



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

**Dendritas que son determinadas por
sus niveles de Whitney positivos**

Tesis

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

presenta

M. C. José Gerardo Ahuatzi Reyes

Directores de tesis:

Dr. David Herrera Carrasco y Dr. Fernando Macías Romero

Puebla, Puebla. Noviembre de 2019.



BUAP.

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

JOSÉ GERARDO AHUATZI REYES

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 18 de octubre de 2019, con la tesis titulada:

***“DENDRITAS QUE SON DETERMINADAS POR SUS NIVELES
DE WHITNEY POSITIVOS”***

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z, a 5 de noviembre de 2019

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

DRA.PDS/mtrv

Dedico esta tesis:

A mis padres y hermanos, por su amor y apoyo incondicional. Gracias por estar conmigo siempre, aunque no siempre estemos cerca.

A Mabel, por todo el cariño y la comprensión que me ha dado estos años, y por toda la confianza que hemos compartido. Gracias por estar a mi lado.

Agradecimientos

Muchas gracias a mis compañeros de cubo, tanto a los que están cursando estudios –Lázaro, Antonio, Germán y Gerardo–, como a los que ya terminaron sus estudios –Vianey, Paco y Luis–. Les agradezco sobre todo por la alegría y las discusiones matemáticas y no matemáticas que han compartido conmigo. Un agradecimiento especial para Antonio que ayudó en la revisión y en el mejoramiento de este y otros escritos relacionados.

Agradezco a mis directores de tesis, el Dr. David Herrera Carrasco y el Dr. Fernando Macías Romero, por su paciencia y apoyo para la realización de este tesis. Gracias por apoyarme todos estos años, en especial, estos últimos años en los que cursé el doctorado.

Muchas gracias a mis sinodales, los doctores Oleg Okunev, María de Jesús López Toriz, Raúl Escobedo Conde, Mauricio Esteban Chacón Tirado y Hugo Villanueva Méndez, por sus observaciones y sugerencias, las cuales ayudaron a mejorar esta tesis.

Quiero agradecer a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, por brindarme la posibilidad de realizar mis estudios de doctorado y, por supuesto, agradezco especialmente a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas que, entre otras muchas cosas, me brindó apoyo académico y un espacio de trabajo.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca que me proporcionó durante el transcurso de mis estudios de doctorado.

Introducción

Este trabajo de tesis doctoral se desarrolla, casi en su totalidad, dentro del marco de la Teoría de los Continuos y de sus Hiperespacios. Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Dado un continuo X , se denota por $C(X)$ al espacio $\{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X, \text{ conexo y distinto del vacío}\}$ dotado con la métrica de Hausdorff. A $C(X)$ se le denomina el hiperespacio de subcontinuos de X . Dentro de este marco, los principales objetos de estudio de este trabajo son los niveles de Whitney positivos. Una función de Whitney para $C(X)$ es cualquier función continua que va de $C(X)$ a los números reales no negativos y que, además, es estrictamente creciente (respecto de la relación de contención entre los elementos de $C(X)$ y del orden usual del conjunto de los números reales) y asigna a cada conjunto unitario el valor 0. Es conocido que $C(X)$ siempre admite funciones de Whitney, para cualquier continuo X (véase [15, Theorem 13.4]). Un nivel de Whitney positivo de X es cualquier subespacio de $C(X)$ de la forma $\mu^{-1}(t)$, en donde μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0, \mu(X))$. Denotamos

$$\mathfrak{WL}(X) = \{A : A \text{ es un nivel de Whitney positivo de } X\}.$$

En 2012, A. Illanes y R. Leonel [14], introdujeron la siguiente equivalencia entre continuos: un continuo X es Whitney equivalente a un continuo Y si cada elemento de $\mathfrak{WL}(X)$ es homeomorfo a un elemento de $\mathfrak{WL}(Y)$ y viceversa. En base a esta equivalencia, estos autores también introdujeron el siguiente concepto. Un continuo X está determinado por sus niveles de Whitney si, para cada continuo Y que es Whitney equivalente a X , se tiene que X y Y son homeomorfos.

Citando teoría conocida con anterioridad, A. Illanes y R. Leonel [14] mencionan que cada uno de los siguientes continuos es determinado por sus niveles de Whitney: el arco, la curva cerrada simple, el pseudoarco y cualquier pseudo solenoide. Asimismo, estos autores demostraron que cada solenoide y cada gráfica finita tienen esta característica, pero que las dendritas sin arcos libres no la poseen.

Además, A. Illanes y R. Leonel [14] hicieron la siguiente pregunta: si X es una dendrita cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado, ¿ X está determinada por sus niveles de Whitney? En 2018, J. G. Ahuatzí-Reyes, D. Herrera-Carrasco y F. Macías-

Romero [2] respondieron a esta pregunta afirmativamente. Mas aún, probaron la caracterización siguiente:

Teorema (*). *Sea X una dendrita. Entonces, X está determinado por sus niveles de Whitney si y solo si el conjunto de puntos extremos de X es cerrado.*

El objetivo principal de este trabajo es exponer los resultados presentados por J. G. Ahuatzí-Reyes, D. Herrera-Carrasco y F. Macías-Romero [2], así como desarrollar sus demostraciones, estableciendo al teorema (*) como resultado principal.

En el primer capítulo de este trabajo se abordan los conceptos y resultados básicos de la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios que se utilizarán en los capítulos posteriores, haciendo énfasis en las propiedades de las dendritas. El segundo capítulo se centra en los conceptos de s -gráfica libre y s -gráfica fina, los cuales son útiles para aplicar ciertos resultados previos, establecidos para gráficas finitas, pero en el contexto de las dendritas. En el tercer capítulo se muestra que ciertos subespacios de un nivel de Whitney dado de una dendrita son cubos de Hilbert y se caracterizan a los llamados arcos libres maximales de cualquiera de estos niveles. Esto nos servirá para preparar los puntos de partida de las demostraciones de varios resultados. El cuarto capítulo desarrolla cierta descomposición en celdas de los niveles de Whitney de dendritas con conjunto de puntos extremos cerrado. Los resultados obtenidos acerca de dicha descomposición nos permitirá trasladar información entre un nivel de Whitney positivo de un continuo y el continuo en sí. Por último, en el quinto capítulo se establecen y demuestran los resultados principales de este trabajo, entre ellos, el teorema (*). Por supuesto, en este último capítulo se hace uso de gran parte de los resultados y conceptos establecidos en los capítulos previos.

Índice general

Introducción	I
1. Preliminares	1
1.1. Resultados básicos de continuos e hiperespacios	2
1.2. El teorema del encaje de Anderson-Choquet	5
1.3. Continuos localmente conexos	7
1.3.1. Arcos libres y ciclos	7
1.3.2. Métricas convexas y la función C_d	8
1.4. Gráficas finitas	10
1.5. Dendritas y dendroides	11
1.6. Algunas caracterizaciones de la clase \mathfrak{D}	17
1.7. Niveles de Whitney positivos	19
1.8. Funciones de Whitney admisibles	21
2. Subcontinuos libres y s-gráficas	29
3. Arcos libres y cubos de Hilbert en niveles de Whitney	39
3.1. Arcos libres	39
3.2. Cubos de Hilbert	43
3.3. Caracterización de \mathfrak{D} usando $\mathfrak{WL}(X)$	49
4. Descomposición de los niveles de Whitney	51
4.1. Descomposición de $\mathfrak{F}(X)$ en celdas	51
4.2. Descomposición de los niveles de Whitney en celdas	63
5. Las dendritas de la clase \mathfrak{D} son Whitney determinadas	75
5.1. No existen dos dendritas Whitney equivalentes en la clase \mathfrak{D}	76
5.2. Dendritas Whitney equivalentes	91
5.3. Caracterización de la clase \mathfrak{D}	97
Conclusiones	99

Referencias	101
Índice alfabético	103

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo se introducen los conceptos y resultados básicos de la teoría de los continuos y de sus hiperespacios que se utilizan a lo largo de este trabajo. Se asume que el lector tiene conocimiento de las nociones principales de la topología de conjuntos, así como de la teoría de los espacios métricos. Algunos resultados en esta dirección serán de mucha utilidad en varias demostraciones. Por ejemplo, los tres resultados siguientes.

Teorema 1.1 (de pegado, [21, Theorem 18.3]). *Sean X y Y espacios topológicos. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Suponga que A y B son subconjuntos cerrados de X tales que $A \cup B = X$. Si $f|_A$ y $f|_B$ son funciones continuas, entonces f es continua.*

Teorema 1.2 ([21, Theorem 26.6]). *Sean X y Y espacios topológicos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una biyección continua, X es compacto y Y es Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Teorema 1.3 ([21, Theorem 25.3]). *Un espacio topológico X es localmente conexo si y solo si, para cada subconjunto abierto U de X , cada componente de U es un abierto de X .*

La notación más elemental que se utiliza en este texto es la siguiente. El conjunto de los números naturales, es decir, el conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$, es denotado por \mathbb{N} . Dados un espacio topológico X y $A \subset X$, denotamos por $\text{int}_X(A)$, $\text{cl}_X(A)$, y $\text{Fr}_X(A)$, respectivamente, al *interior*, la *cerradura* y la *frontera* de A en X . Una **vecindad** de un punto $p \in X$ es subconjunto U de X tal que $p \in \text{int}_X(U)$. Si X es un espacio métrico, entonces, salvo que se establezca de otra manera, d denota su métrica. En este caso, el diámetro de un subconjunto A de X , se denota por $\text{diám}(A)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una **n -celda** es cualquier espacio homeomorfo a la bola unitaria del espacio euclideo \mathbb{R}^n , es decir, al conjunto $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Una **0-celda** es cualquier espacio topológico que consta únicamente de un punto. Sea $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Una **m -esfera** es cualquier espacio homeomorfo a la esfera unitaria de \mathbb{R}^{m+1} , es decir, al conjunto $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1\}$. Las 1-celdas y las 1-esferas son más comúnmente conocidas como **arcos** y **curvas cerradas simples**, respectivamente. Un **cubo de Hilbert** es cualquier espacio homeomorfo a $[0, 1]^\omega$, es decir, al producto topológico de una cantidad infinita numerable de copias del intervalo $[0, 1]$. La **frontera como variedad** de una n -celda M , denotada por ∂M , es el conjunto imagen $h(S^{n-1})$ bajo un homeomorfismo $h : B^n \rightarrow M$ (se sabe que dicha imagen no depende del homeomorfismo dado, véase [8, Corollary 3.2, p. 359]). En particular, $\partial B^n = S^{n-1} = \text{Fr}_{\mathbb{R}^n} B^n$.

En la siguiente sección se mencionan algunos otros resultados básicos de topología que están más relacionados con la teoría de continuos o que solo son utilizados incidentalmente para probar un resultado de este tipo.

1.1. Resultados básicos de continuos e hiperespacios

Definición 1.4. Un **continuo** es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Si un continuo tiene más de un punto, se dice que es **no degenerado** o que no es degenerado.

Ejemplo 1.5. Los arcos y las curvas cerradas simples son, en muchos sentidos, los continuos no degenerados más simples. De forma más general, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, las n -celdas y las n -esferas son también continuos. Las 0-celdas son, por supuesto, continuos. Sin embargo, las 0-esferas no son continuos debido a que constan exactamente de dos puntos y, como consecuencia de esto, no son espacios conexos.

Definición 1.6. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Sea β un número cardinal. Decimos que A es de **orden** menor o igual que β y denotamos

$$\text{ord}(A, X) \leq \beta$$

si, para cada subconjunto abierto U de X tal que $A \subset U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que

$$A \subset V \subset U \text{ y } |\text{Fr}_X(V)| \leq \beta.$$

Decimos que A es de **orden** β en X y denotamos

$$\text{ord}(A, X) = \beta$$

si $\text{ord}(A, X) \leq \beta$ y, para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$, se tiene $\text{ord}(A, X) \not\leq \alpha$. Asimismo, para cualquier $p \in X$, decimos que p es de **orden** orden β si $\text{ord}(\{p\}, X) = \beta$; en tal caso, denotamos $\text{ord}(p, X) = \beta$.

Definición 1.7. Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Denotamos

$$\begin{aligned} E(X) &= \{x \in X : \text{ord}(x, X) = 1\}, \\ O(X) &= \{x \in X : \text{ord}(x, X) = 2\}, \\ R(X) &= \{x \in X : \text{ord}(x, X) \geq 3\}. \end{aligned}$$

Los elementos de $E(X)$, $O(X)$ y $R(X)$ son llamados, respectivamente, **puntos extremos**, **puntos ordinarios** y **puntos de ramificación** de X .

Lema 1.8 (caso particular de [23, Proposition 6.3]). *Sean S y C continuos tales que $C \subset S$ y $S - C = A \cup B$, en donde A y B son conjuntos mutuamente separados y distintos del vacío. Entonces, $A \cup C$ y $B \cup C$ son continuos.*

Teorema 1.9 (caso particular de [23, Corollary 6.7]). *Sean X un continuo con más de un punto, $N = \{p \in X : X - \{p\} \text{ es conexo}\}$ y $S \subsetneq X$ conexo. Entonces, $N \not\subset S$.*

Lema 1.10 ([23, Exercise 6.27]). *Sean X un continuo y F un subconjunto de $E(X)$. Entonces, $X - F$ es conexo.*

Definición 1.11. Dado un espacio métrico X , consideramos los conjuntos siguientes:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es compacto y distinto del vacío}\}, \\ C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\} \text{ y} \\ F_1(X) &= \{A \in C(X) : A \text{ tiene un único punto}\}. \end{aligned}$$

A 2^X se le considera con la **métrica de Hausdorff** H_d . Recuerde que H_d puede ser expresada como sigue. Para cada $A \in 2^X$ y cada $r > 0$, sea

$$N_d(A, r) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < r\}. \quad (1.1)$$

Dados cualesquiera $A, B \in 2^X$,

$$H_d(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset N_d(B, r) \text{ y } B \subset N_d(A, r)\}$$

(véase [15, Theorem 2.2 y Remark 2.5] para una prueba de que H_d es una métrica).

Tanto a $C(X)$ como a $F_1(X)$ se les considera como subespacios de 2^X . La métrica de $C(X)$ también se denotará por H_d , lo cual no debe causar confusión pues este último será el único uso que se le dará a esta notación en lo que sigue de este trabajo. Así, la notación

$$B_d(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

se interpretará en el caso de H_d como sigue

$$B_{H_d}(A, r) = \{B \in C(X) : H_d(B, A) < r\}.$$

Con esta métrica, 2^X y $C(X)$ adquieren una estructura muy rica. Una de las propiedades más básicas de dicha estructura está contenida en el siguiente teorema.

Teorema 1.12 ([22, Theorem 0.8]). *Sea X un continuo. Entonces, 2^X y $C(X)$ son compactos.*

Se sabe que $F_1(X)$ es una copia topológica de X contenida en $C(X)$. Más aún, el resultado siguiente es muy conocido.

Lema 1.13. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, la función $\varphi : X \rightarrow F_1(X)$, dada por $\varphi(x) = \{x\}$ para cada $x \in X$, es una isometría; en particular, φ es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean a y b puntos cualesquiera de X . Sean $r = d(a, b)$ y $R = H_d(\{a\}, \{b\})$. Para demostrar que φ es una isometría, basta probar que $R = r$. Observe que $b \notin B_d(a, r)$ y que $B_d(a, r) = N_d(\{a\}, r)$. Así, $\{b\} \not\subset N_d(\{a\}, r)$. Si $R < r$, entonces existe $r' \in [R, r)$ tal que $\{b\} \subset N_d(\{a\}, r')$ y, puesto que $N_d(\{a\}, r') \subset N_d(\{a\}, r)$, se tiene la contención $\{b\} \subset N_d(\{a\}, r)$, contradiciendo la afirmación anterior. Por lo tanto $r \leq R$. Supongamos que $r < R$. Sea $t = \frac{1}{2}(R + r)$. Como $r < t$, se tiene que $b \in B_d(a, t)$ y $a \in B_d(b, t)$. Así, $\{b\} \subset N_d(\{a\}, t)$ y $\{a\} \subset N_d(\{b\}, t)$; por ende, $R \leq t$, una contradicción al hecho de que $t < R$. Por lo tanto, $r = R$. \square

Definición 1.14. Dada una función $f : X \rightarrow Y$ entre continuos, sea $f^* : 2^X \rightarrow 2^Y$ la función dada por $f^*(A) = f(A)$. A f^* le llamamos la **función inducida** por f a 2^X . La función inducida por f a $C(X)$ es la restricción $\hat{f} = f^*|_{C(X)} : C(X) \rightarrow C(Y)$.

Lema 1.15 ([15, Lemma 13.2]). *Sean X y Y continuos. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Entonces, la función inducida $f^* : 2^X \rightarrow 2^Y$ es continua.*

Como la función inducida a $C(X)$ es una restricción de la función inducida a 2^X , se tiene el Corolario 1.16 como una consecuencia inmediata del Lema 1.15.

Corolario 1.16. *Sean X y Y continuos. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Entonces, la función inducida $\hat{f} : C(X) \rightarrow C(Y)$ es continua.*

En el siguiente ejemplo, ∂M denota la frontera como variedad de una n -celda M .

Ejemplo 1.17 ([15, Example 5.1]). Si X es cualquier arco y sus puntos extremos son p y q , entonces $C(X)$ es una 2-celda y

$$\partial C(X) = F_1(X) \cup \{A \in C(X) : p \in A \text{ o } q \in A\}.$$

Sea Y un espacio métrico. Dada una colección finita A_1, \dots, A_k de subconjuntos de Y , denotamos

$$\langle A_1, \dots, A_k \rangle = \{A \in C(Y) : A \subset \bigcup_{i=1}^k A_i \text{ y } A \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, k\}\}.$$

El conjunto $\{\langle U_1, \dots, U_k \rangle : k \in \mathbb{N}, U_i \text{ es abierto en } Y \text{ para cada } i \in \{1, \dots, k\}\}$ es una base para la llamada **topología de Vietoris** de $C(Y)$. Si X es un continuo, se cumple que la topología generada por la métrica de Hausdorff de $C(X)$ coincide con la topología de Vietoris de $C(X)$ [15, Theorem 3.2]. Así, tenemos lo siguiente.

Teorema 1.18. *Sea X un continuo. Entonces, el siguiente conjunto es una base para la topología (generada por la métrica de Hausdorff) de $C(X)$:*

$$\{\langle U_1, \dots, U_k \rangle : k \in \mathbb{N}, U_i \text{ es abierto en } X \text{ para cada } i \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Lema 1.19 (véase [15, Exercise 4.16]). *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X . Si $A_n \subset A_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim A_n = \text{cl}_X(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$. Si $A_{n+1} \subset A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.*

Definición 1.20. Dado un continuo X y un hiperespacio \mathcal{H} de X , un **arco ordenado** en \mathcal{H} es un arco \mathcal{A} contenido en \mathcal{H} tal que cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$ cumplen que $A \subset B$ o $B \subset A$. Un **arco ordenado** de A_0 a A_1 (o que va de A_0 a A_1) es un arco ordenado tal que A_0 y A_1 son los puntos extremos de dicho arco y $A_0 \subset A_1$. Si el arco ordenado \mathcal{A} va de A_0 a A_1 , entonces decimos que \mathcal{A} **comienza** en A_0 .

