



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

**SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN DE
FUENTES POR MEDIO DEL MÉTODO DE
GRADIENTE CONJUGADO Y DIFERENCIAS FINITAS
CON APLICACIONES A ELECTROENCEFALOGRAFÍA
INVERSA**

FECHA: NOVIEMBRE 2022

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

PRESENTA:

OSCAR RAFAEL ARACHI MERCED

DIRECTOR DE TESIS:

**DRA. MARÍA BLANCA DEL CARMEN BERMÚDEZ
JUÁREZ**

ASESORES DE TESIS:

**DR. CARLOS ARTURO HERNÁNDEZ GRACIDAS
DR. JOSÉ JACOBO OLIVEROS OLIVEROS**

Dedicada a mi familia. . .

Resumen

En distintos campos de la investigación, hay situaciones donde se requiere conocer las causas que originan cierto fenómeno mediante la información parcial que se obtiene de él. A este tipo de problemas se les conoce como problemas inversos, entre los cuales se encuentran los problemas de identificación de fuentes, los cuales son estudiados ampliamente en diferentes campos de la investigación. Las fuentes que son producidas por la actividad electroquímica del cerebro son conocidas como fuentes bioeléctricas y se estima que se componen por grandes conglomerados de neuronas que actúan simultáneamente.

El problema inverso electroencefalográfico (PIE) consiste en determinar, a partir del EEG sobre el cuero cabelludo, las fuentes bioeléctricas que generan dichas mediciones.

Se hallan correlaciones entre las fuentes bioeléctricas y el EEG por medio de un problema de valores en la frontera definido sobre una región no homogénea que representa a la cabeza. Dicho problema de valores en la frontera, se deduce de la aproximación cuasi-estática de las ecuaciones de Maxwell y a través de él se puede realizar un planteamiento operacional para el PIE.

Una solución del PIE se halla a través del método de gradiente conjugado para minimizar el llamado funcional de Tikhonov, el cual considera un término de penalización que permite manejar apropiadamente la inestabilidad numérica que se presenta el PIE. Ya que en cada iteración del método de gradiente conjugado se deben resolver dos problemas de contorno, se utiliza para ello el método de las diferencias finitas.

Se desarrollaron programas en MATLAB para la implementación de método de gradiente conjugado, así como para la implementación del método de las diferencias finitas. La programación fue validada a través de ejemplos sintéticos, es decir, se hallaron las soluciones exactas de algunos problemas específicos y se compararon las soluciones numéricas con ellas. Se presentan dichos resultados en gráficas y Tablas.

Índice general

Resumen	v
Lista de Figuras	ix
Símbolos	xi
Introducción	1
Elementos básicos	1
Electroencefalografía	3
Problemas inversos y mal planteados	3
Estado del arte	5
Contribuciones de la tesis	6
Estructura de la tesis	6
1. Diferenciación numérica	9
1.1. Fórmulas de diferencias finitas para la primera derivada	9
1.1.1. Fórmula de diferencias hacia atrás de dos puntos	9
1.1.2. Fórmula de diferencias hacia adelante de dos puntos	10
1.1.3. Fórmula de diferencias centrales de dos puntos	11
1.1.4. Fórmula de diferencias hacia atrás de tres puntos	11
1.1.5. Fórmula de diferencias hacia adelante de tres puntos	12
1.2. Fórmulas de diferencias finitas para la segunda derivada	13
1.2.1. Fórmula de diferencias hacia atrás de tres puntos	13
1.2.2. Fórmula de diferencias hacia adelante de tres puntos	13
1.2.3. Fórmula de diferencias centrales de tres puntos	14
2. Ecuaciones diferenciales parciales elípticas	15
2.1. Aproximaciones por diferencias para las geometrías rectangulares	17
3. Problema de identificación de fuentes	23
3.1. Aproximación por el método de diferencias finitas	26
3.1.1. Puntos en w_1	28
3.1.2. Puntos en w_2	31
3.2. Fórmulas obtenidas para los puntos en w_1 y w_2	37

4. Método del gradiente conjugado para el problema de identificación de fuentes	41
4.1. Problema directo	41
4.2. Problema inverso	42
4.3. Problema adjunto	44
4.3.1. Algoritmo para el método del gradiente conjugado	44
5. Experimentos numéricos y conclusiones	49
5.1. Problema directo	49
5.2. Problema adjunto	51
5.3. Problema inverso	53
5.4. Trabajo futuro	58
Apéndice	60
A. Solución analítica del problema directo	61
B. Solución analítica del problema adjunto	67
C. Código desarrollado	73
C.1. Problema directo	73
C.2. Problema adjunto	82
C.3. Problema inverso	85
Bibliografía	95

Índice de figuras

2.1. Dominio rectangular y su retícula.	18
2.2. Puntos de una retícula que se utilizan en las ecuaciones en diferencias.	19
3.1. Representación esquemática de la cabeza	25
3.2. Retícula para el método de diferencias finitas	27
3.3. Los puntos amarillos representan a los puntos interiores en w_1	29
3.4. Los puntos amarillos representan a los puntos en la frontera izquierda, entre las fronteras superior e inferior de w_1	31
3.5. El punto azul representa al punto entre la frontera izquierda y la inferior de w_2	35
3.6. Los puntos azules representan a los puntos internos que están en la frontera inferior de w_2	36
3.7. El punto azul representa el primer punto en la frontera superior de w_2	36
3.8. Los puntos azules representan a los puntos internos en la frontera superior de w_2	37
3.9. Representación de cómo se discretizaron los puntos interiores de w_1 , donde el punto amarillo es el que se discretiza y los puntos grises son sus vecinos.	38
3.10. Representación de cómo se discretizaron los puntos en la frontera inferior de w_2 , donde el punto azul es el que se discretiza y los puntos grises son sus vecinos. El punto amarillo aparece por la condición de frontera (3.10).	39
3.11. Representación de cómo se discretizaron los puntos interiores de w_2 , donde el punto azul es el que se discretiza y los puntos grises son sus vecinos.	40
3.12. Representación de cómo se discretizaron los puntos en la frontera superior de w_2 , donde el punto azul es el que se discretiza y los puntos grises son sus vecinos.	40
5.1. Solución exacta del problema (3.6)-(3.10), con $f(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$	50
5.2. Solución numérica del problema (3.6)-(3.10), con $f(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$, $NR_1 = 67$, $NR_2 = 13$, $N_\theta = 419$	51
5.3. Solución numérica del problema adjunto. Para crear la malla del método numérico, se toman $NR_1 = 67$, $NR_2 = 13$ y $N_\theta = 419$	52

5.4.	Solución exacta del problema adjunto. Por cuestiones de visualización, se muestra la gráfica en la misma malla que se utiliza para la solución numérica presentada en la Figura 5.3.	53
5.5.	Fuente recuperada y el potencial generado con esa fuente en cada iteración del gradiente conjugado.	54
5.6.	Fuente exacta $f(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$ graficada con la malla $NR_1 = 67$, $NR_2 = 13$, $N_\theta = 419$, la cual fue usada para resolver el problema inverso numéricamente.	55
5.7.	Fuente recuperada por el método de gradiente conjugado en la iteración 3. El error relativo entre la fuente exacta y la recuperada es de 0.0136.	55
5.8.	Medición numérica exacta obtenida del problema directo (azul), medición con ruido (roja) y la medición asociada a la fuente recuperada (verde).	56

Símbolos

Δx	Tamaño de paso.
EEG	Electroencefalograma.
PCE	Problema de contorno electroencefalográfico.
PIE	Problema inverso electroencefalográfico.
PCV	Problema de contorno volumétrico.
∇^2	Operador laplaciano.

Introducción

Elementos básicos

En distintos campos de la investigación, hay situaciones donde se requiere conocer las causas que originan cierto fenómeno mediante la información parcial que se obtiene de él [1, 2, 3]. A este tipo de problemas se les conoce como problemas inversos, entre los cuales se encuentran los problemas de identificación de fuentes, los cuales son estudiados ampliamente en diferentes campos de la investigación. Por ejemplo, en la medicina existe un interés grande en el problema de identificación de fuentes bioeléctricas cerebrales, donde, partiendo de los datos conseguidos mediante, por ejemplo, un electroencefalograma (EEG), es posible detectar anomalías en el cerebro (mal funcionamiento, daños, patologías, etc.). Cabe mencionar, que la Electroencefalografía es la técnica más conocida para el estudio del cerebro. Sin embargo, en las últimas décadas se han desarrollado otras técnicas como son la tomografía por emisión de positrones, la resonancia magnética nuclear y la magnetoencefalografía.

Las fuentes que son producidas por la actividad electroquímica del cerebro son conocidas como fuentes bioeléctricas y se estima que se componen por grandes conglomerados de neuronas que actúan simultáneamente [4, 5, 6]. En algunos casos, se puede considerar que los generadores están concentrados en una región del cerebro y que se pueden representar mediante funciones de cuadrado integrable definidas sobre esa región [4, 6]. Mediante la electroencefalografía se capturan los potenciales en un EEG, los cuales provienen de la actividad eléctrica de tejidos excitables y se captan midiendo la diferencia de potencial existente entre un electrodo explorador y otro de referencia, colocados en el cuero cabelludo.

El llamado problema inverso electroencefalográfico (PIE) consiste en determinar, a partir del EEG sobre el cuero cabelludo, las fuentes bioeléctricas que generan dichas mediciones.

Un problema es bien planteado en sentido de Hadamard [3], si dicho problema tiene una única solución y esta solución depende continuamente de los datos. Un problema es mal planteado si no es bien planteado. El PIE es un problema mal planteado ya que dada una medición (EEG) no tiene solución o tal solución no es única ya que existen diferentes fuentes que pueden producir la misma medición. Otra razón por la que el PIE es mal planteado es que presenta una inestabilidad numérica, que se refleja en el hecho de que pequeños cambios en la medición pueden producir grandes variaciones en la localización de la fuente.

Para el estudio del PIE, se requiere considerar el llamado problema directo que consiste en determinar la medición (EEG) cuando se conoce la fuente. A diferencia del problema inverso, el problema directo tiene buenas propiedades numéricas, es decir, si dos fuentes están cercanas, las respectivas mediciones también lo estarán [7, 8, 9].

Las fuentes bioeléctricas pueden dividirse en corticales (definidas en la corteza cerebral) y subcorticales (en los núcleos interiores como los ganglios basales y el sistema límbico). El estudio del problema de identificación de fuentes puede hacerse considerando las fuentes corticales y subcorticales por separado. Por ejemplo, en [8, 9] sólo consideraron el caso en el que la fuente se localiza sobre la corteza cerebral. En este caso, el problema de identificación de la fuente tiene solución única, por lo que el mal planteamiento del PIE está asociado con la inestabilidad numérica y aquí no se considera la actividad de fuentes corticales.

En este trabajo, se implementa un algoritmo estable para hallar una solución del PIE, el cual utiliza el método de gradiente conjugado (MGC) para minimizar el llamado funcional de Tikhonov. Este funcional añade al funcional de mínimos cuadrados, un término de penalización con el se puede controlar la inestabilidad numérica. En cada paso de la iteración del MGC, se resuelven dos problemas de contorno elípticos utilizando el método de las diferencias finitas (MDF). Se muestra un ejemplo para validar la implementación realizada.

Electroencefalografía

El cerebro humano representa un gran desafío para la ciencia debido a su complejidad. Diferentes técnicas como la Electroencefalografía, la Magnetoencefalografía, la Resonancia Magnética funcional y la Tomografía por Emisión de Positrones se utilizan para estudiarlo. En este trabajo se utiliza la electroencefalografía para estudiar el problema de identificación de fuentes bioeléctricas, la cual es una técnica de exploración neurofisiológica que registra la actividad bioeléctrica cerebral a partir de electrodos colocados en el cuero cabelludo [10, 11, 12]. Un electroencefalograma (EEG) es el registro obtenido mediante esta técnica. Con el EEG se pueden observar los distintos tipos de ondas cerebrales en estado de vigilia, durante el sueño, en reposo o bajo ciertas condiciones de activación (potenciales evocados) y asociadas a patologías tales como epilepsia, crisis de ausencia, trastorno de déficit de atención e hiperactividad, por mencionar algunos. La mayor aportación, o mejor dicho, en lo que más es usada la técnica es en la detección de la epilepsia [11]. Otra de las aplicaciones del EEG está el ser usado como ayuda al diagnóstico de ciertas patologías que tienen diferentes causas como un traumatismo craneoencefálico, un tumor, edemas, calcificaciones o incluso una enfermedad degenerativa del sistema nervioso [6, 12, 13, 14, 15].

El método de la electroencefalografía es uno de los métodos no invasivos más conocidos en la investigación del cerebro y aunque no ha sido tradicionalmente un método de visualización de imágenes, ha habido avances en esta dirección. Entre los sistemas que se han desarrollado se encuentran EEGLAB y LORETA que son técnicas de tipo indirecto que utilizan programas computacionales en conjunto con la electroencefalografía.

Problemas inversos y mal planteados

Los problemas inversos, a grandes rasgos, consisten en determinar las causas a partir de ciertos efectos que estas producen. Este tipo de problemas surgen cuando no se tiene acceso a las causas porque se pueden generar daños, o cuando es muy costoso o peligroso observarlas directamente. Asociados a los problemas inversos se encuentran los llamados problemas directos y se definen como aquellos en los que se tiene información sobre las causas que describen un proceso en un medio

y la solución del problema nos conduce a descubrir el “efecto” producido por dichas causas. Así, en los problemas inversos se tiene una información parcial sobre los resultados o efectos producidos en el medio por ciertas causas que se desean descubrir a partir del análisis de dichos resultados. En términos simples se puede hablar de los problemas directos como problemas “causa-efecto” y de los problemas inversos como problemas “efecto-causa”.

Muchos problemas inversos pueden escribirse en forma de una ecuación operacional que relaciona a las causas con los efectos. De acuerdo con Hadamard una ecuación operacional $Ax = y$, donde x, y pertenecen a espacios de Hilbert, es bien planteada si:

1. Dada y existe x tal que $Ax = y$.
2. Dada y la solución x es única.
3. La solución depende continuamente de los datos de entrada y .

Una ecuación operacional es mal planteada, si no es bien planteada en el sentido de Hadamard mencionado arriba. En particular, el PIE puede estudiarse a través de una ecuación operacional que es mal planteado ya que

1. Puede haber diferentes fuentes que generan la misma medición, es decir, existen diferentes configuraciones de fuentes que pueden producir la misma medición, es decir, no hay unicidad de la solución.
2. Pequeñas variaciones en los datos de entrada (EEG) pueden producir grandes variaciones en la fuente buscada, es decir, estos problemas presentan una inestabilidad numérica, es decir, la solución no depende continuamente de los datos de entrada.

Para tratar el problema de esta inestabilidad numérica, en este trabajo se utiliza el método de regularización de Tikhonov, el cual depende de un parámetro, llamado parámetro de regularización de Tikhonov, que se elige apropiadamente en términos del error cometido en la medición [3].

Estado del arte

El tipo de problema planteado ha sido ampliamente estudiado en diferentes campos. En [16] estudiaron numéricamente el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace en una región anular acotada. Para resolver este problema mal planteado, siguieron un enfoque variacional basado en su reformulación como un problema de control de frontera, para el cual la función de costo incorporó un término penalizado con los datos de entrada. La función de costo se minimizó mediante un método de gradiente conjugado en combinación con un elemento de discretización finito. En el caso de que los datos de entrada sean ruidosos, algunas estimaciones preliminares de error mostraron que el parámetro de penalización puede ser elegido como el inverso del nivel de ruido. Soluciones numéricas en los dominios simples y complejos muestran que esta metodología produce soluciones estables y precisas.

En [17] utilizaron un problema de contorno para establecer correlaciones entre la fuente y la medición. El problema se dividió en dos subproblemas lineales y en cada uno de ellos se utilizó el método de mínimos cuadrados para encontrar soluciones estables. Estos subproblemas son problemas mal planteados, debido a la inestabilidad numérica que presentan, es decir, pequeños cambios en las mediciones pueden producir grandes variaciones en la solución de cada problema. Para hallar la solución del problema de contorno se utilizó el método de las series de Fourier y el Método del Elemento Finito.

En [7] presentaron un algoritmo estable para identificar fuentes ubicadas en la interfaz de la superficie de dos medios homogéneos diferentes, uno encerrado en el otro. Estas fuentes se identifican a partir de mediciones en la frontera, y la relación entre las fuentes y las mediciones a través de un modelo elíptico. Una declaración operativa permite analizar el mal condicionamiento del problema. El problema directo se resuelve analíticamente para el caso de círculos concéntricos y se resuelve numéricamente mediante una discretización de elementos finitos para el caso de dominios complejos.

En [18] se interesaron en la detección de los focos epilépticos en la corteza cerebral. Los focos epilépticos pueden encontrarse en el volumen o en la corteza cerebral. Para la detección de los focos epilépticos en la corteza cerebral, resolvieron primero el problema directo, es decir se conoce la fuente (foco epiléptico) y lo que se obtiene es la medición (EEG). Para el problema inverso, se tiene la medición sobre

el cuero cabello y lo que se obtiene es la determinación de la fuente, proponen modelos que relacionan la medición con respecto a la fuente, consideran tres modelos: cuando la fuente se ubica sobre la superficie de la corteza cerebral, fuente ubicada en el volumen de la corteza cerebral y fuente ubicada tanto en el volumen como la superficie de la corteza cerebral.

En [4], a través de una simplificación el PIE se estudia en un medio homogéneo con una condición de Neumann nula. Se ilustra la reducción por medio de dos clases de fuentes, una de las cuales corresponde a fuentes dipolares que representan matemáticamente a los focos epilépticos. El otro tipo de fuente corresponde a una fuente armónica definida en la región que representa al cerebro. Se desarrollan los ejemplos en dos y tres dimensiones y se utilizó MATLAB Y COMSOL para la implementación de los algoritmos. Se demostró que hubo una mejora en los tiempos cuando se usa la simplificación.

Contribuciones de la tesis

En este trabajo se implementa en MATLAB un algoritmo estable para hallar soluciones del PIE. Para ello, se realizaron programas que implementan el método de gradiente conjugado. En cada paso del método de gradiente conjugado, se deben resolver dos problemas de contorno. Se usó el método de las diferencias finitas para hallar su solución numérica y también se implementó en MATLAB. Los programas son originales del trabajo de tesis.

Se presentó en el XII Congreso Nacional y II Internacional de Tecnología Aplicada a Ciencias de la Salud, la ponencia intitulada: Un algoritmo estable de identificación de fuentes bioeléctricas en el cerebro a partir de datos del EEG.

Se sometió un artículo con el mismo nombre de la ponencia para las memorias del mencionado congreso.

Estructura de la tesis

A continuación, se da una descripción breve de los Capítulos y Apéndices que conforman este trabajo:

- En el Capítulo 1, se habla de la diferenciación numérica y se muestra cómo se pueden obtener tres fórmulas que son base para este trabajo, como son las fórmulas de diferencias progresivas, regresivas y centrales.
- En el Capítulo 2, se dan las bases para poder utilizar el método de diferencias finitas en las ecuaciones elípticas de segundo orden.
- En el Capítulo 3, se habla del problema inverso de detección de fuentes y se muestra paso a paso cómo se discretizaron las ecuaciones para este problema usando el método de diferencias finitas.
- En el Capítulo 4, se describen los algoritmos para resolver el problema directo, el problema adjunto y el problema inverso, empleando el método del gradiente conjugado.
- En el Capítulo 5, se presentan los resultados numéricos para los problemas directo y adjunto, y los resultados para el problema adjunto al usar el método del gradiente conjugado.
- En el Apéndice A, se muestra la solución analítica del problema directo.
- En el Apéndice B, se muestra la solución analítica del problema adjunto.
- En el Apéndice C, se muestra el código en MATLAB que se desarrolló en la tesis.

Capítulo 1

Diferenciación numérica

La diferenciación numérica es una técnica que se utiliza para aproximar las derivadas de una función a través de sus valores dados en los puntos de una malla. La diferenciación numérica se puede utilizar cuando se desconoce la función que se quiere derivar o cuando la función se conoce, pero resulta muy difícil de derivar [19]. En este Capítulo se presentan las fórmulas de diferencias finitas para la primera y segunda derivada, fórmulas que se utilizarán en el Capítulo 3.

1.1. Fórmulas de diferencias finitas para la primera derivada

Hay varios métodos para aproximar la primera derivada en un punto usando los valores de dos o más de sus puntos vecinos. Estos puntos se pueden elegir hacia la izquierda, la derecha, o ambos lados del punto en el que se va a aproximar la primera derivada.

1.1.1. Fórmula de diferencias hacia atrás de dos puntos

El valor de $f(x_{i-1})$ se puede aproximar mediante una expansión de series de Taylor en x_i . Haciendo $h = x_i - x_{i-1}$, tenemos:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2f''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3f'''(x_i) + \dots$$

conservando solamente los términos lineales, tenemos

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 f''(\xi)$$

donde $x_{i-1} \leq \xi \leq x_i$. Despejando $f'(x_i)$, tenemos:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{1}{2!}hf''(\xi). \quad (1.1)$$

La aproximación de la primera derivada se puede hacer omitiendo el segundo término del lado derecho, lo que produce un error de truncamiento. Dado que este es proporcional a h , decimos que el error de truncamiento es del orden de h y se expresa como $O(h)$,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h). \quad (1.2)$$

Se usa un método similar para todas las fórmulas derivadas en el resto de esta sección. El valor real del error de truncamiento no está disponible porque el valor de ξ en la ecuación (1.1) no se conoce exactamente. En términos prácticos, $O(h)$ significa que el error se hace más pequeño a medida que h se hace más pequeño.

