



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Elementos del cálculo estocástico

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

por

José Carlos Flores Sánchez

Asesorado por

Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria

Puebla Pue.
Diciembre de 2025

Título: Elementos del cálculo estocástico
Estudiante: JOSÉ CARLOS FLORES SÁNCHEZ

COMITÉ

Dr. Fernando Velasco Luna
Presidente

Dr. Rei Israel Ortega Gutiérrez
Secretario

Dr. Ruy Alberto López Ríos
Vocal

Dr. Francisco Solano Tajonar Sanabria
Asesor

Agradecimientos

A través de este apartado, quiero agradecer a todas esas personas que estuvieron brindándome su apoyo incondicional. Principalmente a mis padres, Carlos Gabriel Flores Rojas y María Sánchez Ramos, por motivarme a seguir adelante a pesar de las carencias y adversidades que se presentaron en el transcurso de la carrera, por todas esas noches que no durmieron adecuadamente, por las veces que tuvieron que hacer sacrificios por mí, soy lo que soy gracias a ustedes.

Alma, bueno niña, gracias por tomarte el tiempo para escuchar cada comentario que yo hacía sobre las matemáticas, las risas, los momentos tristes, los bailes, etc. Me motivaste mucho cuando no me sentía suficiente o cuando se me presentaban problemas, no solo me acompañaste académicamente sino también personalmente, así que espero que cualquier meta que te propongas la cumplas sin muchas complicaciones. ¡Un abrazo!

A mis amigos Ángel, Gabriel, Santiago, David, Leonardo, les doy las gracias por estar presentes en distintas etapas de mi vida, algunas más importantes que otras, pero sin los chistes o las motivaciones que han llegado a mencionar, me sería más difícil concluir esta etapa. Me queda desearles todo el éxito del mundo y que el tiempo nos siga reuniendo como lo que somos mejores amigos.

Fer, solo me queda agradecerte por preguntar de manera ocasional con el avance de este trabajo y las palabras de apoyo que me brindaste, a su vez también reconocer la paciencia y atención que tienes con las personas, de verdad muchas gracias.

Índice general

Introducción	IX
1. Preliminares de cálculo	1
1.1. Funciones continuas y diferenciables	1
1.2. Variación de una función	2
1.2.1. Variación cuadrática	3
1.3. Integral de Riemann y Riemann-Stieltjes	3
1.4. Teorema de Taylor	5
2. Conceptos sobre probabilidad	6
2.1. Modelo de probabilidad continuo	6
2.2. Propiedades de una variable aleatoria continua	8
2.2.1. Distribuciones de variables aleatorias continuas	11
2.3. Esperanza de una variable aleatoria	12
2.4. Independencia y momentos centrales	14
2.4.1. Momentos centrales, varianza y covarianza	14
2.5. Función generadora de momentos	17
2.6. Esperanza condicional	19
2.6.1. Propiedades de la esperanza condicional	20
2.7. Proceso estocástico	20
2.8. Martingalas	21
2.9. Modos de convergencia	21
3. Procesos estocásticos continuos	22
3.1. Proceso Gaussiano	22
3.2. Movimiento Browniano	23
3.3. Martingalas inducidas por el movimiento Browniano	25
3.4. Propiedades del movimiento Browniano	26
3.5. Variantes del movimiento Browniano	28
3.5.1. Movimiento Browniano con deriva	28
3.5.2. Movimiento Browniano Geométrico	29
4. Cálculo estocástico de Itô	32
4.1. Integral de Itô	32
4.2. Propiedades adicionales de la integral de Itô	36
4.3. Fórmula de Itô	38
4.4. Procesos de Itô	39
4.5. Fórmula general de Itô	41
4.5.1. Fórmula bidimensional de Itô	42
4.6. Reglas de diferenciación en cálculo estocástico	43
4.7. Aplicaciones del cálculo estocástico	45

4.7.1. Modelo de crecimiento estocástico	45
4.7.2. Crecimiento estocástico en un ambiente competitivo	47
4.7.3. Nivel de colesterol en sangre	49
5. Conclusión	53
A. Solución general a EDEs lineales	54
Bibliografía	55

Introducción

El cálculo ha sido un instrumento fundamental para realizar avances prácticos como lo puede ser el modelar algún fenómeno, sin embargo, el hacer uso de esta herramienta implica manejar estrategias deterministas. Por lo tanto, si bien hay fenómenos que se adecúan al cálculo clásico, fenómenos como el nivel de colesterol en sangre, que pese a tener una ecuación diferencial lo modele, el comportamiento de su solución a largo plazo es una constante. Aunado a eso, si se presentan variaciones en la ingesta de alimentos, dicho modelo será impreciso. Otro fenómeno como el precio de un activo presenta aleatoriedad, lo cual disminuye la precisión si se usaran modelos basados en el cálculo clásico; por ello, el desarrollo del cálculo estocástico, que trabaja con variables aleatorias, es una opción viable para modelar dicho fenómeno y muchos otros (Calin, 2015).

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo presentar de manera rigurosa los fundamentos teóricos del cálculo estocástico en el sentido de Itô, construyendo los conceptos esenciales a partir de nociones sobre el análisis real y la teoría de la probabilidad, con el propósito de ofrecer una exposición clara, coherente de los resultados más relevantes de esta teoría, a su vez se presentan aplicaciones sobre dicha teoría.

El contenido que aborda el trabajo de tesis, se encuentra estructurado a partir de cuatro capítulos. El primer capítulo recapitula conceptos básicos sobre el cálculo así como algunas propiedades sobre las funciones reales, además, incluye resultados variados entre ellos se hace mención sobre la fórmula de Taylor y cuando una integral de Riemann-Stieltjes es equivalente a una integral de Riemann. El segundo capítulo presenta definiciones sobre Probabilidad como lo son espacio de probabilidad, variable aleatoria, valor esperado, así como teoremas de convergencia para variables aleatorias también se introduce el concepto de proceso estocástico, esperanza condicional y martingala, estos últimos tienen una relación estrecha.

El tercer capítulo se concentra en realizar un análisis sobre procesos estocásticos continuos, mantiene un enlace con el segundo capítulo, solo que se hace énfasis sobre el movimiento Browniano, se describen sus principales características entre ellas la independencia de incrementos, continuidad de sus trayectorias y que es además un proceso Gaussiano. Para finalizar, el cuarto capítulo está dedicado a presentar el cálculo estocástico en el sentido de Itô, donde se muestra la idea sobre la construcción de la integral de Itô, así como propiedades de dicha integral y se habla sobre procesos de Itô.

Capítulo 1

Preliminares de cálculo

El cálculo estocástico se basa en una estructura similar al cálculo diferencial e integral en una variable, sin embargo, también se busca extender a varias variables, por ello este capítulo tiene como propósito recopilar conceptos esenciales como a continuación se presentan recuperados de (Klebaner, 2005; Fitzpatrick and Royden, 2010).

1.1. Funciones continuas y diferenciables

Definición 1.1. Se dice que f es una función que parte de un conjunto A hacia un conjunto B , si a cada elemento del conjunto A le asigna al menos un solo elemento del conjunto B . El conjunto de partida (A) se suele llamar **dominio** y además, al conjunto de llegada (B) se le llama **imagen** o **rango**.

Más aún, se suele denotar esta función de la siguiente forma

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

Definición 1.2. Se dice que $f(t)$ es una función continua en el punto $t = t_0$, si sus respectivos incrementos de f sobre intervalos pequeños, es pequeño. En otras palabras

$$\Delta f(t) := f(t) - f(t_0) \rightarrow 0 \text{ cuando } \Delta t := t - t_0 \rightarrow 0.$$

Si la función $f : A \longrightarrow B$ es continua en cada punto del dominio A se dirá que f es una función continua.

Definición 1.3. Se dice que una función $f(t)$ es diferenciable en el punto $t = t_0$ si

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \alpha, \tag{1.1}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y se denota como $f'(t_0)$.

De manera análoga, si $f(t) : A \longrightarrow B$ es diferenciable en cada punto de su dominio, se dirá que f es una función diferenciable.

Definición 1.4. Sea $f(t)$ una función de variable real, f será continua por la derecha en el punto $t = t_0$, si

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = f(t_0). \quad (1.2)$$

Definición 1.5. Sea $f(t)$ una función de variable real, f será continua por la izquierda en el punto $t = t_0$, si

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = f(t_0). \quad (1.3)$$

Definición 1.6. Un punto t_0 se dice que es una discontinuidad de primer orden o de primer tipo si los límites definidos en (1.2) y (1.3) existen, pero son diferentes.

1.2. Variación de una función

Definición 1.7. Sea una función de variable real f sobre un intervalo $[a, b]$ y además, sea $P = \{t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n\}$ una partición sobre dicho intervalo, se define a la variación de f con respecto a P por

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|. \quad (1.4)$$

Más aún, se define a la variación total de f sobre el intervalo $[a, b]$ como

$$VT(f) = \sup\{V(f, P) \mid P \text{ es partición de } [a, b]\}. \quad (1.5)$$

Definición 1.8. Sea f una función de variable real, se dice que f es una **función de variación acotada** sobre $[a, b]$ siempre que

$$VT(f) < \infty.$$

Si dicha variación no es acotada, se dice que f es una función de variación infinita.

Si se tiene que $f(t)$ es una función creciente, es decir, que si $t_0 < t_1$, entonces $f(t_0) < f(t_1)$. La variación total de $f(t)$ será $TV(f) = f(b) - f(a)$, ya que si P es cualquier partición sobre $[a, b]$, entonces

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \quad (1.6)$$

$$= \sum_{i=1}^n f(t_i) - f(t_{i-1}) \quad (1.7)$$

$$= [f(t_1) - f(a)] + [f(t_2) - f(t_1)] + \dots + [f(b) - f(t_{n-1})] \quad (1.8)$$

$$= f(b) - f(a). \quad (1.9)$$

También, f es una función de variación acotada (Fitzpatrick and Royden, 2010). Otra forma de escribir dicha variación total es la siguiente

$$VT(f) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|. \quad (1.10)$$

Donde $\delta = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$.

1.2.1. Variación cuadrática

De manera análoga se definirá el concepto de variación cuadrática, apoyándose en la ecuación (1.10). La variación cuadrática será de utilidad cuando se presente el movimiento Browniano (Klebaner, 2005; Shreve, 2004).

Definición 1.9. Sea f una función de variable real sobre el intervalo $[0, T]$. Se define la variación cuadrática de f hasta el tiempo T como

$$[f, f](T) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2. \quad (1.11)$$

Observación 1.1. Dado que en la ecuación (1.11), el límite consiste en una suma de elementos no negativos, entonces $[f, f](T) \geq 0$.

Teorema 1.1. Si f es una función continua, sobre el intervalo $[0, T]$ y además es de variación acotada, entonces su variación cuadrática es cero.

Demostración. Sea f una función de variación acotada y continua, si P es una partición del intervalo $[0, T]$, Note que $(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 = |f(t_i) - f(t_{i-1})||f(t_i) - f(t_{i-1})|$, entonces

$$(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|f(t_i) - f(t_{i-1})|) |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Ahora, sumando sobre i , se tiene que

$$\sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|f(t_i) - f(t_{i-1})|) \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Tomando el límite en ambos lados de la ecuación cuando $\delta \rightarrow 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq n} (|f(t_i) - f(t_{i-1})|) \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq n} (|f(t_i) - f(t_{i-1})|) VT(f). \end{aligned}$$

Observando el primer elemento del lado derecho de la desigualdad, se sigue debido a que f parte de un conjunto compacto y es continua, se tiene que f es una función absolutamente continua, por ello $\lim_{\delta \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq n} (|f(t_i) - f(t_{i-1})|) = 0$. Entonces dado que

$$0 \leq [f, f](T) \leq 0 \implies [f, f](T) = 0.$$

□

1.3. Integral de Riemann y Riemann-Stieltjes

Se presenta la definición de integral, en el sentido de Riemann y Riemann-Stieltjes, también, cuando son equivalentes dichas integrales. Una condición suficiente para que exista la integral de Riemann es si la función a integrar es continua sobre un intervalo $[a, b]$.

Definición 1.10. Se define a la integral de Riemann de una función real f , sobre un intervalo $[a, b]$ del siguiente modo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\nu_i)(t_i - t_{i-1}), \quad (1.12)$$

donde $\delta = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ y $t_{i-1} \leq \nu_i \leq t_i$.

Teorema 1.2 (Teorema fundamental del cálculo). *Sea f una función continua sobre $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a),$$

donde F es una antiderivada de f , es decir, cumple que $F' = f$.

La prueba se puede ver en (Stewart, 2008, p.384).

Pese a que el teorema anterior es de utilidad para facilitar el cálculo de integrales, tiene una condición importante la cual es que la función f deberá ser continua, por lo tanto, si se desea integrar una función que contiene discontinuidades, se necesita plantear una integral más general, como se presentará a continuación (Apostol, 1976; Stewart, 2008).

Definición 1.11. Sean f, g funciones con g una función monótona, la integral de Riemann-Stieltjes sobre el intervalo $(a, b]$ se define como

$$\int_a^b f(t) \, dg(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\nu)(g(t_i) - g(t_{i-1})). \quad (1.13)$$

Con esta nueva integral lo primero que se puede observar es que si $g(t) = t$, entonces se obtiene la integral de Riemann. Más aun, si $g(t)$ es una función escalonada y el tamaño de salto es S_i en t_i , entonces la ecuación (1.13), se puede escribir bajo ciertas condiciones como

$$\int_a^b f(t) \, dg(t) = \sum_{i=1}^n f(t_i) S_i. \quad (1.14)$$

Donde $S_i := \lim_{t \rightarrow t_i^+} g(t) - \lim_{t \rightarrow t_i^-} g(t)$.

Ejemplo 1.1. Sea $f(x) = x$ y $\alpha(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 3, \\ 4, & \text{si } 3 < x \leq 5, \\ 5, & \text{si } 5 < x \leq 9. \end{cases}$

Determine $\int_0^9 f(x) \, d\alpha(x)$.

Solución De acuerdo a la formula (1.14), basta con calcular el tamaño del salto S_i en t_i y evaluar la función en dicho punto. Es decir, $S_1 = \lim_{t \rightarrow 3^+} \alpha(t) - \lim_{t \rightarrow 3^-} \alpha(t) = 4 - 2 = 2$, de manera análoga se obtiene que $S_2 = 5 - 4 = 1$. Entonces

$$\int_0^9 f(x) \, d\alpha(x) = f(3)(S_1) + f(5)(S_2) = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 11.$$

Propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes

1. Sean f, g funciones Riemann-integrables con respecto a una función monótona α sobre $[a, b]$. Además, si $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ entonces,

$$\int_a^b (c_1 f(t) + c_2 g(t)) \, d\alpha = c_1 \int_a^b f(t) \, d\alpha + c_2 \int_a^b g(t) \, d\alpha. \quad (1.15)$$

2. Si f es también Riemann-integrable con respecto a la función β , entonces

$$\int_a^b f(t) \, d(c_1 \alpha + c_2 \beta) = c_1 \int_a^b f(t) \, d\alpha + c_2 \int_a^b f(t) \, d\beta. \quad (1.16)$$

3. Si $c \in [a, b]$ y f es Riemann-integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$, con respecto a la función α , entonces

$$\int_a^b f(t) \, d\alpha = \int_a^c f(t) \, d\alpha + \int_c^b f(t) \, d\alpha. \quad (1.17)$$

Teorema 1.3. Sea f una función Riemann-integrable con respecto a una función α sobre $[a, b]$. Además, suponga que la derivada de α (α') existe y es continua sobre dicho intervalo. Entonces la integral de Riemann dada por $\int_a^b f(x)\alpha'(x) dx$ existe y

$$\int_a^b f(x) d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

Véase en (Apostol, 1976, p.176).

Proposición 1.1. Sea f una función continua en $[a, b]$ y α es una función de variación acotada sobre $[a, b]$, entonces, f es Riemann-integrable con respecto a α .

La demostración de la proposición anterior se puede encontrar en (Apostol, 1976).

En el cálculo estocástico, el objetivo principal es definir una nueva integral ya que al usar la ecuación (1.13), en virtud de la Proposición 1.1, una condición para que dicha integral exista es que el integrador (α) sea de variación acotada, es decir, $VT(\alpha) < \infty$. Sin embargo, el integrador que se suele usar no cumple dicha condición, es decir, $VT(\alpha) = \infty$. incluso, no es diferenciable en ningún punto.

1.4. Teorema de Taylor

Enseguida, se presentará un teorema de suma importancia, ya que es el paso clave para establecer la fórmula de Itô. Además, gracias a este desarrollo, se permite realizar aproximaciones que se presentarán en el segundo capítulo.

Teorema 1.4. Sea f una función de t , suponga que n es un número natural y además, que f tiene derivadas de orden $n - 1$ ($f', f'', \dots, f^{(n-1)}$) continuas sobre $t_0 \in [a, b]$, y suponga que $f^{(n)}$ existe para todo $t \in (a, b)$. Entonces

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}(t - t_0)^{n-1} + R_n(t, t_0). \quad (1.18)$$

Donde $R_n(t, t_0) = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(t - t_0)^n$ para $\theta \in (t_0, t)$, es llamado residuo o resto.

La demostración de dicho teorema puede consultarse en (Bartle, 1976, p.211).

Se usará dicho teorema para el desarrollo de la fórmula de Itô, para ello solo se expandirá la fórmula hasta los dos primeros términos, agregando el residuo. Es decir,

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + R_3(t_0, t). \quad (1.19)$$

Así, en vista de la ecuación (1.19), bajo las condiciones necesarias, la fórmula de Itô en un intervalo $[0, t]$, se expresa de la siguiente forma

$$f(B(t)) = f(B(0)) + \int_0^t f'(B(s)) dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(s)) ds. \quad (1.20)$$

Donde $B(s)$ se verá con mayor detalle en Capítulo 3, que es llamado como Movimiento Browniano, el cual es esencial para introducir el concepto de integral estocástica.

Capítulo 2

Conceptos sobre probabilidad

A continuación se presentan diferentes definiciones acerca de conceptos sobre la teoría de la probabilidad, los cuales serán fundamentales para el desarrollo de capítulos posteriores. Cabe resaltar que solo se enfocará en el modelo de probabilidad continuo.

2.1. Modelo de probabilidad continuo

Se partirá haciendo uso de conceptos basados en la teoría de la medida y la teoría de conjuntos para poder definir un espacio de probabilidad que estará conformado por la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a continuación se define el par $(\Omega, \mathcal{F})$. Las definiciones y teoremas que se presentarán se pueden encontrar con mayor precisión en (Steyer and Nagel, 2017; Meyer, 1993).

1. Un **espacio muestral** es aquel conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio y se denota por Ω .
2. Un **evento** denotado por A es cualquier subconjunto del espacio muestral Ω .

