



BUAP

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

**Dinámica Inflacionaria en una Teoría de
Gravedad Conforme**

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN FÍSICA APLICADA

Presenta: Rogelio Enrique Pascual Veloz
Asesores: Ana Aurelia Avilez López, Óscar Mario
Martínez Bravo

JULIO 2021

Índice

1	Resumen	3
2	Objetivos	3
3	Introducción	4
3.1	Modelo Cosmológico Estándar	5
3.2	Ecuaciones de Friedmann	5
3.3	Problemas con el modelo del Big Bang	8
3.3.1	Problema del Horizonte	8
3.3.2	Problema de la Planitud	8
3.4	Hipótesis de Inflación	9
3.4.1	Aproximación de Rodamiento Lento	9
3.5	Radio Comóvil de Hubble y Número Mínimo de e-folds	10
4	Teorías de Gravedad Modificada	12
4.1	Teorías $f(R)$ no lineales	12
4.1.1	Teoría de Starobinsky	12
4.2	Teorías Escalares Tensoriales en el Marco de Jordan	13
4.2.1	Teoría Escalar Tensorial en un espacio de FRW	14
4.3	Correspondencia entre Teorías $f(R)$ y Teorías tipo Brans Dicke	14
4.3.1	Ejemplo: Modelo de Starobinsky	15
5	Teoría con Invarianza ante Transformaciones Conformes	17
5.1	Motivación	17
5.2	Invarianza de Weyl	17
5.3	Ecuaciones de movimiento	18
6	Dinámica Inflacionaria	20
6.1	Sistemas Dinámicos	20
6.2	Caso 1: Teoría de Starobinsky	22
6.2.1	Puntos Fijos tipo De Sitter	23
6.2.2	Soluciones linealizadas alrededor de los puntos fijos tipo De Sitter	26
6.3	Caso 2: Teoría Invariante Conforme	29
6.3.1	Puntos Fijos Tipo De Sitter	30
6.3.2	Soluciones linealizadas alrededor de los puntos fijos tipo De Sitter	31
7	Parámetros Teóricos y la Constricción del Índice Espectral de acuerdo con PLANCK 2018.	35
7.1	Observables Inflacionarias	35
7.1.1	Cálculo del Índice Espectral	35
7.1.2	Restricciones de PLANCK 2018 para el Índice Espectral	36
7.1.3	Radio comóvil de Hubble	36
8	Soluciones Inflacionarias Viabes de acuerdo a PLANCK 2018	37
8.1	Parámetros teóricos y Soluciones para la teoría de Starobinsky	37
8.1.1	Restricción del espacio de Parámetros	37
8.1.2	Soluciones Viabes alrededor de $P_1^{(Sb)}$	38
8.2	Parámetros teóricos y Soluciones para la Teoría Invariante Conforme	40

8.2.1	Restricción del espacio de Parámetros	40
8.2.2	Soluciones Viables alrededor de $P_3^{(TIC)}$	40
9	Conclusiones	42
10	Apéndices	43
10.1	Ecuaciones de movimiento en Teorías $f(R)$	43
10.2	Simetría Conforme	43
10.2.1	Transformaciones Conformes	43
10.3	Métrica FRW con Geometría Plana	44
11	Bibliografía	46

1 Resumen

En este trabajo se estudia la dinámica inflacionaria de dos modelos basados en teorías de gravedad modificada: el modelo tipo Starobinsky y una teoría con simetría bajo transformaciones conformes. De esta última, también encontró una estimación de las observables inflacionarias y de los parámetros viables. Ambos modelos poseen un término cuadrático de curvatura, por lo cual se compararon los resultados obtenidos.

2 Objetivos

Objetivo General

Estudiar la dinámica inflacionaria de un modelo tipo Starobinsky y de una teoría con simetría bajo transformaciones conformes. Se busca encontrar soluciones analíticas para cada modelo, las cuales se aproximan a puntos fijos tipo De Sitter. Para el modelo con simetría conforme adicionalmente se estimarán las observables inflacionarias, las cuales son las cantidades que describen los espectros de potencias primordiales de las perturbaciones escalares y tensoriales, estas son, el índice espectral de las perturbaciones escalares y la tasa de las amplitudes de las perturbaciones tensoriales y las escalares. Por último, se determinará el rango de valores de los parámetros teóricos que son compatibles con las últimas restricciones reportadas por la colaboración de PLANCK 2018.

Objetivos Específicos

- Obtener las ecuaciones de movimiento generales para ambos modelos.
- Restringir las ecuaciones de movimiento de ambos modelos a un universo homogéneo e isotrópico con la métrica de Friedmann Robertson Walker con geometría plana.
- Hacer la aproximación de rodamiento lento del modelo de Starobinsky para determinar si es posible describir un periodo inflacionario en ese modelo.
- Utilizar el formalismo de sistemas dinámicos para encontrar las familias de soluciones de cada sistema, para lo cual, para ambos modelos:
 - Obtener las ecuaciones del sistema dinámico.
 - Obtener los puntos fijos tipo De Sitter.
 - Obtener la estabilidad lineal de los puntos fijos mediante el análisis de eigenvalores de Liapunov.
 - Obtener las soluciones analíticas linealizadas alrededor a los puntos críticos relevantes.A partir de las soluciones encontradas, ver la evolución del radio comóvil de Hubble, del parámetro de Hubble, del parámetro de rodamiento lento y del campo escalar.
- Comparar los resultados de ambos modelos.
- Para el modelo con simetría conforme, obtener una estimación de las observables inflacionarias y del rango de parámetros que permiten valores de las observables compatibles con las últimas restricciones reportadas por PLANCK 2018.

3 Introducción

La búsqueda de nueva física es necesaria para resolver los múltiples problemas existentes en el modelo del Big Bang (BB), como son la asimetría materia-antimateria o el problema de las curvas de rotación de las galaxias, las cuales llevaron a introducir la hipótesis de la existencia de la materia oscura. El modelo del Big Bang clásico describe muy bien la evolución del universo y tiene predicciones acertadas como la expansión del universo o las abundancias de los elementos ligeros primordiales, sin embargo, estos modelos tienen inconsistencias a nivel teórico, dentro de las cuales dos de ellas son fundamentales: el problema de la planitud y el problema del horizonte. Estas inconsistencias se resuelven a partir de asumir que el universo temprano transitó por una etapa de expansión acelerada usualmente conocida como "inflación". El paradigma cosmológico estándar actual está basado en Relatividad General, el modelo estándar de partículas e interacciones elementales y las hipótesis de la existencia de componentes oscuros como la materia y energía oscuras, e incorpora como hipótesis extra la teoría de inflación para describir al universo en sus etapas más tempranas.

Es bien sabido que la teoría de Relatividad General de Einstein funciona extraordinariamente bien a escalas de nuestro sistema solar, sin embargo, a escalas cosmológicas no tenemos tanta certeza de que siga siendo válida. Debido a que no hay evidencia directa de materia oscura o energía oscura, los modelos de gravedad modificada no se han descartado y son plausibles. Es por esto que en las últimas décadas se han propuesto teorías alternativas a la Relatividad General (RG), dentro de las cuales se encuentran las teorías Escalares-Tensoriales (ET) y los modelos tipo $f(R)$.

El modelo de Starobinsky es un modelo tipo $f(R)$ que contiene un término de curvatura no lineal, el cual es invariante bajo transformaciones conformes y es el término dominante al inicio de inflación. Dentro del zoológico de modelos inflacionarios, el modelo de Starobinsky tiene predicciones de las observables inflacionarias ¹ que se encuentran en la región reportada por PLANCK 2018 con mayor certidumbre estadística. Por otro lado, la teoría invariante ante transformaciones conformes (TIC) considerada en este trabajo, es una teoría escalar tensorial en la cual todos los términos de la acción son invariantes ante transformaciones conformes. La acción de esta teoría tiene un término no lineal de curvatura al igual que el modelo de Starobinsky, pero además contiene un término de acoplamiento no mínimo entre un campo escalar y la métrica a través del término lineal de curvatura, con el cual es posible recuperar Relatividad General a escalas de energía menores que en inflación sin violar la simetría conforme. También la acción TIC tiene un término cuártico de autointeracción del campo escalar muy similar al potencial del Higgs [?], [20]. En este trabajo se considera la acción más sencilla en el contexto de teorías invariantes conformes que incorporan un término lineal de curvatura y un campo escalar. Recientemente se ha sugerido en diversos trabajos que las teorías con simetría conforme describen un escenario inflacionario interesante, además de tener pocos parámetros libres [1], [17], [3], [9]. Por lo anterior, es de interés estudiar la dinámica inflacionaria de esta teoría invariante conforme y comparar los resultados que se obtengan con los del modelo de Starobinsky.

El rango de validez y las suposiciones consideradas sobre los modelos inflacionarios estudiados en este trabajo son los siguientes: Se asume un universo homogéneo e isótropo con geometría plana, cuya estructura se describe a partir de la métrica de Friedmann Robertson Walker (FRW). Se trabaja en el régimen clásico de la gravedad y de un campo real. ² Se trabaja en el marco de Jordan con el fin de satisfacer el principio de equivalencia. Se trabaja en unidades naturales. Se estudia la dinámica únicamente durante el periodo inflacionario.

¹Las observables inflacionarias son el índice espectral n_s , que describe el espectro de potencias primordial de las perturbaciones de materia, y la tasa tensor a escalar r , la cual es el cociente de las amplitudes de modos tensoriales y escalares inferidos de mediciones del espectro angular de potencias del CMB.

²Durante inflación, la escala de energía es cercana a la escala de Planck, pero inferior a ésta y por lo tanto es válido usar el régimen clásico de la gravedad. Sin embargo, términos de curvatura no lineales introducen de manera efectiva la influencia de fluctuaciones cuánticas dominantes a mayores escalas de energía.

3.1 Modelo Cosmológico Estándar

El modelo cosmológico estándar Λ CDM está basado en Relatividad General aplicada al caso particular de espacios maximalmente simétricos, los cuales son compatibles con el principio cosmológico, el cual establece que el universo es homogéneo e isótropo a escalas cosmológicas (en el orden de cientos de Megapársecs) y cuya geometría se describe por métricas de la clase de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) en coordenadas comóviles. Aunado a esto, en 1923 Hermann Weyl postuló que el movimiento de las galaxias se podía tratar como partículas dentro de un fluido que permea todo el espacio. A partir de este postulado enunció el principio de Weyl: "Las partículas del fluido yacen en el espacio-tiempo en una congruencia de geodésicas temporaloides que divergen de un punto común en el pasado finito o infinito". Esto quiere decir que existe una y sólo una geodésica que pasa por cada punto del espacio-tiempo. Por lo tanto, la materia en cualquier punto del espacio-tiempo posee una velocidad única, por lo que puede modelarse como una mezcla de fluidos perfectos barotrópicos no colisionales. Este principio sólo es válido en épocas tardías y a nivel de la cosmología de fondo. Las especies de partículas que forman a cada uno de dichos fluidos perfectos son las siguientes: un 4% del contenido total de materia está formado por los así nombrados bariones, los cuales constituyen la materia visible, la cual puede ser descrita por el modelo estándar de partículas elementales. Una fracción del 26% del total se forma por materia oscura de cuya existencia tenemos indicios en curvas de rotación de galaxias así como en la cinemática de galaxias en cúmulos, la estructura de materia a grandes escalas y la estructura del espectro del fondo cósmico de microondas (CMB). La mayor fracción del contenido cósmico (alrededor del 70%) se asume está formada por "energía oscura", la cual en el contexto de relatividad general, puede asociarse con la constante cosmológica, la cual se interpreta como energía del vacío y la cual es reponsable de generar la expansión acelerada del universo.

Las principales pruebas observacionales que sustentan el modelo cosmológico estándar son: La recesión de galaxias lejanas descrita por la ley de Hubble, el descubrimiento del fondo cósmico de radiación en el espectro de microondas (CMB) realizado por Penzias y Wilson en los años 60 y la observación de la distribución de materia a grandes escalas realizada en muestreos de galaxias a altos corrimientos al rojo realizados por las colaboraciones SDSS, BOSS, entre otros [21], [?].

3.2 Ecuaciones de Friedmann

La métrica más sencilla que cumple el principio cosmológico, es decir, que describe la geometría de un universo homogéneo e isótropo, es la métrica de Friedmann Robertson Walker (FRW), la cual en coordenadas comóviles y para un espacio con curvatura espacial nula puede escribirse como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (1)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala, γ_{ij} es el tensor métrico euclideo tridimensional, dt^2 es el intervalo temporal y $dx^i dx^j$ es el intervalo espacial.

El contenido de materia del universo puede modelarse como un fluido perfecto. El tensor de energía momento de un fluido perfecto en un universo homogéneo e isótropo es:

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}p, \quad (2)$$

donde u^μ , u^ν es la quadri velocidad de un observador comóvil, ρ es la densidad de energía, p es la presión hidrostática y $g^{\mu\nu}$ es el recíproco del tensor métrico. La traza del tensor energía momento es:

$$T = -\rho + 3p. \quad (3)$$

El tensor energía momento se conserva covariantemente:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (4)$$

Esta ley de conservación es consecuencia de las identidades de Jacobi de las ecuaciones de Einstein y del teorema de Noether ³. La componente temporal de las ecuaciones de conservación anteriores corresponde a la ecuación de conservación de la densidad de energía del fluido:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (5)$$

la cual se satisface para cada especie por separado dando lugar a las siguientes soluciones como funciones del factor de escala en cada caso:

$$\rho_R = \rho_{0M} a^{-4} \quad (6)$$

$$\rho_M = \rho_{0M} a^{-3} \quad (7)$$

$$\rho_{\Lambda} = \text{constante}, \quad (8)$$

donde el subíndice R denota especies relativistas o radiación, el subíndice M denota materia (que incluye materia bariónica y materia oscura) y el subíndice Λ denota energía oscura. Al restringir las ecuaciones de campo de Einstein a la métrica de FRW, se obtienen las ecuaciones de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (9)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (10)$$

donde a es el factor de escala; $H = \frac{\dot{a}}{a}$ es la tasa de Hubble, la cuál cuantifica la tasa de expansión; ρ es la densidad de energía del total de la materia en el universo ; p es la presión de la misma y Λ es la constante cosmológica, a la cual se le asocia la energía oscura.

Alternativamente se puede escribir la primera ecuación de Friedmann en términos de las densidades relativas $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$ de las diferentes especies, donde $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ es la densidad crítica del universo:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,R} a^{-4} + \Omega_{0,M} a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda}, \quad (11)$$

donde $\Omega_{0,x}$ se conocen como los parámetros de densidad, los cuales son las densidades relativas de las diferentes especies al día de hoy ($a = 1$). Juntando todos los parámetros de densidad la anterior ecuación se puede escribir como:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{(aH)^2} \quad (12)$$

Para un universo con geometría plana, es decir $k = 0$, se tiene que:

$$\Omega - 1 = 0, \quad (13)$$

³La simetría de traslación temporal da lugar a la ley de conservación de la energía y la simetría de traslación espacial da lugar a la ley de conservación del momento lineal, juntas dan lugar a la conservación del tensor energía momento.

y por lo tanto $\Omega = 1$. El valor observacional más reciente de la densidad relativa reportada por PLANCK 2018 es $\Omega_0 = 1.0023_{-0.0054}^{+0.0056}$, lo que indica que nuestro universo observable es altamente plano.

Los parámetros de densidad cumplen la siguiente relación:

$$\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda = 1. \quad (14)$$

El modelo Λ CDM tiene 6 parámetros independientes: el parámetro de densidad bariónica física⁴ $\Omega_b h^2$, el parámetro de densidad de materia oscura fría física $\Omega_c h^2$, la escala del ángulo acústico $100\theta_{MC}$, la profundidad óptica τ , la amplitud del espectro de potencias primordial $\ln(10^{10} A_s)$ y el índice espectral escalar n_s , a partir de los cuales se pueden derivar otros parámetros como: La constante de Hubble H_0 , la edad del universo, entre otros. A continuación se muestran las regiones de confianza de los parámetros cosmológicos reportados por PLANCK 2018:

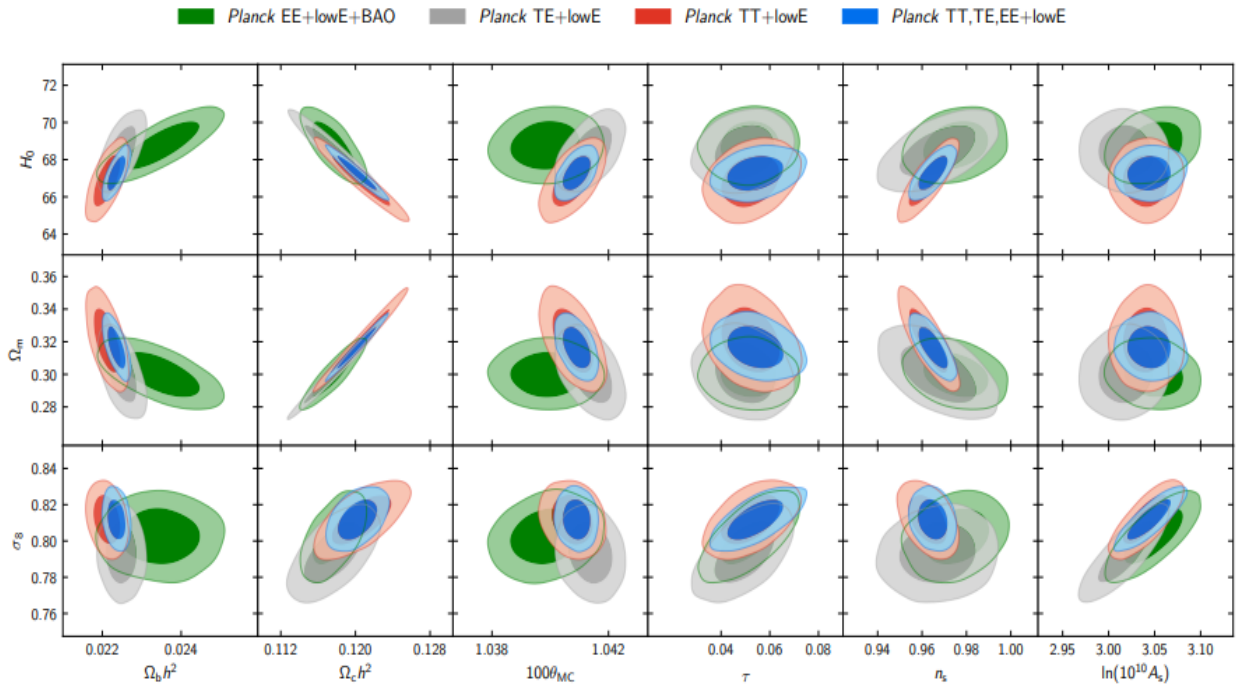


Figure 1: Regiones de confianza de los valores de los parámetros cosmológicos reportados por la colaboración PLANCK 2018. Los parámetros del eje inferior son los parámetros independientes del modelo base Λ CDM. Los parámetros del eje izquierdo son parámetros derivados (donde H_0 está en $Km s^{-1} Mpc^{-1}$).