1.1.2. Fórmula de diferencias hacia adelante de dos puntos

El valor de $f(x_{i+1})$ se puede aproximar mediante una expansión de series de Taylor en x_i . Tomando $h = x_{i+1} - x_i$, se tiene

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 f'''(x_i) + \dots$$

y conservando solamente los términos lineales, se obtiene

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 f''(\xi),$$

donde $x_i \leq \xi \leq x_{i+1}$. Despejando $f'(x_i)$, se halla:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \frac{1}{2!}hf''(\xi). \quad (1.3)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación 1.3 proporciona una aproximación para la primera derivada, mientras que el segundo término omitido es del orden de h , de modo que

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h). \quad (1.4)$$

1.1.3. Fórmula de diferencias centrales de dos puntos

Para derivar la fórmula de diferencias centrales, conservamos hasta el cuarto término en la serie de Taylor. Por lo tanto,

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2f''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3f'''(\xi), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_i$$

y

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2f''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3f'''(\eta), \quad x_i \leq \eta \leq x_{i+1}.$$

Restando la primera ecuación de la segunda, tenemos

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2hf'(x_i) + \frac{1}{3!}h^3[f'''(\eta) + f'''(\xi)].$$

Despejando $f'(x_i)$ y procediendo como antes, tenemos

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2). \quad (1.5)$$

La ecuación 1.5 nos muestra que la fórmula de diferencias centrales ofrece una mayor precisión que las fórmulas hacia atrás y hacia adelante.

1.1.4. Fórmula de diferencias hacia atrás de tres puntos

Primero aproximamos el valor de $f(x_{i-1})$ mediante una expansión de la serie de Taylor en x_i ,

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2f''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3f'''(\xi), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_i. \quad (1.6)$$

También aproximamos el valor de $f(x_{i-2})$ mediante una expansión de la serie de Taylor en x_i ,

$$f(x_{i-2}) = f(x_i) - (2h)f'(x_i) + \frac{1}{2!}(2h)^2 f''(x_i) - \frac{1}{3!}(2h)^3 f'''(\eta), \quad x_{i-2} \leq \eta \leq x_i. \quad (1.7)$$

Multiplicando la ecuación (1.6) por 4 y restando este resultado de la ecuación (1.7), tenemos

$$f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-1}) = -3f(x_i) + 2hf'(x_i) + \frac{4}{3!}h^3 f'''(\xi) - \frac{8}{3!}h^3 f'''(\eta),$$

de donde se halla que

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-1}) + 3f(x_i)}{2h} - \frac{1}{3}h^2 f'''(\xi) + \frac{2}{3}h^2 f'''(\eta).$$

$f'(x_i)$ se puede aproximar omitiendo los últimos dos términos, los cuales introducen un error de truncamiento del orden de h^2 , esto es,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-1}) + 3f(x_i)}{2h} + O(h^2). \quad (1.8)$$

Por lo tanto, la fórmula de diferencias hacia atrás de tres puntos aproxima la primera derivada en x_i usando los valores en los puntos x_i , x_{i-1} y x_{i-2} .

1.1.5. Fórmula de diferencias hacia adelante de tres puntos

La fórmula de diferencias hacia adelante de tres puntos aproxima la primera derivada en x_i usando los valores en los puntos x_i , x_{i+1} y x_{i+2} . El método es similar al que se presentó para las diferencias hacia atrás, excepto que los valores de $f(x_{i+1})$ y $f(x_{i+2})$ ahora se consideran para expandir la serie de Taylor en x_i , y con esto tenemos

$$f'(x_i) = \frac{-3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})}{2h} + O(h^2). \quad (1.9)$$

1.2. Fórmulas de diferencias finitas para la segunda derivada

La segunda derivada en x_i se puede aproximar también mediante fórmulas de diferencias finitas. Estas fórmulas se generan de manera similar como las de la primera derivada. A continuación se presentan las fórmulas de diferencias hacia atrás y hacia adelante de tres puntos, así como las fórmulas de diferencias centrales de tres puntos para aproximar la segunda derivada.

1.2.1. Fórmula de diferencias hacia atrás de tres puntos

Los valores de $f(x_{i-1})$ y $f(x_{i-2})$ primero se aproximan por expansiones de series de Taylor en x_i

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2f''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3f'''(\xi), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_i, \quad (1.10)$$

$$f(x_{i-2}) = f(x_i) - (2h)f'(x_i) + \frac{1}{2!}(2h)^2f''(x_i) - \frac{1}{3!}(2h)^3f'''(\eta), \quad x_{i-2} \leq \eta \leq x_i. \quad (1.11)$$

Multiplicando la ecuación (1.10) por 2 y restando este resultado de la ecuación (1.11), tenemos

$$f(x_{i-2}) - 2f(x_{i-1}) = -f(x_i) + h^2f''(x_i) - \frac{4}{3}h^3f'''(\eta) + \frac{1}{3}h^3f'''(\xi).$$

Procediendo como en la sección anterior, se halla

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i-2}) - 2f(x_{i-1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h). \quad (1.12)$$

1.2.2. Fórmula de diferencias hacia adelante de tres puntos

Los valores de $f(x_{i+1})$ y $f(x_{i+2})$ primero se aproximan por expansiones de series de Taylor en x_i

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2f''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3f'''(\xi), \quad x_i \leq \xi \leq x_{i+1}, \quad (1.13)$$

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + (2h)f'(x_i) + \frac{1}{2!}(2h)^2 f''(x_i) + \frac{1}{3!}(2h)^3 f'''(\eta), \quad x_i \leq \eta \leq x_{i+2}. \quad (1.14)$$

Multiplicando la ecuación (1.13) por 2 y restando este resultado de la ecuación (1.14) se encuentra

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \frac{4}{3}h^3 f'''(\eta) - \frac{1}{3}h^3 f'''(\xi),$$

de donde

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h). \quad (1.15)$$

1.2.3. Fórmula de diferencias centrales de tres puntos

Expandiendo $f(x_{i-1})$ y $f(x_{i+1})$ en series de Taylor en x_i y conservando hasta los términos de la tercera derivada, encontramos

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3 f'''(x_i) + \frac{1}{4!}h^4 f''''(\xi), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_i,$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 f'''(x_i) + \frac{1}{4!}h^4 f''''(\eta), \quad x_i \leq \eta \leq x_{i+1}.$$

Sumando las dos ecuaciones previas y procediendo como en los casos anteriores, tenemos

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2} + O(h^2). \quad (1.16)$$

Por lo tanto, al aproximar la segunda derivada, la fórmula de diferencias centrales de tres puntos tiene un error de truncamiento de $O(h^2)$ comparado al error $O(h)$ de las fórmulas de diferencias hacia atrás y hacia adelante de tres puntos.

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales parciales elípticas

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de segundo orden se pueden clasificar en tres tipos: parabólicas, elípticas e hiperbólicas [20]. Para distinguirlas, consideremos la siguiente forma general de una EDP de segundo orden en dos variables:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F \sigma = S \quad (2.1)$$

donde x y y son variables independientes y A , B , C , D , E , F y S son funciones dadas de x y y . Entonces la ecuación anterior puede ser:

- parabólica si $B^2 - 4AC = 0$, por ejemplo, la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que se puede usar para modelar la distribución de temperatura dependiente del tiempo a lo largo de una barra 1D calentada,

- elíptica si $B^2 - 4AC < 0$, por ejemplo, la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

que puede usarse para modelar la distribución de temperatura en estado estacionario en una placa o flujo potencial incompresible,

- hiperbólica si $B^2 - 4AC > 0$, por ejemplo la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que puede ser usada para modelar la cuerda vibrante de una guitarra o flujos supersónicos.

Las EDP elípticas aparecen en problemas estacionarios de dos y tres dimensiones, como los de la conducción del calor en sólidos, la difusión de partículas y la vibración de una membrana, por mencionar algunos [21, 22].

Estas ecuaciones tienen una relación cercana con las de tipo parabólico, ya que al resolver una EDP parabólica es frecuente el uso de los métodos numéricos para una EDP elíptica como parte del esquema de solución. Entonces las EDP elípticas se pueden considerar como la contraparte de estado estacionario de las EDP parabólicas.

Las ecuaciones de Poisson y Laplace son casos especiales de las EDP elípticas. Sea una EDP elíptica que se pueda escribir en la siguiente forma general

$$-\nabla p(x, y) \nabla u(x, y) + q(x, y)u(x, y) = S(x, y) \quad (2.2)$$

donde p , q y S son funciones dadas y $q \geq 0$. Cuando $p = 1$ y $q = 0$, (2.2) puede ser una ecuación de:

$$\begin{aligned} \text{Poisson:} & \quad -\nabla^2 u(x, y) = S(x, y), \\ \text{Laplace:} & \quad -\nabla^2 u(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Los métodos de solución numérica para las EDP elípticas generalmente se clasifican en dos categorías:

a) Métodos de diferencias finitas:

- Dispone de numerosos métodos de solución eficientes.
- Menos adaptables a geometrías curvas.

b) Métodos de elemento finito:

- Fáciles de adaptar a geometrías curvas.

- Los algoritmos de solución son limitados y menos eficientes que los métodos de diferencias finitas.

Los primeros se obtienen a partir de una retícula rectangular y la ventaja de los segundos es que se puede determinar la ecuación discreta para casi toda geometría. Por lo tanto, frecuentemente se elige el método de elemento finito cuando el problema trata de una geometría complicada. Sin embargo, en años recientes se han podido resolver problemas geoméricamente difíciles por el método de diferencias finitas y una transformación de coordenadas [23]. Es decir, la transformación de cierta geometría no rectangular en una coordenada rectangular que haga más fáciles los cálculos. Con esta transformación, se puede utilizar el método de diferencias finitas. Por lo anterior, en la siguiente sección se va a desarrollar la discretización por diferencias de las ecuaciones de Laplace y de Poisson.

2.1. Aproximaciones por diferencias para las geometrías rectangulares

En esta sección obtendremos las ecuaciones en diferencias finitas para la ecuación de Poisson en las coordenadas cartesianas rectangulares:

$$-\nabla^2 u(x, y) = S(x, y) \quad (2.3)$$

o, en forma equivalente,

$$-\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = S(x, y) \quad (2.4)$$

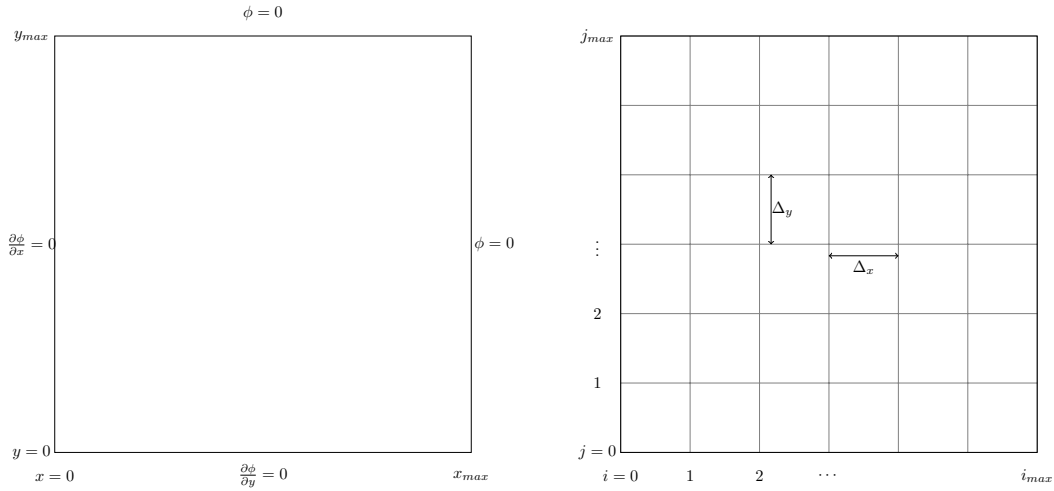
donde $S(x, y)$ es una función dada, la cual recibe el nombre de término no homogéneo (o término fuente).

Tomaremos como referencia el dominio de la Figura 2.1a, que está definido por

$$0 \leq x \leq x_{\text{máx}}, 0 \leq y \leq y_{\text{máx}},$$

y supondremos que las condiciones en la frontera son:

- En la frontera izquierda una condición tipo Neumann: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$,



(A) Dominio rectangular.

(B) Retícula.

FIGURA 2.1: Dominio rectangular y su retícula.

- en la frontera derecha una condición tipo Dirichlet: $u = 0$,
- en la frontera inferior otra condición tipo Neumann: $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$,
- Por último, en la frontera superior otra condición tipo Dirichlet: $u = 0$.

Supongamos que tenemos una retícula para nuestro dominio rectangular, con intervalos espaciados de manera uniforme, como en la Figura 2.1b. Sea Δx y Δy los tamaños de paso para x y y respectivamente. Los subíndices i y j corresponden a los índices en las direcciones x y y respectivamente.

Para obtener la ecuación en diferencias correspondiente a un punto i,j de la malla se considera a dicho punto y a los cuatro que lo rodean a él como se puede ver en la Figura 5.5b. Aplicando diferencias centrales para aproximar el primer término de la ecuación (2.4) obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2}, \tag{2.5}$$

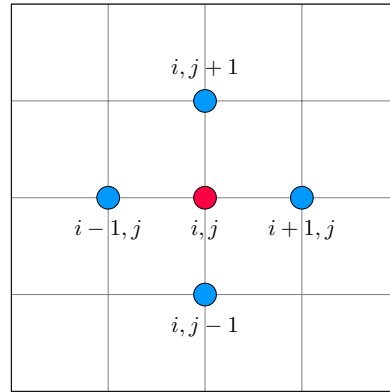
de manera análoga para el segundo término tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta y^2}. \tag{2.6}$$

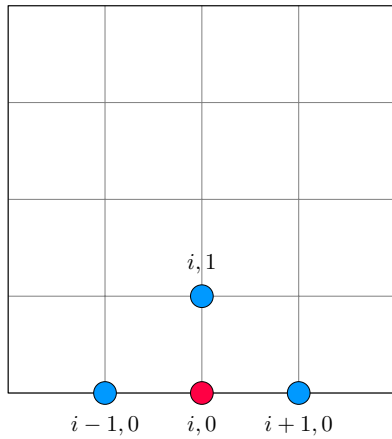
Ahora, sustituyendo las ecuaciones anteriores (2.5) y (2.6) en (2.4)

$$\frac{-u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{-u_{i,j-1} + 2u_{i,j} - u_{i,j+1}}{\Delta y^2} = S_{i,j} \quad (2.7)$$

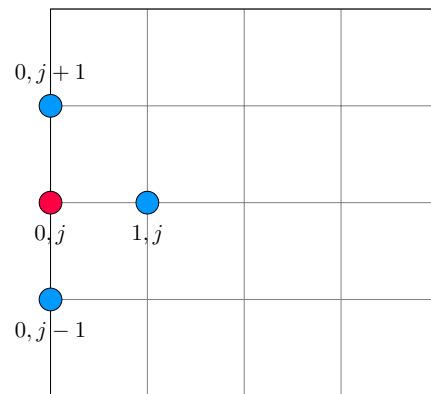
donde $S_{i,j} = S(x_i, y_j)$. La ecuación (2.7) se aplica a todos los puntos de la retícula, excepto los de la frontera.



(A) Para la ecuación en diferencias de un punto interior, se necesitan 5 puntos.



(B) Para la ecuación en diferencias de un punto $(i, 0)$ en la frontera inferior, se necesitan 4 puntos.



(C) Para la ecuación en diferencias de un punto $(0, j)$ en la frontera izquierda, se necesitan 4 puntos.

FIGURA 2.2: Puntos de una retícula que se utilizan en las ecuaciones en diferencias.

Las ecuaciones en diferencias que se encuentran en la frontera requieren un tratamiento especial, dado que el número de vecinos es menor que cuatro y además

deben tomarse en cuenta las condiciones de frontera. Para este ejemplo en particular los puntos localizados en las fronteras derecha y superior no requieren de sus ecuaciones en diferencias, ya que se conocen sus valores ($u = 0$ en esos puntos) a partir de las condiciones en la frontera dadas en la Figura 2.1a.

Si consideramos la frontera inferior de la Figura 5.5e, podemos obtener la ecuación en diferencias para un punto, $1 < i < i_{\text{máx}}$ y $j = 1$, de la siguiente forma: aproximamos el primer término de (2.4) mediante (2.5), mientras que el segundo término lo aproximamos por

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,1} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,1+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,1}}{\frac{\Delta y}{2}}, \quad (2.8)$$

aproximamos por diferencias centrales el primer término de (2.8):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,1+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i,2} - u_{i,1}}{\Delta y}. \quad (2.9)$$

La condición sobre la frontera inferior dada en la Figura 2.1a muestra que el segundo término del numerador del lado derecho de (2.8) se anula. Por lo tanto, la ecuación (2.8) se transforma en

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,1} = \frac{2u_{i,2} - 2u_{i,1}}{\Delta y^2}. \quad (2.10)$$

Así, al sustituir (2.5) y (2.10) en la ecuación (2.4), se obtiene la ecuación en diferencias para un punto de la frontera inferior:

$$\frac{-u_{i-1,1} + 2u_{i,1} - u_{i+1,1}}{\Delta x^2} + \frac{-2u_{i,2} + 2u_{i,1}}{\Delta y^2} = S_{i,1}. \quad (2.11)$$

Para un punto $i = 1$ y $1 < j < j_{\text{máx}}$ en la frontera izquierda (Figura 2.2), aproximamos el primer término de (2.4) por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{1+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{1,j}}{\frac{\Delta x}{2}} \\ &= \frac{2u_{2,j} - 2u_{1,j}}{\Delta x^2}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

en donde se utiliza la condición en la frontera izquierda dada por la ecuación 2.1a, con el fin de eliminar $(\partial u/\partial x)_{1,j}$ y la aproximación por diferencias centrales se

utiliza para el término $(\partial u / \partial x)_{1+\frac{1}{2},j}$. Si sustituimos (2.12) y (2.6) en la ecuación (2.4), la ecuación en diferencias es

$$\frac{2u_{1,j} - 2u_{2,j}}{\Delta x^2} + \frac{-u_{1,j-1} + 2u_{1,j} - u_{1,j+1}}{\Delta y^2} = S_{1,j}. \quad (2.13)$$

Para el punto de la esquina en $i = j = 1$, aproximamos cada término del lado izquierdo de (2.4) por la ecuación (2.10) y (2.12), respectivamente. Por lo tanto, la ecuación en diferencias se convierte en

$$\frac{2u_{1,1} - 2u_{2,1}}{\Delta x^2} + \frac{2u_{1,1} - 2u_{1,2}}{\Delta y^2} = S_{1,1}. \quad (2.14)$$

Las condiciones en la frontera más generales son de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \beta \quad (\text{tipo mixto}) \quad (2.15)$$

donde α y β son constantes y $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada normal hacia afuera de la frontera. En un dominio rectangular, para la derivada normal se tiene que:

- para la frontera izquierda: $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial x}$,
- para la frontera superior: $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial y}$,
- para la frontera derecha: $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}$,
- por último, para la frontera inferior: $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial y}$.

La aplicación de las condiciones en la frontera dadas en la forma de la ecuación (2.15) es similar a la de $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ o bien la de $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Por ejemplo, si la condición en la frontera superior está dada en la forma de (2.15), aproximamos el segundo término de (2.4) como

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,J} &= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,J} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,J-\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta y}{2}} \\ &= \frac{-\alpha u_{i,J} + \beta - \frac{u_{i,J} - u_{i,J-1}}{\Delta y}}{\frac{\Delta y}{2}} \\ &= \frac{-2\alpha \Delta y u_{i,J} + 2\beta \Delta y - 2u_{i,J} + 2u_{i,J-1}}{\Delta y^2}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.16) y (2.5) en (2.4) obtenemos

$$\frac{-u_{i-1,J} + 2u_{i,J} - u_{i+1,J}}{\Delta x^2} + \frac{(2\alpha\Delta y + 2)u_{i,J} - 2u_{i,J-1}}{\Delta y^2} = S_{i,J} + \frac{2\beta}{\Delta y}. \quad (2.17)$$

La ecuación (2.15) es una forma general de las condiciones en la frontera, ya que los tres tipos de condiciones (Dirichlet, Neumann y mixto) se pueden representar de esa manera. Si $\alpha = 0$, se reduce a la condición de frontera de Neumann (con derivada), $\frac{\partial u}{\partial n} = \beta$. Por otro lado, si cambiamos β por $\gamma\alpha$ y α crece a infinito, entonces se reduce el tipo de Dirichlet (con un valor fijo), $u = \gamma$ (constante).

