BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Postgrado en Ciencias Matemáticas

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN IMPROPIA

Tesis

Que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Diego Francisco Alcaraz Ubach

Director de tesis:

Prof. Dr., Dr. Scient. Miguel A. Jiménez Pozo

Puebla, Puebla. Enero 2019.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Miguel Antonio Jiménez Pozo por darme la oportunidad de trabajar con él. Por estar siempre dispuesto a ayudarme y por el tiempo que invirtió durante el proceso de la realización de esta tesis.

A mis sinodales el Dr. Jorge Bustamante González, el Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, el Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, el Dr. Raúl Escobedo Conde y el Dr. Gabriel Kantún Montiel, por las correcciones y observaciones realizadas para mejorar este trabajo.

A todos mis profesores que han sido parte fundamental en mi formación académica. A mis compañeros de estudio y a mi familia por apoyarme en todo momento.

AL CONACYT por la beca que me otorgaron para cursar mis estudios de maestría y a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en especial a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y a la Vicerrectoría de Investigación y Estudios de Posgrado.

Índice general

Introducción

Los métodos de sumación o integración impropia son, y por mucho tiempo han sido, una necesidad de los matemáticos. Existen diversos problemas que han motivado su estudio y desarrollo; por ejemplo, en el estudio de las series trigonométricas durante la segunda mitad siglo XIX, surgió la necesidad de considerar métodos de integración impropia para funciones no acotadas, debido a que las teorías de integración de ese momento estaban formuladas para funciones acotadas principalmente.

Otro problema que motivó el desarrollo de métodos de integración impropia, tiene que ver con el Teorema Fundamental del Cálculo. Se sabe que aun con la riqueza de la Teoría de Integración de Lebesgue, no se llega a una versión satisfactoria del Teorema Fundamental del Cálculo para funciones reales definidas en intervalos acotados: hay funciones derivables en todo punto de su dominio cuya derivada no es Lebesgue integrable. Sin embargo, con cualquiera de los métodos de integración desarrollados por Denjoy en 1912, Perron en 1914, y por Henstock y Kurzweil alrededor de 1960, toda función derivable se puede recuperar a partir de su derivada [3]. Estos métodos son considerados métodos de integración impropia, y aunque después se precisará el porqué de esto, la idea intuitiva recae en que son una extensión de la integral de Lebesgue usual en $\mathbb{R}$.

Los ejemplos mencionados son problemas particulares que en su momento motivaron el estudio y desarrollo de integrales impropias de funciones reales definidas en subconjuntos de los espacios euclidianos. Dicho esto, la motivación básica en este trabajo es la construcción de una teoría de integración impropia aplicable a funciones reales definidas en espacios topológicos en general. Para esto, un camino a seguir podría ser partir de los métodos de integración impropia que generalizan la integral de Lebesgue mencionados anteriormente, los cuales parecieran ser suficientemente eficaces. Sin embargo, estos métodos se apoyan fundamentalmente en propiedades específicas de los espacios euclidianos, por lo que resulta difícil su extensión al caso de espacios más generales. Entonces, parece más viable retomar las ideas básicas planteadas en el siglo XIX y generalizarlas.

Jiménez introduce en [6] una definición de integral impropia en espacios métricos compactos de medida topológica finita, con la cual se obtienen algunas de las propiedades básicas de la integración. El objetivo principal de este trabajo es extender esas ideas de integración impropia al caso de medidas $\sigma-$finitas en espacios métricos localmente compactos.

Este trabajo se divide en tres capítulos. En el primero, se exponen algunas ideas básicas de integración impropia desarrolladas en el siglo XIX, y después se mencionan los aspectos fundamentales de los métodos de integración desarrollados por Denjoy, Perron, Henstock y Kurzweil. El contenido de este capítulo es principalmente una recopilación bibliográfica de las referencias [1], [3], [4], [5] y [9].

En el segundo capítulo, se tratan algunas ideas generales de la integración impropia, se definen algunos conceptos básicos de Teoría de la Medida y se expone de forma detallada el método impropio de integración desarrollado por Jiménez en [6]. Por último, el tercer capítulo, que es una aportación original, consiste en la extensión del trabajo de Jiménez para el caso de medidas $\sigma-$finitas.

Capítulo 1

Antecedentes

En este primer capítulo se tratan algunas ideas relacionadas con la evolución de la teoría de integración, principalmente aquellas relacionadas con la integración impropia. Estas ideas siguen evolucionando y generalizándose en distintos sentidos, pero inicialmente se desarrollaron para funciones reales definidas sobre un intervalo. Dicho esto, aunque el objetivo de este trabajo es contar con una teoría de integración impropia que pueda ser aplicable en espacios más abstractos, la exposición de los antecedentes se concentra en las ideas básicas de integración de funciones reales sobre intervalos reales acotados.

Intuitivamente, la integral de una función es impropia si con el mismo método empleado la función no es absolutamente integrable. Aunque más adelante en este trabajo (en el capítulo siguiente) se precisa una definición general de *método de integración impropia* que parte de la Teoría de la Medida clásica, se presentan a continuación algunas integrales impropias relativas a otros métodos de integración previos al desarrollo de la integral de Lebesgue. Posteriormente se presentan los métodos de integración de Denjoy, Perron y de Henstock-Kurzweil, los cuales se pueden considerar como métodos de integración impropia relativos a la integral de Lebesgue. La definición de la integral de Henstock-Kurzweil no parte de la integral de Lebesgue, pero con la teoría desarrollada se llega a que es una extensión de ésta.

1.1. De Cauchy a Lebesgue

En 1823, Cauchy define rigurosamente la integral para funciones reales y continuas sobre un intervalo acotado. En su trabajo, incluye el caso en que el conjunto de puntos donde una función no está acotada es finito.

Nota 1.1.1 Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ no es acotada en el punto $c \in [a,b]$ si, para todo número real M y para toda vecindad U de c, existe $x \in U$ tal que $|f(x)| > M$.

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Cauchy introduce la definición siguiente de integral para analizar la posible existencia de dos puntos de no acotación:

Definición 1.1.2 Supóngase que f pudiera no estar acotada en los puntos a o $c \in (a,b)$, o en ambos, y supóngase que para todo intervalo cerrado contenido en el complemento del conjunto de puntos de no acotación, la función f es continua. Entonces, se define la integral impropia de f sobre $[a,b]$ como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\xi_1 \to 0 \\ \xi_2 \to 0}} \int_{a+\xi_1}^{c-\xi_2} f(x)dx + \lim_{\xi_3 \to 0} \int_{c+\xi_3}^{b} f(x)dx, \tag{1.1.1}$$

en caso de que los límites existan.

Esta definición se extiende de manera natural al caso en que la función f no sea acotada en un número finito de puntos.

Cauchy hace la observación siguiente: si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en todo intervalo cerrado que no contenga al punto $c \in [a,b]$, y c es el único punto de $[a,b]$ donde f no es acotada, entonces, suponiendo que la integral impropia no existe en el sentido de la definición anterior, es posible que exista el límite siguiente:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)dx \right]. \tag{1.1.2}$$

En tal caso, este límite se llama valor principal de la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

En 1867, motivado por el estudio de las series trigonométricas, Riemann introduce una definición de integral que generaliza la definición de Cauchy para el caso de funciones acotadas, y además encuentra condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la integral de funciones acotadas definidas sobre intervalos acotados. Mientras que Cauchy se restringe a funciones continuas, o a lo más discontinuas en un número finito de puntos, Riemann considera funciones con un número infinito de discontinuidades, de hecho, presenta un ejemplo de una función integrable cuyo conjunto de discontinuidades es infinito y denso en el intervalo $[0,1]$.

En la segunda mitad del siglo XIX, surgió la necesidad de considerar funciones no acotadas en la teoría de las series trigonométricas. Para esto, Dirichlet y Harnack presentan una definición de integral impropia que generaliza la integral impropia de Cauchy. En sus respectivos trabajos, consideran el conjunto de puntos donde la función en cuestión no es acotada, denotado E^{∞}, y estableciendo ciertas hipótesis para este conjunto (que puede ser infinito), definen la integral.

Dirichlet considera funciones donde el conjunto de puntos de acumulación de E^{∞}, denotado $(E^{\infty})'$, es finito. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en cada intervalo cerrado contenido en $[a,b] \setminus E^{\infty}$, y $(E^{\infty})' = \{x_i\}_{i=1}^{n}$, entonces en cada intervalo de la forma $[x_{i-1}+\epsilon_i, x_i-\delta_i]$ hay un número finito de puntos de E^{∞}, y por lo tanto se puede definir la integral impropia de Cauchy en los intervalos $[x_{i-1}+\epsilon_i, x_i-\delta_i]$ como

$$\int_{x_{i-1}+\epsilon_i}^{x_i-\delta_i} f(x)dx. \tag{1.1.3}$$

De esta forma, se define la integral de f en $[a,b]$ mediante el límite siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\epsilon_i \to 0 \\ \delta_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}+\epsilon_i}^{x_i-\delta_i} f(x)dx. \tag{1.1.4}$$

Así, la integral de Dirichlet de una función depende de la existencia de estos límites.

