+1)\Big((n+m)^2+(m+n)-(m-n)^2+(m-n)\Big)\\
&= (2n+1)\Big(2(2n+1)^2-(n+m)^2-(m+n)+(m-n)^2-(m-n)\Big)\\
&= (2n+1)\Big(2(2n+1)^2-n^2-2nm-m^2+m^2-2nm+n^2-2m\Big)\\
&= 2(2n+1)\Big((2n+1)^2-m(2n+1)\Big)=2(2n+1)^2\Big((2n+1)-m\Big).
\end{aligned}$$

Para $2n < m \le 4n$,

$$\sum_{k=m-n}^{3n} b(k) = \left(\sum_{k=1}^{3n}-\sum_{k=1}^{m-n-1}\right)b(k) = \left(\sum_{k=1}^{3n}-\sum_{k=1}^{m-n-1}\right)\Big(2(2n+1)^2+n^2+n-3(2n+1)k+k^2\Big)$$

$$\begin{aligned}
&= \Big(2(2n+1)^2+n^2+n\Big)(3n-m+n+1)-3(2n+1)\left(\frac{3n(3n+1)-(m-n-1)(m-n)}{2}\right)\\
&\quad+\frac{3n(3n+1)(6n+1)-(m-n-1)(m-n)(2m-2n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Como

$$3(2n+1)\Big(3n(3n+1)-(m-n-1)(m-n)\Big) = -3(2n+1)\Big(3n(3n+1)-(m-n)^2+(m-n)\Big)$$

$$= 3(2n+1)\Big(9n^2+3n-m^2+2nm-n^2+m-n\Big) = -3(2n+1)\Big(8n^2+2n+2nm+m-m^2\Big)$$
$$= 3(2n+1)\Big(2n(4n+1)+(2n+1)m-m^2\Big).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
&3n(3n+1)(6n+1)-(m-n-1)(m-n)(2m-2n-1)\\
&= 3n(3n+1)(6n+1)-\Big((m-n)^2-(m-n)\Big)(2m-2n-1)\\
&= 3n(3n+1)(6n+1)-\Big(m^2-2nm+n^2-m+n\Big)(2m-2n-1)\\
&= 3n(3n+1)(6n+1)-\Big(n^2+n-(2n-1)m+m^2\Big)(-2n-1+2m).
\end{aligned}$$

Denotemos por $g(k)=\varrho_{n,4}(k)$ para $2n<k\leq 4n$. Se sigue que

$$\begin{aligned}
g(k) = \sum_{k=m-n}^{3n} b(k) &= \Big(2(2n+1)^2+n^2+n\Big)(3n+n+1-m)\\
&\quad -\frac{3(2n+1)\Big(2n(4n+1)+(2n+1)m-m^2\Big)}{2}\\
&\quad +\frac{3n(3n+1)(6n+1)-\Big(n^2+n-(2n-1)m+m^2\Big)(-2n-1+2m)}{6}.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Construcción de nuevos operadores

Se definirá una clase de nuevos operadores que denotaremos por Q_{4n} (ver (3.1)). Las propiedades aproximativas de estos operadores y los resultados principales se presentarán en la **Sección 3.3** y **3.4** respectivamente. Pero antes necesitamos estudiar algunas de las propiedades alebraicas relacionadas con ellos. Para esto, en la **Sección 3.1** se introducen unos operadores auxiliares $M_{6n,i}$ que nos ayudaran a simplificar las pruebas. En particular, en la **Proposición 3.1** se muestra la representación de los operadores Q_{4n} en términos de los $M_{6n,i}$.