Teorema 1.21 ([22, Theorem 1.8]). *Sea X un continuo. Sean A_0 y A_1 elementos de 2^X distintos. Entonces, existe un arco ordenado en 2^X de A_0 a A_1 si y solo si $A_0 \subset A_1$ y cada componente de A_1 interseca a A_0 .*

Lema 1.22 ([22, Lemma 1.11]). *Sea X un continuo. Si α es un arco ordenado en 2^X que comienza en un elemento de $C(X)$, entonces $\alpha \subset C(X)$.*

Como un corolario inmediato al Teorema 1.21 y al Lema 1.22, se tiene que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son conexos. Esto, junto con lo establecido en el Teorema 1.12, nos da el siguiente resultado.

Corolario 1.23. *Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son continuos.*

Lema 1.24 ([22, Lemma 1.43]). *Sean X un continuo y $\mathcal{K} \subset 2^X$. Si \mathcal{K} es conexo y $\mathcal{K} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{K}$ es conexo.*

Lema 1.25 ([22, Lemma 1.49]). *Sean X un continuo y \mathcal{K} un subcontinuo de 2^X . Si $\mathcal{K} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{K}$ es un subcontinuo de X .*

1.2. El teorema del encaje de Anderson-Choquet

Esta sección se limita a introducir el concepto de límite inverso, así como al teorema que le da nombre y un resultado que permite hallar funciones continuas, funciones inyectivas y funciones sobreyectivas entre límites inversos. Dichos resultados serán vitales para la prueba del teorema principal de este escrito, a saber, el Teorema 5.9.

Definición 1.26. Una **sucesión inversa** es una sucesión de parejas $\{(X_i, f_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, usualmente denotada por $\{X_i, f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, en donde cada X_i es un espacio topológico y cada f_i es una función continua de X_{i+1} en X_i . Si $\{X_i, f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión inversa, entonces el **límite inverso** de $\{X_i, f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, denotado por $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}$, es el conjunto

$$\{(x_1, x_2, \dots) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}.$$

Teorema 1.27 ([23, Theorem 2.10]). *Sea X un espacio métrico con métrica d . Sea $\{X_i, f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión inversa, en donde cada X_i es un subconjunto de X compacto y distinto del vacío y cada f_i es sobreyectiva. Dados cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $j > i$, sea*

$$f_{ij} = \begin{cases} f_i : X_j \rightarrow X_i & \text{si } j = i + 1, \\ f_i \circ \dots \circ f_{j-1} : X_j \rightarrow X_i & \text{si } j > i + 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Suponga que se cumple lo establecido en los dos incisos siguientes.

- (a) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diám}(\bigcup_{j > k} (f_{kj})^{-1}(p)) < \varepsilon$ para cada $p \in X_k$.
- (b) Para cada i y cada $\delta > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que cada $j > i$ cumple que si $p, q \in X_j$ y $d(f_{ij}(p), f_{ij}(q)) > \delta$, entonces $d(p, q) > \delta'$.

Entonces, $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}$ es homeomorfo a $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\text{cl}_X(\bigcup_{m \geq i} X_m))$. En particular, si $X_i \subset X_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}$ es homeomorfo a $\text{cl}_X(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i)$.

Teorema 1.28 ([23, Exercise 2.22]). *Sean $\{X_i, f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\{Y_i, g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones inversas. Sean $X_\infty = \lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}$ y $Y_\infty = \lim_{\leftarrow} \{Y_i, g_i\}$. Suponga que existe una sucesión de funciones $\{\varphi_i : X_i \rightarrow Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo (es decir, para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $\varphi_i \circ f_i = g_i \circ \varphi_{i+1}$):*

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xleftarrow{f_1} & X_2 & \xleftarrow{f_2} & X_3 & \xleftarrow{f_3} & X_4 & \xleftarrow{\quad} & \dots \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \\ Y_1 & \xleftarrow{g_1} & Y_2 & \xleftarrow{g_2} & Y_3 & \xleftarrow{g_3} & Y_4 & \xleftarrow{\quad} & \dots \end{array}$$

Entonces, cada $(x_1, x_2, \dots) \in X_\infty$ cumple que $(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots) \in Y_\infty$. Más aún, la función $\varphi_\infty : X_\infty \rightarrow Y_\infty$ dada por $\varphi_\infty((x_1, x_2, \dots)) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots)$ tiene las siguientes propiedades.

- (a) Si cada φ_i es continua, entonces φ_∞ es continua.
- (b) Si cada φ_i es inyectiva, entonces φ_∞ es inyectiva.
- (c) Si cada φ_i es continua y sobreyectiva y si cada X_i es un espacio métrico compacto, entonces φ_∞ es sobreyectiva.

1.3. Continuos localmente conexos

Teorema 1.29 ([23, Theorem 8.26]). *Sea X un continuo localmente conexo con más de un punto. Entonces, cualquier abierto de X conexo es arco conexo.*

Lema 1.30. *Sean X un continuo localmente conexo con más de un punto, U un abierto de X conexo y S un continuo contenido en U . Entonces, existe una sucesión de continuos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $S \subset A_n \subset A_{n+1} \subset U$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es denso en $\text{cl}_X(U)$.*

Demostración. Note que U es arco conexo (Teorema 1.29) y separable (puesto que X lo es). Sea $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto de U numerable y denso en U . Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea α_i un arco contenido en U que va de a_i a un punto de S . Dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = S \cup \bigcup_{i=1}^n \alpha_i$. Luego, A_n es un continuo tal que $S \cup \{a_1 : i \leq n\} \subset A_n \subset A_{n+1} \subset U$. Por consiguiente, $\{a_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, lo cual implica que esta unión es densa en U y, por consiguiente, que es densa en $\text{cl}_X(U)$. \square

1.3.1. Arcos libres y ciclos

Uno de los hechos que más ha influido en el estudio de los hiperespacios ha sido la importancia que tienen los arcos libres de un continuo en la estructura de sus hiperespacios. Este trabajo no es la excepción, así que dedicamos esta sección a establecer algunos propiedades relacionados con este concepto.

Definición 1.31. Sea X un continuo. Un **arco libre** de X es un arco J contenido en X tal que $J - E(J)$ es abierto en X . Un **arco libre maximal** es un arco libre de X para el cual no existe algún arco libre de X que lo contenga propiamente. Un **ciclo** de X es una curva cerrada simple S para la cual existe $p \in S$ tal que $S - \{p\}$ es abierto en X . Denotamos

$$\mathfrak{A}_S(X) = \{J : J \text{ es un arco libre maximal de } X \text{ o un ciclo de } X\}$$

Teorema 1.32 ([12, Lemma 3(b)]). *Sea X un continuo localmente conexo. Asuma que J es un arco libre y que $K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Si $J \cap \text{int}_X(K) \neq \emptyset$, entonces $J \subset K$.*

Corolario 1.33. *Sea X un continuo localmente conexo. Asuma que J es un arco libre y que $K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Si $\text{int}_X(J) \cap K \neq \emptyset$, entonces $J \subset K$.*

Demostración. Observe que $\text{int}_X(J) \cap K$ es un abierto de K con más de un punto. Esto implica que $\text{int}_X(J) \cap K$ es no numerable. Como $K - E(K)$ es abierto, tenemos que $\text{Fr}_X(K) \subset E(K)$. En particular, $\text{Fr}_X(K)$ es finito. Así, $(\text{int}_X(J) \cap K) - \text{Fr}_X(K) \neq \emptyset$, es decir, $\text{int}_X(J) \cap \text{int}_X(K) \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.32, se tiene que $J \subset K$. \square

Corolario 1.34. *Sea X un continuo localmente conexo. Asuma que $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Si $J \cap (K - E(K)) \neq \emptyset$ o $J \cap \text{int}_X(K) \neq \emptyset$, entonces $J = K$.*

Demostración. Supongamos primero que X es una curva cerrada simple. Sea A un arco contenido en X . Luego, existe un arco $B \subset X$ tal que $A \subsetneq B$. Puesto que tanto $A - E(B)$ como $B - E(B)$ son abiertos en X , se tiene que A y B son arcos libres de X . Así, $A \notin \mathfrak{A}_S(X)$. Por tanto, X no contiene arcos libres maximales. Como X es un ciclo de sí mismo y es el único posible, se tiene por lo anterior que $\mathfrak{A}_S(X) = \{X\}$ y, como consecuencia, se tiene el resultado en este caso.

Para lo que resta de esta demostración, vamos a considerar que X no es una curva cerrada simple. Observe que, si $J \cap (K - E(K)) \neq \emptyset$, entonces, puesto que $K - E(K)$ es abierto en X , se tiene que $J \cap \text{int}_X(K) \neq \emptyset$. Así, para probar el corolario, podemos suponer que $J \cap \text{int}_X(K) = \emptyset$.

Por el Teorema 1.32, $J \subset K$. Si K es un arco, entonces J también es un arco y, como ambos son arcos libres maximales, la contención entre ellos implica que $J = K$. Supongamos que K es un ciclo y que $J \neq K$. Sea $p \in K$ tal que $K - \{p\}$ es abierto en X . Como $K \neq X$, se tiene que $\text{Fr}_X(K) \neq \emptyset$. Así, $\text{Fr}_X(K) = \{p\}$. Luego, J es un subcontinuo propio de K y, por ende, J es un arco. Tenemos dos casos.

1. $p \notin J$. En este caso, existe un arco $L \subset K - \{p\}$ tal que $J \subsetneq L$. Como $L - E(L)$ es abierto en K , $L - E(L)$ también es abierto en $K - \{p\}$ y, por ende, en X .
2. $p \in J$. Como J es libre en X , $\text{Fr}_X(J) \subset E(J)$. Como $\text{Fr}_X(K) \cap J \subset \text{Fr}_X(J)$, tenemos que $p \in E(J)$. Sea L un arco contenido en K tal que $p \in E(L)$ y $J \subsetneq L$. Luego, $L - E(L)$ es abierto en K y $L - E(L) \subset K - \{p\}$. Así, $L - E(L)$ es abierto en $K - \{p\}$ y en X .

Así, en cualquier caso, existe un arco libre L de X tal que $J \subsetneq L$, lo cual contradice la maximalidad de J . Esta contradicción muestra que si K es un ciclo, entonces $J = K$. Esto concluye esta demostración. \square

Teorema 1.35 ([11, Lemma 7(b)]). *Sean X un continuo. Si J y K son arcos libres de X y $\text{int}_X(J) \cap \text{int}_X(K) \neq \emptyset$, entonces $J \cup K$ es un arco libre o un ciclo de X .*

Teorema 1.36 ([11, Lemma 8]). *Sean X un continuo localmente conexo y $\{J_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathfrak{A}_S(X)$ distintos por pares. Sea $x_m \in J_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Si $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$, entonces $\lim J_m = \{x\}$.*

Teorema 1.37 ([11, Lemma 10]). *Sea X un continuo localmente conexo. Suponga que J es un arco libre de X . Entonces, existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $J \subset K$.*

1.3.2. Métricas convexas y la función C_d

Definición 1.38. Dados un espacio métrico X y una métrica d para X , decimos que d es **convexa** si, para cualesquiera $p, q \in X$, existe $m \in X$ tal que $d(p, m) = d(m, q) = \frac{1}{2}d(p, q)$.

Teorema 1.39 ([5, 20]). *Un continuo es localmente conexo si y solo si admite una métrica convexa.*

Teorema 1.40 ([15, Proposition 10.4]). *Sea X un continuo con métrica convexa d . Entonces, cualesquiera $x, y \in X$ distintos pueden ser unidos por un arco, J , de tal manera que J es isométrico al intervalo cerrado $[0, d(x, y)]$.*

Lema 1.41. *Sea X un espacio métrico localmente conexo. Suponga que Y y Z son subespacios cerrados de X tales que $X = Y \cup Z$ y $Y \cap Z$ es unitario. Si d es una métrica convexa para X , entonces las métricas inducidas por d en Y y en Z son convexas.*

Demostración. Basta probar que la métrica inducida por d en Y es convexa. Sean $p, q \in Y$. Si $p = q$, entonces, usando $m = p$, se tiene que $d(p, m) = 0 = d(m, q) = \frac{1}{2}d(p, q)$. Supongamos que $p \neq q$. Como d es una métrica convexa, el Teorema 1.40 garantiza que existe una isometría $\gamma : [0, d(p, q)] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(d(p, q)) = q$. Sea $m = \gamma(\frac{1}{2}d(p, q))$. Luego, $d(p, m) = d(\gamma(0), \gamma(\frac{1}{2}d(p, q))) = |0 - \frac{1}{2}d(p, q)| = \frac{1}{2}d(p, q)$ y $d(m, q) = d(\gamma(\frac{1}{2}d(p, q)), \gamma(d(p, q))) = |\frac{1}{2}d(p, q) - d(p, q)| = \frac{1}{2}d(p, q)$. Vamos a probar que $m \in Y$. Para esto, supongamos que $m \notin Y$. Sean

$$t_0 = \sup\{t \in [0, \frac{1}{2}d(p, q)] : \gamma(t) \in Y\} \quad \text{y} \quad t_1 = \inf\{t \in (\frac{1}{2}d(p, q), d(p, q)] : \gamma(t) \in Y\}.$$

(Note para esto último que $\gamma(0) = p \in Y$ y que $\gamma(d(p, q)) = q \in Y$). Como Y es cerrado en X , se tiene que $\gamma(t_0), \gamma(t_1) \in Y$. Luego, $t_0 < \frac{1}{2}d(p, q) < t_1$ y $\gamma((t_0, t_1)) \subset Z - Y$. Puesto que Z es cerrado, esto último implica que $\gamma(t_0), \gamma(t_1) \in Z$. De este modo, $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ son elementos del conjunto unitario $Y \cap Z$ y, por ende, $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$. Sin embargo, como γ es una biyección y $t_0 < t_1$, se tiene que $\gamma(t_0) \neq \gamma(t_1)$, una contradicción. Por lo tanto, $m \in Y$. Esto prueba que la métrica inducida por d en Y es convexa. \square

Definición 1.42. Dados un continuo X , $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$, la d -bola cerrada generalizada en X con centro A y radio ε es el conjunto

$$C_d(A, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, A) \leq \varepsilon.\}$$

Lema 1.43 ([24, Exercise 0.65.3(f)]). *Dado un continuo X con métrica convexa d , la función $\Phi : 2^X \times [0, \infty) \rightarrow 2^X$ dada por*

$$(A, r) \xrightarrow{\Phi} C_d(A, r)$$

es continua.

Lema 1.44 ([24, Exercise 0.65.1, Exercise 0.65.3]). *Sea X continuo. Si d es una métrica convexa para X y $\varepsilon > 0$, entonces:*

- (i) Para cada $A \in 2^X$, se tiene $C_d(A, \varepsilon) = \text{cl}_X(\text{int}_X(C_d(A, \varepsilon)))$.
- (ii) Para cada $A \in C(X)$, se tiene $C_d(A, \varepsilon) \in C(X)$.

En lo subsecuente, asumiremos una métrica convexa para cualquier continuo localmente conexo considerado; de este modo, las propiedades que acabamos de describir se satisfacen siempre que hablemos de un continuo localmente conexo.

1.4. Gráficas finitas

Definición 1.45. Un n -odo simple es cualquier continuo homeomorfo a la unión de los segmentos de recta que van del origen del plano euclidiano a cada uno de n puntos distintos de la circunferencia unitaria.

Definición 1.46. Una **gráfica finita** es un continuo que se puede expresar como la unión de una cantidad finita de arcos de tal forma que cualesquiera dos ellos distintos o son ajenos o se intersectan solo en uno o dos de sus puntos extremos.

Definición 1.47. Un **árbol** es cualquier gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.

Usando solamente la definición de gráfica finita, podemos mostrar una propiedad bastante conocida de esta clase de espacios, a saber, que localmente son n -odos.

Observación 1.48. Sean G una gráfica finita, $p \in G$ y $m = \text{ord}(p, G)$. Entonces, para cualquier abierto U de G con $p \in U$, existen arcos T_1, \dots, T_m contenidos en G tales que cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, m\}$ distintos cumplen que $T_i \cap T_j = \{p\}$, $p \in \bigcap_{i=1}^m E(T_i)$, $\bigcup_{i=1}^m T_i \subset U$ y $\bigcup_{i=1}^m (T_i - (E(T_i) - \{p\}))$ es abierto en G . En particular, si $m > 1$, entonces existe un m -odo simple T contenido en U tal que $T - E(T)$ es un abierto de G que contiene a p .