Nota 1.1.3 Cabe destacar que estas ideas de Dirichlet son conocidas gracias a Lipschitz, quien atendía las lecciones de Dirichlet.

En 1884 Hölder generalizó la integral impropia de Dirichlet considerando la integral de Riemann en lugar de la de Cauchy; es decir, en lugar de considerar funciones continuas en intervalos cerrados contenidos en $[a,b] \setminus E^{\infty}$, toma en cuenta funciones Riemann integrables en estos intervalos cerrados.

Posterior a la definición de Dirichlet, Hankel, Do Bois-Reymond y Harnack encontraron la relación que existe entre una función Riemann integrable y su *grado de discontinuidad*. Para esto, comenzaron a utilizar el concepto de *contenido cero*, definido a continuación:

Definición 1.1.4 Un subconjunto E de un intervalo real es de contenido cero, si para cada $\epsilon > 0$ existe un sistema finito de intervalos abiertos $\{\Delta_i\}_{i=1}^{n}$ de longitud total menor a ϵ que cubre el conjunto E.

Hankel, sin dar prueba alguna, formuló el criterio siguiente: una función acotada es Riemann integrable si y sólo si, el conjunto de puntos de discontinuidad de la función es de contenido cero. En 1882, Do Bois-Reymond probó dicha caracterización. Luego, con el objetivo de seguir generalizando la integral impropia de Cauchy, en 1883 Harnack define la integral de funciones cuyo conjunto E^{∞} es de contenido cero:

Definición 1.1.5 Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con E^∞ de contenido cero y f integrable en el sentido de Riemann en cada intervalo cerrado que no contenga puntos de E^∞. Sea $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ una colección finita de intervalos cuya unión contenga a E^∞ y tal que cada intervalo Δ_i contenga al menos un punto de E^∞, y defínase la función f_1 como

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin \bigcup_{i=1}^n \Delta_i \\ 0, & x \in \bigcup_{i=1}^n \Delta_i \end{cases} \tag{1.1.5}$$

(la función f_1 es integrable en el sentido de Riemann en $[a, b]$). Entonces,

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\sum_{i=1}^n m(\Delta_i)\to 0} \int_a^b f_1(x)dx, \tag{1.1.6}$$

si el límite existe, donde $m(\Delta_i)$ denota la longitud del intervalo Δ_i. En tal caso, se dice que f es integrable en el sentido de Harnack.

La definición anterior se puede escribir de la manera siguiente:

Definición 1.1.6 La función f es integrable en el sentido de Harnack, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que, para toda colección finita de intervalos $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ cuya unión contenga a E^∞ (de forma que cada intervalo Δ_i contenga al menos un punto de E^∞) y tal que $\sum_{i=1}^n m(\Delta_i) < \delta$, se cumple

$$\left| \int_b^a f_1(x)dx - \alpha \right| < \epsilon. \tag{1.1.7}$$

El concepto de contenido cero, fue dando lugar a la noción de medida con los trabajos de Cantor (1883), Stolz (1884), Harnack (1885), Peano (1887), Jordan (1892), y no fue hasta 1901 cuando Lebesgue, basándose en el trabajo de Borel (1898), definió un concepto satisfactorio de medida. Además, el mismo Lebesgue construyó una teoría de integración absoluta, que continúa siendo satisfactoria en un sentido muy amplio.

La evolución de las ideas de integración continuó con los trabajos del mismo Lebesgue, Young, Vitali, Stieltjes, F. Riesz, y de manera ya conjuntista por Caratheodory. Sin embargo, para los fines de este trabajo, es suficiente considerar lo expuesto en esta sección. En [9] se encuentra un estudio detallado del desarrollo de la teoría de integración.

1.2. El problema de la antiderivada

Aun con la riqueza de la teoría de integración de Lebesgue, no es posible llegar a una formulación del Teorema Fundamental del Cálculo totalmente satisfactoria, en el sentido siguiente: existen funciones derivables en todo punto de su dominio, cuya derivada no es Lebesgue integrable. El ejemplo clásico es la función f definida por $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ en $(0,1]$ y $f(0) = 0$, que tiene derivada en todo punto, y sin embargo f' no es Lebesgue integrable.

Con la teoría de Lebesgue, se llega a la formulación siguiente del Teorema Fundamental del Cálculo para funciones reales sobre intervalos acotados: Si $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $[a,b]$ y tiene derivada acotada, entonces $F' \in L^1(\mu)$ y $\int_a^b F' d\mu = F(b) - F(a)$, donde μ es la medida de Lebesgue. También, se puede debilitar la hipótesis de derivabilidad de F en todo $[a,b]$ y llegar al resultado siguiente:

Teorema 1.2.1 *Sea $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si F' existe en $[a,b]$, salvo a lo más en un conjunto numerable de puntos, y si $F' \in L^1(\mu)$, entonces $\int_a^b F' d\mu = F(b) - F(a)$.*

Una versión más satisfactoria del Teorema Fundamental del Cálculo sería el enunciado siguiente, donde se omite la hipótesis $F' \in L^1(\mu)$.

Enunciado 1.2.2 *Sea $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si F' existe en $[a,b]$, salvo a lo más en un conjunto numerable de puntos, entonces F' es integrable (en el sentido de cierto método de integración) y $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$.*

Debido a que hay funciones derivables cuya derivada no es Lebesgue integrable, un método de integración que satisfaga el Enunciado 1.2.2 debería ser una extensión de la integral de Lebesgue, o bien, un método de integración impropia relativo a la integral de Lebesgue. En este caso, como la Teoría de Integración de Lebesgue es para funciones absolutamente integrables, la esencia de la noción de *integral impropia* se basa de alguna manera en la *cancelación de áreas.*

Motivado por esta limitante de la integral de Lebesgue, Denjoy en 1912 definió un método de integración impropia que extiende la integral de Lebesgue y que satisface el Enunciado 1.2.2. Es decir, con el método de Denjoy, se cumple que para toda toda función derivable, su derivada es integrable y se recupera la función a partir de su derivada. Dos años después, Perron define otro método impropio de integración, con el cual también se formula y demuestra el Enunciado 1.2.2. Posteriormente se demostró que este método resulta ser equivalente al de Denjoy.

Después, con los trabajos de Henstock y Kurzweil alrededor de 1960, se desarrolló lo que hoy en día se conoce como integral medidora (o integral de Henstock-Kurzweil), que es un método de integración cuya definición es más “simple” que la de Denjoy, y que además conduce a resultados equivalentes a las integrales de Denjoy y Perron. Es decir, extiende a la integral de Lebesgue y satisface el Enunciado 1.2.2.

Considerando las integrales de Denjoy, Perron y de Henstock-Kurzweil, el Enunciado 1.2.2 se convierte en teorema:

Teorema 1.2.3 *Sea $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si F' existe en $[a, b]$, salvo a lo más en un conjunto numerable de puntos, entonces F' es integrable (en el sentido de la integrales de Denjoy, de Perron y de Henstock-Kurzweil) y $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$.*

A continuación se muestran las ideas de estas definiciones junto con sus características principales; aunque es necesario señalar que durante este periodo del siglo XX se desarrollaron muchos otros métodos de integración, que no se podrían cubrir sin un número excesivo de páginas.

1.2.1. Integral de Denjoy

Denjoy introduce el concepto de función *totalizable*, y partiendo de ese concepto generaliza la noción de integral y demuestra que la derivada de una función es *totalizable*. La definición de Denjoy es constructiva en cierto sentido, pero en el proceso de totalización se utiliza *inducción transfinita* para obtener el *total*, o bien la integral, de una función. En [4], [5] y [9] se encuentra un estudio detallado del método de Denjoy.

En 1914, precisamente para simplificar la compleja definición de Denjoy, Lusin presenta una definición descriptiva de ésta, basada en la caracterización siguiente de la integral de Lebesgue [3]:

Teorema 1.2.4 *Una función medible $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable en $[a, b]$ si y sólo si, existe una función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ absolutamente continua tal que $F' = f$ casi dondequiera en $[a, b]$.*

Antes de enunciar la definición de Lusin, es necesario introducir los conceptos siguientes:

Definición 1.2.5 Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. La función f es *absolutamente continua en sentido restringido* sobre un conjunto $E \subset [a, b]$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de manera que para toda coleccion finita $\{[c_i, d_i] : 1 \leq i \leq n\}$ de intervalos no traslapados con extremos en E, tales que $\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i) < \delta$, se cumple que $\sum_{i=1}^{n} \omega(F, [c_i, d_i]) < \epsilon$, donde $\omega(F, [c_i, d_i])$ es la oscilación de F en el intervalo $[c_i, d_i]$ definida por

$$\omega(F, [c_i, d_i]) = \sup \{|F(y) - F(x)| : c_i \leq x < y \leq d_i\}.$$

Definición 1.2.6 Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. La función f es *absolutamente continua generalizada en sentido restringido* sobre $[a,b]$, si $[a,b]$ se puede representar como una unión numerable de conjuntos de manera que, en cada uno de ellos, f sea absolutamente continua en sentido restringido.