3.1 Operador Q_{4n}

Para $r \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$, denotemos a los puntos equidistantes $x_{r,k}$ como

$$x_{r,k} = \frac{2k\pi}{(r+1)}.$$

En este trabajo, para $f \in C_{2\pi}$, estudiaremos propiedades aproximativas de los operadores

$$Q_{4n}(f,x) = C_n \sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k}) \left(\mathscr{D}_n^2(x - x_{6n,k}) + \mathscr{D}_n^3(x - x_{6n,k}) + \mathscr{D}_n^4(x - x_{6n,k})\right), \quad (3.1)$$

donde

$$C_n = \frac{(2n+1)^3}{s(n)(6n+1)}, \qquad s(n) = (2n+1)^2 + u(n) + R(n), \quad (3.2)$$

$$R(n) = u(n) - \frac{n(n+1)}{3} \qquad \text{y} \qquad u(n) = 3n^2 + 3n + 1. \quad (3.3)$$

Para simplificar el estudio también consideramos los operadores auxiliares

$$M_{6n,2}(f,x)=\frac{1}{(2n+1)(6n+1)}\sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k})D_n^2(x-x_{6n,k}), \tag{3.4}$$

$$M_{6n,3}(f,x)=\frac{1}{u(n)}\frac{1}{(6n+1)}\sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k})D_n^3(x-x_{6n,k}), \tag{3.5}$$

y

$$M_{6n,4}(f,x)=\frac{1}{(2n+1)R(n)}\frac{1}{(6n+1)}\sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k})D_n^4(x-x_{6n,k}). \tag{3.6}$$

3.2 Algunas representaciones

Las siguientes proposiciones nos seran de utilidad para obtener el resultado principal.

Proposición 3.1 *Para $f\in C_{2\pi}$, $x\in[-\pi.\pi]$ y cada $n\geq 2$ se tiene que*

$$s(n)Q_{4n}(f,x)=(2n+1)^2M_{6n,2}(f,x)+u(n)M_{6n,3}(f,x)+R(n)M_{6n,4}(f,x).$$

Demostración. Basta ver que

$$\begin{aligned}
&s(n)Q_{4n}(f,x)\\
&\quad= s(n)C_n\sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k})\left(\mathscr{D}_n^2(x-x_{6n,k})+\mathscr{D}_n^3(x-x_{6n,k})+\mathscr{D}_n^4(x-x_{6n,k})\right)\\
&\quad=\frac{(2n+1)^3}{(6n+1)}\Bigg(\sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k})\frac{D_n^2(x-x_{6n,k})}{(2n+1)^2}+\sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k})\frac{D_n^3(x-x_{6n,k})}{(2n+1)^3}\\
&\qquad\qquad+\sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k})\frac{D_n^4(x-x_{6n,k})}{(2n+1)^4}\Bigg)\\
&\quad=\frac{(2n+1)}{(6n+1)}\sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k})D_n^2(x-x_{6n,k})+\frac{1}{(6n+1)}\sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k})D_n^3(x-x_{6n,k})\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{(2n+1)(6n+1)}\sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k})D_n^4(x-x_{6n,k})\\
&\quad=(2n+1)^2M_{6n,2}(f,x)+u(n)M_{6n,3}(f,x)+R(n)M_{6n,4}(f,x).
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.2 *Si $x \in [-\pi.\pi]$, $n \geq 2$, $T \in \mathbb{T}_n$ y $M_{6n,2}$ está definido por* (3.4)*, se cumple que*

$$M_{6n,2}(T,x) = T(x) - \frac{D\widetilde{T}(x)}{2n+1},$$

$$M_{6n,2}(D^2T,x) = D^2T(x) - \frac{D^3\widetilde{T}(x)}{2n+1}$$

y

$$M_{6n,2}(D\widetilde{T},x) = D\widetilde{T}(x) + \frac{D^2T(x)}{2n+1}.$$

Demostración. a) Si $T \in \mathbb{T}_n$ y D_n es el núcleo de Dirichlet, se sabe que $TD_n^2 \in \mathbb{T}_{3n} \subset \mathbb{T}_{6n}$ y considerando la **Proposición 1.3**, obtenemos

$$\frac{1}{(6n+1)}\sum_{k=0}^{6n} T(x_{6n,k})D_n^2(x-x_{6n,k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(t)D_n^2(x-t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x+t)D_n^2(t)\,dt.$$

En particular, si T está dado por (1.10), se sigue que

$$\begin{aligned} T(x+t) &= a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j\cos(j(x+t)) + b_j\sin(j(x+t)) \\ &= a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j\Big(\cos(jx)\cos(jt) - \sin(jx)\sin(jt)\Big) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} b_j\Big(\sin(jx)\cos(jt) + \cos(jx)\sin(jt)\Big). \end{aligned}$$