Aunque no se permite el concepto de infinito en un programa de computadora, se alcanza prácticamente el mismo efecto si α toma un valor muy grande, tal como 10^{10} . La ventaja del uso de esta forma es que, una vez escrito el programa, se puede cambiar con facilidad el tipo de condición en la frontera, simplemente revisando los parámetros α y β para cada frontera.

Capítulo 3

Problema de identificación de fuentes

En distintos campos de la investigación hay situaciones donde se requiere conocer las causas que originan cierto fenómeno mediante la información parcial que se obtiene de él [24]. A este tipo de problemas se les conoce como de identificación de fuentes y son estudiados ampliamente en diferentes campos de la investigación, por ejemplo en la medicina existe un interés grande en el problema de identificación de fuentes bioeléctricas cerebrales, donde partiendo de los datos conseguidos mediante, por ejemplo, un electroencefalograma (EEG) es posible detectar anomalías (mal funcionamiento, daños, etc.) lo que se ha hecho tradicionalmente por medio de distintas técnicas de diagnóstico como las que se mencionan a continuación.

Para los problemas de identificación de fuentes bioeléctricas cerebrales se utilizan modelos matemáticos y con ellos se desarrollan técnicas no invasivas, por nombrar algunas encontramos a la tomografía por emisión de positrones, la resonancia magnética nuclear y la electroencefalografía. Mediante la electroencefalografía se capturan los potenciales en un EEG, los cuales provienen de la actividad eléctrica de tejidos excitables, y se captan midiendo la diferencia de potencial existente entre un electrodo explorador y otro de referencia. Las fuentes que son producidas por la actividad electroquímica de estos órganos son conocidas como fuentes bioeléctricas y se estima que se componen por grandes conglomerados de neuronas que actúan simultáneamente [5]. En algunos casos se puede considerar que los generadores están concentrados en una región del cerebro y que se pueden representar mediante funciones de cuadrado integrable definidas sobre esa región.

El problema inverso electroencefalográfico (PIE) consiste en determinar, a partir de mediciones electroencefalográficas sobre el cuero cabelludo, las fuentes bioeléctricas que generan dichas mediciones.

Como se mencionó antes, las fuentes representan grandes conglomerados de neuronas que trabajan de forma sincronizada para generar potenciales que pueden ser registrados en el cuero cabelludo a través de un electroencefalógrafo.

El PIE es un problema mal planteado en el sentido de Hadamard [3], es decir: un problema es mal planteado si no tiene solución, o tal solución no es única, ya que existen diferentes fuentes que pueden producir la misma medición, o presenta una inestabilidad numérica, que se refleja en el hecho de que pequeños cambios en la medición pueden producir grandes variaciones en la localización de la fuente.

Para el estudio del PIE, se requiere considerar el llamado problema directo, el cual consiste en determinar la medición cuando se conoce la fuente. A diferencia del problema inverso, el problema directo tiene buenas propiedades numéricas, es decir, si dos fuentes están cercanas, las respectivas mediciones también lo estarán [8].

Las fuentes bioeléctricas pueden dividirse en corticales y subcorticales y su estudio puede hacerse por separado sin pérdida de generalidad. Por ejemplo, en [8] sólo consideraron el caso en el que la fuente se localiza sobre la corteza cerebral. En este caso, el problema de identificación de la fuente tiene solución única, por lo que el mal planteamiento del PIE está asociado con la inestabilidad numérica.

El estudio del problema de identificación de fuentes se realiza a través del siguiente problema de contorno [7]:

$$\nabla^2 u_1 = f \quad \text{en } \Omega_1, \quad (3.1)$$

$$\nabla^2 u_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (3.2)$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{sobre } S_1, \quad (3.3)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \quad \text{sobre } S_1, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \quad \text{sobre } S_2, \quad (3.5)$$

donde:

- $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$ representa la cabeza,

- Ω_1 representa al cerebro,
- Ω_2 es el resto de las capas que componen la cabeza (líquido intracraneal, cráneo, cuero cabelludo),
- σ_1 y σ_2 son las conductividades de Ω_1 y Ω_2 las cuales se suponen constantes y $\sigma_1 \neq \sigma_2$,
- f es la fuente,
- $u_i = u|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$ donde u representa el potencial eléctrico en Ω ,
- ∇^2 representa el operador laplaciano,
- S_1 representa la superficie de la corteza cerebral,
- S_2 es la superficie del cuero cabelludo,
- $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup S_1$.

Las condiciones de frontera (3.3) y (3.4), las cuales se muestran en la Figura 3.1, son llamadas de transmisión, y la condición de frontera (3.5) se obtiene al considerar que la conductividad de Ω^c es cero (la conductividad del aire). Este problema de contorno (3.1)-(3.5) es conocido como problema de contorno volumétrico (PCV), el cual ha sido estudiado en [25, 26, 7, 27, 28].

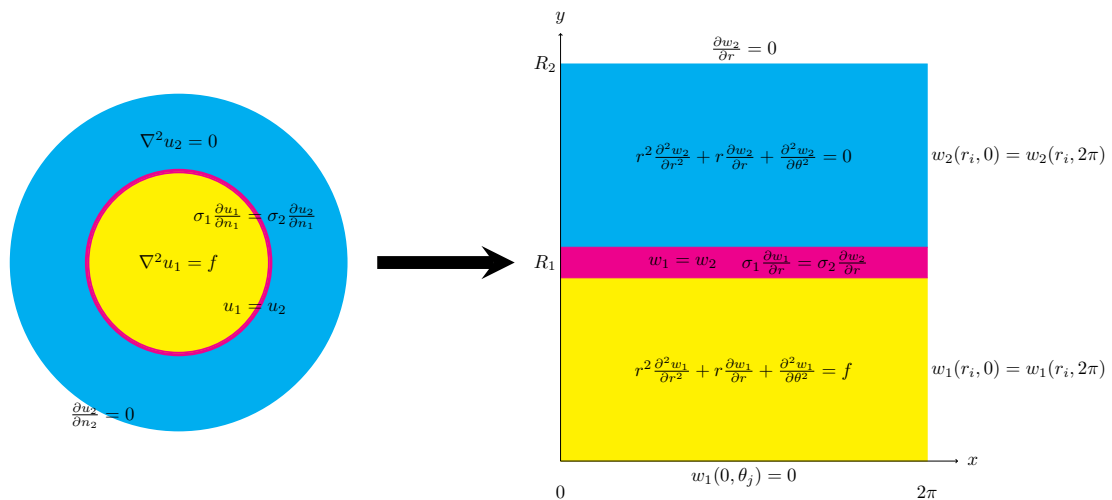


FIGURA 3.1: Representación esquemática de la cabeza (condiciones de frontera) y su cambio a una región rectangular, donde el color amarillo representa las regiones u_1 y w_1 , el color azul u_2 y w_2 . El color rosa representa la frontera entre las regiones (realmente es una línea y no corresponde a una región).

Como puede verse en la Figura 3.1, las regiones con las que se va a trabajar pueden ser transformadas en regiones rectangulares para las cuales el método de diferencias finitas resulta adecuado para discretizarlas.

3.1. Aproximación por el método de diferencias finitas

Consideremos el laplaciano en coordenadas polares, el cual se define como:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

ahora, sustituyendo la expresión anterior en (3.1) y multiplicando por r^2 tenemos:

$$r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} = r^2 f(r, \theta)$$

y de manera similar hacemos esto con la ecuación (3.2) y obtenemos:

$$r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} = 0.$$

Entonces, el PCV en coordenadas polares queda de la siguiente manera:

$$r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} = r^2 f \quad \text{en } \Omega_1, \quad (3.6)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (3.7)$$

$$w_1 = w_2 \quad \text{sobre } r = R_1, \quad (3.8)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial r} \quad \text{sobre } r = R_1, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre } r = R_2. \quad (3.10)$$

Para discretizar las derivadas parciales, se utilizarán las siguientes tres fórmulas:

$$\frac{\partial w_1}{\partial r} \approx \frac{1}{2\Delta r_1} \left[w_1(i+1, j) - w_1(i-1, j) \right], \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \approx \frac{1}{(\Delta r_1)^2} \left[w_1(i-1, j) - 2w_1(i, j) + w_1(i+1, j) \right], \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \approx \frac{1}{(\Delta \theta)^2} \left[w_1(i, j-1) - 2w_1(i, j) + w_1(i, j+1) \right]. \quad (3.13)$$

En la Figura 3.2, se presenta a la región en la que se utilizará el método de diferencias finitas.

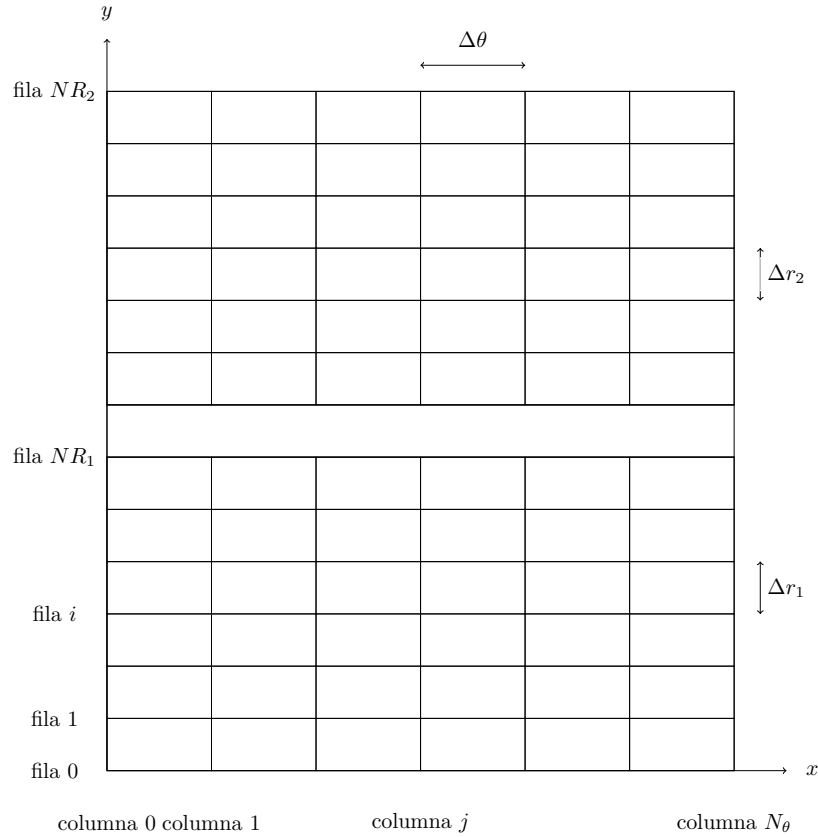


FIGURA 3.2: Retícula para w_1 y w_2 , en donde Δr_1 y Δr_2 representan la distancia o el ancho entre los puntos del eje y en w_1 y w_2 respectivamente y $\Delta\theta$ el ancho en el eje x .

Sea NR_1 el número de puntos de 0 a R_1 , NR_2 el número de puntos de R_1 a R_2 , N_θ el número de puntos de 0 a 2π , $i = 0, 1, \dots, NR_2$ y $j = 0, 1, \dots, N_\theta$.

$$\Delta r_1 = \frac{R_1}{NR_1}, \quad \Delta r_2 = \frac{|R_2 - R_1|}{NR_2}, \quad \Delta\theta = \frac{2\pi}{N_\theta},$$

donde $r_i = i\Delta r_1$ con $i = 0, 1, \dots, NR_1$ en w_1 , y $r_i = R_1 + i\Delta r_2$ con $i = 0, 1, \dots, NR_2$ en w_2 .

A continuación, se muestra el proceso que se utilizó para hacer la discretización del problema (3.6)-(3.10).

3.1.1. Puntos en w_1

Empezamos por discretizar el punto $w_1(i, j)$ con $0 < i < NR_1$ y $0 < j < N_\theta$, es decir, la discretización de los puntos interiores de w_1 . Entonces, sustituyendo el valor de las ecuaciones (3.11) y (3.12) en $r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
 r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r} &\approx \frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2} \left[w_1(i-1, j) - 2w_1(i, j) + w_1(i+1, j) \right] \\
 &\quad + \frac{r_i}{2\Delta r_1} \left[w_1(i+1, j) - w_1(i-1, j) \right] \\
 &= \frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2} w_1(i-1, j) - 2 \frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2} w_1(i, j) + \frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2} w_1(i+1, j) \\
 &\quad + \frac{r_i}{2\Delta r_1} w_1(i+1, j) - \frac{r_i}{2\Delta r_1} w_1(i-1, j) \\
 &= \left(\frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2} + \frac{r_i}{2\Delta r_1} \right) w_1(i+1, j) - \frac{2r_i^2}{(\Delta r_1)^2} w_1(i, j) \\
 &\quad + \left(\frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2} - \frac{r_i}{2\Delta r_1} \right) w_1(i-1, j). \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (3.14) y (3.13) en $r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
 r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} &\approx \left(\frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2} + \frac{r_i}{2\Delta r_1} \right) w_1(i+1, j) \\
 &\quad + \left(-\frac{2r_i^2}{(\Delta r_1)^2} - \frac{2}{(\Delta \theta)^2} \right) w_1(i, j) \\
 &\quad + \left(\frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2} - \frac{r_i}{2\Delta r_1} \right) w_1(i-1, j) \\
 &\quad + \frac{1}{(\Delta \theta)^2} w_1(i, j-1) + \frac{1}{(\Delta \theta)^2} w_1(i, j+1), \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

sea $A_i = \frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2}$, $B_i = \frac{r_i}{2\Delta r_1}$ y $C = \frac{1}{(\Delta\theta)^2}$, sustituyendo en la última expresión se tiene:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \approx & (A_i + B_i)w_1(i+1, j) \\ & + (-2(A_i + C))w_1(i, j) \\ & + (A_i - B_i)w_1(i-1, j) \\ & + Cw_1(i, j-1) + Cw_1(i, j+1). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Entonces, la ecuación (3.16) es la que vamos a utilizar para discretizar los puntos interiores de w_1 , tales puntos se representan en la Figura 3.3.

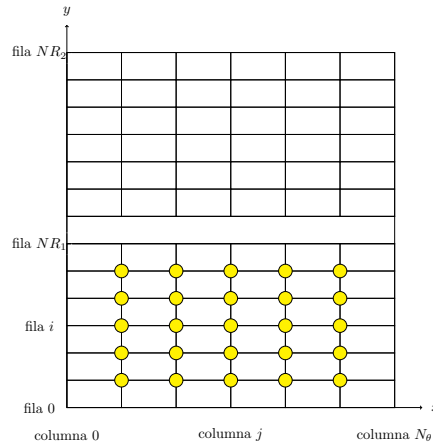


FIGURA 3.3: Los puntos amarillos representan a los puntos interiores en w_1 .

Ahora, para discretizar todos los puntos $w_1(i, 0)$ con $0 < i < NR_1$, es decir, los puntos que cumplen lo siguiente:

1. Los puntos que están entre la frontera superior e inferior de w_1 y
2. los puntos que están en la frontera izquierda de w_1 .

Como primer paso, vamos a discretizar $\frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right) \Big|_{i,j} \\
 &\approx \frac{1}{2\Delta\theta} \left(-3 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \Big|_{i,j} + 4 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \Big|_{i,j+1} - \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \Big|_{i,j+2} \right) \\
 &\approx \frac{1}{2\Delta\theta} \left\{ -3 \left[\frac{1}{2\Delta\theta} \left(-3w_1(i,j) + 4w_1(i,j+1) - w_1(i,j+2) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + 4 \left[\frac{1}{2\Delta\theta} \left(w_1(i,j+2) - w_1(i,j) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[\frac{1}{2\Delta\theta} \left(w_1(i,j+3) - w_1(i,j+1) \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{4(\Delta\theta)^2} \left\{ -3 \left(-3w_1(i,j) + 4w_1(i,j+1) - w_1(i,j+2) \right) \right. \\
 &\quad \left. + 4 \left(w_1(i,j+2) - w_1(i,j) \right) - \left(w_1(i,j+3) - w_1(i,j+1) \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4(\Delta\theta)^2} \left(9w_1(i,j) - 12w_1(i,j+1) + 3w_1(i,j+2) \right. \\
 &\quad \left. + 4w_1(i,j+2) - 4w_1(i,j) - w_1(i,j+3) + w_1(i,j+1) \right) \\
 &= \frac{1}{4(\Delta\theta)^2} \left(5w_1(i,j) - 11w_1(i,j+1) + 7w_1(i,j+2) - w_1(i,j+3) \right). \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Ahora, sumando las ecuaciones (3.14) y (3.17) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 &r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \\
 &\approx \left(\frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2} + \frac{r_i}{2\Delta r_1} \right) w_1(i+1, j) - \frac{2r_i^2}{(\Delta r_1)^2} w_1(i, j) \\
 &\quad + \left(\frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2} - \frac{r_i}{2\Delta r_1} \right) w_1(i-1, j) \\
 &\quad + \frac{1}{4(\Delta\theta)^2} \left(5w_1(i, j) - 11w_1(i, j+1) + 7w_1(i, j+2) - w_1(i, j+3) \right) \\
 &= \left(\frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2} + \frac{r_i}{2\Delta r_1} \right) w_1(i+1, j) \\
 &\quad + \left(-\frac{2r_i^2}{(\Delta r_1)^2} + \frac{5}{4(\Delta\theta)^2} \right) w_1(i, j) + \left(\frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2} - \frac{r_i}{2\Delta r_1} \right) w_1(i-1, j) \\
 &\quad + \frac{1}{4(\Delta\theta)^2} \left(-11w_1(i, j+1) + 7w_1(i, j+2) - w_1(i, j+3) \right). \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Recordando que $A_i = \frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2}$, $B_i = \frac{r_i}{2\Delta r_1}$ y $C = \frac{1}{(\Delta\theta)^2}$, después de sustituir en la última expresión se tiene:

$$\begin{aligned} & r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \\ & \approx (A_i + B_i)w_1(i+1, j) + (-2A_i + \frac{5}{4}C)w_1(i, j) + (A_i - B_i)w_1(i-1, j) \\ & \quad + \frac{1}{4}C \left(-11w_1(i, j+1) + 7w_1(i, j+2) - w_1(i, j+3) \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Entonces, la ecuación (3.19) es la que nos va a permitir discretizar los puntos $w_1(i, 0)$ y estos están representados en la Figura 3.4.

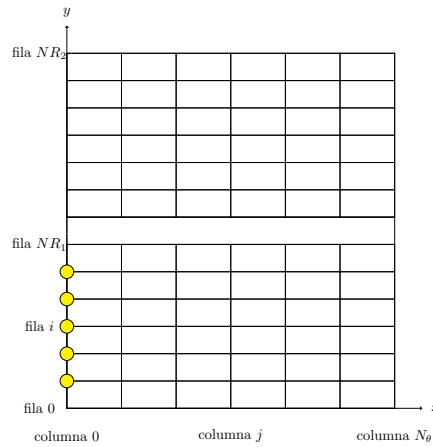


FIGURA 3.4: Los puntos amarillos representan a los puntos en la frontera izquierda, entre las fronteras superior e inferior de w_1 .