La definición de Lusin de integral de Denjoy, es la siguiente:

Definición 1.2.7 Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Denjoy integrable en $[a,b]$, si existe una función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ absolutamente continua generalizada en sentido restringido tal que $F' = f$ casi dondequiera en $[a,b]$.

Supóngase que la función F es continua y que F' existe salvo a lo más en un conjunto numerable. Si F' no es Lebesgue integrable, en virtud del Teorema 1.2.1 se tiene que F no es absolutamente continua. Sin embargo, si F es continua y F' existe salvo a lo más en un conjunto numerable de puntos, se demuestra que F es absolutamente continua generalizada en sentido restringido. De esta forma, la definición de integral que introduce Lusin satisface el Teorema 1.2.3. En [3] se encuetra un estudio detallado de esta definición descriptiva de la integral de Denjoy.

1.2.2. Integral de Perron

La definición de Perron se basa en extender una caracterización de la integral de Lebesgue; antes de enunciarla, se introducen a continuación algunas definiciones.

Definición 1.2.8 La *derivada superior* de una función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\overline{D}F(x) = \limsup_{\delta \to 0^+} \left\{ \frac{F(y) - F(x)}{y - x} : 0 < |y - x| < \delta \right\}. \tag{1.2.1}$$

Similarmente, se define la derivada inferior $\underline{D}f(x)$ tomando el límite inferior.

Definición 1.2.9 Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Una función $U : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *función mayor de* f en $[a,b]$, si para todo $x \in [a,b]$ se cumple que $\underline{D}U(x) \geq f(x)$; y, una función $V : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *función menor de* f en $[a,b]$, si para todo $x \in [a,b]$ se cumple que $\overline{D}V(x) \leq f(x)$.

Con la Teoría de Lebesgue se llega a la caracterización siguiente de la integral [3]:

Teorema 1.2.10 *Una función medible $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable en $[a,b]$ si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existen funciones absolutamente continuas U y V, con U mayor de f en $[a,b]$ y V menor de f en $[a,b]$, tales que $U(b) - U(a) - [V(b) - V(a)] < \epsilon$.*

Perron introduce la definición siguiente de integral:

Definición 1.2.11 Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Perron integrable en $[a, b]$ si f tiene al menos una función mayor y una función menor en $[a, b]$ y los números

$$\begin{aligned} &\inf \{U(b) - U(a) : U \text{ es mayor de } f \text{ en } [a, b]\}, \\ &\sup \{V(b) - V(a) : V \text{ es menor de } f \text{ en } [a, b]\} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

son iguales. A este valor se le llama integral de f sobre $[a, b]$.

Con esta definición de integral, se generaliza el Teorema 1.2.2, en el sentido siguiente: no es necesario que las funciones U y V sean absolutamente continuas.

Teorema 1.2.12 *Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Perron integrable en $[a, b]$ si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$, existen funciones U y V, con U mayor de f en $[a, b]$ y V menor de f en $[a, b]$, tales que $U(b) - U(a) - [V(b) - V(a)] < \epsilon$.*

Es claro que si una función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable, la función F' es integrable en el sentido de Perron y se cumple que $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$, ya que la función F es mayor y menor de F'. Además, utilizando más propiedades de esta integral se demuestra el Teorema 1.2.3, es decir, se extiende el resultado para F continua y derivable salvo a lo más en un conjunto numerable de puntos. En [3] se encuentra un estudio detallado de la definición de integral de Perron.

1.2.3. Integral de Henstock-Kurzweil

Aunque la integral medidora se denomina de Henstock-Kurzweil, en un principio cada quien introdujo independientemente su definición de integral, que resultaron ser equivalentes entre sí para el caso de funciones reales sobre intervalos acotados.

Nota 1.2.13 En general, para funciones vectoriales definidas sobre intervalos acotados, la integral formulada por Henstock es un caso particular de la integral de Kurzweil.

La definición de la integral de Henstock-Kurzweil está dada en términos de sumas de Riemann, pero considerando particiones etiquetadas. Una función δ definida en $[a, b]$ se dice medidora si toma valores reales estrictamente positivos. Una partición etiquetada $P = \{(I_i, t_i)\}_1^n$ se dice que es $\delta-$fina si para todo i se cumple que $I_i \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$.

Definición 1.2.14 Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Henstock-Kurzweil integrable si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe una función medidora δ de forma que para toda partición etiquetada $P = \{(I_i, t_i)\}_1^n$ que sea $\delta-$fina, se cumple que

$$|S(f; P) - \alpha| < \epsilon, \tag{1.2.3}$$

donde $S(f; P)$ es la suma de Riemann de f correspondiente a la partición P. En tal caso, se escribe $\displaystyle\int_a^b f = \alpha$.

Se demuestran entonces varias propiedades fundamentales derivadas de la definición, tales como la unicidad del valor de la integral, aditividad, etc. Respecto al Teorema Fundamental del Cálculo, se demuestra el resultado siguiente: si $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que F' existe en $[a, b]$, salvo a lo más en un conjunto numerable de puntos, entonces F' es Henstock-Kurzweil integrable y $\displaystyle\int_a^b F' = F(b) - F(a)$. Es decir, con esta integral se satisface el Teorema 1.2.3.

En [1] se encuentra un estudio detallado de esta integral y de sus propiedades.

Capítulo 2

Preliminares

En el capítulo anterior se abarcó una parte del desarrollo de la teoría de integración, principalmente aquellas ideas relacionadas con la integración impropia. En la sección 1.2 (*El problema de la antiderivada*), la exposición se limitó al caso de funciones reales definidas sobre un intervalo real $[a, b]$, sin embargo, existen versiones más generales de algunos de estos métodos de integración impropia.

Por ejemplo, la integral de Henstock-Kurzweil se extiende para funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y con valores en un espacio normado. A pesar de esto, es difícil extender exitosamente esta integral a dominios más generales, debido a que las múltiples ventajas que ofrece la integral original de Henstock-Kurzweil dependen frecuentemente de la estructura euclidiana del dominio de las funciones. Por esto, para introducir una definición de integral impropia que sea aplicable en espacios más generales, un camino natural podría ser regresar a las ideas generales de integración impropia; por ejemplo, las ideas de Harnack.

Siendo uno de los objetivos de este trabajo introducir una definición de integral impropia adecuada para espacios métricos con medidas topológicas $\sigma-$finitas, en este capítulo primero se ofrece un panorama general de las características que cumple un método impropio de integración. Posteriormente se introduce un método de integración impropia para el caso de espacios métricos de medida topológica finita, definido por Jiménez en [6], el cual sirve de base para el trabajo presente.

2.1. Métodos de integración impropia

Tomando como punto de partida la Teoría de Lebesgue, cualquier forma de sumar o integrar una función (respecto a una medida μ) que no esté en $L^1(\mu)$, se considera un método impropio de integración. Jiménez, en su libro *Medida, Integración y Funcionales* [7], introduce la siguiente definición general de un método impropio de sumación:

Definición 2.1.1 Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida $\sigma-$finita, sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible y considérese la clase

$$H = \left\{ (A_n \uparrow) \subset \Sigma : \mu \left(X \backslash \bigcup_n A_n \right) = 0 \wedge \mu(A_n) < \infty \right\}.$$

Sea $G \subset H$. Se dice que la función f es *impropiamente integrable* según G, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $(A_n) \in G$ y todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f|A_n \in L^1(\mu|A_n)$ y

$$\lim_n \int_{A_n} f d\mu = \alpha. \tag{2.1.1}$$

En tal caso, se denota $\displaystyle\int^G f d\mu = \alpha$.

De la definición anterior, si $X = \mathbb{N}$, μ es la medida contadora sobre el conjunto potencia de $\mathbb{N}$ y G está constituido por la sucesión $A_n = \{0, 1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\int_{A_n} f d\mu = \sum_{k=1}^{n} f(k). \tag{2.1.2}$$

Es decir, el método usual de sumación de series es por sí mismo un método de sumación impropia. De esta forma, al estudiar métodos de integración impropia en espacios de medida generales se abarca el caso particular de las series. Sin embargo, existen métodos impropios de sumación de series muy específicos, tal es el caso de las sumas de Cesàro y de Abel, definidas a continuación.

Definición 2.1.2 (Suma de Cesàro). Sea (a_n) una sucesión. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defínase $\sigma_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_k$, donde s_k es la k-ésima suma parcial de (a_n). La sucesión (a_n) es Cesàro sumable, con suma $\alpha \in \mathbb{R}$, si la sucesión (σ_n) converge a α.