De ahí que

$$T(x+t) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} A_j(T,x)\cos(jt) + \sum_{j=1}^{n}\widetilde{A}_j(T,x)\sin(jt). \tag{3.7}$$

Considerando que $D_n^2(x)$ es un polinomio trigonométrico par y el **Teorema 2.1**, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t)D_n^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(a_0 + \sum_{j=1}^{n} A_j(T,x)\cos(jt)\Big)D_n^2(t)\,dt$$

$$= a_0\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n^2(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n} A_j(T,x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jt)D_n^2(t)\,dt$$

$$= a_0(2n+1) + \sum_{j=1}^{n} A_j(T,x)\frac{2n+1-j}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(jt)\,dt$$

$$= a_0(2n+1) + \sum_{j=1}^{n} A_j(T,x)(2n+1) - \sum_{j=1}^{n} jA_j(T,x)$$

$$= (2n+1)T(x) - \sum_{j=1}^{n} jA_j(T,x) = (2n+1)T(x) - D\widetilde{T}(x),$$

donde usamos la ecuacion (1.7) y el **Lema 1.1**. Concluimos que

$$M_{6n,2}(T,x) = \frac{1}{(2n+1)(6n+1)} \sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k})D_n^2(x - x_{6n,k}) = T(x) - \frac{D\widetilde{T}(x)}{2n+1}.$$

b) Como $D^2T(x) \in \mathbb{T}_n$, se sigue de *a)* y del **Lema 1.1** que,

$$M_{6n,2}(D^2T,x) = D^2T(x) - \frac{D(\widetilde{D^2T(x)})}{2n+1} = D^2T(x) - \frac{D^3\widetilde{T}(x)}{2n+1}.$$

c) Por otro lado, recordando que $W = D\widetilde{T}(x)$ y aplicando el **Lema 1.1** se tiene que

$$M_{6n,2}(D\widetilde{T},x) = W(x) - \frac{D\widetilde{W}(x)}{2n+1} = D\widetilde{T}(x) + \frac{D^2T(x)}{2n+1}.$$

□

Proposición 3.3 *Si $x \in [-\pi.\pi]$, $n \geq 2$, $T \in \mathbb{T}_n$, y $M_{6n,3}$ está definido por* (3.5)*, se cumple que*

$$M_{6n,3}(T,x) = T(x) + \frac{D^2T(x)}{u(n)},$$

$$M_{6n,3}(D^2T,x) = D^2T(x) + \frac{D^4T(x)}{u(n)}$$

y

$$M_{6n,3}(D\widetilde{T},x) = D\widetilde{T}(x) + \frac{D^3\widetilde{T}(x)}{u(n)}.$$

Demostración. a) Como antes, si $T \in \mathbb{T}_n$, $T_nD_n^3 \in \mathbb{T}_{4n} \subset \mathbb{T}_{6n}$. Considerando la **Proposición 1.3**, obtenemos

$$\frac{1}{(6n+1)} \sum_{k=0}^{6n} T(x_{6n,k})D_n^3(x - x_{6n,k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x+t)D_n^3(t)dt.$$

En particular, si T está dado por (1.10), se sigue de la ecuación (3.7), del **Teorema 2.2** y del **Lema 1.1** que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x+t)D_n^3(t)dt = a_0\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n^3(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_j(T,x)\cos(jt)D_n^3(t)dt$$

$$= a_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^3(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j(T,x)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) D_n^3(t)dt$$

$$= (3n^2 + 3n + 1) + \sum_{j=1}^{n} (3n^2 + 3n + 1 - j^2) A_j(T,x)$$

$$= (3n^2 + 3n + 1) T(x) + D^2 T(x).$$

Considerando que $u(n) = 3n^2 + 3n + 1$ (ver (3.3)), concluimos que

$$M_{6n,3}(T,x) = \frac{1}{u(n)} \frac{1}{(6n+1)} \sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k}) D_n^3(x - x_{6n,k}) = T(x) + \frac{D^2 T(x)}{u(n)}.$$