Definición 2.1. Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto no vacío Ω se dice que es una **σ -álgebra** (sigma-álgebra) sobre Ω , si satisface:

- (a) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$.
- (b) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
- (c) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Estas definiciones son fundamentales, ya que el par $(\Omega, \mathcal{F})$ otorga lo que se denomina un espacio medible.

Ejemplo 2.1 (Ejemplos de σ -álgebras).

- Si $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, véase que en efecto es una σ -álgebra debido a que satisface (a), a su vez $\emptyset^c = \Omega \in \mathcal{F}_0$ y $\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{F}_0$, con esto se cumple (b), por último note que $\emptyset \cup \Omega = \Omega$, es decir, $\emptyset \cup \Omega \in \mathcal{F}_0$ por lo tanto, cumple con (c), entonces, el conjunto $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ es una σ -álgebra también denominada como la σ -álgebra más pequeña.
- Si $\mathcal{F}_B = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$, es también una σ -álgebra, donde $B \subseteq \Omega$, este conjunto denotado por $\mathcal{F}_B$ es llamado la σ -álgebra generada por un conjunto B .

Teorema 2.1. Sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de un conjunto no vacío Ω (con I un conjunto de índices), si $\mathcal{F}_i$ es una σ -álgebra sobre Ω , entonces $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es también una σ -álgebra.

La demostración al teorema anterior se puede consultar en (Steyer and Nagel, 2017, p.28).

Una vez enunciado este teorema, se puede definir lo que se denomina como **σ -álgebra generada por un conjunto**.

Definición 2.2. Sea $\mathfrak{X}$ una familia de subconjuntos de un conjunto no vacío Ω (con I un conjunto de índices). La **σ -álgebra generada por $\mathfrak{X}$** es la colección denotada por $\sigma(\mathfrak{X})$

$$\sigma(\mathfrak{X}) := \bigcap_{i \in I} \{\mathcal{F}_i \mid \mathcal{F}_i \text{ es una } \sigma\text{-álgebra y } \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}_i\}.$$

A continuación se exhiben una serie de conceptos que permitirán definir un nuevo espacio medible y con ello, también se definirá lo que es una variable aleatoria en este nuevo espacio.

Definición 2.3. Se define la σ -álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$ como:

$$\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a, b) \subseteq \mathbb{R} \mid a < b\}).$$

Es decir, que la σ -álgebra de Borel esta dada por la σ -álgebra generada por los intervalos de $\mathbb{R}$.

Definición 2.4. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio de medida y sea

$$\begin{aligned} P : \mathcal{F} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto P[A] \end{aligned}$$

Se dice que P es una función (o medida de probabilidad) si cumple lo siguiente

- $P[\Omega] = 1$.
- $0 \leq P[A] \leq 1$, para cada $A \in \mathcal{F}$.
- $P[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$, donde $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$, son eventos mutuamente excluyentes.

Observación 2.1. A la terna formada por un espacio muestral Ω , una σ -álgebra $\mathcal{F}$ y una medida de probabilidad P , $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, se le denomina **espacio de probabilidad**.

Una vez que se tienen todos los conceptos requeridos, se puede establecer una función que asignará valores del espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ hacia un nuevo espacio medible el cual estará conformado por $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Para ello, a continuación se define cuándo una función es medible (Williams, 1991).

Definición 2.5. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y suponga que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, por otro lado, para $B \subseteq \mathbb{R}$ definase al conjunto

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in B\}.$$

Se dice que f es $\mathcal{F}$ -medible si $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, $\forall B \in \mathfrak{B}$.

Observación 2.2. Note que al hablar sobre f^{-1} , se hace referencia a la preimagen del elemento A , más no a la función inversa de f .

Los teoremas mencionados a continuación serán de utilidad en el capítulo siguiente, dichos teoremas fueron recuperados de (Fitzpatrick and Royden, 2010).

Teorema 2.2. Sean f, g funciones medibles sobre un conjunto medible E . Entonces

- Si a, b son constantes, se sigue que

$$af + bg, \quad (2.1)$$

es medible sobre E .

- fg es medible sobre E .

Teorema 2.3. Sea g una función medible definida sobre E y f una función continua sobre todo $\mathbb{R}$. Entonces la composición dada por $f \circ g$ es una función medible sobre E .

Definición 2.6. Una **variable aleatoria** (unidimensional) X sobre un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ es una función $\mathcal{F}$ -medible que parte de $(\Omega, \mathcal{F})$ hacia $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, es decir, satisface que

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \quad \forall A \in \mathfrak{B}.$$

Si el conjunto de llegada de X es el espacio $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, se dice que X es una *variable aleatoria real*.

Hasta el momento solo se ha limitado a definir una variable aleatoria, abordando más de dicho concepto, se puede llegar a una clasificación sobre las variables aleatorias reales. A continuación, se mencionará la clasificación más común sobre dichas variables que se pueden encontrar definiciones similares en (Ross, 1994; Meyer, 1993).

Definición 2.7. Se dice que una variable aleatoria X es **discreta**, si su rango es a lo más numerable, por ejemplo $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ y además, cuenta con una función de probabilidad $p(x_i) = P[X = x_i]$ denominada función de probabilidad puntual, tal que

- $p(x_i) \geq 0$.
- $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

Definición 2.8. Una variable aleatoria X es llamada **continua**, si su rango es no numerable y existe una función $f(x)$ denominada función de densidad de probabilidad (fdp) tal que

$$(a) \quad f(x) \geq 0. \quad (2.2)$$

$$(b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (2.3)$$

$$(c) \quad \text{Para } a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b \text{ se tiene que } P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.4)$$

Observación 2.3. Note que en la ecuación (2.3) pese a que una variable aleatoria puede tomar ese rango de valores, su rango no necesariamente debe ser todo $\mathbb{R}$. Al asignar ese rango de valores, simplemente se está considerando a modo de conveniencia, como un rango *ideal*.

2.2. Propiedades de una variable aleatoria continua

En este apartado se hablará sobre qué cualidades presentan las variables aleatorias, por lo cual se requieren determinados conceptos que se pueden encontrar en (Klebaner, 2005; Mood et al., 1974)

Definición 2.9. Se dice que un conjunto es una σ -álgebra generada por una variable aleatoria X denotado por $\sigma(X)$, si es la más pequeña de las σ -álgebras que contiene conjuntos de la forma

$$\{\omega | a \leq X(\omega) \leq b\}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Definición 2.10. Sea X una variable aleatoria. La función de distribución de la variable aleatoria X está dada por $F(x) = P[X \leq x]$.

Teorema 2.4. Sea F la función de distribución de una variable aleatoria X , entonces satisface los siguientes enunciados:

- La función F es no decreciente, es decir, que si $x_1 \leq x_2$, entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
- $F(x)$ es una función continua por la derecha.

Teorema 2.5. Sea X una variable aleatoria continua, con su respectiva función de densidad f y función de distribución F , entonces

$$F'(x) = \frac{d}{dx} F(x) = f(x).$$

Demostración. Dado que X es una variable aleatoria continua, con su respectiva fdp f , entonces se tiene que

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(s) \, ds. \quad (2.5)$$

Ahora derivando con respecto a x y aplicando el Teorema Fundamental del cálculo en (2.5) se sigue que

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f(s) \, ds = f(x).$$

□

Observación 2.4. Note que el Teorema 2.5 menciona también, que la función de distribución determina de manera unívoca a la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua.

Ejemplo 2.2. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{d.o.f.} \end{cases}$$

Determine su función de distribución $F(x)$ y muestre su gráfico.

Solución

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \int_0^x 3s^2 \, ds = x^3, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Cuyo gráfico se muestra a continuación en la Figura 2.1

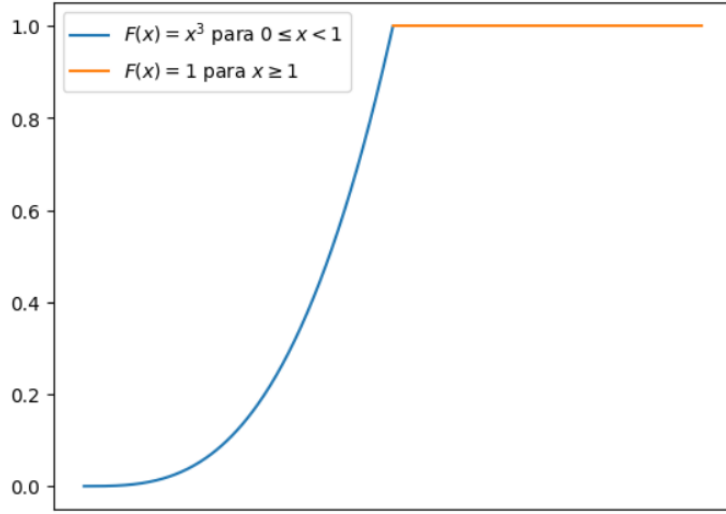


Figura 2.1: Gráfica de la función de distribución $F(x)$

Teorema 2.6. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f , donde $f(x) > 0$ en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Sea $y = h(x)$ una función con valores reales, diferenciable y estrictamente monótona sobre el recorrido de X , entonces la función de densidad de probabilidad de $Y := H(X)$ está dada por $g(y)$

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|.$$

El teorema anterior se puede consultar en (Meyer, 1993, p.114).

La importancia de este teorema se verá en breve, por ahora se buscará generalizar el concepto de variable aleatoria, por lo tanto, se presentará la definición de vector aleatorio. Su importancia deriva para comprender la noción de un proceso estocástico, dicho concepto fue recuperado de (Mikosch, 1998).

Definición 2.11. Sea, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ se dice que $\mathbf{X}$ es un vector aleatorio n -dimensional, si cada componente X_i ($i = 1, \dots, n$) es una variable aleatoria unidimensional.

De manera análoga, este vector aleatorio cuenta con su función de distribución **conjunta**, si se enfoca el caso para $n = 2$ y $X_1 = X$, $X_2 = Y$, entonces la función de distribución conjunta está definida como

$$F_{X,Y}(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]. \quad (2.6)$$

A su vez, dado que se está trabajando en el caso continuo, también cuenta con una función de densidad conjunta denotada como $f_{X,Y}$. Donde a través de esta misma se puede recuperar las respectivas funciones de densidad de X y Y coloquialmente denominadas como función de densidad marginal y las solemos denotar como f_X ; f_Y para hacer referencia a la variable de interés.

Así mismo, como se mencionó en el Teorema 2.5, también se tiene un resultado similar. Derivando parcialmente, se obtiene que

$$\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} = f_{X,Y}(x, y).$$

2.2.1. Distribuciones de variables aleatorias continuas

Una distribución de una variable aleatoria continua no es más que la ley que sigue dicha variable aleatoria para asignar probabilidades. Por ello, en este apartado se hablará sobre algunas distribuciones importantes y conocidas como *uniforme*, *exponencial*, *normal*, *gamma*.

Notación: Se denotará que la variable aleatoria Y tiene distribución $d(\alpha)$ con $Y \sim d(\alpha)$.

Distribución uniforme

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución uniforme sobre el intervalo (a, b) , si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a < x < b, \\ 0, & \text{d.o.f.} \end{cases}$$

Es claro que $f(x)$ es no negativa sobre (a, b) y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Distribución normal o gaussiana

Una variable aleatoria X se dice que está distribuida normalmente con parámetros μ y σ^2 ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$), si su función de densidad de probabilidad es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

Cuya función de distribución está dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds. \quad (2.7)$$

Proposición 2.1. Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, además, si $Y = aX + b$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, entonces, $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Demostración. Dado que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, por lo tanto, para determinar su distribución se hace uso del Teorema 2.6, para ello se consideran dos casos, primero considere que $a > 0$ dado que $y = ax + b$, entonces $x = \frac{y-b}{a}$, a su vez, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}$. Por lo tanto, la función de densidad de Y será

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}} \left| \frac{1}{a} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} e^{-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}}.$$

Note que la expresión anterior no es más que la función de densidad de una distribución normal con parámetros $a\mu + b$ y $a^2\sigma^2$. Ahora, considere que $-a < 0$ y nuevamente haciendo uso del Teorema 2.6 se tiene que

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{-a} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}} \left| -\frac{1}{a} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} e^{-\frac{(y-(-a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}}.$$

Por lo tanto, si $-a < 0$ se tiene que $Y \sim N(-a\mu + b, a^2\sigma^2)$. Con esto queda demostrada la proposición. $\square$

Observación 2.5. Cuando se tiene una variable aleatoria continua X con distribución $N(0, 1)$ se dice que X tiene una distribución normal estándar.

Distribución gamma

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución gamma con parámetros $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ $X \sim \Gamma(\lambda, \alpha)$ si su función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{d.o.f.} \end{cases}$$

Para evitar confusiones cuando se escribe $X \sim \Gamma(\lambda, \alpha)$ es mera notación y no se hace referencia a la función $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, que dicha función se usa en la parte del denominador de su función de densidad, por ello esta distribución adquiere ese nombre.

Note que si el parámetro $\alpha = 1$ y $\lambda > 0$ se obtiene una nueva distribución, la cual se denomina **distribución exponencial**.

2.3. Esperanza de una variable aleatoria

A continuación se introducirá un nuevo concepto que es más caracterizado como una medida de tendencia central, el cual es llamado como **Esperanza** o **Valor esperado**, en seguida se presenta la definición sobre dicho concepto que puede encontrarse en (Meyer, 1993).

Definición 2.12. Si X es una variable aleatoria continua, se define el valor esperado de X y se denota como

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (2.8)$$

Cabe señalar que la integral en (2.8) puede ser no convergente, por ello se dirá que $E[X]$ existe si y sólo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty,$$

es decir, cuando dicha integral es absolutamente convergente. En secciones siguientes se hablará un poco más sobre las variables aleatorias que cumplen esta propiedad, mejor conocidas como variables aleatorias integrables.

Ejemplo 2.3. Determine la esperanza de una variable distribuida uniformemente sobre el intervalo (a, b) , ($X \sim U(a, b)$).

Solución Por definición se tiene que $E[X] = \int_a^b x f(x) dx$, entonces

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4. Determine el valor esperado para $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Solución Dado que X tiene distribución normal, note que haciendo uso nuevamente de la ecuación (2.8) se obtiene que

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Reescribiendo a x como $x = (x - \mu) + \mu$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} [(x - \mu) + \mu] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ahora si se realiza un cambio de variable en el primer término de (2.9), posteriormente se observa el segundo término y se aplica la linealidad de la integral no es más que la integral de la función de densidad de probabilidad sobre todo el recorrido de la variable X multiplicada por la constante μ lo cual da por resultado.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (2.10)$$

Por último, note que en (2.10) en el primer término del lado derecho de la ecuación, el integrando es una función impar por ello su valor debe ser 0 y el segundo término converge a 1 por ser una función de densidad, por lo tanto, se sigue que

$$E[X] = 0 + \mu \cdot 1 = \mu.$$

A continuación se presentan algunas propiedades sobre la esperanza, mismas que serán de utilidad más adelante.

Proposición 2.2. Sean X, Y variables aleatorias con esperanza finita, entonces los siguientes enunciados se cumplen:

- (a) Sean α, β constantes, entonces $E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$.
- (b) Si $X \leq Y$, entonces $E[X] \leq E[Y]$.
- (c) Si $X \geq 0$, entonces $E[X] \geq 0$.

Definición 2.13. Sea X una variable aleatoria, se define como el n -ésimo momento de X a la expresión $E[X^n]$ (para $n \geq 1$), que en el caso continuo se puede expresar como:

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx. \quad (2.11)$$

Al igual que cuando se presentó la definición de esperanza, la ecuación (2.11) existe siempre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^n| f(x) dx < \infty.$$

2.4. Independencia y momentos centrales

A continuación se hará uso de un concepto sobre la teoría de la probabilidad, el cual es el concepto de independencia, que será de utilidad para próximos resultados, como se puede apreciar en las definiciones siguientes (Klebaner, 2005).

- (I) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, con los eventos $A, B \in \mathcal{F}$ se dice que A es independiente de B si $P[A \cap B] = P[A]P[B]$.
- (II) Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{F}$ son σ -álgebras, entonces se dirá que $\mathcal{A}$ es independiente de $\mathcal{F}$ si para cualquier elección de conjuntos de cada una, dichos conjuntos cumplen con (I).
- (III) Sean X, Y variables aleatorias, entonces, X y Y son independientes si sus respectivas σ -álgebras son independientes.

Este concepto se puede generalizar, para ello tome una colección de eventos finita, por ejemplo, $A_1, \dots, A_n$, entonces serán independientes si

$$P \left[\bigcap_{i=1}^n A_i \right] = \prod_{i=1}^n P[A_i]$$

Este concepto también permite anidar otra propiedad más a la esperanza que se exhibe en la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Sean X, Y variables aleatorias independientes, donde existe $E[X]$ y $E[Y]$, es decir, sus respectivos valores esperados. Entonces se cumple que*

$$E[XY] = E[X]E[Y]. \quad (2.12)$$

De manera análoga, también la ecuación (2.12) se puede generalizar como se vio en el concepto de independencia de eventos en este caso, se tomará una colección finita de variables aleatorias, por ejemplo $X_1, \dots, X_n$ donde se cumple que $E[X_i]$ ($i = 1, \dots, n$) existe, entonces

$$E \left[\prod_{i=1}^n X_i \right] = \prod_{i=1}^n E[X_i].$$

Una vez presentado esto, se puede hablar sobre los momentos centrales, en particular el estudio de interés radicaré hasta el segundo momento, ya que se definirá un nuevo concepto, el cual es más caracterizado como una nueva medida de dispersión (Mood et al., 1974; DeGroot, 1992).

2.4.1. Momentos centrales, varianza y covarianza

Definición 2.14. Sea X una variable aleatoria, el n -ésimo momento central de X alrededor de a denotado como $E[(X - a)^n]$. Más aún, si $a = E[X]$, la expresión anterior se llamará el n -ésimo momento central de X alrededor de su media.

Note que para $n = 1, a = E[X]$, es decir, el primer momento central de X alrededor de su media será $E[(X - E[X])^1] = E[X] - E[X] = 0$.

Luego si $n = 2, a = E[X]$, entonces el segundo momento central de X alrededor de su media será

$$E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2. \quad (2.13)$$

En particular, la ecuación (2.13) es la medida de dispersión de interés, mejor conocida como la varianza de una variable aleatoria X , en algunos textos se suele denotar como $V(X)$ o $Var(X)$. A continuación, se hace mención de algunas propiedades sobre dicha medida.

Teorema 2.7. Sean X, Y variables aleatorias cuya varianza existe, además considere a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que

(a) $V(X) \geq 0$.

(b) $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$.

(c) Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Demostración. Para demostrar (a), observe que $V(X) = E[(X - E[X])^2]$, es el valor esperado de una variable aleatoria no negativa y por la Proposición 2.2 se sigue que $V(X) \geq 0$.