Definición 2.1.3 (Suma de Abel). Sea (a_n) una sucesión y sea $x \in \mathbb{R}$. La sucesión (a_n) es Abel sumable, con suma $\alpha \in \mathbb{R}$, si las sumas usuales de las series $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ existen para todo $x \in (0, 1)$ y convergen a α cuando $x \to 1$ por la izquierda.

Existen ejemplos de series que son Abel (o Cesàro) sumables y que no son convergentes en el sentido usual, sin embargo, se demuestra que si una serie $\sum a_n$ converge en el sentido usual, entonces la sucesión (a_n) es sumable mediante los dos métodos mencionados y el valor de la suma coincide. Es natural preguntarse bajo qué condiciones se cumple el recíproco. La respuesta principal a este problema fue dada por Tauber, quien en 1897 demostró el teorema siguiente:

Teorema 2.1.4 *Sea (a_n) una sucesión que satisface $na_n \longrightarrow 0$. Si (a_n) es sumable en el sentido de Abel y su suma es α, entonces, la serie $\sum a_n$ converge en el sentido usual a α.*

Un ejemplo donde se muestra la relevancia de considerar métodos impropios de sumación, es en el estudio de las series de Fourier de funciones periodicas en L^1. Para cualquier función periódica $f \in L^1$ está bien definida su serie de Fourier, y es importante saber si la función f se recupera a partir de esta serie de Fourier. Con la suma usual, se demuestra que existe $f \in L^1$ cuya serie de Fourier no converge a f en la norma de L^1; sin embargo, Féjer demostró a principios del siglo XX que con la suma de Cesàro se obtiene la convergencia en esta norma.

De forma general, Jiménez en [7] define un método de integración impropia (que extiende a la integral de Lebesgue) como sigue:

Definición 2.1.5 Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Se dice que T es un método de integración impropia respecto a μ, si T es un funcional lineal definido en un subespacio vectorial E del espacio de funciones medibles y se cumple:

i) $L^1(\mu) \subset E$.

ii) Si $f \geq 0$, entonces $f \in E$ si y sólo si $f \in L^1(\mu)$.

iii) Si $f \in L^1(\mu)$, entonces $T(f) = \displaystyle\int f d\mu$.

Retomando la definición de integral impropia de Harnack expuesta en el capítulo anterior, se puede considerar ahora la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$ en lugar de la integral de Riemann. Es decir, en la Definición 1.1.6, considerar funciones cuyo conjunto E^∞ sea de contenido cero y que además sean Lebesgue integrables en cada intervalo cerrado fuera de E^∞. De esta manera, dicha generalización de la integral de Harnack es un método de integración impropia en el sentido de la Definición 2.1.5, el cual extiende la integral de Lebesgue para el caso de funciones cuyo conjunto E^∞ es de contenido cero.

Hasta este punto del trabajo presente, tanto en el capítulo anterior como en esta sección se ha resaltado a propósito la definición de integral impropia de Harnack. La razón de esto, como se verá después, es porque el método impropio de integración definido por Jiménez en [6] puede considerarse como una generalización de las ideas de Harnack.

Antes de proceder con la exposición del trabajo de Jiménez, es conveniente introducir algunos conceptos y notaciones de Teoría de la Medida.

2.2. Conceptos previos de Teoría de la Medida

Para un espacio X con una $\sigma-$álgebra Σ y una medida μ definida en Σ, se tienen las definiciones siguientes:

Definición 2.2.1 La medida μ es $\sigma-$finita si existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En particular, si $\mu(X) < \infty$, μ es $\sigma-$finita.

Definición 2.2.2 La medida μ es difusa si para todo $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$, existe $B \in \Sigma$ tal que $B \subset A$ y $0 < \mu(B) < \mu(A)$.

Definición 2.2.3 La medida μ es completa si para todo $A \in \Sigma$ de medida cero se tiene que, si $B \subset A$, entonces $B \in \Sigma$ y $\mu(B) = 0$.

Todo espacio de medida (X, Σ, μ) puede ser *completado*; es decir, a partir de Σ y μ, se obtiene una $\sigma-$álgebra $\overline{\Sigma}$ y una medida $\overline{\mu}$ en $\overline{\Sigma}$ tal que $\overline{\mu}$ es completa. Por ejemplo, si se considera a $\mathbb{R}$ con la topología usual y si Σ es la $\sigma-$álgebra de $\mathbb{R}$ generada por los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, se define una medida μ en Σ de manera que para cualquier intervalo real (a, b) se tiene que $\mu((a, b)) = b - a$. Se demuestra que esta medida μ no es completa, y su completación es precisamente la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

En el caso en que X es un espacio topológico de Hausdorff y Σ es una $\sigma-$álgebra de X que contiene a los borelianos de X, se define lo siguiente:

Definición 2.2.4 Sea μ una medida definida en Σ. La medida μ es de Borel (o boreliana) si para todo conjunto compacto K de X se tiene que $\mu(K) < \infty$. En tal caso, se dice que el espacio (X, Σ, μ) es de Borel.

Definición 2.2.5 Sea μ una medida definida en Σ.

1. La medida μ es interiormente regular si para todo $A \in \Sigma$,

$$\mu(A) = \sup \{\mu(k) : K \text{ es compacto y } K \subset A\}. \tag{2.2.1}$$

2. La medida μ es exteriormente regular si para todo $A \in \Sigma$,

$$\mu(A) = \text{ínf}\,\{\mu(U) : U \text{ es abierto y } A \subset U\}\,. \tag{2.2.2}$$

3. La medida μ es regular si es exteriormente regular e interiormente regular.

En lo que resta de este trabajo, se consideran espacios métricos con medida boreliana, $\sigma-$finita, difusa y regular. En caso de que la medida considerada no sea completa, se considera el espacio de medida correspondiente a la completación de la medida; es por esto que, en a lo largo del trabajo se utiliza el término *medida topológica*, dando por entendido que la medida considerada puede estar definida en una $\sigma-$álgebra *más grande* que la $\sigma-$álgebra de Borel.

Nota 2.2.6 Sea μ una medida topológica en un espacio localmente compacto, de Hausdorff, que no es difusa. Se puede expresar μ como la suma de dos medidas: μ_1 y μ_2, donde μ_1 es difusa y μ_2 es discreta. Entonces, la integral de una función respecto a μ se puede expresar como la suma de las integrales respecto a cada una de las medidas. Sin embargo, una integral respecto a una medida discreta se expresa como una serie, y puesto que ya existe una amplia teoría de sumación impropia de series, tanto en el presente trabajo como en [6] se consideran únicamente medidas difusas.

2.3. Integral impropia en espacios de medidas topológicas finitas

En [6] Jiménez considera un espacio métrico compacto (X, d), cuya topología es inducida por una métrica d. Considera además una medida μ difusa, regular y finita definida en la $\sigma-$álgebra de Borel de X. En el caso en que μ no sea completa, se considera el espacio de medida correspondiente a la completación de μ. El intervalo $[a, b]$ de la recta real con la métrica euclidiana y la medida de Lebesgue, es el ejemplo base de los espacios considerados.

A continuación se introduce una definición que tiene como objetivo sustituir al conjunto E^∞ de una función dada.

Definición 2.3.1 Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Un punto $x \in X$ es de *no sumabilidad* (respecto a f y μ) si para cualquier vecindad U del punto x, la función f no es $\mu-$integrable en U. Se define el conjunto de puntos de no sumabilidad como

$$N_f = \{x \in X : \forall U \in A(x), 1_U f \notin L^1(\mu)\},$$

donde $A(x)$ denota las vecindades del punto x y 1_U denota la función indicatriz de U.

A un punto de no sumabilidad también se le llama punto de Harnack, en honor a Harnack [5]. Se demuestra fácilmente que el conjunto N_f es cerrado. Es evidente que, de $N_f \neq \emptyset$ se infiere que $f \notin L^1(\mu)$. Además, si X es compacto, de $N_f = \emptyset$ se infiere que $f \in L^1(\mu)$. Con esta observación se demuestra directamente el teorema siguiente:

Teorema 2.3.2 *Sean (X, d) un espacio métrico compacto, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ medible y U un subconjunto abierto de X tal que $N_f \subset U$. Entonces, $1_{U^c} f \in L^1(\mu)$.*

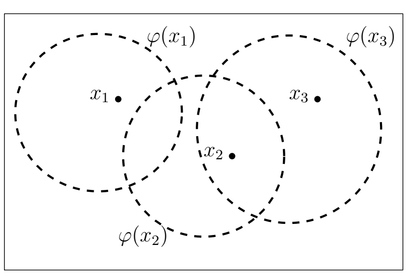
Definición 2.3.3 Denótese por B_X al conjunto de bolas abiertas de (X, d) y sea A un subconjunto de X. Defínase una función $\varphi : A \longrightarrow B_X$ de manera que a cada $x \in A$ se le asocie una bola que contenga a x (sin importar el punto en que esté centrada). Es decir, para cada $x \in A$, defínase

$$\varphi(x) = B_x, \tag{2.3.1}$$

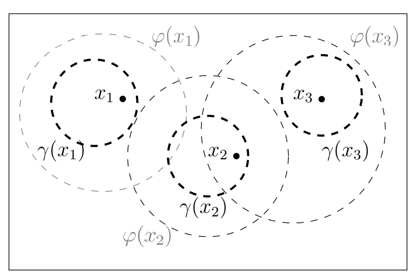
donde B_x denota una bola que contiene a x. Se dice que φ es un *cubrimiento por bolas de A* (relativo a d).