3.1.2. Puntos en w_2

Comenzamos por discretizar el punto $w_2(0, 0)$. Como se puede ver en la Figura 3.5, este punto se encuentra entre la frontera izquierda y la frontera inferior de w_2 . Entonces, para discretizar $\frac{\partial w_2}{\partial r}$ hay que tomar en cuenta la condición de frontera (3.9), de donde hallamos:

$$D \frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r}$$

donde $D = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. Ahora, procediendo con la discretización:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_2}{\partial r} &= D \frac{\partial w_1}{\partial r} \\
&\approx D \left(-\frac{1}{2\Delta r_1} \right) \left(-3w_1(i, j) + 4w_1(i-1, j) - w_1(i-2, j) \right) \\
&= D \left(\frac{1}{2\Delta r_1} \right) \left(3w_1(i, j) - 4w_1(i-1, j) + w_1(i-2, j) \right) \\
&= \left(\frac{D}{2\Delta r_1} \right) \left(3w_1(i, j) - 4w_1(i-1, j) + w_1(i-2, j) \right). \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Para obtener la discretización de $r \frac{\partial w_2}{\partial r}$, multiplicamos la ecuación (3.20) por r :

$$\begin{aligned}
r \frac{\partial w_2}{\partial r} &\approx \left(\frac{Dr_i}{2\Delta r_1} \right) \left(3w_1(i, j) - 4w_1(i-1, j) + w_1(i-2, j) \right) \\
&= DB_i \left(3w_1(i, j) - 4w_1(i-1, j) + w_1(i-2, j) \right). \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Ahora, para discretizar $\frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2}$ también hay que considerar la condición de frontera (3.9):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w_2}{\partial r} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \left(D \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \\
&= D \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2}.
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando la fórmula de diferencias hacia atrás en la última expresión se halla:

$$\begin{aligned}
 D \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} &= D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \\
 &\approx D \left(-\frac{1}{2\Delta r_1} \right) \left(-3 \frac{\partial w_1}{\partial r} \Big|_{i,j} + 4 \frac{\partial w_1}{\partial r} \Big|_{i-1,j} - \frac{\partial w_1}{\partial r} \Big|_{i-2,j} \right) \\
 &= \frac{D}{2\Delta r_1} \left(3 \frac{\partial w_1}{\partial r} \Big|_{i,j} - 4 \frac{\partial w_1}{\partial r} \Big|_{i-1,j} + \frac{\partial w_1}{\partial r} \Big|_{i-2,j} \right) \\
 &\approx \frac{D}{2\Delta r_1} \left\{ 3 \left[-\frac{1}{2\Delta r_1} \left(-3w_1(i,j) + 4w_1(i-1,j) - w_1(i-2,j) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - 4 \left[\frac{1}{2\Delta r_1} \left(w_1(i,j) - w_1(i-2,j) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{2\Delta r_1} \left(w_1(i-1,j) - w_1(i-3,j) \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{D}{4(\Delta r_1)^2} \left[3 \left(3w_1(i,j) - 4w_1(i-1,j) + w_1(i-2,j) \right) \right. \\
 &\quad \left. - 4 \left(w_1(i,j) - w_1(i-2,j) \right) + w_1(i-1,j) - w_1(i-3,j) \right] \\
 &= \frac{D}{4(\Delta r_1)^2} \left(9w_1(i,j) - 12w_1(i-1,j) + 3w_1(i-2,j) \right. \\
 &\quad \left. - 4w_1(i,j) + 4w_1(i-2,j) + w_1(i-1,j) - w_1(i-3,j) \right) \\
 &= \frac{D}{4(\Delta r_1)^2} \left(5w_1(i,j) - 11w_1(i-1,j) + 7w_1(i-2,j) - w_1(i-3,j) \right). \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Ahora, para obtener la discretización de $r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2}$, multiplicamos por r^2 la última expresión y obtenemos:

$$\begin{aligned}
 r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} &\approx \frac{Dr_i^2}{4(\Delta r_1)^2} \left(5w_1(i,j) - 11w_1(i-1,j) + 7w_1(i-2,j) - w_1(i-3,j) \right) \\
 &= \frac{DA_i}{4} \left(5w_1(i,j) - 11w_1(i-1,j) + 7w_1(i-2,j) - w_1(i-3,j) \right) \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Para discretizar $r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r}$ vamos a utilizar las ecuaciones (3.23) y (3.21)

$$\begin{aligned}
 & r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r} \\
 & \approx \frac{DA_i}{4} \left(5w_1(i, j) - 11w_1(i-1, j) + 7w_1(i-2, j) - w_1(i-3, j) \right) \\
 & \quad + DB_i \left(3w_1(i, j) - 4w_1(i-1, j) + w_1(i-2, j) \right) \\
 & = D \left[\frac{A_i}{4} \left(5w_1(i, j) - 11w_1(i-1, j) + 7w_1(i-2, j) - w_1(i-3, j) \right) \right. \\
 & \quad \left. + B_i \left(3w_1(i, j) - 4w_1(i-1, j) + w_1(i-2, j) \right) \right] \\
 & = D \left[\left(\frac{5A_i}{4} + 3B_i \right) w_1(i, j) + \left(-\frac{11A_i}{4} - 4B_i \right) w_1(i-1, j) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{7A_i}{4} + B_i \right) w_1(i-2, j) - \frac{A_i}{4} w_1(i-3, j) \right]. \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Finalmente, para discretizar $r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2}$ sólo tenemos que sumar las ecuaciones (3.24) y (3.17)

$$\begin{aligned}
 & r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \\
 & \approx D \left[\left(\frac{5A_i}{4} + 3B_i \right) w_1(i, j) + \left(-\frac{11A_i}{4} - 4B_i \right) w_1(i-1, j) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{7A_i}{4} + B_i \right) w_1(i-2, j) - \frac{A_i}{4} w_1(i-3, j) \right] \\
 & \quad + \frac{C}{4} \left(5w_2(i, j) - 11w_2(i, j+1) + 7w_2(i, j+2) - w_2(i, j+3) \right) \\
 & = \frac{D}{4} \left[\left(5A_i + 12B_i \right) w_1(i, j) + \left(-11A_i - 16B_i \right) w_1(i-1, j) \right. \\
 & \quad \left. + \left(7A_i + 4B_i \right) w_1(i-2, j) - A_i w_1(i-3, j) \right] \\
 & \quad + \frac{C}{4} \left(5w_2(i, j) - 11w_2(i, j+1) + 7w_2(i, j+2) - w_2(i, j+3) \right). \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

La ecuación (3.25) es la que nos permite discretizar $r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2}$ en el punto $w_2(0, 0)$ el cual se puede ver en la Figura 3.5.

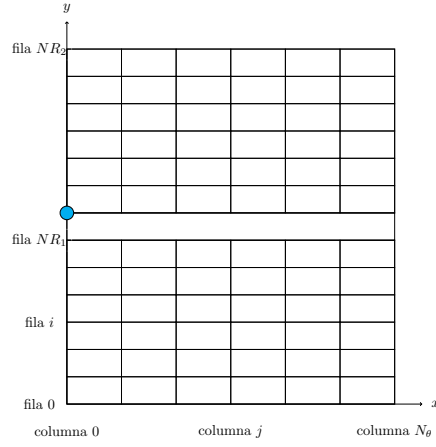


FIGURA 3.5: El punto azul representa al punto entre la frontera izquierda y la inferior de w_2 .

Para obtener la discretización en todos los puntos $w_2(0, j)$ con $0 < j < N_\theta$, es decir, los puntos internos de la frontera inferior de w_2 , vamos a sumar las ecuaciones (3.24) y (3.13):

$$\begin{aligned}
 & r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \\
 & \approx D \left[\left(\frac{5A_i}{4} + 3B_i \right) w_1(i, j) + \left(-\frac{11A_i}{4} - 4B_i \right) w_1(i-1, j) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{7A_i}{4} + B_i \right) w_1(i-2, j) - \frac{A_i}{4} w_1(i-3, j) \right] \\
 & \quad + \frac{1}{(\Delta\theta)^2} \left[w_2(i, j-1) - 2w_2(i, j) + w_2(i, j+1) \right] \\
 & = \frac{D}{4} \left[\left(5A_i + 12B_i \right) w_1(i, j) + \left(-11A_i - 16B_i \right) w_1(i-1, j) \right. \\
 & \quad \left. + \left(7A_i + 4B_i \right) w_1(i-2, j) - A_i w_1(i-3, j) \right] \\
 & \quad + C \left(w_2(i, j-1) - 2w_2(i, j) + w_2(i, j+1) \right). \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación (3.26) nos da la discretización de $r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2}$ en los puntos $w_2(0, j)$ que están representados en la Figura 3.6.

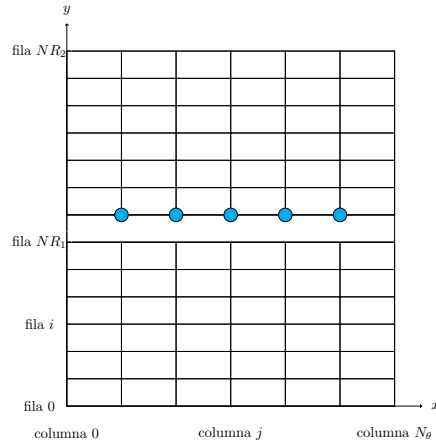


FIGURA 3.6: Los puntos azules representan a los puntos internos que están en la frontera inferior de w_2 .

Ahora, vamos a discretizar $\frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2}$ en el punto $w_2(NR_2, 0)$, es decir, el primer punto en la frontera superior de w_2 utilizando la condición de frontera (3.10) y la ecuación (3.17) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \approx \frac{C}{4} \left(5w_2(i, j) - 11w_2(i, j + 1) + 7w_2(i, j + 2) - w_2(i, j + 3) \right), \quad (3.27)$$

esta última ecuación nos sirve para discretizar el punto que se muestra en la Figura 3.7.

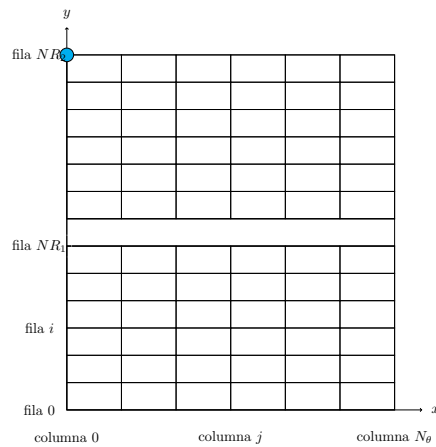


FIGURA 3.7: El punto azul representa el primer punto en la frontera superior de w_2 .

Para todos los puntos $w_2(NR_2, j)$ con $0 < j < N_\theta$, es decir, los puntos interiores en la frontera superior de w_2 que se muestran en la Figura 3.8, tenemos la siguiente

ecuación:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \approx C \left[w_2(i, j-1) - 2w_2(i, j) + w_2(i, j+1) \right]. \quad (3.28)$$

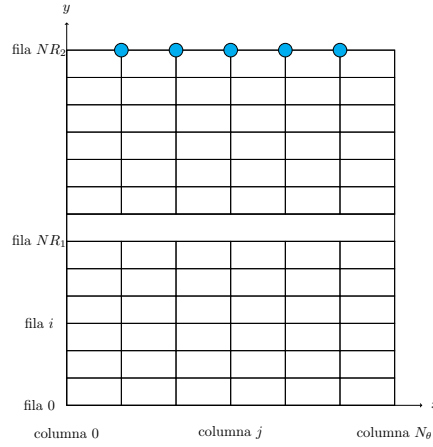


FIGURA 3.8: Los puntos azules representan a los puntos internos en la frontera superior de w_2 .

3.2. Fórmulas obtenidas para los puntos en w_1 y w_2

Enseguida se presentan las fórmulas que se obtuvieron para los puntos en w_1 . Sea NR_1 el número de puntos de 0 a R_1 , N_θ el número de puntos de 0 a 2π y

$$\Delta r_1 = \frac{R_1}{NR_1}, \quad \Delta \theta = \frac{2\pi}{N_\theta},$$

$$r_i = i\Delta r_1, \quad A_i = \frac{r_i^2}{(\Delta r_1)^2}, \quad B_i = \frac{r_i}{2\Delta r_1}, \quad C = \frac{1}{(\Delta \theta)^2}.$$

donde $i = 0, 1, \dots, NR_1$.

Para $w_1(i, 0)$ con $0 < i < NR_1$ (ver Figura 3.9a):

$$(A_i + B_i)w_1(i+1, 0) + \left(-2A_i + \frac{5}{4}C \right)w_1(i, 0) + (A_i - B_i)w_1(i-1, 0)$$

$$+ \frac{C}{4} \left(-11w_1(i, 1) + 7w_1(i, 2) - w_1(i, 3) \right).$$

Para $w_1(i, j)$ con $0 < i < NR_1$ y $0 < j < N_\theta$ (ver Figura 3.9b):

$$(A_i + B_i)w_1(i + 1, j) + (-2(A_i + C))w_1(i, j) + (A_i - B_i)w_1(i - 1, j) \\ + Cw_1(i, j - 1) + Cw_1(i, j + 1).$$



FIGURA 3.9: Representación de cómo se discretizaron los puntos interiores de w_1 , donde el punto amarillo es el que se discretiza y los puntos grises son sus vecinos.

A continuación se presentan las fórmulas que se obtuvieron para los puntos en w_2 .

Sea NR_2 el número de puntos de R_1 a R_2 y

$$\Delta r_2 = \frac{|R_2 - R_1|}{NR_2}, \quad H = \frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

$$r_i = R_1 + i\Delta r_2, \quad D_i = \frac{r_i^2}{(\Delta r_2)^2}, \quad E_i = \frac{r_i}{2\Delta r_2},$$

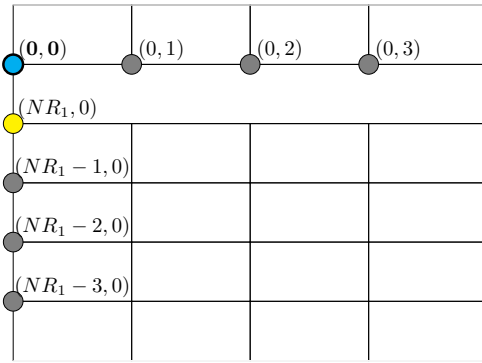
donde $i = 0, 1, \dots, NR_2$.

Para $w_2(0, 0)$ (ver Figura 3.10a):

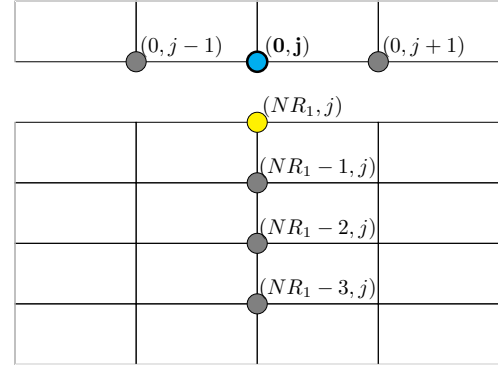
$$\frac{H}{4} \left[\left(5A_{NR_1} + 12B_{NR_1} \right) w_1(NR_1, 0) + \left(-11A_{NR_1} - 16B_{NR_1} \right) w_1(NR_1 - 1, 0) \right. \\ \left. + \left(7A_{NR_1} + 4B_{NR_1} \right) w_1(NR_1 - 2, 0) - A_{NR_1} w_1(NR_1 - 3, 0) \right] \\ + \frac{C}{4} \left(5w_2(0, 0) - 11w_2(0, 1) + 7w_2(0, 2) - w_2(0, 3) \right).$$

Para $w_2(0, j)$ con $0 < j < N_\theta$ (ver Figura 3.10b):

$$\begin{aligned} & \frac{H}{4} \left[\left(5A_{NR_1} + 12B_{NR_1} \right) w_1(NR_1, j) + \left(-11A_{NR_1} - 16B_{NR_1} \right) w_1(NR_1 - 1, j) \right. \\ & \quad \left. + \left(7A_{NR_1} + 4B_{NR_1} \right) w_1(NR_1 - 2, j) - A_{NR_1} w_1(NR_1 - 3, j) \right] \\ & + C \left(w_2(0, j - 1) - 2w_2(0, j) + w_2(0, j + 1) \right). \end{aligned}$$



(A) Punto $w_2(0, 0)$.



(B) Punto $w_2(0, j)$.

FIGURA 3.10: Representación de cómo se discretizaron los puntos en la frontera inferior de w_2 , donde el punto azul es el que se discretiza y los puntos grises son sus vecinos. El punto amarillo aparece por la condición de frontera (3.10).

Para $w_2(i, 0)$ con $0 < i < NR_2$ (ver Figura 3.11a):

$$\begin{aligned} & (D_i + E_i)w_2(i + 1, 0) + \left(-2D_i + \frac{5}{4}C \right) w_2(i, 0) + (D_i - E_i)w_2(i - 1, 0) \\ & + \frac{C}{4} \left(-11w_2(i, 1) + 7w_2(i, 2) - w_2(i, 3) \right). \end{aligned}$$

Para $w_2(i, j)$ con $0 < i < NR_2$ y $0 < j < N_\theta$ (ver Figura 3.11b):

$$\begin{aligned} & (D_i + E_i)w_2(i + 1, j) + (-2(D_i + C))w_2(i, j) + (D_i - E_i)w_2(i - 1, j) \\ & + Cw_2(i, j - 1) + Cw_2(i, j + 1). \end{aligned}$$

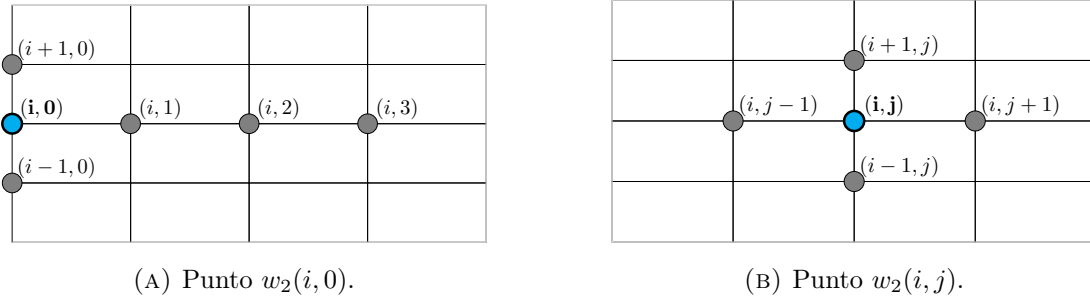


FIGURA 3.11: Representación de cómo se discretizaron los puntos interiores de w_2 , donde el punto azul es el que se discretiza y los puntos grises son sus vecinos.

Para $w_2(NR_2, 0)$ (ver Figura 3.12a):

$$\frac{C}{4} \left(5w_2(NR_2, 0) - 11w_2(NR_2, 1) + 7w_2(NR_2, 2) - w_2(NR_2, 3) \right).$$

Para $w_2(NR_2, j)$ con $0 < j < N_\theta$ (ver Figura 3.12b):

$$C \left[w_2(NR_2, j - 1) - 2w_2(NR_2, j) + w_2(NR_2, j + 1) \right].$$

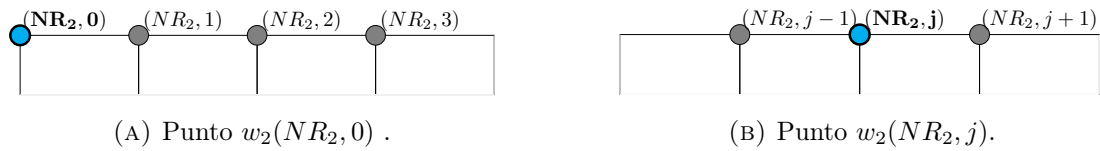


FIGURA 3.12: Representación de cómo se discretizaron los puntos en la frontera superior de w_2 , donde el punto azul es el que se discretiza y los puntos grises son sus vecinos.

Capítulo 4

Método del gradiente conjugado para el problema de identificación de fuentes

En este Capítulo se presenta el algoritmo para resolver el problema inverso electroencefalográfico. Para esto, se necesita resolver el problema directo, el problema adjunto y utilizar el método del gradiente conjugado para dar solución al problema inverso. En el problema directo se encuentra el EEG cuando se conoce a la fuente, el problema inverso consiste en determinar la fuente a partir del EEG.

4.1. Problema directo

Dada la fuente f , el problema directo consiste en determinar $w|_{S_2}$, donde w es la solución del problema de contorno (3.6)-(3.10). En términos de la discretización, para hallar la solución discreta del problema directo, debemos proceder de la manera siguiente (lo que lleva al algoritmo 4.1):

1. Resolver el sistema de ecuaciones lineales $Aw = ld$, donde w es un vector que representa al potencial discreto, A : es una matriz obtenida a partir de las fórmulas de discretización por diferencias finitas y ld es un vector que se obtiene de la discretización de la fuente. En este trabajo, se utilizará el método de la inversa para resolver dicho sistema. Sin embargo, se pueden

aplicar otros métodos para hallar dicha solución como el método iterativo de Gauss-Seidel [29] o algún otro que aproveche la forma especial de la matriz A .

2. Obtener la medición v , a partir de restringir la solución w en la frontera superior de $w_2 = w|_{\Omega_2}$, es decir, la frontera que corresponde a $r = R_2$:

$$v = w \Big|_{r=R_2}.$$

Algorithm 4.1 *ProblemaDirecto*(f)

Input: f es una función.

Output: v es una medición (EEG), restringida a la frontera superior de w_2 .

- 1: $w \leftarrow A^{-1} \cdot ld$;
 - 2: $v \leftarrow w|_{r=R_2}$;
 - 3: **return** v ;
-

4.2. Problema inverso

Como se mencionó anteriormente, el problema inverso consiste en determinar, de mediciones de potencial sobre la frontera S_2 , las fuentes que producen dicha mediciones. Este problema inverso es mal planteado en sentido de Hadamard ya que existen diferentes fuentes que producen la misma medición. Sin embargo, existe una única fuente armónica que genera una medición dada. Así, si se busca la solución en el espacio de funciones armónicas que satisfagan la condición de compatibilidad, se tiene unicidad del problema inverso. Adicionalmente, el mal planteamiento de este problema inverso también se debe a la inestabilidad numérica que provoca que pequeños cambios en la medición puedan generar cambios sustanciales en la localización de la fuente. Por esta razón, se aplica el Método de Regularización de Tikhonov, el cual depende de un parámetro y permite manejar la inestabilidad numérica mencionada. El MRT depende de un parámetro, llamado parámetro de regularización, el cual debe elegirse apropiadamente en términos del error en la medición. Así, si en vez de la medición exacta V , conocemos a V^δ con $\|V - V^\delta\|_{L_2(S_2)} < \delta$, debemos considerar el llamado funcional de Tikhonov:

$$J_{\alpha(\delta)}(f) = \frac{1}{2} \|A(f) - V\|_{L_2(S_2)}^2 + \frac{\alpha(\delta)}{2} \|f\|_{L_2(\Omega_1)}^2, \quad (4.1)$$

donde $\alpha(\delta) > 0$ es el parámetro de regularización de Tikhonov, $\|\cdot\|_{L_2(\Omega_1)}^2$ $\|\cdot\|_{L_2(S_2)}^2$ denotan la normas de $L_2(\Omega_1)$ y $L_2(S_2)$, respectivamente [9]. El mínimo de $J_{\alpha(\delta)}$ satisface las llamadas ecuaciones normales: $[A^*A + \alpha(\delta)I](f) = A^*V$ donde $A^* : L_{2,\perp}(S_2) \rightarrow L_{2,\perp}(S_1)$ es el operador adjunto de A , el cual se describe con detalle en la siguiente sección.