b) Como $D^2 T(x) \in \mathbb{T}_n$, se sigue de *a)* y del **Lema 1.1** que,

$$M_{6n,3}(D^2 T, x) = D^2 T(x) + \frac{D^4 T(x)}{u(n)}.$$

c) Por otro lado, recordando que $W = D\widetilde{T}(x)$ y aplicando el **Lema 1.1** se tiene que

$$M_{6n,3}(D\widetilde{T}, x) = W(x) + \frac{D^2 W(x)}{u(n)} = D\widetilde{T}(x) + \frac{D^3 \widetilde{T}(x)}{u(n)}.$$

□

Proposición 3.4 *Si* $x \in [-\pi.\pi]$, $n \geq 3$, $T \in \mathbb{T}_n$, *y* $M_{6n,4}$ *está definido por* (3.6), *se cumple que*

$$M_{6n,4}(T,x) = T(x) + \frac{D^2 T(x)}{R(n)},$$

$$M_{6n,4}(D^2 T, x) = D^2 T(x) + \frac{D^4 T(x)}{R(n)}$$

y

$$M_{6n,4}(D\widetilde{T}, x) = D\widetilde{T}(x) + \frac{D^3 \widetilde{T}(x)}{R(n)}.$$

Demostración. a) Como $T \in \mathbb{T}_n$, $T_n D_n^4 \in \mathbb{T}_{5n} \subset \mathbb{T}_{6n}$. Similarmente a como se hizo en las demostraciones de las **Proposiciones 3.2**, **3.3** y utilizando el **Teorema 2.3** y el **Lema 1.1**, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x+t) D_n^4(t)dt = a_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^4(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j(T,x)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) D_n^4(t)dt$$

$$= a_0(2n+1)R(n) + (2n+1) \sum_{j=1}^{n} (R(n) - j^2) A_j(T,x)$$

$$= (2n+1)R(n)T(x) + (2n+1)D^2T(x).$$

Concluimos que

$$M_{6n,4}(T,x) = \frac{1}{(2n+1)R(n)}\frac{1}{(6n+1)}\sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k})D_n^4(x - x_{6n,k}) = T(x) + \frac{D^2T(x)}{R(n)}.$$

b) Como $D^2T(x) \in \mathbb{T}_n$, se sigue de *a)* y del **Lema 1.1** que,

$$M_{6n,4}(D^2T,x) = D^2T(x) + \frac{D^4T(x)}{R(n)}.$$

c) Por otro lado, recordando que $W = D\widetilde{T}(x)$ y aplicando el **Lema 1.1** se tiene que

$$M_{6n,4}(D\widetilde{T},x) = W(x) + \frac{D^2W(x)}{R(n)} = D\widetilde{T}(x) + \frac{D^3\widetilde{T}(x)}{R(n)}.$$

□

En la **Sección 3.4** se verificará que el operador descrito en (3.1) tiene buenas propiedades aproximativas, pero antes, necesitamos estudiar algunos resultados en las **Proposiciones 3.5** y **3.6**.

Proposición 3.5 *Si $n \geq 2$, Q_{4n} está definido por* (3.1) *y $T \in \mathbb{T}_n$, se tiene que*

$$Q_{4n}T - T = -\frac{(2n+1)}{s(n)}D\widetilde{T} + \frac{2}{s(n)}D^2T,$$

donde $s(n)$ está definido en (3.2).

Demostración. Se sigue de las **Proposiciones 3.1, 3.2, 3.3** y **3.4** que

$$\begin{aligned}
s(n)Q_{4n}(T,x) &= (2n+1)^2M_{6n,2}(T,x) + u(n)M_{6n,3}(T,x) + R(n)M_{6n,4}(T,x)\\
&= (2n+1)^2\Big(T(x) - \frac{1}{(2n+1)}D\widetilde{T}(x)\Big) + u(n)\Big(T(x) + \frac{1}{u(n)}D^2T(x)\Big)\\
&\qquad + R(n)\Big(T(x) + \frac{1}{R(n)}D^2T(x)\Big)\\
&= \Big((2n+1)^2 + u(n) + R(n)\Big)T(x) - (2n+1)D\widetilde{T}(x) + 2D^2T(x)\\
&= s(n)T(x) - (2n+1)D\widetilde{T}(x) + 2D^2T(x),
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado las ecuaciónes (3.2). Dividiendo por $s(n)$ se obtiene el resultado deseado. □

Para el operador Q denotamos $Q^2(f) = Q(Q(f))$.