Las ecuaciones de Friedmann se pueden resolver exactamente para un fluido perfecto y barotrópico, en tal caso, la relación entre la presión y la densidad de energía se escribe como:

$$p = w\rho, \quad (15)$$

donde w es una constante. A esta relación se le denomina la "ecuación de estado" del fluido. Para un universo con una geometría plana y en el cual domina una sola especie, la solución del factor de escala como

⁴La h es la constante de Hubble reducida, cuyo valor es el siguiente: $h = \frac{H_0}{100 Kms^{-1} Mpc^{-1}}$

función del tiempo propio es:

$$a(t) = a_0 t^{\frac{2}{3(w+1)}}. \quad (16)$$

Cuando $w = 0$, representa un universo dominado por materia, en el cual factor de escala evoluciona como:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}. \quad (17)$$

Cuando $w = \frac{1}{3}$, representa un universo dominado por radiación, en el cual el factor de escala evoluciona como:

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Cuando $w = -1$, representa un universo dominado por energía oscura, en el cual el factor de escala evoluciona como:

$$a(t) \propto e^{Ht}. \quad (19)$$

En éste último caso la solución describe al llamado universo de De Sitter. Las soluciones anteriores nos permiten describir aproximadamente las diferentes épocas del universo.

3.3 Problemas con el modelo del Big Bang

3.3.1 Problema del Horizonte

Debido al tiempo finito que ha transcurrido desde el inicio del universo, la radiación solo pudo haber viajado una distancia finita, lo cual implica que el volumen espacial del que hemos recibido señales es finito. La frontera de dicho volumen se conoce como el Horizonte de Partículas. De acuerdo al modelo del Big Bang (BB), el horizonte de partículas en la época de recombinación estaba acotado y su tamaño angular observado al día de hoy es de aproximadamente 2° . Esto indica que regiones con tamaño angular mayor a 2° , de acuerdo a este modelo, debieron estar desconectadas causalmente en recombinación. Sin embargo, es necesario que de alguna forma, estas regiones estuvieran conectadas causalmente en una época anterior para que logaran estar en equilibrio térmico, ya que la temperatura del CMB es de aproximadamente 2.7 K en todas las direcciones de la línea de visión de acuerdo a lo reportado por PLANCK. Para esto, el horizonte de partículas observado al día de hoy debería tener un tamaño angular de 2π . Entonces, el problema del horizonte es el siguiente: Si asumimos que BB es acertado ¿Cómo es posible que los fotones que observamos en el CMB tengan la misma temperatura (y por tanto, haber estado en contacto térmico en recombinación)?.

3.3.2 Problema de la Planitud

Las observaciones realizadas por PLANCK muestran que la curvatura del espacio en el universo es cercana a cero, es decir, que $|\Omega - 1| < 0.01$. Para que esto sea posible, la curvatura del universo debió ser aún más cercana a cero en la época de Planck ($t \approx 10^{-43}\text{ s}$), es decir, del orden de $|\Omega - 1| = 10^{-62}$. Para que esto suceda en el modelo BB, es necesario que tuviera condiciones iniciales muy específicas, a lo que se denomina problema de ajuste fino. Debido a que $\Omega = 1$ es un punto inestable (punto de silla) de la ecuación que gobierna a Ω , una ligera desviación de las condiciones iniciales correspondientes a ese punto crítico, causarían que el universo recolapsara o se quedara vacío muy rápidamente. Por lo tanto, es poco viable pensar que se dieron ésas condiciones ajustadas finamente y es necesario establecer un mecanismo para explicar cómo el universo actual es tan plano de forma más natural.

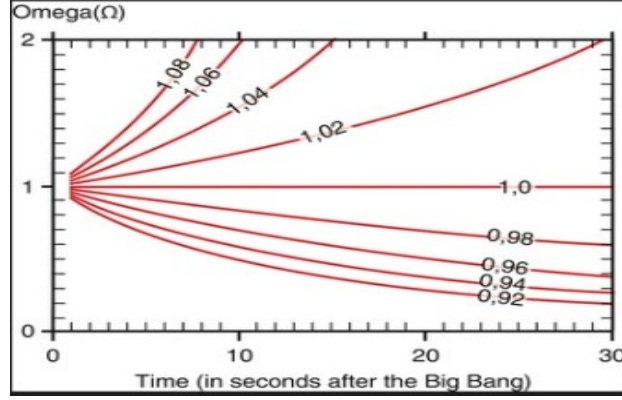


Figure 2: Evolución temporal de la densidad relativa para diferentes valores iniciales [22]. Se observa que con ligeras variaciones del valor inicial, su valor crece o decrece rápidamente.

3.4 Hipótesis de Inflación

En la hipótesis de inflación propuesta originalmente por Alan Guth, se asume que el universo atravesó en sus etapas más tempranas de evolución por periodo de expansión acelerada del universo. Dicha suposición resuelve los problemas de la planitud y el horizonte (entre otros) de los modelos BB originalmente considerados por Lamittre y Friedmann. Para que exista un periodo inflacionario, el único requerimiento es que el radio comóvil de Hubble debe disminuir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0, \quad (20)$$

lo cual tiene como consecuencia el factor de escala tiene segunda derivada positiva:

$$\ddot{a} > 0. \quad (21)$$

El periodo de inflación no puede durar para siempre, por lo que se necesita un mecanismo para hacer que termine ("graceful exit"). Es por esto que se introdujo la aproximación de rodamiento lento.

3.4.1 Aproximación de Rodamiento Lento

Las ecuaciones de Friedmann son no lineales e inflación necesita un mecanismo para terminar, por lo que se utiliza la aproximación de rodamiento lento.⁵

La segunda ecuación de Friedmann (10) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H} = H^2 \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right), \quad (22)$$

donde definimos el primer parámetro de rodamiento lento de Hubble (HSR):

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (23)$$

⁵Históricamente se propuso a un campo escalar como el responsable de llevar inflación a cabo y la aproximación de rodamiento lento consiste en que el campo escalar "ruede" lentamente hacia su estado mínimo de energía, es decir, que el potencial asociado al campo escalar se mantenga aproximadamente constante durante inflación.

Reescribiendo la segunda ecuación de Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 (1 - \epsilon_H), \quad (24)$$

La aproximación de rodamiento lento que consiste en que H debe ser aproximadamente constante y su derivada $\dot{H} \approx 0$ durante inflación, de tal forma que habrá inflación mientras se cumpla la siguiente condición:

$$0 < \epsilon_H < 1. \quad (25)$$

El segundo parámetro de rodamiento lento se puede escribir en términos del primero de la siguiente forma [23]:

$$\eta_H = \frac{\dot{\epsilon}_H}{H\epsilon_H}. \quad (26)$$

La condición para que haya inflación usando el segundo parámetro de rodamiento lento es:

$$|\eta_H| < 1. \quad (27)$$

En la mayor parte de la literatura se utilizan los parámetros de rodamiento lento del potencial (PSR), ya que se pueden calcular directamente del potencial y simplifican muchos cálculos, aunque con esos parámetros se debe asumir que la solución del campo escalar evoluciona asintóticamente a un atractor [?]. Por el contrario, utilizando los parámetros HSR, las condiciones (25) y (27) son suficientes para asegurar un periodo de inflación, sin asumir ningún atractor. Trabajando con estos parámetros, inflación terminará exactamente cuando $\epsilon_H = 1$, lo cual se puede ver fácilmente de la ecuación (24), ya que si $\epsilon_H = 1$, entonces $\ddot{a} = 0$.

El periodo de inflación se puede modelar aproximadamente con un universo tipo De Sitter, en el cual el parámetro de Hubble es constante, por lo que su derivada y por ende el primer parámetro de rodamiento lento ϵ es cero.

El periodo de inflación puede cuantificarse mediante el número de e-folds (o e-folds por simplicidad), la cual es una cantidad adimensional que mide cuántas veces el universo "duplicó" su tamaño. Se necesitan al menos alrededor de 60 e-folds para resolver los problemas del modelo BB en la mayoría de modelos inflacionarios, sin embargo, este número puede variar de acuerdo al modelo. El número de e-folds se define como:

$$\Delta N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int_{a_i}^{a_f} \ln(a), \quad (28)$$

donde $\Delta N = N_f - N_i$, y donde t_i , t_f , a_i , a_f son los tiempos y valores del factor de escala inicial y final de inflación respectivamente.

3.5 Radio Comóvil de Hubble y Número Mínimo de e-folds

En un universo tipo De Sitter, la tasa de Hubble constante. En este tipo de universo la solución para el factor de escala es exponencial:

$$a(t) = a_i e^{Ht}, \quad (29)$$

El radio comóvil de Hubble en inflación es $(a_i H_{inf})^{-1}$, donde a_i es el factor de escala al inicio de inflación y $H_{inf} \sim 10^{14}$ Gev es la escala de energía durante inflación ⁶. Las escalas comóviles observables al día de

⁶Este valor de la escala de energía en inflación $H_{inf} \sim 10^{14}$ Gev está motivado en Teorías de Gran Unificación (GUT).

hoy originadas dentro del horizonte causal en inflación son $\lambda_0 \sim (a_0 H_0)^{-1}$, donde $a_0 = 1$ es el factor de escala al día de hoy y $H_0 \approx 10^{-42}$ GeV es la tasa de Hubble actual. El radio comóvil de Hubble al inicio de inflación debió ser más grande (o al menos del mismo tamaño) que las escalas comóviles observables al día de hoy:

$$(a_0 H_0)^{-1} \leq (a_i H_{inf})^{-1}, \quad (30)$$

de esta constricción obtenemos lo siguiente

$$\frac{a_i H_{inf}}{a_0 H_0} = \frac{a_i}{a_{end}} \frac{a_{end} H_{inf}}{a_0 H_0} = e^{-\Delta N} \frac{a_{end} H_{inf}}{a_0 H_0} \leq 1, \quad (31)$$

donde $\frac{a_i}{a_{end}} = e^{-\Delta N}$ y a_{end} es el factor de escala al final de inflación, el cual tiene un valor aproximado de $a_{end} \sim 10^{-29}$. Entonces el número de e-folds mínimos necesarios es aproximadamente:

$$\Delta N \geq \ln \left(\frac{a_{end} H_{inf}}{a_0 H_0} \right) \quad \longrightarrow \quad \Delta N \geq 62. \quad (32)$$

Dependiendo de la escala de inflación y del modelo en cuestión, este valor puede variar, pero generalmente ronda entre 50 y 70 e-folds. Es importante mencionar que este es el rango del valor mínimo aproximado, pero nada impide que sea mayor.

4 Teorías de Gravedad Modificada

Las teorías de gravedad modificada son teorías alternativas a Relatividad General. Las dos teorías que se estudiarán en este trabajo son teorías de gravedad modificada.

Es bien sabido que en las teorías tipo $f(R)$ las ecuaciones de movimiento son de orden superior a dos, por lo cual las derivadas de orden superior de las variables son grados de libertad extra (de Ostrogradski). Por lo tanto, específicamente existe un grado de libertad escalar asociado al sector gravitacional que se acopla no mínimamente a la métrica y el cual se puede describir como un campo tipo Brans-Dicke.

Por otro lado, en este trabajo se estudiará una teoría invariante conforme cuya acción por un lado contiene un término no lineal del escalar de Ricci como las teorías $f(R)$ y por otro lado contiene un grado de libertad escalar no mínimamente acoplado a la métrica, por lo tanto se trata de una teoría más general que las anteriores que a la vez comparte características con cada una de ellas. Por motivos didácticos, en este trabajo se estudiaron ambas como preámbulo antes de abordar la teoría más general.

4.1 Teorías $f(R)$ no lineales

Las teorías de la gravitación de orden cuatro mejor conocidas como teorías $f(R)$ tienen una larga historia que se remonta a 1918, poco después de que Relatividad General fuera propuesta. Estas teorías resultan de generalizar la acción de Einstein-Hilbert (AEH) tras añadir otros invariantes escalares a dicha acción o bien considerar una función del escalar de Ricci en lugar del término lineal en AEH. En el último caso, por el teorema de Lovelock, resultan ecuaciones de movimiento de cuarto orden. Durante las décadas de los 60 a los 80 surgió gran interés en estas teorías debido a que la teoría cuántica de estas es renormalizable. Por otro lado, en cosmología han tomado gran relevancia debido a que pueden derivarse soluciones que describen la expansión acelerada del universo temprano sin necesidad de asumir la existencia de un campo adicional como el inflatón. En este caso, los grados de libertad extra introducidos por las derivadas de orden superior en la acción son los responsables de dicho mecanismo. La acción de dichas teorías para el caso en el que no se toma en cuenta materia está dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (33)$$

de la cual se derivan las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + g_{\mu\nu}\square f'(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) = 0. \quad (34)$$

donde $f'(R) = \frac{df}{dR}$. En estas teorías métricas de la gravedad, se puede realizar una transformación conforme a un marco en el cual las ecuaciones de movimiento se conviertan en las de relatividad general mas un grado de libertad escalar masivo. Dicha transformación conforme se realiza por un reescalamiento de la métrica dado por:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = f'(R)g_{\mu\nu}. \quad (35)$$

4.1.1 Teoría de Starobinsky

El modelo de Starobinsky es un modelo tipo $f(R)$, el cual es la extensión más simple de la acción de Einstein-Hilbert en el contexto de gravedad modificada. En el modelo propuesto por Starobinsky el coeficiente del término de curvatura no lineal es $\frac{1}{6M^2}$, donde M es un parámetro con dimensión de masa (asociado a la masa del inflatón). Para este trabajo el coeficiente asociado al término cuadrático de curvatura se llamará γ . Se explorará el espacio de este parámetro para ver las diferentes soluciones que existen y bajo que restricciones observacionales se puede reproducir un periodo inflacionario. La acción de la teoría tipo Starobinsky que se

estudiará es la siguiente:

$$S_{Star} = \int d^4x \sqrt{-g} (R + \gamma R^2). \quad (36)$$

Ecuaciones de movimiento

Para obtener las ecuaciones de movimiento, introducimos $f(R) = R + \gamma R^2$ en la expresión obtenida en (34):

$$(1 + 2\gamma R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R + \gamma R^2) - \nabla_\mu \nabla_\nu (1 + 2\gamma R) + g_{\mu\nu} \square (1 + 2\gamma R) = 0,$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \left(\frac{1 + \gamma R}{1 + 2\gamma R} \right) - 2\gamma \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu R}{1 + 2\gamma R} + 2\gamma g_{\mu\nu} \frac{\square R}{1 + 2\gamma R} = 0.$$

La ecuación de Einstein modificada obtenida es:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \left(\frac{1 + \gamma R}{1 + 2\gamma R} \right) - \frac{2\gamma}{1 + 2\gamma R} (\nabla_\mu \nabla_\nu R - g_{\mu\nu} \square R) = 0. \quad (37)$$

Restringiéndola a un espacio de FRW obtenemos:

$$\boxed{12 \left(3H\ddot{H} + 15\dot{H}H^2 + H^4 \right) + 3\gamma H^2 = 0.} \quad (38)$$

4.2 Teorías Escalares Tensoriales en el Marco de Jordan

Las teorías escalares tensoriales generalmente se trabajan en el marco de Jordan, en el cual el campo escalar está acoplado no mínimamente a la métrica. La acción más sencilla de una teoría escalar tensorial en unidades naturales ($G = \hbar = c = 1$) en el marco de Jordan es la siguiente:

$$S_{ET} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - 2\Lambda(\phi) \right]. \quad (39)$$

Esta es la acción de una teoría tipo Brans Dicke, donde el primer término es el acoplamiento NO mínimo del campo escalar con la métrica a través del escalar de Ricci, el segundo término es el término cinético y el tercer término es el potencial. El parámetro ω depende de la teoría en específico con la que se esté trabajando.