Otra manera de plantear el problema inverso es como un problema de control, a saber,

$$\text{mín } \|u\|, \quad (4.2)$$

sujeto a $A(f) = V$. Ya que esta última igualdad no tiene porque satisfacerse, se propone que $k\|A(f) - V\| < \varepsilon$ siendo k un parámetro de control que se elige suficientemente grande para garantizar que $\|A(f) - V\|$ sea muy pequeño. Esto lleva al siguiente funcional:

$$J_{k(\delta)}(f) = \frac{k}{2} \|A(f) - V\|_{L_2(S_2)}^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L_2(\Omega_1)}^2, \quad (4.3)$$

Si elegimos el parámetro de regularización de Tikhonov α como $\alpha = \frac{1}{k}$, donde k es el parámetro de control, entonces los funcionales (4.1) y (4.3) tienen la misma solución.

Para el problema inverso se usará el algoritmo 4.2, el cual utiliza los algoritmos 4.1, 4.3 y 4.4. Así, esquemáticamente se procederá de la manera siguiente:

1. Resolver el problema directo.
2. Resolver el problema adjunto.
3. Resolver el problema inverso utilizando el método del gradiente conjugado para encontrar una fuente aproximada f^\bullet a la fuente exacta f .

El método del gradiente conjugado, se describirá en la sección 4.3.1.

Algorithm 4.2 *problemaInverso(V)*

Input: V que es una medición conocida.

Output: φ^\bullet es la función que genera a V .

- 1: $v \leftarrow \text{problemaDirecto}(\varphi^0)$;
 - 2: $\rho \leftarrow \text{problemaAdjunto}(k \cdot (v - V))$;
 - 3: $\varphi^\bullet \leftarrow \text{gradienteConjugado}(\varphi^0, \rho)$;
 - 4: **return** φ^\bullet ;
-

4.3. Problema adjunto

Dada una función ψ , para hallar al operador adjunto, debemos resolver el problema de contorno adjunto:

$$r^2 \frac{\partial^2 \widehat{w}_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \widehat{w}_1}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_1, \quad (4.4)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 \widehat{w}_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \widehat{w}_2}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (4.5)$$

$$\widehat{w}_1 = \widehat{w}_2 \quad \text{en } r = R_1, \quad (4.6)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial r} \quad \text{sobre } r = R_1, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial r} = \psi \quad \text{sobre } r = R_2. \quad (4.8)$$

En este caso, $A^*(\psi) = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \widehat{w}|_{\Omega_1}$ [7]. En términos de la discretización, para hallar la solución discreta del problema adjunto, debemos proceder de la manera siguiente (lo que lleva al algoritmo 4.3):

1. Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\widehat{A}\widehat{w} = \widehat{ld}$, donde \widehat{w} es un vector que representa al potencial discreto, \widehat{A} es una matriz obtenida a partir de las fórmulas de discretización por diferencias finitas y \widehat{ld} es un vector que se obtiene de la discretización de ψ .

2. Obtener

$$\rho = A^*(\psi) = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \widehat{w} \Big|_{\Omega_1}.$$

Algorithm 4.3 *problemaAdjunto*(ψ)

Input: ψ es una función.

Output: g es un potencial definido en Ω_1 .

- 1: $\widehat{w} \leftarrow \widehat{A}^{-1} \cdot \widehat{ld}$;
 - 2: $g \leftarrow -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \widehat{w}|_{\Omega_1}$;
 - 3: **return** g ;
-

4.3.1. Algoritmo para el método del gradiente conjugado

A continuación, se presenta el algoritmo 4.4 que describe el método del gradiente conjugado el cual se usará para poder resolver el problema inverso.

Algorithm 4.4 *gradienteConjugado*(φ^0, ρ)**Input:** φ^0 es una función evaluada en 0, ρ .**Output:** φ es una función.

```

1:  $g^0 \leftarrow \varphi^0 + \rho$ ;
2:  $d^0 \leftarrow -g^0$ ;
3:  $flag \leftarrow true$ ;
4: while  $flag \neq false$  do
5:    $v \leftarrow problemaDirecto(d^n)$ ;
6:    $\rho \leftarrow problemaAdjunto(k \cdot v)$ ;
7:    $\bar{g}^n \leftarrow d^n + \rho$ ;
8:    $\alpha_n \leftarrow -\frac{\langle g^n, d^n \rangle}{\langle \bar{g}^n, d^n \rangle}$ ;
9:    $\varphi^{n+1} \leftarrow \varphi^n + \alpha_n \cdot d^n$ ;
10:   $g^{n+1} \leftarrow g^n + \alpha_n \cdot \bar{g}^n$ ;
11:  if  $\frac{\langle g^{n+1}, g^{n+1} \rangle}{\max\{1, \langle g^0, g^0 \rangle\}} \leq \varepsilon$  then
12:     $\varphi \leftarrow \varphi^{n+1}$ ;
13:     $flag \leftarrow false$ ;
14:  else
15:     $\beta_n \leftarrow \frac{\langle g^{n+1}, g^{n+1} \rangle}{\langle g^n, g^n \rangle}$ ;
16:     $d^{n+1} \leftarrow -g^{n+1} + \beta_n \cdot d^n$ ;
17:     $d^n \leftarrow d^{n+1}$ ;
18:     $g^n \leftarrow g^{n+1}$ ;
19:     $\varphi^n \leftarrow \varphi^{n+1}$ ;
20:     $n \leftarrow n + 1$ ;
21:  end if
22: end while
23: return  $\varphi$ ;

```

Para esto, como ya se había mencionado, en la parte de inicialización vamos a resolver tanto el problema directo como el problema adjunto.

Paso 1. Inicialización: Dado f^0 , resolver para w^0 el siguiente problema

$$r^2 \frac{\partial^2 w_1^0}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1^0}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1^0}{\partial \theta^2} = r^2 f^0 \quad \text{en } \Omega_1, \quad (4.9)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 w_2^0}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2^0}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2^0}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (4.10)$$

$$w_1^0 = w_2^0 \quad \text{en } r = R_1, \quad (4.11)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w_1^0}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial w_2^0}{\partial r} \quad \text{sobre } r = R_1, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial w_2^0}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre } r = R_2. \quad (4.13)$$

y resolver para \widehat{w}^0

$$r^2 \frac{\partial^2 \widehat{w}_1^0}{\partial r^2} + r \frac{\partial \widehat{w}_1^0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \widehat{w}_1^0}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_1, \quad (4.14)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 \widehat{w}_2^0}{\partial r^2} + r \frac{\partial \widehat{w}_2^0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \widehat{w}_2^0}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (4.15)$$

$$\widehat{w}_1^0 = \widehat{w}_2^0 \quad \text{en } r = R_1, \quad (4.16)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \widehat{w}_1^0}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial \widehat{w}_2^0}{\partial r} \quad \text{sobre } r = R_1, \quad (4.17)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial \widehat{w}_2^0}{\partial r} = k(w^0(f^0) - V) \quad \text{sobre } r = R_2. \quad (4.18)$$

Asignar

$$g^0 = f^0 + \widehat{w}^0 \Big|_{\Omega_1}. \quad (4.19)$$

Si

$$\frac{\langle g^0, g^0 \rangle}{\max\{1, \langle f^0, f^0 \rangle\}} < \varepsilon,$$

tomar $f_n = f^0$. En otro caso:

$$d^0 = -g^0. \quad (4.20)$$

Ahora, en este paso se resuelven nuevamente el problema directo y el problema adjunto hasta encontrar una f^\bullet que cumpla con la condición de paro del paso 3.

Paso 2. Descenso: Suponiendo que se conocen f^n , g^n , y d^n con $n \geq 0$, calcular f^{n+1} , g^{n+1} y si es necesario d^{n+1} de la siguiente manera:

$$r^2 \frac{\partial^2 w_1^n}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1^n}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1^n}{\partial \theta^2} = r^2 d^n(\theta, r) \quad \text{en } \Omega_1, \quad (4.21)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 w_2^n}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2^n}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2^n}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (4.22)$$

$$w_1^n = w_2^n \quad \text{en } r = R_1, \quad (4.23)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w_1^n}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial w_2^n}{\partial r} \quad \text{sobre } r = R_1, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial w_2^n}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre } r = R_2. \quad (4.25)$$

y para \widehat{w}^n resolver

$$r^2 \frac{\partial^2 \widehat{w}_1^n}{\partial r^2} + r \frac{\partial \widehat{w}_1^n}{\partial r} + \frac{\partial^2 \widehat{w}_1^n}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_1, \quad (4.26)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 \widehat{w}_2^n}{\partial r^2} + r \frac{\partial \widehat{w}_2^n}{\partial r} + \frac{\partial^2 \widehat{w}_2^n}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (4.27)$$

$$\widehat{w}_1^n = \widehat{w}_2^n \quad \text{en } r = R_1, \quad (4.28)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \widehat{w}_1^n}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial \widehat{w}_2^n}{\partial r} \quad \text{sobre } r = R_1, \quad (4.29)$$

$$\sigma_2 \frac{\partial \widehat{w}_2^n}{\partial r} = k w^n \quad \text{sobre } r = R_2. \quad (4.30)$$

Asignar

$$\bar{g}^n = d^n + \widehat{w}^n \Big|_{\Omega_1}. \quad (4.31)$$

Calcular el tamaño de paso α_n

$$\alpha_n = - \frac{\langle g^n, d^n \rangle}{\langle \bar{g}^n, d^n \rangle} \quad (4.32)$$

y actualizar f^{n+1} y g^{n+1}

$$f^{n+1} = f^n + \alpha_n d^n \quad (4.33)$$

$$g^{n+1} = g^n + \alpha_n \bar{g}^n \quad (4.34)$$

Paso 3. Probando convergencia: Se construye la nueva dirección de descenso.

Si

$$\frac{\langle g^{n+1}, g^{n+1} \rangle}{\max\{1, \langle g^0, g^0 \rangle\}} \leq \varepsilon,$$

tomar $f^\bullet = f^{n+1}$ y terminar. En otro caso, calcular β_n

$$\beta_n = \frac{\langle g^{n+1}, g^{n+1} \rangle}{\langle g^n, g^n \rangle} \quad (4.35)$$

y la nueva dirección de descenso d^{n+1}

$$d^{n+1} = -g^{n+1} + \beta_n d^n, \quad (4.36)$$

actualizar $n = n + 1$ y regresar al paso 2.

Capítulo 5

Experimentos numéricos y conclusiones

Ya que el problema será resuelto utilizando el método iterativo de gradiente conjugado, el cual en cada iteración resuelve tanto al problema directo como al adjunto, se empieza mostrando que la programación realizada resuelve estos problemas numéricamente de manera satisfactoria. Todos los programas que se utilizan en este trabajo se encuentran en el Apéndice C. Los resultados de este capítulo son originales y se publicaron en el artículo [30].

5.1. Problema directo

Ejemplo 1 (Solución del problema de contorno (3.6)-(3.10)). Consideremos a la fuente $f(x, y) = x^2 - y^2$, que en coordenadas polares es $f(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$. Tomemos $R_1 = 1$, $R_2 = 1,2$, $\sigma_1 = 3$ y $\sigma_2 = 1$. En la Tabla (5.1), se muestran el error relativo entre la solución exacta y la aproximada que se denotará por $ER(u, w)$. Al ver los resultados que se muestran en la Tabla (5.1), podemos notar lo siguiente:

- Con una malla de 0.06 se encuentra la solución en 0.29 segundos, mientras que si se hace más pequeña la malla, como por ejemplo a 0.015, el tiempo de ejecución aumenta a 184.97 segundos.

Refinamiento	(NR_1, NR_2, N_θ)	$ER(u, w)$	Tiempo de ejecución (seg.)
0.07	(14,3,90)	0.0217	1.19
0.06	(17,3,105)	0.0152	0.29
0.05	(20,4,126)	0.0106	0.41
0.04	(25,5,157)	0.0068	0.92
0.03	(33,7,209)	0.0038	3.29
0.02	(50,10,314)	0.0017	27.96
0.015	(67,13,419)	0.0009	184.97

TABLA 5.1: Resultados para el problema directo con $f(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$ y diferentes refinamientos. El error relativo disminuye y el tiempo de ejecución aumenta, conforme disminuye el refinamiento.

- El error relativo se hace más pequeño cada vez que la malla es más fina. Por ejemplo, con una malla del 0.06 el $ER(u, w) = 0,0152$, mientras que si la malla es del 0.015 el $ER(u, w) = 0,0009$.
- Se halla que con la malla de 0.04 se cumple un compromiso entre disminuir el error relativo ($ER(u, w) = 0,0068$) y el tiempo de ejecución (0,92).

Se presenta la solución exacta del problema (3.6)-(3.10) en la Figura 5.1 y su solución numérica en la Figura 5.2 con una malla del 0.015, creada con $NR_1 = 67$, $NR_2 = 13$, $N_\theta = 419$. El error relativo entre ellas es de 0.0009.

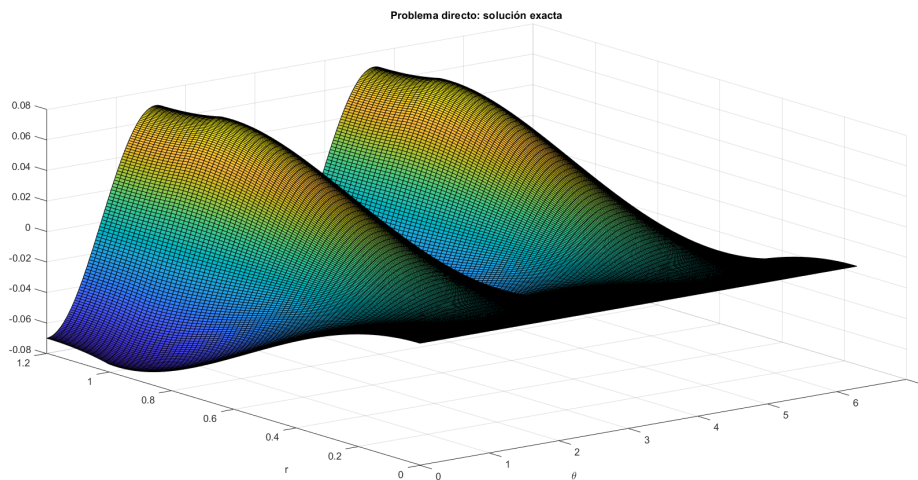


FIGURA 5.1: Solución exacta del problema (3.6)-(3.10), con $f(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$.

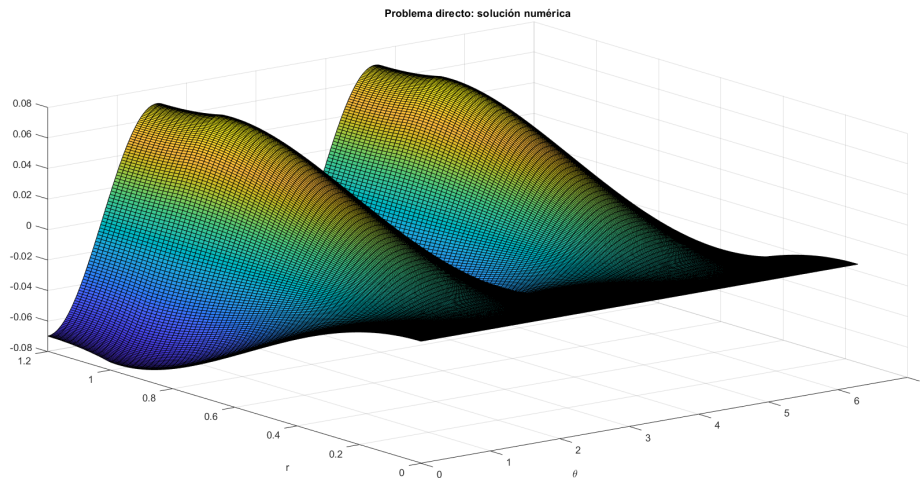


FIGURA 5.2: Solución numérica del problema (3.6)-(3.10), con $f(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$, $NR_1 = 67$, $NR_2 = 13$, $N_\theta = 419$.

5.2. Problema adjunto

Ejemplo 2. Para validar la programación para hallar la solución del problema adjunto, se dará como entrada ψ a la solución numérica del problema directo, que recordemos se obtiene restringiendo la solución del problema (3.6)-(3.10) a la frontera de la región. La solución del problema (3.6)-(3.10), se encontró en el Ejemplo 1. En la Tabla (5.2), se muestran el error relativo entre la solución exacta y la aproximada que se denotará por $ER(\hat{u}, \hat{w})$.

Refinamiento	(NR_1, NR_2, N_θ)	$ER(\hat{u}, \hat{w})$	Tiempo de ejecucion(seg.)
0.07	(14,3,90)	0.0234	0.25
0.06	(17,3,105)	0.0168	0.2
0.05	(20,4,126)	0.0118	0.35
0.04	(25,5,157)	0.0076	0.81
0.03	(33,7,209)	0.0043	3.02
0.02	(50,10,314)	0.0019	27.77
0.015	(67,13,419)	0.0011	170.9

TABLA 5.2: Resultados, al refinar la malla, del error relativo y del tiempo para el problema adjunto.

Al ver los resultados que se muestran en la Tabla (5.2) podemos notar que:

- Con una malla de 0.06 se encuentra la solución en 0.2 segundos, mientras que si se hace más pequeña la malla, como por ejemplo a 0.015, el tiempo de ejecución aumenta a 170.9 segundos.
- El error relativo se hace más pequeño cada vez que la malla es más fina. Por ejemplo, con una malla del 0.06 el error relativo es 0.0152, mientras que si la malla es del 0.015 el error relativo es 0.0011.
- Considerando el tiempo en ejecución, podemos encontrar un error relativo suficientemente bueno (0.0076) con una malla de 0.04. Por esto, se eligió esta malla para la solución del problema inverso.

En la Figura 5.3, se presenta la solución numérica con una malla regular de 0.015, que se construye tomando las siguientes número de puntos para crear particiones adecuadas: $NR_1 = 67$, $NR_2 = 13$, $N_\theta = 419$. La solución exacta se presenta en la Figura 5.4. Por cuestiones de visualización, se muestra la gráfica en la misma malla que se utiliza para la solución numérica presentada en la Figura 5.3. El error relativo entre la solución exacta y la numérica es de 0.0011.

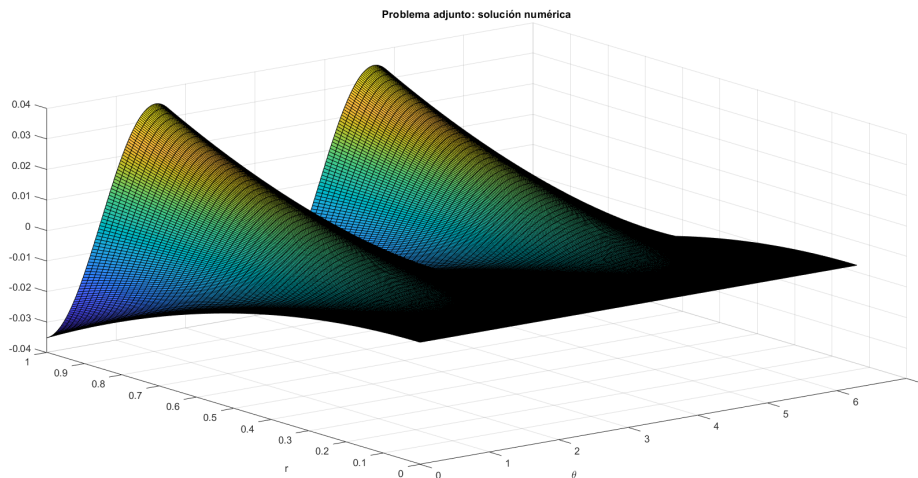


FIGURA 5.3: Solución numérica del problema adjunto. Para crear la malla del método numérico, se toman $NR_1 = 67$, $NR_2 = 13$ y $N_\theta = 419$.

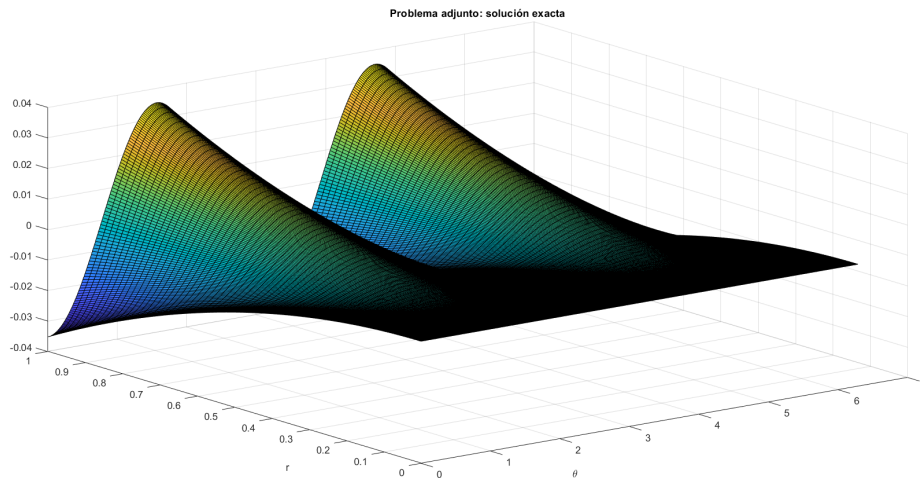


FIGURA 5.4: Solución exacta del problema adjunto. Por cuestiones de visualización, se muestra la gráfica en la misma malla que se utiliza para la solución numérica presentada en la Figura 5.3.