Demostración. Sea U un abierto de G con $p \in U$. Sea $r > 0$ tal que $B_d(p, r) \subset U$. Sean A_1, \dots, A_k arcos tales que $G = \bigcup_{i=1}^k A_i$ y cada par de ellos distintos o son ajenos o se intersectan en uno o dos de sus puntos extremos. Sea $\Lambda = \{i \in \{1, \dots, k\} : p \in A_i\}$. Si existe $i_0 \in \Lambda$ tal que $p \notin E(A_{i_0})$, entonces podemos reemplazar A_{i_0} en la colección A_1, \dots, A_k por dos arcos A'_{i_0} y A''_{i_0} tales que $A'_{i_0} \cup A''_{i_0} = A_{i_0}$, $A'_{i_0} \cap A''_{i_0} = \{p\}$ y $p \in E(A'_{i_0}) \cap E(A''_{i_0})$. De este modo, podemos suponer que $p \in E(A_i)$ para cada $i \in \Lambda$. Sea $F = \bigcup_{i \neq j} (A_i \cap A_j)$ si $k > 1$; en caso contrario, sea $F = \emptyset$. Luego, F es finito. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2} \min(\{d(p, s) : s \in F - \{p\}\} \cup \{r\})$. Para cada $i \in \Lambda$, sea T_i un subarco propio de A_i tal que $p \in T_i \subset B_d(p, \varepsilon)$ y sea C_i el subarco de A_i tal que $A_i = T_i \cup C_i$ y $|T_i \cap C_i| = 1$. Luego, para cualquier $i \in \Lambda$, $p \in E(T_i)$ y, si $|\Lambda| > 1$, cada $j \in \Lambda$ distinto de i cumple que $T_i \cap T_j \subset A_i \cap A_j \cap B_d(p, \varepsilon) \subset F \cap B_d(p, \varepsilon) = \{p\}$; por consiguiente, $p \in \bigcap_{i \in \Lambda} E(T_i)$ y $T_i \cap T_j = \{p\}$ para cualesquiera $i, j \in \Lambda$ con

$i \neq j$. De forma similar, para cualesquiera $i \in \Lambda$ y $j \in \{1, \dots, k\} - \Lambda$, se tiene $T_i \cap A_j \subset \{p\}$ y, como $p \notin A_j$, $T_i \cap A_j = \emptyset$. Sean $S = (\bigcup_{i \in \Lambda} C_i) \cup (\bigcup_{i \notin \Lambda} A_i)$ (por supuesto, si $\Lambda = \{1, \dots, k\}$, convenimos que $\bigcup_{i \notin \Lambda} A_i = \emptyset$) y $T = \bigcup_{i \in \Lambda} T_i$. Luego, $S \cap T = (\bigcup_{i \in \Lambda} C_i) \cap T$. Dado cualquier $i \in \Lambda$, sea p_i el punto extremo de T_i distinto de p . Note que $C_i \cap T_i = \{p_i\}$. Así, $S \cap T = \{p_i : i \in \Lambda\}$. Además, $S \cup T = G$ y, por ende, $p \in G - S = T - \{p_i : i \in \Lambda\}$. Como S es cerrado en G , lo anterior implica que el conjunto $T - \{p_i : i \in \Lambda\} = \bigcup_{i \in \Lambda} (T - \{p_i\})$ es abierto. Además, es inmediato que $\bigcup_{i \in \Lambda} T_i \subset B_d(p, \varepsilon) \subset B_d(p, r) \subset U$. Por otro lado, note que $\text{ord}(p, T) = |\Lambda|$. Considerando que T es una vecindad de p en X , se tiene que $\text{ord}(p, X) = |\Lambda|$. En particular, T es un m -odo. Por último, supongamos que $m > 1$. Luego, $p \notin E(T)$. Observe que, dado cualquier $i \in \Lambda$, $p_i \in T - \bigcup_{j \in \Lambda - \{i\}} T_j$ y que, por ende, T_i es una vecindad de p_i en T . Así, $p_i \in E(T) \cap T_i$. Como $E(T) \cap T_i \subset E(T_i) - \{p\} = \{p_i\}$, esto implica que $E(T) \cap T_i = \{p_i\}$. Por tanto, $E(T) = \{p_i : i \in \Lambda\}$ y, por consiguiente, $T - E(T)$ es abierto en G . Esto concluye la prueba. \square

Teorema 1.49 ([23, Proposition 9.5]). *Sea X un continuo no degenerado. Entonces, $\text{ord}(p, X) \leq 2$ para cada $p \in X$ si y solo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Teorema 1.50 ([23, Theorem 9.13]). *Un continuo es una gráfica finita si y solo si cada uno de sus subcontinuos tiene únicamente una cantidad finita de puntos extremos.*

1.5. Dendritas y dendroides

En esta sección, se ha puesto mucho énfasis en detallar las demostraciones de varios de los resultados, dado que la clase de las dendritas es, respecto de la clase de los continuos, el foco de la atención en este trabajo.

Definición 1.51. Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples. Denotamos

$$\mathfrak{D} = \{X : X \text{ es una dendrita y } E(X) \text{ es cerrado en } X\}.$$

Teorema 1.52 ([23, Corollary 10.6]). *Cualquier subcontinuo de una dendrita es una dendrita.*

Teorema 1.53 ([23, Theorem 10.7]). *Sea X un continuo con más de un punto. Entonces, X es una dendrita si y solo cada punto de X es, o bien un punto extremo de X o un punto de corte de X .*

Teorema 1.54 ([23, Theorem 10.10]). *Un continuo dado es una dendrita si y solo si la intersección de cualesquiera dos de sus subconjuntos conexos es conexa.*

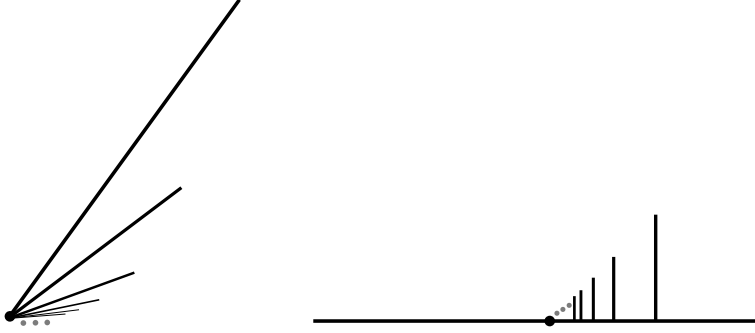


Figura 1.1: Dendritas F_ω y W_0 (en el mismo orden de la imagen).

Teorema 1.55 ([23, Theorem 10.13]). *Un continuo X es una dendrita si y solo, para cualquier $p \in X$, $\text{ord}(p, X)$ coincide con el número de componentes de $X - \{p\}$ siempre que alguna de estas dos cantidades sea finita.*

Para enunciar el teorema siguiente, se requiere de dos dendritas particulares, F_ω y W_0 . Dados dos puntos p y q del plano euclidiano, denotemos por \overline{pq} el segmento de recta que une a p y a q . Considere en el plano euclidiano los puntos $p_0 = (0, 0)$ y $p_n = (1/n, 1/n^2)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Denotamos $F_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{p_0 p_n}$. De manera similar, sea $c = (-1, 0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $a_n = (1/n, 1/n)$ y $b_n = (1/n, 0)$. Sea $W_0 = \overline{cb_1} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{a_n b_n}$ (véase la figura 1.1).

Observación 1.56. *Sea X una dendrita. Entonces, $\text{ord}(p, X) \geq \aleph_0$ si y solo si existe una copia de F_ω contenida en X y que tiene por vértice a p .*

Demostración. Es inmediato que si X contiene una copia Y de F_ω con vértice en p , entonces $\text{ord}(p, X) \geq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (porque $\text{ord}(p, Y) \leq \text{ord}(p, X)$). Así, en tal caso, $\text{ord}(p, X) \geq \aleph_0$. Recíprocamente, supongamos que $\text{ord}(p, X) \geq \aleph_0$. Como $\text{ord}(p, X)$ coincide con el número de componentes de $X - \{p\}$ (Teorema 1.55), existe una colección numerable C_1, C_2, C_3, \dots de componentes de $X - \{p\}$ distintas entre sí. Sea $p_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observe que $C_n \cup \{p\}$ es una dendrita y, por tanto, es arco conexo; en particular existe un arco con puntos extremos p y p_n . Como X es también una dendrita, existe un único arco contenido en X con puntos extremos p y p_n . Así, $[p, p_n] \subset C_n \cup \{p\}$. Por tanto, $[p, p_n] \cap [p, p_m] \subset (C_n \cup \{p\}) \cap (C_m \cup \{p\}) = \{p\}$. Sea $q_n \in [p, p_n]$ tal que $q_n \neq p$ y $[p, q_n] \subset B_d(p, 1/n)$. De este modo, cada par de elementos distintos de la colección $\{[p, q_n] : n \in \mathbb{N}\}$ se intersecta exactamente en el conjunto $\{p\}$. Además $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám}([p, q_n]) = 0$. Por tanto, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [p, q_n]$ es una copia de F_ω contenida en X que tiene a p por vértice. \square

Teorema 1.57 ([4, Theorem 3.3]). *Una dendrita pertenece a la clase \mathfrak{D} si y solo si no contiene copias topológicas de F_ω ni de W_0 .*

Corolario 1.58. *Todos los puntos de cualquier dendrita de la familia \mathfrak{D} son de orden finito.*

Demostración. Si $X \in \mathfrak{D}$, el Teorema 1.57 garantiza que X no contiene copias topológicas de la dendrita F_ω y, por ende, la Observación 1.56 implica que X no contiene puntos de orden mayor o igual que \aleph_0 . \square

Teorema 1.59 ([4, Proposition 6.3 (6.3.2)]). *Si X es una dendrita que no contiene copias topológicas de W_0 , entonces, para cualquier punto $p \in X$ con $\text{ord}(p, X)$ distinto de 1 y distinto de \aleph_0 , existe una vecindad de p en X que es un árbol.*

Definición 1.60. Un continuo X es **unicoherente** si para cualesquiera subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$ se cumple que $A \cap B$ es conexo. Un continuo es **hereditariamente unicoherente** si cada uno de sus subcontinuos es unicoherente.

Definición 1.61. Un **dendroide** es cualquier continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente.

Definición 1.62. Se dice que un continuo X es **únicamente arco conexo** si para cualesquiera $p, q \in X$ distintos existe un único arco contenido en X que va de p a q .

La siguiente es una propiedad muy conocida de las dendritas.

Observación 1.63. *Sea X un continuo. Entonces, X es una dendrita si y solo si es un dendroide localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es una dendrita. Entonces, por el Teorema 1.54, X es hereditariamente unicoherente. Como X es localmente conexo, el Teorema 1.29 garantiza que X es arco conexo. Así, X es un dendroide localmente conexo.

Recíprocamente, supongamos que X es un dendroide localmente conexo. Note que cualquier curva cerrada simple no es unicoherente, puesto que se puede expresar como la unión de dos arcos que se intersectan exactamente en sus extremos y tal intersección no es conexa. Como X es hereditariamente unicoherente, lo anterior implica que X no contiene curvas cerradas simples. Así, X es una dendrita. \square

Observación 1.64. *Sea X un dendroide con más de un punto. Entonces, para cualesquiera $p, q \in X$ distintos, existe un único arco contenido en X que va de p a q . Así, los dendroides, en particular las dendritas, son continuos únicamente arco conexos.*

Demostración. Sean $p, q \in X$ distintos. Supongamos que existen dos arcos α y β contenidos en X y tales que $\alpha \neq \beta$ y cada uno de ellos va de p a q . Puesto que β es el único arco contenido en β que va de p a q , si $\alpha \subset \beta$, entonces $\alpha = \beta$, lo cual no es posible. Así, existe $a \in \alpha - \beta$. Como $p, q \in \beta$, se tiene que $a \neq p$ y $a \neq q$. Luego, $\alpha - \{a\}$ es disconexo y, más aún, existen abiertos U y V de $\alpha - \{a\}$ tales que

$U \cap V = \emptyset$, $\alpha - \{a\} = U \cup V$, $p \in U$ y $q \in V$. Como $\alpha \cap \beta \subset U \cup V$, $p \in \alpha \cap \beta \cap U$ y $q \in \alpha \cap \beta \cap V$, lo anterior implica que $\alpha \cap \beta$ es desconexo. Esto último contradice la unicoherencia del continuo $\alpha \cup \beta$. Por lo tanto, existe un único arco contenido en X que va de p a q . Como las dendritas son dendroides (Observación 1.63), se tiene la segunda parte de la observación. \square

Definición 1.65. Sea X un dendroide. Para cualesquiera puntos $x, y \in X$, denotaremos por $[x, y]$ al único arco que va de x a y . Se dice que X es **suave en un punto** $p \in X$ si, para cada $x \in X$ y para cada sucesión de puntos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X que converge a x , se cumple que $\lim[p, x_n] = [p, x]$. Se dice que X es **suave** si es suave en alguno de sus puntos.

Lema 1.66. Sean X un espacio topológico, A un subconjunto cerrado de X , $p \in X - A$ y $q \in A$. Asuma que existe un arco J que va de p a q . Entonces, existen $r \in J$ y un subarco K de J tales que K va de p a r y $K \cap A = \{r\}$.

Demostración. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow J$ un homeomorfismo tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Sean $t_0 = \inf\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in A\}$, $K = \gamma([0, t_0])$ y $r = \gamma(t_0)$. Como A es cerrado en X , el conjunto $\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in A\} = \gamma^{-1}(A)$ es cerrado en $[0, 1]$ y se tiene, por ende, que $r \in A$; tomando en cuenta que $\gamma(0) = p \notin A$, esto implica que $t_0 > 0$. Además, para cada $t \in [0, t_0)$ se tiene que $\gamma(t) \notin A$. De esta forma, $K - \{q\} = \gamma([0, t_0)) \subset K - A$. Por lo tanto, $K \cap A = \{r\}$ y K es un arco que va de p a r . \square

Lema 1.67. Sean X un dendroide, A un subcontinuo de X y $p \in X$. Entonces, existe un único punto, r , tal que $[p, r] \cap A = \{r\}$. Además, tal punto cumple que $r \in [p, q]$ para cualquier $q \in A$.

Demostración. Sea $q \in A$. Si $A = \{q\}$, entonces $A \cap [p, q] = \{q\}$ y la unicidad es inmediata (puesto que A tiene un único elemento). Supongamos ahora que $p \in A$. Luego, $A \cap [p, p] = \{p\}$ y, si s es tal que $A \cap [p, s] = \{s\}$, entonces $p \in A \cap [p, s] = \{s\}$. De este modo $p = s$ y, por ende, el punto $r = p$ cumple el enunciado del lema. Observe que en los dos casos anteriores, $r \in [p, q]$. Por último, vamos a considerar el caso en el que A tiene más de un punto y $p \notin A$. Luego, el arco $J = [p, q]$ cumple las hipótesis del Lema 1.66, por lo cual existen $r \in [p, q]$ y un arco K contenido en $[p, q]$ tales que K va de p a r y $K \cap A = \{r\}$. Note que $K = [p, r]$, de tal modo que $[p, r] \cap A = \{r\}$. Supongamos que existe $s \in A$ tal que $s \neq r$ y $[p, s] \cap A = \{s\}$. Como A es una dendrita (Teorema 1.52), A es arco conexo y, por ende, $[r, s] \subset A$. Además, $r \in [p, r] \cap [r, s] \subset [p, r] \cap A = \{r\}$ y, de este modo, $[p, r] \cap [r, s] = \{r\}$. Así, $[p, r] \cup [r, s]$ es un arco con puntos extremos p y s y, por consiguiente, $[p, r] \cup [r, s] = [p, s]$. Por lo tanto, $r \in [p, r] \cap A \subset [p, s] \cap A = \{s\}$ y $r = p$, una contradicción. Esto muestra la unicidad de r para este caso.

La segunda parte del lema se desprende del párrafo anterior como sigue. Considere a q y a r como en el párrafo anterior y sea $q' \in A$. Por un argumento totalmente análogo al del párrafo anterior, existe un único punto r' tal que $[p, r'] \cap A = \{r'\}$. Además, tal punto cumple que $r' \in [p, q']$. Por la unicidad de r (o la de r') se tiene que $r = r'$. Así, $r \in [p, q']$. Esto concluye la demostración. \square

Lema 1.68. *Sea X un dendroide. Sean $a, b, p, q \in X$ tales que $[a, b] \cap [p, q] = \emptyset$. Entonces, $[a, p] - ([a, b] \cup [p, q]) \subset [b, q] - ([a, b] \cup [p, q])$.*

Demostración. Sea $t \in [a, p] - ([a, b] \cup [p, q])$. Basta con mostrar que $t \in [b, q]$. Observe que $[a, p] \cap [b, q]$ es un subcontinuo de X y, como está contenido en $[a, p]$, es un arco. Sean e y f los puntos extremos de $[a, p] \cap [b, q]$, elegidos de tal modo que $e \in [a, f]$. Luego, $[e, f] = [a, p] \cap [b, q]$ y $[e, f] \subset [a, f]$. Además, puesto que $f, p \in [a, p]$, se cumple que $[f, p] \subset [a, p]$. Esto implica que $[b, q] \cap [f, p] = [b, q] \cap ([a, p] \cap [f, p]) = [e, f] \cap [f, p] = [a, f] \cap [f, p] = \{f\}$. Por tanto, $[b, q] \cap [f, p] = \{f\}$. Como $f, q \in [b, q]$ se cumple que $[f, q] \subset [b, q]$ y, por ende, que $[f, q] \cap [f, p] = \{f\}$. Así, $[f, q] \cup [f, p]$ es un arco con puntos extremos p y q , es decir, $[f, p] \cup [f, q] = [p, q]$. De este modo, $f \in [p, q]$. De manera análoga, $e \in [a, b]$. Como $t \notin [a, b] \cup [p, q]$, se tiene que $t \notin [a, e] \cup [f, p]$. Por tanto, $t \in [e, f]$. Así, $t \in [b, q]$. \square

Lema 1.69. *Sea X una dendrita. Entonces, la función $\alpha : X \times X \rightarrow C(X)$ dada, para cualesquiera $x, y \in X$, por $\alpha(x, y) = [x, y]$ es continua.*

Demostración. Sean $(x, y) \in X \times X$ y $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $X \times X$ tales que $\lim (x_n, y_n) = (x, y)$. Vamos a probar que $\lim [x_n, y_n] = [x, y]$. Tenemos los dos casos siguientes:

- (i) $x = y$. Sea $\varepsilon > 0$. Luego, existe un abierto U de X conexo y tal que $x \in U \subset B(x, \varepsilon)$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$, entonces $x_n, y_n \in U$. Sea $n \geq N$. Como U es arco conexo (Teorema 1.29), se cumple que $[x_n, y_n] \subset U \subset B(x, \varepsilon)$ y, puesto que $B(x, \varepsilon) = N_d([x, y], \varepsilon)$, se tiene la contención $[x_n, y_n] \subset N_d([x, y], \varepsilon)$. Además, como $x_n \in B_d(x, \varepsilon)$, también $x \in B_d(x_n, \varepsilon) \subset N_d([x_n, y_n], \varepsilon)$. Así, $[x, y] = \{x\} \subset N_d([x_n, y_n], \varepsilon)$. Por lo tanto, si $n \geq N$, entonces $H_d([x, y], [x_n, y_n]) < \varepsilon$. Esto muestra que $\lim [x_n, y_n] = [x, y]$.
- (ii) $x \neq y$. Sea $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}d(x, y))$. Como X es localmente conexo, existen abiertos U y V de X ajenos, conexos y tales que $x \in U \subset B_d(x, \varepsilon)$ y $y \in V \subset B_d(y, \varepsilon)$. Es inmediato que $U \cap V = \emptyset$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in U$ y $y_n \in V$. Sea $n \geq N$. Vamos a mostrar que $H_d([x_n, y_n], [x, y]) < 2\varepsilon$. Note que, como U es arco conexo (Teorema 1.29) y $x, x_n \in U$, se tiene que $[x, x_n] \subset U$. Del mismo modo, $[y, y_n] \subset V$. Por otro lado, puesto que $x_n \in U$, se tiene que $d(x, x_n) < \varepsilon$. Sea $t \in [x, y]$. Si $t \in B_d(x, \varepsilon)$, entonces $d(t, x_n) \leq d(t, x) + d(x, x_n) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ y, por ende, $t \in N_d([x_n, y_n], 2\varepsilon)$. De manera análoga, llegamos a la misma

conclusión si $t \in B_d(y, \varepsilon)$. Consideremos el caso en el que $t \notin B_d(x, \varepsilon) \cup B_d(y, \varepsilon)$. En particular, $t \notin U \cup V$ y, por ende, $t \notin [x, x_n] \cup [y_n, y]$. De este modo, el Lema 1.68 garantiza que $[x, y] - ([x, x_n] \cup [y_n, y]) \subset [x_n, y_n]$. Por tanto, $t \in [x_n, y_n]$. En cualquier caso, $t \in N_d([x_n, y_n], 2\varepsilon)$. Ahora supongamos que $t \in [x_n, y_n]$. Si $t \in B_d(x, \varepsilon) \cup B_d(y, \varepsilon)$, es inmediato que $t \in N_d([x, y], 2\varepsilon)$. Consideremos el caso en el que $t \notin B_d(x, \varepsilon) \cup B_d(y, \varepsilon)$. En particular, $t \notin U \cup V$ y $t \notin [x, x_n] \cup [y, y_n]$. De nuevo por el Lema 1.68, se tiene que $[x_n, y_n] - ([x, x_n] \cup [y_n, y]) \subset [x, y]$. Así, $t \in [x, y]$. En cualquier caso, $t \in N_d([x, y], 2\varepsilon)$. Esto muestra que $[x, y] \subset N_d([x_n, y_n], 2\varepsilon)$ y $[x_n, y_n] \subset N_d([x, y], 2\varepsilon)$. De este modo, $H_d([x, y], [x_n, y_n]) < 2\varepsilon$ para cada $n \geq N$. Por lo tanto, $\lim [x_n, y_n] = [x, y]$ \square

La continuidad de la función α en el Lema 1.69 permite dar una prueba del resultado siguiente, otra propiedad bastante conocida de las dendritas.