Prefijado el conjunto A, se puede considerar la colección $\Phi^d(A)$ de todos los cubrimientos por bolas de A, el cual puede *dirigirse* mediante el orden parcial siguiente: $\gamma \geq \varphi$ si para todo $x \in A$, $\gamma(x) \subset \varphi(x)$; en tal caso, se dirá que γ es un subcubrimiento relativo a φ. Para $\varphi \in \Phi^d(A)$, defínase el conjunto $V_\varphi = \bigcup_{x \in A} \varphi(x)$.

En la Figura 2.1 se ilustra un ejemplo de un cubrimiento de N_f y un subcubrimiento relativo a éste, donde la función f es tal que N_f consta sólo de tres puntos.



(a)

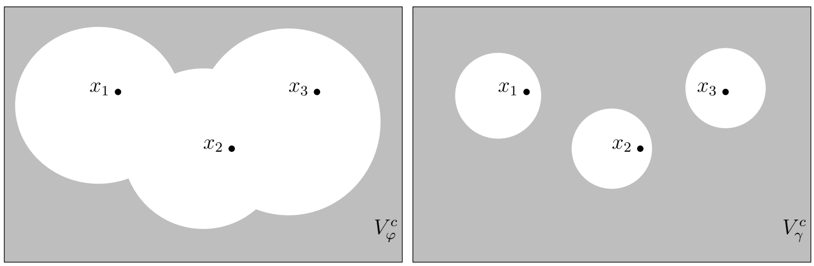


(b)

Figura 2.1: Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $N_f = \{x_1, x_2, x_3\}$. a) Cubrimiento φ de N_f. b) Subcubrimiento γ relativo a φ.

Un caso particular del Teorema 2.3.2 (considerando ahora cubrimientos por bolas) es el siguiente: *Sean* (X, d) *un espacio métrico compacto,* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *medible y* $\varphi \in \Phi^d(N_f)$*. Entonces,* $1_{V_\varphi^c} f \in L^1(\mu)$.

Continuando con el ejemplo de la Figura 2.1, en la figura siguiente se ilustran en color gris los conjuntos V_φ^c y V_γ^c, para los cuales se tiene que $1_{V_\varphi^c} f, 1_{V_\gamma^c} f \in L^1(\mu)$.



(a) (b)

Figura 2.2: Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $N_f = \{x_1, x_2, x_3\}$ y sean $\varphi, \gamma \in \Phi(N_f)$ como en la Figura 2.1. a) La función $1_{V_\varphi^c} f$ es integrable. b) La función $1_{V_\gamma^c} f$ es integrable.

Nota 2.3.4 Considerando la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, se tiene que para los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$, los atributos *medida cero* y *contenido cero* son equivalentes. En particular, para una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, el conjunto N_f es de medida cero si y sólo si es de contenido cero.

Considerando las hipótesis, definiciones, notaciones y resultados mencionados, Jiménez introduce la definición siguiente de integral impropia:

Definición 2.3.5 Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible con $\mu(N_f) = 0$. La función f es impropiamente integrable en X, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\varphi \in \Phi^d(N_f)$, de modo que para todo $\gamma \in \Phi^d(N_f)$ con $\gamma \geq \varphi$, se cumple que

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| < \epsilon. \tag{2.3.2}$$

En tal caso, se escribe $f \in L^{imp}(\mu)$ y $\displaystyle\int^{imp} f d\mu = \alpha$.

Con los términos introducidos anteriormente, la Definición 2.3.5 se puede escribir de la manera siguiente: $\displaystyle\int^{imp} f d\mu = \alpha$ si para todo $\epsilon > 0$

existe un cubrimiento φ de N_f tal que para cualquier subcubrimiento γ relativo a φ, se cumple la desigualdad 2.3.2.

Como ya se mencionó, la colección $\Phi^d(N_f)$ es un conjunto dirigido, por esto la Definición anterior se puede interpretar como la convergencia de la red Γ, definida como sigue:

$$\Gamma : \Phi^d(N_f) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ donde } \Gamma(\varphi) = \int_{V_\varphi^c} f d\mu \text{ para todo } \varphi \in \Phi(N_f). \tag{2.3.3}$$

Esto permite aprovechar la riqueza de la teoría de redes. Por ejemplo, como $\mathbb{R}$ es un espacio de Hausdorff, si el límite de la red existe, éste es único [8].

Considerando la Definición 2.3.5, Jiménez demuestra en [6] el resultado siguiente, el cual es análogo a una versión del Teorema Fundamental del Cálculo a la que se llega con la integral de Lebesgue (Teorema 1.2.1):

Teorema 2.3.6 *Sea $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua con $\mu(N_F) = 0$. Si F' existe, salvo a lo más en un conjunto numerable, y $F' \in L^{imp}(\mu)$, entonces*

$$\int^{imp} F' d\mu = F(b) - F(a). \tag{2.3.4}$$

Nota 2.3.7 La Definición 2.3.5 es aplicable para funciones definidas en espacios de medidas topológicas metrizables, donde carece de sentido la noción usual de derivada. Sin embargo, el Teorema 2.3.6 demuestra que para el caso de funciones reales definidas en intervalos acotados, se obtiene una versión del Teorema Fundamental del Cálculo más general que a lo que se llega con la integral de Lebesgue solamente, aunque menos general que lo que se obtiene con la integral de Henstock-Kurzweil. Es decir, el Teorema 2.3.6 es evidencia de que este concepto de integral posee cierta *robustez* en el caso clásico, y además logra el objetivo de aplicarse a casos generales de más abstracción.

2.3.1. Estructura de $L^{imp}(\mu)$

Atendiendo la Definición 2.1.5, el método de integración impropia introducido en esta sección, debería ser lineal. Obsérvese que, demostrar que: $f, g \in L^{imp}(\mu)$ implica $(f + g) \in L^{imp}(\mu)$ y $\int^{imp} (f + g) d\mu = \int^{imp} f d\mu + \int^{imp} g d\mu$, no es tan directo como demostrar la unicidad de la integral impropia, debido a que las integrales por separado pueden ser límites de redes definidas en distintos conjuntos dirigidos. Antes de demostrar esta propiedad de linealidad, se demuestran los dos teoremas siguientes:

Teorema 2.3.8 *Sea M un subconjunto compacto de X y de medida cero, y considérese una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in L^{imp}(\mu)$. Si $\int^{imp} f d\mu = \alpha$, entonces se cumple que para todo $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in \Phi^d(N_f \cup M)$ tal que para todo $\gamma \in \Phi^d(N_f \cup M)$ con $\gamma \geq \varphi$,*

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| < \epsilon. \tag{2.3.5}$$

Teorema 2.3.9 *Sea M un subconjunto compacto de X y de medida cero, y considérese una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ medible. Supóngase que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in \Phi^d(N_f \cup M)$ de modo que para todo $\gamma \in \Phi^d(N_f \cup M)$ con $\gamma \geq \varphi$, se cumple que*

$$\left| \int_{V_\gamma^c} f d\mu - \alpha \right| < \epsilon. \tag{2.3.6}$$

Entonces, $f \in L^{imp}(\mu)$ y $\int^{imp} f d\mu = \alpha$.

Nota 2.3.10 Las demostraciones de los dos teoremas anteriores se encuentran en [6]. En el capítulo siguiente se analizan las extensiones de estos teoremas para el caso más general de espacios métricos localmente compactos de medida $\sigma-$finita.

Utilizando los Teoremas 2.3.8 y 2.3.9, se demuestra que la suma de dos funciones impropiamente integrables en el sentido de la Definición 2.3.5, es impropiamente integrable:

Teorema 2.3.11 *Sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\mu(N_f) = 0$ y $\mu(N_g) = 0$. Si $f, g \in L^{imp}(\mu)$, entonces $(f + g) \in L^{imp}(\mu)$ y $\int^{imp} (f + g) d\mu = \int^{imp} f d\mu + \int^{imp} g d\mu$.*

Por otro lado, es inmediato que, si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f \in L^{imp}(\mu)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $cf \in L^{imp}(\mu)$ y $\int^{imp} cf d\mu = c \int^{imp} f d\mu$. De esta forma, es claro que el espacio de funciones $L^{imp}(\mu)$ es un espacio vectorial.

Nota 2.3.12 La integración impropia de funciones complejas en el sentido de la Definición 2.3.5 se reduce de manera natural al caso real mediante las propiedades de linealidad que se han verificado.