De las Tablas (5.1) y (5.2), se halla que tanto en el problema directo como en el problema adjunto, el error relativo se reduce al refinar la malla.

5.3. Problema inverso

En esta sección, se ilustra la implementación del método de gradiente conjugado para hallar la solución del problema de identificación de fuentes a partir de la medición V definida sobre S_2 .

Ejemplo 3. Consideremos a la fuente dada en el Ejemplo 1. De acuerdo con (A.8), la solución exacta del problema directo está dada por:

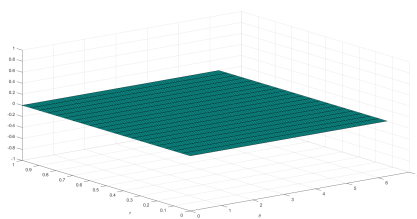
$$V(\theta) = u(r, \theta)|_{r=R_2} = (a_2^2 R_2^2 + c_2^2 R_2^{-2}) \cos 2\theta \quad (5.1)$$

y la numérica se halla restringiendo a S_2 ($r = R_2$) a la solución numérica del problema de contorno (3.6)-(3.10). Para emular los errores de medición, se agrega un error aleatorio a la solución numérica exacta utilizando la función *rand* de MATLAB. En la Figura 5.8, se muestran la medición numérica exacta (azul) y la medición con error (rojo). En verde, la medición que corresponde a la fuente recuperada por el método iterativo. En la Figura 5.5, se muestran tres iteraciones del método de gradiente conjugado. El método paró en la iteración 3 ya que se

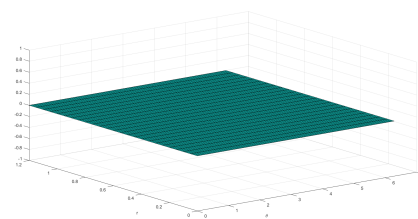
cumplió el criterio de paro, es decir, el error fue menor que la tolerancia $\varepsilon = 10^{-3}$. Se tomó $k = 10^4$.

En la Tabla 5.2 se puede ver que, utilizando una malla del 0.05, el MGC encuentra la fuente en sólo 3 iteraciones, con un error relativo de 0.0136. Mientras que en la Tabla 5.3, se puede observar que, usando una malla del 0.03, el MGC encuentra la fuente deseada en 5 iteraciones, con un error relativo de 0.0117. Podemos decir que mientras la malla sea más fina, el error relativo es menor. Sin embargo, el tiempo de ejecución es mayor para la malla más fina.

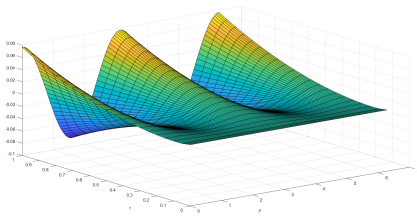
De los resultados presentados, podemos observar que la implementación del algoritmo estable da buenos resultados.



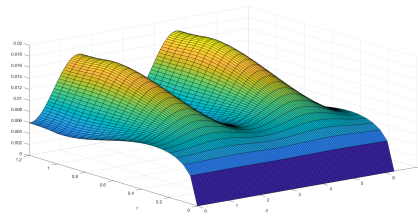
(A) Fuente recuperada, iteración 1.



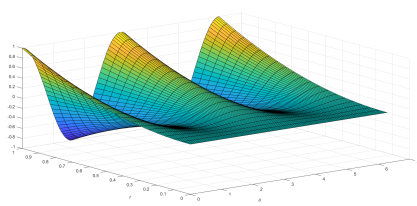
(B) Potencial en iteración 1.



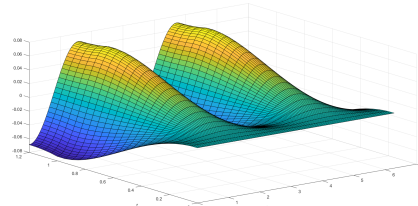
(C) Fuente recuperada, iteración 2.



(D) Potencial en iteración 2.



(E) Fuente recuperada, iteración 3.



(F) Potencial en iteración 3.

FIGURA 5.5: Fuente recuperada y el potencial generado con esa fuente en cada iteración del gradiente conjugado.

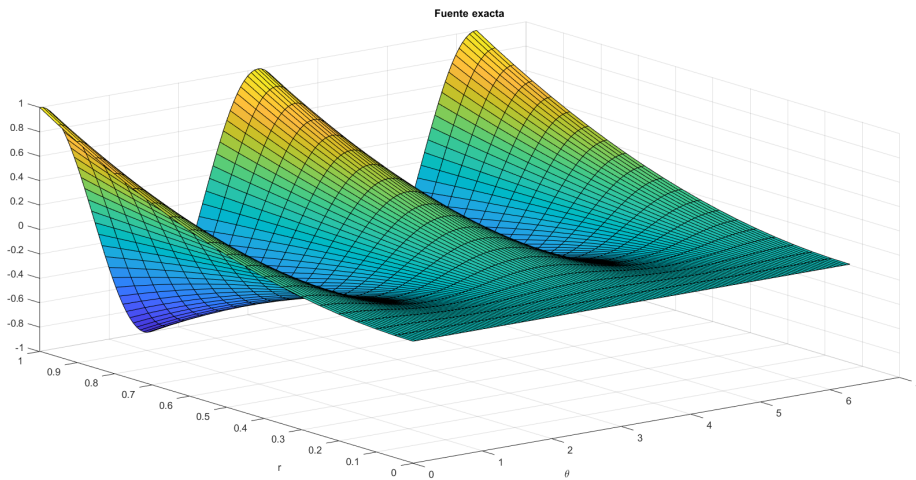


FIGURA 5.6: Fuente exacta $f(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$ graficada con la malla $NR_1 = 67$, $NR_2 = 13$, $N_\theta = 419$, la cual fue usada para resolver el problema inverso numéricamente.

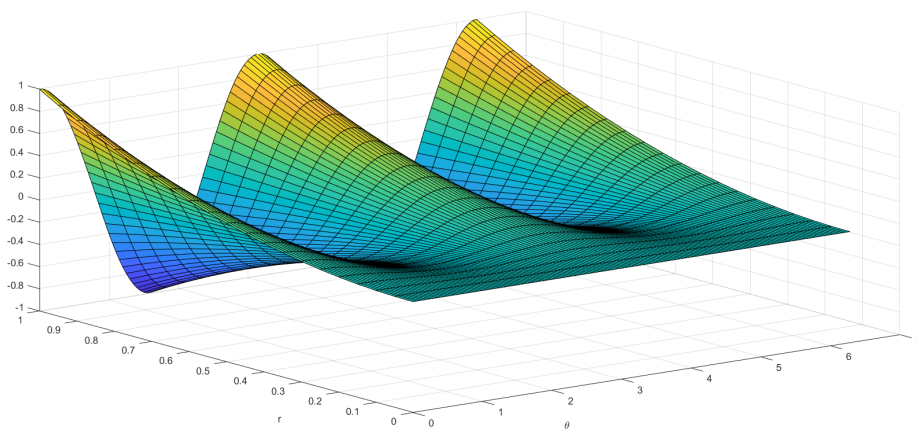


FIGURA 5.7: Fuente recuperada por el método de gradiente conjugado en la iteración 3. El error relativo entre la fuente exacta y la recuperada es de 0.0136.

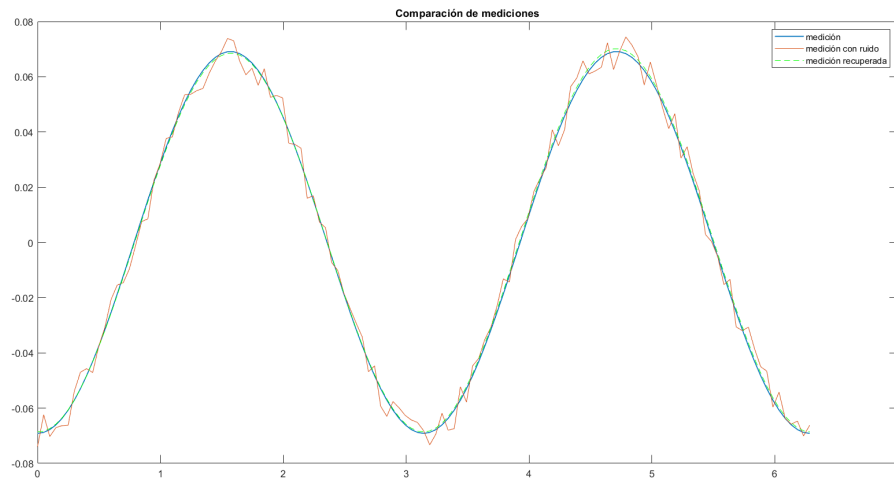


FIGURA 5.8: Medición numérica exacta obtenida del problema directo (azul), medición con ruido (roja) y la medición asociada a la fuente recuperada (verde).

ε	k	Iteraciones	$ER()$	Tiempo de ejecución (seg.)
$1e - 03$	$1e + 01$	2	15.398	6.20
$1e - 03$	$1e + 02$	3	0.4143	8.99
$1e - 03$	$1e + 03$	3	0.0389	8.98
$1e - 03$	$1e + 04$	3	0.0136	8.86
$1e - 03$	$1e + 05$	3	0.014	8.85
$1e - 03$	$1e + 06$	3	0.0141	8.77
	\vdots			
$1e - 03$	$1e + 25$	3	0.0141	8.80
$1e - 04$	$1e + 01$	3	15.407	8.78
$1e - 04$	$1e + 02$	3	0.4143	8.85
$1e - 04$	$1e + 03$	3	0.0389	8.82
$1e - 04$	$1e + 04$	3	0.0136	8.76
$1e - 04$	$1e + 05$	3	0.014	8.82
$1e - 04$	$1e + 06$	3	0.0141	8.86
	\vdots			
$1e - 04$	$1e + 25$	3	0.0141	8.88
$1e - 05$	$1e + 01$	3	15.407	8.87
$1e - 05$	$1e + 02$	10	0.5954	27.76
$1e - 05$	$1e + 03$	11	0.5461	30.55
$1e - 05$	$1e + 04$	11	0.6467	30.52
$1e - 05$	$1e + 05$	7	0.2401	19.69
$1e - 05$	$1e + 06$	7	0.2385	19.63
$1e - 05$	$1e + 07$	7	0.2384	19.7
	\vdots			
$1e - 05$	$1e + 25$	7	0.2384	19.59

TABLA 5.3: Resultados con una malla del 0.05, utilizando diferentes valores de ε y del parámetro de penalización k .

5.4. Trabajo futuro

En este trabajo, se resolvió el sistema de ecuaciones lineales algebraicas obtenido de la discretización del problema (3.6)-(3.10), con las herramientas de MATLAB. En trabajos futuros se puede probar resolver ese sistema de ecuaciones utilizando algunos métodos iterativos y comparar los resultados con los aquí programados, tanto numéricamente como en tiempos de ejecución.

Implementación del algoritmo en dispositivos programables como son los Field Programmable Gate Arrays (FPGA), que permiten la paralelización de estos algoritmos, ya que debe tomarse en cuenta que la electroencefalografía es un problema multicanal ya que en cada electrodo colocado se registra la actividad eléctrica temporal (hasta mil mediciones por segundo) producida por una fuente bioeléctrica.

Implementar este método en tres dimensiones, utilizando coordenadas esféricas en vez de polares.

También se deben considerar geometrías complejas que emulen la geometría de una cabeza. Aunque sabemos que cada cabeza es diferente, se puede pensar en geometrías promedio de grupos de personas que tengan características similares.

También utilizando el método de diferencias finitas resolver los dos siguientes problemas de identificación de fuentes:

1. Fuente sobre la corteza cerebral:

$$r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_1, \quad (5.2)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (5.3)$$

$$w_1 = w_2 \quad \text{sobre } r = R_1, \quad (5.4)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial r} + g \quad \text{sobre } r = R_1, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre } r = R_2, \quad (5.6)$$

donde g representa una fuente bioeléctrica localizada en la corteza cerebral (fuente cortical).

2. Fuente en el volumen y superficie de la corteza cerebral:

$$r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} = r^2 f \quad \text{en } \Omega_1, \quad (5.7)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (5.8)$$

$$w_1 = w_2 \quad \text{sobre } r = R_1, \quad (5.9)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial w_1}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial w_2}{\partial r} + g \quad \text{sobre } r = R_1, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial r} = 0 \quad \text{sobre } r = R_2. \quad (5.11)$$

Este último problema, corresponde al caso en que se tienen fuente volumétricas y corticales.

Finalmente, se podrían explorar otro tipo de métodos para hallar el mínimo del funcional de Tikhonov. En particular, métodos de optimización heurística como algoritmos genéticos.

Apéndice A

Solución analítica del problema directo

Consideremos el problema de valores en la frontera

$$\nabla^2 u_1 = f \quad \text{en } \Omega_1, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla^2 u_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (\text{A.2})$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{sobre } S_1, \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_1} \quad \text{sobre } S_1, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \quad \text{sobre } S_2, \quad (\text{A.5})$$

donde

- $\bar{\Omega} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ representa la cabeza,
- Ω_1 representa al cerebro,
- Ω_2 es el resto de las capas que componen la cabeza (líquido intracraneal, cráneo, cuero cabelludo),
- σ_1 y σ_2 son las conductividades de Ω_1 y Ω_2 las cuales se suponen constantes y $\sigma_1 \neq \sigma_2$,
- f es la fuente,
- $u_i = u|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$ donde u representa el potencial eléctrico en Ω ,

- ∇^2 representa el operador laplaciano,
- S_1 representa la superficie de la corteza cerebral,
- S_2 es la superficie del cuero cabelludo,
- $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup S_1$.

La fuente se propone en la forma

$$f(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^1 r^k \cos k\theta + f_k^2 r^k \sin k\theta \quad (\text{A.6})$$

y la solución está dada por

$$u_1(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 r^k \cos k\theta + b_k^1 r^k \sin k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^1 r^{k+2} \cos k\theta + d_k^1 r^{k+2} \sin k\theta \quad (\text{A.7})$$

$$u_2(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 r^k \cos k\theta + c_k^2 r^{-k} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 r^k \sin k\theta + d_k^2 r^{-k} \sin k\theta \quad (\text{A.8})$$

donde

$$\begin{aligned} b_k^1 &= \frac{f_k^1}{4(k+1)} \\ d_k^1 &= \frac{f_k^2}{4(k+1)} \\ a_k^2 &= -\frac{\sigma_1 R_1^{2k+2}}{2k(k+1)E_k} f_k^1 \\ c_k^2 &= -\frac{\sigma_1 R_1^{2k+2} R_2^{2k}}{2k(k+1)E_k} f_k^1 \\ b_k^2 &= -\frac{\sigma_1 R_1^{2k+2}}{2k(k+1)E_k} f_k^2 \\ d_k^2 &= -\frac{\sigma_1 R_1^{2k+2} R_2^{2k}}{2k(k+1)E_k} f_k^2 \\ a_k^1 &= -\frac{R_1^2 \sigma_1}{4k(k+1)} \frac{D_k}{E_k} f_k^1 \\ c_k^1 &= -\frac{\sigma_1 R_1^2 D_k}{4k(k+1)E_k} f_k^2 \\ E_k &= (\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k} \\ D_k &= 2R_1^2 + 2R_2^2 + \frac{kE_k}{\sigma_1} \end{aligned}$$

Recordemos que el laplaciano en coordenadas polares está dado por:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \nabla_{(r,\theta)}^2. \quad (\text{A.9})$$

Aplicando el laplaciano a la función u_1 dada en (A.7) se halla:

$$\nabla^2 u_1(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (4k + 4) c_k^1 r^k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} (4k + 4) d_k^1 r^k \sin k\theta.$$

Por la ecuación (A.1) se halla que

$$(4k + k) c_k^1 = f_k^1 \quad (\text{A.10})$$

$$(4k + 4) d_k^1 = f_k^2 \quad (\text{A.11})$$

así

$$c_k^1 = \frac{f_k^1}{4(k+1)} \quad (\text{A.12})$$

$$d_k^1 = \frac{f_k^2}{4(k+1)} \quad (\text{A.13})$$

De la igualdad para las componentes normales dada en (A.3) y (A.4), es decir

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} \Big|_{r=R_2};$$

$$k\sigma_1 R_1^{k-1} a_k^1 + (k+2)\sigma_1 c_k^1 R_1^{k+1} = k\sigma_2 R_1^{k-1} a_k^2 - k\sigma_2 R_1^{-k-1} c_k^2 \quad (\text{A.14})$$

$$k\sigma_1 R_1^{k-1} b_k^1 + (k+2)\sigma_1 d_k^1 R_1^{k+1} = k\sigma_2 R_1^{k-1} b_k^2 - k\sigma_2 R_1^{-k-1} d_k^2 \quad (\text{A.15})$$

Reescribiendo y multiplicando por R_1 :

$$k\sigma_1 [R_1^k a_k^1 + R_1^{k+2} c_k^1] + 2\sigma_1 c_k^1 R_1^{k+2} = k\sigma_2 [R_1^k a_k^2 - R_1^{-k} c_k^2] \quad (\text{A.16})$$

$$k\sigma_1 [R_1^k b_k^1 + R_1^{k+2} d_k^1] + 2\sigma_1 d_k^1 R_1^{k+2} = k\sigma_2 [R_1^k b_k^2 - R_1^{-k} d_k^2] \quad (\text{A.17})$$

De la igualdad $u_1 = u_2$ de (A.3) ($u_1(R_1, \theta) = u_2(R_1, \theta)$)

$$a_k^1 R_1^k + c_k^1 R_1^{k+2} = a_k^2 R_1^k + c_k^2 R_1^{-k} \quad (\text{A.18})$$

$$b_k^1 R_1^k + d_k^1 R_1^{k+2} = b_k^2 R_1^k + d_k^2 R_1^{-k} \quad (\text{A.19})$$

sustituyendo (A.18) y (A.19) en (A.16) y (A.17) :

$$k\sigma_1[a_k^2 R_1^k + c_k^2 R_1^{-k}] - k\sigma_2[R_1^k a_k^2 - R_1^{-k} c_k^2] = -2\sigma_1 c_k^1 R_1^{k+2} \quad (\text{A.20})$$

$$k\sigma_1[b_k^2 R_1^k + d_k^2 R_1^{-k}] - k\sigma_2[R_1^k b_k^2 - R_1^{-k} d_k^2] = -2\sigma_1 d_k^1 R_1^{k+2} \quad (\text{A.21})$$

Tomando en cuenta (A.12) y (A.13) y reagrupando términos (multiplicando por R_1^k)

$$(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} a_k^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)c_k^2 = -\frac{2\sigma_1 R_1^{2k+2}}{4k(k+1)} f_k^1 \quad (\text{A.22})$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} b_k^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)d_k^2 = -\frac{2\sigma_1 R_1^{2k+2}}{4k(k+1)} f_k^2 \quad (\text{A.23})$$

de (A.5) hallamos

$$c_k^2 = a_k^2 R_2^{2k} \quad (\text{A.24})$$

$$d_k^2 = b_k^2 R_2^{2k} \quad (\text{A.25})$$

Sustituyendo (A.24) y (A.25) en (A.22) y (A.23) :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} a_k^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k} a_k^2 = -\frac{2\sigma_1 R_1^{2k+2}}{4k(k+1)} f_k^1 \quad (\text{A.26})$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} b_k^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k} b_k^2 = -\frac{2\sigma_1 R_1^{2k+2}}{4k(k+1)} f_k^2 \quad (\text{A.27})$$

hallamos

$$E_k = (\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k} \quad (\text{A.28})$$

Despejando hallamos que

$$a_k^2 = -\frac{2\sigma_1 R_1^{2k+2}}{4k(k+1)E_k} f_k^1 \quad (\text{A.29})$$

$$b_k^2 = -\frac{2\sigma_1 R_1^{2k+2}}{4k(k+1)E_k} f_k^2 \quad (\text{A.30})$$

que junto con (A.24) y (A.25)

$$c_k^2 = -\frac{2\sigma_1 R_1^{2k+2} R_2^{2k}}{4k(k+1)E_k} f_k^1 \quad (\text{A.31})$$

$$d_k^2 = -\frac{2\sigma_1 R_1^{2k+2} R_2^{2k}}{4k(k+1)E_k} f_k^2 \quad (\text{A.32})$$

de (A.18) y (A.19)

$$a_k^1 = a_k^2 + c_k^2 R_1^{-2k} - c_k^1 R_1^2 \quad (\text{A.33})$$

$$b_k^1 = b_k^2 + d_k^2 R_1^{-2k} - d_k^1 R_1^2 \quad (\text{A.34})$$

Sustituyendo hallamos

$$\begin{aligned} a_k^1 &= -\frac{2\sigma_1 R_1^{2k+2}}{4k(k+1)E_k} f_k^1 - \frac{2\sigma_1 R_1^{2k+2}}{4k(k+1)E_k} f_k^1 - \frac{R_1^2}{4(k+1)} f_k^1 \\ &= -\frac{\sigma_1 R_1^2}{4k(k+1)E_k} \left[2R_1^{2k} + 2R_2^{2k} + \frac{kE_k}{\sigma_1} \right] f_k^1 \end{aligned}$$

Así,

$$a_k^1 = -\frac{\sigma_1 R_1^2}{4k(k+1)E_k} D_k f_k^1$$

$$c_k^1 = -\frac{\sigma_1 R_1^2}{4k(k+1)E_k} D_k f_k^2$$

donde

$$D_k = 2R_1^{2k} + 2R_2^{2k} + \frac{kE_k}{\sigma_1}.$$

La solución del problema directo se halla restringiendo (A.8) a la frontera S_2 , es decir, $u_2(r, \theta)|_{r=R_2}$ es la solución del problema directo.