Corolario 1.70 ([6, Corollary 4]). *Cualquier dendrita es un dendroide y es suave en cada uno de sus puntos.*

Demostración. Sean X una dendrita y $p \in X$. Por la Observación 1.63, X es un dendroide. Además, por el Lema 1.69 la función $\alpha : X \times X \rightarrow C(X)$, dada por $\alpha(x, y) = [x, y]$ para cualesquiera $x, y \in X$, es continua. Sean $x \in X$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $\lim x_n = x$. Puesto que $\lim (p, x_n) = (p, x)$, se cumple que $\lim \alpha(p, x_n) = \alpha(p, x)$, es decir, $\lim [p, x_n] = [p, x]$. Por lo tanto, X es suave en p . \square

Gracias al Lema 1.67, podemos considerar la función f del lema siguiente.

Lema 1.71. *Sean X una dendrita y $p \in X$. Sea $f : C(X) \rightarrow X$ la función tal que*

$$f(A) \text{ es el \u00fanico punto de } A \text{ que satisface } [p, f(A)] \cap A = \{f(A)\}.$$

Entonces, f es continua.

Demostraci\u00f3n. Sean $A \in C(X)$ y $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesi\u00f3n en $C(X)$ tales que $\lim A_k = A$. Para probar que f es continua, vamos a mostrar que $\lim f(A_k) = f(A)$. Observe primero que, por el Teorema 1.70, X es un dendroide y es suave en cada uno de sus puntos. Consideremos primero el caso en el que $p \in A$. Como $p \in \lim A_k$, existe una sucesi\u00f3n $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim p_k = p$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, $p_k \in A_k$. Luego, por el Lema 1.67, se tiene que $f(A_k) \in [p, p_k]$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Adem\u00e1s, puesto que X es suave en p , se tiene que $\lim [p, p_k] = \{p\}$ y, por ende, que $\lim f(A_k) = p$. Supongamos ahora que $p \notin A$. Sea $q \in A$ y note que $f(A) \in A$. Sean $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sucesiones en X tales que $\lim q_k = q$, $\lim b_k = f(A)$ y $\{q_k, b_k\} \subset A_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Observe que, dado cualquier $k \in \mathbb{N}$, el Lema 1.67 garantiza que $f(A_k) \in [p, q_k] \cap [p, b_k]$. Sea $\{f(A_{k_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ una subsucesi\u00f3n de $\{f(A_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge en X . Sea $q' = \lim f(A_{k_n})$. Puesto que $f(A_{k_n}) \in A_{k_n}$

para cada $n \in \mathbb{N}$, $q' \in \lim A_{k_n} = A$. Además, la suavidad de X en p garantiza que $\lim [p, f(A_{k_n})] = [p, q']$ y $\lim [p, b_k] = [p, f(A)]$. Asimismo, considerando que $f(A_k) \in [p, b_k]$ y (por consiguiente) que $[p, f(A_k)] \subset [p, b_k]$ para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\lim [p, f(A_{k_n})] \subset \lim [p, b_{k_n}] = [p, f(A)]$. De este modo, $[p, q'] \subset [p, f(A)]$ y $q' \in [p, q'] \cap A \subset [p, f(A)] \cap A = \{f(A)\}$; en consecuencia, $f(A) = q'$. Por tanto, toda subsucesión convergente de $\{f(A_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $f(A)$, lo cual implica que $\{f(A_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $f(A)$. Esto muestra que f es continua. \square

1.6. Algunas caracterizaciones de la clase \mathfrak{D}

En esta sección se reúnen algunas caracterizaciones de la clase \mathfrak{D} . Algunas de ellas son conocidas en la literatura anterior a [2], mientras que otras, aunque conocidas, no se establecen explícitamente sino hasta dicho trabajo. Más aún, la equivalencia de la condición (e) con cualquiera de las restantes condiciones del Lema 1.77 parece no tener mención alguna hasta [2].

Dado cualquier continuo X , denotaremos

$$\mathcal{G}(X) = \{x \in X : x \text{ tiene una vecindad } G \text{ en } X \text{ tal que } G \text{ es una gráfica finita}\},$$

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X),$$

$$\mathfrak{F}(X) = \{A \in C(X) : \dim_A C(X) \text{ es finita}\}.$$

Definición 1.72. Sea X un continuo. Si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X , decimos que X es **casi enrejado**. Si X es casi enrejado y tiene una base de vecindades \mathfrak{B} tal que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo para cada $U \in \mathfrak{B}$, entonces X es **enrejado**.

Lema 1.73 ([11, Lemma 3]). *Un continuo X es enrejado si y solo si es casi enrejado y posee un base \mathcal{B} tal que cada $U \in \mathcal{B}$ es abierto en X , es conexo y cumple que $U - \mathcal{P}(X)$ es conexo.*

Teorema 1.74 (caso $n = 1$ de [11, Theorem 4]). *Sean X un continuo localmente conexo y $F \in C(X)$. Entonces, son equivalentes las siguientes condiciones:*

- (a) $F \in \mathfrak{F}(X)$.
- (b) Existe una gráfica finita D contenida en X tal que $F \subset \text{int}_X(D)$.
- (c) $F \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

Teorema 1.75 (caso $n = 1$ de [11, Theorem 5]). *Un continuo localmente conexo es enrejado si y solo si $\mathfrak{F}(X)$ es denso en $C(X)$.*

Teorema 1.76 ([11, Theorem 6]). *La clase de los continuos enrejados contiene a las clases de continuos siguientes: gráficas finitas, \mathfrak{D} y \mathfrak{LD} ; aquí, \mathfrak{LD} denota a la clase de los continuos que poseen una base de vecindades en cada uno de sus puntos cuyos elementos pertenecen a \mathfrak{D} .*

Lema 1.77 ([2, Lemma 2.2]). *Suponga que X es una dendrita. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:*

- (a) X es enrejado.
- (b) No existen puntos de corte de X contenidos en $\mathcal{P}(X)$.
- (c) $X \in \mathfrak{D}$.
- (d) $\text{cl}_{C(X)}(\mathfrak{F}(X)) = C(X)$.
- (e) $X \in \text{cl}_{C(X)}(\mathfrak{F}(X))$.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Probaremos esta implicación por contrarrecíproca. Supongamos que existe $p \in \mathcal{P}(X)$ tal que p es un punto de corte de X . Si X no es casi enrejado, entonces X no es enrejado. Consideremos el caso en el que X es casi enrejado. Sea U una vecindad abierta de p en X . Puesto que p es de corte de X , $X - \{p\}$ es disconexo. Sean V_1 y V_2 abiertos de X ajenos, distintos del vacío y tales que $X - \{p\} = V_1 \cup V_2$. Como $V_2 \subset X - V_1$ y este último conjunto es cerrado en X , se tiene que $\text{cl}_X(V_1) \subset X - V_2$. Note también que $\{p\}$, V_1 y V_2 son conjuntos ajenos entre sí cuya unión es X y que, por ende, $X - V_2 = \{p\} \cup V_1$. Además, puesto que X es conexo y V_1 es un abierto de X con $\emptyset \neq V_1 \neq X$, V_1 no es cerrado en X . Esto implica que $V_1 \subsetneq \text{cl}_X(V_1) \subset X - V_2 = \{p\} \cup V_1$ y, por consiguiente, que $\text{cl}_X(V_1) = \{p\} \cup V_1$. De manera análoga, $\text{cl}_X(V_2) = \{p\} \cup V_2$. En particular, $p \in \text{cl}_X(V_1) \cap \text{cl}_X(V_2)$. Así, $U \cap V_1$ y $U \cap V_2$ son distintos del vacío. Además, estos dos conjuntos son abiertos en X y ajenos, su unión es $U - \{p\}$ y, puesto que X es casi enrejado, cada uno de ellos intersecta a $\mathcal{G}(X)$. De este modo, $(U - \{p\}) \cap \mathcal{G}(X)$ es disconexo. Por otro lado, como $p \notin \mathcal{G}(X)$, se tiene que $(U - \{p\}) \cap \mathcal{G}(X) = U \cap \mathcal{G}(X)$. Por lo tanto, $U \cap \mathcal{G}(X)$ es disconexo. Como U es una vecindad abierta de p arbitraria, el Lema 1.73 garantiza que X tampoco es enrejado en el caso en el que X es casi enrejado.

(b) \Rightarrow (c) Haremos la demostración por contrarrecíproca. Supongamos que $X \notin \mathfrak{D}$. Luego, existe $p \in \text{cl}_X(E(X)) - E(X)$. Note que, por el Teorema 1.53, p es un punto de corte de X . Demostraremos que $p \in \mathcal{P}(X)$. Sea G un subcontinuo de X tal $p \in \text{int}_X(G)$. Observe que p es un punto de acumulación de $E(X)$ y que, en consecuencia, $\text{int}_X(G) \cap E(X)$ es un conjunto infinito. Como $\text{int}_X(G) \cap E(X) \subset E(G)$, esto implica que G posee una cantidad infinita de puntos extremos. De este modo, el Teorema 1.50 garantiza que G no es una gráfica finita. Por lo tanto, p no tiene vecindades en X que son gráficas finitas. Así, p es un punto de corte de X tal que $p \in \mathcal{P}(X)$.

(c) \Rightarrow (a) Se cumple por el Teorema 1.76.

(a) \Leftrightarrow (d) Es un caso especial de [11, Theorem 5].

(d) \Rightarrow (e) Es inmediato.

(e) \Rightarrow (d) Supongamos que $X \in \text{cl}_{C(X)}(\mathfrak{F}(X))$, es decir, que existe una sucesión $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathfrak{F}(X)$ tal que $\lim A_k = X$. Sean $B \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$. Demostraremos

que existe $C \in \mathfrak{F}(X)$ tal que $H_d(B, C) < 2\varepsilon$. Como X es un continuo localmente conexo, podemos asumir que la métrica es convexa (Teorema 1.39). Dado $k \in \mathbb{N}$, sea $C_k = C_d(B, \varepsilon) \cap A_k$. Como $\text{int}_X(C_d(B, \varepsilon)) \neq \emptyset$ y $\lim A_k = X$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $C_k \neq \emptyset$ para cada $k \geq N$. Además, puesto que la métrica de X es convexa, $C_d(B, \varepsilon) \in C(X)$ (Teorema 1.44 (II)). Así, el Teorema 1.54 asegura que C_k es conexo y, puesto que este conjunto es cerrado en X , $C_k \in C(X)$ para cada $k \geq N$. Por tanto, $\{C_k\}_{k \geq N}$ es una sucesión en $C(X)$. De este modo, y considerando que $C(X)$ es compacto, podemos suponer que $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en $C(X)$.

Afirmamos que $\lim C_k = C_d(B, \varepsilon)$. Sea $x \in C_d(B, \varepsilon)$. Como la métrica de X es convexa, $C_d(B, \varepsilon) = \text{cl}_X(\text{int}_X(C_d(B, \varepsilon)))$ (Teorema 1.44 (I)) y, por ende, existe una sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ en $\text{int}_X(C_d(B, \varepsilon))$ tal que $\lim x_m = x$. Dado $m \in \mathbb{N}$, como $x_m \in \lim A_k = X$, existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N_m$, entonces $A_k \cap \text{int}_X(C_d(B, \varepsilon)) \cap B(x_m, d(x, x_m)) \neq \emptyset$. Sean $k_1 = N_1$ y, para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $k_{m+1} = \max\{N_{m+1}, k_m + 1\}$. Dado cualquier $m \in \mathbb{N}$, sea $y_m \in A_{k_m} \cap \text{int}_X(C_d(B, \varepsilon)) \cap B(x_m, d(x, x_m))$. Note que $d(x, y_m) \leq d(x, x_m) + d(x_m, y_m) \leq 2d(x, x_m)$ y que $y_m \in C_{k_m}$. Luego, $0 \leq \lim d(x, y_m) \leq \lim 2d(x, x_m) = 0$ y, por consiguiente, $\lim y_m = x$. Por tanto, $x \in \lim C_{k_m} = \lim C_k$. De este modo, $C_d(B, \varepsilon) \subset \lim C_k$. Además, como cada $k \in \mathbb{N}$ cumple que $C_k \subset C_d(B, \varepsilon)$ y este último conjunto es cerrado en X , tenemos que $\lim C_k \subset C_d(B, \varepsilon)$. Por lo tanto, $\lim C_k = C_d(B, \varepsilon)$.

Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(C_{k_0}, C_d(B, \varepsilon)) < \varepsilon$. Como $H_d(C_d(B, \varepsilon), B) \leq \varepsilon$, se cumple que $H_d(C_{k_0}, B) \leq H_d(C_{k_0}, C_d(B, \varepsilon)) + H_d(C_d(B, \varepsilon), B) < 2\varepsilon$. Por otro lado, puesto que $A_{k_0} \in \mathfrak{F}(X)$, el Teorema 1.74 garantiza que $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. Como $C_{k_0} \subset A_{k_0}$, se tiene que $C_{k_0} \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. Así, de nuevo por el Teorema 1.74, $C_{k_0} \in \mathfrak{F}(X)$. Por tanto, $\mathfrak{F}(X)$ es denso en $C(X)$. \square

1.7. Niveles de Whitney positivos

Definición 1.78. Sean X un continuo y $\mathcal{H} \subset 2^X$. Una **función de Whitney** para \mathcal{H} es una función continua $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:

- (1) para cualesquiera $A, B \in \mathcal{H}$ tales que $A \subsetneq B$, se satisface que $\mu(A) < \mu(B)$.
- (2) $\mu(A) = 0$ si y solo si $A \in \mathcal{H} \cap F_1(X)$.

El siguiente ejemplo muestra que, dado cualquier continuo, siempre existen funciones de Whitney para 2^X y, por tanto, para cualquier subespacio de 2^X .

Ejemplo 1.79 (véase [18, Teorema 5.3]). Sean X un continuo y $D = \{p_1, p_2, \dots\}$ un conjunto numerable y denso en X . Suponga, sin pérdida de generalidad, que $d(p, q) \leq 1$ para cualesquiera $p, q \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mu_n : 2^X \rightarrow [0, 1]$ la función dada por

$$\mu_n(A) = \max\{d(a, p_n) : a \in A\} - \min\{d(a, p_n) : a \in A\}.$$

Entonces, la función $\mu : 2^X \rightarrow [0, 1]$, dada por

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n},$$

es una función de Whitney para 2^X .

Teorema 1.80 ([15, Theorem 16.10]). *Si X es un espacio métrico compacto, entonces cualquier función de Whitney para cualquier subespacio cerrado de 2^X se puede extender a una función de Whitney para 2^X .*

Definición 1.81. Un nivel de Whitney positivo de X (respectivamente, un nivel de Whitney de X) es un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$, en donde μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in (0, \mu(X))$ (respectivamente, $t \in [0, \mu(X)]$). Denotamos

$$\mathfrak{WL}(X) = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ es un nivel de Whitney positivo de } X\}.$$

Es importante notar que, en la definición anterior, el conjunto $\mathfrak{WL}(X)$ incluye los niveles de Whitney positivos de X de cada una de las funciones de Whitney para $C(X)$.

Teorema 1.82 ([15, Theorem 19.9]). *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces, $\mu^{-1}(t)$ es un continuo para cada $t \in [0, \mu(X)]$.*

Observación 1.83. *Sean X un continuo y μ una función de Whitney. Sea Y un subcontinuo de X . Si $t_0 \in [0, \mu(Y)]$, entonces $\mu^{-1}(t_0) \cap C(Y)$ es un nivel de Whitney de X . Si $t_0 \in (0, \mu(Y))$, entonces $\mu^{-1}(t_0) \cap C(Y) \in \mathfrak{WL}(Y)$; equivalentemente, si $\mu^{-1}(t_0) \cap C(Y)$ tiene más de un punto, entonces $\mu^{-1}(t_0) \cap C(Y) \in \mathfrak{WL}(Y)$.*

Demostración. En primer lugar, note que $\mu|_{C(Y)}$ es una función de Whitney para $C(Y)$. Además, $(\mu|_{C(Y)})^{-1}(t_0) = \mu^{-1}(t_0) \cap C(Y)$. De este modo, si $t_0 \in [0, \mu(Y)]$, entonces $\mu^{-1}(t_0) \cap C(Y)$ es un nivel de Whitney de Y ; si $t_0 \in (0, \mu(Y))$, entonces $\mu^{-1}(t_0) \cap C(Y) \in \mathfrak{WL}(Y)$. Para mostrar la última parte de la observación, suponga que existen $A, B \in \mu^{-1}(t_0) \cap C(Y)$ con $A \neq B$. Note que esto último implica que $A \neq Y$ o $B \neq Y$. Luego, $\mu(A) < \mu(Y)$ o $\mu(B) < \mu(Y)$. En cualquier caso, $t_0 < \mu(Y)$. Así, por lo mencionado previamente, se tiene que $\mu^{-1}(t_0) \cap C(Y) \in \mathfrak{WL}(Y)$. \square

Lema 1.84 ([18, Lema 6.8]). *Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Sean $A, B \in C(X)$. Si $A \subset B$ y $t \in [\mu(A), \mu(B)]$, entonces existe $C \in C(X)$ tal que $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) = t$.*

Lema 1.85. *Sean X un continuo localmente conexo con más de un punto, μ una función de Whitney para $C(X)$ y U un abierto de X denso en X y conexo. Sea B un continuo contenido en U . Si $\mu(B) < t_0 < \mu(X)$, entonces existe un continuo A tal que $B \subset A \subset U$ y $\mu(A) = t_0$.*

Demostración. Por el Lema 1.30, existe una sucesión de continuos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $B \subset A_n \subset A_{n+1} \subset U$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\text{cl}_X(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \text{cl}_X(U)$. Note que, por el Lema 1.19, $\lim A_n = \text{cl}_X(U) = X$. Así, por la continuidad de μ , se cumple que $\lim \mu(A_n) = \mu(X)$. Suponga que $\mu(B) < t_0 < \mu(X)$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_N) > t_0$. Así, el Lema 1.84 garantiza que existe un subcontinuo A de X tal que $B \subset A \subset A_N \subset U$ y $\mu(A) = t_0$. \square

Observación 1.86. Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$, $t_0 \in (0, \mu(X))$ y $S, T \in C(X)$ con $S \subset T$. Sean $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t_0)$ y $\mathfrak{M} = \{B \in C(X) : S \subset B \subset T\}$. Entonces, $\mathfrak{M} \cap \mathcal{A}$ tiene al menos un punto si y solo si $\mu(S) \leq t_0 \leq \mu(T)$. Si $\mathfrak{M} \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto, entonces $\mu(S) < t_0 < \mu(T)$. Si T es localmente conexo y $\mu(S) < t_0 < \mu(T)$, entonces $\mathfrak{M} \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto.