Proposición 3.6 *Si $n \in \mathbb{N}$, Q_{4n} esta definido por* (3.1) *y $T \in \mathbb{T}_n$, entonces*

$$Q_{4n}^2 T - 2Q_{4n}T + T = -\frac{(2n+1)^2}{s^2(n)} D^2 T + \frac{2(2n+1)}{s^2(n)}\left(D^3 T - D^3 \widetilde{T}\right) + \frac{4D^4 T}{s^2(n)}.$$

Demostración. Denotamos $W = D\widetilde{T}$ y $Z_n(T) = 2D^2 T - (2n+1)W$. Si escribimos la **Proposition 3.5** en la forma $Q_{4n}T = T + Z_n(T)/s(n)$, de las **Proposiciones 3.2, 3.3** y **3.4** obtenemos

$$\begin{aligned}
Q_{4n}^2 T = Q_{4n}(Q_{4n}T) &= \frac{(2n+1)^2}{s(n)} M_{6n,2}\left(T + \frac{Z_n(T)}{s(n)}\right) \\
&\quad + \frac{u(n)}{s(n)} M_{4n,3}\left(T + \frac{Z_n(T)}{s(n)}\right) + \frac{R(n)}{s(n)} M_{6n,4}\left(T + \frac{Z_n(T)}{s(n)}\right) \\
&= Q_{4n}T + \frac{(2n+1)^2}{s^2(n)} M_{6n,2}\left(Z_n(T)\right) + \frac{u(n)}{s^2(n)} M_{4n,3}\left(Z_n(T)\right) \\
&\quad + \frac{R(n)}{s^2(n)} M_{6n,4}(Z_n(T)) \\
&= Q_{4n}T + \frac{(2n+1)^2}{s^2(n)}\left(2D^2T - \frac{2D^3\widetilde{T}}{(2n+1)} - (2n+1)\left(D\widetilde{T} + \frac{D^2T}{2n+1}\right)\right) \\
&\quad + \frac{u(n)}{s^2(n)}\left(2D^2T + \frac{2D^4T}{u(n)} - (2n+1)\left(D\widetilde{T} - \frac{D^3T}{u(n)}\right)\right) \\
&\quad + \frac{R(n)}{s^2(n)}\left(2D^2T + \frac{2D^4T}{R(n)} - (2n+1)\left(D\widetilde{T} - \frac{D^3T}{R(n)}\right)\right) \\
&= Q_{4n}T + \frac{2D^2T}{s(n)} - \frac{2(2n+1)}{s^2(n)} D^3\widetilde{T} - \frac{(2n+1)}{s(n)} D\widetilde{T} \\
&\quad - \frac{(2n+1)^2}{s^2(n)} D^2T + \frac{4D^4T}{s^2(n)} + \frac{2(2n+1)}{s^2(n)} D^3T.
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}
Q_{4n}^2(T) - 2Q_{4n}(T) + T &= (Q_{4n}^2(T) - Q_{4n}(T)) + (T - Q_{4n}(T)) \\
&= \frac{2D^2T}{s(n)} - \frac{2(2n+1)}{s^2(n)} D^3\widetilde{T} - \frac{(2n+1)}{s(n)} D\widetilde{T} - \frac{(2n+1)^2}{s^2(n)} D^2T \\
&\quad + \frac{4D^4T}{s^2(n)} + \frac{2(2n+1)}{s^2(n)} D^3T + \frac{(2n+1)}{s(n)} D\widetilde{T} - \frac{2}{s(n)} D^2T \\
&= -\frac{(2n+1)^2}{s^2(n)} D^2T + \frac{2(2n+1)}{s^2(n)}\left(D^3T - D^3\widetilde{T}\right) + \frac{4D^4T}{s^2(n)}.
\end{aligned}$$

□

3.3 Propiedades aproximativas

Para obtener el resultado principal relacionado con los operadores Q_{4n} necesitamos previamente estudiar su comportamiento sobre los polinomios trigonométricos de grado no mayor que n.