Luego en (b), realizando el cálculo y utilizando la linealidad de la esperanza, entonces

$$\begin{aligned} V(\alpha X + \beta) &= E[(\alpha X + \beta - E[\alpha X + \beta])^2] \\ &= E[(\alpha X + \beta - \alpha E[X] - \beta)^2] \\ &= E[(\alpha(X - E[X]))^2] \\ &= \alpha^2 V(X). \end{aligned}$$

Para finalizar en (c), recuerde que $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$, por lo tanto, si hay independencia en las variables aleatorias, se sigue que

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E[(X + Y)^2] - (E[X] + E[Y])^2 \\ &= E[X^2 + 2XY + Y^2] - E[X]^2 - 2E[X]E[Y] - E[Y]^2 \\ &= (E[X^2] - E[X]^2) + (E[Y^2] - E[Y]^2) + 2(E[XY] - E[X]E[Y]) \\ &= V(X) + V(Y) \text{ (usando la independencia de } X \text{ con } Y). \end{aligned} \tag{2.14}$$

□

Observación 2.6. Como se puede apreciar en la propiedad (c) se puede generalizar para cuando se tienen n variables aleatorias independientes, es decir, que si $X_1, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes, entonces

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ejemplo 2.5. Calcule la varianza de una variable aleatoria continua $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Solución Recuerde que $V(X) = E[(X - E[X])^2]$ donde por el Ejemplo 2.4 se tiene que $E[X] = \mu$,

entonces

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Realizando un cambio de variable $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$, $du = \frac{1}{\sigma} dx$, entonces

$$\begin{aligned} V(X) &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u u e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (\text{por la paridad del integrando}) \\ &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-u e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_0^{\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (\text{integrando por partes y ocupando la paridad}) \\ &= 0 + \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2. \end{aligned}$$

Ahora, se dará un resultado para aproximar el valor esperado de una variable aleatoria y su varianza. En algunas ocasiones, realizar dichos cálculos cuando se presenta una distribución continua, la integral puede ser una integral no elemental, es decir, que no se puede expresar de manera explícita mediante funciones elementales como lo son los polinomios, funciones trigonométricas, etc. Para ello, el Teorema 1.19 será de utilidad.

Teorema 2.8. *Sea X es una variable aleatoria y si $E[X] = \mu$, $V(X) = \sigma^2$. Si $Y = h(X)$, se tiene que*

$$E[Y] \approx h(\mu) + h''(\mu). \quad (2.15)$$

$$V(Y) \approx (h'(\mu))^2 \sigma^2. \quad (2.16)$$

La demostración se puede ver en (Meyer, 1993, p.183)

El Teorema 2.7, pese a que proporciona propiedades fundamentales sobre la varianza, en particular la propiedad (c), solo se cumple si hay independencia en las variables aleatorias, lo que lleva a la pregunta ¿qué ocurre en $V(X + Y)$, si no hay independencia? Para responder esto, basta con recordar el tercer término de la ecuación (2.14), es decir, $2(E[XY] - E[X]E[Y])$. Por ello se debe generar un nuevo concepto denominado como **covarianza** que a continuación se definirá.

Definición 2.15. Sean X, Y variables aleatorias cuyas esperanzas son finitas, si $E[XY] < \infty$, la covarianza de X y Y denotada por $Cov(X, Y)$ se define como

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]. \quad (2.17)$$

Observación 2.7. En la literatura se suele asociar la covarianza como una medida de correlación (o relación lineal) entre dos variables aleatorias.

De manera análoga, se presentan propiedades interesantes acerca de la covarianza. Para ello, suponga que ésta existe para las variables aleatorias X, Y, Z .

Teorema 2.9. *Sean, X, Y, Z variables aleatorias, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que*

$$(I) \quad Cov(X, Y) = Cov(Y, X).$$

$$(II) \quad Cov(aX + bY, Z) = aCov(X, Z) + bCov(Y, Z).$$

(III) $Cov(X, X) = V(X)$.

(IV) Si X, Y son independientes, entonces $Cov(X, Y) = 0$.

Demostración. (I) Observe que

$$E[XY] = \iint_{D \subseteq \mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x, y) \, dx dy = \iint_{D \subseteq \mathbb{R}^2} yx f_{X,Y}(x, y) \, dy dx = E[YX]$$

entonces se sigue que

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[YX] - E[Y]E[X] = Cov(Y, X).$$

(II)

$$\begin{aligned} Cov(aX + bY, Z) &= E[(aX + bY)Z] - E[aX + bY]E[Z] \\ &= E[aXZ + bYZ] - (aE[X] + bE[Y])E[Z] \\ &= a(E[XZ] - E[X]E[Z]) + b(E[YZ] - E[Y]E[Z]) \\ &= aCov(X, Z) + bCov(Y, Z). \end{aligned}$$

(III) Note que $Cov(X, X) = E[XX] - E[X]E[X] = E[X^2] - E[X]^2$.

(IV) Si X, Y son independientes se sigue de la ecuación (2.12) que

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[X]E[Y] - E[X]E[Y] = 0.$$

□

Observación 2.8. Con respecto a la propiedad (II), siguiendo un razonamiento similar se puede mostrar que $Cov(X, aY + bZ) = aCov(X, Y) + bCov(X, Z)$, es decir, es una forma bilineal, ya que es lineal por la izquierda y por la derecha. Por otro lado, si se cumple que $Cov(X, Y) = 0$, se dirá que las variables no están correlacionadas.

2.5. Función generadora de momentos

En esta sección el objetivo será expandir el concepto de momentos a través de una función, que en la literatura se le suele mencionar como la función generadora de momentos (fgm). Se verán qué condiciones se requieren para que esta función exista, además de sus propiedades y algunos teoremas que serán de utilidad más adelante. Esta definición, así como los resultados que se presentarán, se pueden encontrar en (Mood et al., 1974; Meyer, 1993; Roussas, 2003).

Definición 2.16. Sea X una variable aleatoria, con función de densidad de probabilidad $f_X(x)$. Se define el valor esperado de e^{tX} como la función generadora de momentos de X si para cada valor t en una vecindad alrededor del cero este valor esperado existe y se denotara como $M_X(t)$ de la siguiente forma

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f_X(x) \, dx. \quad (2.18)$$

Partiendo de esta definición lo primero que se puede observar es que esta función no siempre existe, debido a que debe estar definida sobre una vecindad alrededor del 0. Otra característica notoria es que, si se supone que la fgm existe, además, si se desarrolla en series de Taylor, y aplicando la linealidad de la esperanza, se obtiene que

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = E[1 + tX + \frac{t^2 X^2}{2!} + \frac{t^3 X^3}{3!} + \dots] = 1 + tE[X] + \frac{t^2}{2!}E[X^2] + \frac{t^3}{3!}E[X^3] + \dots$$

Ahora, derivando dicha función con respecto a t el resultado es el siguiente

$$M'_X(t) = E[X] + tE[X^2] + \frac{t^2}{2!}E[X^3] + \dots$$

Evaluando en $t = 0$ finalmente $M'_X(0) = E[X]$, lo cual, lleva a una proposición interesante presentada a continuación.

Proposición 2.4. *Sea X una variable aleatoria cuya función generadora de momentos existe, entonces*

$$M_X^{(n)}(0) = E[X^n],$$

donde $M_X^{(n)}(0)$ es la n -ésima derivada de $M_X(t)$ evaluada en 0.

A continuación se proporciona una tabla donde se indican algunas distribuciones de probabilidad continua y su respectiva función generadora de momentos.

Distribución	Función generadora de momentos
$N(\mu, \sigma^2)$	$\exp \left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right]$
$\Gamma(n, \lambda), \lambda > 0$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n$
$U(a, b)$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b - a)}$

Tabla 2.1: Función generadora de momentos para algunas distribuciones

Teorema 2.10. *Sean X, Y variables aleatorias tal que cuenta con su función generadora de momentos $M_X(t)$. Si $Y = aX + b$, entonces la función generadora de momentos de Y está dada por*

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at). \quad (2.19)$$

Demostración. Se procede a realizar el cálculo de manera directa, entonces

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E[e^{Yt}] \\ &= E[e^{(aX+b)t}] \\ &= E[e^{atX} e^{bt}] \\ &= e^{bt} E[e^{atX}] \text{ (por la linealidad de la esperanza).} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.11. *Sean X, Y variables aleatorias independientes, más aún, si $Z = X + Y$ y existen las fgm de Z, X, Y ($M_Z(t), M_X(t), M_Y(t)$). Entonces,*

$$M_Z(t) = M_X(t) M_Y(t).$$

Demostración. Dado que las fgm existen para cada variable aleatoria, note que

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E[e^{Zt}] \\ &= E[e^{(X+Y)t}] \\ &= E[e^{Xt} e^{Yt}] \\ &= E[e^{Xt}] E[e^{Yt}] = M_X(t) M_Y(t). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.5. *Sea X una variable aleatoria con generadora de momentos $M_X(t)$. En condiciones determinadas, la función generadora de momentos determina unívocamente la distribución de probabilidad de X .*

La demostración del teorema anterior se puede ver en (Resnick, 2003, pp.302-303).

2.6. Esperanza condicional

A continuación se presenta un concepto sumamente sólido, partiendo de la definición de probabilidad condicional de un evento A dado que el evento B ya sucedió, en otras palabras

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}, \quad P[B] > 0.$$

Gracias a este concepto se puede realizar un procedimiento análogo, solo que se toma en cuenta a las respectivas densidades de X y Y , también se tiene a la función de densidad conjunta $f(x, y)$. Entonces se dice que la densidad condicionada de X dado $Y = y$. Denotada por la siguiente expresión

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0, \quad (2.20)$$

con todo este conjunto de conceptos se puede realizar una definición sobre la esperanza condicional, presentada a continuación.

Definición 2.17. Sean X, Y variables aleatorias tales que cuentan con una función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$ y sus respectivas funciones de densidad, se define a la esperanza condicional de X dado $Y = y$ como

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx. \quad (2.21)$$

Observación 2.9. Como se puede apreciar en la ecuación (2.21) cuando se escribe el condicionante $Y = y$, es un abuso de notación debido a que en realidad se está condicionando con respecto al evento $\{Y=y\}$. Otra nota importante es que la esperanza condicional es una variable aleatoria, en el caso de la ecuación (2.21) es una variable aleatoria en función de y , por lo tanto, $E[Y|X = x]$ será una variable aleatoria en función de x .

Este nuevo concepto viene de la mano con algunas propiedades interesantes, pero antes de ver dichas propiedades, se ampliará el concepto de esperanza condicional donde se busca abarcar σ -álgebras debido a que estas, en otras palabras, son de utilidad para almacenar información y por la observación 2.9 se puede pensar a $E[X|Y]$ como una variable aleatoria cuya estructura parte de $\sigma(Y)$ (σ -álgebra generada por la variable aleatoria Y). Por razones técnicas, solo se hará mención de dicho concepto. Si se desea tener un conocimiento más profundo, se puede encontrar en (Mikosch, 1998; Klebaner, 2005).

Definición 2.18. Una variable aleatoria Z se dice que es la esperanza condicional de X dada la σ -álgebra $\mathcal{F}$ si $Z = E[X|\mathcal{F}]$ y

- Z no contiene más información que la que esta contenida en $\mathcal{F}$ ($\sigma(Z) \subset \mathcal{F}$).
- Z cumple que

$$E[XI_A] = E[ZI_A]$$

para todo $A \in \mathcal{F}$.

Proposición 2.6. *Sea X una variable aleatoria y $\mathcal{F}$ una σ -álgebra, si $E[|X|] < \infty$, la esperanza condicional $E[X|\mathcal{F}]$ existe y es única.*

2.6.1. Propiedades de la esperanza condicional

Teorema 2.12. Si X, Y son variables aleatorias tales que sus respectivas esperanzas son finitas y $\mathcal{F}$ una σ -álgebra, entonces

1. Si X es $\mathcal{F}$ -medible, entonces

$$E[XY|\mathcal{F}] = XE[Y|\mathcal{F}]. \quad (2.22)$$

En particular $E[X|\mathcal{F}] = X$.

2. Sean α, β constantes, entonces

$$E[\alpha X + \beta Y|\mathcal{F}] = \alpha E[X|\mathcal{F}] + \beta E[Y|\mathcal{F}]. \quad (2.23)$$

3. Si $\mathcal{C}$ es una σ -álgebra tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, entonces

$$E[E[X|\mathcal{F}]|\mathcal{C}] = E[X|\mathcal{C}]. \quad (2.24)$$

Esta propiedad es conocida, como la propiedad de la torre.

4. Si $\sigma(X)$ y $\mathcal{F}$ son independientes, entonces

$$E[X|\mathcal{F}] = E[X]. \quad (2.25)$$

5. **Desigualdad de Jensen.** Si $h(x)$ es una función convexa sobre el intervalo I y el rango de X es I , entonces

$$h(E[X|\mathcal{F}]) \leq E[h(X)|\mathcal{F}]. \quad (2.26)$$

2.7. Proceso estocástico

En este apartado, se definirá formalmente el concepto de un proceso estocástico. También, se relacionarán conceptos ya antes mencionados y se adecuarán de tal forma que se desarrolle una estructura más sólida.

Definición 2.19. Un proceso estocástico definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, es una sucesión de variables aleatorias $\{X(t) | t \in T\}$, donde $T \subset \mathbb{R}$ se le denomina como espacio paramétrico. Además, cuentan con un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ al cual se le suele llamar espacio de estados, es decir, los posibles valores que toma el proceso.

Con esta definición presentada, se puede clasificar los tipos de procesos estocásticos con los que se trabajará, por ejemplo, dado que $S, T \subset \mathbb{R}$, entonces estos subconjuntos pueden ser numerables y no numerables. Cuando S, T son conjuntos numerables, el proceso estocástico formado por estos dos subconjuntos es denominado como **Cadena de Markov**, si se tiene que S es numerable y T es no numerable, entonces, se tienen **Procesos de Renovación**, entre ellos el **Proceso de Poisson**. Si S es no numerable y T es numerable, simplemente se dirá que es un proceso de estados continuos con tiempos discretos y, por último, para S, T no numerables se suelen denominar como procesos estocásticos continuos. El enfoque de interés será cuando S y T son subconjuntos no numerables.

Definición 2.20. Sea $\{X(t) | t \in T\}$ un proceso estocástico, se denotará a la σ -álgebra generada por el proceso $X(t)$ como $\mathcal{F}_t = \sigma(X(u), u \leq t)$.

Definición 2.21. Una filtración $\mathbb{F}$ es una colección de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}$ definidas en un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ tales que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$. Se denomina a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ como espacio de probabilidad filtrado.

Definición 2.22. Si $\{X(t) | t \in T\}$ es un proceso estocástico, definido en un espacio de probabilidad filtrado, se dirá que $X(t)$ es un proceso adaptado si se tiene que para todo t , $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$ -medible.

2.8. Martingalas

El siguiente concepto será primordial para algunos resultados que se presentará en el próximo capítulo. Recuperada de (Calin, 2015).

Definición 2.23. Sea $\{X(t) \mid t \in T\}$ un proceso estocástico, el proceso será una martingala con respecto a una filtración $\mathbb{F}$, si

- (a) $X(t)$ es integrable, es decir, $E[|X|] < \infty$ para todo $t \in T$.
- (b) $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$ -medible.
- (c) $E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)$ para $s < t$.

Observación 2.10. Note que en (a) ha sido retomado el concepto que se mencionó en la Definición 2.12, el cual es la integrabilidad de una variable aleatoria, por ello a partir de esta definición se hará uso constante de este concepto. Además, en (b) se hace alusión a que el valor $X(t)$ es conocido y en (c) se dirá que la mejor predicción para conocer un valor a futuro será la última observación.

Siendo más explícitos, también en la condición (c) se dirá que si el proceso cumple (a) y (b) pero $E[X(t)|\mathcal{F}_s] \leq X(s)$, entonces, será una supermartingala. En cambio, si $E[X(t)|\mathcal{F}_s] \geq X(s)$, entonces será una submartingala.

2.9. Modos de convergencia

En esta sección solo se hará mención sobre los tipos de convergencia para variables aleatorias y algunos teoremas se pueden encontrar en (Calin, 2015; Klebaner, 2005).

Definición 2.24. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, se dice que

- $\{X_n\}$ converge en distribución a X , si las respectivas funciones de distribución de $\{X_n\}$ y X por ejemplo $(F_n(x), F(x))$, si $F_n(x) \rightarrow F(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$ en cualquier punto de continuidad de F .
- $\{X_n\}$ converge en probabilidad a X , si para cualquier $\delta > 0$, $P[|X_n - X| > \delta] \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- $\{X_n\}$ converge casi seguramente (c.s) a X , si $P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right] = 1$.

Teorema 2.13 (Convergencia monótona). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, tales que $0 \leq X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, además la sucesión converge puntualmente a X . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]. \quad (2.27)$$

Teorema 2.14 (Convergencia dominada). Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad y $\{X_n\}$, es una sucesión de variables aleatorias tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ en probabilidad, además se satisface que para todo n , $|X_n| \leq Y$ con $E[Y] < \infty$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]. \quad (2.28)$$

Capítulo 3

Procesos estocásticos continuos

Este apartado tiene el objetivo de presentar algunos procesos estocásticos continuos importantes, como los procesos gaussianos, el movimiento Browniano y sus variantes, además de mencionar características importantes sobre estos. Ya que estos procesos aparecen de forma natural en las aplicaciones del cálculo estocástico (Baldi, 2017).

3.1. Proceso Gaussiano

Definición 3.1. Se dice que un proceso estocástico $\{X(t)\}$, es llamado proceso gaussiano si para cada combinación lineal finita de variables aleatorias $X(t)$ está normalmente distribuida.

Teorema 3.1. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias reales independientes, con $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, entonces

$$X_1 + \dots + X_n \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

Demostración. Usando la Tabla 2.1, se tiene que la fgm de una variable aleatoria normal X_i es $e^{\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}}$, entonces la fgm para la suma de n variables aleatorias normales sería

$$\begin{aligned} E[e^{(X_1 + \dots + X_n)t}] &= E[e^{X_1 t} \dots e^{X_n t}] \\ &= E[e^{X_1 t}] \dots E[e^{X_n t}] \text{ (por la independencia de las } X_i) \\ &= e^{\mu_1 t + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \dots e^{\mu_n t + \frac{\sigma_n^2 t^2}{2}} \\ &= \exp\left[\sum_{i=1}^n \mu_i t + \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \frac{t^2}{2}\right]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por último se observa que la fgm obtenida en (3.1) y gracias a la Proposición 2.5 se sigue entonces que la distribución de $X_1 + \dots + X_n \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$ $\square$

Ejemplo 3.1. Sean Z_1, Z_2 variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con media 0 y varianza σ^2 , tales que $X(t) = Z_1 \cos(\lambda t) + Z_2 \sin(\lambda t)$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $-\infty < t < \infty$. Demuestre que $X(t)$ es un proceso gaussiano.