Se puede definir una norma en $L^{imp}(\mu)$ de la forma siguiente:
Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in L^{imp(\mu)}$ y considérese la colección

$$H_f = \{N_f \cup M : M \subset X, \text{ es compacto y } \mu(M) = 0\}.$$

Se define la norma de f como

$$\|f\|_{L^{imp}(\mu)} = \sup\left\{\left|\int_{V_\varphi^c} f\right| : \varphi \in \Phi^d(N), N \in H_f\right\}. \tag{2.3.7}$$

Capítulo 3

Integral impropia en espacios de medidas $\sigma-$finitas

En este capítulo, atendiendo el objetivo principal de este trabajo, se extiende el método impropio de integración introducido en el trabajo de Jiménez [6] para medidas topológicas finitas, al caso más general de medidas topológicas σ-finitas. El tratamiento de medidas topológicas finitas encuentra su dominio natural de definición en espacios métricos compactos, mientras que para el caso de medidas topológicas σ-finitas, el escenario natural de definición corresponde a espacios métricos localmente compactos. Un camino a explorar en esta nueva situación, es trabajar con alguna compactación del espacio para aplicar los resultados ya conocidos. De hecho en el mismo trabajo de Jiménez, se hace el siguiente análisis para el caso de espacios localmente compactos de medida finita:

Supóngase que se tiene una medida finita sobre un espacio metrizable localmente compacto X. Sea $X^* = X \cup \{\infty\}$ la compactación de Alexandroff de X. Suponiendo que la distancia puede extenderse continuamente al punto ∞ y definiendo $\mu(\{\infty\}) = 0$, se reduce el caso bajo estudio a la teoría ya desarrollada de medida finita sobre espacios compactos.

Aunque este análisis pareciera ser suficiente, ocurren situaciones para las cuales pudiera ser más conveniente otro tipo de compactación. Atendiendo esto último, se presenta a continuación una alternativa para lidiar con espacios localmente compactos de medida finita, que además sirve como base para la definición que se introduce después para el caso de medida $\sigma-$finita.

3.1. Definición en espacios localmente compactos de medidas topológicas finitas

Considérense las funciones siguientes definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, localmente compactos, con la medida de Lebesgue μ:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, definida en $(0, 1]$,

2. $g(z) = \dfrac{1}{1 - |z|}$, definida en $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,

3. $h(z) = \dfrac{1}{1 - z}$, definida en $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Obsérvese que las funciones f, g y h no pertenecen a $L^1(\mu)$ y los conjuntos N_f, N_g y N_h son vacíos.

Para la función f, tiene sentido considerar al conjunto N_f como el constituido por el punto cero, ya que alrededor del cero es donde la función presenta "problemas" para integrarse. Por esto, así como en [6], un camino a seguir es considerar el intervalo $[0, 1]$ en lugar de $(0, 1]$, o bien, la compactación de Alexandroff de $(0, 1]$. De esta forma, se extiende f al intervalo $[0, 1]$ definiendo $f(0) = 0$. Así el dominio de la función es compacto y $\mu(N_f) = \{0\}$.

Por otra parte, para la función g tiene menos sentido compactificar añadiendo un punto, ya que la función tiene problemas para integrarse "cerca" de la frontera del dominio, y no sólo en un punto. Tiene más sentido considerar a $\overline{D}$ como el dominio de la función y extender g a $\overline{D}$. Así el conjunto N_g sería $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. En este caso, $\overline{D}$ se puede interpretar como la completación del espacio D, que además resulta una compactación de D. Por otro lado, para la función h se tiene que el único punto problemático es $z = 1$, pero añadiendo este punto al dominio de la función, no se obtiene una compactación del espacio. Para esto, así como en el ejemplo 2, se puede considerar la completación del espacio, $\overline{D}$, aunque en este caso tendríamos $N_h = \{1\}$.

En los ejemplos mencionados, coincide que la completación del dominio de la función es también una compactación, sin embargo esto no sucede cuando el espacio no es totalmente acotado.

Los tres teoremas siguientes de la Topología general abren la puerta para una definición satisfactoria que sea aplicable en espacios localmente compactos, análoga a la definición 2.3.5:

Teorema 3.1.1 *Un espacio métrico es compacto si y sólo si es totalmente acotado y completo.*

Teorema 3.1.2 *Si el espacio (X, d) es totalmente acotado, entonces su completación, denotada por $(\widehat{X}, \widehat{d})$, también es un espacio totalmente acotado.*

Teorema 3.1.3 *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, existe una métrica ρ en X equivalente a d, tal que (X, ρ) es totalmente acotado si y sólo si X es separable.*

El Teorema 3.1.1 es conocido y se encuentra en casi cualquier libro de topología. La demostración del Teorema 3.1.2 es directa y la demostración del Teorema 3.1.3 puede encontrarse en [2], p.268. La equivalencia entre métricas mencionada en el Teorema 3.1.3 se refiere a que inducen la misma topología.

Con estos resultados, la idea a seguir es:

1. Considerar una métrica que haga el espacio totalmente acotado
2. Considerar la completación del espacio
3. Definir con medida cero lo que se "agregó" al completar
4. Extender la función a lo que se "agregó" al completar
5. Considerar el conjunto de puntos de no sumabilidad respecto a la función extendida

Considérese un espacio métrico (X, d) localmente compacto y separable, con una medida μ difusa, regular y finita definida en la $\sigma-$álgebra de Borel de X. Como en el capítulo anterior (sección 2.3), si μ no es completa, se considera el espacio de medida correspondiente a la completación de la medida μ.

Por el Teorema 3.1.1, existe una métrica ρ en X equivalente a d tal que (X, ρ) es totalmente acotado. Sea $(\widehat{X}, \widehat{\rho})$ la completación del espacio (X, ρ) y extiéndase μ definiendo la medida $\widehat{\mu}$ como $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \Sigma$ y $\widehat{\mu}(\widehat{X} \setminus X) = 0$. Por último, para una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ medible, defínase la función $\widehat{f} : \widehat{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\widehat{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, y para $x \in \widehat{X} \setminus X$, defínase $\widehat{f}(x)$ por continuidad donde sea posible, y donde no, $\widehat{f}(x) = 0$.

Nota 3.1.4 Debido a que $\widehat{\mu}(\widehat{X} \setminus X) = 0$, el valor de la integral no dependería de cómo se defina la función $\widehat{f}$ en $\widehat{X} \setminus X$. Sin embargo, puede ser conveniente que al considerar f continua, la función $\widehat{f}$ también sea continua.

Tomando en cuenta lo anterior, se introduce la definición siguiente de integral impropia, que es aplicable a espacios localmente compactos, separables y de medidas topológicas finitas.

Definición 3.1.5 Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible con $\widehat{\mu}(N_{\widehat{f}}) = 0$ y sea ρ una métrica en X equivalente a d tal que (X, ρ) es totalmente acotado. La función f es impropiamente integrable en X respecto a la métrica ρ, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\varphi \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_{\widehat{f}})$, de modo que para todo $\gamma \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_{\widehat{f}})$ con $\gamma \geq \varphi$, se cumple que

$$\left| \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| < \epsilon.$$

En tal caso, se escribe $f \in L^{imp(\rho)}(\mu)$ y $\displaystyle\int^{imp(\rho)} f d\mu = \alpha$.

Como los espacios métricos compactos son separables, se tiene que la Definición 3.1.5 es una extensión de la Definición 2.3.5, lo cual se expresa en la nota siguiente:

Nota 3.1.6 Sea (X, d) compacto y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, $f \in L^{imp}(\mu)$ y $\displaystyle\int^{imp} f d\mu = \alpha$ en el sentido de la Definición 2.3.5 si y sólo si f es integrable en el sentido de la Definición 3.1.5 respecto a la métrica d y $\displaystyle\int^{imp(d)} f d\mu = \alpha$.

La Definición 3.1.5 está dada en función a cierta compactación del espacio, es por esto que, para demostrar que se satisfacen los teoremas correspondientes a los expuestos en el capítulo anterior para el caso de espacios métricos compactos, es suficiente demostrar que la medida $\widehat{\mu}$ sigue teniendo las mismas propiedades. Partiendo de una medida μ difusa, regular y finita, es claro que $\widehat{\mu}$ sigue siendo difusa y finita. Para mostrar que sigue siendo regular, es suficiente notar que $\widehat{\mu}$ es interiormente regular, ya que en espacios de medida finita, regularidad interior implica regularidad [7].