Proposición 3.7 *Para cada $n \geq 2$ se tiene que*

$$Q_{4n}(1,x) = 1.$$

Demostración. Se sigue de las **Proposiciones 3.1, 3.2, 3.3** y **3.4** que

$$s(n)Q_{4n}(1,x) = (2n+1)^2 M_{5n,2}(1,x) + u(n)M_{5n,3}(1,x) + R(n)M_{5n,4}(1,x)$$

$$= (2n+1)^2 + u(n) + R(n) = s(n).$$

Se tiene el resultado ya que $s(n) \neq 0$. □

Recordemos que en $C_{2\pi}$ estamos considerando la norma del supremo. Además, un operador lineal $L: C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ se dice positivo si, para toda $x \in [-\pi,\pi]$ y cualquier $f \in C_{2\pi}$, $L(f,x) \geq 0$ siempre que $f(x) \geq 0$.

Proposición 3.8 *Si $n \geq 2$, el operador Q_{4n} definido por* (3.1) *es positivo. Además, si $f \in C_{2\pi}$, se tiene que*

$$\|Q_{4n}(f)\| \leq \|f\|$$

y la igualdad se alcanza en la función constante $f(x) = 1$.

Demostración. Como $|\mathscr{D}_n(x)| \leq 1$ para $x \in [-\pi,\pi]$, $1 + \mathscr{D}_n(x) \geq 0$. Luego

$$\mathscr{D}_n^4(x) + \mathscr{D}_n^3(x) + \mathscr{D}_n^2(x) = \mathscr{D}_n^2(x)(\mathscr{D}_n^2(x) + \mathscr{D}_n(x) + 1) \geq \mathscr{D}_n^2(x)\mathscr{D}_n^2(x) \geq 0.$$

Esto es suficiente para verificar que Q_{4n} es un operador positivo. De hecho, si $f \in C_{2\pi}$ y $f(x) \geq 0$,

$$Q_{4n}(f,x) = C_n \sum_{k=0}^{6n} f(x_{6n,k}) \left(\mathscr{D}_n^2(x - x_{6n,k}) + \mathscr{D}_n^3(x - x_{6n,k}) + \mathscr{D}_n^4(x - x_{6n,k})\right),$$

$$\geq C_n \sum_{k=0}^{6n} \left(\mathscr{D}_n^2(x - x_{6n,k}) + \mathscr{D}_n^3(x - x_{6n,k}) + \mathscr{D}_n^4(x - x_{6n,k})\right) \geq 0.$$

Por otro lado, para toda $x \in [-\pi,\pi]$,

$$
\begin{aligned}
| Q_{4n}(f,x) | &\leq \| f \| C_n \sum_{k=0}^{6n} \left(\mathscr{D}_n^2(x - x_{6n,k}) + \mathscr{D}_n^3(x - x_{6n,k}) + \mathscr{D}_n^4(x - x_{6n,k}) \right) \\
&= \| f \| Q_{4n}(1,x) = \| f \|,
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado la **Proposición 3.7**. Además se sigue de la misma proposición que 1 es la mejor constante posible. □

3.4 Resultados principales

En esta última sección, se prueba si el operador (3.1) que hemos construido tiene buenas propiedades aproximatívas tomando en cuenta las definiciones descritas para el menor error en (1.24) y el módulo de continuidad en (1.13).