Solución

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ constantes reales y sean $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, entonces,

$$\alpha_1 X(t_1) + \dots + \alpha_n X(t_n) = \alpha_1 [Z_1 \cos(\lambda t_1) + Z_2 \sin(\lambda t_1)] + \dots + \alpha_n [Z_1 \cos(\lambda t_n) + Z_2 \sin(\lambda t_n)]. \tag{3.2}$$

Luego podemos reescribir el lado derecho de la ecuación (3.2) como

$$\alpha_1 X(t_1) + \cdots + \alpha_n X(t_n) = Z_1[\alpha_1 \cos(\lambda t_1) + \alpha_n \cos(\lambda t_n)] + \cdots + Z_2[\alpha_1 \sin(\lambda t_1) + \alpha_n \sin(\lambda t_n)].$$

Ahora, el lado derecho de la ecuación reescrita no es más que la suma de dos variables aleatorias normales, es decir, aplicando el Teorema 3.1 para $n = 2$, entonces la distribución que se obtendría es una distribución normal.

3.2. Movimiento Browniano

El concepto de movimiento Browniano hace alusión al botánico Robert Brown, quien observó que las partículas de polen suspendidas sobre un fluido, se movían de forma impredecible. Pasado el tiempo este análisis fue retomado por Albert Einstein quien obtuvo las ecuaciones para dicho movimiento y Louis Bachelier realizó aplicaciones para al área financiera usando el movimiento Browniano (Klebaner, 2005, p.56).

Definición 3.2. Sea $B(t)$ un proceso estocástico sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, se dice que $B(t)$ es un movimiento Browniano si

1. $B(0) = 0$.
2. $B(t) - B(s)$ para $s \leq t$ es independiente de $\mathcal{F}_s$.
3. $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$ para $s \leq t$.

Dado que hemos definido a $B(t)$ sobre un espacio de probabilidad filtrado, se tiene de forma implícita que $B(t)$ es un proceso adaptado, en otras palabras $B(t)$ es $\mathcal{F}_t$ -medible.

Definición 3.3. El coeficiente de correlación entre dos variables aleatorias X, Y denotado por ρ_{xy} se define como

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

Proposición 3.1. Sea $B(t)$ un movimiento Browniano, entonces se cumple que

- (a) $Cov(B(t), B(s)) = \min\{s, t\}$
- (b) $\rho_{B(s)B(t)} := \rho_{st} = \sqrt{\frac{\min\{s, t\}}{\max\{s, t\}}}$

Demostración. Note que $E[B(t)] = 0$ y $E[B(t)^2] = t$, luego para $s = t$ el resultado en (a) y (b) no es más que $V(B(t))$ y 1. Entonces sea $s < t$, por lo tanto, en (a)

$$\begin{aligned} Cov(B(t), B(s)) &= E[B(t)B(s)] \\ &= E[(B(t) - B(s))B(s) + B(s)^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))B(s)] + E[B(s)^2] \\ &= E[B(t) - B(s)]E[B(s)] + V(B(s)) \\ &= s. \end{aligned}$$

Luego si $t < s$, siguiendo un razonamiento análogo se obtiene que $Cov(B(t), B(s)) = t$. Por lo tanto, si se omite la relación de orden entre s y t se sigue que $Cov(B(t), B(s)) = \min\{s, t\}$.

Ahora para demostrar (b), observe que para $s < t$ y por el inciso (a) el numerador de ρ_{st} se escribe como

$$\rho_{st} = \frac{s}{\sqrt{st}} = \frac{\sqrt{s}\sqrt{s}}{\sqrt{s}\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{s}{t}}.$$

Nuevamente haciendo un procedimiento similar para $t < s$, se obtiene que

$$\rho_{st} = \sqrt{\frac{t}{s}}.$$

Por ello si se elimina la relación de orden entre s y t , se sigue que

$$\rho_{st} = \sqrt{\frac{\min\{s, t\}}{\max\{s, t\}}}.$$

□

Proposición 3.2. Sea $B(t)$ un movimiento Browniano, entonces los siguientes procesos

1. $X(t) = B(t+s) - B(s)$.
2. $X(t) = -B(t)$.
3. $X(t) = cB\left(\frac{t}{c^2}\right)$.

Son movimientos Brownianos, el primero con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_{t+s}\}$, el segundo con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ y el tercero con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_{t/c^2}\}$ con $c \neq 0$.

Demostración. Observe que $X(0) = 0$ para cualesquiera de los tres procesos. Ahora en (1), si $r \leq t$, entonces

$$X(t) - X(r) = B(t+s) - B(s) - B(r+s) + B(s) = B(t+s) - B(r+s) \sim N(0, t-r).$$

Como $B(t)$ es un movimiento Browniano se tiene que el incremento es independiente de $\mathcal{F}_{r+s}$. Por lo tanto, se tiene que $X(t)$ es un movimiento Browniano con respecto a $\{\mathcal{F}_{t+s}\}$.

En (2), para $s \leq t$ se sigue que

$$X(t) - X(s) = -B(t) + B(s) = -(B(t) - B(s)) \sim N(0, t-s).$$

De manera análoga dicho incremento es independiente de $\mathcal{F}_s$, por lo tanto, se tiene que $X(t)$ es un movimiento Browniano con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$.

Por último, en (3), si $s \leq t$, entonces $\frac{s}{c^2} \leq \frac{t}{c^2}$. Por lo tanto,

$$X(t) - X(s) = cB\left(\frac{t}{c^2}\right) - cB\left(\frac{s}{c^2}\right) = c\left[B\left(\frac{t}{c^2}\right) - B\left(\frac{s}{c^2}\right)\right] \sim N(0, t-s).$$

Dicho incremento será independiente de $\mathcal{F}_{s/c^2}$, entonces, $X(t)$ es un movimiento Browniano con respecto a $\{\mathcal{F}_{t/c^2}\}$. □

Una característica interesante sobre el movimiento Browniano, es que también es un proceso Gaussiano como lo afirma el resultado siguiente.

Teorema 3.2. Un movimiento Browniano $B(t)$, es un proceso Gaussiano.

Demostración. Usando la Definición 3.1, si se realiza una partición $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ y sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ constantes reales. Se debe de mostrar que la combinación lineal

$$\alpha_1 B(t_1) + \dots + \alpha_n B(t_n),$$

tiene distribución normal. Para ello realizando inducción matemática se tiene que para $k = 1$

$$\alpha_1 B(t_1) \sim N(0, \alpha_1^2 t_1).$$

Es decir, su distribución es normal. Ahora, tome como hipótesis de inducción que se cumple para los valores donde $k < n$ que la combinación lineal tiene distribución normal y se demostrará que se cumple para n . Es decir,

$$\alpha_1 B(t_1) + \dots + \alpha_{n-1} B(t_{n-1}) + \alpha_n B(t_n) = \alpha_1 B(t_1) + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) B(t_{n-1}) + (\alpha_n [B(t_n) - B(t_{n-1})]). \quad (3.3)$$

Observando el lado derecho de la ecuación se tiene que la combinación lineal de $B(t_1)$ hasta $B(t_{n-1})$ por hipótesis de inducción tiene distribución normal.

El término $\alpha_n [B(t_n) - B(t_{n-1})] \sim N(0, \alpha_n^2 (t_n - t_{n-1}))$, más aún dicho termino es independiente de $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$.

Por lo tanto, será independiente de la combinación lineal de $B(t_1)$ hasta $B(t_{n-1})$, pero esto no es más que la suma de dos variables aleatorias independientes normalmente distribuidas y por el Teorema 3.1, la combinación lineal vista en (3.3) tiene distribución normal. □

3.3. Martingalas inducidas por el movimiento Browniano

En breve se mostrarán tres martingalas en las cuales está involucrado el movimiento Browniano, para ello, se hará uso de la Definición 2.23.

Teorema 3.3. *Sea $B(t)$ un movimiento Browniano, entonces, se cumple que*

- (I) $B(t)$ es una martingala.
- (II) $B(t)^2 - t$ es una martingala.
- (III) $e^{uB(t) - \frac{u^2}{2}t}$ es una martingala, para cualquier u .

Demostración. Sea $s < t$, en (i) note que si se usa de la desigualdad de Jensen, se tiene que

$$\begin{aligned} E[|B(t)|^2] &\leq E[|B(t)|^2] = E[B^2(t)] = t \\ \implies E[|B(t)|] &\leq \sqrt{t} < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $B(t)$ es integrable y por como se definió el movimiento Browniano, entonces $B(t)$ es $\mathcal{F}_t$ -medible. Solo queda calcular $E[B(t)|\mathcal{F}_s]$. Entonces

$$\begin{aligned} E[B(t)|\mathcal{F}_s] &= E[(B(t) - B(s)) + B(s)|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s] + E[B(s)|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B(t) - B(s)] + B(s) \\ &= B(s). \end{aligned}$$

Con esto se demuestra que $B(t)$ es una martingala.

En (II), observe que $t = V(B(t)) \geq 0$, si se usa la desigualdad triangular

$$E[|B^2(t) - t|] \leq E[|B^2(t)|] + E[|-t|] = 2t < \infty$$

Por el Teorema 2.3 se tiene que $B^2(t)$ es medible y además por el Teorema 2.2 $B^2(t) - t$ es $\mathcal{F}$ -medible. Ahora observe que

$$\begin{aligned} E[B(t)^2 | \mathcal{F}_s] &= E[(B(t) - B(s)) + B(s)]^2 | \mathcal{F}_s \\ &= E[(B(t) - B(s))^2 + 2B(s)(B(t) - B(s)) + B^2(s) | \mathcal{F}_s] \\ &= E[(B(t) - B(s))^2 | \mathcal{F}_s] + 2B(s)E[B(t) - B(s) | \mathcal{F}_s] + B^2(s) \\ &= E[(B(t) - B(s)) | \mathcal{F}_s] + B^2(s) \\ &= t - s + B^2(s). \end{aligned}$$

Si se resta el término t en ambos lados, entonces se tiene que $E[B^2(t) - t | \mathcal{F}_s] = B^2(s) - s$. Por lo tanto, es una martingala.

Para (III), $E[e^{uB(t) - \frac{u^2}{2}t}] = E[e^{uB(t)} | e^{-\frac{u^2}{2}t}]$, como la exponencial es siempre positiva y usando la fgm de una distribución $N(0, t)$ entonces, se sigue que

$$E[e^{uB(t) - \frac{u^2}{2}t}] = (e^{\frac{u^2}{2}t})(e^{-\frac{u^2}{2}t}) = 1 < \infty.$$

Nuevamente si se usan los Teoremas 2.3 y 2.2 se tiene que $e^{uB(t) - \frac{u^2}{2}t}$ es $\mathcal{F}_t$ -medible. Ahora note que

$$\begin{aligned} E[e^{uB(t)} | \mathcal{F}_t] &= E[e^{uB(s) + u(B(t) - B(s))} | \mathcal{F}_s] \\ &= E[e^{uB(s)} e^{u(B(t) - B(s))} | \mathcal{F}_s] \\ &= e^{uB(s)} E[e^{u(B(t) - B(s))}] \\ &= e^{uB(s)} e^{\frac{u^2}{2}(t-s)} \\ &= e^{uB(s) - \frac{u^2}{2}s} e^{\frac{u^2}{2}t}. \end{aligned}$$

Nuevamente si se multiplica en ambos lados de la ecuación por $e^{-\frac{u^2}{2}t}$, entonces

$$E[e^{uB(t) - \frac{u^2}{2}t} | \mathcal{F}_s] = e^{uB(s) - \frac{u^2}{2}s}.$$

Por lo tanto, es una martingala. □

3.4. Propiedades del movimiento Browniano

A continuación se presentan diversos resultados que caracterizan a un movimiento Browniano y a sus respectivas trayectorias.

De las propiedades que son propias del movimiento Browniano, también se puede destacar la continuidad de sus trayectorias, dicha propiedad es sencilla de ver debido a que $|B(t+h) - B(t)| \rightarrow 0$, cuando $h \rightarrow 0$.

En el primer capítulo se tuvo un acercamiento a la integral de Riemann-Stieltjes, ahora se verá por qué no se puede tomar a $\alpha(t) = B(t)$. Antes de llegar a este resultado es necesario presentar la variación cuadrática del Movimiento Browniano.

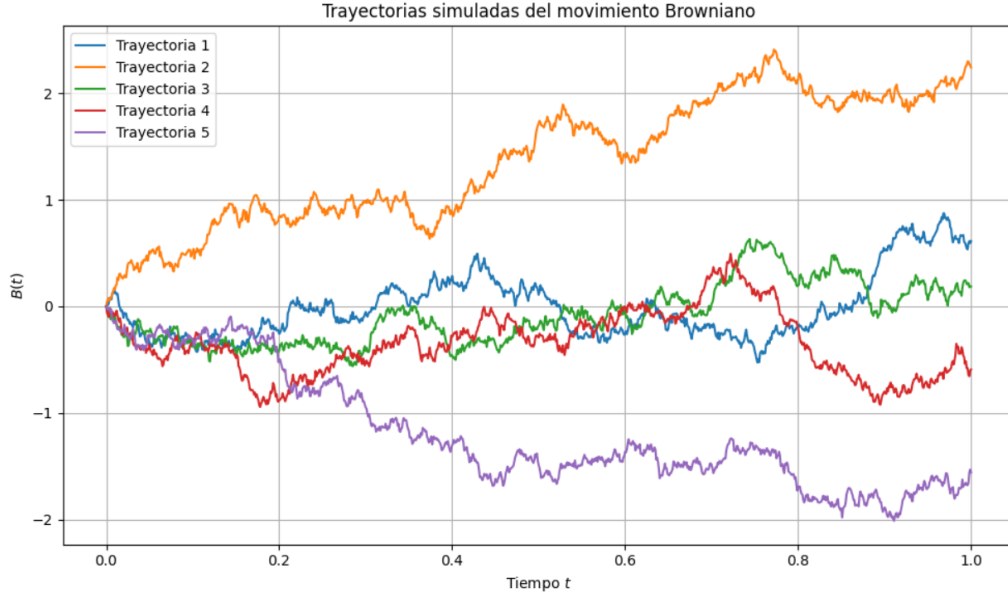


Figura 3.1: Simulación de 5 trayectorias aleatorias del movimiento Browniano.

Teorema 3.4. Sea $B(t)$ un movimiento Browniano, entonces la variación cuadrática de $B(t)$ sobre $[0, T]$

$$[B, B](T) = T. \quad (3.4)$$

La demostración de dicho Teorema se puede encontrar en (Shreve, 2004, p.102-103).

Teorema 3.5. Sea $B(t)$ un movimiento Browniano, entonces la variación total sobre $[0, T]$ es

$$VT(B(t)) = \infty. \quad (3.5)$$

Demostración. Dado que las trayectorias del movimiento Browniano son continuas, y suponiendo que el movimiento Browniano es de variación acotada, es decir, $VT(B(t)) < \infty$. Entonces, por el Teorema 1.1, se sigue que $[B, B](T) = 0$, lo cual lleva a la contradicción del Teorema 3.4. Por lo tanto, $VT(B(t)) = \infty$. $\square$

El siguiente resultado establece que a pesar de que las trayectorias del movimiento Browniano sean continuas, no son diferenciables.

Teorema 3.6. Sea $B(t)$ un movimiento Browniano, entonces para cualquier $t \geq 0$ las trayectorias de $B(t)$ no son diferenciables.

Dicha demostración se encuentra en (Klebaner, 2005, p.64). La continuidad y no diferenciabilidad de trayectorias se puede apreciar en la Figura 3.1.

Otra propiedad a destacar del movimiento Browniano es que tiene la **propiedad de Markov** y ello implica que es un proceso de Markov. De manera informal dicha propiedad establece que si se conoce el estado actual del proceso, entonces el estado futuro del mismo será independiente de su pasado (Klebaner, 2005).

Definición 3.4. Se dice que el proceso $X(t)$ es un proceso de Markov si para $t, s > 0$ y $s \leq t$ la distribución condicionada de $X(t)$ dado $\mathcal{F}_s$ es la misma distribución condicionada que $X(t)$ dado $X(s)$. En otras palabras

$$P[X(t)|\mathcal{F}_s] = P[X(t)|X(s)].$$

Proposición 3.3. Sea $B(t)$ un movimiento Browniano, entonces $B(t)$ tiene la propiedad de Markov.

Demostración. En vista de la Proposición 2.5, la fgm determina unívocamente la distribución de $B(t)$, siguiendo este razonamiento, basta con mostrar que la fgm condicionada con respecto a $\mathcal{F}_s$, será la misma condicionada con respecto a $B(s)$.

$$\begin{aligned} E[e^{uB(t)}|\mathcal{F}_s] &= E[e^{u([B(t)-B(s)]+B(s))}|\mathcal{F}_s] \\ &= e^{uB(s)} E[e^{u(B(t)-B(s))}|\mathcal{F}_s] \\ &= e^{uB(s)} E[e^{u(B(t)-B(s))}] \text{ (usando la independencia de los incrementos)} \\ &= e^{uB(s)} e^{u^2(\frac{t-s}{2})} \\ &= e^{uB(s)} E[e^{u(B(t)-B(s))}|B(s)] = E[e^{uB(t)}|B(s)]. \end{aligned}$$

□

3.5. Variantes del movimiento Browniano

Este espacio será ocupado para presentar algunas modificaciones que puede tener el movimiento Browniano, así como propiedades que las caracterizan.

3.5.1. Movimiento Browniano con deriva

Sea $B(t)$ un movimiento Browniano y sea $\mu \in \mathbb{R}$, entonces el proceso $X(t) = \mu t + B(t)$ se denomina **movimiento Browniano con deriva**.

Proposición 3.4. Si $X(t)$ es un movimiento Browniano con deriva entonces la distribución que sigue $X(t)$ es

$$X(t) \sim N(\mu t, t). \tag{3.6}$$

Demostración. Observe que si se calcula la fgm de $X(t)$ se tiene que

$$\begin{aligned} M_{X(t)}(u) &= E[e^{uX(t)}] \\ &= E[e^{u(\mu t) + uB(t)}] \\ &= e^{u(\mu t)} E[e^{uB(t)}] \\ &= e^{u(\mu t)} e^{\frac{u^2 t}{2}} = e^{u(\mu t) + \frac{u^2 t}{2}}. \end{aligned}$$

De donde se sigue que $M_{X(t)}(u)$ es la fgm de una distribución $N(\mu t, t)$.

□

Observación 3.1. Es claro que a partir de la ecuación (3.6) se sigue que $E[X(t)] = \mu t$ y $V(X(t)) = t$. Además, dicho proceso conserva los incrementos independientes y homogéneos. Más aún, $X(t)$ es también un proceso Gaussiano, sin embargo, carece de ser una martingala.

Lo cual lleva a la pregunta ¿Bajo qué condiciones el movimiento Browniano con deriva es martingala? ¿O es una submartingala o supermartingala? Para responder dichas preguntas se puede observar a partir de la definición de martingala, que el proceso es integrable y $\mathcal{F}_t$ -medible, luego note que:

$$\begin{aligned} E[X(t)|\mathcal{F}_s] &= E[\mu t + B(t)|\mathcal{F}_s] \\ &= \mu t + E[B(t)|\mathcal{F}_s] \\ &= \mu t + B(s) = \mu(t-s) + X(s). \end{aligned}$$

De la última igualdad se sigue que para $s < t$ la propiedad de martingala se obtiene si y solo si $\mu = 0$, $X(t)$ será submartingala si $\mu > 0$ ($E[X(t)|\mathcal{F}_s] > X(s)$) y será supermartingala si $\mu < 0$ ($E[X(t)|\mathcal{F}_s] < X(s)$).