Apéndice B

Solución analítica del problema adjunto

El operador adjunto A^* de A , se define a través del problema de contorno adjunto

$$\nabla^2 \widehat{w}_1 = 0 \quad \text{en } \Omega_1, \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla^2 \widehat{w}_2 = 0 \quad \text{en } \Omega_2, \quad (\text{B.2})$$

$$\widehat{w}_1 = \widehat{w}_2 \quad \text{sobre } S_1, \quad (\text{B.3})$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial n_1} = \sigma_2 \frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial n_1} \quad \text{sobre } S_1, \quad (\text{B.4})$$

$$\sigma_2 \frac{\partial \widehat{w}_2}{\partial n_2} = \psi \quad \text{sobre } S_2, \quad (\text{B.5})$$

a través de la regla de correspondencia:

$$A^*(\psi) = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \widehat{w}_1. \quad (\text{B.6})$$

Donde:

- $\Omega = \overline{\Omega}_1 \cup \Omega_2$ representa la cabeza,
- Ω_1 representa al cerebro,
- Ω_2 es el resto de las capas que componen la cabeza (líquido intracraneal, cráneo, cuero cabelludo),
- σ_1 y σ_2 son las conductividades de Ω_1 y Ω_2 las cuales se suponen constantes y $\sigma_1 \neq \sigma_2$,

- f es la fuente,
- $u_i = u|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$ donde u representa el potencial eléctrico en Ω
- ∇^2 representa el operador laplaciano,
- S_1 representa la superficie de la corteza cerebral,
- S_2 es la superficie del cuero cabelludo,
- $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup S_1$.

Vamos a suponer que

$$\psi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^1 \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2 \sin k\theta \quad (\text{B.7})$$

y que

$$\hat{w}_1(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^1 r^k \cos k\theta + b_k^1 r^k \sin k\theta, \quad (\text{B.8})$$

$$\hat{w}_2(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 r^k \cos k\theta + c_k^2 r^{-k} \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 r^k \sin k\theta + d_k^2 r^{-k} \sin k\theta. \quad (\text{B.9})$$

\hat{w}_1 y \hat{w}_2 son funciones armónicas en Ω_1 y Ω_2 respectivamente.

De la igualdad (B.3) se obtiene

$$a_k^1 R_1^k = a_k^2 R_1^k + c_k^2 R_1^{-k}, \quad (\text{B.10})$$

$$b_k^1 R_1^k = b_k^2 R_1^k + d_k^2 R_1^{-k}. \quad (\text{B.11})$$

de la igualdad (B.4)

$$\sigma_1 \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial r}(r, \theta) = \sigma_1 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k^1 r^{k-1} \cos k\theta + \sigma_1 \sum_{k=1}^{\infty} k b_k^1 r^{k-1} \sin k\theta, \quad (\text{B.12})$$

$$\sigma_2 \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial r}(r, \theta) = \sigma_2 \sum_{k=1}^{\infty} k (a_k^2 r^{k-1} - c_k^2 r^{-k-1}) \cos k\theta + \sigma_2 \sum_{k=1}^{\infty} k (b_k^2 r^{k-1} - d_k^2 r^{-k-1}) \sin k\theta. \quad (\text{B.13})$$

Igualando en $r = R_2$ se halla (multiplicando por R_1)

$$\sigma_1 a_k^1 R_1^k = \sigma_2 (a_k^2 R_1^k - c_k^2 R_1^{-k}), \quad (\text{B.14})$$

$$\sigma_1 b_k^1 R_1^k = \sigma_2 (b_k^2 R_1^k - d_k^2 R_1^{-k}). \quad (\text{B.15})$$

Sustituyendo (B.10) y (B.11) en (B.14) y (B.15)

$$\sigma_1 [a_k^2 R_1^k + c_k^2 R_1^{-k}] = \sigma_2 [a_k^2 R_1^k - c_k^2 R_1^{-k}], \quad (\text{B.16})$$

$$\sigma_1 [b_k^2 R_1^k + d_k^2 R_1^{-k}] = \sigma_2 [b_k^2 R_1^k - d_k^2 R_1^{-k}]. \quad (\text{B.17})$$

Reordenando términos y multiplicando por R_1^k

$$(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k} a_k^2 + (\sigma_1 + \sigma_2) c_k^2 = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k} b_k^2 + (\sigma_1 + \sigma_2) d_k^2 = 0 \quad (\text{B.19})$$

De la ecuación (B.5) hallamos

$$\sigma_2 k [R_2^k a_k^2 - c_k^2 R_2^{-k}] = R_2 \psi_k^1, \quad (\text{B.20})$$

$$\sigma_2 k [R_2^k c_k^2 - d_k^2 R_2^{-k}] = R_2 \psi_k^1. \quad (\text{B.21})$$

Despejando c_k^2

$$R_2^{2k} a_k^2 - c_k^2 = \frac{R_2^{k+1} \psi_k^1}{\sigma_2 k}, \quad (\text{B.22})$$

$$c_k^2 = R_2^{2k} a_k^2 - \frac{R_2^{k+1} \psi_k^1}{\sigma_2 k}. \quad (\text{B.23})$$

Análogamente

$$d_k^2 = R_2^{2k} b_k^2 - \frac{R_2^{k+1} \psi_k^1}{\sigma_2 k}. \quad (\text{B.24})$$

Sustituyendo (B.23) en (B.18)

$$(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k} a_k^2 + (\sigma_1 + \sigma_2) \left[R_2^{2k} a_k^2 - \frac{R_2^{k+1} \psi_k^1}{\sigma_2 k} \right] = 0, \quad (\text{B.25})$$

$$[(\sigma_1 - \sigma_2) R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{2k}] a_k^2 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) R_2^{k+1} \psi_k^1}{\sigma_2 k}. \quad (\text{B.26})$$

Finalmente, se halla que

$$a_k^2 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{k+1}}{\sigma_2 k E_k} \psi_k^1, \quad (\text{B.27})$$

$$b_k^2 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{k+1}}{\sigma_2 k E_k} \psi_k^2, \quad (\text{B.28})$$

donde

$$E_k = (\sigma_1 - \sigma_2)R_1^{2k} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{2k}. \quad (\text{B.29})$$

Haciendo

$$A_k = (\sigma_1 + \sigma_2)R_2^{k+1}, \quad (\text{B.30})$$

se hallan

$$a_k^2 = \frac{A_k}{\sigma_2 k E_k} \psi_k^1, \quad (\text{B.31})$$

$$b_k^2 = \frac{A_k}{\sigma_2 k E_k} \psi_k^2. \quad (\text{B.32})$$

Sustituyendo (B.31) y (B.32) en (B.23) y (B.24) se hallan

$$c_k^2 = \frac{A_k R_2^{2k}}{\sigma_2 k E_k} \psi_k^1, \quad (\text{B.33})$$

$$d_k^2 = \frac{A_k R_2^{2k}}{\sigma_2 k E_k} \psi_k^2. \quad (\text{B.34})$$

Sustituyendo (B.31) y (B.33) en (B.10) se obtiene

$$\begin{aligned} a_k^1 &= \frac{A_k}{\sigma_2 k E_k} \psi_k^1 + \frac{A_k R_2^{2k} R_1^{-2k}}{\sigma_2 k E_k} \psi_k^1 \\ &= \frac{A_k}{\sigma_2 k E_k} \psi_k^1 \left[1 + \frac{R_2^{2k}}{R_1^{2k}} \right] \\ &= \frac{A_k}{\sigma_2 k E_k} \left[\frac{R_1^{2k} + R_2^{2k}}{R_1^{2k}} \right] \psi_k^1. \end{aligned}$$

Haciendo

$$R_k = \frac{R_1^{2k} + R_2^{2k}}{R_1^{2k}}$$

se obtiene que

$$a_k^1 = \frac{A_k R_k}{\sigma_2 k E_k} \psi_k^1.$$

Análogamente,

$$b_k^1 = \frac{A_k R_k}{\sigma_2 k E_k} \psi_k^2.$$

Finalmente, el potencial \hat{w}_1 está dado por:

$$\begin{aligned} \hat{w}_1(r, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k R_k}{\sigma_2 k E_k} \psi_k^1 r^k \cos k\theta + \frac{A_k R_k}{\sigma_2 k E_k} \psi_k^2 r^{-k} \sin k\theta \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k R_k}{\sigma_2 k E_k} [\psi_k^1 r^k \cos k\theta + \psi_k^2 r^{-k} \sin k\theta]. \end{aligned}$$

Apéndice C

Código desarrollado

En este Apéndice se incluye el código que se desarrolló para implementar el algoritmo estable implementado en este trabajo de tesis. El software que se utilizó fue MATLAB R2016.

C.1. Problema directo

```
1 function [v, vDelta, A] = problemaDirecto2Regiones(f,R1, R2, NR1,
   NR2, NT, sig1, sig2)
2     sAE1(R1, R2, NR1, NR2, NT, sig1, sig2)
3     close all
4     %Se genera la matriz A:
5     tic
6     A = getMatrix( R1, R2, NR1, NR2, NT, sig1, sig2);
7
8     %Se crea el lado derecho del problema directo:
9     ldAux = zeros(1,(NT+1) * (NR1+1) + (NT+1) * (NR2+1));
10    ldPD = getLdW(f, R1, NR1, NT, ldAux);
11
12    %Se resuelve el sistema de ecuaciones:
13    w = A\ldPD';
14
15    %Se obtienen gráficas:
16    getGraphPD( w, R1, R2, NR1, NR2, NT);
```

```

17
18 %Se obtiene la medición v
19 [v, vDelta] = getV( w, NR1, NR2, NT);
20 myTime1 = toc;
21 load('sA.mat')
22 normaInfinitoPD = norm(u1u2' - w,inf);
23 errorRelativoPD = norm(u1u2' - w,inf)/norm(u1u2',inf);
24
25 %Se guardan los resultados en un archivo .txt
26 fId = fopen('outputProblemaDirecto2Regiones.txt','a');
27 fprintf(fId, 'Refinamiento \t (NR1,NR2,NT) \t Error Relativo \t
Tiempo de ejecucion \n ');
28 fprintf(fId, ' %2.3f \t (%d,%d,%d) \t %1.4f \t %1.2f \n', ...
29     R1/NR1, NR1, NR2, NT, errorRelativoPD, myTime1);
30 fprintf(fId, '* * * * * \n');
31 fclose(fId);
32 end

```

CÓDIGO FUENTE C.1: problemaDirecto2Regiones

```

1 function A=getMatrix( R1, R2, NR1, NR2, NT, sig1, sig2)
2     hr1 = R1/NR1;
3     hr2 = abs(R2-R1)/NR2;
4     ht = (2*pi)/NT;
5
6     C = 1/ht^2;
7
8     n = (NT+1) * ((NR1+1) + (NR2+1));
9     A = zeros(n,n);
10
11     for i=1 : NT+1
12         A(i,i) = 1;
13     end
14
15     LI = NT+3;
16     LS = 2*NT+1;

```

```
17
18     i = LI;
19     rj = hr1;
20     for j=1: NR1-1
21         i = LI-1;
22         % W1(teta_0, r_j)
23
24         Ai = (rj/hr1)^2;
25         Bi = rj/(2*hr1);
26
27         A(i,i) = -2*(Ai+C);
28         A(i,i+1) = C;
29         A(i,i+NT-1) = C;
30         A(i,i+NT+1) = Ai+Bi;
31         A(i,i-NT-1) = Ai-Bi;
32
33         % W1(teta_i, r_j)
34         i = LI;
35         while i <= LS
36             A(i,i) = -2*(Ai+C);
37             A(i,i+1) = C;
38             A(i,i-1) = C;
39             A(i,i+NT+1) = Ai+Bi;
40             A(i,i-NT-1) = Ai-Bi;
41             i = i+1;
42         end
43
44         % Periodicidad (Frontera derecha de w1 en r_j)
45         i = LS+1;
46         A(i,i) = 1;
47         A(i,i-NT) = -1;
48         LI = LI+NT+1;
49         LS = LS+NT+1;
50         rj = rj+hr1;
51     end
52
```

```

53     % Primer punto de w2 (es decir w2(theta0, R1))
54     Hw1 = -sig1/(2*hr1);
55     Hw2 = sig2/(2*hr2);
56
57     rj = R1;
58
59     i = (NT+1)*(NR1+1) - NT;
60
61     A(i,i+3*NT+3) = Hw2;
62     A(i,i+2*NT+2) = -4*Hw2;
63
64     A(i,i+1*NT+1) = 3*Hw2;
65     A(i,i) = -3*Hw1;
66
67     A(i,i-1*NT-1) = 4*Hw1;
68     A(i,i-2*NT-2) = -Hw1;
69
70     % su periodicidad
71     i = i+NT;
72     A(i,i) = 1;
73     A(i,i-NT) = -1;
74
75     %Puntos interiores en frontera superior de w1
76     rj = R1;
77     for i = (NT+1)*(NR1+1)- NT + 1 : (NT+1)*(NR1+1) -1
78         A(i,i+3*NT+3) = Hw2;
79         A(i,i+2*NT+2) = -4*Hw2;
80
81         A(i,i+1*NT+1) = 3*Hw2;
82         A(i,i) = -3*Hw1;
83
84         A(i,i-1*NT-1) = 4*Hw1;
85         A(i,i-2*NT-2) = -Hw1;
86     end
87
88     % Puntos de la frontera inferior de w2

```

```
89     for i= (NR1+1)*(NT+1)+1 : (NR1+1)*(NT+1)+NT+1
90         A(i,i) = 1;
91         A(i,i-NT-1) = -1;
92     end
93
94     %Puntos interiores de w2
95     LI = NT+3 + (NT+1) * (NR1+1);
96     LS = LI+NT-2;
97     rj = hr2 + R1;
98
99     for j=1 : NR2-1
100         i = LI-1;
101         % W2(teta_0, r_j)
102         Di = (rj/hr2)^2;
103         Ei = rj/(2*hr2);
104
105         A(i,i) = -2*(Di+C);
106         A(i,i+1) = C;
107         A(i,i+NT-1) = C;
108         A(i,i+NT+1) = Di+Ei;
109         A(i,i-NT-1) = Di-Ei;
110
111         % W2(teta_i, r_j)
112         i = LI;
113         while i <= LS
114             A(i,i) = -2*(Di+C);
115             A(i,i+1) = C;
116             A(i,i-1) = C;
117             A(i,i+NT+1) = Di+Ei;
118             A(i,i-NT-1) = Di-Ei;
119             i = i+1;
120         end
121
122         % Periodicidad (Frontera derecha de w2 en r_j)
123         i = LS+1;
124         A(i,i) = 1;
```

```

125     A(i,i-NT) = -1;
126     LI = LI+NT+1;
127     LS = LS+NT+1;
128     rj = rj+hr2;
129     end
130
131     % Con w2(theta0, R2)
132     expre = (NT+1) * (NR1+1) + (NT+1) * (NR2+1);
133     rj=R2;
134     i = expre - NT;
135     G = -1/(2*hr2);
136     A(i,i) = -3*G;
137     A(i,i-NT-1) = 4*G;
138     A(i,i-2*NT-2) = -G;
139
140     % Periodicidad
141     i = expre;
142     A(i,i) = 1;
143     A(i,i-NT) = -1;
144
145     %Puntos interiores en frontera superior de w2
146     for i=expre - NT + 1 : expre - 1
147         A(i,i) = -3*G;
148         A(i,i-NT-1) = 4*G;
149         A(i,i-2*NT-2) = -G;
150     end
151 end

```

CÓDIGO FUENTE C.2: getMatrix

```

1 function ld = getLdW( f, R1, NR1, NT, ld)
2     hr1 = R1/NR1;
3     ht = (2*pi)/NT;
4
5     %Puntos interiores de w1
6     LI = NT + 3;
7     LS = LI+NT-2;

```

```

8     rj = hr1;
9
10    for j=1 : NR1-1
11        i = LI-1;
12        % W1(teta_0, r_j)
13        teta = 0;
14            ld(i)=f(rj,teta)*rj^2;
15
16        % W1(teta_i, r_j)
17        i = LI;
18        while i <= LS
19            teta = teta+ht;
20            ld(i) = f(rj, teta)*rj^2;
21            i = i+1;
22        end
23
24        % Periodicidad (Frontera derecha de w1 en r_j)
25        i = LS+1;
26        ld(i)=0;
27        LI = LI+NT+1;
28        LS = LS+NT+1;
29        rj = rj + hr1;
30    end
31 end

```

CÓDIGO FUENTE C.3: getLdW

```

1 function getGraphPD( w, R1, R2, NR1, NR2, NT)
2     hr1 = R1/NR1;
3     hr2 = abs(R2-R1)/NR2;
4     ht = (2*pi)/NT;
5
6     for i=1 : (NT+1)*(NR1+1)
7         u1Aux(i) = w(i);
8     end
9
10    k=1;

```

```
11     for i=(NT+1)*(NR1+1)+1 : (NT+1)*(NR1+1) + (NT+1)*(NR2+1)
12         u2Aux(k) = w(i);
13         k=k+1;
14     end
15
16     k=1;
17     for i=1 : NR1+1
18         for j=1 : NT+1
19             u1A(i,j)= u1Aux(k);
20             k=k+1;
21         end
22     end
23
24     k=1;
25     for i=1 : NR2+1
26         for j=1 : NT+1
27             u2A(i,j)= u2Aux(k);
28             k=k+1;
29         end
30     end
31
32     x = 0: ht: 2*pi;
33     y = 0: hr1 :R1;
34     yy = R1: hr2 :R2;
35
36     %SURF-INICIO%
37     [myX,myY]=meshgrid(x,y);
38     [myX1,myY1]=meshgrid(x,yy);
39     figure(1)
40     surf(myX,myY, u1A)
41     hold on
42     surf(myX1,myY1, u2A)
43     xlim([0 2*pi])
44     xlabel('\theta'), ylabel('\it r'), zlabel('\it w','Rotation',
45     0)
46     title('Problema directo (numerico) en \it w')
```

```

46     hold off
47
48     figure(2)
49     surf(myX,myY, u1A)
50     xlim([0 2*pi])
51     xlabel('\theta'), ylabel('\it r'), zlabel('\it w','Rotation', 0)
52     title('Problema directo (numerico) en \it w_1')
53
54     figure(3)
55     surf(myX1,myY1, u2A)
56     xlim([0 2*pi])
57     xlabel('\theta'), ylabel('\it r'), zlabel('\it w','Rotation', 0)
58     title('Problema directo (numerico) en \it w_2')
59     %SURF-FIN%
60 end

```

CÓDIGO FUENTE C.4: getGraphPD

```

1 function [ v, vDelta ] = getV( w, NR1, NR2, NT)
2     ht = (2*pi)/NT;
3
4     %Frontera superior de w2
5     fSw2 = (NT+1)*(NR1+NR2+2)-NT;
6
7     %construye vDelta
8     myDelta = 0.1;
9     v = w(fSw2:end);
10    save('v.mat', 'v');
11
12    oDelta = (1-2*rand(1,length(v)))*myDelta*max(abs(v));
13    vDelta=v+oDelta';
14    save('vDelta.mat', 'vDelta');
15
16    t=0:ht:2*pi;
17    figure(4)
18    plot(t,v)
19    xlim([0 2*pi])

```

```
20 xlabel('\theta')
21 ylabel('\it EEG', 'Rotation', 0)
22 title('Problema directo (numerico): solucion o fuente recuperada
\it v')
23 end
```