Demostración. Si $B \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{A}$, entonces $S \subset B \subset T$ y, por ende, $\mu(S) \leq \mu(B) = t_0 \leq \mu(T)$. Recíprocamente, si $\mu(B) \leq t_0 \leq \mu(T)$, entonces el Lema 1.84 garantiza que $\mathfrak{M} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Esto muestra la equivalencia de la observación.

Suponga que $\mathfrak{M} \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto. Sean $B_1, B_2 \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{A}$ distintos. Luego, $B_1 \not\subset B_2$ o $B_2 \not\subset B_1$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $B_1 \not\subset B_2$. Luego, $B_2 \subsetneq B_1 \cup B_2 \subset T$ y $S \subset B_1 \cap B_2 \subsetneq B_1$. Esto implica que $\mu(B_2) < \mu(T)$ y $\mu(S) < \mu(B_1)$. Por tanto, $\mu(S) < t_0 < \mu(T)$.

Suponga ahora que T es localmente conexo y $\mu(S) < t_0 < \mu(T)$. Es inmediato que $S \subsetneq T$. Luego, por el Teorema 1.9, existe $p \in T - S$ tal que $T - \{p\}$ es conexo. Note que además $T - \{p\}$ es abierto en T . Luego, por el Lema 1.30, existe una sucesión de continuos $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $S \subset B_n \subset B_{n+1} \subset T - \{p\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\text{cl}_X(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \text{cl}_X(T - \{p\}) = T$. Luego, $\lim B_n = T$ (Lema 1.19). Esto implica, por la continuidad de μ , que $\lim \mu(B_n) = \mu(T) > t_0$. En consecuencia, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(B_N) > t_0$. Note que $\mu(S) < t_0$ y $\mu(\{p\}) < t_0$. De este modo, el Lema 1.84 garantiza que existen $B, B' \in C(X)$ tales que $\mu(B) = \mu(B') = t_0$, $S \subset B \subset B_N \subset T - \{p\}$ y $p \in B' \subset T$. Por lo tanto, B y B' son elementos distintos de $\mathfrak{M} \cap \mathcal{A}$. \square

1.8. Funciones de Whitney admisibles

Definición 1.87. Sea X un continuo y sea $\mathcal{H} = 2^X$ o $\mathcal{H} = C(X)$. Una función de Whitney μ para \mathcal{H} es **admisible** si existe una función continua $h : \mathcal{H} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$ que satisface las siguientes condiciones:

- (1) para cada $A \in \mathcal{H}$, se cumple $h(A, 1) = A$ y $h(A, 0) \in F_1(X)$;
- (2) si $A \in \mathcal{H}$ y $t \in [0, 1]$ son tales que $\mu(h(A, t)) > 0$, entonces para cada $s \in [0, t]$ se cumple $\mu(h(A, s)) < \mu(h(A, t))$.

A h se le denomina una **deformación μ -admisibles**.

Los primeros dos resultados que demostramos en esta sección son dos observaciones sencillas acerca del comportamiento de las funciones de Whitney admisibles y de la naturaleza topológica de la propiedad de poseer una función de este tipo.

Observación 1.88. *Sea X un continuo y μ una función de Whitney para \mathcal{H} . Supóngase que μ es admisible. Sea $h : \mathcal{H} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$ una deformación μ -admisibles. Si $h(A, t') \in F_1(X)$ y $t, t' \in [0, 1]$ son tales que $t \leq t'$, entonces $h(A, t) \in F_1(X)$. En particular, $h(F_1(X) \times [0, 1]) \subset F_1(X)$.*

Demostración. Supongamos que existen $A \in \mathcal{H}$ y $t, t' \in [0, 1]$ tales que $t < t'$, $h(A, t') \in F_1(X)$ y $h(A, t) \notin F_1(X)$. Luego, $\mu(h(A, t')) = 0$ y $s > 0$, donde $s = \mu(h(A, t))$. Como $\mu(h(\{A\} \times [t, t']))$ es un subconjunto conexo de \mathbb{R} , es un intervalo. Así, $[0, s] \subset \mu(h(\{A\} \times [t, t']))$. Sean $s'' \in (0, s)$ y $t'' \in [t, t']$ tales que $s'' = \mu(h(A, t''))$. Luego, $\mu(h(A, t)) > 0$, $t < t''$ y $\mu(h(A, t'')) < \mu(h(A, t))$, lo cual contradice el hecho que h es μ -admisibles. \square

El siguiente resultado muestra, entre otras cosas, que la propiedad de poseer una función de Whitney admisible es una propiedad topológica. En tal resultado, así como en su demostración, se denotará por f^* a la función inducida de una función dada $f : X \rightarrow Y$ al hiperespacio $\mathcal{H}(X)$ designado; es decir, para cualquier $A \in \mathcal{H}(X)$, $f^*(A) = f(A)$.

Teorema 1.89. *Sean X y Y continuos homeomorfos y $f : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo. Sea $\mathcal{H}(X) = C(X)$ o $\mathcal{H}(X) = 2^X$. Sea $\mu : \mathcal{H}(X) \rightarrow [0, \infty)$ una función continua y $\omega = \mu \circ f^* : \mathcal{H}(Y) \rightarrow [0, \infty)$. Si μ es una función de Whitney, entonces ω es una función de Whitney; si, además, μ es admisible, entonces ω es admisible.*

Demostración. Supongamos que μ es una función de Whitney. Como f^* es continua, ω es una composición de funciones continuas y, por tanto, ω es continua. Note además que, si B_1 y B_2 son elementos de $\mathcal{H}(Y)$ tales que $B_1 \subsetneq B_2$, entonces $f^*(B_1)$ y $f^*(B_2)$ son elementos de $\mathcal{H}(X)$ que cumplen $f^*(B_1) \subsetneq f^*(B_2)$ y, por ende, $\omega(B_1) = \mu(f^*(B_1)) < \mu(f^*(B_2)) = \omega(B_2)$. Además, dado $B \in \mathcal{H}(X)$, se cumple que $B \in F_1(Y)$ si y solo si $f^*(B) \in F_1(X)$ y esto último ocurre si y solo si $\mu(f^*(B)) = 0$, es decir, si y solo si $\omega(B) = 0$. Así, ω es una función de Whitney para $\mathcal{H}(Y)$.

Supongamos ahora que, además, μ es admisible. Sea $h : \mathcal{H}(X) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}(X)$ una deformación μ -admisibles. Sea $g : \mathcal{H}(Y) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}(Y)$ la función dada por

$$g(B, t) = (f^*)^{-1} \circ h(f^*(B), t)$$

Vamos a mostrar que g es una deformación ω -admisibles. Note primero que g es una composición de funciones continuas y, por ende, es continua. Dado cualquier $B \in \mathcal{H}(Y)$, se cumple que $h(f^*(B), 0) \in F_1(X)$ y así $g(B, 0) \in F_1(Y)$ (porque

f^{-1} preserva cardinalidades); asimismo, $h(f^*(B), 1) = f^*(B)$, por lo cual $g(B, 1) = (f^*)^{-1}(f^*(B)) = B$. Además, dado cualquier $t \in [0, 1]$,

$$\omega(g(B, t)) = \mu \circ f^* \circ (f^*)^{-1} \circ h(f^*(B), t) = \mu \circ h(f^*(B), t)$$

Así, si B y t son tales que $\omega(g(B, t)) > 0$, entonces $\mu(h(f^*(B), t)) > 0$ y, en consecuencia, cada $s \in [0, t)$ satisface

$$\omega(g(B, s)) = \mu(h(f^*(B), s)) < \mu(h(f^*(B), t)) = \omega(g(B, t))$$

Por lo tanto, g es ω -admisibile y ω es admisibile. \square

En el último teorema de esta sección, se establece que todas las funciones de Whitney de cualquier dendrita son admisibles. Para demostrarlo, vamos a requerir de varias funciones auxiliares. La continuidad de dos de estas funciones se demuestra en los siguientes lemas.

Como cualquier dendrita X es un continuo únicamente arco conexo (por las Observaciones 1.63 y 1.64), cualquier subconjunto U de X arco conexo y cualesquiera $x, y \in U$ cumplen que $[x, y] \subset U$. Este hecho se utilizará en repetidas ocasiones en la prueba del siguiente lema.

Lema 1.90. Sean Y_1 y Y_2 continuos. Sea $\theta : C(Y_1) \times C(Y_2) \rightarrow C(Y_1 \times Y_2)$ la función

$$\theta(A, B) = A \times B.$$

Entonces, θ es continua.

Demostración. Como la conexidad y la compacidad se conservan bajo productos, θ está bien definida. Sean d_1 y d_2 las métricas de Y_1 y de Y_2 , respectivamente. Sean $\rho : Y_1 \times Y_2 \rightarrow [0, \infty)$ y $R : (C(Y_1) \times C(Y_2)) \times (C(Y_1) \times C(Y_2))$ las funciones

$$\begin{aligned} \rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}, \\ R((A_1, A_2), (B_1, B_2)) &= \max\{H_{d_1}(A_1, B_1), H_{d_2}(A_2, B_2)\}. \end{aligned}$$

Se sabe que ρ y R son métricas compatibles con las topologías producto de $X \times X$ y $C(X) \times C(X)$, respectivamente.

Supongamos que los elementos (A, B) y (E, F) de $C(Y_1) \times C(Y_2)$ y $\varepsilon > 0$ son tales que $R((A, B), (E, F)) < \varepsilon$. Luego, $A \subset N_{d_1}(E, \varepsilon)$ y $B \subset N_{d_2}(F, \varepsilon)$. Sea $(x, y) \in A \times B$. Sean $z \in E$ y $w \in F$ tales que $d_1(x, z) < \varepsilon$ y $d_2(y, w) < \varepsilon$. Luego, $(z, w) \in E \times F$ y $\rho((x, y), (z, w)) < \varepsilon$. Así, $A \times B \subset N_\rho(E \times F, \varepsilon)$. Del mismo modo se prueba que $E \times F \subset N_\rho(A \times B, \varepsilon)$. Por tanto, $H_\rho(A \times B, E \times F) < \varepsilon$.

El párrafo anterior muestra, en particular, que si $\{(A_n, B_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(Y_1) \times C(Y_2)$ tal que $\lim (A_n, B_n) = (A_0, B_0)$, para algún $(A_0, B_0) \in C(Y_1) \times C(Y_2)$, entonces $\lim (A_n \times B_n) = A_0 \times B_0$. Por lo tanto, θ es continua. \square

Observación 1.91. *Dados un continuo X , una función de Whitney μ para $C(X)$ y cualquier $t_0 \in (0, \mu(X))$, se cumple que $\mu^{-1}(t_0)$ separa a $C(X)$ en dos subconjuntos abiertos (y disjuntos), a saber, $\mu^{-1}([0, t_0])$ y $\mu^{-1}((t_0, \mu(X)))$. Por esta razón, si \mathcal{K} es un subconjunto conexo de $C(X)$ y existen $A, B \in \mathcal{K}$ tales que $\mu(A) \leq t_0$ y $\mu(B) \geq t_0$, entonces existe $D \in \mathcal{K}$ tal que $D \in \mu^{-1}(t_0)$.*

La prueba del siguiente teorema es original de Illanes y Leonel [14] (véase la demostración de [14, Theorem 5.2]). Tanto en el enunciado de este teorema como en su demostración, usaremos la notación $C^p(X) = \{A \in C(X) : p \in A\}$ para cualquier continuo X y cualquier punto $p \in X$.

Teorema 1.92. *Sean X una dendrita, $p \in X$ y μ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces, existe una deformación μ -admisibile h tal que*

1. $h(A, t) \subset A$ para cada $A \in C(X)$ y cada $t \in [0, 1]$.
2. $h(C^p(X) \times [0, 1]) \subset C^p(X)$.

Demostración. Sea $\mu : C(X) \rightarrow [0, \infty)$ una función de Whitney. Antes de especificar la función h , se construirán dos funciones auxiliares, f y g . Fijemos $p \in X$. Por el Lema 1.67, podemos considerar la función $f : C(X) \rightarrow X$ tal que, para cada $A \in C(X)$,

$$f(A) \text{ es el único punto de } A \text{ que satisface } [p, f(A)] \cap A = \{f(A)\}. \quad (1.3)$$

Además, por el Lema 1.71, f es continua. Por otro lado, puesto que $[p, p] \cap A = \{p\}$ para cada $A \in C(X)$ con $p \in A$, f tiene la siguiente propiedad

$$f(A) = p \text{ para cada } A \in C^p(X). \quad (1.4)$$

Sea $g : C(X) \rightarrow [0, 1]$ la función dada, para cada $A \in C(X)$, por

$$g(A) = \sup\{\mu([f(A), a]) : a \in A\}. \quad (1.5)$$

Afirmación 1. g es continua y, para cada $A \in C(X)$, existe $a_0 \in A$ tal que $g(A) = \mu([f(A), a_0])$.

Demostración de la Afirmación 1. Para mostrar que g es continua, vamos a expresarla como la composición de funciones continuas. Sea $\gamma : C(X) \rightarrow C(X) \times C(X)$ la función

$$\gamma(A) = (\{f(A)\}, A)$$

Note que $\gamma = (\phi \circ f, Id_{C(X)})$, donde $\phi : X \rightarrow C(X)$ es la función dada por $\phi(x) = \{x\}$, la cual es continua, por el Lema 1.13. De este modo, γ es la composición de

funciones continuas y, por tanto, es continua. Sean $\theta : C(X) \times C(X) \rightarrow C(X \times X)$ y $\alpha : X \times X \rightarrow C(X)$ las funciones

$$\begin{aligned}\theta(A, B) &= A \times B, \\ \alpha(x, y) &= [x, y].\end{aligned}$$

Por los Lemas 1.90 y 1.69, respectivamente, las funciones θ y α son continuas. Sea $g_0 = \mu \circ \alpha : X \times X \rightarrow [0, \mu(X)]$. Luego, la función inducida por g_0 a $C(X \times X)$, $\hat{g}_0 : C(X \times X) \rightarrow C([0, \mu(x)])$, es continua y

$$\hat{g}_0(D) = \{\mu([x, y]) : (x, y) \in D\},$$

para cada $D \in C(X \times X)$. Así, para cada $A \in C(X)$,

$$\begin{aligned}\sup \circ \hat{g}_0 \circ \theta \circ \gamma(A) &= \sup\{\mu([x, y]) : (x, y) \in \theta(\gamma(A))\} \\ &= \sup\{\mu([x, y]) : (x, y) \in (\{f(A)\}, A)\} \\ &= \sup\{\mu([f(A), a]) : a \in A\}; \\ &= g(A).\end{aligned}$$

Por tanto, $g = \sup \circ \hat{g}_0 \circ \theta \circ \gamma$. Esto prueba que g es continua. Además, como cada $A \in C(X)$ cumple que $\hat{g}_0 \circ \theta \circ \gamma(A)$ es cerrado en $[0, \mu(X)]$ (de hecho, un subcontinuo), se tiene que $g(A) \in \hat{g}_0 \circ \theta \circ \gamma(A)$. Así, existe $a_0 \in A$ tal que $g(A) = \mu([f(A), a_0])$. Esto concluye la demostración de la Afirmación 1.

Sea $h : C(X) \times [0, 1] \rightarrow C(X)$ la función definida por

$$h(A, t) = \{a \in A : \mu([f(A), a]) \leq tg(A)\} \quad (1.6)$$

Afirmación 2. h está bien definida.

Demostración de la Afirmación 2. Sea $(A, t) \in C(X) \times [0, 1]$. Dado $a \in h(A, t)$, cualquier $b \in [f(A), a]$ cumple que $[f(A), b] \subset [f(A), a]$ y, por ende, que $\mu([f(A), b]) \leq \mu([f(A), a]) \leq tg(A)$ y $b \in h(A, t)$; así, $[f(A), a] \subset h(A, t)$. Por tanto, $h(A, t) = \bigcup\{[f(A), a] : a \in h(A, t)\}$ y, como cada $[f(A), a]$ es conexo y contiene a $f(A)$, el conjunto $h(A, t)$ es conexo. Por otro lado, sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $h(A, t)$ (el cual es subconjunto de A) y $a \in A$ tales que $\lim a_n = a$. Como μ es continua y X es suave en cada uno de sus puntos, entonces $\mu([f(A), a]) = \lim \mu([f(A), a_n]) \leq tg(A)$. Así, $a \in h(A, t)$. Esto muestra que $h(A, t)$ es cerrado en A y, por consiguiente, en X . Por tanto, $h(A, t) \in C(X)$ y h es una función.

Observe que, además, h cumple lo siguiente. En primer lugar, es inmediato que

$$h(A, t) \subset A \text{ para cada } A \in C(X) \text{ y cada } t \in [0, 1].$$

Por otro lado, considere cualesquiera $A \in C^p(X)$ y $t \in [0, 1]$. Luego, por (1.4), se tiene que $f(A) = p$. Esta última igualdad implica que $\mu([f(A), p]) = \mu(\{p\}) = 0 \leq tg(A)$ y, por ende, que $p \in h(A, t)$. De este modo,

$$h(C^p(X) \times [0, 1]) \subset C^p(X).$$

De este modo, para concluir esta demostración resta mostrar que la función h es una deformación μ -admisibles. Esto se hará en las siguientes afirmaciones.

Afirmación 3. h es continua.