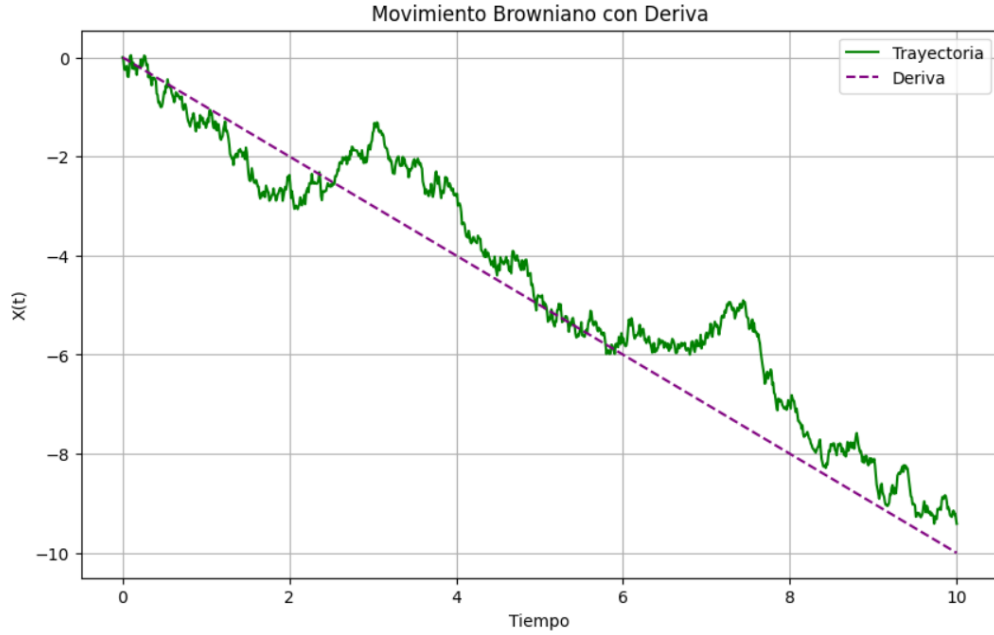


Figura 3.2: Movimiento Browniano con deriva con $\mu = -1$.

3.5.2. Movimiento Browniano Geométrico

Definición 3.5. Se dice que el proceso $X(t)$ es un movimiento Browniano geométrico si para las constantes $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $X(t)$ es de la forma

$$X(t) = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)}, \quad t \geq 0. \quad (3.7)$$

La distribución del proceso mostrado en (3.7) es denominada distribución **Log-normal** cuyos parámetros para el caso mostrado son $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ y σt .

Observación 3.2. Note que el término σ (algunas veces denominado volatilidad) puede ser cualquier número real; a priori parece un poco contraintuitivo. Sin embargo, si se considera $\sigma < 0$ no es más que considerar un movimiento Browniano geométrico aplicado $-B(t)$ que, como ya se mostró, dicho proceso también es un movimiento Browniano.

Proposición 3.5. Sea $X(t)$ un movimiento Browniano geométrico, entonces los siguientes resultados son válidos

1. $E[X(t)] = e^{\mu t}$.
2. $V(X(t)) = e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$.

Demostración. Para (1), aplicando las propiedades del valor esperado y la Tabla 2.1 se observa que

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)}] \\ &= e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} E[e^{\sigma B(t)}] \\ &= e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} \\ &= e^{\mu t}. \end{aligned}$$

Por otro lado, para calcular (2), haciendo uso de las propiedades de la varianza se tiene que

$$\begin{aligned} V(X(t)) &= E[X(t)^2] - E[X(t)]^2 \\ &= E[(e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)})^2] - (e^{\mu t})^2 \\ &= e^{(2\mu - \sigma^2)t} E[e^{2\sigma B(t)}] - e^{2\mu t} \\ &= e^{(2\mu - \sigma^2)t} e^{2\sigma^2 t} - e^{2\mu t} \\ &= e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1). \end{aligned}$$

□

Una vez mostrada esta proposición, es de interés conocer qué cualidades conserva el movimiento Browniano geométrico ¿Tiene incrementos independientes y estacionarios? Por desgracia, la respuesta a dicha pregunta es negativa, sin embargo, conserva propiedades como la continuidad de trayectorias y es $\mathcal{F}_t$ -medible. Lo cual lleva a generar la siguiente pregunta ¿Será el proceso $X(t)$ una martingala? Para responder esta pregunta basta con verificar que se cumplan las 3 condiciones para que un proceso sea una martingala.

Integrabilidad $E[|X(t)|] < \infty$.

Procediendo a realizar el cálculo y usando la no negatividad de la función exponencial, se sigue que

$$E[|X(t)|] = E[e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)}] = e^{2\mu t} < \infty. \quad (3.8)$$

$X(t)$ es $\mathcal{F}_t$ -medible.

Como se mencionó anteriormente, el proceso $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$ -medible por lo tanto, se cumple la segunda condición.

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s).$$

Observe que

$$\begin{aligned} E[X(t)|\mathcal{F}_s] &= E[e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)}|\mathcal{F}_s] \\ &= e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} E[e^{\sigma(B(t) - B(s))} e^{\sigma B(s)}|\mathcal{F}_s] \\ &= e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} e^{\sigma B(s)} E[e^{\sigma(B(t) - B(s))}] \\ &= e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} e^{\sigma B(s)} e^{\frac{\sigma^2(t-s)}{2}} \\ &= e^{\mu t - \frac{\sigma^2 s}{2} + \sigma B(s)}. \end{aligned}$$

Debido al resultado obtenido en la última igualdad, el proceso $X(t)$ tampoco satisface la propiedad de martingala debido al término $e^{\mu t}$, pero si se considera a $\mu = 0$, entonces el proceso $X(t)$ satisface que siempre es una martingala. Este resultado ya se ha mencionado antes, basta con observar (III) del Teorema 3.3 y con ello se tiene que $X(t)$ será martingala si y solo si $\mu = 0$. Esto responde a la pregunta anterior, ahora partiendo de la misma pregunta realizada en la variante anterior ¿será el proceso una supermartingala o submartingala? Del último resultado se sigue que

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = e^{\mu(t-s)} X(s).$$

Entonces, de manera análoga, dicho resultado dependerá del valor de μ , por lo tanto.

$$X(t) \begin{cases} \text{Es martingala si,} & \mu = 0, \\ \text{Es supermartingala si,} & \mu < 0, \\ \text{Es submartingala si,} & \mu > 0. \end{cases}$$

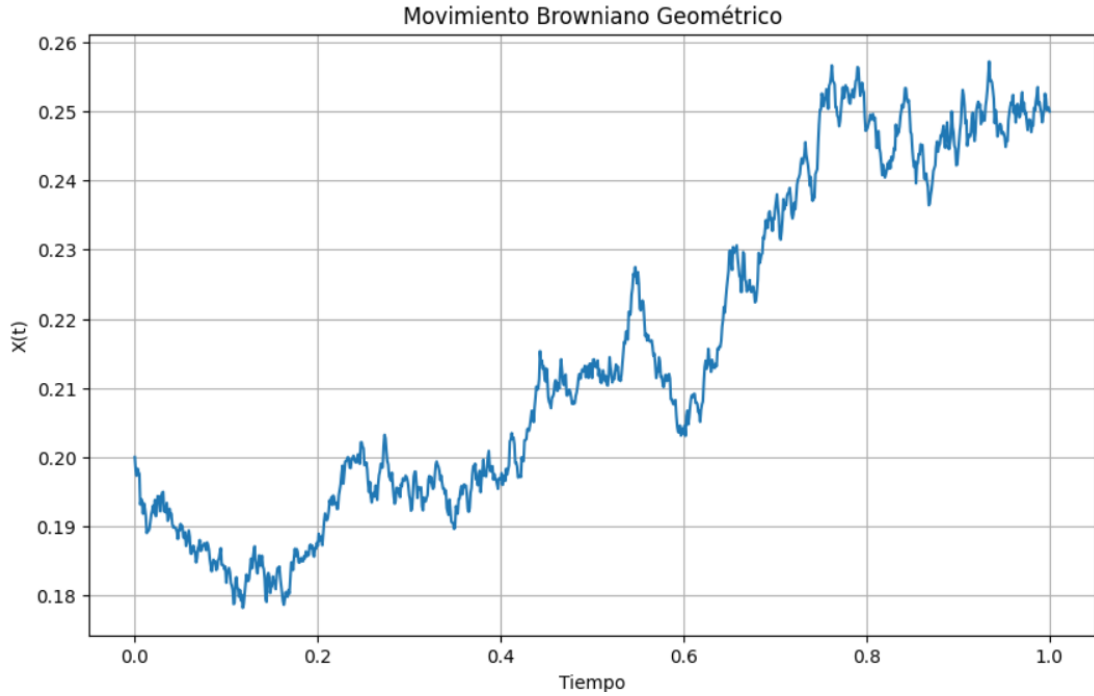


Figura 3.3: Movimiento Browniano geométrico con $\mu = 0.1$ y $\sigma = 0.2$.

Capítulo 4

Cálculo estocástico de Itô

La siguiente división está dedicada a presentar la construcción de la integral estocástica, también se hablarán de diferenciales estocásticos. Para empezar a definir la integral de Itô se trabajará con procesos simples, los cuales cumplen la propiedad de ser adaptados, posteriormente se generalizará para aquellos procesos que son adaptados y regulares (Klebaner, 2005; Shreve, 2004).

4.1. Integral de Itô

Definición 4.1. Sea $S = (S(t), t \in [0, T])$ un proceso estocástico, se dirá que S será un proceso simple si cumple las siguientes propiedades:

1. Si se tiene una partición sobre $[0, T]$, es decir, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$.
Y para las variables aleatorias $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$, con ζ_0 una constante, entonces cada ζ_i es $\mathcal{F}_{t_i}$ -medible, para $i = 0, \dots, n-1$.
2. Además

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i I_{(t_i, t_{i+1}]}(t). \quad (4.1)$$

Más aún, $E[\zeta_i^2] < \infty$ para todo i .

Dicha definición fue obtenida de (Mikosch, 1998; Klebaner, 2005).

Para proceder con la construcción de la integral estocástica $\int_0^T S(t) dB(t)$, se busca que la integral cumpla que $\int_0^T dB(t) = B(T) - B(0)$. Si $S(t) = k$ para una constante real k , $\int_0^T S(t) dB(t) = \int_0^T dB(t) = k(B(T) - B(0))$. Por último, se tiene que para α, β constantes reales $S(t) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } 0 < t \leq a, \\ \beta, & \text{si } a < t \leq T. \end{cases}$. Entonces, la integral $\int_0^T S(t) dB(t) = \int_0^a \alpha dB(t) + \int_a^T \beta dB(t)$. Entonces, para un proceso simple $S(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i I_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$ donde para cada i , $\zeta_i = c_i$, para constantes reales c_i , la integral de Itô va a estar dada por

$$\begin{aligned}
 \int_0^T S(t) dB(t) &= \int_0^T c_0 I_{(t_0, t_1]} + \cdots + c_{n-1} I_{(t_{n-1}, t_n]} dB(t) \\
 &= \int_0^{t_1} c_0 dB(t) + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_{n-1} dB(t) \\
 &= c_0(B(t_1) - B(t_0)) + \cdots + c_{n-1}(B(t_n) - B(t_{n-1})) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(B(t_{i+1}) - B(t_i)).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Observación 4.1. Como se puede apreciar en la ecuación (4.2) la integral de Itô definida para un proceso simple con variables aleatorias constantes es la suma de los incrementos de un movimiento Browniano multiplicados por su respectiva constante, lo cual se sigue que para estos procesos en específico la integral de Itô sigue una distribución normal.

Proposición 4.1. Si $S(t)$ es un proceso simple donde cada ζ_i es una constante, entonces la integral de Itô satisface que

1. $E \left[\int_0^t S(t) dB(t) \right] = 0.$
2. $V \left(\int_0^T S(t) dB(t) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 (t_{i+1} - t_i).$
3. $\int_0^T S(t) dB(t) \sim N \left(0, \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right).$

Una vez mostrado este caso, se define de manera análoga la integral de Itô para un proceso simple pero para variables aleatorias ζ_i distintas de una constante, es decir, dado el proceso $X(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i I_{(t_i, t_{i+1}]}(t).$

$$\int_0^T X(t) dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)). \tag{4.3}$$

Observación 4.2. A partir del lado derecho de la ecuación (4.3) se puede notar que como cada ζ_i es variable aleatoria, la distribución que siga esta integral no necesariamente será normal.

Proposición 4.2. Sean $X(t), Y(t)$ procesos simples y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que

1. $\int_0^T (\alpha X(t) + \beta Y(t)) dB(t) = \alpha \int_0^T X(t) dB(t) + \beta \int_0^T Y(t) dB(t).$
 2. $E \left[\int_0^T X(t) dB(t) \right] = 0.$
 3. (*Isometría de Itô*)
- $$E \left[\left(\int_0^T X(t) dB(t) \right)^2 \right] = \int_0^T E[X^2(t)] dt. \tag{4.4}$$

Demostración. Para demostrar (1) basta con usar la ecuación (4.3) y la propiedad de que la suma de dos procesos simples, también es un proceso simple, entonces se sigue que

$$\begin{aligned}
 \int_0^T (\alpha X(t) + \beta Y(t)) dB(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha \zeta_i + \beta \delta_i) (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha \zeta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)) + \beta \delta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i))] \\
 &= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)) + \beta \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \\
 &= \alpha \int_0^T X(t) dB(t) + \beta \int_0^T Y(t) dB(t).
 \end{aligned}$$

Luego para (2) primero se verá la existencia del valor esperado, es decir, que sea integrable haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz para variables aleatorias.

$$E[|\zeta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i))|] \leq \sqrt{E[\zeta_i^2] E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2]} < \infty. \quad (4.5)$$

Posteriormente realizando una suma sobre $i = 0$ hasta $n - 1$ y ocupando la desigualdad triangular igualmente del resultado obtenido en (4.5)

$$E \left[\left| \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \right| \right] \leq \sum_{i=0}^{n-1} E[|\zeta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i))|] < \infty.$$

□

Por lo tanto, la integral de Itô para procesos simples tiene valor esperado finito, ahora usando la propiedad de martingala para el movimiento Browniano y el hecho de que ζ_i sea $\mathcal{F}_t$ -medible, se tiene que

$$E[\zeta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i))] = E[\zeta_i E[B(t_{i+1}) - B(t_i) | \mathcal{F}_{t_i}]] = 0.$$

$$\begin{aligned}
 E \left[\int_0^T X(t) dB(t) \right] &= E \left[\sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} E[\zeta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i))] = 0.
 \end{aligned}$$

Por último, en (3) se hace uso de la siguiente identidad

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i \right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 b_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i b_i \cdot a_j b_j. \quad (4.6)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 E \left[\left(\int_0^T X(t) dB(t) \right)^2 \right] &= E \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \right)^2 \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} E[\zeta_i^2 (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2] + 2 \sum_{i < j} E[\zeta_i \zeta_j (B(t_{i+1}) - B(t_i)) (B(t_{j+1}) - B(t_j))]. \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Realizando la primera sumatoria de la última igualdad y aplicando la propiedad de martingala para el movimiento Browniano se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} E[\zeta_i^2 (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2] &= \sum_{i=0}^{n-1} E[E[\zeta_i^2 (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2] | \mathcal{F}_{t_i}] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E[\zeta_i^2 E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2] | \mathcal{F}_{t_i}] = \sum_{i=0}^{n-1} E[\zeta_i^2] (t_{i+1} - t_i). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Analizando el segundo momento de un proceso simple y nuevamente aplicando la identidad (4.6) se obtiene que

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= E \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i I_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \right)^2 \right] \\ &= E \left[\sum_{i=0}^{n-1} \zeta_i^2 I_{(t_i, t_{i+1}]}^2(t) + 2 \sum_{i < j} \zeta_i I_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \zeta_j I_{(t_j, t_{j+1}]}(t) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E[\zeta_i^2]. \end{aligned}$$

En la segunda igualdad solo se conserva la primera sumatoria, debido a que para $i < j$ la variable indicadora solo puede tomar el valor de 1 o 0 por lo tanto, se anula la segunda sumatoria. El término $I_{(t_i, t_{i+1}]}^2(t)$ esta de manera implícita ya que al tomar una partición adecuada cada variable aleatoria se conserva, por lo tanto, se puede escribir de esa forma. Entonces siguiendo la ecuación (4.8)

$$\sum_{i=0}^{n-1} E[\zeta_i^2] (t_{i+1} - t_i) = \int_0^T E[X^2(t)] dt.$$

Solo resta mostrar que la segunda sumatoria de la ecuación (4.7) es 0, para proceder a esto, usando nuevamente que para $i < j$ la $\mathcal{F}_{t_i} \subset \mathcal{F}_{t_j}$, por lo tanto, si se aplica la propiedad de martingala y la independencia de incrementos para el movimiento Browniano se sigue que

$$\begin{aligned} E[\zeta_i \zeta_j (B(t_{i+1}) - B(t_i))(B(t_{j+1}) - B(t_j))] &= E[E[\zeta_i \zeta_j (B(t_{i+1}) - B(t_i))(B(t_{j+1}) - B(t_j)) | \mathcal{F}_{t_j}]] \\ &= E[\zeta_i \zeta_j E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))(B(t_{j+1}) - B(t_j)) | \mathcal{F}_{t_j}]] \\ &= E[\zeta_i \zeta_j E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))(B(t_{j+1}) - B(t_j))]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Llegado a esto se obtiene que

$$E \left[\left(\int_0^T X(t) dB(t) \right)^2 \right] = \int_0^T E[X^2(t)] dt.$$

Este resultado brinda propiedades importantes sobre la integral de Itô, sin embargo, se restringe al hecho de tener un proceso estocástico simple. Pero si el proceso cumple que sea regular (trayectorias continuas por la derecha con existencia de límite por izquierda) además, de ser adaptado. Para poder apreciar más esta idea, el siguiente teorema será de utilidad.

Teorema 4.1. *Sea $X(u)$ un proceso regular y adaptado, tal que $\int_0^t X(u) du < \infty$. Entonces la integral de Itô $\int_0^t X(u) dB(u)$ está bien definida y cumple las siguientes propiedades.*

- Si las integrales (en el sentido de Itô) para $X(t)$ y $Y(t)$ están definidas, por otro lado si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_0^t (\alpha X(u) + \beta Y(u)) dB(u) = \alpha \int_0^t X(u) dB(u) + \beta \int_0^t Y(u) dB(u). \quad (4.9)$$

Las siguientes propiedades solo se mantienen cuando el proceso satisface la condición adicional

$$\int_0^t E[X^2(u)] du < \infty.$$

- $E \left[\int_0^t X(u) dB(u) \right] = 0.$
- $E \left[\left(\int_0^t X(u) dB(u) \right)^2 \right] = \int_0^t E[X^2(u)] du.$

Una parte de la demostración a dicho teorema se puede encontrar en (Klebaner, 2005, p.97).