Para obtener las ecuaciones de movimiento de una teoría se debe variar la acción respecto a sus grados de libertad, que en este caso son el campo escalar ϕ y la métrica $g^{\alpha\beta}$. Realizando la variación de la acción respecto al campo escalar ϕ se obtiene la ecuación de Klein Gordon:

$$R + \left(\frac{\omega'}{\phi} - \frac{\omega}{\phi^2} \right) \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + \frac{2\omega}{\phi} \square \phi - 2\Lambda' = 0, \quad (40)$$

Realizando la variación respecto a la métrica se obtiene la ecuación de Einstein modificada:

$$\phi G_{\alpha\beta} + \frac{g_{\alpha\beta}}{2} \frac{\omega}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + g_{\alpha\beta} \Lambda - \nabla_\alpha \nabla_\beta \phi + g_{\alpha\beta} \square \phi - \frac{\omega}{\phi} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi = 0. \quad (41)$$

donde $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$ es el Tensor de Einstein y $\square \phi$ es el D'Alambertiano del campo escalar.

4.2.1 Teoría Escalar Tensorial en un espacio de FRW

Nos interesa conocer las ecuaciones anteriores para un universo homogéneo e isótropo. Al introducir la métrica FRW en la ecuación (40) obtenemos la ecuación de Klein-Gordon:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \frac{1}{2\omega + 3} [\omega' - 2\phi\Lambda' + 4\Lambda]. \quad (42)$$

Al introducir la métrica FRW en la ecuación (41) obtenemos las ecuaciones de Einstein modificadas. La parte temporal es:

$$\frac{\omega}{2\phi}\dot{\phi}^2 - 3H\dot{\phi} - 3H^2\phi + \Lambda = 0, \quad (43)$$

y la parte espacial es:

$$\ddot{\phi} + \frac{\omega}{2\phi}\dot{\phi}^2 + 3H\dot{\phi} + \left(H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a}\right)\phi - \Lambda = 0. \quad (44)$$

De las 3 ecuaciones anteriores, únicamente 2 son independientes, la ecuación de Klein-Gordon y la parte temporal de la ecuación de Einstein modificada. La parte espacial de la ecuación de Einstein puede obtenerse a partir de las otras 2. Simplificando y reescribiendo las 2 ecuaciones independientes, nos queda de la parte temporal de la ecuación de Einstein modificada de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 \left[\frac{\omega}{6} + \frac{1}{4}\right] + \frac{\Lambda}{3\phi} = \left(H + \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2, \quad (45)$$

donde aparece un parámetro de Hubble "conforme" $\tilde{H} = \left(H + \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)$. Y la ecuación de Klein-Gordon queda de la siguiente forma:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \frac{1}{2\omega + 3} [\omega' - 2\phi\Lambda' + 4\Lambda]. \quad (46)$$

4.3 Correspondencia entre Teorías $f(R)$ y Teorías tipo Brans Dicke

Existe una equivalencia entre las teorías tipo $f(R)$ y las teorías escalares tensoriales. Para demostrar esta equivalencia se parte de una acción general en el formalismo métrico con un nuevo campo χ :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + \lambda(\chi)(R - \chi)] + S_M, \quad (47)$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange y es función de χ . Si $\chi = R$, se recupera la acción de una teoría tipo $f(R)$. Realizamos la variación de la acción respecto a χ y obtenemos:

$$f_{,\chi}(\chi) + \lambda_{,\chi}(\chi)(R - \chi) - \lambda(\chi) = 0. \quad (48)$$

Buscamos recuperar la acción de una teoría tipo $f(R)$, por lo que se elige que el multiplicador $\lambda(\chi)$ (el último término) sea igual a $f_{,\chi}(\chi)$ (el primer término) para que se cancelen y por lo tanto $\lambda_{,\chi}(\chi) = f_{,\chi\chi}(\chi)$. De tal forma, la variación de la acción nos queda así:

$$f_{,\chi\chi}(\chi)(R - \chi) = 0. \quad (49)$$

Cuando $f_{,\chi\chi}(\chi) \neq 0$, $R = \chi$, se recupera la acción de una teoría tipo $f(R)$.

Podemos reescribir la acción como:

$$\int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + f_{,\chi}(\chi)(R - \chi)] + S_M. \quad (50)$$

Expandiendo los términos de la acción nos queda:

$$\int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + f_{,\chi}(\chi)R - f_{,\chi}(\chi)\chi] + S_M. \quad (51)$$

Cabe notar que $f_{,\chi}(\chi)$ puede directamente asociarse a un campo escalar de la siguiente manera:

$$\phi = f_{,\chi}(\chi), \quad (52)$$

podemos notar que en el segundo término en 51 aparece un acomplamiento NO mínimo del campo escalar con la métrica a través del escalar de Ricci ϕR y los otros dos términos forman lo que definimos como el potencial $\Lambda(\phi)$, el cual corresponde a la transformada de Legendre de $f(R)$ dada por :

$$\Lambda(\phi) = \phi\chi(\phi) - f(\chi(\phi)) = \phi R - f(R), \quad (53)$$

Donde el escalar de Ricci R se reescribe en términos del campo escalar.

Derivando (53) respecto al campo escalar se obtiene la siguiente relación:

$$\Lambda'(\phi) - R = 0, \quad (54)$$

De la ecuación (53) vemos que $f(R) = \phi R(\phi) - \Lambda(\phi)$, entonces la acción de una teoría tipo $f(R)$ puede reescribirse como la acción de una teoría escalar tensorial tipo Brans Dicke con $\omega = 0$ de la siguiente forma:

$$\int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - \Lambda(\phi)]. \quad (55)$$

Es importante destacar que el campo escalar ϕ es la pendiente geométrica de la transformada de Legendre obtenida en la ecuación (53) y surge como un nuevo grado de libertad asociado a la métrica.

4.3.1 Ejemplo: Modelo de Starobinsky

Para ejemplificar la equivalencia, se realizará el mapeo del modelo tipo Starobinsky , la cual es una teoría tipo $f(R)$ simple, a una teoría escalar tensorial con lo obtenido en la subsección anterior. Para el modelo tipo Starobinsky $f(R) = R + \gamma R^2$. Al realizar la transformada de Legendre dada por la ec. (53) e invirtiendo $f_{,R} = \phi$, calculamos $f_{,R}$ de manera que:

$$f_{,R} = 1 + 2\gamma R = \phi, \quad (56)$$

por lo tanto R está dado por:

$$R = \frac{\phi - 1}{2\gamma}. \quad (57)$$

Sustituyendo (57) en (53) y simplificando obtenemos el potencial:

$$\Lambda_{Star}(\phi) = \frac{(\phi - 1)^2}{4\gamma}. \quad (58)$$

La nueva acción escalar tensorial correspondiente es:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{(\phi - 1)^2}{4\gamma} \right]. \quad (59)$$

En esta sección se mostraron las teorías tipo $f(R)$ y las teorías escalares tensoriales, así como el mapeo que existe entre ellas, en el cual se observó que un grado de libertad extra de la métrica en las teorías tipo $f(R)$ es equivalente a un campo escalar en las teorías escalares tensoriales con $\omega = 0$ y un potencial particular. Es importante recalcar que se estudiaron estas teorías como preámbulo al estudio de la teoría invariante ante transformaciones conformes, siendo esta una teoría más general, la cual incluye un término extra cuadrático de curvatura.

5 Teoría con Invarianza ante Transformaciones Conformes

En la sección anterior se introdujeron las teorías tipo $f(R)$ y las teorías escalares tensoriales. La teoría invariante bajo transformaciones conformes que se estudiará es un híbrido de ambas. En esta sección se presentará la teoría invariante bajo transformaciones conformes de forma general y en la sección posterior se estudiará su dinámica en el periodo inflacionario.

5.1 Motivación

Los modelos con invarianza de escala han resurgido últimamente debido a los problemas que resuelven como es el problema de la jerarquía de la constante cosmológica y la generación de una escala de masa espontáneamente mediante un rompimiento de la simetría dinámico. Aunado a esto, también se han estudiado teorías con simetría conforme en el área de astrofísica, en temas como las curvas de rotación de las galaxias [14], la relación de Tully-Fisher [14], la relación de aceleración radial (RAR) [13] y más recientemente en la posible solución de la tensión existente en las mediciones del valor de la constante de Hubble [24]. Ya vimos que es posible un periodo inflacionario con un modelo tipo Starobinsky, ahora se busca ver si un modelo de gravedad conforme es viable ya que incluye un término R^2 al igual que el modelo tipo Starobinsky, y también se busca encontrar bajo qué rango de valores de los parámetros, el modelo reproduce satisfactoriamente las observables inflacionarias restringidas por PLANCK 2018.

La acción con la que se trabajará es la siguiente:

$$S_{inv} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\alpha}{36} R^2 + \frac{\xi}{6} \phi^2 R - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right], \quad (60)$$

en la cual α , ξ y λ son constantes adimensionales. Esta acción es invariante bajo transformaciones conformes, también conocidas como transformaciones Weyl, las cuales son transformaciones de escala globales.

Esta es la acción invariante ante transformaciones conformes más sencilla que existe que contiene al término de Relatividad General y un campo escalar.

5.2 Invariancia de Weyl

Para demostrar la simetría Weyl de la acción anterior, se harán las transformaciones de cada término. En el apéndice 8.1.1 se muestra a detalle como se transforma cada cantidad ante una transformación conforme. Para este trabajo se utiliza un factor conforme L constante, que equivale a una transformación de escala. Las cantidades con tilde son las cantidades transformadas. A partir de la transformación de la métrica siguiente:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = L^2 g_{\mu\nu}, \quad (61)$$

se derivan las transformaciones de las demás cantidades. La transformación para el determinante de la métrica es:

$$\sqrt{\tilde{g}} = L^4 \sqrt{-g}. \quad (62)$$

El escalar de Ricci se transforma como:

$$\tilde{R} = L^{-2} R, \quad (63)$$

mientras que el campo escalar se transforma como:

$$\tilde{\phi} = L^{-1} \phi. \quad (64)$$

Las derivadas parciales se transforman como:

$$\tilde{\partial}^\mu = L^{-1}\partial^\mu. \quad (65)$$

Para transformar la acción (60), empezamos con el primer término:

$$\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R}^2 = L^4\sqrt{-g}L^{-4}R^2, \quad (66)$$

$$\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R}^2 = \sqrt{-g}R^2. \quad (67)$$

Para el segundo término:

$$\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{\phi}^2\tilde{R} = L^4\sqrt{-g}L^{-2}\phi^2L^{-2}R. \quad (68)$$

$$\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{\phi}^2\tilde{R} = \sqrt{-g}\phi^2R. \quad (69)$$

Haciendo la transformación del tercer término:

$$\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{\partial}^\mu\tilde{\phi}\tilde{\partial}^\mu\tilde{\phi} = L^4\sqrt{-g}L^{-1}\partial^\mu L^{-1}\phi L^{-1}\partial^\mu L^{-1}\phi \quad (70)$$

$$\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{\partial}^\mu\tilde{\phi}\tilde{\partial}^\mu\tilde{\phi} = \sqrt{-g}\partial^\mu\phi\partial^\mu\phi. \quad (71)$$

Haciendo la transformación del cuarto término:

$$\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{\phi}^4 = L^4\sqrt{-g}L^{-4}\phi^4, \quad (72)$$

$$\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{\phi}^4 = \sqrt{-g}\phi^4. \quad (73)$$

Todos los términos son invariantes ante una transformación Weyl, por lo que la acción también lo es.

5.3 Ecuaciones de movimiento

Para encontrar las ecuaciones de movimiento se realizó la variación de la acción (60), respecto a los grados de libertad. Al realizar dicha variación respecto al campo escalar se obtiene la ecuación de Klein Gordon correspondiente:

$$\frac{\xi}{3}\phi R + \square\phi - \lambda\phi^3 = 0. \quad (74)$$

Al realizar la variación de la acción respecto a la métrica se obtiene la ecuación de Einstein modificada:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{36} \left(2R_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2 + 2g_{\mu\nu}\square R - 2\nabla_\mu\nabla_\nu R \right) + \frac{\xi}{6} (\phi^2 G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\phi^2 - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi^2) \\ + \frac{1}{4} \left((g_{\mu\nu})(g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi) - \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \right) + \frac{\lambda}{8}(g_{\mu\nu})\phi^4 = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Al restringir (74) y (75) a un espacio-tiempo de FRW utilizando las cantidades calculadas en el apéndice 9.2, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\boxed{\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - 2\xi\phi\dot{H} - 4\xi\phi H^2 + \lambda\phi^3 = 0} \quad (76)$$

y

$$\alpha \left(2H\ddot{H} + 6\dot{H}H^2 - \dot{H}^2 \right) + \xi\phi^2 H^2 + 2\xi H\phi\dot{\phi} - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 = 0. \quad (77)$$

En esta sección se presentó la teoría invariante conforme y se obtuvieron las ecuaciones de movimiento, a partir de las cuales se obtendrá el sistema dinámico correspondiente en la siguiente sección.

6 Dinámica Inflacionaria

En esta sección se hará una breve revisión del formalismo de sistemas dinámicos, el cual se utilizará posteriormente para estudiar la dinámica inflacionaria del modelo de Starobinsky y de la Teoría invariante conforme.

Los sistemas dinámicos nos permiten estudiar las diferentes familias de soluciones de un sistema. Los sistemas dinámicos tienen puntos especiales, llamados puntos fijos, los cuales son puntos en los cuales todas las derivadas son cero, lo cual implica que el campo vectorial correspondiente no está definido. Los puntos fijos de un sistema dinámico nos dan información importante sobre las características de las soluciones del mismo sin la necesidad de resolverlo explícitamente. Estos puntos son importantes porque se pueden obtener soluciones linealizadas alrededor de ellos.

Otra ventaja de utilizar sistemas dinámicos es que ecuaciones de movimiento con derivadas de segundo orden, pueden convertirse en sistemas de ecuaciones con derivadas de primer orden, simplificando el análisis.

6.1 Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico es un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas, cuya forma general está dada por:

$$\vec{x}' = \vec{V}(x_1, \dots, x_n) \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (78)$$

Cada punto del sistema (x_1, \dots, x_n) tiene un vector asociado, el cual pertenece al campo vectorial en el espacio fase.

Los puntos fijos corresponden a soluciones en las cuales el campo vectorial se anula:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_{c1} \\ \vdots \\ x_{cn} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \vec{V}(x_{c1}, \dots, x_{cn}) = \begin{bmatrix} f_1(x_{c1}, \dots, x_{cn}) \\ \vdots \\ f_m(x_{c1}, \dots, x_{cn}) \end{bmatrix} = 0. \quad (79)$$

Una solución linealizada en torno a un punto fijo corresponde a:

$$\vec{x}_L = \vec{x}_c + \delta\vec{x}. \quad (80)$$

El sistema dinámico linealizado corresponde al sistema dinámico aproximado en regiones cercanas a \vec{x}_c hasta primer orden en δx :

$$\vec{x}_L' = \vec{x}_c' + \delta\vec{x}' = \delta\vec{x}' \quad \longrightarrow \quad \vec{V}(\vec{x}_L) = \vec{V}(\vec{x}_c + \delta\vec{x})$$

El sistema dinámico linealizado alrededor de \vec{x}_c está dado por:

$$\delta\vec{x}' = J(\vec{x}_c) \delta\vec{x}, \quad (81)$$

donde $J(\vec{x}_c)$ denota a la matriz Jacobiana evaluada en \vec{x}_c :

$$J(\vec{x}_c) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\vec{x}_c} & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{\vec{x}_c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \right|_{\vec{x}_c} & \cdots & \left. \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \right|_{\vec{x}_c} \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Es conveniente diagonalizar la matriz asociada al sistema lineal para poderlo resolver fácilmente. Para ello se realiza un cambio a la base propia del sistema, formada por los eigenvectores de $J(\vec{x}_c)$ denotada como $\{V_i\}$. Para los elementos de la base se satisface:

$$\vec{V}_i' = J(\vec{x}_c)\vec{V}_i = \mu_i I\vec{V}_i$$

Donde I es la matriz identidad y μ_i es el eigen-valor correspondiente a \vec{V}_i . Por lo tanto, la solución para los eigenvectores está dada por:

$$\vec{V}_i(t) = \vec{C}_i e^{\mu_i t}, \quad (83)$$

donde el vector \vec{C}_i se determina al imponer condiciones iniciales.