Demostración de la Afirmación 3. Sean $\{(A'_n, t'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y (A, t) una sucesión y un punto en $C(X) \times [0, 1]$, respectivamente, tales que $\lim(A'_n, t'_n) = (A, t)$. Consideremos una subsucesión $\{(A_k, t_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{(A'_n, t'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{h(A_k, t_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converga a algún $B \in C(X)$. Vamos a probar que $B = h(A, t)$. Sea $b \in B$. Luego, existe una sucesión $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en X tal que $\lim b_k = b$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, $b_k \in h(A_k, t_k)$. Por la continuidad de f , se tiene que $\lim f(A_k) = f(A)$ y, por el Lema 1.69, $\lim[f(A_k), b_k] = [f(A), b]$. De este modo, por la continuidad de μ y de g , se cumple que

$$\mu([f(A), b]) = \mu(\lim [f(A_k), b_k]) = \lim \mu([f(A_k), b_k]) \leq \lim t_k g(A_k) = tg(A).$$

Así, $b \in h(A, t)$. Por tanto, $B \subset h(A, t)$. Recíprocamente, supongamos que $a \in h(A, t)$. Vamos a probar que $a \in B$. Como $h(A, t) \subset A$ y $\lim A_k = A$, existe una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en X tal que $\lim x_k = a$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in A_k$. Dado $k \in \mathbb{N}$, vamos a definir el punto y_k de la siguiente manera. Si $\mu([f(A_k), x_k]) \leq t_k g(A_k)$, entonces sea $y_k = x_k$. Por el contrario, si $t_k g(A_k) < \mu([f(A_k), x_k])$, entonces $\mu(\alpha(f(A_k), f(A_k))) = \mu([f(A_k), f(A_k)]) = 0 \leq t_k g(A_k) < \mu(\alpha(f(A_k), x_k))$; así, el continuo $\alpha(\{f(A_k)\} \times [f(A_k), x_k])$ cumple las hipótesis de la Observación 1.91 con $t_0 = t_k g(A_k)$ y, por consiguiente, existe $y_k \in [f(A_k), x_k]$ tal que $\mu([f(A_k), y_k]) = t_k g(A_k)$. Note que, en cualquier caso, $y_k \in h(A_k, t_k)$. En consecuencia, si $y_k = x_k$ para una cantidad infinita de $k \in \mathbb{N}$, entonces $a \in \liminf h(A_k, t_k) = B$, porque $\lim x_k = a$. Así, podemos suponer que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq N$, entonces $y_k \neq x_k$. Así, para cada $k \geq N$, $\mu([f(A_k), y_k]) = t_k g(A_k)$. En particular, por la continuidad de g ,

$$\lim \mu([f(A_k), y_k]) = \lim t_k g(A_k) = tg(A)$$

Por otro lado, como X es compacto, existen $y \in X$ y una subsucesión $\{y_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{y_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $\lim y_{j_k} = y$. Podemos suponer que $j_k \geq N$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Note que $y \in \liminf h(A_k, t_k) = B$. Además, como $\lim[f(A_{j_k}), x_{j_k}] = [f(A), a]$ y

cada y_{j_k} es elemento de $[f(A_{j_k}), x_{j_k}]$, tenemos que $y \in [f(A), a]$. De este modo, $[f(A), y] \subset [f(A), a]$. Además, por la continuidad de μ y de g ,

$$\mu([f(A), y]) = \mu(\lim [f(A_{j_k}), y_{j_k}]) = \lim \mu([f(A_{j_k}), y_{j_k}])$$

Luego, $\mu([f(A), y]) = tg(A)$. Como $a \in h(A, t)$, $tg(A) \geq \mu([f(A), a])$. Por tanto, $[f(A), y] \subset [f(A), a]$ y $\mu([f(A), y]) \geq \mu([f(A), a])$, lo cual implica que $[f(A), y] = [f(A), a]$. Así, $a = y \in B$. Esto muestra que $h(A, t) \subset B$. Por lo tanto, $B = h(A, t)$. Esto muestra que h es continua.

Afirmación 4. Para cada $A \in C(X)$, $h(A, 1) = A$ y $h(A, 0) = \{f(A)\}$.

Demostración de la Afirmación 4. Por la elección de g , cada $a \in A$ satisface la desigualdad $\mu([f(A), a]) \leq g(A)$ y, por ende, se tiene que $h(A, 1) = \{a \in A : \mu([f(A), a]) \leq g(A)\} = A$. Además, si $a \in A$ es tal que $\mu([f(A), a]) = 0$, entonces $[f(A), a] \in F_1(X)$ y, por ende, $[f(A), a] = \{f(A)\}$ y $a = f(A)$. De este modo, $h(A, 0) = \{a \in A : \mu([f(A), a]) = 0\} = \{f(A)\}$.

Afirmación 5. Si $A \in C(X)$ y $t \in [0, 1]$ son tales que $h(A, t) > 0$, entonces $\mu(h(A, s)) < \mu(h(A, t))$, para cada $s \in [0, t)$.

Demostración de la Afirmación 5. Supongamos que $A \in C(X)$ y $t \in [0, 1]$ son tales que $h(A, t) > 0$. Sea $s \in [0, t)$. Como $sg(A) \leq tg(A)$, se tiene que $\{a \in A : \mu([f(A), a]) \leq sg(A)\} \subset \{a \in A : \mu([f(A), a]) \leq tg(A)\}$, es decir, $h(A, s) \subset h(A, t)$. Si $h(A, s) \subsetneq h(A, t)$, entonces $\mu(h(A, s)) < \mu(h(A, t))$. Supongamos que $h(A, s) = h(A, t)$. Por la Afirmación 1, existe $a_0 \in A$ tal que $\mu([f(A), a_0]) = g(A)$. Como $tg(A) \leq g(A)$, se tiene que $\mu(\alpha(f(A), f(A))) = \mu([f(A), f(A)]) = 0 \leq tg(A) \leq \mu([f(A), a_0]) = \mu(\alpha(f(A), a_0))$; así, el continuo $\alpha(\{f(A)\} \times [f(A), a_0])$ cumple las hipótesis de la Observación 1.91 con $t_0 = tg(A)$ y, por consiguiente, existe $a_1 \in [f(A), a_0]$ tal que $\mu([f(A), a_1]) = tg(A)$. Note que $a_1 \in h(A, t) = h(A, s)$. Así, $\mu([f(A), a_1]) \leq sg(A)$. Por tanto, $tg(A) \leq sg(A)$. Como $s < t$, lo anterior implica que $g(A) = 0$ y, en consecuencia, $h(A, t) = \{a \in A : \mu([f(A), a]) \leq 0\} = h(A, 0)$. Luego, por la Afirmación 4, $h(A, t) = \{f(A)\}$ y, por ende, $\mu(h(A, t)) = 0$. Esto contradice la hipótesis inicial de que $\mu(h(A, t)) > 0$. Por lo tanto, $\mu(h(A, s)) < \mu(h(A, t))$.

Por las Afirmaciones 3, 4, 5 y 6, se tiene que h es μ -admisibles. Esto concluye la demostración de que μ es admisible. \square

Capítulo 2

Subcontinuos libres y s-gráficas

Para aplicar algunos resultados sobre gráfica finitas en el contexto de las dendritas de la clase \mathfrak{D} , vamos a utilizar los conceptos de s-gráfica, s-gráfica libre y s-gráfica fina. El presente capítulo tiene el objetivo de introducir estos conceptos, así como el de establecer y demostrar sus propiedades básicas. Los resultados que se presentan en este se utilizarán repetidamente en los capítulos posteriores.

Antes de proceder con los resultados, conviene tener muy presentes los conceptos de arco libre, arco libre maximal y ciclo, así como la notación $\mathfrak{A}_S(X)$, dados en la sección 1.3.1. Utilizaremos además la siguiente notación. Dados un continuo X y cualquier subespacio A de X , sean

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_S(X, A) &= \{J \in \mathfrak{A}_S(X) : J \cap A \neq \emptyset\}, \\ \mathfrak{A}_S^i(X, A) &= \{J \in \mathfrak{A}_S(X) : J \subset A\}, \\ \mathfrak{A}_S^o(X, A) &= \{J \in \mathfrak{A}_S(X) : J \not\subset A, J \cap A \neq \emptyset\}, \\ \text{St}_f^X(A) &= \bigcup \mathfrak{A}_S(X, A).\end{aligned}$$

Denotaremos $\text{St}_f(A) = \text{St}_f^X(A)$ si no hay posibilidad de confusión o si X es el espacio mayor que se está considerando.

Definición 2.1. Sea X un continuo. Una **s-gráfica** de X es un subespacio conexo G de X tal que $G = \emptyset$, o $G = \{p\}$ para algún $p \in (R(X) \cup E(X)) \cap \mathcal{G}(X)$, o G es la unión de una cantidad finita mayor que cero de elementos de $\mathfrak{A}_S(X)$. En este último caso, decimos que G es no degenerada. Se dice que una s-gráfica G de X distinta del vacío es una **s-gráfica fina** de X (o que es **fina** en X) si G no contiene curvas cerradas simples ni puntos extremos de X .

En algunos trabajos en los cuales X es una gráfica finita, una s-gráfica es llamada una subgráfica y una s-gráfica fina es llamada una subgráfica fina; véase, por ejemplo, [7] y [14].

Definición 2.2. Dado $X \in \mathfrak{D}$, un subcontinuo A de X es un **subcontinuo libre** de X (o **libre** en X) si $A - E(A)$ es abierto en X . Una **s-gráfica libre** de X es una s-gráfica de X que también es un subcontinuo libre de X .

Note que el concepto anterior es una extensión natural del concepto de arco libre.

Observación 2.3. Sea X un continuo localmente conexo. Si J es un arco libre de X , entonces $J \cap E(X) \subset \text{int}_X(J)$.

Demostración. Supongamos que J es un arco libre de X y que existe $p \in J \cap E(X)$. Observe que $p \in E(J)$. Sea q el punto extremo de J distinto de p . Sea U un abierto de X tal que $p \in U$ y $q \notin \text{cl}_X(U)$. Como $p \in E(X)$, existe un abierto V de X tal que $p \in V \subset U$ y $|\text{Fr}_X(V)| = 1$. Sea r tal que $\text{Fr}_X(V) = \{r\}$. Luego, $r \neq p$ y, puesto que $\text{Fr}_X(V) \subset \text{cl}_X(U)$, $r \neq q$. Como $p \in J \cap V$ y $q \in J - V$, la conexidad de J implica que $J \cap \text{Fr}_X(V) \neq \emptyset$. Así, $r \in J - \{p, q\}$. Sea C una componente de $\text{cl}_X(V)$. Luego, C es cerrado en X . Si $r \notin C$, entonces $C \subset V$, por lo cual C es una componente de V y, como X es localmente conexo, C es abierto en X (Teorema 1.3), lo cual contradice la conexidad de X . De este modo, $r \in C$ y C es la única componente de $\text{cl}_X(V)$, es decir, $\text{cl}_X(V)$ es conexo. Vamos a probar que $V \subset J$. Sabemos que $p \in V$. Sea $t \in V$ con $t \neq p$. Por un argumento análogo al usado para hallar V , existe un abierto W de X tal que $p \in W \subset \text{cl}_X(W) \subset V - \{t\}$ y $\text{Fr}_X(W) \subset J - \{p, q\}$. Así, $Z = \text{cl}_X(W) \cup (J - \{q\})$ es un abierto y, puesto que $\text{cl}_X(W) \cup J$ es cerrado, $\text{Fr}_X(Z) = \{q\}$. Como $p \in Z \cap V$ y $q \notin \text{cl}_X(V)$, la conexidad de $\text{cl}_X(V)$ implica que $\text{cl}_X(V) \subset Z$. Así, $t \in V - \text{cl}_X(W) \subset Z - \text{cl}_X(W) \subset (J - \{q\})$. Por tanto, $V \subset J$ y $p \in \text{int}_X(J)$. \square

Lema 2.4 ([2, Lemma 3.1]). Sea $X \in \mathfrak{D}$. Entonces, se cumplen los enunciados siguientes.

- (a) $O(X) \cup R(X) \subset \mathcal{G}(X)$.
- (b) Si $p \in O(X)$, entonces existe $L \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $p \in L - E(L)$.
- (c) Si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces $\text{Fr}_X(J) = J \cap R(X)$ y $J \subset \mathcal{G}(X)$.
- (d) Si G es una s-gráfica libre de X , entonces $\text{Fr}_X(G) = E(G) \cap R(X)$.

Demostración. Observe primero que, por el Corolario 1.58, el orden de cualquier punto de X es finito. Sea $p \in X - E(X) = O(X) \cup R(X)$. Luego, $\text{ord}(p, X) \neq \aleph_0$. Así, por el Teorema 1.59, existe una vecindad T de p que es un árbol. En particular, $p \in \mathcal{G}(X)$ y $\text{ord}(p, T) = \text{ord}(p, X)$. Supongamos, además, que $p \in O(X)$. Luego, $p \in O(T)$ y existe un arco K tal que $K - E(K)$ es un abierto que contiene a p , $K \subset \text{int}_X(T)$ (véase la Observación 1.48). Así, K es un arco libre de X y, por el

Teorema 1.37, existe $L \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $K \subset L$. Puesto que $p \notin E(K)$, se tiene que $p \in L - E(L)$. Por tanto, se cumplen (a) y (b).

(c) Sea J un arco libre de X . Note primero que, por la Observación 2.3, $E(X) \cap J \subset \text{int}_X(J)$. También, es inmediato que $\text{int}_X(J) \subset O(X) \cup E(X)$. Suponga además que $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Si $a \in O(X) \cap J$ entonces, por (b), existe $L \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $a \in L - E(L)$ y, por ende, $J \cap (L - E(L)) \neq \emptyset$. Esto último implica que $J = L$ (Corolario 1.34) y que $a \in \text{int}_X(J)$. De este modo, $J \cap (O(X) \cup E(X)) \subset \text{int}_X(J) \subset O(X) \cup E(X)$. Por lo tanto, $\text{int}_X(J) = J \cap (O(X) \cup E(X))$, es decir, $\text{Fr}_X(J) = J \cap R(X)$. Más aún, por esta última igualdad y (a), se tiene que $J = (J \cap R(X)) \cup \text{int}_X(J) \subset \mathcal{G}(X)$. Esto prueba (c).

Para demostrar el inciso (d), supongamos que G es una s -gráfica libre de X . Como $G - E(G) \subset \text{int}_X(G)$, se tiene que $\text{Fr}_X(G) \subset E(G)$. Suponga que $p \in (E(X) \cup O(X)) \cap G$. Como G es una s -gráfica de X , existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $p \in J$. Puesto que $p \in J - R(X)$, el inciso (c) garantiza que $p \in \text{int}_X(J)$. En particular, $p \in \text{int}_X(G)$. Por lo tanto, $(E(X) \cup O(X)) \cap G \subset \text{int}_X(G)$, es decir, $\text{Fr}_X(G) \subset G - (E(X) \cup O(X)) = G \cap R(X)$. De esta forma, hemos probado que $\text{Fr}_X(G) \subset E(G) \cap R(X)$. Por otro lado, es inmediato que $\text{int}_X(G) \cap R(X) \subset R(G)$; en consecuencia, $E(G) \cap R(X) \cap \text{int}_X(G) \subset E(G) \cap R(G) = \emptyset$ y, por tanto, $E(G) \cap R(X) \subset \text{Fr}_X(G)$. Este prueba que $\text{Fr}_X(G) = E(G) \cap R(X)$. \square

La observación siguiente es una consecuencia inmediata del Lema 2.4 (c).

Observación 2.5. *Sea $X \in \mathfrak{D}$. Entonces, cualquier s -gráfica de X está contenida en $\mathcal{G}(X)$.*

Lema 2.6 ([2, Lemma 3.9]). *Sea $X \in \mathfrak{D}$. Suponga que $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de s -gráficas de X tales que $G_n \subset \text{int}_X(G_{n+1})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = \mathcal{G}(X)$ y $\lim G_n = X$. Además, cada subconjunto cerrado de X que está contenido en $\mathcal{G}(X)$ también está contenido en algún $\text{int}_X(G_n)$.*

Demostración. Sea $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Luego, U es conexo. Además, $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{int}_X(G_n)$ y, por ende, U es abierto en X .

Vamos a mostrar que $\text{Fr}_X(U) \subset \mathcal{P}(X) \subset E(X)$. Suponga que $q \in \text{Fr}_X(U)$. Luego, $q \notin U$. Sea $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en U tal que $\lim q_n = q$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que $q_n \in G_{k(n)}$ y, puesto que $G_{k(n)}$ es una s -gráfica de X , existe $J_n \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $q_n \in J_n \subset G_{k(n)}$. Supongamos que $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{J_n : n \leq N\} = \{J_n : n \in \mathbb{N}\}$. Esto implica que $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup \{G_{k(n)} : n \leq N\} \subset G_K$, en donde $K = \max\{k(n) : n \leq N\}$. Por tanto, $q \in G_K \subset U$, lo cual no es posible. Así, podemos suponer que los elementos de la sucesión $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son distintos por pares. Aplicando 1.36, obtenemos que $\lim J_n = \{q\}$. En consecuencia, $q \in \mathcal{P}(X)$. Por lo tanto,

$$\text{Fr}_X(U) \subset \mathcal{P}(X) \subset E(X), \quad (2.1)$$

en donde la última contención se cumple por el Lema 2.4 (a).

Ahora supongamos que existe $p \in X - \text{cl}_X(U)$. Por el Lema 1.67, existe $q' \in \text{cl}_X(U)$ tal que $[q', p] \cap \text{cl}_X(U) = \{q'\}$. Luego, el conjunto $Y = \text{cl}_X(U) \cup [q', p]$ es un subcontinuo de X que contiene a q' . Como Y es una dendrita y q' es un punto de corte de Y , se tiene que $q' \notin E(Y)$ (Teorema 1.53). En particular, $q' \notin E(X)$. Además, es inmediato que $q' \in \text{Fr}_X(U)$. Así, $q' \in \text{Fr}_X(U) - E(X)$, lo cual contradice (2.1). Por lo tanto, $\text{cl}_X(U) = X$.

Como U es abierto en X , se sigue de lo anterior que $X - \text{Fr}_X(U) = U$. Así, tomando complementos en la primera contención de 2.1, obtenemos que $\mathcal{G}(X) \subset U$. Por otro lado, es claro que $G_n \subset \mathcal{G}(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo cual $U \subset \mathcal{G}(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{G}(X) = U$.

Puesto que $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, se sigue que $\lim G_n = \text{cl}_X(U) = \text{cl}_X(\mathcal{G}(X))$. Como X es casi enrejado (Teorema 1.77), esto implica que $\lim G_n = X$.

Por último, sea A un subconjunto cerrado de X contenido en $\mathcal{G}(X)$. Luego, $\{\text{int}_X(G_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de A y, en consecuencia, existe un conjunto finito $\Lambda \subset \mathbb{N}$ tal que $A \subset \bigcup_{n \in \Lambda} \text{int}_X(G_n)$. Así, $A \subset \text{int}_X(G_N)$, en donde $N = \max \Lambda$. \square

Lema 2.7 ([2, Lemma 3.2]). *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y G un subcontinuo libre de X . Sea K un subcontinuo de G . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- (a) K es libre en G si y solo si K es libre en X .
- (b) Si $K \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces $K \in \mathfrak{A}_S(G)$.
- (c) Si G es una s-gráfica libre de X y $K \in \mathfrak{A}_S(G)$, entonces $K \in \mathfrak{A}_S(X)$.
- (d) Si G es una s-gráfica libre de X no degenerada, entonces

$$\mathfrak{A}_S(G) = \mathfrak{A}_S^i(X, G) = \mathfrak{A}_S(X, \text{int}_X(G)) = \{J \in \mathfrak{A}_S(X) : \text{int}_X(J) \cap G \neq \emptyset\}.$$

Demostración. (a) Observe que $K \cap E(G) \subset E(K)$, por lo cual $K - E(K) \subset G - E(G)$. Además, como G es libre en X , $G - E(G)$ es abierto en X . Así, $K - E(K)$ es abierto en G si y solo si es abierto en X . Por lo tanto, (a) se cumple.

(b) Supongamos que $K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Luego, por (a), K es libre en G . Sea K' un arco libre de G tal que $K \subset K'$. Luego, también por (a), K' es libre en X . Esto implica, por la maximalidad de K en X , que $K = K'$. Por tanto, $K \in \mathfrak{A}_S(G)$.