4.2. Propiedades adicionales de la integral de Itô

Anteriormente se vieron propiedades interesantes como la linealidad de la integral o la isometría de Itô, en esta sección se mostrará la propiedad martingala entre otras.

Definición 4.2. Se dice que un proceso estocástico es de cuadrado integrable si su segundo momento es finito.

Proposición 4.3. La integral de Itô $Y(t) = \int_0^t X(u) dB(u)$ es $\mathcal{F}_t$ -medible.

Teorema 4.2. Sea $s < t$, entonces si $Y(t) = \int_0^t X(u) dB(u)$, entonces

$$E[Y(t) | \mathcal{F}_s] = \int_0^s X(u) dB(u) = Y(s). \quad (4.10)$$

Demostración. Para realizar dicha prueba, se comienza demostrando su integrabilidad, es decir $E[|Y(t)|] < \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} E[|Y(t)|] &= E \left[\left| \int_0^t X(u) dB(u) \right| \cdot 1 \right] \\ &\leq \sqrt{E \left[\left(\int_0^t X(u) dB(u) \right)^2 \right] E[1^2]} \\ &= \sqrt{\int_0^t E[X^2(u)] du} < \infty. \end{aligned}$$

Donde se sigue que al lado derecho de la primera igualdad simplemente se multiplica la integral de Itô por una variable aleatoria constante, luego se aplica la desigualdad de Cauchy-Schwarz y por la isometría de Itô se tiene que un proceso de cuadrado integrable, es integrable, la medibilidad se obtiene gracias a la Proposición 4.3. Por ultimo resta verificar la propiedad de la esperanza condicional procediendo de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 E[Y(t)|\mathcal{F}_s] &= E \left[\int_0^t X(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= E \left[\int_0^s X(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] + E \left[\int_s^t X(u) dB(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= \int_0^s X(u) dB(u) = Y(s).
 \end{aligned}$$

Note que en la segunda igualdad dado que el segundo elemento solo presenta información del proceso entre s y t es independiente de $\mathcal{F}_s$ por lo tanto, solo se está calculando el valor esperado de dicha integral estocástica el cual es 0. Y como es medible la integral se conserva aplicando las propiedades de la esperanza condicional. $\square$

Una vez presentada la propiedad de martingala, también surgen dudas sobre si dicha integral estocástica al igual que el movimiento Browniano ¿Tiene variación cuadrática finita? Y con ello se responde si es de variación acotada dado que este proceso se incluye en la construcción de la integral, para ello el siguiente resultado responde a la pregunta formulada.

Teorema 4.3. Sea $Y(t) = \int_0^t X(u) dB(u)$, entonces la variación cuadrática de $Y(t)$ está dada por la siguiente expresión

$$[Y, Y](t) = \int_0^t X^2(u) du. \quad (4.11)$$

Dado este resultado y por el Teorema 1.1, se tiene entonces que la integral estocástica de Itô no es de variación acotada.

Definición 4.3. Sean $X(t), Y(t)$ dos procesos cuyas integrales de Itô existen, la covariación cuadrática en el intervalo $[0, t]$ está dada por

$$[X, Y](t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (X(t_{i+1}) - X(t_i))(Y(t_{i+1}) - Y(t_i)), \quad (4.12)$$

y en vista de esta definición se puede saber por el Teorema 4.3 que la covariación cuadrática bajo las condiciones de la definición anterior es

$$\begin{aligned}
 [X, Y](t) &= \sum_{i=0}^{n-1} (X(t_{i+1}) - X(t_i))(Y(t_{i+1}) - Y(t_i)) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} ((X + Y)(t_{i+1}) - (X + Y)(t_i))^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (X(t_{i+1}) - X(t_i))^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (Y(t_{i+1}) - Y(t_i))^2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^t (X + Y)^2(u) du - \frac{1}{2} \int_0^t X^2(u) du - \frac{1}{2} \int_0^t Y^2(u) du. \\
 &= \int_0^t X(u)Y(u) du.
 \end{aligned}$$

Antes de pasar a la siguiente sección se dará una idea intuitiva de una relación bastante estrecha para $(dB(t))^2$ y dt . Para ello, note que por el Teorema 3.4 y sobre el intervalo $[0, T]$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2 = T. \quad (4.13)$$

Por otro lado, se puede reescribir a T como

$$\int_0^T dt = T. \quad (4.14)$$

Pero observando la ecuación (4.13) también se puede plantear como una integral en el sentido de Itô con respecto a $(dB(t))^2$, es decir,

$$\int_0^T (dB(t))^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2. \quad (4.15)$$

Realizando la debida sustitución en (4.14) se obtiene que el diferencial $(dB(t))^2 = dt$.

A su vez, usando una partición adecuada, se obtiene que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}) - B(t_i))(t_{i+1} - t_i) = 0.$$

Lo cual, en otras palabras, quiere decir que $dB(t)dt = 0$, aunado se tiene que para $n \geq 3$, $(dB(t))^n = 0$, basta con observar que si $n = 3$, $(dB(t))^3 = dB(t)dt = 0$, para $n = 4$ se tiene que $(dB(t))^4 = (dt)^2 = 0$ este término se anula ya que es demasiado pequeño.

4.3. Fórmula de Itô

Con la integral estocástica ya definida, se busca ampliar conceptos y observar qué propiedades se mantienen así como la integral preserva propiedades de linealidad, entre otras. Al hablar de una forma diferencial, en el cálculo ordinario la *regla de la cadena*, se puede expresar de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}f(B(t)) = f'(B(t))B'(t). \quad (4.16)$$

Pero el principal problema consiste en que el movimiento Browniano no es diferenciable en ningún punto. La fórmula de Itô se usa como alternativa para evitar este tipo de problemas, de donde se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.4. Sea $f(x)$ una función de clase C^2 (dos veces continuamente diferenciable), y sea $B(t)$ un movimiento Browniano sobre el intervalo $[0, T]$, entonces

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(u)) dB(u) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(u)) du. \quad (4.17)$$

Demostración. Tomando una partición sobre el intervalo $[0, t]$, se sigue que

$$f(B(t)) = f(B(0)) + \sum_{i=0}^{n-1} [f(B(t_{i+1})) - f(B(t_i))] = f(0) + \sum_{i=0}^{n-1} [f(B(t_{i+1})) - f(B(t_i))]. \quad (4.18)$$

Si se aplica el Teorema 1.4 en cada término de la sumatoria, se obtiene que

$$f(B(t_{i+1})) - f(B(t_i)) = f'(B(t_i))(B(t_{i+1}) - B(t_i)) + \frac{f''(B(t_i))}{2}(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2 + R_3(k, t_i). \quad (4.19)$$

Donde $k \in (0, t)$ y sustituyendo la ecuación (4.19) en (4.18) se obtiene que

$$f(B(t)) = f(0) + \sum_{i=0}^{n-1} f'(B(t_i))(B(t_{i+1}) - B(t_i)) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f''(B(t_i))(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2 \quad (4.20)$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(3)}(\theta)}{3!} (B(t_{i+1}) - B(t_i))^3. \quad (4.21)$$

Ahora si se toma el límite para $\delta \rightarrow 0$, se obtiene que la ecuación (4.20) converge a una integral estocástica y a una integral de Riemann, esta última se justifica por la ecuación (4.15). Mientras que la ecuación (4.21) se puede ver en forma diferencial como

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(3)}(\theta)}{3!} (B(t_{i+1}) - B(t_i))^3 = \frac{f^{(3)}(\theta)}{3!} (dB(t))^3 = 0. \quad (4.22)$$

Por lo tanto, se obtiene que la formula de Itô para el movimiento Browniano es

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(u)) dB(u) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(u)) du. \quad (4.23)$$

□

Gracias al teorema anterior realizar cálculos para integrales estocásticas es más sencillo, por ejemplo suponga que $f(x) = x^2$, entonces se sigue que $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, entonces aplicando la fórmula de Itô se obtiene que

$$\begin{aligned} B^2(t) &= 0^2 + \int_0^t 2B(u) dB(u) + \frac{1}{2} \int_0^t 2 du \\ &= 2 \int_0^t B(u) dB(u) + t. \end{aligned}$$

Despejando la integral estocástica se obtiene que

$$\int_0^t B(u) dB(u) = \frac{1}{2} B^2(t) - \frac{1}{2} t. \quad (4.24)$$

Note que no hay muchos pasos para llegar a la ecuación (4.24), sin embargo, otra forma para llegar al mismo resultado es tomar una partición sobre el intervalo $[0, t]$ además de que se requiere de una sucesión de procesos simples que, a través de diversos cálculos y propiedades, hace que el resultado para obtener dicha integral estocástica se complique. Para ello, vea (Klebaner, 2005, p.95).

Más aún, se puede generalizar la ecuación (4.24), tomando a $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. Si $n \geq 2$ se sigue que

$$B^n(t) = n \int_0^t B^{n-1}(u) dB(u) + \frac{1}{2} n(n-1) \int_0^t B^{n-2}(u) du. \quad (4.25)$$

4.4. Procesos de Itô

Se presenta la definición de un proceso de Itô así como sus propiedades, se verá notación diferencial estocástica y se expandirá la fórmula de Itô a dos dimensiones para observar si las reglas de diferenciación clásica mantiene relación con el cálculo Estocástico.

Definición 4.4. Sea $X(t)$ un proceso estocástico, se dice que $X(t)$ es un proceso de Itô si se representa de la siguiente forma

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dB(s). \quad (4.26)$$

Donde $\mu(s)$ y $\sigma(s)$ son adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_s\}$ (la filtración generada por el movimiento Browniano). A su vez

$$\int_0^t |\mu(s)| dt < \infty \text{ y } \int_0^t \sigma^2(s) dt < \infty.$$

A menudo se suele decir que $\mu(s)$ y $\sigma(s)$ son los coeficientes de deriva y volatilidad o **coeficiente de difusión**.

Definición 4.5. Si $Y(s)$, es un proceso de Itô, se dice que $Y(s)$ tiene diferencial estocástico sobre el intervalo $[0, t]$ dado por

$$dY(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t), \quad 0 \leq s \leq t. \quad (4.27)$$

Dichas definiciones fueron recuperadas de (Klebaner, 2005).

Ejemplo 4.1. Tomando en cuenta la ecuación (4.25), entonces dado que $\mu(t) = \frac{1}{2}n(n-1)B^{n-2}(t)$ y $\sigma(t) = nB^{n-1}(t)$. Se sigue que $B^n(t)$, tiene diferencial estocástico dado por

$$d(B^n(t)) = \frac{1}{2}n(n-1)B^{n-2}(t)dt + nB^{n-1}(t)dB(t). \quad (4.28)$$

Variación cuadrática de un proceso de Itô

Definiendo un proceso de Itô y estableciendo la continuidad en $\int_0^t \mu(s) ds$, incorporando que dicha integral es de variación acotada para $0 \leq s \leq t$, entonces, aplicando el Teorema 1.1 y el Teorema 4.3 se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 4.4. Sea $X(t)$ un proceso de Itô, entonces la variación cuadrática está dada por

$$[X, X](t) = \int_0^t \sigma(s) ds. \quad (4.29)$$

Una vez obtenido este resultado, se puede preguntar al igual que con la integral de Itô, si se tienen dos procesos de Itô ¿Cuál es su covariación cuadrática? Para responder a esto se usa la Definición 4.3 y análogamente se manipula la sumatoria para obtener lo siguiente

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} (X(t_{i+1}) - X(t_i))(Y(t_{i+1}) - Y(t_i)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (X(t_{i+1})Y(t_{i+1}) - X(t_i)Y(t_i)) - \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)(Y(t_{i+1}) - Y(t_i)) - \sum_{i=0}^{n-1} Y(t_i)(X(t_{i+1}) - X(t_i)). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Luego, aplicando el límite en ambos lados de la expresión, se obtiene que

$$[X, Y](t) = X(t)Y(t) - X(0)Y(0) - \int_0^t X(u) dY(u) - \int_0^t Y(u) dX(u). \quad (4.31)$$

4.5. Fórmula general de Itô

Anteriormente se presentó la formula de Itô para el movimiento Browniano, sin embargo, se puede extender para aquellos procesos que admiten diferencial estocástico, es decir, son procesos de Itô. Antes de presentar dicho resultado, es necesario considerar las siguientes reglas heurísticas con respecto a los diferenciales estocásticos.

$$d[X, Y](t) = dY(t)dX(t), \quad (4.32)$$

$$(dY(t))^2 = d[Y, Y](t). \quad (4.33)$$

Si $Y(t)$ tiene diferencial estocástico, entonces

$$\begin{aligned} (dY(t))^2 &= (\mu(t)dt + \sigma(t)dB(t))^2 \\ &= \mu^2(t)(dt)^2 + 2\mu(t)\sigma(t)dt dB(t) + \sigma^2(t)(dB(t))^2 \\ &= \sigma^2 dt. \end{aligned}$$

De manera análoga, si se usa el Teorema de Taylor en un proceso de Itô, los términos de orden 3 o superior también se anulan, debido a que como se observó en la ecuación (4.22), en forma diferencial, se tiene el término $(dB(t))^3 = 0$. Es decir, ahora el residuo quedaría con una expresión $(dX(t))^3$, que si se usa la ecuación (4.33), se obtiene que

$$\begin{aligned} (dX(t))^3 &= (dX(t))^2 dX(t) \\ &= (\mu(t)dt + \sigma(t)dB(t))^2 (\mu(t)dt + \sigma(t)dB(t)) \\ &= \sigma^2(t)dt(\mu(t)dt + \sigma(t)dB(t)) \\ &= \sigma^2(t)\mu(t)(dt)^2 + \sigma^3(t)dt dB(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con esto ya explicado, se procede al siguiente teorema.

Teorema 4.5. *Sea $X(t)$ un proceso estocástico que admite diferencial estocástico dado por*

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t).$$

Además, sea $f(x) \in C^2$, entonces la forma diferencial para el proceso $f(X(t))$, está dado por

$$df(X(t)) = f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))(dX(t))^2 \quad (4.34)$$

$$= \left(f'(X(t))\mu(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))\sigma^2(t) \right) dt + f'(X(t))\sigma(t)dB(t). \quad (4.35)$$

Observación 4.3. El teorema anterior también se puede representar en forma integral, cuya expresión es la siguiente

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t \left(f'(X(u))\mu(u) + \frac{1}{2}f''(X(u))\sigma^2(u) \right) du + \int_0^t f'(X(u))\sigma(u)dB(u).$$

Ejemplo 4.2. Sea $X(t)$ cuyo diferencial estocástico está dado por

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t), \quad (4.36)$$

donde $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Encuentre $X(t)$

Solución

Usualmente, resolver este tipo de expresiones lleva su complejidad, debido a que hay que determinar la función que sea de utilidad. Para ello, considere la ecuación diferencial $f'(x) = f(x)$. Haciendo un poco de álgebra se puede encontrar que dicha expresión es equivalente a $Ln(f(x)) = x$, entonces, si se usa la fórmula de Itô para $Ln(X(t))$, se sigue a partir de sus primeras dos derivadas $\left(\frac{1}{x}; -\frac{1}{x^2}\right)$

$$\begin{aligned} dLn(X(t)) &= \left(\frac{1}{X(t)} \mu X(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{X^2(t)} \sigma^2 X^2(t) \right) dt + \frac{1}{X(t)} \sigma X(t) dB(t) \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB(t). \end{aligned}$$

Integrando se obtiene que

$$Ln(X(t)) - Ln(X(0)) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) \quad (4.37)$$

$$Ln(X(t)) = Ln(X(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) \quad (4.38)$$

$$X(t) = X(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t)}. \quad (4.39)$$

Como se puede observar en la ecuación (4.39), el proceso no es más que el movimiento Browniano geométrico sujeto a la condición inicial $X(0)$.

4.5.1. Fórmula bidimensional de Itô

Se puede extender la fórmula (4.34) a varias dimensiones, sin embargo, solo se considerará el caso bidimensional (dos procesos), para ello se recurre a la fórmula de Taylor para dos variables de segundo orden, es decir, si las derivadas parciales existen y son continuas, entonces se tiene el resultado siguiente.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2} (f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) + R_2(x, y). \end{aligned}$$

De manera análoga el resto para esta expresión en el contexto de los procesos de Itô se anula y con ello se sigue el siguiente resultado.

Teorema 4.6. *Sea $f(x, y)$ una función bidimensional real, cuyas derivadas parciales son funciones de clase C^2 , además para X, Y procesos de Itô, se sigue que*

$$\begin{aligned} df(X(t), Y(t)) &= f_x(X(t), Y(t))dX(t) + f_y(X(t), Y(t))dY(t) \\ &+ \frac{1}{2} f_{xx}(X(t), Y(t))(dX(t))^2 + f_{xy}(X(t), Y(t))dX(t)dY(t) + \frac{1}{2} f_{yy}(X(t), Y(t))(dY(t))^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Observación 4.4. Note que en la ecuación (4.40), la expresión es algo extensa, lo que conduce a la pregunta ¿Existe una versión más simple? La respuesta es positiva, pero debe de estar sujeta a una condición, la cual es que la función $f(x, y)$ sea de la forma $f(X(t), t)$, es decir cuando se tiene en particular que $Y(t) = t$, con ello se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.7. *Sea $f(x, t)$ una función bidimensional real, cuyas derivadas parciales son de clase C^2 , si $X(t)$ es un proceso de Itô, entonces*

$$df(X(t), t) = f_x(X(t), t)dX(t) + f_t(X(t), t)dt + \frac{1}{2} f_{xx}(X(t), t)(dX(t))^2. \quad (4.41)$$

Como se puede observar en la ecuación (4.41) la derivada parcial mixta y la derivada parcial de segundo orden con respecto a t desaparecen, esto se debe principalmente a que la derivada parcial mixta es multiplicada por términos $(dt)^2$ y $dt dB(t)$ lo cual causa que se anule dicho término, de manera similar, la derivada parcial de segundo orden, queda en términos de $(dt)^2$ provocando que dicho término también se anule.

4.6. Reglas de diferenciación en cálculo estocástico

A continuación se presentan las principales reglas de diferenciación en el cálculo estocástico y se comparan con las reglas del cálculo diferencial clásico.

Las reglas principales que se ocupan en el cálculo diferencial clásico son las reglas de **suma**, **resta**, **producto**, **cociente**. En vista del Teorema 4.6, se derivan estas reglas de una manera más sencilla.