Las soluciones linealizadas alrededor de un punto fijo se expresan como una combinación lineal de eigenvectores de la siguiente manera:

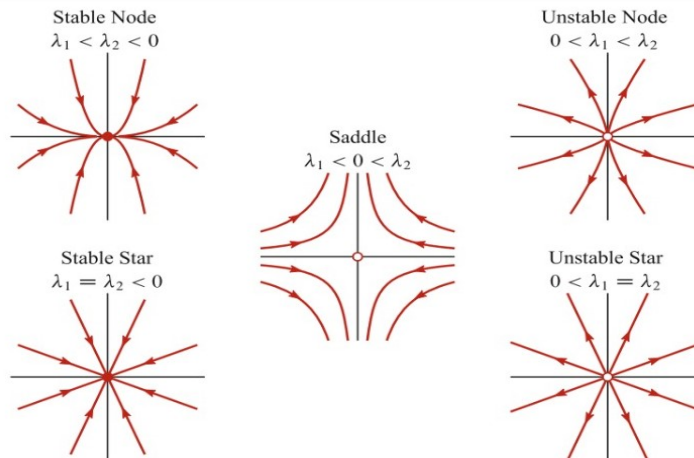
$$\delta\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i \vec{V}_i(t). \quad (84)$$

Estabilidad

El estudio de la estabilidad de las soluciones alrededor de los puntos fijos nos sirve para determinar el comportamiento de las mismas. Para clasificar a un punto fijo de acuerdo a su comportamiento y estabilidad, se obtienen los eigenvalores de la Jacobiana evaluada en el punto fijo y se clasifican los puntos fijos a partir del criterio de Liapunov:

Si todos $\mu < 0$	Estable
Si todos $\mu > 0$	Inestable
Si hay $\mu < 0, \mu > 0$	Punto de silla
Si hay $\mu = 0, \mu > 0$	Inestable
Si hay $\mu = 0, \mu < 0$	Estable, pero NO asintóticamente estable

Table 1: Criterio de estabilidad para eigenvalores reales

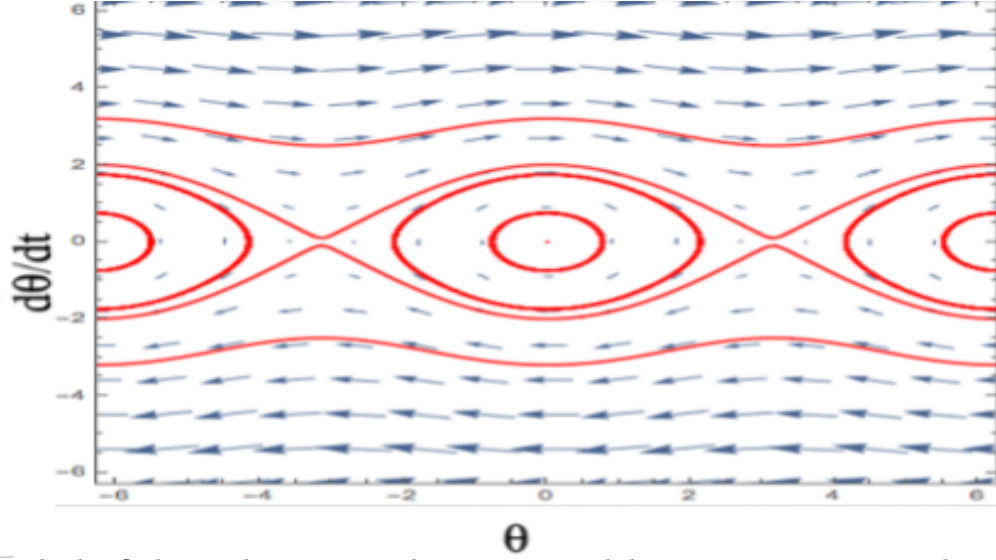


Para eigenvalores reales, existen principalmente tres tipos de estabilidad:

- Estable: indica que las soluciones alrededor del punto fijo se acercan (convergen) a él.
- Inestable: indica que las soluciones alrededor del punto fijo se alejan de él (divergen).
- Punto de silla: es un caso especial de un punto inestable, el cuál no cambia únicamente cuando se está exactamente en el punto, pero las soluciones alrededor de él divergen.

Retrato de Fase

Una herramienta visual muy útil en los sistemas dinámicos es el retrato de fase, el cual muestra una proyección del campo vectorial en algún plano del espacio fase lo cual permite visualizar todas las trayectorias (soluciones) posibles del sistema dinámico. A modo de ejemplo, se muestra el retrato de fase de un péndulo no lineal sin amortiguamiento.



En este ejemplo, las flechas azules muestran el campo vectorial, las trayectorias rojas son algunas soluciones del sistema y los puntos fijos se encuentran en $(n\pi, 0)$. Físicamente, para múltiplos pares de n , los puntos fijos de este sistema son aquellos en los que el péndulo se encuentra en la posición de equilibrio, por lo que son estables. Para n impar, los puntos fijos son inestables, ya que se encuentran fuera de la posición de equilibrio.

6.2 Caso 1: Teoría de Starobinsky

A partir del formalismo dinámico presentado, se estudiará la dinámica inflacionaria de las teorías en cuestión, comenzando por el modelo de Starobinsky. Para encontrar las ecuaciones del sistema dinámico, partimos de las ecuaciones de movimiento restringidas a la métrica FRW encontradas en (38):

$$12 \left(3H\ddot{H} + 15\dot{H}H^2 + H^4 \right) + 3\gamma H^2 = 0. \quad (85)$$

Definimos al primer parámetro de rodamiento lento como una variable dinámica $\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}$, la cual es adimensional, y reescribimos (85):

$$(\epsilon - 1) + 2(2 - \epsilon)A(H, \epsilon) - 2B(H, \epsilon) \left(2\epsilon(2 - \epsilon) - \frac{\dot{\epsilon}}{H} \right) = 0, \quad (86)$$

donde

$$A(H, \epsilon) = \frac{1 + 6\gamma H^2(2 - \epsilon)}{1 + 12\gamma H^2(2 - \epsilon)} \quad ; \quad B(H, \epsilon) = \frac{6\gamma H^2}{1 + 12\gamma H^2(2 - \epsilon)}. \quad (87)$$

Ahora definimos otra variable dinámica adimensional $u \equiv \left(\frac{H}{H_{GUT}}\right)^2 \equiv H^2$, donde $H_{GUT} \approx 10^{14} Gev$ es el valor inicial de la tasa de Hubble en inflación típicamente en Teorías de Gran Unificación (GUT) [8]. Realizando la derivada de u y expresándola en términos de u y de ϵ se obtiene la siguiente ecuación:

$$\dot{u} = 2H\dot{H} = -2H^3\epsilon = -2u\epsilon. \quad (88)$$

Para una función en general vemos que $\frac{\dot{f}}{H} = \frac{df}{dN}$, lo cual nos permitirá analizar la dinámica del sistema usando como variable independiente el número de e-foldings. De esta forma, escribimos las ecuaciones del sistema dinámico en términos de las variables dinámicas ϵ y u como funciones del número de e-foldings.

Reescribiendo la ecuación (86) en términos de las variables dinámicas u y ϵ obtenemos lo siguiente:

$$(\epsilon - 1) + 2(2 - \epsilon)A(u, \epsilon) - 2B(u, \epsilon)(2\epsilon(2 - \epsilon) - \epsilon') = 0, \quad (89)$$

donde las cantidades primadas denotan derivadas respecto a N y donde:

$$A(u, \epsilon) = \frac{1 + 6\gamma u(2 - \epsilon)}{1 + 12\gamma u(2 - \epsilon)} \quad ; \quad B(u, \epsilon) = \frac{6\gamma u}{1 + 12\gamma u(2 - \epsilon)}. \quad (90)$$

Se definen las variables del sistema dinámico como $x = u$ y $y = \epsilon$. A partir de (88) y (89) se obtienen las ecuaciones del sistema dinámico:

$$\boxed{x' = -2xy.} \quad (91)$$

$$\boxed{y' = 2y(2 - y) - \frac{y - 1}{2B(x, y)} - \frac{(2 - y)A(x, y)}{B(x, y)}.} \quad (92)$$

Como se va a estudiar el periodo inflacionario, es conveniente trabajar con el número de e-folds como variable independiente en vez del tiempo.

De la definición del número de e-folds se tiene lo siguiente:

$$\Delta N = \int_{a_i}^{a_f} d \ln a = \ln a_f - \ln a_i = \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right). \quad (93)$$

En el modelo cosmológico estándar se define el valor actual del factor de escala como 1. La convención utilizada en este trabajo es la siguiente: se definió el valor del factor de escala al final de inflación como $a_f = 1$. Al hacer esta normalización, puede que existan e-folds negativos ya que $0 < a_i < 1$, pero el número total de e-fold ΔN siempre será positivo.

6.2.1 Puntos Fijos tipo De Sitter

El periodo de inflación se puede aproximar a un universo tipo De Sitter, en el cual la tasa de Hubble es constante, por lo que $\dot{H} = 0$ y $\epsilon = 0$. Es por esto que nos interesa estudiar las soluciones alrededor de los puntos fijos tipo de Sitter. Para el modelo de Starobinsky se encontraron los puntos fijos mostrados en la segunda columna de la siguiente tabla:

Puntos fijos	(x, y)	Eigenvalores	Tipo de punto	Estabilidad
$P_1^{(Sb)}$	$(x, 0)$	$\frac{2.5}{\gamma x_i} ((\gamma x_i + 0.016) - \kappa)$ y $\frac{2.5}{\gamma x_i} ((\gamma x_i + 0.016) + \kappa)$	De Sitter	Inestable
$P_2^{(Sb)}$	$(0, 3)$	-6 y conforme y se acerca a 3, este eigenvalor crece mucho	No De Sitter	Nodo Estable
$P_3^{(Sb)}$	$(-\frac{1}{8\gamma}, 0)$	5.12 y -0.78	De Sitter	Punto de Silla

Donde $\kappa = \sqrt{\gamma^2 x_i^2 - 0.046\gamma x_i + 0.0003}$.

Observamos que hay una familia de puntos fijos tipo De Sitter $P_1^{(Sb)}$, en el cual $x = \left(\frac{H}{H_{GUT}}\right)^2$, $y = \epsilon = 0$. Cabe notar que $P_3^{(Sb)}$ está contenido en la familia $P_1^{(Sb)}$. Sin embargo, se considerará aparte ya que es un punto umbral, como veremos más adelante.

El punto $P_2^{(Sb)}$ no es tipo De Sitter, sin embargo, como se verá posteriormente es un punto relevante para la dinámica inflacionaria estudiada.

Utilizando el procedimiento mostrado en la sección de sistemas dinámicos se analizará la estabilidad lineal de los puntos fijos tipo De Sitter. Comenzamos utilizando (82) para calcular la matriz Jacobiana para el modelo tipo Starobinsky:

$$\begin{bmatrix} -2y & -2x \\ -\frac{y-3}{12\gamma x^2} & -4y + 5 + \frac{1}{12\gamma x} \end{bmatrix}. \quad (94)$$

Ahora vamos a hacer el análisis de estabilidad lineal para cada punto fijo.

La Jacobiana evaluada en $P_1^{(Sb)} = (x, 0)$ es:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2x \\ \frac{1}{4\gamma x^2} & 5 + \frac{1}{12\gamma x} \end{bmatrix}.$$

Cuyos eigenvalores son:

$$\mu_1 = \frac{2.5}{\gamma x_i} ((\gamma x_i + 0.016) - \kappa) \quad ; \quad \mu_2 = \frac{2.5}{\gamma x_i} ((\gamma x_i + 0.016) + \kappa) \quad (95)$$

En el periodo de inflación la evolución de la tasa de Hubble no presenta oscilaciones, por lo que son monótonamente crecientes o decrecientes. Para que esto se cumpla, los eigenvalores de la Jacobiana evaluada en los puntos fijos tipo De Sitter deben ser reales.

Imponiendo esta restricción para κ :

$$\gamma^2 x_i^2 - 0.046\gamma x_i + 0.0003 \geq 0,$$

se encuentra que γ y las condiciones iniciales para la Tasa de Hubble deben satisfacer lo siguiente:

$$\boxed{\gamma \leq \frac{0.007}{x_i}} \quad o \quad \boxed{\gamma \geq \frac{0.04}{x_i}}.$$

Dentro de estas cotas para los parámetros γ y x_i , se determinará la estabilidad lineal de la familia de puntos fijos $P_1^{(Sb)}$, para ello se graficaron los eigenvalores correspondientes en función de γ y x_i .

Como se muestra en la figura (3), el signo de eigenvalores de la familia no depende del valor de γ ni del valor de x_i . Un eigenvalor siempre será positivo y el otro negativo, por lo que es una familia de puntos inestables, es decir, que las soluciones linealizadas alrededor de la familia $P_1^{(Sb)}$ se alejarán del mismo.

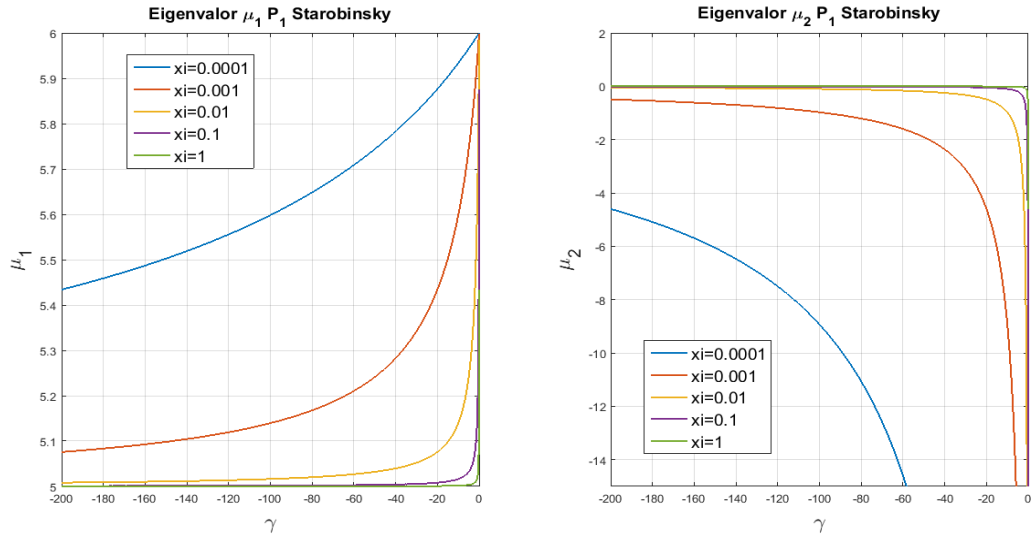


Figure 3: Eigenvalores del punto P_1^{Sb} en función de γ con diferentes valores de x inicial.

Retrato de fase

Para tener una mejor noción del sistema dinámico y de como cambian las soluciones de acuerdo a la elección de condiciones iniciales, se realizó a modo de ejemplo el retrato de fase del sistema con $\gamma = -1$. Las variables dinámicas del sistema son $x = \frac{H^2}{H_{GUT}^2}$; $y = \epsilon$.

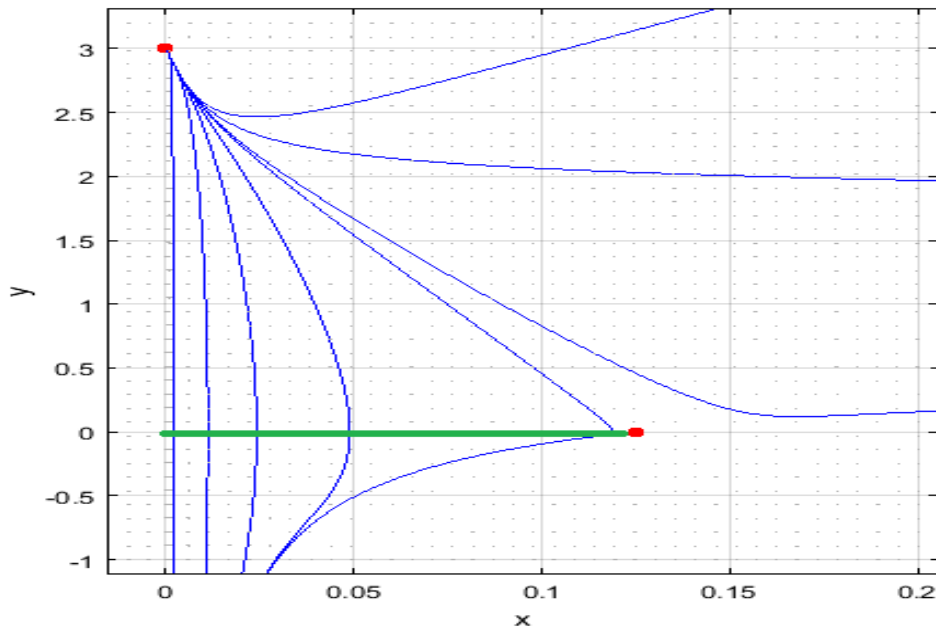


Figure 4: Retrato de fase del sistema del modelo de Starobinsky con $\gamma = -1$.

Existen distintas familias de soluciones del sistema. Cada trayectoria es una solución del sistema dinámico. Dependiendo de las condiciones iniciales, el sistema evolucionará en una trayectoria específica. En el diagrama de fase anterior se muestran algunas trayectorias solución del sistema representativas.

Los puntos rojos corresponden a los puntos fijos $P_2^{(Sb)} = (0, 3)$ y $P_3^{(Sb)} = (-\frac{1}{8\gamma}, 0)$.

La línea verde corresponde a la familia de puntos fijos tipo De Sitter $P_1^{(Sb)} = (x, 0)$, en los cuales la tasa de Hubble se mantiene constante y el parámetro de rodamiento lento es cero. Se observa que en esta familia, las soluciones evolucionan como un universo aproximadamente tipo De Sitter, el cual describe un periodo inflacionario que termina cuando $\epsilon = 1$. Estas soluciones convergen al punto $P_2^{(Sb)} = (0, 3)$, el cual es un nodo estable.

El punto $P_3^{(Sb)}$ es un punto umbral de la familia $P_1^{(Sb)}$, a partir del cual el comportamiento de las soluciones cambian. Por lo tanto $P_3^{(Sb)}$ marca el límite en el cual existen soluciones inflacionarias de la familia $P_1^{(Sb)}$ viables.

Es importante hacer notar que este retrato de fase muestra soluciones exactas, sin embargo, en este trabajo se obtendrán soluciones linealizadas alrededor de los puntos fijos, las cuales son soluciones aproximadas.

6.2.2 Soluciones linealizadas alrededor de los puntos fijos tipo De Sitter

Ahora se obtendrán las soluciones linealizadas alrededor de los puntos fijos tipo De Sitter utilizando el formalismo de sistemas dinámicos.

El retrato de fase mostrado en la figura (4) nos sirve para visualizar el comportamiento de las soluciones del sistema. En él se observa que sólo una parte de la familia $P_1^{(Sb)}$ exhibe un comportamiento tipo De Sitter. La región que exhibe este comportamiento está delimitada por el punto $P_3^{(Sb)}$, lo cual implica que el valor inicial máximo de la variable x es $x_i^{(max)} = -\frac{1}{8\gamma}$. Por lo tanto las variables dinámicas pueden tomar los siguientes valores iniciales: $y_i = 0$ y $0 < x_i < -\frac{1}{8\gamma}$. Debido a lo anterior, existe una variedad de posibles modelos inflacionarios.