Lema 3.1.7 *La medida $\widehat{\mu}$ es interiormente regular.*

Demostración: Sea $A \in \widehat{S}$ y sean $A_1 \subset X$ y $A_2 \subset (\widehat{X} \setminus X)$ tales que $A = A_1 \cup A_2$. Entonces, se tiene que $\widehat{\mu}(A) = \mu(A_1)$ y por lo tanto $\mu(A) = \sup\{\widehat{\mu}(K) : K \subset A_1, K \text{ compacto}\}$. Luego, como $\{K : K \subset A_1, K \text{ compacto}\} \subset \{K : K \subset A, K \text{ compacto}\}$, se tiene que $\sup\{\widehat{\mu}(K) : K \subset A_1, K \text{ compacto}\} \leq \sup\{\widehat{\mu}(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}$. Por otro lado, como $\widehat{\mu}(K) \leq \widehat{\mu}(A)$ para todo $K \subset A$, se tiene que $\sup\{\widehat{\mu}(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\} \leq \widehat{\mu}(A)$. $\square$

Tomando en cuenta lo anterior, se demuestran los teoremas siguientes, que así como se expuso en el capítulo anterior, dan lugar a considerar el espacio $L^{imp(\rho)}(\mu)$ como un espacio vectorial.

Teorema 3.1.8 *Sea (X, d) un espacio localmente compacto de medida finita y supóngase que existe una métrica ρ equivalente a d tal que (X, ρ) es totalmente acotado. Sea M un subconjunto compacto de $\widehat{X}$ y de medida cero, y considérese una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in L^{imp(\rho)}(\mu)$. Si $\int^{imp(\rho)} f d\mu = \alpha$, entonces se cumple que para todo $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_{\widehat{f}} \cup M)$ tal que para todo $\gamma \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_{\widehat{f}} \cup M)$ con $\gamma \geq \varphi$,*

$$\left| \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| < \epsilon. \tag{3.1.1}$$

Demostración:
Sea $\epsilon > 0$. Existe $\varphi \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_{\widehat{f}})$ de modo que para todo $\gamma \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_{\widehat{f}})$ con $\gamma \geq \varphi$, se cumple que

$$\left| \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.1.2}$$

Por conveniencia, denótese $N_{\widehat{f}}$ como N y la colección $\Phi^{\widehat{\rho}}(N_{\widehat{f}})$ como $\Phi(N)$.

Para todo $x \in N$, defínase $\varphi'(x) = \varphi(x)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defínase el conjunto $M_n = \{x \in M : d(x, N_f) \geq \frac{1}{n}\}$. Como el espacio X es normal, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen subconjuntos abiertos V_n, W_n de X, tales que $N_f \subset V_n$, $M_n \subset W_n$ y $V_n \cap W_n \neq \emptyset$ (véase Figura 3.1).

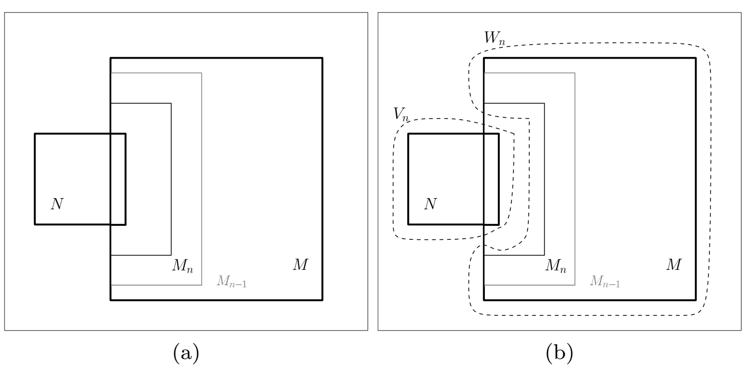


Figura 3.1: a) Conjuntos N, M, M_n y M_{n-1}. b) Conjuntos abiertos V_n, W_n tales que $N_f \subset V_n$, $M_n \subset W_n$ y$V_n \cap W_n \neq \emptyset$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene lo siguiente:

1. La función $1_{V_n^c} f$ pertenece a $L^1(\widehat{\mu})$, por lo que existe $\delta_n > 0$ tal que para todo conjunto A abierto relativo a V_n^c con $\widehat{\mu}(A) < \delta_n$, se cumple $\displaystyle\int_A |\widehat{f}| < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Luego, como la medida $\widehat{\mu}$ es regular y $\widehat{\mu}(M_n) = 0$, existe un conjunto abierto S_n que contiene a M_n y de medida $\widehat{\mu}$ menor que δ_n. De esta forma, se tiene que $\widehat{\mu}(S_n \cap V_n^c) < \delta_n$ y $\displaystyle\int_{S_n \cap V_n^c} |\widehat{f}| < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Véase la Figura 3.2.

2. El conjunto $S_n \cap W_n$ es abierto, y como $M_n \subset S_n \cap W_n$, para cada $x \in M_n \setminus M_{n-1}$ existe una vecindad U_x de x tal que $U_x \subset S_n \cap W_n$. Defínase $\varphi'(x) = B_x$ de manera que $B_x \subset U_x$.

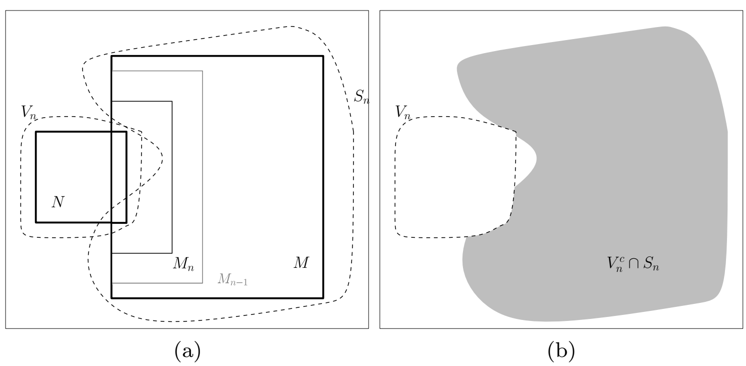


Figura 3.2: a) Conjuntos V_n y S_n con $M_n \subset S_n$ y $\widehat{\mu}(S_n) < \delta_n$. b) La función $1_{V_n^c \cap S_n} \widehat{f}$ es integrable y el valor de la integral es menor a $\dfrac{\epsilon}{2^{n+1}}$.

Considerando los dos puntos anteriores, como $M \setminus N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, queda definido φ' en $M \setminus N$.

Sea $Z = \displaystyle\bigcup_{x \in M_n \setminus M_{n-1}} \varphi'(x)$. Entonces, como $Z \subset S_n \cap V_n^c$, se tiene que $\widehat{\mu}(Z) < \delta_n$, por lo tanto

$$\int_Z |\widehat{f}| < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}. \tag{3.1.3}$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\int_{V^c_{\varphi'}} \widehat{f} - \alpha\right| &= \left|\int_{V^c_{\varphi'}} \widehat{f} - \int_{V^c_{\varphi}} \widehat{f} + \int_{V^c_{\varphi}} \widehat{f} - \alpha\right| \\ &\leq \left|\int_{V'_{\varphi}\setminus V_{\varphi}} \widehat{f}\right| + \left|\int_{V_{\varphi}} \widehat{f} - \alpha\right| \\ &< \int_{V'_{\varphi}\setminus V_{\varphi}} |\widehat{f}| + \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Por otro lado, como $V_{\varphi'} \setminus V_{\varphi} = \bigcup_{x\in M\setminus N_f} \varphi'(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{V'_{\varphi}\setminus V_{\varphi}} |\widehat{f}| &= \int_{\bigcup_{x\in M\setminus N_f} \varphi'(x)} |f| \\ &\leq \sum_n \int_Z |\widehat{f}| \\ &< \sum_n \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Luego, para $\gamma' \in \Phi(N \cup M)$ con $\gamma' > \varphi'$, existe un $\gamma \in \Phi(N)$ correspondiente tal que $\gamma > \varphi$ y $\left|\int_{V^c_{\gamma}} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha\right| < \frac{\epsilon}{2}$. Además, como $\gamma'(x) \subset \varphi'(x)$ para todo $x \in N \cup M$,

$$\int_{V'_{\gamma}\setminus V_{\gamma}} |\widehat{f}| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.1.5}$$

Por lo tanto,

$$\left|\int_{V^c_{\gamma}} \widehat{f} - \alpha\right| < \epsilon. \tag{3.1.6}$$

□

Teorema 3.1.9 *Sea (X, d) un espacio localmente compacto de medida finita y supóngase que existe una métrica ρ equivalente a d tal que (X, ρ) es totalmente acotado. Sea M un subconjunto compacto de $\widehat{X}$ y de medida cero, y considérese una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ medible. Supóngase que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_{\widehat{f}} \cup M)$ de modo* *que para todo* $\gamma \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_{\widehat{f}} \cup M)$ *con* $\gamma \geq \varphi$, *se cumple que*

$$\left| \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| < \epsilon. \tag{3.1.7}$$

Entonces, $f \in L^{imp(\rho)}(\mu)$ *y* $\displaystyle\int^{imp(\rho)} f d\mu = \alpha.$

Nota 3.1.10 La demostración del Teorema 3.2.3 se basa en argumentos similares a los utilizados en el Teorema 3.1.9.