(c) Supongamos ahora que G es una s-gráfica libre de X y que $K \in \mathfrak{A}_S(G)$. Luego, K es un arco libre de X (por (a)). Sea $p \in K - E(K)$. Luego, $p \in \text{int}_X(K) \cap G$. Como G es una s-gráfica de X , existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $p \in J$. Así, $\text{int}_X(K) \cap J \neq \emptyset$ y, por el Corolario 1.33, $K \subset J$. Como J es un arco libre de G (de nuevo por (a)), la maximalidad de K en G implica que $K = J$. Por lo tanto, $K \in \mathfrak{A}_S(X)$.

(d) La primera igualdad de (d) se sigue de (b) y (c). Veamos las otras igualdades. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Vamos a mostrar que las tres condiciones siguientes son equivalentes: $J \subset G$, $J \cap \text{int}_X(G) \neq \emptyset$ y $\text{int}_X(J) \cap G \neq \emptyset$. Si $J \subset G$, entonces $\text{int}_X(J) \subset G$ y, por consiguiente, $J \cap \text{int}_X(G) \supset \text{int}_X(J) \neq \emptyset$. Si $J \cap \text{int}_X(G) \neq \emptyset$, entonces $J \cap \text{int}_X(G)$ es un abierto de J distinto del vacío y, por ende, un conjunto no numerable; así, en este caso, $\text{int}_X(J) \cap G \supset (J - E(J)) \cap \text{int}_X(G) = (J \cap \text{int}_X(G)) - E(J) \neq \emptyset$. Si $\text{int}_X(J) \cap G \neq \emptyset$, entonces, como G es una s-gráfica de X , existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $K \subset G$ y $K \cap \text{int}_X(J) \neq \emptyset$ y, por ende, el Teorema 1.32 garantiza que $K = J$ y $J \subset G$. Por lo tanto, se cumplen las equivalencias antes mencionadas. Esto muestra las últimas dos igualdades del inciso (d). \square

Lema 2.8 ([2, Lemma 3.3]). *Sean $X \in \mathfrak{D}$, G una s-gráfica libre de X y ν un subconjunto no vacío de G . Entonces son válidas las siguientes afirmaciones.*

- (a) ν es una s-gráfica de G si y solo si ν es una s-gráfica de X .
- (b) ν es una s-gráfica fina de G si y solo si ν es una s-gráfica fina de X y $\nu \subset \text{int}_X(G)$.
- (c) $\text{St}_f(\nu) = \text{St}_f^G(\nu) \cup \text{St}_f(\nu \cap \text{Fr}_X(G))$ y $\text{St}_f^G(\nu) = \text{St}_f(\nu) \cap G$.
- (d) Si ν es una s-gráfica fina de G o $\nu \subset \text{int}_X(G)$, entonces $\text{St}_f^G(\nu) = \text{St}_f(\nu)$.
- (e) Si ν es una s-gráfica fina de G o $\nu \subset \text{int}_X(G)$, entonces

$$\{A \in C(X) : \nu \subset A \subset \text{St}_f(\nu)\} = \{A \in C(G) : \nu \subset A \subset \text{St}_f^G(\nu)\}.$$

Demostración. (a) Considere primero el caso en el que ν es no degenerado. Como $\mathfrak{A}_S(G) = \mathfrak{A}_S^i(X, G)$ (Lema 2.7 (d)) y $\nu \subset G$, se cumple que ν es la unión algunos elementos de $\mathfrak{A}_S(G)$ si y solo si es unión de algunos elementos de $\mathfrak{A}_S(X)$. Así, (a) se cumple en este caso. Consideremos ahora el caso en el que $\nu = \{p\}$, para algún $p \in G$. Note primero que $G \subset \mathcal{G}(X)$ (Observación 2.5). Supongamos que ν es una s-gráfica de G . Luego, $p \in R(G) \cup E(G)$. Si $p \in \text{int}_X(G)$, entonces $p \in R(X) \cup E(X)$. Si $p \in \text{Fr}_X(G)$, entonces, por el Lema 2.4 (d), $p \in R(X)$. De este modo, en cualquier caso, $p \in (R(X) \cup E(X)) \cap \mathcal{G}(X)$. Por lo tanto, ν es una s-gráfica de X .

Recíprocamente, supongamos que ν es una s-gráfica de X . Luego, $p \in R(X) \cup E(X)$. Si $p \in E(G)$, entonces ν es una s-gráfica de G . Si $p \in G - E(G)$, entonces $p \notin E(X)$ y, por ende, $p \in R(X)$. Como $G - E(G) \subset \text{int}_X(G)$, tenemos $p \in R(G)$. Así, en cualquier caso, ν es una s-gráfica de G .

Veamos (b). Supongamos que ν es una s-gráfica fina de G . Por (a), ν es una s-gráfica de X . Claramente, ν no contiene curvas cerradas simples y, como $E(X) \cap G \subset E(G)$, ν tampoco contiene puntos extremos de X . Así, ν es fina en X . Además, $\nu \subset G - E(G) \subset \text{int}_X(G)$. Recíprocamente, supongamos que ν es una s-gráfica fina

de X y $\nu \subset \text{int}_X(G)$. Claramente, ν no contiene curvas cerradas simples y, por (a), ν es una s-gráfica de G . Como $E(G) \cap \text{int}_X(G) \subset E(X)$, tenemos que ν no contiene puntos extremos de G . De este modo, ν es una s-gráfica fina de G .

Veamos (c). Supongamos que $p \in \text{St}_f(\nu)$. Luego, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X, \nu)$ tal que $p \in J$. Si $J \cap \text{int}_X(G) \neq \emptyset$, entonces, por el Lema 2.7 (d), $J \in \mathfrak{A}_S(G)$ y, así, $p \in \text{St}_f^G(\nu)$. Supongamos que $J \cap \text{int}_X(G) = \emptyset$. Luego, $J \cap \nu \subset J \cap G \subset \text{Fr}_X(G)$. Observe que $\text{Fr}_X(G)$ es un subconjunto de $E(G)$ y, por ende, es un conjunto finito. Además, como X es hereditariamente uncoherente (véase el Teorema 1.70), $J \cap G$ es un subcontinuo de X . Así, $J \cap G$ es un continuo finito, es decir, es un conjunto unitario. Como $J \cap \nu \neq \emptyset$, lo anterior implica que $J \cap \nu = J \cap G = J \cap \text{Fr}_X(G)$ y que este conjunto es unitario. De este modo $J \cap \nu \cap \text{Fr}_X(G) \neq \emptyset$ y, por ende, $p \in \text{St}_f(\nu \cap \text{Fr}_X(G))$. Por lo tanto, en cualquier caso, $p \in \text{St}_f^G(\nu) \cup \text{St}_f(\nu \cap \text{Fr}_X(G))$. Recíprocamente, supongamos que $p \in \text{St}_f^G(\nu) \cup \text{St}_f(\nu \cap \text{Fr}_X(G))$. Si $p \in \text{St}_f^G(\nu)$, entonces existe $J \in \mathfrak{A}_S(G, \nu)$ tal que $p \in J$. De este modo, en este caso, el Lema 2.7 (d) garantiza que $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y, por ende, que $p \in \text{St}_f(\nu)$. Además, es inmediato que $\text{St}_f(\nu \cap \text{Fr}_X(G)) \subset \text{St}_f(\nu)$. Por lo tanto, en cualquier caso, $p \in \text{St}_f(\nu)$. Esto prueba la primera igualdad de (c).

Para probar la segunda igualdad de (c), considere $p \in \text{St}_f(\nu) \cap G$. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X, \nu)$ tal que $p \in J$. Siguiendo el párrafo anterior, se tienen los dos casos siguientes: si $J \cap \text{int}_X(G) \neq \emptyset$, entonces $p \in \text{St}_f^G(\nu)$, y si $J \cap \text{int}_X(G) = \emptyset$, entonces $J \cap \nu = J \cap G$. En este último caso, puesto que $p \in J \cap G$, se cumple que $p \in \nu \subset \text{St}_f^G(\nu)$. De este modo, en cualquiera de los dos casos, $p \in \text{St}_f^G(\nu)$. Por lo tanto, $\text{St}_f(\nu) \cap G \subset \text{St}_f^G(\nu)$. Además, se sigue, inmediatamente de la primera igualdad de (c), que $\text{St}_f^G(\nu) \subset \text{St}_f(\nu) \cap G$. Esto prueba la segunda igualdad de (c).

Por último, (d) se sigue de (c) porque, en ambos casos de la hipótesis respectiva, $\nu \cap \text{Fr}_X(G) = \emptyset$ (si ν es una s-gráfica fina de G , entonces $\nu \cap \text{Fr}_X(G) \subset \nu \cap E(G) = \emptyset$). Asimismo, (e) se sigue inmediatamente de (d). \square

Definición 2.9. Sea X un continuo localmente conexo. Dados $p, q \in R(X) \cup E(X)$, decimos que p es **adyacente** a q si existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $E(J) = \{p, q\}$.

Lema 2.10 ([2, Lemma 3.4]). Sean X un continuo localmente conexo y $A \subset \mathcal{G}(X)$. Entonces, se satisfacen las siguientes afirmaciones.

- (a) $A \subset \text{int}_X(\text{St}_f(A))$ y, si $X \in \mathfrak{D}$, entonces $\text{St}_f(A) \subset \mathcal{G}(X)$.
- (b) Si A es cerrado, entonces $\text{St}_f(A)$ es la unión de una cantidad finita de elementos de $\mathfrak{A}_S(X)$.
- (c) Si A es cerrado y $\text{St}_f(A)$ es conexo, entonces $\text{St}_f(A)$ es una s-gráfica de X .
- (d) Si $X \in \mathfrak{D}$ y A es un continuo, entonces $\text{St}_f(A)$ es una s-gráfica libre de X .

- (e) Si $A = \{p_0, p_1, \dots, p_k\}$ es un subconjunto de $R(X)$ tal que cada p_i ($i > 0$) es adyacente a algún p_j con $j < i$, entonces existe una s -gráfica F de X tal que $\text{St}_f(A) = \text{St}_f(F)$ y, por tanto, $\text{St}_f(A)$ es una s -gráfica libre de X .
- (f) Si $X \in \mathfrak{D}$, entonces A es una s -gráfica fina de X si y solo si existe una s -gráfica libre G de X tal que A es una s -gráfica fina de G .
- (g) Si $\mathcal{K} \in C(C(X))$ y $\mathcal{K} \subset \mathfrak{F}(X)$, entonces existe una s -gráfica libre G de X tal que $\mathcal{K} \subset \langle \text{int}_X(G) \rangle \subset \text{int}_{C(X)} C(G)$.

Demostración. Sea $p \in \mathcal{G}(X)$. Antes de demostrar los incisos del lema, vamos a probar que $p \in \text{int}_X(\text{St}_f(p))$. Sea G una gráfica finita contenida en X tal que $p \in \text{int}_X(G)$ y sea $k = \text{ord}(p, G)$. Por la Observación 1.48, existen arcos A_1, \dots, A_k tales que $p \in \bigcap_{i=1}^k E(A_i)$, $A_i \cap A_j = \{p\}$ si $i \neq j$ y $T - \{p_1, \dots, p_k\}$ es abierto en X , en donde $T = \bigcup_{i=1}^k A_i$ y p_i es el punto extremo de A_i distinto de p para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Como $A_j - \{p, p_j\} = (T - \{p_1, \dots, p_k\}) - (\bigcup_{i \neq j} A_i)$, se tiene que $A_j - \{p, p_j\}$ es abierto en $T - \{p_1, \dots, p_k\}$ y, por ende, en X . Así, A_j es un arco libre de X . Por el Teorema 1.37, existe $J_i \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $A_i \subset J_i$. De este modo, $p \in \text{int}_X(\bigcup_{i=1}^k J_i)$. Por otro lado, es claro que $\{J_1, \dots, J_k\} \subset \mathfrak{A}_S(X, p)$. Sea $K \in \mathfrak{A}_S(X, p)$. Luego, $K \cap \text{int}_X(\bigcup_{i=1}^k J_i)$ es un abierto de K distinto del vacío y, en consecuencia, es no numerable. En particular, $(K \cap \text{int}_X(\bigcup_{i=1}^k J_i)) - \{p, p_1, p_2, \dots, p_k\} \neq \emptyset$. Esto implica que alguna $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ cumple que $K \cap (J_{i_0} - E(J_{i_0})) \neq \emptyset$ y, por ende, que $K = J_{i_0}$ (Corolario 1.34). Así, hemos probado que $\mathfrak{A}_S(X, p) \subset \{J_1, \dots, J_k\}$. Por lo tanto, $\mathfrak{A}_S(X, p) = \{J_1, \dots, J_k\}$ y $\text{St}_f(p) = \bigcup_{i=1}^k J_i$. Así, $p \in \text{int}_X(\text{St}_f(p))$ y $\text{St}_f(p)$ es una s -gráfica de X .

Veamos (a). Usando lo obtenido en el párrafo anterior, se obtienen las relaciones $A \subset \bigcup_{p \in A} \text{int}_X(\text{St}_f(p)) \subset \bigcup_{p \in A} \text{St}_f(p) = \text{St}_f(A)$. Por tanto, $A \subset \text{int}_X(\text{St}_f(A))$. Supongamos que $X \in \mathfrak{D}$. Por el Lema 2.4 (c), tenemos que cada elemento de $\mathfrak{A}_S(X)$ está contenido en $\mathcal{G}(X)$. En particular, $\text{St}_f(A) \subset \mathcal{G}(X)$. Esto prueba (a).

Ahora veamos (b) y (c). Supongamos que A es cerrado en X . Supongamos que existe una sucesión $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathfrak{A}_S(X, A)$ distintos entre sí. Dado cualquier $i \in \mathbb{N}$, sea $p_i \in L_i \cap A$. Como $C(X)$ es compacto, existe una subsucesión convergente de $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lim p_i = p$ para algún $p \in X$. Así, por el Teorema 1.36, obtenemos que $\lim L_i = \{p\}$. Por otro lado, como $p \in A \subset \mathcal{G}(X)$, el primer párrafo de esta demostración garantiza que $\text{St}_f(p)$ es una s -gráfica de X y una vecindad de p . Sean $J_1, J_2, \dots, J_k \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $\text{St}_f(p) = \bigcup_{i=1}^k J_k$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $L_i \subset \text{St}_f(p)$ para cada $i \geq N$. Consideremos $i \geq N$. Sea $q \in L_i - E(L_i)$. Luego, $q \in \text{St}_f(p)$ y, por consiguiente, existe $r \in \{1, \dots, k\}$ tal que $q \in J_r$. Como $q \in (L_i - E(L_i)) \cap J_r$, se tiene que $L_i = J_r$ (Corolario 1.34). De este modo, $\{L_i : i \geq N\} \subset \{J_1, \dots, J_k\}$, lo cual contradice el hecho de que los elementos de $\{L_i : i \in \mathbb{N}\}$ son distintos por pares. Esto prueba

que el conjunto $\mathfrak{A}_S(X, A)$ es finito, es decir, que se cumple (b). Además, si $\text{St}_f(A)$ es conexo, entonces $\text{St}_f(A)$ es una s-gráfica de X , lo cual muestra que se cumple (c).

Ahora demostraremos (d). Supongamos que $X \in \mathfrak{D}$ y que A es un continuo. Es inmediato que $\text{St}_f(A)$ es conexo, así que, por (c), $\text{St}_f(A)$ es una s-gráfica de X . Resta mostrar que $\text{St}_f(A)$ es libre en X . Para ello, vamos a probar primero que $\text{St}_f(A) - E(\text{St}_f(A)) \subset \text{int}_X(\text{St}_f(A))$. Por (a), $A \subset \text{int}_X(\text{St}_f(A))$. Supongamos que $p \in (\text{St}_f(A) - E(\text{St}_f(A))) - A$. Luego, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X, A)$ tal que $p \in J$. Supongamos que $K \in \mathfrak{A}_S(X, A)$ es tal que $p \in K$ y $K \neq J$. Observe que $J \cap K$ es un continuo y que es un conjunto finito, por estar contenido en $E(J)$. Además, como X es hereditariamente unicoherente (Teorema 1.70), $J \cap K$ es conexo. Así, $J \cap K$ es un conjunto unitario y, por ende, $J \cap K = \{p\}$. Más aún, $(A \cup J) \cap (A \cup K)$ es un continuo y $(A \cup J) \cap (A \cup K) = A \cup (J \cap K) = A \cup \{p\}$, lo cual implica que $p \in A$, una contradicción. Por tanto, J es el único elemento de $\mathfrak{A}_S(X, A)$ tal que $p \in J$. Luego, $p \in \text{St}_f(A) - \bigcup_{K \in \mathfrak{A}_S(X, A) - \{J\}} K \subset J$ y, como $\mathfrak{A}_S(X, A)$ es finito, esto implica que J es una vecindad de p en $\text{St}_f(A)$. En particular, $\text{ord}(p, J) = \text{ord}(p, \text{St}_f(A))$. De este modo, y puesto que $p \notin E(\text{St}_f(A))$, se tiene $p \in J - E(J)$. Como J es libre en X , $J - E(J)$ es un abierto de X contenido en $\text{St}_f(A)$. Así, $p \in \text{int}_X(\text{St}_f(A))$. Por lo tanto, $\text{St}_f(A) - E(\text{St}_f(A)) \subset \text{int}_X(\text{St}_f(A))$. Como consecuencia de esto, $\text{St}_f(A) - E(\text{St}_f(A)) \subset \text{int}_X(\text{St}_f(A)) - E(\text{St}_f(A))$. Además, es inmediato que $\text{int}_X(\text{St}_f(A)) - E(\text{St}_f(A)) \subset \text{St}_f(A) - E(\text{St}_f(A))$. De este modo, $\text{int}_X(\text{St}_f(A)) - E(\text{St}_f(A)) = \text{St}_f(A) - E(\text{St}_f(A))$. Como $\text{St}_f(A)$ es una gráfica finita, $E(\text{St}_f(A))$ es finito y, por ende, cerrado en X . Así, $\text{St}_f(A) - E(\text{St}_f(A))$ es abierto en X . Esto prueba (d)

(e) Supongamos que $A = \{r_0, \dots, r_k\}$ es un subconjunto de $R(X)$ tal que cada r_i con $i > 0$ es adyacente a algún r_j con $j < i$. Note que, por el Lema 2.4 (a), $A \subset \mathcal{G}(X)$, así que podemos considerar el conjunto $\text{St}_f(A)$. Para cada $i \in \{0, \dots, k\}$, sea $A_i = \{p_0, \dots, p_i\}$. Vamos a mostrar por inducción que para cualquier $i \in \{0, \dots, k\}$ existe una s-gráfica F_i de X tal que $A_i \subset F_i$ y $\text{St}_f(A_i) = \text{St}_f(F_i)$. Para $i = 0$ esto es inmediato, porque A_0 es un continuo y $A_0 \subset R(X) \cap \mathcal{G}(X)$. Supongamos que para algún $i \in \{0, \dots, k-1\}$ existe una s-gráfica F_i de X tal que $A_i \subset F_i$ y $\text{St}_f(A_i) = \text{St}_f(F_i)$. Como p_{i+1} es adyacente a algún p_j tal que $j \leq i$, existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $E(K) = \{p_j, p_k\}$. Note que si $L \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces $L = K$ o $L \cap K \subset \{p_j, p_k\}$. Así, $\text{St}_f(K) \subset \text{St}_f(\{p_j, p_k\}) \subset \text{St}_f(A_0 \cup \{p_k\})$. Sea $F_{i+1} = F_i \cup K$. Es inmediato que F_{i+1} es una s-gráfica de X . Además, $\text{St}_f(F_{i+1}) = \text{St}_f(F_i) \cup \text{St}_f(K) = \text{St}_f(A_i) \cup \text{St}_f(K) = \text{St}_f(A_i \cup \{p_{i+1}\}) = \text{St}_f(A_{i+1})$. Por lo tanto, $\text{St}_f(F_{i+1}) = \text{St}_f(A_{i+1})$, lo cual concluye la inducción. Considerando que $A = A_k$, se tiene que $\text{St}_f(A) = \text{St}_f(F_k)$. De este modo, (d) garantiza que $\text{St}_f(A)$ es una s-gráfica libre de X . Esto prueba (e).