Soluciones alrededor de $P_1^{(Sb)}$

A partir de los eigenvalores obtenidos para la familia $P_1^{(Sb)}$ en (95), se construyeron los eigenvectores correspondientes de acuerdo a la ecuación (83). Las condiciones iniciales impuestas para construir el vector de constantes fueron las siguientes: $x_i = \frac{H^2}{H_{GUT}^2}$ y $y_i = 0$, donde $H_{GUT} \approx 10^{14} GeV$ es el valor de la tasa de Hubble al inicio de inflación reportado típicamente en Teorías de Gran Unificación (GUT) [8].

Posteriormente se construyó la solución linealizada alrededor de esta familia por medio de una combinación lineal de eigenvectores de acuerdo a la ecuación (84).

Las soluciones linealizadas encontradas entorno a la familia $P_1^{(Sb)} = (x, 0)$ es:

$$x = \frac{5x_i}{\kappa} (y_i\kappa + \gamma x_i y_i + 0.016 (y_i + 6)) (\kappa - \gamma x_i - 0.016) e^{\left(\frac{0.042+2.5\kappa}{\gamma x_i} + 2.5\right)(N-N_i)} - \frac{5x_i}{\kappa} (y_i\kappa - \gamma x_i y_i - 0.016 (y_i + 6)) (\kappa + \gamma x_i + 0.016) e^{\left(\frac{0.042-2.5\kappa}{\gamma x_i} + 2.5\right)(N-N_i)}, \quad (96)$$

$$y = \frac{0.5x_i}{\kappa} (y_i\kappa - \gamma x_i y_i - 0.016 (y_i + 6)) e^{\left(\frac{0.042+2.5\kappa}{\gamma x_i} + 2.5\right)(N-N_i)} + \frac{0.5x_i}{\kappa} (y_i\kappa + \gamma x_i y_i + 0.016 (y_i + 6)) e^{\left(\frac{0.042-2.5\kappa}{\gamma x_i} + 2.5\right)(N-N_i)}. \quad (97)$$

Donde x_i , y_i y N_i son los valores iniciales de las variables dinámicas y los e-folds respectivamente.

Soluciones alrededor de $P_3^{(Sb)}$

Utilizando el mismo procedimiento que en el punto anterior, se evaluó la Jacobiana (95) en $P_3^{(Sb)}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4\gamma} \\ 16\gamma & \frac{13}{3} \end{bmatrix}. \quad (98)$$

cuyos eigenvalores son $\mu_1^{(Sb)} = 5.12$ y $\mu_2^{(Sb)} = -0.78$.

A partir de los eigenvalores y eigenvectores correspondientes a la matriz (98) se encontraron las siguientes soluciones:

$$x = \frac{0.14}{\gamma} e^{5.12(N-N_i)} (\gamma x_i + 0.32 y_i) + \frac{0.86}{\gamma} e^{-0.78(N-N_i)} (\gamma x_i - 0.05 y_i), \quad (99)$$

$$y = 2.7 e^{5.12(N-N_i)} (\gamma x_i + 0.32 y_i) - 2.7 e^{-0.78(N-N_i)} (\gamma x_i - 0.05 y_i). \quad (100)$$

Soluciones particulares para $P_1^{(Sb)}$

Para ver el comportamiento de distintas soluciones, primero se obtuvieron resultados fijando una condición inicial x_i y variando γ .

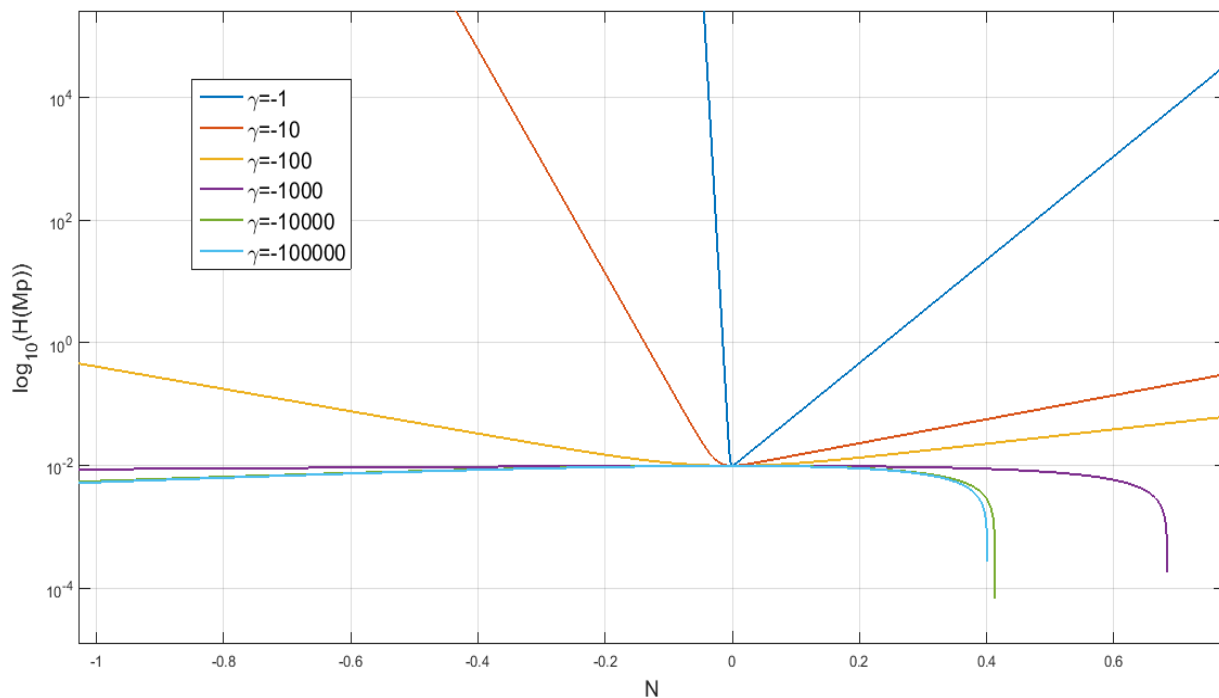


Figure 5: Tasa de Hubble con $x_i = 0.0001$ y distintos valores de γ .

De la gráfica anterior se observa que a partir de $|\gamma| = 1000$, las soluciones exhiben un periodo inflacionario en el cual la tasa de Hubble es aproximadamente constante. Estas soluciones tienen un comportamiento muy

parecido a un universo tipo De Sitter. Inflación termina cuando la tasa de Hubble deja de ser aproximadamente constante.

Se graficó el parámetro de rodamiento en función del número total de e-folds para diferentes valores de γ , con una x_i fija.

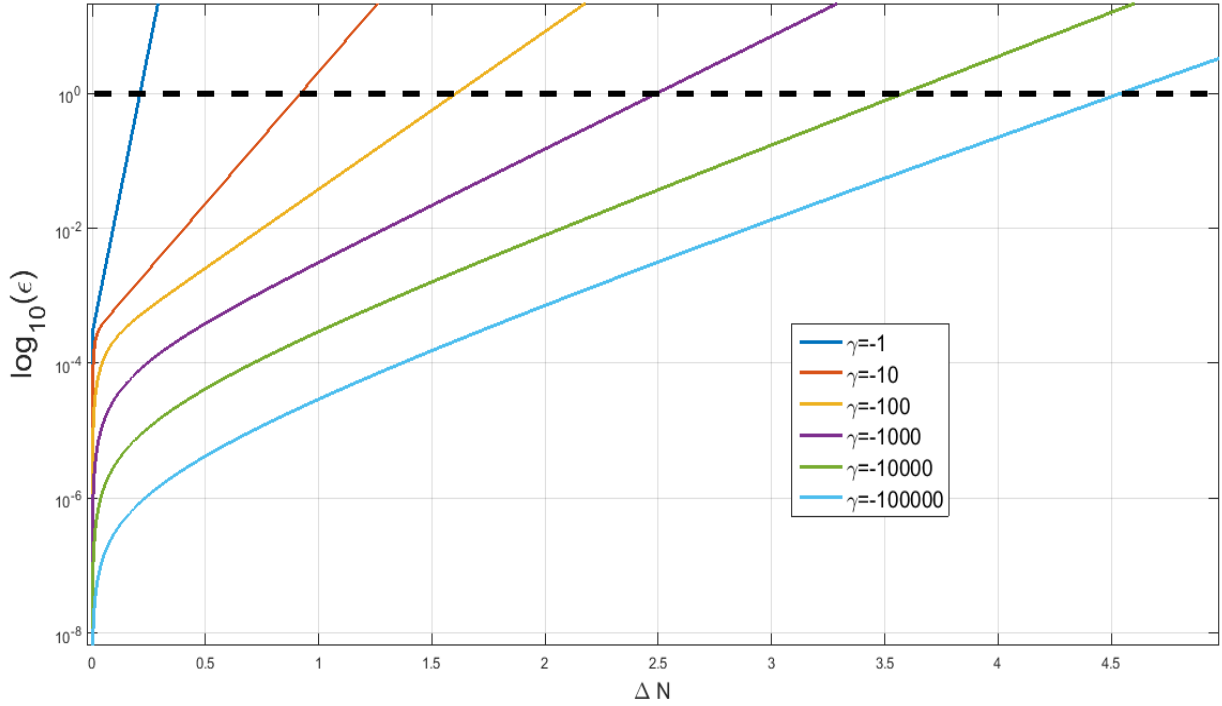


Figure 6: Parámetro de rodamiento lento en términos de ΔN con $x_i = 0.0001$.

La línea punteada marca el fin de inflación cuando $\epsilon = 1$. Se observa que entre mayor sea $|\gamma|$, inflación dura un mayor número de e-folds. Para valores $|\gamma| > 1$, el término no lineal es el dominante durante inflación para esta teoría.

Las soluciones obtenidas en esta sección son soluciones linealizadas generales. Para obtener soluciones particulares, se deben restringir los parámetros del modelo de acuerdo a los datos observacionales, lo cual se realizará más adelante en la sección de resultados.

6.3 Caso 2: Teoría Invariante Conforme

En la sección 5 se calcularon las ecuaciones de movimiento de la teoría invariante conforme en función del tiempo. Para ver la evolución de las variables dinámicas en el periodo inflacionario, se pasaron las ecuaciones de movimiento de tal forma que la variable independiente sean los e-folds. La ecuación de Klein-Gordon queda de la siguiente forma:

$$H^2\phi'' + HH'\phi' + 3H^2\phi' - 2\xi\phi HH' - 4\xi\phi H^2 + \lambda\phi^3 = 0. \quad (101)$$

Y la ecuación de Einstein modificada es:

$$\alpha H^2(2HH'' + H'^2 + 6HH') - \frac{1}{2}H^2\phi'^2 + 2H^2\xi\phi\phi' + \xi\phi^2H^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 = 0. \quad (102)$$

El campo escalar debe ser el único responsable de llevar inflación a cabo, por lo que debe existir una constante cosmológica nula en el Lagrangiano. Al requerir esto, Rinaldi [8] demuestra que esta teoría puede escribirse en términos de 2 parámetros, por medio de la siguiente relación:

$$\alpha = \frac{\xi^2}{\lambda}. \quad (103)$$

Se eligen las siguientes variables para el sistema dinámico en cuestión: $u = \frac{H^2}{H_{GUT}^2}$ que corresponde al cuadrado de la tasa de Hubble normalizada al valor típico de la tasa de Hubble en Teorías de Gran Unificación; $\epsilon = -\frac{H'}{H}$, el cual es el primer parámetro de rodamiento lento y $m = \frac{\phi'}{\phi}$ y $n = \frac{\phi}{H}$ las cuales están asociadas al campo escalar y su derivada. Estas variables son acotadas y adimensionales a fin de localizar todos los puntos fijos del sistema sin ambigüedades. El sistema de ecuaciones encontrado es el siguiente:

$$\boxed{u' = -2u\epsilon} \quad (104)$$

$$\boxed{\epsilon' = 3\epsilon\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) + \frac{\lambda n^2}{2\xi}(2m + 1) - \frac{\lambda n^2}{8\xi^2}(2m^2 + \lambda n^2)} \quad (105)$$

$$\boxed{m' = m(\epsilon - 3) + 2\xi(2 - \epsilon) - m^2 - \lambda n^2} \quad (106)$$

$$\boxed{n' = n(m + \epsilon)}. \quad (107)$$

El sistema es autónomo ya que ninguna función depende explícitamente de la variable independiente, es decir, del número de e-folds, ya que no aparece explícitamente en las ecuaciones.

6.3.1 Puntos Fijos Tipo De Sitter

Para encontrar los puntos fijos del sistema hacemos cero todas las derivadas: $u' = \epsilon' = m' = n' = 0$. Los puntos fijos encontrados se muestran en la segunda columna de la siguiente tabla :

Puntos fijos	(u, ϵ, m, n)	Eigenvalores	Tipo de punto	Estabilidad
$P_1^{(tic)}$	$(0, 2, 0, 0)$	$-4, 3, -1, 2$	No De Sitter	Punto de Silla
$P_2^{(tic)}$	$(u, 0, \frac{1}{2}\sqrt{16\xi + 9} - 1.5, 0)$	$0, -3, -\sqrt{16\xi + 9},$ $\frac{1}{2}\sqrt{16\xi + 9} - 1.5$	De Sitter	Con $\xi \leq -\frac{9}{16}$ es estable pero NO asintóticamente estable Con $\xi > -\frac{9}{16}$ es Inestable
$P_3^{(tic)}$	$(u, 0, 0, 2\sqrt{\frac{\xi}{\lambda}})$	$0, -3,$ $-1.5 - \frac{1}{2}\sqrt{-(7 + 64\xi)},$ $-1.5 + \frac{1}{2}\sqrt{-(7 + 64\xi)}$	De Sitter	Con $\xi \leq -\frac{7}{64}$ es estable pero NO asintóticamente estable Con $\xi > -\frac{7}{64}$ es un Nudo Enfocado Estable

Para la teoría conforme observamos que hay 2 familias de puntos fijos tipo De Sitter, los cuales son $P_2^{(tic)}$ y $P_3^{(tic)}$. Para encontrar la estabilidad lineal de estos puntos, primero se obtuvieron los eigenvalores a partir de la Jacobiana del sistema, la cual esta dada por:

$$J = \begin{bmatrix} -2\epsilon & -2u & 0 & 0 \\ 0 & 3\epsilon - 3 & -\frac{\lambda mn^2}{2\xi^2} + \frac{\lambda n^2}{\xi} & -\frac{\lambda^2 n^3}{4\xi^2} + \frac{n\lambda(2m+1)}{\xi} - \frac{n\lambda(\lambda n^2 + 2m^2)}{4\xi^2} \\ 0 & m - 2\xi & \epsilon - 2m - 3 & -2\lambda n \\ 0 & n & n & \epsilon + m \end{bmatrix}. \quad (108)$$

Al evaluar (108) en $P_2^{(Sb)}$ se reduce a:

$$J(P_2^{(Tic)}) = \begin{bmatrix} 0 & -2u & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2\xi + \sqrt{(16\xi + 9)} - 1.5 & -2\sqrt{(16\xi + 9)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{(16\xi + 9)} - 1.5 \end{bmatrix}. \quad (109)$$

De la matriz anterior se encontraron los eigenvalores correspondientes mostrados en la tercera columna de la tabla. Para determinar la estabilidad lineal de este punto, se graficaron sus dos últimos eigenvalores, en función del parámetro ξ :

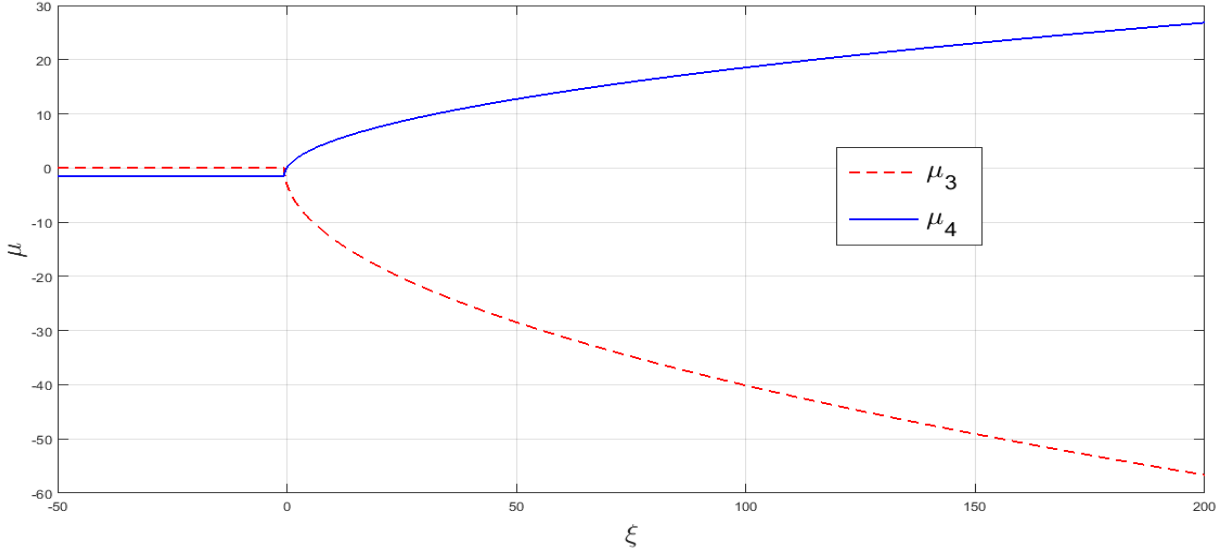


Figure 7: Últimos dos eigenvalores de $P_2^{(tic)}$ con distintos valores de ξ .