Regla de la suma

La primera regla a considerar es la denominada regla de la suma, cuya representación en forma diferencial, dadas dos funciones reales $f(x), g(x)$, es la siguiente

$$d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x). \quad (4.42)$$

Entonces, si se considera la función $f(x, y) = x + y$ y se calculan sus derivadas parciales, se obtiene que $f_x(x, y) = 1 = f_y(x, y)$ y $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = f_{xy}(x, y) = 0$. Haciendo uso del Teorema ya mencionado, se obtiene que

$$\begin{aligned} d(X(t) + Y(t)) &= 1 \cdot dX(t) + 1 \cdot dY(t) + \frac{1}{2}(0 \cdot (dX(t))^2 + 2 \cdot 0 \cdot dX(t)dY(t) + 0 \cdot (dY(t))^2) \\ &= dX(t) + dY(t). \end{aligned}$$

Dicho resultado en comparación a la ecuación (4.42) establece que se preserva la regla bajo adición. Si se desea modificar a una diferencia basta con tomar $f(x, y) = x - y$ y bajo un procedimiento similar la conclusión sería la misma solo que se modifica el signo de la regla.

Regla del producto

Ahora la regla a considerar será la del producto, representada en forma diferencial como

$$d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x). \quad (4.43)$$

Entonces, tomando a $f(x, y) = xy$ y calculando las derivadas parciales se tiene que $f_x(x, y) = y$, $f_y(x, y) = x$, $f_{xy}(x, y) = 1$ y $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d(X(t)Y(t)) &= Y(t)dX(t) + X(t)dY(t) + dX(t)dY(t) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (dX(t))^2 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (dY(t))^2 \\ &= Y(t)dX(t) + X(t)dY(t) + dX(t)dY(t). \end{aligned}$$

Dicha expresión comparada con la ecuación (4.43), difiere en el término $dX(t)dY(t)$, entonces no toda regla de diferenciación del cálculo clásico se preserva bajo procesos estocásticos. Más aún a partir de dicha regla se puede expresar la integración por partes, para ello basta con integrar desde a hasta b la regla del producto, es decir,

$$\int_a^b d(X(t)Y(t)) = \int_a^b X(t)dY(t) + \int_a^b Y(t)dX(t) + \int_a^b dX(t)dY(t). \quad (4.44)$$

Entonces, despejando la ecuación (4.44) se obtiene que

$$\int_a^b X(t) dY(t) = X(b)Y(b) - X(a)Y(a) - \int_a^b Y(t) dX(t) - \int_a^b dX(t) dY(t). \quad (4.45)$$

Regla del cociente

Por último, la representación diferencial de la regla del cociente clásica es

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0. \quad (4.46)$$

Ahora considere la función $f(x, y) = \frac{x}{y}$, por lo tanto, sus derivadas parciales son $f_x(x, y) = \frac{1}{y}$, $f_y(x, y) = -\frac{x}{y^2}$, $f_{xy} = -\frac{1}{y^2}$ y $f_{xx}(x, y) = 0$, $f_{yy}(x, y) = \frac{2x}{y^3}$ sustituyendo dichas derivadas en la fórmula bidimensional de Itô se sigue que para $Y(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{X(t)}{Y(t)}\right) &= \frac{1}{Y(t)}dX(t) - \frac{X(t)}{Y^2(t)}dY(t) + \frac{1}{2} \cdot 0(dX(t))^2 - \frac{1}{Y^2(t)}dX(t)dY(t) + \frac{1}{2} \frac{2X(t)}{Y^3(t)}(dY(t))^2 \\ &= \frac{Y^2(t)dX(t) - X(t)Y(t)dY(t)}{Y^3(t)} - \frac{dX(t)dY(t)}{Y^2(t)} + \frac{X(t)(dY(t))^2}{Y^3(t)} \\ &= \frac{Y(t)dX(t) - X(t)dY(t) - dX(t)dY(t)}{Y^2(t)} + \frac{X(t)(dY(t))^2}{Y^3(t)}. \end{aligned}$$

Como se puede observar en el contexto de procesos estocásticos, la regla del cociente preserva una estructura similar a la ecuación (4.46), aunque presenta correcciones adicionales, entre ellas términos cuadráticos.

Ejemplo 4.3. Sea $X(t) = B(t)$ y considere a $Y(t) = e^{B(t)}$, encuentre $d\left(\frac{X(t)}{Y(t)}\right)$

Solución Observe que $dX(t) = dB(t)$, mientras que aplicando la formula de Itô se tiene que $dY(t) = e^{B(t)}dB(t) + \frac{1}{2}e^{B(t)}dt$. Entonces usando la regla del cociente, se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} d\left(\frac{X(t)}{Y(t)}\right) &= d\left(\frac{B(t)}{e^{B(t)}}\right) \\ &= \frac{e^{B(t)}dB(t) - B(t)\left(e^{B(t)}dB(t) + \frac{1}{2}e^{B(t)}dt\right) - dB(t)\left(e^{B(t)}dB(t) + \frac{1}{2}e^{B(t)}dt\right)}{(e^{B(t)})^2} - \frac{dB(t)(e^{B(t)})^2dt}{(e^{B(t)})^3} \\ &= \frac{e^{B(t)}dB(t) - B(t)\left(e^{B(t)}dB(t) + \frac{1}{2}e^{B(t)}dt\right) - e^{B(t)}dt}{e^{2B(t)}}. \end{aligned}$$

4.7. Aplicaciones del cálculo estocástico

En este apartado, se expone un modelo de crecimiento de población cuya tasa de crecimiento presenta “ruido”. Es decir, una alteración en la tasa de crecimiento, esto indica que la población es de tamaño estocástico. Además, se presenta una alternativa para la ecuación que mide el nivel del colesterol, una versión similar de estos modelos se pueden encontrar en (Calin, 2015)

4.7.1. Modelo de crecimiento estocástico

Primero considere el modelo de crecimiento exponencial, que se puede expresar de la siguiente forma

$$dP(t) = r(t)P(t) dt. \quad (4.47)$$

Donde $r(t)$ es la tasa de crecimiento estocástico, si se fija que dicha tasa presenta fluctuaciones alrededor de una función determinista, por ejemplo $\alpha(t)$. Entonces la tasa $r(t)$ se formula de la siguiente manera

$$r(t) = \alpha(t) + \text{“ruido”}. \quad (4.48)$$

Ahora, considerando a β como una constante positiva que mide la magnitud del ruido y $B(t)$ es un movimiento Browniano, se sigue que

$$\text{“ruido”} = \beta \frac{dB(t)}{dt}. \quad (4.49)$$

Observando detenidamente la ecuación (4.49), a priori el término $\frac{dB(t)}{dt}$ parece no tener congruencia, ya que muchas veces representa la derivada de una función y como se vio previamente el movimiento Browniano no es diferenciable, pero en este contexto no está denotando una derivada en sí, más bien denota el cambio aleatorio por unidad de tiempo.

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (4.49), en la ecuación (4.48), se obtiene la siguiente expresión.

$$r(t) = \alpha(t) + \beta \frac{dB(t)}{dt}. \quad (4.50)$$

Entonces, realizando la sustitución de la ecuación (4.50), en la ecuación (4.47) se tiene la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE).

$$\begin{aligned} dP(t) &= r(t)P(t) dt \\ &= \left(\alpha(t) + \beta \frac{dB(t)}{dt} \right) P(t) dt \\ &= \alpha(t)P(t) dt + \beta P(t) dB(t). \end{aligned}$$

La solución a la ecuación diferencial estocástica es similar a la solución vista en el Ejemplo 4.2, entonces considerando a $P(0) = P_0$ y realizando las operaciones, se llega a que

$$\ln \left(\frac{P(t)}{P_0} \right) = \int_0^t \alpha(s) ds - \frac{\beta^2 t}{2} + \beta B(t). \quad (4.51)$$

De la ecuación anterior se puede deducir que la expresión a la izquierda de $\beta B(t)$ es determinista, por lo tanto, la distribución de $\ln \left(\frac{P(t)}{P_0} \right) \sim N \left(\int_0^t \alpha(s) ds - \frac{\beta^2 t}{2}, \beta^2 t \right)$.

Por otro lado, siguiendo con el desarrollo, solo queda aplicar la exponencial y despejar $P(t)$. por lo tanto,

$$P(t) = P_0 e^{\int_0^t \alpha(s) ds - \frac{\beta^2 t}{2} + \beta B(t)}. \quad (4.52)$$

Una vez comprendida la teoría se presenta el siguiente problema cuyo enfoque esta relacionado con el modelo anterior.

Si se tiene una población de bacterias, cuya tasa de crecimiento esta dada por $r = 0.09$ y, además, la magnitud del ruido está dada por $\beta = 0.02$ por día. Considere que la población inicial es de 10,000 bacterias. Calcule la probabilidad de que haya más de 11,000 bacterias después de 2 días.

Para resolver dicho problema primero se comienza por definir a $P(t)$ como la población de bacterias al tiempo t , posteriormente se define la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dP(t) = 0.09P(t) dt + 0.02P(t) dB(t). \quad (4.53)$$

Entonces, realizando las operaciones adecuadas la probabilidad queda de la siguiente forma

$$P[P(2) > 11,000] = P\left[\frac{P(2)}{P_0} > \frac{11,000}{10,000}\right]. \quad (4.54)$$

Aplicando el logaritmo natural en la ecuación anterior se tiene que

$$P\left[\ln\left(\frac{P(2)}{P_0}\right) > \ln(1.1)\right]. \quad (4.55)$$

Entonces, se está calculando una probabilidad usando una distribución normal, por lo tanto, se requiere estandarizar para facilitar los cálculos, ahora se deben de hallar la media μ y la desviación estándar σ . Es decir

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^2 0.09 ds - \frac{(0.02)^2 2}{2} = 0.1796. \\ \sigma &= (0.02)\sqrt{2} \approx 0.02828. \end{aligned}$$

Finalmente, se procede a estandarizar considerando a Z como una variable aleatoria normal estándar, la probabilidad queda como

$$\begin{aligned} P\left[\frac{\ln\left(\frac{P(2)}{P_0}\right) - 0.1796}{0.02828} > \frac{\ln(1.1) - 0.1796}{0.02828}\right] &= P[Z > -2.98] \\ &= P[Z < 2.98] \\ &= 0.9986. \end{aligned}$$

En otras palabras, esta probabilidad indica que el crecimiento de bacterias en esas condiciones rebase la población de 11,000 es casi seguro para ello tome en cuenta las siguientes trayectorias dadas por el proceso $P(t)$.

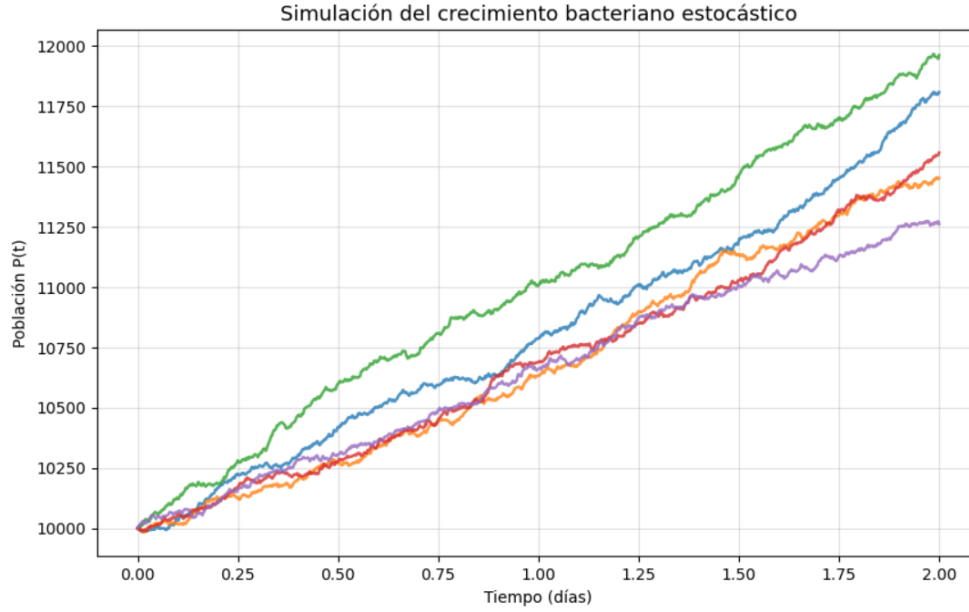


Figura 4.1: Simulación de cinco trayectorias del crecimiento bacteriano.

Como se puede observar, a pesar de tener 5 trayectorias diferentes, el crecimiento de las bacterias sigue por encima de 11,000; esto es debido a que la probabilidad previamente calculada es cercana a 1.

4.7.2. Crecimiento estocástico en un ambiente competitivo

Ahora se analizará otro modelo importante comúnmente llamado modelo de crecimiento logístico, introducido por el matemático Verhulst en el año de 1837 .

Dicho modelo similar al de la ecuación (4.47), se añade un termino de competición el cuál hace que la población disminuya debido al número de encuentros entre los individuos de la población, que será proporcional al tamaño de la población al cuadrado es decir

$$dP(t) = rP(t)dt - kP^2(t)dt. \quad (4.56)$$

Donde r es una constante que indica la tasa de crecimiento de la población, k es una constante positiva que indica el efecto de mitigación sobre el crecimiento de la población que causa la competencia entre recursos del ambiente. Por lo general el cociente entre r y k denotado por K es llamado capacidad de carga del ambiente (Calin, 2015).

Si se considera que la tasa de crecimiento es perturbada por algún ruido con intensidad o magnitud β , entonces se obtiene la siguiente ecuación.

$$dP(t) = rP(t)dt - kP^2(t)dt + \beta P(t)dB(t). \quad (4.57)$$

Antes de resolver dicha ecuación primero se debe de realizar una transformación ya que no se puede aplicar de manera directa la Proposición A.1 del Apéndice A ya que solo aplica para EDE's lineales, en este caso la ecuación (4.57) es una ecuación no lineal, entonces se procede a realizar

el siguiente cambio $\omega(t) = \frac{1}{P(t)}$, por lo tanto, haciendo uso de la regla del cociente se obtiene la siguiente ecuación

$$d\omega(t) = d\left(\frac{1}{P(t)}\right) = -\frac{dP(t)}{P^2(t)} + \frac{(dP(t))^2}{P^3(t)}.$$

Luego haciendo uso de $(dP(t))^2 = \beta^2 P(t)dt$. y realizando las sustituciones adecuadas la ecuación es

$$\begin{aligned} d\omega(t) &= -P^{-2}(t)(rP(t)dt - kP^2(t)dt + \beta P(t)dB(t)) + P^{-3}(t)\beta^2 P(t)dt \\ &= -rP^{-1}(t)dt + kdt - \beta P^{-1}(t)dB(t) + \beta^2 P^{-1}(t)dt \\ &= -r\omega(t)dt + kdt + \beta^2 \omega(t)dt - \beta^2 \omega(t)dB(t) \\ &= ((\beta^2 - r)\omega(t) + k)dt - \beta^2 \omega(t)dB(t). \end{aligned}$$

Pero esta nueva ecuación es una ecuación diferencial estocástica lineal, entonces para aplicar la Proposición A.1 considere a $\alpha(t) = k$, $\beta(t) = \beta^2 - r$, $\gamma(t) = 0$, $\delta(t) = -\beta$.

Así, $dU(t) = (\beta^2 - r)U(t)dt + \beta U(t)dB(t)$, entonces, $U(t)$ se expresa como

$$U(t) = e^{\frac{1}{2}\beta^2 t - rt - \beta B(t)}. \quad (4.58)$$

Por lo tanto, considerando a $U(t)$ como la expresión dada por (4.58) la solución es

$$\omega(t) = e^{\frac{1}{2}\beta^2 t - rt - \beta B(t)} \left(\omega(0) + \int_0^t \frac{k}{e^{\frac{1}{2}\beta^2 s - rs - \beta B(s)}} ds \right). \quad (4.59)$$

Pero como $\omega(t) = \frac{1}{P(t)}$, entonces $P(t) = \frac{1}{\omega(t)}$ así se sigue que

$$P(t) = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\beta^2 t - rt - \beta B(t)} \left(\omega(0) + \int_0^t \frac{k}{e^{\frac{1}{2}\beta^2 s - rs - \beta B(s)}} ds \right)} = \frac{e^{rt - \frac{1}{2}\beta^2 t + \beta B(t)}}{\frac{1}{P(0)} + k \int_0^t e^{rs - \frac{1}{2}\beta^2 s + \beta B(s)} ds}. \quad (4.60)$$

A partir de esta solución, se puede observar en la parte del numerador que si el exponente determinista es decir, $r - \frac{1}{2}\beta^2 > 0$ la población tiende a concentrarse alrededor de la capacidad de carga K cuando t es suficientemente grande, por otro lado si dicho exponente es negativo, entonces el termino estocástico tiende a 0, comúnmente llamado extinción, aunque esta extinción no necesariamente implica una extinción biológica completa.

Entonces, en resumen se tiene que

$$P(t) = \begin{cases} \text{se concentra alrededor de } K, & \text{si } r - \frac{1}{2}\beta^2 > 0, \\ \text{colapsa a 0,} & \text{si } r - \frac{1}{2}\beta^2 < 0. \end{cases}$$

Además si $r - \frac{1}{2}\beta^2 = 0$, el proceso se vuelve un movimiento Browniano geométrico. A continuación en las Figuras 4.2a, 4.2b, 4.2c, se pueden apreciar claramente estos cambios del exponente comparados con la solución de la ecuación diferencial logística.

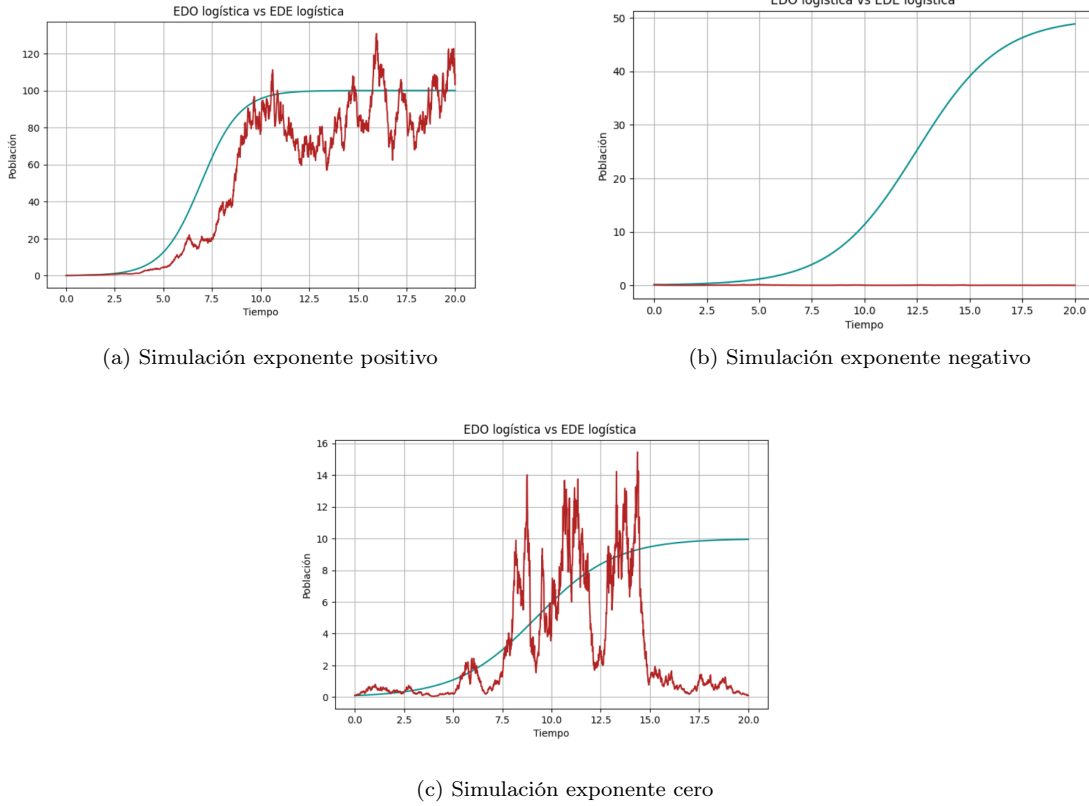


Figura 4.2: Comportamiento del modelo determinista y estocástico para distintos signos del exponente.