Teorema 3.1 *Si $n \geq 2$, Q_{4n} está definido por* (3.1)*, y $f \in C_{2\pi}$, se cumple que*

$$
\| Q_{4n}(f) - f \| \leq E_n(f) + \frac{4}{7}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right).
$$

Demostración. Fijemos $f \in C_{2\pi}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $T_n \in \mathbb{T}_n$ el polinomio de la mejor aproximación para f en $\mathbb{T}_n$. Considerando en el orden indicado las **Proposiciones 3.8, 3.5, 1.4**, los **Teoremas 1.2 y 1.1**, y la **Proposición 1.5**, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\| Q_{4n}(f) - f \| &= \| Q_{4n}(f - T_n) - f + T_n + Q_{4n}(T_n) - T_n \| \\
&\leq 2\| f - T_n \| + \| Q_{4n}(T_n) - T_n \| \\
&\leq 2E_n(f) + \frac{(2n+1)}{s(n)} \| D\widetilde{T}_n \| + \frac{2}{s(n)} \| D^2 T_n \| \\
&\leq 2E_n(f) + \frac{(2n+1)(n+1)}{s(n)} \| (I - \sigma_n) T_n \| + \frac{2}{s(n)} \| D^2 T_n \| \\
&\leq 2E_n(f) + \frac{(2n+1)(n+1)}{s(n)} \frac{(3+2\sqrt{2})}{4} \omega_2\left(T_n, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) + \frac{2}{s(n)} \| D^2 T_n \| \\
&\leq 2E_n(f) + \frac{(2n+1)(n+1)}{s(n)} \frac{(3+2\sqrt{2})}{4} \left(\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) + 4\| f - T_n \| \right) \\
&\qquad + \frac{2n^2}{s(n)} \left(\frac{1}{4}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right) + \| f - T_n \| \right).
\end{aligned}
$$

Nótese que

$$
(2n+1)^2 + (3n^2 + 3n + 1) + R(n) = 7n^2 + 7n + 2 + 3n^2 + 3n + 1 - \frac{n(n+1)}{3}
$$

$$= 10n^2 + 10n + 3 - \frac{n(n+1)}{3} = \frac{1}{3}\Big(30n^2 + 30n + 9 - n^2 - n\Big)$$
$$= \frac{1}{3}\Big(29n^2 + 20n + 9\Big)$$

y, para $n > 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{(2n+1)(n+1)}{s(n)} &= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)^2 + (3n^2+3n+1) + R(n)} \\
&= \frac{3(2n+1)(n+1)}{29n^2+20n+9} = \frac{3(2n^2+3n+1)}{29n^2+20n+9} \le \frac{3(2n^2+3n+1)}{27n^2+18n+9} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{9n^2+6n+3} < \frac{2n^2+3n+1}{6n^2+9n+3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Además

$$\frac{n^2}{s(n)} = \frac{3n^2}{29n^2+20n+9} < \frac{3}{29}.$$

Se concluye de lo anterior que

$$\begin{aligned}
\|Q_{4n}(f) - f\| &\le 2E_n(f) + \frac{(3+2\sqrt{2})}{12}\left(\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) + 4\|f - T_n\|\right) \\
&\quad + \frac{6n^2}{29}\left(\frac{1}{4}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) + \|f - T_n\|\right) \\
&\le 2E_n(f) + \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{12} + \frac{3}{58}\right)\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{(3+2\sqrt{2}}{3} + \frac{6}{29}\right)E_n(f) \\
&\le 2E_n(f) + \left(\frac{6}{12} + \frac{3}{58}\right)\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) + \left(1 + \frac{6}{29}\right)E_n(f) \\
&\le 4E_n(f) + \frac{32}{58}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) \le 4E_n(f) + \frac{4}{7}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Esto prueba el resultado anunciado. □

Observación 3.1 El error $E_n(f)$ en el **Teorema 3.1** se puede estimar en términos del módulo de continuidad. En efecto, se sigue del **Teorema 1.3** que

$$\|Q_{4n}(f) - f\| \le 10\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) + \frac{4}{7}\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) \le 11\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right).$$

Conclusiones

Basandonos en los trabajos realizados en [12], [19] y recientemente en [2], se logró obtener un operador al cual hemos llamado Q_{4n} que mejora la convergencia para funciones en $C_{2\pi}$ mediante la cuarta potencia del núcleo de Dirichlet.