En azul se muestran las graficas de los últimos dos eigenvalores de $P_2^{(tic)}$. Para valores de $\xi > -\frac{9}{16}$ hay un eigenvalor positivo y uno negativo, por lo que en este rango del valor del parámetro es un punto de silla, el cual es inestable. Para valores de $\xi \leq -\frac{9}{16}$ hay un eigenvalor cero y uno negativo constante, por lo que en este rango es un punto estable, pero NO asintóticamente estable.

Durante inflación, las soluciones para la tasa de Hubble deben ser monótonamente crecientes, decrecientes o constantes, pero no deben oscilar. Para que esto se cumpla, los eigenvalores deben ser reales y por lo tanto en este punto se debe cumplir la siguiente restricción: $\xi \geq -\frac{9}{16}$.

Ahora pasemos a analizar la estabilidad del punto fijo $P_3^{(Tic)}$. Al evaluar a la Jacobiana (108) en el punto fijo correspondiente se obtiene:

$$J(P_3^{(Tic)}) = \begin{bmatrix} 0 & -2u & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2\sqrt{\frac{\lambda}{\xi}} \\ 0 & -2\xi & -3 & -4\sqrt{\lambda\xi} \\ 0 & 2\sqrt{\frac{\xi}{\lambda}} & 2\sqrt{\frac{\xi}{\lambda}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (110)$$

La matriz anterior tiene los eigenvalores correspondientes mostrados en la tercera columna de la tabla. Para estudiar la estabilidad lineal de este punto, se graficaron sus dos últimos eigenvalores, en función de los parámetros ξ .

Como muestra la figura 8, para valores $\xi \leq \frac{7}{64}$ uno de los eigenvalores es positivo y otro negativo, por lo que en este régimen es un punto de silla, el cual es inestable. Para valores $\xi > -\frac{7}{64}$, los eigenvalores se vuelven complejos con parte real negativa, por lo cual en este régimen el punto es un nodo enfocado estable. Para este punto, la restricción para evitar oscilaciones en H , de tal forma que los eigenvalores sean reales es: $\xi \leq -\frac{7}{64}$.

6.3.2 Soluciones linealizadas alrededor de los puntos fijos tipo De Sitter

Para obtener soluciones linealizadas se utilizará el formalismo de sistemas dinámicos presentado en la sección (6.1).

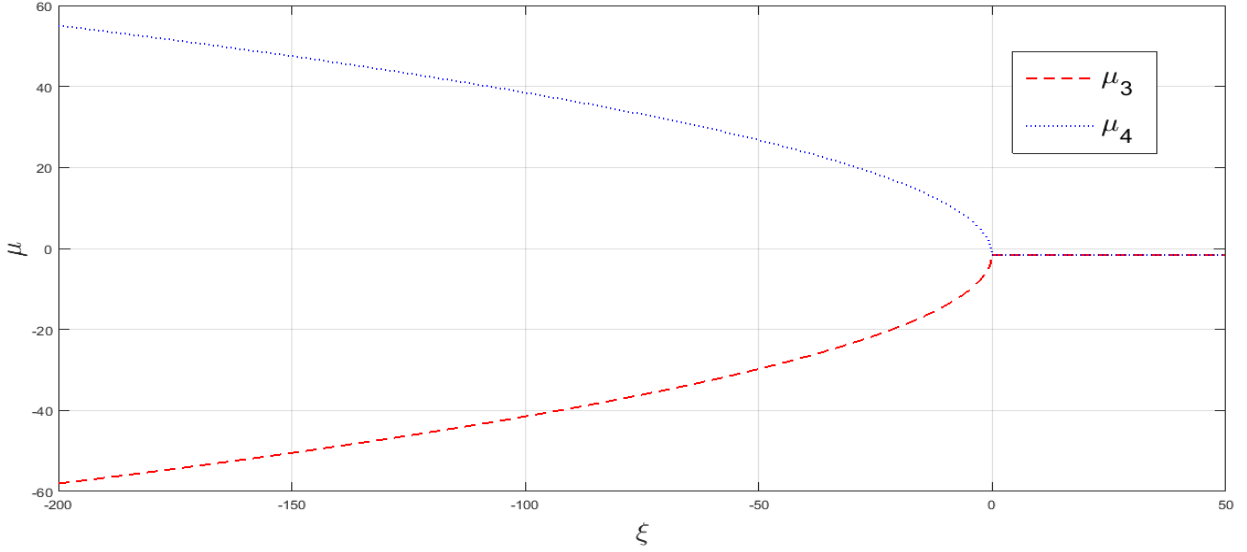


Figure 8: Últimos dos eigenvalores de $P_3^{(tic)}$ con distintos valores de ξ .

Soluciones alrededor de $P_2^{(tic)}$

Después de diagonalizar la Jacobiana evaluada en $P_2^{(tic)}$ (109), se obtuvieron los eigenvalores y eigenvectores correspondientes. Los eigenvalores encontrados se muestran en la tercera columna de la tabla en la sección (6.3.1), y sus respectivos eigenvectores son:

$$V_1^{(Tic)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad V_2^{(Tic)} = \begin{bmatrix} \frac{1.33333u(\sqrt{16\xi+9}-1.5)}{\sqrt{16\xi+9}-2\xi-1.5} \\ \frac{2(\sqrt{16\xi+9}-1.5)}{\sqrt{16\xi+9}-2\xi-1.5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad V_3^{(Tic)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad V_4^{(Tic)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (111)$$

Con lo anterior podemos encontrar las soluciones del sistema linealizado alrededor del punto fijo siguientes:

$$u = u_i + \frac{2}{3}u_i\epsilon_i \left(e^{-3(N-N_i)} - 1 \right) . \quad (112)$$

$$\epsilon = \epsilon_i e^{-3(N-N_i)} . \quad (113)$$

$$m = \frac{\epsilon_i(\kappa_2 - \xi)}{2\kappa_2} e^{-3(N-N_i)} + \frac{m_i\kappa_2 - 0.5\epsilon_i(\kappa_2 - \xi)}{\kappa_2} e^{-\kappa_1(N-N_i)} . \quad (114)$$

$$n = n_i e^{\kappa_2(N-N_i)} . \quad (115)$$

Donde $\kappa_1 = \sqrt{16\xi+9}$ y $\kappa_2 = \sqrt{\xi+0.56} - 0.75$.

La solución para el parámetro de rodamiento (113) lento siempre es decreciente, por lo que el periodo de inflación no tendría fin si se consideran intervalos de número de e-foldings positivos. Debido a que en este trabajo solo se consideran soluciones que describan una expansión acelerada del universo, se descartó la solución alrededor de este punto para reproducir un periodo inflacionario viable. Sin embargo, cabe mencionar que existen trabajos en el marco de teorías con simetría conforme, en los cuales se consideran ΔN negativas, los cuales describen universos en contracción [27].

Soluciones alrededor de $P_3^{(Tic)}$

Para el punto $P_3^{(tic)}$, al diagonalizar (110) se encuentran los eigenvalores mostrados en la tabla de la sección (6.3.1), y sus eigenvectores correspondientes son:

$$V_1^{(Tic)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad V_2^{(Tic)} = \begin{bmatrix} -\frac{4\lambda u_i s}{3\xi} \\ -\frac{2\lambda s}{\xi} \\ \frac{\lambda^2 s^3}{2\xi^2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (116)$$

$$V_3^{(Tic)} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda u_i s(-8\xi(\kappa+1)-3\kappa+1)}{\xi(64\xi^2+12\xi(\kappa+1)+3\kappa-1)} \\ \frac{2\lambda s(-8\xi(\kappa+1)-3\kappa+1)}{\xi(-8\xi(\kappa-15)+5\kappa+9)} \\ \frac{4\lambda s(1-\kappa)}{16\xi+3\kappa-1} \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad V_4^{(Tic)} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda u_i s(-8\xi(\kappa-1)-3\kappa-1)}{\xi(-64\xi^2+12\xi(\kappa-1)+3\kappa+1)} \\ \frac{2\lambda s(8\xi(\kappa-1)+3\kappa+1)}{\xi(8\xi(\kappa+15)-5\kappa+9)} \\ \frac{4\lambda s(\kappa+1)}{-16\xi+3\kappa+1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (117)$$

Para este punto, las soluciones encontradas son:

$$u(N) = C_1 - C_2 \frac{4\lambda u_i s}{3\xi} e^{-3N} - C_3 \frac{\lambda u_i s(-8\xi(\kappa+1)-3\kappa+1)}{\xi(64\xi^2+12\xi(\kappa+1)+3\kappa-1)} e^{(-1.5-\frac{1}{2}\kappa)N} + C_4 \frac{\lambda u_i s(-8\xi(\kappa-1)-3\kappa-1)}{\xi(-64\xi^2+12\xi(\kappa-1)+3\kappa+1)} e^{(-1.5+\frac{1}{2}\kappa)N} \quad (118)$$

$$\epsilon(N) = -C_2 \frac{2\lambda s}{\xi} e^{-3N} + C_3 \frac{2\lambda s(-8\xi(\kappa+1)-3\kappa+1)}{\xi(-8\xi(\kappa-15)+5\kappa+9)} e^{(-1.5-\frac{1}{2}\kappa)N} + C_4 \frac{2\lambda s(8\xi(\kappa-1)+3\kappa+1)}{\xi(8\xi(\kappa+15)-5\kappa+9)} e^{(-1.5+\frac{1}{2}\kappa)N} \quad (119)$$

$$m(N) = C_2 \frac{\lambda^2 s^3}{2\xi^2} e^{-3N} + C_3 \frac{4\lambda s(1-\kappa)}{16\xi+3\kappa-1} e^{(-1.5-\frac{1}{2}\kappa)N} - C_4 \frac{4\lambda s(\kappa+1)}{-16\xi+3\kappa+1} e^{(-1.5+\frac{1}{2}\kappa)N} \quad (120)$$

$$n(N) = C_2 e^{-3N} + C_3 e^{(-1.5-\frac{1}{2}\kappa)N} + C_4 e^{(-1.5+\frac{1}{2}\kappa)N}, \quad (121)$$

donde $\kappa = \sqrt{-(7+64\xi)}$ y $s = \sqrt{\frac{\xi}{\lambda}}$. Estas son soluciones generales alrededor del punto. Para encontrar soluciones particulares se deben imponer condiciones iniciales.

Soluciones particulares alrededor de $P_3^{(Tic)}$

Para el punto $P_3^{(Tic)}$ se graficaron varias soluciones con distintos valores del parámetro ξ , con la condición inicial $u_i = 1 \times 10^{-20}$.

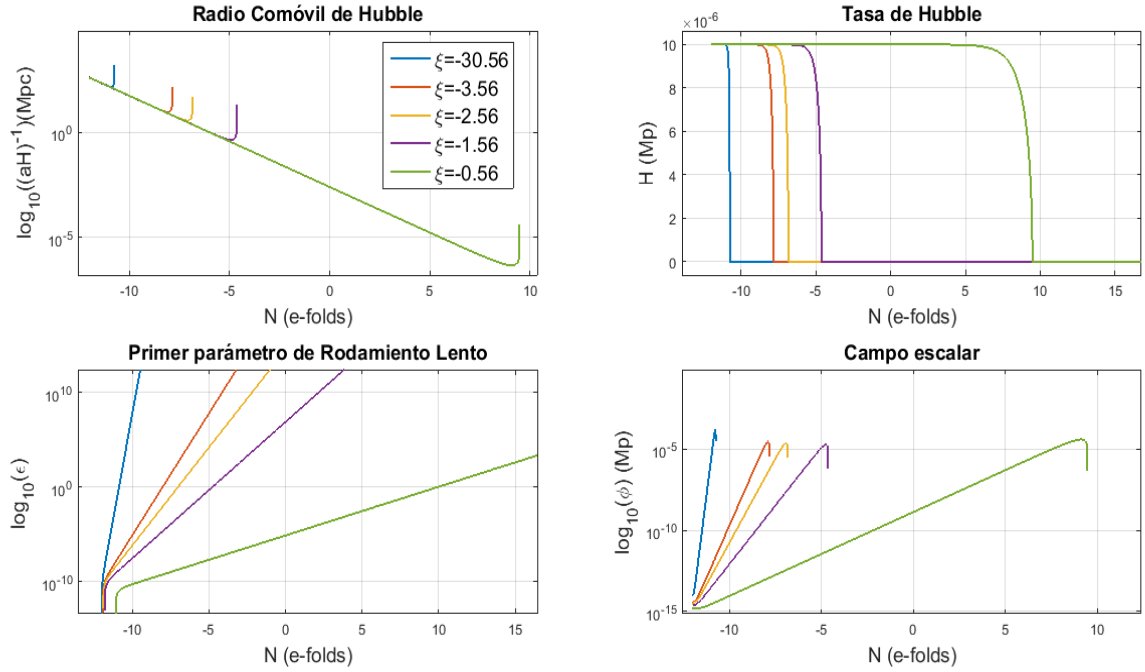


Figure 9: Se muestra el radio comóvil de Hubble, la tasa de Hubble, el parámetro de rodamiento lento y el campo escalar con distintos valores de ξ .

Se observa que entre menor sea $|\xi|$, inflación dura un mayor número de e-folds. En la acción de esta teoría (60), el término lineal tiene al parámetro ξ y el término no lineal tiene al parámetro $\alpha = \frac{\xi^2}{\lambda}$. Los valores típicos de λ son pequeños, por lo cual se observa que el término no lineal será el dominante durante inflación.

Para encontrar soluciones inflacionarias viables, falta restringir los parámetros de acuerdo a las observaciones reportadas por PLANCK, lo cual se realizará en la siguiente sección.

7 Parámetros Teóricos y la Constricción del Índice Espectral de acuerdo con PLANCK 2018.

En esta sección, se describen las observables inflacionarias a considerar en el siguiente capítulo, las cuales caracterizan la forma del espectro de las perturbaciones primordiales impresas en las anisotropías del fondo de radiación cósmica observadas por PLANCK 2018. Así mismo, se describe el procedimiento para calcular numéricamente el índice espectral y el radio de Hubble a partir de las teorías presentadas en capítulos anteriores. En el siguiente capítulo, se determinará el rango de los parámetros correspondientes a dichas teorías, así como las soluciones inflacionarias particulares viables de acuerdo con las observaciones descritas en este capítulo.

7.1 Observables Inflacionarias

Existen principalmente dos observables inflacionarias que sirven para clasificar y discriminar a los modelos inflacionarios, las cuales son el índice espectral n_s y la tasa tensor a escalar r . La primera observable tiene que ver con la amplitud de las perturbaciones primordiales, la cual debe ser casi invariante de escala. Dichas perturbaciones siguen un perfil de potencias de la siguiente forma [26]:

$$\Delta_s^2(k) = A(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{n_s-1}. \quad (122)$$

Donde $n_s = 1$ indica un espectro de potencias invariante de escala.

Para este trabajo se utilizó únicamente la medición del índice espectral para restringir los parámetros. La expresión del índice espectral en términos de los parámetros de rodamiento lento utilizada es la siguiente:

$$\boxed{n_s = 1 - 2\epsilon - \eta}. \quad (123)$$

La cual se tomó del trabajo de Karamitsos et. al. [25], donde encuentran expresiones para las observables inflacionarias generales invariantes de marco conforme y son independientes de la cantidad de campos escalares en cuestión.

El segundo parámetro de rodamiento lento se puede calcular en términos del primero de la siguiente forma:

$$\eta = \epsilon - \frac{\epsilon'}{2\epsilon}, \quad (124)$$

Con las expresiones (123) y (124), se puede calcular el índice espectral evaluado al final de inflación para las teorías en cuestión, el cual posteriormente se comparará con las mediciones de PLANCK para restringir los parámetros teóricos.

7.1.1 Cálculo del Índice Espectral

El índice espectral puede expresarse en términos de los parámetros de rodamiento lento según la ecuación (123). Con las soluciones tipo de Sitter encontrada para la familia de puntos fijos $P_1^{(Sb)}$ (97), se calculó el primer parámetro de rodamiento lento $\epsilon(N)$. El segundo parámetro de rodamiento lento $\eta(N)$ se calcula derivando el primer parámetro $\epsilon(N)$ respecto del número de e-folds.

Dichas cantidades, se expresan en términos del número de e-folds ΔN y los parámetros de la teoría en cuestión.

El índice espectral se debe evaluar al final de inflación, es decir, cuando $\epsilon = 1$. Para hacer esto, primero se debe encontrar ΔN_f , para lo cual se define la siguiente función: $\epsilon(\Delta N_f; \xi, u_i) = 1$, a partir de la cual

se obtienen las raíces de la ecuación algebraica $\epsilon(\Delta N_f; \xi, u_i) - 1 = 0$ numéricamente utilizando el método de Brent. Posteriormente se evalúa la expresión del índice espectral (123) en la ΔN_f encontrada para un conjunto de valores de los parámetros ξ y u_i . Para ambas teorías el procedimiento es el mismo, y lo único que cambia son los parámetros. Para la teoría de Starobinsky los parámetros son x_i y γ . Para la teoría invariante conforme los parámetros son u_i y ξ .

7.1.2 Restricciones de PLANCK 2018 para el Índice Espectral

La última restricción del índice espectral reportada por PLANCK 2018 a 1σ es la siguiente: $n_s = 0.9659 \pm 0.0041$ [22]. Haciendo una comparación de la predicción teórica para el índice espectral con la medición del mismo a partir de los datos de PLANCK, podemos delimitar el rango de valores de los parámetros teóricos para los cuales puede existir un periodo inflacionario compatible con las observaciones.