3.2. Definición en espacios localmente compactos de medidas topológicas $\sigma-$finitas

Si ahora se considera un espacio localmente compacto de medida $\sigma-$finita e infinita, se podría dar la misma definición de integral impropia que la Definición 3.1.5. Sin embargo, en este caso se pierden algunas propiedades de la medida y no es posible demostrar directamente las propiedades principales de la definición así como se hizo para el caso de medida finita. En particular, la observación siguiente muestra que la medida pierde algunas propiedades:

Sea $U \subset \widehat{X}$ un conjunto abierto tal que $(\widehat{X} \setminus X) \subset U$, entonces U^c es un conjunto compacto que está totalmente contenido en X, por lo que $\widehat{\mu}(U^c) < \infty$. Por lo tanto, $\widehat{\mu}(U) = \infty$. Es decir, cualquier subconjunto abierto de $\widehat{X}$ que contenga a $(\widehat{X} \setminus X)$ es de medida infinita, por lo que $\widehat{\mu}$ deja de ser difusa y exteriormente regular.

Pese a esto, es posible proceder de forma casi análoga a como se ha hecho en las secciones previas y obtener resultados satisfactorios, como se verá a continuación.

Así como en la sección anterior, sea (X, d) un espacio métrico localmente compacto y separable, con una medida μ difusa, regular, y ahora $\sigma-$finita (puede ser infinita), definida en la $\sigma-$álgebra de Borel de X. Si μ no es completa, se considera el espacio de medida correspondiente a la completación de μ.

Por el Teorema 3.1.3, existe una métrica ρ en X equivalente a d tal que (X, ρ) es totalmente acotado. Sea $(\widehat{X}, \widehat{\rho})$ la completación del espacio (X, ρ) y extiéndase μ definiendo la medida $\widehat{\mu}$ como $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \Sigma$ y $\widehat{\mu}(\widehat{X} \setminus X) = 0$. Por último, para una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ medible, defínase la función $\widehat{f} : \widehat{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\widehat{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, y para $x \in \widehat{X} \setminus X$, defínase $\widehat{f}(x)$ por continuidad donde sea posible, y donde no, $\widehat{f}(x) = 0$.

Definición 3.2.1 Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible con $\widehat{\mu}(N_f) = 0$ y sea ρ una métrica en X equivalente a d tal que (X, ρ) es totalmente acotado. La función f es impropiamente integrable en X respecto a la métrica ρ, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un cubrimiento $\varphi \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_{\widehat{f}} \cup (\widehat{X} \setminus X))$ de modo que para todo $\gamma \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_{\widehat{f}} \cup (\widehat{X} \setminus X))$ con $\gamma \geq \varphi$, se cumple que

$$\left| \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| < \epsilon.$$

En tal caso, se escribe $f \in L^{imp(\rho)}(\mu)$ y $\displaystyle\int^{imp(\rho)} f d\mu = \alpha$.

Como $\widehat{X} \setminus X$ es un conjunto compacto de medida cero, con esta definición se cumple que la Definición 3.2.1 también generaliza la definición expuesta en el capítulo anterior para el caso de espacios compactos. Además, en virtud de los Teoremas 3.1.8 y 3.1.9, la Definición 3.2.1 generaliza la Definición 3.1.5

Así como se ha hecho en las secciones previas, el siguiente paso a seguir es demostrar las propiedades principales derivadas de la definición:

Teorema 3.2.2 *Sea (X, d) un espacio localmente compacto de medida $\sigma-$finita y supóngase que existe una métrica ρ equivalente a d tal que (X, ρ) es totalmente acotado. Sea M un subconjunto compacto de $\widehat{X}$ y de medida cero, y considérese una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in L^{imp(\rho)}(\mu)$. Si $\displaystyle\int^{imp(\rho)} f d\mu = \alpha$, entonces se cumple que para todo $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_f \cup (\widehat{X} \setminus X) \cup M)$ tal que para todo subcubrimiento $\gamma \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_f \cup (\widehat{X} \setminus X) \cup M)$ con $\gamma \geq \varphi$,*

$$\left| \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| < \epsilon. \tag{3.2.1}$$

Demostración: Como $\displaystyle\int^{imp(\rho)} f d\mu = \alpha$, existe un cubrimiento φ de $N_f \cup (\widehat{X} \setminus X)$ tal que para todo $\gamma \geq \varphi$ se cumple la desigualdad 3.2.1. La prueba consiste en construir un cubrimiento φ' adecuado del conjunto $N_f \cup (\widehat{X} \setminus X) \cup M$. Para esto, defínase φ' en el conjunto $N_f \cup (\widehat{X} \setminus X) \cup (M \cap (\widehat{X} \setminus X))$ como el mismo φ. Entonces falta definir φ' en $M \cap X$, lo cual se puede hacer siguiendo paso a paso la demostración del Teorema 2.3.8, ya que en X la medida sigue siendo regular. $\square$

De forma similar, se demuestra el Teorema siguiente:

Teorema 3.2.3 *Sea (X,d) un espacio localmente compacto de medida $\sigma-$finita y supóngase que existe una métrica ρ equivalente a d tal que (X,ρ) es totalmente acotado. Sea M un subconjunto compacto de $\widehat{X}$ y de medida cero, y considérese una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ medible. Supóngase que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_f \cup (\widehat{X} \setminus X) \cup M)$ de modo que para todo $\gamma \in \Phi^{\widehat{\rho}}(N_f \cup (\widehat{X} \setminus X) \cup M)$ con $\gamma \geq \varphi$, se cumple que*

$$\left| \int_{V_\gamma^c} \widehat{f} d\widehat{\mu} - \alpha \right| < \epsilon. \tag{3.2.2}$$

Entonces, $f \in L^{imp(\rho)}(\mu)$ y $\displaystyle\int^{imp(\rho)} f d\mu = \alpha$.

De esta manera, se demuestra la suma de dos funciones en $L^{imp(\rho)}(\mu)$ también está en $L^{imp(\rho)}(\mu)$. Además, se puede definir una norma en $L^{imp(\rho)}(\mu)$ de la misma manera que para el caso de espacios compactos de medida finita expuesto en el capítulo anterior.

Conclusiones

Con la finalidad de situar en contexto el trabajo presente, en el primer capítulo se hizo una recopilación de algunos métodos de integración impropia que fueron motivados por distintos problemas. Además, esta recopilación proporciona el punto de partida de esta investigación, cuya motivación general recae en construir una teoría de integración impropia que pueda ser aplicable a funciones reales definidas en espacios topológicos en general.

Después, en el segundo capítulo se estudió y se expuso de forma detallada parte la teoría de integración impropia desarrollada por Jiménez en [6], la cual es aplicable a funciones reales definidas en espacios métricos compactos de medidas topológicas finitas. Esta labor fundamental, permitió atender el objetivo principal de este trabajo: extender estas ideas de Jiménez al caso de medidas $\sigma-$finitas en espacios métricos localmente compactos.

Para lograr el objetivo planteado, se analizaron distintos caminos a seguir. En este análisis, dada una función definda en un espacio localmente compacto de medida topológica $\sigma-$finita, la idea base a seguir fue trabajar con alguna compactación del espacio para aplicar los resultados ya conocidos. Para esto, se pudo haber considerado la compactación de Alexandroff del espacio, sin embargo, en esta situación surge el problema siguiente: cuándo y cómo se puede extender la métrica al punto añadido. Además, algunos ejemplos básicos dieron lugar a considerar otro tipo de compactación.

Finalmente, se optó por considerar una métrica que haga el espacio totalmente acotado, y posteriormente considerar la completación del espacio. De esta forma, se introdujo una definición de integral impropia que generaliza la definición de Jiménez, y además se demostraron algunas propiedades básicas de dicha definición.

Bibliografía

[1] Bartle, R.G., *A modern Theory of Integration.* American Mathematical Society. No. ISBN 0-8218-0845-1. 2001.

[2] Engelking, R., *General Topology.* Heldermann Verlag. No. ISBN 3-88538-006-4. 1989.

[3] Gordon, R.A., *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock.* American Mathematical Society. No. ISBN 0-8218-3805-9. 1994.

[4] Hildebrandt, T.H., *On the integrals related to and extensions of the Lebesgue Integrals.* Chicago Symposium of the AMS. pp. 113-144. 1917.

[5] Hobson, E.W., *The Theory of Functions of Real Variable and the Theory of Fourier's Series.* Cambridge University Press. 1921.

[6] Jiménez Pozo, M.A., *Improper integrals in topological finite measure spaces.* Preprint FCFM-BUAP. 2018.

[7] Jiménez Pozo, M.A., *Medida, Integración y Funcionales*, Editorial Pueblo y Educación. No. ISBN . 1989.

[8] Kelley, J.L., *General Topology.* Springer-Verlag. No. ISBN 0-387-90125-6. 1955.

[9] Pesin, I., *Classical and Modern Integration Theories.* Academic Press. 1970.