El resultado obtenido puede ser mejorado si se acota con el módulo de continuidad de segundo orden definido en (1.13), además, aún podrían considerarse potencias del núcleo de Dirichlet mayores a 4 o construir combinaciones lineales con las potencias ya obtenidas con mejores propiedades aproximativas.

En esta tesis se encontraron operadores para funciones en $C_{2\pi}$, sin embargo, existen otros métodos que pudieran ser estudiados para otro tipo de funciones. Nos queda por obetener un resultado inverso el cual estudiaremos despues.

¿Se podrán modificar los resultados obtenidos en está tesis para el caso en el que se quieran aproximar las derivadas de una función derivable?

Un argumento interesante a esta pregunta sería utilizar la fórmula de interpolación de Riesz.

Se elaboró un artículo en inglés utilizando resultados de la tesis, el cual se envió para su publicación en la revista "Serdica Mathematical Journal". Además, algunos resultados aquí obtenidos han sido aceptados para formar parte en un Capítulo del libro "Matemáticas y sus aplicaciones 22".

Bibliografía

[1] R. Bojanic and O. Shisha, *Approximation of continuous, periodic functions by discrete linear positive operators*, J. Approximation Theory 11 (1974), 231–235.

[2] J. Bustamante, *Powers of Dirichlet kernels and approximation by discrete linear operators I: direct results*, Constructive Math. Anal., 5 (2) (2022), 105-118.

[3] J. Bustamante, R. Cruz Castillo y A. Fraguela, *A regularization method for polynomial approximation of functions from their approximate values at nodes*, Journal of Numerical Mathematics, 17(2), 2009, 97-118 (ISSN 1570-2820).

[4] J. Bustamante and L. Flores-de-Jesús, *Strong converse inequalities and quantitative Voronovskaya-type theorems for trigonometric Fejér sums*, Constr. Math. Anal., 3 (2) (2020), 53-63.

[5] P. L. Butzer, and R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation*, Academic Press, New-York and London, 1971.

[6] P. L. Butzer and R. J. Stens, *Chebyshev transform methods in the theory of best algebraic approximation*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 45 (1976), 165-190.

[7] R. DeVore, *The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators*, Lecture Notes in Mathematics No. 293, Springer-Verlag Berlin / Heidelberg / New York, 1972.

[8] P. du Bois-Reymond, *Über die fourierschen reihen*, Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen, 21 (1873), 571-582.

[9] L. Fejér, *Sur les fonctions bornées et intégrables*, C. R. Paris, 131 (1900), 984-987.

[10] L. Fejér, *Untersuchungen über Fouriersehe Reihen*, Math. Annalen, 58 (1904), 51-69.

[11] S. Foucart, Y. Kryakin and A. Shadrin, *On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric*, Constr. Approx. 29 (2009), 157-179.

[12] O. Kiss and P. Vértesi, *On a new interpolation process* (in Russian), Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., 10 (1967), 117-128.

[13] A. N. Kolmogorov, *Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout,* Fundamenta Math., 4 (1923), 324-328.

[14] A. N. Kolmogorov, *Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout,* Comptes Rendus, 183 (1926), 1327-1320.

[15] P. P. Korovkin, *Linear Operators and Approximation Theory,* Delhi (1960).

[16] A. Lupaş, *On the approximation of continuous functions,* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 40(54) (1986), 73–83.

[17] I.P. Natanson, *Constructive Function Theory. Vol I,* Frederick Ungar Publ., New Tork, 1964.

[18] T. J. Rivlin, *Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to Algebra and Number Theory,* Second Edition (Dover Books on Mathematics) 2nd Edition , 1990.

[19] R. B. Saxena and K. B. Srivastava, *On interpolation operators* (I), Anal. Numér. Théor. Approx. 7 (2) (1978), 211-223.

[20] L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory,* (3rd ed.) Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

[21] S. B. Stechkin, *Order of best approximation of continuous functions* (in Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR, 15 (3) (1951), 219-242.

[22] A. F. Timan, *Theory of Approximation of Functions of Real Variable,* Pergamon Press, 1963.

[23] A. Zygmund, *Trigonometric Series,* Vol. I and II combined, Cambridge Mathematical Library, 2002.