7.1.3 Radio comóvil de Hubble

Para que exista un periodo inflacionario, el radio comóvil de Hubble R_H debe disminuir. Al inicio de inflación R_H debe tener al menos el tamaño del horizonte de partículas en la época del recombinación observado al día de hoy, el cual es $R_{H*} \approx 284.72 \text{ Mpc}$ [18]. Partiendo de este valor, se puede obtener el número de e-folds inicial mínimo. Usando lo anterior, el radio comóvil de Hubble esta dado por:

$$R_H = \frac{1}{aH} = \frac{1}{e^N H(N)}. \quad (125)$$

A partir del valor inicial de la variable x , se obtiene una expresión para el radio comóvil de Hubble inicial, dado por:

$$x_i = \frac{H_i^2}{H_{GUT}^2} \rightarrow H_i = H_{GUT} \sqrt{x_i},$$

Por lo tanto el radio comovil de Hubble inicial, expresado en términos de las variables dinámicas está dado por:

$$R_{H_i} = \frac{1}{e^{N_i} H_i} = \frac{1}{H_{GUT}} \frac{1}{e^{N_i} \sqrt{x_i}} = R_{GUT} \frac{1}{e^{N_i} \sqrt{x_i}}. \quad (126)$$

Estas relaciones aplican para ambos modelos considerados en este trabajo.

8 Soluciones Inflacionarias Viables de acuerdo a PLANCK 2018

A partir de lo encontrado anteriormente, se determinarán las restricciones observacionales de los parámetros para cada teoría, y posteriormente, utilizando estas restricciones, se graficarán y analizarán algunas de las soluciones compatibles observacionalmente.

8.1 Parámetros teóricos y Soluciones para la teoría de Starobinsky

8.1.1 Restricción del espacio de Parámetros

Para poder barrer todas las soluciones posibles dentro de la familia $P_1^{(Sb)}$, se definió un parámetro extra que corresponde a al cociente del valor inicial y el valor inicial máximo permitido, esto es, $t = \frac{x_i}{x_i^{(max)}}$. La restricción en el espacio de parámetros, con coordenadas γ y t se muestra en la siguiente figura:

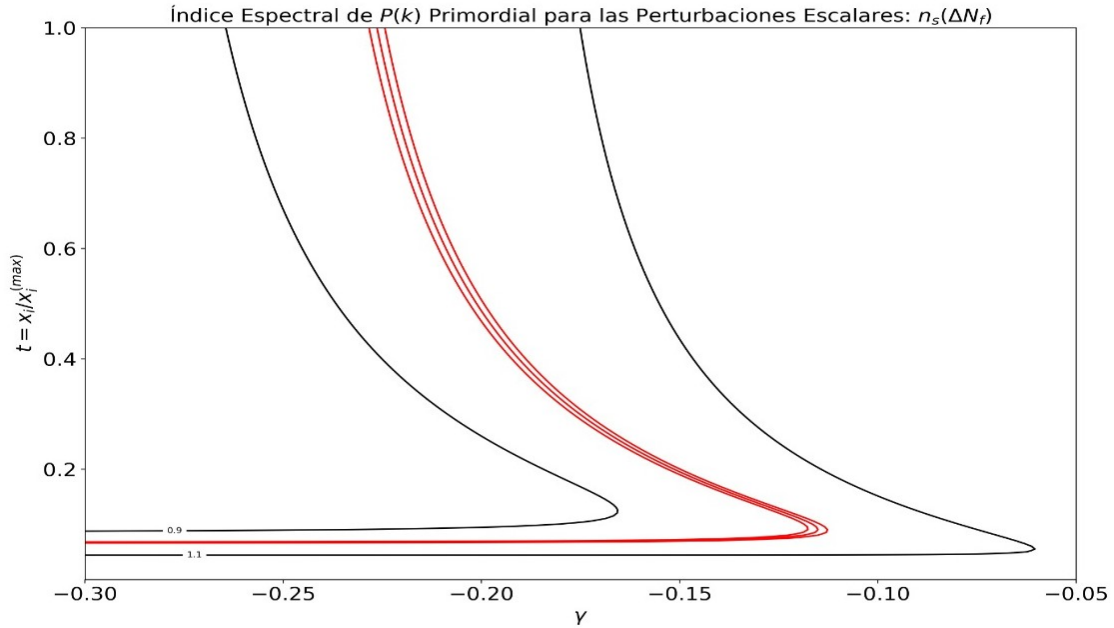


Figure 10: Restricción de los parámetros de acuerdo al índice espectral observacional.

Las líneas negras delimitan la región de valores de los parámetros que dan lugar a los valores de n_s 0.9 y 1 respectivamente. Las líneas rojas corresponden a la restricción de los parámetros en la región de confianza a 1σ reportada por PLANCK 2018. Se muestran el valor central y las cotas superior e inferior.

De la gráfica anterior se observa que para valores de $|\gamma| \gtrsim 0.25$, la tasa $t = \frac{x_i}{x_i^{(max)}}$ tiende a un valor constante el cual es $t \approx 0.07$. Para fijar condiciones iniciales que satisfagan la condición anterior, t debe ser constante, por lo que se debe cumplir lo siguiente:

$$0.07 \approx \frac{x_i}{x_i^{(max)}} \rightarrow x_i \approx -\frac{0.07}{8\gamma} \rightarrow x_i \approx -\frac{0.0087}{\gamma}. \quad (127)$$

Por otro lado, para valores pequeños de $|\gamma|$, t ya no es necesariamente constante, hay combinaciones de los parámetros t y γ que dan lugar a los valores observacionales de n_s .

Otra información importante que proporciona la gráfica, es que hay un punto máximo, el cual ocurre cuando $\gamma \approx -0.12$. Como $x_i^{(max)} = -\frac{1}{8\gamma}$, la condición anterior se da cuando el punto máximo $x_i^{(max)} \approx 1$. Al

sustituir en la variable dinámica este valor $x = \frac{H^2}{H_{GUT}^2} \approx 1$, se obtiene que en el punto máximo con el menor valor de $|\gamma|$ compatible con las observaciones $H_i^{max} \approx H_{GUT}$, lo que implica que la tasa de Hubble inicial tendrá como valor máximo un valor de orden de magnitud similar al valor típico reportado para teorías de gran unificación.

A partir de las restricciones obtenidas, se graficaron soluciones representativas con distintos valores de γ . Debido a la restricción encontrada en (127) para valores grandes de $|\gamma|$, donde t es constante, se encontró la siguiente condición para el valor inicial de x :

$$x_i \approx -\frac{0.0087}{\gamma} \quad (128)$$

Para que el radio comóvil de Hubble tenga el tamaño del horizonte en la época de recombinación observado al día de hoy, se utiliza (126) para determinar el número de e-folds mínimo inicial, el cual será aproximadamente:

$$N_i = \ln\left(\frac{1}{R_{H_i} H_{GUT} \sqrt{x_i}}\right) \approx \ln\left(\frac{3.52 \times 10^{-17}}{\sqrt{x_i}}\right) \quad (129)$$

8.1.2 Soluciones Viables alrededor de $P_1^{(Sb)}$

Para obtener soluciones compatibles con las restricciones observacionales del índice espectral, se impuso la condición (128), de tal forma que para valores de $|\gamma| \gtrsim 0.25$, el parámetro t tiende a una constante, la cual es $t = 0.07$. Se muestra la tasa de Hubble en unidades de Masa de Planck.

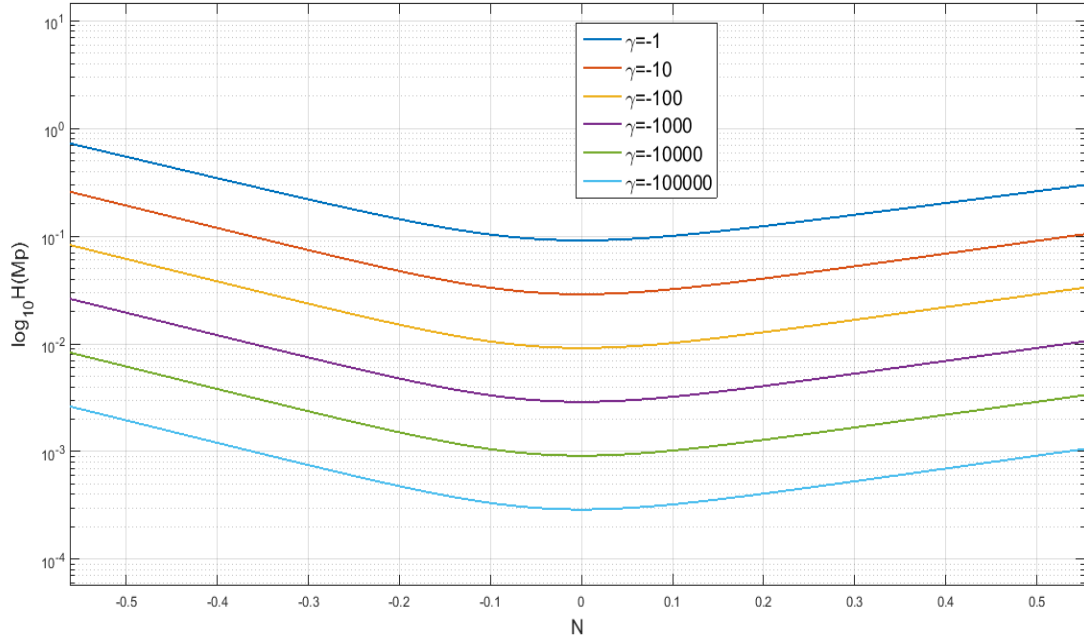


Figure 11: Solución linealizada entorno a $P_1^{(Sb)}$ para la tasa de Hubble normalizada. Se muestran soluciones con $t = 0.07$ y distintos valores de γ .

En la figura (11) se observa que las soluciones para la tasa de Hubble alrededor de P_1^{Sb} se mantienen constantes a un orden de magnitud, lo cual es compatible con la aproximación de rodamiento lento impuesta como condición de inflación. Sin embargo, el valor de la tasa de Hubble normalizada decrece y al final de inflación vuelve a crecer a un ritmo menor. A diferencia de las soluciones no restringidas, estas soluciones muestran un comportamiento menos cercano a un universo tipo De Sitter, sin embargo, son soluciones viables para reproducir un periodo inflacionario.

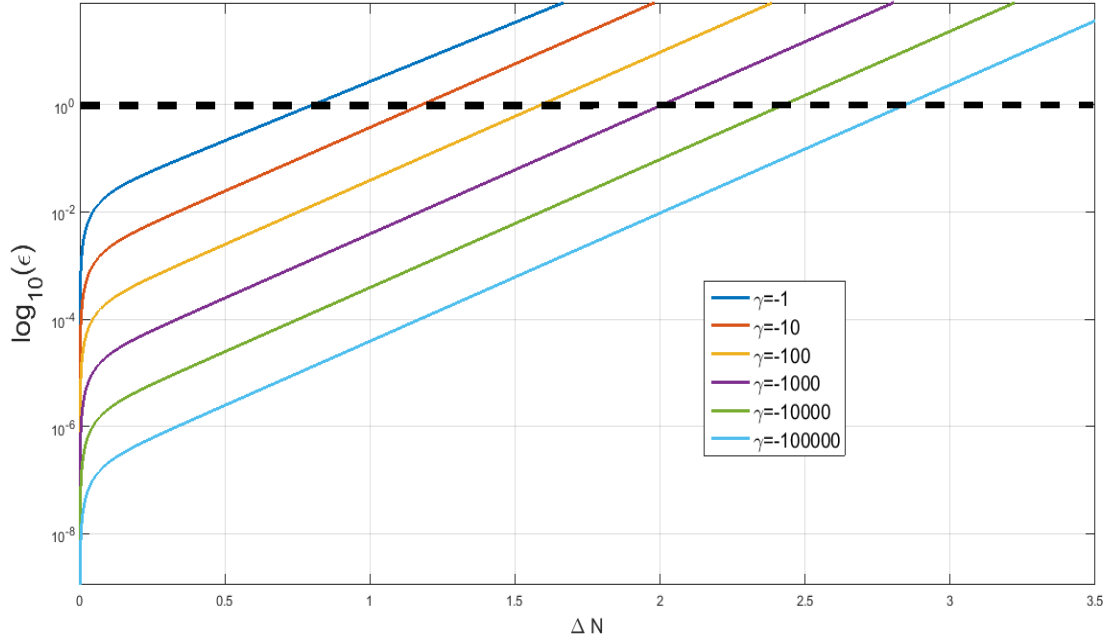


Figure 12: Parámetro de rodamiento lento con $t = 0.07$ y distintos valores de γ . La línea punteada negra marca el fin de inflación para cada solución, cuando $\epsilon = 1$.

En la figura (12) se observa que el valor del parámetro de rodamiento lento comienza siendo muy pequeño, al principio crece abruptamente un par de órdenes de magnitud y después se vuelve monótonamente creciente. La línea negra punteada muestra el final de inflación cuando $\epsilon = 1$. Se observa que a mayor valor de $|\gamma|$, es decir, entre mayor sea el término no lineal, inflación dura un mayor número de e-folds.

8.2 Parámetros teóricos y Soluciones para la Teoría Invariante Conforme

8.2.1 Restricción del espacio de Parámetros

Para encontrar soluciones inflacionarias, primero se deben restringir los parámetros teóricos de acuerdo al valor observacional del índice espectral reportado por PLANCK 2018. Las restricciones de los parámetros teóricos encontradas para las soluciones linealizadas entorno a $P_3^{(TIC)}$, son las siguientes:

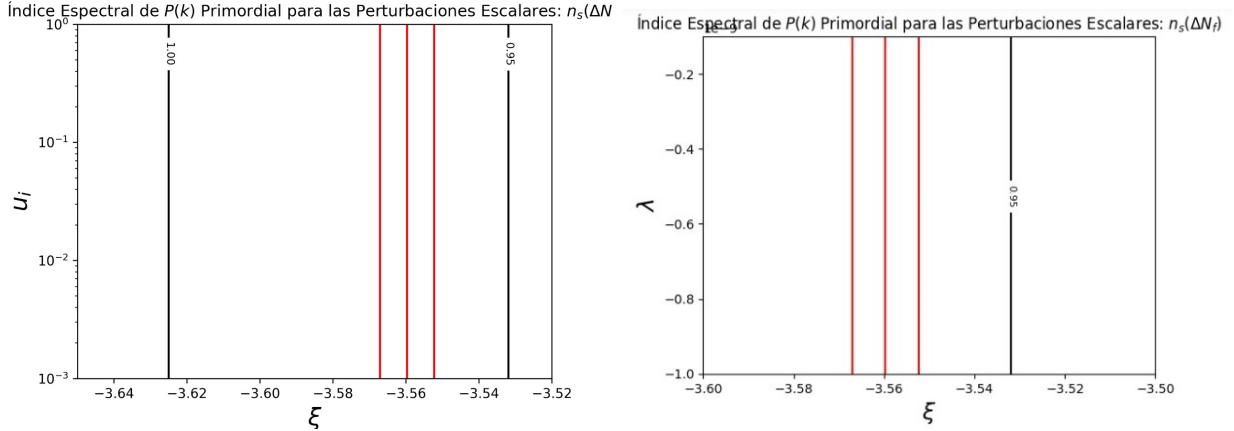


Figure 13: Las líneas rojas muestran los valores del parámetro ξ que dan lugar al valor central observacional del índice espectral y sus cotas reportado por PLANCK.

En la figura (13) se observa que el el valor restringido del parámetro ξ no depende de la condición inicial de la tasa de Hubble normalizada u_i , y tampoco depende del valor del parámetro λ . Este resultado es interesante, ya que pone en manifiesto la invarianza de escala de la teoría. Para ambos casos, el valor central del índice espectral reportado por PLANCK corresponde al valor del parámetro $\xi = -3.56$.

8.2.2 Soluciones Viables alrededor de $P_3^{(TIC)}$

Ahora analizaremos las soluciones linealizadas entorno al punto $P_3^{(TIC)}$ correspondientes al valor de $\xi = -3.56$ que da como resultado el valor central del índice espectral. Esta solución, en principio, es la que mejor describe esta observación. A partir de esta solución, se graficó la evolución del radio comóvil de Hubble, de la tasa de Hubble, del parámetro de rodamiento lento y del campo escalar, los cuales se muestran en la figura (14).