Como se puede apreciar, la ecuación diferencial ordinaria logística es una curva suave y monótona creciente que, pese a modificar los parámetros, mantiene la misma forma general. En cambio, la ecuación diferencial estocástica logística sí presenta cambios importantes, lo cual se debe principalmente a la inclusión del ruido ambiental, que introduce fluctuaciones en el crecimiento de la población.

4.7.3. Nivel de colesterol en sangre

Considere que el nivel de colesterol en sangre en el momento t se denota por $C(t)$. Dicha función va depender de factores como la ingesta de grasas y a su vez también depende de la absorción y producción de colesterol. Entonces bajo estos supuestos se puede considerar que la tasa de cambio de colesterol en sangre esta dada por la siguiente expresión (Calin, 2015).

$$\frac{dC(t)}{dt} = a(C_0 - C(t)) + bD. \quad (4.61)$$

Donde C_0 es una constante que representa el nivel de colesterol equilibrado y el termino D también constante que representa la ingesta diaria de colesterol. A su vez a, b son parámetros que modelan la producción y absorción de colesterol del individuo.

Dado que la ecuación (4.61) presenta una forma determinista, si se presentan variaciones en la ingesta diaria de colesterol, entonces, de manera análoga se introduce un “ruido” con magnitud σ . Ahora la magnitud σ indica una variabilidad externa como hábitos, dietas, etc. Por lo tanto, se obtiene la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dC(t) = a(C_0 - C(t))dt + bDdt + \sigma dB(t). \quad (4.62)$$

Para resolver la ecuación anterior se aplica la Proposición A.1 del Apéndice A. Pero, ahora suponga que la ingesta diaria de colesterol, no es constante. En otras palabras se modifica el término D agregando un ruido, entonces la ecuación (4.62), adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned} dC(t) &= a(C_0 - C(t)) dt + b(D + \frac{dB_1(t)}{dt})dt + \sigma dB_2(t) \\ &= a(C_0 - C(t)) dt + bDdt + bdB_1(t) + \sigma dB_2(t). \end{aligned}$$

La magnitud del primer ruido ($bdB_1(t)$) indica una variabilidad interna del individuo. Para resolver dicha ecuación primero se agrupan los términos con sus respectivos diferenciales por lo tanto,

$$dC(t) = [(aC_0 + bD) - aC(t)] dt + bdB_1(t) + \sigma dB_2(t). \quad (4.63)$$

Como se puede observar aparecen dos ruidos, los cuales son independientes entre sí, pero estos ruidos están ligados a dos movimientos Brownianos independientes, bajo estos supuestos se pueden sumar ambos ruidos y producir un nuevo ruido el cual se denotará por $d\tilde{B}(t)$, la magnitud de este ruido esta dada por la siguiente expresión $\sqrt{b^2 + \sigma^2}$. Aplicando dicha transformación a la ecuación (4.63) se obtiene la siguiente expresión

$$dC(t) = [(aC_0 + bD) - aC(t)] dt + \sqrt{b^2 + \sigma^2} d\tilde{B}(t). \quad (4.64)$$

Entonces, aplicando la Proposición A.1 del Apéndice A la solución de la ecuación anterior esta dada por

$$C(t) = U(t) \left(C_0 + \int_0^t \frac{\alpha(s) - \delta(s)\gamma(s)}{U(s)} ds + \int_0^t \frac{\gamma(s)}{U(s)} d\tilde{B}(s) \right). \quad (4.65)$$

Donde $\alpha(t) = aC_0 + bD$, $\beta(t) = -a$, $\gamma(t) = \sqrt{b^2 + \sigma^2}$, $\delta(t) = 0$. Entonces solo resta hallar el proceso $U(t)$, cuyo diferencial estocástico es dado por

$$dU(t) = \beta(t)U(t)dt + \delta(t)U(t)dB(t). \quad (4.66)$$

Como $\delta(t) = 0$ se puede resolver el diferencial estocástico como en un caso determinista dando como resultado $U(t) = e^{-at}$. Por lo tanto, sustituyendo dichos términos en la ecuación (4.65) se tiene que

$$\begin{aligned} C(t) &= e^{-at} \left(C_0 + \int_0^t \frac{aC_0 + bD - 0 \cdot \sqrt{b^2 + \sigma^2}}{e^{-as}} ds + \int_0^t \frac{\sqrt{b^2 + \sigma^2}}{e^{-as}} d\tilde{B}(t) \right) \\ &= e^{-at} C_0 + e^{-at} (aC_0 + bD) \left[\frac{1}{a} e^{as} \right]_0^t + e^{-at} \sqrt{b^2 + \sigma^2} \int_0^t e^{as} d\tilde{B}(t) \\ &= e^{-at} C_0 + \left(C_0 + \frac{b}{a} D \right) [1 - e^{-at}] + e^{-at} \sqrt{b^2 + \sigma^2} \int_0^t e^{as} d\tilde{B}(t). \end{aligned}$$

Ahora, se tiene una expresión explícita, dado que la integral de Itô esta conformada por un término no aleatorio, entonces $C(t)$ tiene una distribución normal con media

$$E[C(t)] = e^{-at} C_0 + \left(C_0 + \frac{b}{a} D \right) [1 - e^{-at}].$$

Y la varianza esta dada por

$$V(C(t)) = \frac{(b^2 + \sigma^2)}{2a}(1 - e^{-2at}).$$

Entonces, si se mantiene una dieta por un periodo largo de tiempo, el nivel de colesterol se vuelve una variable aleatoria normal con nuevos parámetros, es decir

$$C(t) \sim N\left(C_0 + \frac{b}{a}D, \frac{b^2 + \sigma^2}{2a}\right). \quad (4.67)$$

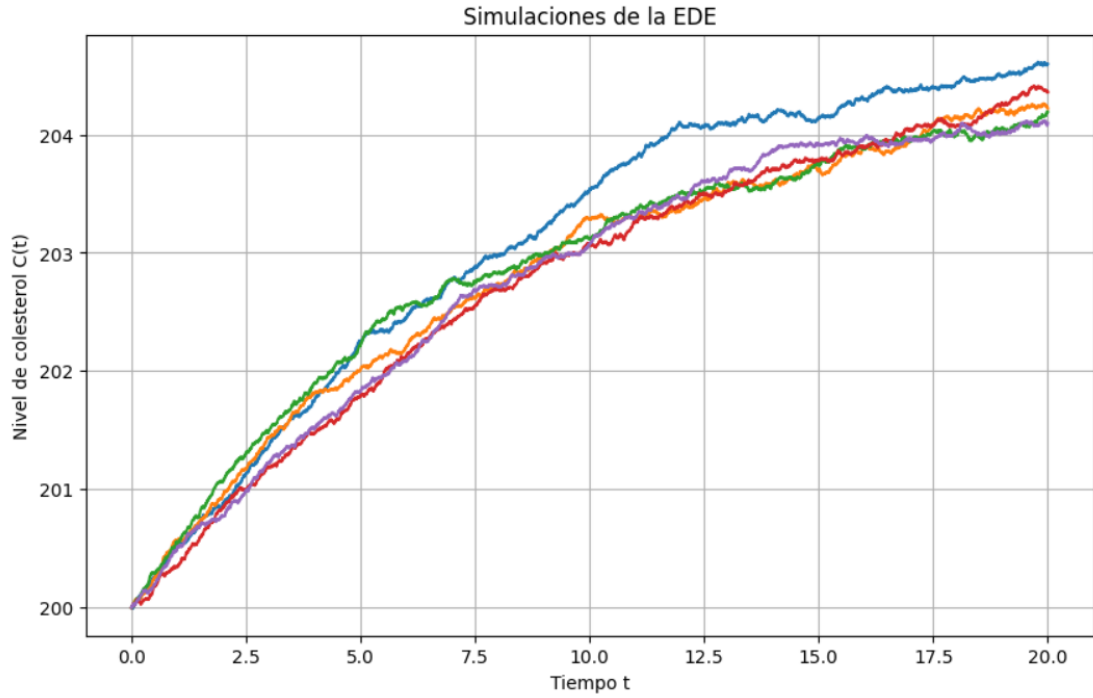


Figura 4.3: Comportamiento del modelo estocástico con respecto al nivel del colesterol en sangre.

Como se puede apreciar en la Figura 4.3 dado a largo plazo la media del proceso tiende a $C_0 + \frac{b}{a}D$, para esta simulación se usó que $C_0 = 200$, $a = 0.1$, $b = 0.05$, $D = 10$, entonces

$$C_0 + \frac{b}{a}D = 200 + \frac{0.05}{0.1}10 = 205.$$

Dicha media concuerda con la tendencia de las trayectorias, estos parámetros indican que se tiene una absorción baja, una dieta equilibrada y una tasa de ingesta moderada.

Por otro lado, también se puede llegar a disminuir el aumento del colesterol, recuerde que $C_0 = 200$ indica un nivel de colesterol aceptable, entonces bajo la condición de que un paciente presente un colesterol de 220 y con los parámetros adecuados la Figura 4.4 muestra como dicho nivel decrece.

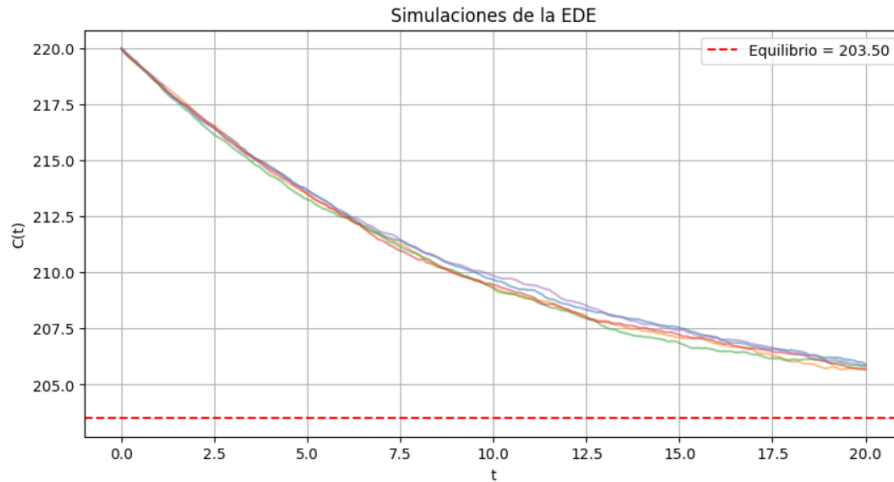


Figura 4.4: Comportamiento del modelo estocástico con respecto al nivel del colesterol en sangre (decreciente).

Las figuras anteriores presentaron un ruido bajo, sin embargo si el ruido influye mucho, la tendencia de las trayectorias es más dispersa pero aun están alrededor de la media o bien la llegan a sobrepasar, este comportamiento es esperado ya que la media no actúa como una barrera solo indica una medida de tendencia, como se puede observar en la Figura 4.5

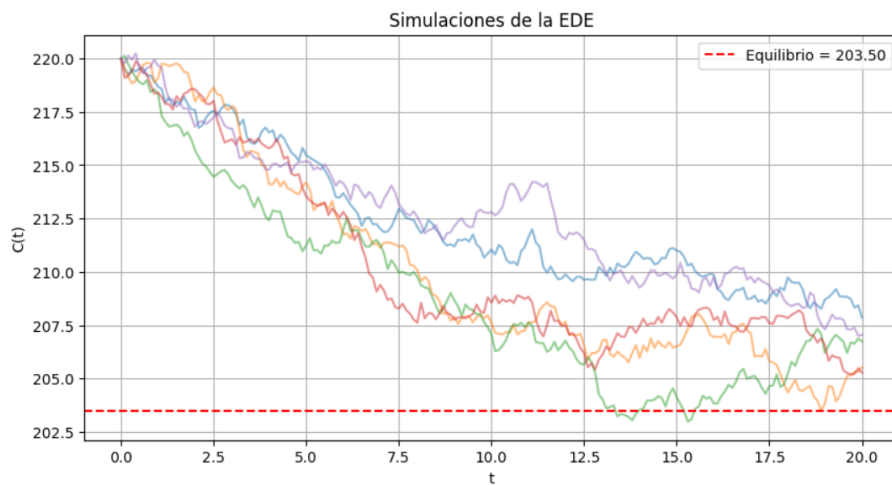


Figura 4.5: Comportamiento del modelo estocástico con respecto al nivel del colesterol en sangre (ruido intenso).

Capítulo 5

Conclusión

En este trabajo de tesis, cuya esencia es teórica, se presentan los elementos del cálculo estocástico de manera que el lector comprenda cada capítulo y pueda esclarecer sus dudas dentro de la misma; para ello, se dedicó a recorrer la naturaleza del cálculo abordando el concepto de integrales en el sentido de Riemann y Riemann-Stieltjes, preparando al lector con los elementos necesarios para adentrarse en el estudio del cálculo estocástico..

Posteriormente se dedicó a presentar conceptos probabilísticos y asentarse en los procesos estocásticos, a su vez retomar conceptos como lo son la **independencia, valor esperado, varianza, covarianza, esperanza condicional**. También se presentó el movimiento Browniano, que da paso a extender el concepto de la integral, pero en el sentido de Itô, con ello se presentan los denominados procesos de Itô. Por otro lado se mostraron las reglas de diferenciación en el sentido estocástico comentando su distinción con las reglas usuales de diferenciación.

Se procedió a analizar las formas diferenciales estocásticas, intuitivamente se da paso a introducir ecuaciones diferenciales, usualmente denominadas ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs), mostrando un modelo de crecimiento de población y un modelo que mida el nivel de colesterol en sangre. Por otro lado gracias a este tipo de ecuaciones diferenciales se pueden usar para modelar en el área financiera, utilizadas para valorar el precio de opciones del tipo europeo.

El tema de las ecuaciones diferenciales estocásticas es primordial una vez comprendido el cálculo estocástico, por ello se espera continuar con una investigación más profunda para detallar las propiedades que tienen y a su vez poder aplicarla en otras áreas de estudio.

También una línea de investigación a futuro son los denominados procesos de Bessel y analizar en paralelo con el cálculo estocástico si estos procesos pueden ser utilizados para modelar en áreas afines.

Apéndice A

Solución general a EDEs lineales

En el contexto de las EDEs la complejidad de sus soluciones radican en la forma que se presentan, entre ellas hay EDEs del tipo lineales y no lineales además, si presenta una o varias variables. Particularmente si se tiene una EDE lineal unidimensional cuya forma es la siguiente

$$dX(t) = (\alpha(t) + \beta(t)X(t))dt + (\gamma(t) + \delta(t)X(t))dB(t). \quad (\text{A.1})$$

En la ecuación anterior, las funciones $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son procesos medibles y presentan continuidad en t . Un método para hallar una solución consiste en buscar un factor integrante entonces, la solución estará determinada por la expresión $X(t) = U(t)V(t)$. Donde

$$dU(t) = \beta(t)U(t)dt + \delta(t)U(t)dB(t), \quad (\text{A.2})$$

$$dV(t) = a(t)dt + b(t)dB(t). \quad (\text{A.3})$$

Las funciones $a(t)$ y $b(t)$ están estrechamente relacionadas con las funciones de la ecuación (A.1), con ello se obtiene el siguiente resultado.

Proposición A.1. *Considere una ecuación diferencial estocástica de la siguiente forma*

$$dX(t) = (\alpha(t) + \beta(t)X(t))dt + (\gamma(t) + \delta(t)X(t))dB(t).$$

Entonces bajo las condiciones usuales la solución está dada por la forma

$$X(t) = U(t) \left(X(0) + \int_0^t \frac{\alpha(s) - \delta(s)\gamma(s)}{U(s)} ds + \int_0^t \frac{\gamma(s)}{U(s)} dB(s) \right). \quad (\text{A.4})$$

Referencias

- Apostol, T. M. (1976). *Análisis matemático*. Reverté, 2 edition.
- Baldi, P. (2017). *Stochastic calculus: An introduction through theory and exercises*. Springer International Publishing, Cham, Suiza, 1 edition.
- Bartle, R. G. (1976). *The Elements of Real Analysis*. John Wiley and Sons (WIE), Brisbane, QLD, Australia.
- Calin, O. (2015). *An Informal introduction to stochastic calculus with applications*. World Scientific Publishing, Singapur.
- DeGroot, M. H. (1992). *Probabilidad y Estadística*. Addison Wesley Longman, Singapur.
- Fitzpatrick, P. M. and Royden, H. L. (2010). *Real Analysis: United States Edition*. Pearson, Upper Saddle River, NJ, 4 edition.
- Klebaner, F. C. (2005). *Introduction to stochastic calculus with applications*. Imperial College Press, Londres, Inglaterra, 2 edition.
- Meyer (1993). *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. Addison Wesley Longman, Singapur.
- Mikosch, T. (1998). *Elementary stochastic calculus with finance in view*. World Scientific Publishing, Singapur.
- Mood, A. M., Franklin, A. G., and Boes, D. C. (1974). *Introduction to the theory of statistics*. McGraw-Hill, Nueva York, NY, Estados Unidos de América, 3 edition.
- Resnick, S. (2003). *A Probability Path*. Birkhauser Boston, Berlin, Germany, 1 edition.
- Ross, S. M. (1994). *Introduction to probability models*. Academic Press, San Diego, CA, Estados Unidos de América, 6 edition.
- Roussas, G. G. (2003). *An introduction to probability and statistical inference*. Academic Press, San Diego, CA.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. Springer, New York, NY, 1 edition.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. Cengage Learning, 6 edition.
- Steyer, R. and Nagel, W. (2017). *Probability and conditional expectation: Fundamentals for the empirical sciences*. John Wiley & Sons, Nashville, TN.
- Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, Cambridge, England.