CÓDIGO FUENTE C.5: getV

C.2. Problema adjunto

```
1 function problemaAdjunto2Regiones(f,R1, R2, NR1, NR2, NT, sig1, sig2
)
2 %Se obtiene la medición v y la matriz A
3 [v, ~, A] = problemaDirecto2Regiones(f,R1, R2, NR1, NR2, NT,
sig1, sig2);
4
5 %Se inicializa en ceros el lado derecho del sistema de
ecuaciones
6 ldAux = zeros(1,(NT+1) * (NR1+1) + (NT+1) * (NR2+1));
7
8 sApA(R1, R2, NR1, NR2, NT, sig1, sig2);
9 close all
10 tic
11 %Se genera el lado derecho del problema adjunto:
12 ldPA = getLdWA( v, NR1, NR2, NT, sig2, ldAux);
13
14 %Se resuelve el sistema de ecuaciones
15 wA = A\ldPA';
16
17 %Se obtienen gráficas
18 getGraphPA( wA, R1, R2, NR1, NR2, NT, sig1, sig2);
19 myTime2 = toc;
20
21 %Se guardan los resultados en un archivo .txt
22 fId = fopen('outputProblemaAdjunto2Regiones.txt','a');
```

```

23     fprintf(fId,'Refinamiento \t (NR1,NR2,NT) \t Error Relativo \t
Tiempo de ejecucion \n ');
24     load('u1Adjunto.mat');
25     load('u1AT.mat');
26     normaInfinitoPA = norm(u1Adjunto-u1AT,inf);
27     errorRelativoPA = norm(u1Adjunto-u1AT,inf)/norm(u1Adjunto,inf);
28     fprintf(fId,' %2.3f \t (%d,%d,%d) \t %1.4f \t %1.2f \n', ...
29         R1/NR1, NR1, NR2, NT, errorRelativoPA, myTime2);
30     fprintf(fId,'* * * * * \n');
31     fclose(fId);
32 end

```

CÓDIGO FUENTE C.6: problemaAdjunto2Regiones

```

1 function ld = getLdWA(medicionPsi, NR1, NR2, NT, sigma2, ld)
2     % Con w2(theta0, R2)
3     expre = (NT+1) * (NR1+1) + (NT+1) * (NR2+1);
4     j=1;
5     for i=expre - NT : expre -1
6         ld(i)=mediccionPsi(j)/sigma2;
7         j=j+1;
8     end
9 end

```

CÓDIGO FUENTE C.7: getLdWA

```

1 function getGraphPA(wA, R1, R2, NR1, NR2, NT, sigma1, sigma2)
2
3     hr1 = R1/NR1;
4     hr2 = abs(R2-R1)/NR2;
5     ht = (2*pi)/NT;
6
7     for i=1 : (NT+1)*(NR1+1)
8         u1Aux(i) = wA(i);
9     end
10
11     k=1;

```

```
12     for i=(NT+1)*(NR1+1)+1 : (NT+1)*(NR1+1) + (NT+1)*(NR2+1)
13         u2Aux(k) = wA(i);
14         k=k+1;
15     end
16
17     k=1;
18     for i=1 : NR1+1
19         for j=1 : NT+1
20             u1A(i,j)= u1Aux(k);
21             k=k+1;
22         end
23     end
24
25     k=1;
26     for i=1 : NR2+1
27         for j=1 : NT+1
28             u2A(i,j)= u2Aux(k);
29             k=k+1;
30         end
31     end
32
33     x = 0: ht: 2*pi;
34     y = 0: hr1 :R1;
35     yy = R1: hr2 :R2;
36
37     %MESH-INICIO%
38     figure(110)
39     surf(x,y, u1A * (sigma1/sigma2) )
40     u1AT = u1A' * (sigma1/sigma2);
41     save('u1AT.mat', 'u1AT');
42     xlim([0 2*pi])
43     xlabel('\theta'), ylabel('\it r'), zlabel('\it w','Rotation', 0)
44     title('Solucion numerica del problema adjunto')
45 end
```

C.3. Problema inverso

```

1 function phi = problemaInverso2R(f,R1, R2, NR1, NR2, NT, sig1, sig2)
2   [V, VDelta, A] = problemaDirecto2Regiones(f,R1, R2, NR1, NR2, NT
3   , sig1, sig2);
4   ldAux = zeros(1,(NT+1) * (NR1+1) + (NT+1) * (NR2+1));
5   close all
6   tic
7   maxIter = 15;
8   epsilon = power(10,-3);
9   alfa = power(10,-4);
10  k = 1/alfa;
11  phi = ldAux;
12  [wPD, v] = problemaDirecto2R( phi , R1, NR1, NR2, NT, A, ldAux);
13  w1PA = ...
14  problemaAdjunto2R( k*(v-VDelta), NR1, NR2, NT, sig1, sig2, A,
15  ldAux);
16
17  g0 = phi(1:(NT+1)*(NR1+1)) + w1PA';
18  g = g0;
19
20  d0 = -g0;
21  d = d0;
22
23  iteracion = 1;
24  bandera = true;
25
26  while bandera == true
27      iteracion
28      [~, v] = problemaDirecto2R( d , R1, NR1, NR2, NT, A, ldAux);
29      w1PA = problemaAdjunto2R( k*v, NR1, NR2, NT, sig1, sig2, A,
30      ldAux);
31
32      gBarra = d + w1PA';
33      alpha = -(prodInt(g,d,NR1,NT)/prodInt(gBarra,d,NR1,NT));
34      phiSiguiente = phi(1:(NT+1)*(NR1+1)) + alpha * d;

```

```
32     gSiguiete = g + alpha * gBarra;
33
34     if prodInt(gSiguiete, gSiguiete, NR1, NT)/...
35     max(1,prodInt(g0, g0, NR1, NT)) <= epsilon || iteracion ==
maxIter
36         phi = phiSiguiete;
37         bandera = false;
38         encontroPhi = 1
39
40         [wPD, vPI] = problemaDirecto2R( phi , R1, NR1, NR2, NT,
A, ldAux);
41         getFigure( phi, R1, R2, NR1, NR2, NT, iteracion)
42         getGraphPD_PI( wPD, R1, R2, NR1, NR2, NT, iteracion);
43         pause(3)
44     else
45         getFigure( phi, R1, R2, NR1, NR2, NT, iteracion)
46         [wPD,~] = problemaDirecto2R( phi , R1, NR1, NR2, NT, A,
ldAux);
47         beta = prodInt(gSiguiete, gSiguiete, NR1, NT)/prodInt(
g, g, NR1, NT);
48         dSiguiete = -gSiguiete + beta * d;
49
50         d = dSiguiete;
51         g = gSiguiete;
52         phi = phiSiguiete;
53
54         getGraphPD_PI( wPD, R1, R2, NR1, NR2, NT, iteracion);
55         pause(3)
56
57         iteracion = iteracion+1;
58     end
59 end
60 getGraphV(V, VDelta, vPI, NT);
61 load('fuenteExactaV.mat')
62 %Se grafica la fuente exacta
63 getGraphSource( fuenteExactaV, R1, R2, NR1, NR2, NT, 7)
```

```

64     %Se grafica la fuente recuperada
65     getGraphSource( phi, R1, R2, NR1, NR2, NT, 8)
66     normaInfinitoPI = norm(fuenteExactaV-phi,inf);
67     errorRelativoPI = normaInfinitoPI/norm(fuenteExactaV,inf)
68     myTime3 = toc;
69
70     fId = fopen('outputProblemaInversoTest_20_4_126.txt','a');
71     fprintf(fId,'Refinamiento \t (NR1,NR2,NT) \t epsilon \t k \t
iteracion \t Error Relativo \t Tiempo de ejecucion \n');
72     fprintf(fId,' %2.3f \t (%d,%d,%d) \t %2.0e \t %2.0e \t %d \t
%1.4f \t %1.2f \n', ...
73         R1/NR1, NR1, NR2, NT, epsilon, k, iteracion, errorRelativoPI
, myTime3);
74     fclose(fId);
75 end

```

CÓDIGO FUENTE C.9: problemaInverso2R

```

1 function [w, v] = problemaDirecto2R(f, R1, NR1, NR2, NT, m, ld)
2     ld = getLdPD_Pi( f, R1, NR1, NT, ld);
3     w = m\ld';
4
5     %Frontera superior de w2
6     fsw2 = (NT+1)*(NR1+1)+(NT+1)*(NR2+1) - NT;
7     v = w(fsw2:end);
8 end

```

CÓDIGO FUENTE C.10: problemaDirecto2R

```

1 function w1 = problemaAdjunto2R( psi, NR1, NR2, NT, sigma1, sigma2,
m, ldAux)
2     ld = getLdWA( psi, NR1, NR2, NT, sigma2, ldAux);
3     w = m\ld';
4     w1 = (sigma1/sigma2) * w(1 : (NT+1)*(NR1+1));
5 end

```

CÓDIGO FUENTE C.11: problemaAdjunto2R

```

1 function resultado = prodInt(p,q,NR1, NT)

```

```

2     resultado = productoInternoZ(p, q, 0, 2*pi, 0, 1, NR1, NT);
3 end

```

CÓDIGO FUENTE C.12: prodInt

```

1 function integraRadio = productoInternoZ(fAux, gAux, a,b,c,d, NR1,
    NT)
2     j = 1;
3     for i = 1 : NT+1 :(NT+1)*(NR1+1)
4         integraTeta(j)=integraTx(fAux(i:i+NT),gAux(i:i+NT),a,b,NT);
5         gAuxx(j)=1;
6         j=j+1;
7     end
8     integraRadio = integraRy(integraTeta, gAuxx, c,d, NR1);
9 end

```

CÓDIGO FUENTE C.13: productoInternoZ

```

1 function xi = integraTx(f,g,a,b, NT)
2     h = (b-a)/NT;
3     xi0 = f(1)*g(1) + f(NT+1)*g(NT+1);
4     xi1 = 0;
5     xi2 = 0;
6     for i = 2 : NT
7         if mod(i,2) ~= 0
8             xi2 = xi2 + f(i)*g(i);
9         else
10            xi1 = xi1 + f(i)*g(i);
11        end
12    end
13    xi = h*(xi0 + 2 * xi2 + 4 * xi1)/3;
14 end

```

CÓDIGO FUENTE C.14: integraTx

```

1 function xi = integraRy(f,g,c,d,NR1)
2     h = (d-c)/NR1;
3     xi0 = f(1)*g(1) + f(NR1+1)*g(NR1+1);
4     xi1 = 0;

```

```

5     xi2 = 0;
6     for i = 2 : NR1
7         if mod(i,2) ~= 0
8             xi2 = xi2 + f(i)*g(i);
9         else
10            xi1 = xi1 + f(i)*g(i);
11        end
12    end
13    xi = h*(xi0 + 2 * xi2 + 4 * xi1)/3;
14 end

```

CÓDIGO FUENTE C.15: integraRy

```

1 function getFigure(wA, R1, R2, NR1, NR2, NT, n)
2     hr1 = R1/NR1;
3     hr2 = abs(R2-R1)/NR2;
4     ht = (2*pi)/NT;
5
6     k=1;
7     for i=1 : NR1+1
8         for j=1 : NT+1
9             u1A(i,j)= wA(k);
10            k=k+1;
11        end
12    end
13
14    x = 0: ht: 2*pi;
15    y = 0: hr1 :R1;
16
17    figure(10000)
18    myFi=surf(x,y, u1A);
19    xlim([0 2*pi])
20    xlabel('\theta'), ylabel('\it r'), zlabel('\it f','Rotation',
21    0)
22    myTitleFigPhi = sprintf('pI MGC fuente en la iteracion %d', n);
23    saveas(myFi,myTitleFigPhi,'fig');
24    saveas(myFi,myTitleFigPhi,'jpeg');

```

```
24     title(myTitleFigPhi)
25 end
```

CÓDIGO FUENTE C.16: getFigure

```
1 function getGraphPD_PI( w, R1, R2, NR1, NR2, NT, iter)
2     hr1 = R1/NR1;
3     hr2 = abs(R2-R1)/NR2;
4     ht = (2*pi)/NT;
5
6     for i=1 : (NT+1)*(NR1+1)
7         u1Aux(i) = w(i);
8     end
9
10    k=1;
11    for i=(NT+1)*(NR1+1)+1 : (NT+1)*(NR1+1) + (NT+1)*(NR2+1)
12        u2Aux(k) = w(i);
13        k=k+1;
14    end
15
16    k=1;
17    for i=1 : NR1+1
18        for j=1 : NT+1
19            u1A(i,j)= u1Aux(k);
20            k=k+1;
21        end
22    end
23
24    k=1;
25    for i=1 : NR2+1
26        for j=1 : NT+1
27            u2A(i,j)= u2Aux(k);
28            k=k+1;
29        end
30    end
31
32    x = 0: ht: 2*pi;
```

```

33     y = 0: hr1 :R1;
34     yy = R1: hr2 :R2;
35
36     %SURF-INICIO%
37     [myX,myY]=meshgrid(x,y);
38     [myX1,myY1]=meshgrid(x,yy);
39     figure(5)
40     surf(myX,myY, u1A)
41     hold on
42     myFi=surf(myX1,myY1, u2A);
43     xlim([0 2*pi])
44     xlabel('\theta'), ylabel('\it r'), zlabel('\{it w}', 'Rotation',
45     0)
46
47     myTitleFigPhi = sprintf('pI MGC potencial en la iteracion %d',
48     iter);
49
50     saveas(myFi,myTitleFigPhi,'fig');
51     saveas(myFi,myTitleFigPhi,'jpeg');
52
53     title(myTitleFigPhi)
54     hold off
55 end

```

CÓDIGO FUENTE C.17: getGraphPDPI

```

1 function getGraphV(v, vD, vPI, NT)
2     ht = (2*pi)/NT;
3     t = 0 : ht: 2*pi;
4     figure(6)
5     plot(t,v, 'LineWidth',1.5)
6     xlim([0 2*pi])
7     xlabel('\theta')
8     ylabel('\it EEG', 'Rotation', 0)
9     title('Mediciones')
10    hold on
11
12    plot(t, vD, 'LineWidth',1.5)

```

```

13 myFi=plot(t, vPI, 'g—', 'LineWidth', 1.5)
14 legend('medicacion', 'medicacion con ruido', 'medicacion recuperada')
15 hold off
16 myTitleFigPhi = sprintf('pI Mediciones');
17 saveas(myFi, myTitleFigPhi, 'fig');
18 saveas(myFi, myTitleFigPhi, 'jpeg');
19 end

```

CÓDIGO FUENTE C.18: getGraphV

```

1 function getGraphSource( wA, R1, R2, NR1, NR2, NT, n)
2
3     hr1 = R1/NR1;
4     hr2 = abs(R2-R1)/NR2;
5     ht = (2*pi)/NT;
6
7     for i=1 : (NT+1)*(NR1+1)
8         u1Aux(i) = wA(i);
9     end
10
11     k=1;
12     for i=1 : NR1+1
13         for j=1 : NT+1
14             u1A(i,j)= u1Aux(k);
15             k=k+1;
16         end
17     end
18
19     x = 0: ht: 2*pi;
20     y = 0: hr1 :R1;
21
22     figure(n)
23     myFi=surf(x,y, u1A);
24     xlim([0 2*pi])
25     xlabel('\theta'), ylabel('\it r'), zlabel('\it f', 'Rotation',
26     0)
27     if n==7

```

```
27     title('pI Fuente exacta')
28     myTitleFigPhi = sprintf('pI Fuente exacta');
29     saveas(myFi,myTitleFigPhi,'fig');
30     saveas(myFi,myTitleFigPhi,'jpeg');
31 else
32     title('pI Fuente recuperada')
33     myTitleFigPhi = sprintf('pI Fuente recuperada');
34     saveas(myFi,myTitleFigPhi,'fig');
35     saveas(myFi,myTitleFigPhi,'jpeg');
36 end
37 end
```

CÓDIGO FUENTE C.19: getGraphSource

Bibliografía

- [1] Mark S. Gockenbach. *Linear inverse problems and Tikhonov regularization*. The Carus Mathematical Monographs ; number thirty-two. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 2016. [1](#)
- [2] A. M. Denisov. *Elements of the Theory of Inverse Problems*. De Gruyter, 2014. [1](#)
- [3] A. Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, volume 120. 01 2011. [1](#), [2](#), [4](#), [24](#)
- [4] María Monserrat Morín Castillo, Jesús Alonso Arriaga Hernández, Bolivia Teresa Cuevas Otahola, and José Jacobo Oliveros Oliveros. Analysis of dipolar sources in the solution of the electroencephalographic inverse problem. *Mathematics*, 04 2022. [1](#), [6](#)
- [5] L. Nunez and R. Srinivasan. *Electric Fields of the Brain: The neurophysics of EEG*. Oxford University Press, 2006. [1](#), [23](#)
- [6] Emmanuel Roberto Estrada Aguayo. *Modelos matemáticos asociados a patologías en el cerebro y análisis de problemas directos e inversos*. PhD thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2021. [1](#), [3](#)
- [7] M. Morín, C. Netzahualcoyotl, J. Oliveros, J. Conde, and L. Juárez. Stable identification of sources located on separation interfaces of two different homogeneous media. *Advances in Differential Equations and Control Processes*, 20:53–97, 02 2019. [2](#), [5](#), [24](#), [25](#), [44](#)
- [8] M. Morín, C. Netzahualcoyotl, J. Conde, J. Oliveros, and A. Santillán. Identificación estable de fuentes asociadas a focos epilépticos ubicadas sobre la corteza. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, 40(3):1–14, Sep. 2019. [2](#), [24](#)

- [9] José Julio Conde Mones, Emmanuel Roberto Estrada Aguayo, José Jacobo Oliveros Oliveros, Carlos Arturo Hernández Gracidas, and María Monserrat Morín Castillo. Stable identification of sources located on interface of nonhomogeneous media. *Mathematics*, 9(16), 2021. 2, 43
- [10] In Lara V Marcuse, Madeline C Fields, and Jiyeoun (Jenna) Yoo, editors, *Rowan's Primer of EEG (Second Edition)*. Elsevier, London, second edition edition, 2016. 3
- [11] F. Ramos-Argüelles, G. Morales, S. Egozcue, R.M. Pabón, and M.T. Alonso. Técnicas básicas de electroencefalografía: principios y aplicaciones clínicas. *Anales del Sistema Sanitario de Navarra*, 32:69 – 82, 2009. 3
- [12] Regina Shmelkina. Electroencephalography and local pathological brain processes. atlas. 2017. 3
- [13] S. Ueno, H. Wakisako, and S. Matsuoka. Determination of the spatial distribution of abnormal EEG and MEG from current dipole in inhomogeneous volume conductor. *Il Nuovo Cimento D*, 2(2):558–566, 1983. 3
- [14] David Y Ko. EEG in Brain Tumors. *Medscape*, 2018. <https://emedicine.medscape.com/article/1137982-overview>. 3
- [15] M Sharanreddy and PK Kulkarni. Can EEG test helps in identifying brain tumor? *International Journal of Health and Medical Engineering*, 7(11):703–708, 2013. 3
- [16] J. Conde, L. Juárez, J. Oliveros, and D. León. Stable numerical solution of the Cauchy problem for the Laplace equation in irregular annular regions. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 33(6):1799–1822, 2017. 5
- [17] J. Oliveros. Identificación estable de fuentes asociadas a focos epilépticos ubicadas sobre la corteza. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, 2018. 5
- [18] Claudia Netzahualcoyotl Bautista. *Problema inverso de identificación de fuentes en la corteza cerebral de tipo dipolar asociadas a focos epilépticos*. PhD thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2019. 5
- [19] Díaz Tito. Interpolación, ajuste de curvas, integración y derivación numéricas, 07 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1926.0009. 9

- [20] L. Debnath Myint-U U. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. North-Holland, 1987. 15
- [21] Nakamura Shoichiro. *Métodos numéricos aplicados con software*. Prentice Hall, México, 1a edición edition, 1992. 16
- [22] César Álvarez. Aplicación de la ecuación de conducción de calor sobre un rodamiento de bolas usando la herramienta pde de matlab. *Scientia Et Technica*, 01 2007. 16
- [23] J. F. Thompson; Z. U. A. Warsi; C. W. Mastin. *Numerical Grid Generation: Foundation and Applications*. North-Holland, 1985. 17
- [24] A. Fraguera, M. Morin, and J. Oliveros. *Modelos Matemáticos en Electroencefalografía Inversa*. 2007. 23
- [25] A. Collar, J. Oliveros, and A. Grebennikov. Planteamiento operacional y análisis del problema inverso electroencefalográfico. *Revista Mexicana de Física*, 47:162–174, 04 2001. 25
- [26] L. Heller. Return current in encephalography. variational principles. *Biophysical Journal*, 57(3):601–606, 1990. 25
- [27] J. Oliveros, M. Morín, F. Aquino, and A. Fraguera. Analysis of the Inverse Electroencephalographic Problem for Volumetric Dipolar Sources Using a Simplification. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, 35:115 – 124, 2014. 25
- [28] Ignacio Algreto-Badillo, José Julio Conde-Mones, Carlos Arturo Hernández-Gracidas, María Monserrat Morín-Castillo, José Jacobo Oliveros-Oliveros, and Claudia Feregrino-Urbe. An FPGA-based analysis of trade-offs in the presence of ill-conditioning and different precision levels in computations. *PLOS ONE*, 15(6):1–26, 06 2020. 25
- [29] S.C. Chapra. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill, 2020. 42
- [30] Oscar Rafael Arachi Merced, María Blanca Del Carmen Bermúdez Juárez, Carlos Arturo Hernández Gracidas, and José Jacobo Oliveros Oliveros. Un algoritmo estable de identificación de fuentes en el cerebro a partir de datos del EEG. *Revista ACONTACS Vol. 4*, page 8, Aceptado en Octubre 2022. 49