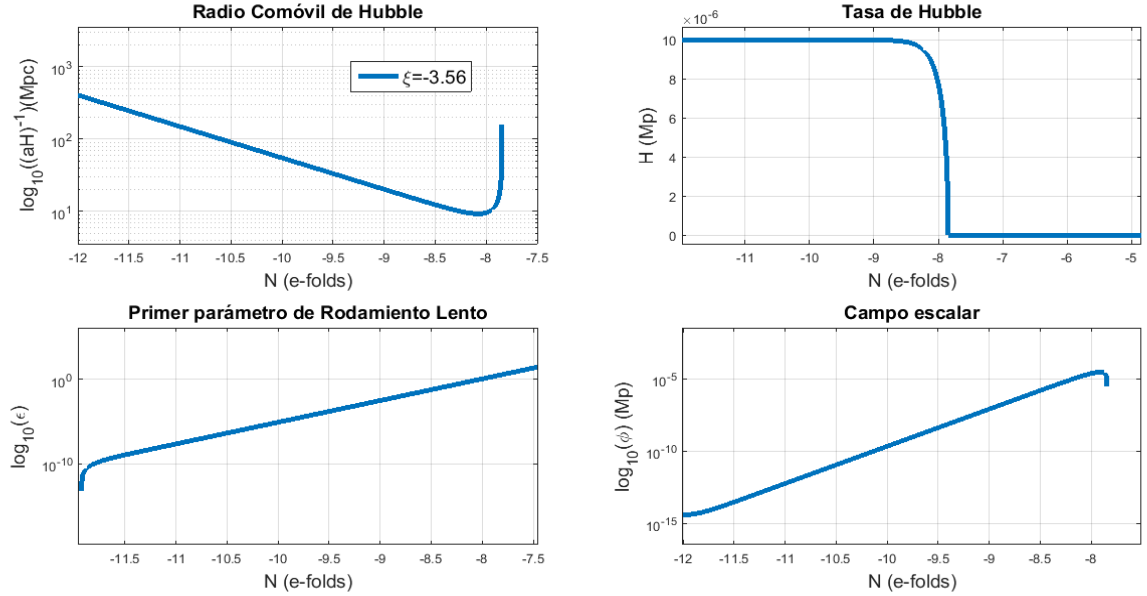


Figure 14: Solución linealizada correspondiente al valor del parámetro $\xi = -3.56$, el cual da lugar al valor más probable del índice espectral de acuerdo con los datos de PLANCK.

Se observa que durante inflación el radio comóvil de Hubble disminuye, lo cual es consistente con una época inflacionaria, y al finalizar inflación comienza a crecer de nuevo. Por otra parte, la tasa de Hubble es prácticamente constante durante inflación, y al finalizar decrece hasta llegar a cero, lo cual implica un universo estático después de inflación. Lo anterior se puede explicar debido a que no existen términos de materia en la acción de esta teoría. El parámetro de rodamiento lento comienza siendo pequeño, y va creciendo hasta alcanzar la unidad al final de inflación, consistente con la aproximación de rodamiento lento. Finalmente se muestra el campo escalar, el cual es creciente y no tiene oscilaciones durante inflación, sin embargo, al final de inflación el campo comienza a decrecer.

La evolución de todas las cantidades es consistente con un periodo inflacionario y sus valores finales coinciden en el mismo número de e-fold, el cual es aproximadamente $N = -8$. A diferencia del modelo de Starobinsky, en esta solución hay un periodo en el cual el universo es tipo De Sitter. Las gráficas del radio comóvil y del campo escalar se cortan debido a que la tasa de Hubble cae exactamente a cero, ya que si cayera a un valor pequeño pero diferente de cero, el radio comóvil seguiría creciendo y el campo escalar seguiría decreciendo, o bien, podría comenzar a oscilar. Esta solución es consistente con un periodo inflacionario, y es muy cercana a un universo tipo De Sitter.

9 Conclusiones

En este trabajo se estudió la dinámica inflacionaria en una teoría de Starobinsky y en una teoría con simetría conforme. Usando el formalismo de sistemas dinámicos, se estudiaron las soluciones de las ecuaciones de campo a nivel de la cosmología de fondo en un universo homogéneo e isótropo en la época inflacionaria. Se determinaron los puntos fijos correspondientes a las ecuaciones de fondo de cada teoría y se realizó el análisis de estabilidad correspondiente para cada uno de ellos. Se obtuvieron las soluciones linealizadas alrededor de los puntos fijos tipo De Sitter de cada teoría, las cuales pueden describir la dinámica de la expansión del universo en la época de inflación.

Se utilizó la expresión para el índice espectral en términos de los parámetros de rodamiento lento en el contexto de un formalismo invariante de marco conforme desarrollado por Karamitsos [25]. A partir de ella se calculó el índice espectral predicho por las teorías consideradas; posteriormente se restringieron los valores de los parámetros para ambos modelos que dan lugar a valores del índice espectral compatibles con los valores reportados por PLANCK.

La restricción obtenida para el parámetro de la teoría de Starobinsky mostró que para valores $|\gamma| \gtrsim 0.25$, el parámetro t tiende a un valor fijo, lo que implica que en este régimen para cada valor de γ , existe una condición inicial diferente que da lugar al valor observacional de el índice espectral. Se encontró que existe un límite observacional del parámetro γ , el cual es $|\gamma| \approx 0.12$. Este límite muestra que el valor inicial máximo de la tasa de Hubble con la restricción observacional es cuando $H_i^{(max)} \approx H_{GUT}$. Este resultado es interesante ya que indica que el valor inicial máximo en inflación de la tasa de Hubble es del orden de magnitud del valor típico en Teorías de Gran Unificación.

Para la teoría invariante conforme se encontró que el valor del parámetro ξ que da lugar a valores del índice espectral compatibles con la cota observacional, no depende del valor inicial de la tasa de Hubble normalizada, ni del valor de λ , lo cual pone en evidencia la invarianza de escala de la teoría. Se encontró que para valores del parámetro $|\xi| \gtrsim 0.56$ existen soluciones viables para describir un periodo inflacionario del universo, el valor del parámetro ξ que da lugar al valor central del índice espectral reportado por PLANCK es $\xi = -3.56$.

Se encontró que las soluciones restringidas observacionalmente de la teoría de Starobinsky muestran comportamiento que satisface las condiciones de inflación, sin embargo, la tasa de Hubble es constante solo logarítmicamente, por lo tanto, se trata de soluciones "cuasi" De Sitter. En cambio, las soluciones linealizadas en la teoría invariante conforme se comportan durante el periodo de inflación como soluciones de De Sitter.

Es importante recalcar que las soluciones linealizadas generales derivadas en este trabajo son analíticas, sin embargo, son aproximadas, por lo que en trabajos complementarios posteriores podrían obtenerse soluciones exactas numéricamente, con o cual se mejoraría el análisis.

En trabajos posteriores se busca estudiar teorías con simetría conforme más complejas, cuyas acciones tomen en cuenta otros efectos, como el incluir un término de materia en la acción. Adicionalmente se buscaría estudiar de forma más profunda, el rol de la simetría conforme, a partir de determinar la corriente y carga de Noether asociadas a dicha simetría y estudiando sus implicaciones físicas. Finalmente, podemos concluir que el estudio de teorías con simetría conforme en la época inflacionaria es viable y abre nuevas puertas a posible nueva física a energías en la escala de Planck.

10 Apéndices

10.1 Ecuaciones de movimiento en Teorías $f(R)$

A continuación se muestra el cálculo con el que se obtuvieron las ecuaciones de movimiento de una teoría tipo $f(R)$ mostradas y utilizadas en la sección (4.1). Al introducir uno o más campos escalares en una teoría $f(R)$, esta se convierte en una teoría $f(R)$. La acción de una teoría tipo $f(R)$ es la siguiente:

$$S_{R,\phi} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (130)$$

La variación respecto a la métrica es:

$$\delta_{g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} f(R)) = \delta(\sqrt{-g}) f(R) + \sqrt{-g} f'(R) \delta R, \quad (131)$$

donde ' denota derivada respecto a R . La variación de R es:

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \delta g^{\mu\nu}, \quad (132)$$

entonces:

$$\delta_{g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} f(R)) = -\frac{\sqrt{-g}}{2} (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) f(R) + \sqrt{-g} f'(R) (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \delta g^{\mu\nu}. \quad (133)$$

Simplificando nos queda la ecuación de movimiento:

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) = 0. \quad (134)$$

Esta ecuación de movimiento es válida para cualquier $f(R)$.

10.2 Simetría Conforme

La simetría conforme es un reescalamiento de la métrica y de los campos escalares. Una transformación conforme es una transformación de escala localizada que preserva los ángulos localmente pero no las distancias de un espacio cuya geometría está determinada por una métrica. Al reescalar la métrica, todas las cantidades derivadas de ella también se transforman, como lo son el tensor de Ricci, el escalar de Ricci, la raíz del valor absoluto del determinante, así como las derivadas, y en general cualquier invariante de curvatura de la teoría que se esté estudiando. La invariancia de escala es válida a muy altas energías en donde la masa puede ser ignorada. En este régimen de altas energías una invariancia conforme es aproximadamente una Simetría.

El marco conforme utilizado en los Modelos tipo Brans-Dicke es el marco de Jordan ya que en este marco no hay interacción directa entre el campo escalar ϕ y el campo de materia ψ . En este marco las partículas de prueba siguen las geodésicas de la métrica, a la cual están acopladas. El principio de equivalencia débil se satisface para partículas de prueba sin masa.

10.2.1 Transformaciones Conformes

Una transformación conforme, también conocida como transformación Weyl, es una transformación de escala localizada. Para transformar una métrica de un marco conforme a otro se utiliza:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\vec{x}) g_{\mu\nu} \quad (135)$$

donde Ω es el factor conforme o factor de reescalamiento, y es en general una función de las coordenadas espacio-temporales. Para este trabajo tomaremos al factor conforme como constante, por lo cual, la transformación será una dilatación (transformación de escala). La tilde indica cantidades en el nuevo marco conforme. La transformación conforme de un campo escalar es:

$$\tilde{\phi} = \Omega^{-1}\phi \quad (136)$$

$$\phi = \Omega\tilde{\phi} \quad (137)$$

Otras cantidades importantes transformadas son:

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2}\tilde{g}_{\mu\nu} \quad (138)$$

$$g^{\mu\nu} = \Omega^2\tilde{g}^{\mu\nu} \quad (139)$$

$$\sqrt{-g} = \Omega^{-4}\sqrt{-\tilde{g}} \quad (140)$$

$$\partial^\mu = \Omega\tilde{\partial}^\mu \quad (141)$$

La transformación del escalar de Ricci es:

$$R = \Omega^2(\tilde{R} + 6\Box f - 6\tilde{g}^{\mu\nu}f_\mu f_\nu) \quad (142)$$

Dada la ley de transformación del escalar de Ricci R , de acuerdo a Rinaldi [8], para que una teoría tipo $f(R)$ sea invariante bajo cualquier transformación conforme, debe contener el término R^2 . Este término es dominante sobre el término lineal R durante inflación y por eso la acción es invariante de escala en ese periodo. Cuando R empieza a dominar al final de inflación rompe con la invarianza de escala.

10.3 Métrica FRW con Geometría Plana

Algunas cantidades importantes de la métrica de FRW son:

$$g_{00} = g^{00} = -1 \quad (143)$$

$$g_{ii} = a^2(t) \quad (144)$$

$$g^{ii} = \frac{1}{a^2(t)} \quad (145)$$

$$g = a^6(t) \quad (146)$$

$$\sqrt{-g} = a^3(t) \quad (147)$$

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4 \quad (148)$$

$$R_{00} = -3\left(\dot{H} + H^2\right) = -\frac{1}{2}R + 3H^2 \quad (149)$$

$$R_{ii} = 2\dot{a}^2 + a\ddot{a} \quad (150)$$

$$R = 6 \left(2H^2 + \dot{H} \right) \quad (151)$$

$$G_{00} = 3H^2 \quad (152)$$

$$g_{00}\square F = 3H\dot{F} + \ddot{F} \quad (153)$$

$$g_{ii}\square F = -2a^2 H\dot{F} - a^2 \ddot{F} + \nabla_i \nabla_i F \quad (154)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H} \quad (155)$$

$$\dot{R} = 6 \left(4H\dot{H} + \ddot{H} \right) \quad (156)$$

Para el D'Alambertiano de ϕ^2 :

$$\square\phi^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta (\sqrt{-g} g^{\beta\alpha} \partial_\alpha \phi^2) \quad (157)$$

Sólo tomamos en cuenta el índice temporal y $\sqrt{-g} = a^3$:

$$\square\phi^2 = \frac{1}{a^3} \partial_0 (a^3 g^{0\alpha} \partial_\alpha \phi^2) = \frac{1}{a^3} (\partial_0(a^3)(-\partial_0\phi^2) + a^3 \partial_0(-\partial_0\phi^2)) \quad (158)$$

$$\square\phi^2 = \frac{1}{a^3} (3a^2\dot{a}(-1)\dot{\phi} - a^3 \partial_0(2\phi\dot{\phi})) \quad (159)$$

$$\square\phi^2 = -6H\phi\dot{\phi} - 2(\dot{\phi}^2 + \phi\ddot{\phi}) \quad (160)$$

11 Bibliografía

References

- [1] Scale independent R2 inflation, Pedro G. Ferreira, Christopher T. Hill, Johannes Noller, Graham G. Ross Phys. Rev. D 100, 123516 (2019) arXiv:1906.03415 [gr-qc].
- [2] Cosmological constraints on Brans-Dicke theory. A. Avilez, C. Skordis. Phys. Rev. Lett. 113, 011101 (2014) arXiv:1303.4330 [astro-ph.CO].
- [3] Dynamical Systems Analysis in Post-Friedmann Parametrizations of Modified Theories of Gravity. Abril Suárez, Ana Avilez, David Tamayo, Tula Bernal, Jorge L. Cervantes-Cota (2019) arXiv:1804.06257 [gr-qc].
- [4] Physical Foundations of Cosmology. V. Mukhanov. Cambridge (2005).
- [5] Beyond Starobinsky inflation. Yermek Aldabergenov, Ryotaro Ishikawa, Sergei V. Ketov, Sergey I. Kruglov, Phys. Rev. D 98, 083511 (2018) arXiv:1807.08394 [hep-th].
- [6] Scott Dodelson. Modern Cosmology. Fermi National Accelerator Laboratory University of Chicago (2003).
- [7] Andrew Liddle. An Introduction to Modern Cosmology. University of Sussex UK (2003).
- [8] Inflation and reheating in theories with spontaneous scale invariance symmetry breaking. M. Rinaldi and L. Vanzo, Phys. Rev. D 94, 024009 (2016) [arXiv:1512.07186v4 [gr-qc]].
- [9] Inflation and reheating in scale-invariant scalar-tensor gravity. Giovanni Tambalo , Massimiliano Rinaldi, Gen Relativ Gravit (2017) 49:52, arXiv:1610.06478 [gr-qc].
- [10] f(R) theories. A. De Felice, S. Tsujikawa. Living Rev. Rel. 13: 3, (2010), arXiv:1002.4928 [gr-qc].
- [11] Extended Theories of Gravity. Salvatore Capozziello, Mariafelicia De Laurentis, Physics Reports, Volume 509, Pages 167-321, (2011) arXiv:1108.6266 [gr-qc].
- [12] "Notas sobre Sistemas Dinamicos". Israel Quiros, Universidad de Guanajuato, (2012).
- [13] Conformal Gravity and the Radial Acceleration Relation. James G. O'Brien, Thomas L. Chiarelli, Mark A. Falcone, Muhammad H. AlQurashi, Astron. Nachr. 2019; 340: 95– 99, (2018) arXiv:1901.01228 [physics.gen-ph].
- [14] Galactic rotation curves in Einstein's conformal gravity. Qiang Li, Leonardo Modesto, (2019) arXiv:1906.05185 [gr-qc].
- [15] John C Polking, Rice University, (2003), Hugh Harvey (2020). Pplane (<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/61636-pplane>), MATLAB Central File Exchange.
- [16] Inflationary Cosmology: From Theory to Observations. J. Alberto Vázquez, Luis E. Padilla, Tonatiuh Matos, Revista Mexicana de Física E 17 (1) 73–91 (2020) arXiv:1810.09934 [astro-ph.CO].
- [17] Making the Case for Conformal Gravity. Mannheim, P.D. Found Phys 42, 388–420 (2012). arXiv:1101.2186 [hep-th].
- [18] <https://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tbcambform.cfm>

- [19] Clarifying Inflation Models: Slow-roll as an expansion in $1/N$ e-folds D. Boyanovsky, H. J. de Vega, N. G. Sanchez. *Phys.Rev.D*73:023008, (2006), arXiv:astro-ph/0507595.
- [20] Minimal Higgs inflation Yuta Hamada, Hikaru Kawai, Kin-ya Oda, *Prog. Theor. Exp. Phys.* (2014) 023B02, arXiv:1308.6651 [hep-ph].
- [21] The Baryon Oscillation Spectroscopic Survey of SDSS-III, Dawson, Kyle S. and Schlegel, David J. and Ahn, Christopher P. and Anderson, Scott F. and Aubourg, Éric and Bailey, Stephen and Barkhouser, Robert H. and Bautista, Julian E. and Beifiori, Alessandra and Berlind, Andreas A. and et al. *The Astronomical Journal*, 145, 10 (2011) arXiv:1208.0022 [astro-ph.CO].
- [22] Planck Collaboration, AA 641, A10 (2020). arXiv:1807.06211v2.
- [23] Formalizing Slow-roll Inflation in Scalar-Tensor Theories of Gravitation. Kemal Akın, A. Savaş Arapoğlu, A. Emrah Yükselci, *Physics of the Dark Universe*, 30, 100691, (2020) arXiv:2007.10850 [gr-qc].
- [24] Can Conformally Coupled Modified Gravity Solve The Hubble Tension?. Tal Abadi, Ely D. Kovetz, *Phys. Rev. D* 103, 023530 (2021), arXiv:2011.13853 [astro-ph.CO].
- [25] Frame Covariant Nonminimal Multifield Inflation. Sotirios Karamitsos, Apostolos Pilaftsis, *Nucl. Phys. B* 927, 219 (2018) [arXiv:1706.07011 [hep-ph]].
- [26] Daniel Baumann. TASI Lectures on Inflation. Department of Physics, Harvard University, Cambridge, USA. 2012.
- [27] Antigravity and the big crunch/big bang transition. Itzhak Bars, Shih-Hung Chen, Paul J. Steinhardt, Neil Turok, *Physics Letters B*, 715, 278-281 (2012), arXiv:1112.2470 [hep-th].