Veamos (f). Supongamos primero que A es una s-gráfica fina de X . Por (d) y (a), el conjunto $G = \text{St}_f(A)$ es una s-gráfica libre y $A \subset \text{int}_X(G)$. Como $A \cap E(G) = (A \cap \text{int}_X(G)) \cap E(G) \subset A \cap E(X)$ y este último conjunto es el conjunto vacío (porque A es fina en X), se tiene que $A \cap E(G) = \emptyset$. Por tanto, A es fina en G . De manera

recíproca, supongamos que G es una s-gráfica libre de X tal que A es una s-gráfica fina de G . Luego, $A \cap E(G) = \emptyset$ y, como $A \cap E(X) = (A \cap G) \cap E(X) \subset A \cap G(X)$, se tiene que $A \cap E(X) = \emptyset$. Por tanto, A es fina en X (nótese que en esta parte de la prueba de (f) no se considera ni utiliza que $A \subset \text{int}_X(G)$).

(g) Note primero que $\bigcup \mathcal{K}$ es un subcontinuo de X (Teorema 1.25). Además, para cada $A \in \mathcal{K}$, se cumple que $A \in \mathcal{F}(X)$ y así, por el Teorema 1.74, $A \subset \mathcal{G}(X)$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{K} \subset \mathcal{G}(X)$. De este modo, por (d) y (a), se tiene que el conjunto $G = \text{St}_f(\bigcup \mathcal{K})$ es una s-gráfica libre de X y que $\bigcup \mathcal{K} \subset \text{int}_X(G)$. Esto último implica que, para cualquier $A \in \mathcal{K}$, $A \subset \bigcup \mathcal{K} \subset \text{int}_X(G)$. Por tanto, $\mathcal{K} \subset \langle \text{int}_X(G) \rangle \subset C(G)$ y, en consecuencia, $\mathcal{K} \subset \text{int}_{C(X)} C(G)$. \square

Capítulo 3

Arcos libres y cubos de Hilbert en niveles de Whitney

Este capítulo tiene dos objetivos principales, ambos relacionados con los niveles de Whitney positivos de los elementos de la clase \mathfrak{D} . El primero de ellos es caracterizar a los arcos libres maximales contenidos en cualquiera de estos niveles. El segundo objetivo es mostrar que ciertos subespacios de cualquiera de estos niveles son cubos de Hilbert. Estos dos resultados nos proporcionarán herramientas muy útiles para las demostraciones de los Teoremas 5.9 y 5.15.

3.1. Arcos libres

Para caracterizar a los arcos libres maximales de los elementos de $\mathfrak{WL}(X)$, en donde $X \in \mathfrak{D}$, utilizaremos que los niveles de Whitney positivos de arcos son arcos y que sus puntos extremos son fácilmente identificables, tal como se expresa en el siguiente lema.

Lema 3.1 ([15, Theorem 31.1]). *Sean X un arco, \mathcal{A} un nivel de Whitney positivo de X y $E(X) = \{p, q\}$. Entonces, \mathcal{A} es un arco y $E(\mathcal{A}) = \{A_p, A_q\}$, en donde A_p y A_q son los únicos elementos de \mathcal{A} tales que $p \in A_p$ y $q \in A_q$.*

Demostración. Vamos a probar el lema para $[0, 1]$. Sean ω una función de Whitney para $C([0, 1])$, $t_0 \in (0, \omega([0, 1]))$ y $\mathcal{B} = \omega^{-1}(t_0)$.

Sea $h : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ la función dada por $h(A) = \min A$. Note que, en general, la función $\min : 2^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua. Así, h es continua. Además, si $h(A) = h(A')$, entonces, puesto que los subcontinuos de $[0, 1]$ son intervalos, existen $b, b' \in [0, 1]$ tales que $A = [h(A), b]$ y $A' = [h(A), b']$. Luego, $A \subset A'$ (si $b \leq b'$) o $A' \subset A$ (si $b' \leq b$). Como $\omega(A) = \omega(A')$, cualquiera de los dos casos anteriores implica que $A = A'$. De este modo, h es inyectiva y, por ende, es un encaje. Por lo

tanto, \mathcal{B} es homeomorfo a un subcontinuo de $[0, 1]$ y, en consecuencia, es un arco o un conjunto unitario.

Como $\omega(\{0\}) = 0 < t_0 < \omega([0, 1])$, existe $A_0 \in \mathcal{B}$ tal que $\{0\} \subsetneq A_0 \subsetneq [0, 1]$ (Lema 1.84). Si $1 \in A_0$, entonces $[0, 1] \subset A_0$, lo cual no es posible. Así, $1 \notin A_0$. Análogamente, existe $A_1 \in \mathcal{B}$ tal que $1 \in A_1$ y $0 \notin A_1$. En particular, \mathcal{A} tiene al menos dos elementos y, por lo obtenido en el párrafo previo, es un arco. Note también que $h(A_0) = 0$.

Sea $B \in \mathcal{B}$ tal que $h(B) = \max h(\mathcal{B})$. Sea $b \in [0, 1]$ tal que $B = [h(B), b]$. Como $h(A_1) \leq h(B)$, se tiene que $B = [h(B), b] \subset [h(A_1), 1] = A_1$ y, puesto que $\omega(B) = \omega(A)$, esto implica que $B = A_1$. Por tanto, $h(A_1) = \max h(\mathcal{B})$.

Como $h(\mathcal{B}) = [0, \max h(\mathcal{B})]$ y h es un encaje, los dos párrafos previos implican que los puntos extremos de \mathcal{B} son A_0 y A_1 . Además, si $A'_0 \in \mathcal{B}$ es tal que $0 \in A'_0$, entonces $h(A'_0) = 0$ y así, como h es inyectiva, $A'_0 = A_0$. Asimismo, si $A'_1 \in \mathcal{B}$ es tal que $1 \in A'_1$, entonces $h(A'_1) \leq h(A_1)$ y $A_1 = [h(A_1), 1] \subset [h(A'_1), 1] = A'_1$ y, como $\omega(A_1) = \omega(A'_1)$, se tiene que $A'_1 = A_1$. Por tanto, A_1 y A_0 son los únicos elementos de \mathcal{B} tales que $0 \in A_0$ y $1 \in A_1$. De este modo, el conjunto $\mathcal{B} = \omega^{-1}(s_0)$ es un arco cuyos puntos extremos son A_0 y A_1 , en donde A_0 y A_1 son los únicos puntos de \mathcal{B} tales que $0 \in A_0$ y $1 \in A_1$.

Ahora demostraremos el lema para X . Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y $s_0 \in (0, \mu(X))$ tales que $\mathcal{A} = \mu^{-1}(s_0)$. Sea $g : [0, 1] \rightarrow X$ un homeomorfismo tal que $g(0) = p$ y $g(1) = q$. Luego, $\omega = \mu \circ \hat{g}$ es una función de Whitney para $C([0, 1])$ (Teorema 1.89), en donde $\hat{g} : C([0, 1]) \rightarrow C(X)$ es la función inducida por g a $C([0, 1])$. Como \hat{g} es un homeomorfismo y $\mathcal{A} = \hat{g}(\omega^{-1}(s_0))$, se tiene que \mathcal{A} es un arco con puntos extremos $\hat{g}(A_0)$ y $\hat{g}(A_1)$. Además, si $A_p \in \mathcal{A}$ es tal que $p \in A_p$, entonces $(\hat{g})^{-1}(A_p)$ es un elemento de \mathcal{B} al que pertenece 0 y, por ende, $(\hat{g})^{-1}(A_p) = A_0$, es decir, $A_p = \hat{g}(A_0)$. Así, $\hat{g}(A_0)$ es el único elemento de \mathcal{A} tal que $p \in \hat{g}(A_0)$. Análogamente, $\hat{g}(A_1)$ es el único elemento de \mathcal{A} tal que $q \in \hat{g}(A_1)$. Por lo tanto, \mathcal{A} es un arco con puntos extremos $\hat{g}(A_0)$ y $\hat{g}(A_1)$ y estos dos puntos son los únicos elementos de \mathcal{A} que contienen a p y a q , respectivamente. \square

Para el siguiente lema, dados X un continuo localmente conexo y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, sea $\mathcal{N}_J = C(J)$, si J es un arco, o $\mathcal{N}_J = \text{cl}_{C(X)}(\langle \text{int}_X(J) \rangle)$, si J es una curva cerrada simple.

Lema 3.2 ([14, Lemma 2.4]). *Sean G una gráfica finita y \mathcal{A} un nivel de Whitney positivo de G . Si \mathcal{L} es un arco libre maximal de \mathcal{A} , entonces existe $J \in \mathfrak{A}_S(G)$ tal que $\mathcal{L} = \mathcal{N}_J \cap \mathcal{A}$.*

Lema 3.3. *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in (0, \mu(X))$. Si J es un arco libre de X tal que $\mu(J) > t_0$, entonces $\mu^{-1}(t_0) \cap C(J)$ es un arco libre de $\mu^{-1}(t_0)$.*

Demostración. Sean p y q los puntos extremos de J . Note que, por la Observación 1.83, $\mu^{-1}(t_0) \cap C(J)$ es un nivel de Whitney positivo de J . Así, por el Lema 3.1, $\mu^{-1}(t_0) \cap C(J)$ es un arco y $E(\mu^{-1}(t_0) \cap C(J)) = \{A_p, A_q\}$, donde A_p y A_q son los únicos puntos de $\mu^{-1}(t_0) \cap C(J)$ que contienen a p y a q , respectivamente. Por otro lado, como J es un arco libre, tenemos que $J - \{p, q\}$ es un abierto de X . Además, $\langle J - \{p, q\} \rangle \cap \mu^{-1}(t_0) = \mu_J^{-1}(t_0) - \{A_p, A_q\}$. Por lo tanto, $\mu^{-1}(t_0) \cap C(J)$ es un arco libre de $\mu^{-1}(t_0)$. \square

Lema 3.4 ([2, Lemma 3.5]). *Sean X un continuo localmente conexo, \mathcal{A} un nivel de Whitney positivo de X y $Y \subset X$. Entonces, $\text{int}_{\mathcal{A}}(\langle Y \rangle \cap \mathcal{A}) = \langle \text{int}_X(Y) \rangle \cap \mathcal{A}$ y $\text{Fr}_{\mathcal{A}}(\langle Y \rangle \cap \mathcal{A}) \cap \langle Y \rangle = \langle Y, \text{Fr}_X(Y) \rangle \cap \mathcal{A}$.*

Demostración. Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in (0, \mu(X))$ tales que $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t_0)$.

Vamos a probar primero que $\langle Y, \text{Fr}_X(Y) \rangle \cap \mathcal{A} \subset \text{Fr}_{\mathcal{A}}(\langle Y \rangle \cap \mathcal{A})$. Para esto, supongamos que $A \in \langle Y, \text{Fr}_X(Y) \rangle \cap \mathcal{A}$. Luego, existe $p \in A \cap \text{Fr}_X(Y)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea U_n un abierto de X conexo tal que $p \in U_n \subset \text{cl}_X(U_n) \subset B_d(p, \frac{1}{n})$. Note que $\lim \text{cl}_X(U_n) = \{p\}$ y que cada $A \cup \text{cl}_X(U_n)$ es un continuo. Como $p \in \text{Fr}_X(Y) \cap A \subset \text{Fr}_X(A)$, tenemos que $U_n \not\subset A$ y, por ende, $A \subsetneq A \cup \text{cl}_X(U_n)$ y $\mu(A \cup \text{cl}_X(U_n)) > t_0$. Como $\lim \mu(\text{cl}_X(U_n)) = \mu(\{p\}) = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $\mu(\text{cl}_X(U_k)) < t_0$. De este modo, para cada $k \geq N$ el Lema 1.84 garantiza que existe $A_k \in \mathcal{A}$ tal que $\text{cl}_X(U_k) \subset A_k \subset A \cup \text{cl}_X(U_k)$. Sea $\{A_{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{A_k\}_{k \geq N}$ tal que $\lim A_{k_l} = B$, para algún $B \in \mathcal{A}$. Luego, $B \subset \lim(A \cup \text{cl}_X(U_{k_l})) = A$ y, por ende, $A = B$. De este modo, $\lim A_{k_l} = A$. Además, dado cualquier $k \geq N$, como $U_k \subset A_k$ y $U_k \not\subset Y$, se tiene que $A_k \notin \langle Y \rangle$. Así, $A \in \text{Fr}_{\mathcal{A}}(\langle Y \rangle \cap \mathcal{A})$. Esto prueba que $\langle Y, \text{Fr}_X(Y) \rangle \cap \mathcal{A} \subset \text{Fr}_{\mathcal{A}}(\langle Y \rangle \cap \mathcal{A})$.

Por el párrafo anterior tenemos que $\text{int}_{\mathcal{A}}(\langle Y \rangle \cap \mathcal{A}) = \langle Y \rangle \cap \mathcal{A} - \text{Fr}_{\mathcal{A}}(\langle Y \rangle \cap \mathcal{A}) \subset \langle Y \rangle \cap \mathcal{A} - \langle Y, \text{Fr}_X(Y) \rangle = \langle \text{int}_X(Y) \rangle \cap \mathcal{A}$. Además, como $\langle \text{int}_X(Y) \rangle \cap \mathcal{A}$ es un abierto de \mathcal{A} contenido en $\langle Y \rangle \cap \mathcal{A}$, se tiene $\langle \text{int}_X(Y) \rangle \cap \mathcal{A} \subset \text{int}_{\mathcal{A}}(\langle Y \rangle \cap \mathcal{A})$. Por lo tanto, se cumple la igualdad $\langle \text{int}_X(Y) \rangle \cap \mathcal{A} = \text{int}_{\mathcal{A}}(\langle Y \rangle \cap \mathcal{A})$. Por último, $\text{Fr}_{\mathcal{A}}(\langle Y \rangle \cap \mathcal{A}) \cap \langle Y \rangle = \langle Y \rangle \cap \mathcal{A} - \text{int}_{\mathcal{A}}(\langle Y \rangle \cap \mathcal{A}) = (\langle Y \rangle \cap \mathcal{A}) - \langle \text{int}_X(Y) \rangle = \langle Y, \text{Fr}_X(Y) \rangle \cap \mathcal{A}$. \square

Teorema 3.5 ([25, Proposition 12]). *Si X es una dendrita y \mathcal{A} es un nivel de Whitney de X , entonces \mathcal{A} es contráctil.*

Lema 3.6. *Sea X una dendrita y \mathcal{A} un nivel de Whitney de X . Entonces, \mathcal{A} no contiene ciclos.*

Demostración. Supongamos que \mathcal{K} es un ciclo de \mathcal{A} . Mostraremos que \mathcal{K} es un retracto de \mathcal{A} . Si $\text{Fr}_{\mathcal{A}}(\mathcal{K}) = \emptyset$, entonces $\mathcal{K} = \mathcal{A}$. Supongamos que $\text{Fr}_{\mathcal{A}}(\mathcal{K}) \neq \emptyset$. Sea $P \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{K} - \{P\}$ es abierto en \mathcal{A} . Luego, $\text{Fr}_{\mathcal{A}}(\mathcal{K}) = \{P\}$, es decir, $\mathcal{K} \cap \text{cl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} - \mathcal{K}) = \{P\}$. Considere la función $r : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ dada por $r(B) = B$ si $B \in \mathcal{K}$, y $r(B) = P$ si $B \in \text{cl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} - \mathcal{K})$. Note que $r|_{\mathcal{K}}$ y $r|_{\text{cl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} - \mathcal{K})}$ son funciones continuas, por lo cual r

es continua. De este modo, r es una retracción de \mathcal{A} en \mathcal{K} . Por lo tanto, \mathcal{K} es un retracto de \mathcal{A} en ambos casos. Puesto que \mathcal{A} es contráctil (Lema 3.5), esto último implica que \mathcal{K} es contráctil. Como \mathcal{K} es homeomorfo a la circunferencia unitaria, se tiene una contradicción. Por lo tanto, \mathcal{A} no contiene ciclos. \square

Teorema 3.7 ([22, Theorem 14.9, Theorem 14.47]). *Sea X un continuo. Entonces, X es localmente conexo si y solo si cada nivel de Whitney positivo de X es localmente conexo.*

Lema 3.8 ([2, Lemma 3.6]). *Sean X una dendrita que no es un arco, \mathcal{A} un nivel de Whitney positivo de X y $B \in \mathcal{A}$. Luego, B tiene una vecindad en \mathcal{A} que es un arco libre de \mathcal{A} si y solo si B tiene una vecindad en X que es un arco libre de X .*

Demostración. Supongamos que existe un arco libre \mathcal{N} de \mathcal{A} tal que $B \in \text{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{N})$. Si existe $p \in B \cap \mathcal{P}(X)$, entonces $C^p(X) \cap \mathcal{A}$ es un cubo de Hilbert (Teorema 3.17) y B es uno de sus elementos. Como esto contradice el hecho de que $B \in \text{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{N})$, se cumple que $B \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$, es decir, que $B \subset \mathcal{G}(X)$. Sea $G = \text{St}_f(B)$. Por el Lema 2.10 (d) y (a), se tiene que G es una s-gráfica libre de X y $B \subset \text{int}_X(G)$. Note que $B \in \langle \text{int}_X(G) \rangle \cap \mathcal{A} \subset C(G) \cap \mathcal{A}$, por lo cual $B \in \text{int}_{\mathcal{A}}(C(G) \cap \mathcal{A})$. Como \mathcal{A} es localmente conexo (Teorema 3.7), existe un abierto \mathcal{U} de \mathcal{A} conexo y tal que $B \in \mathcal{U} \subset \text{cl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}) \subset \langle \text{int}_X(G) \rangle \cap \text{int}_{\mathcal{A}}\mathcal{N}$. Note que $\text{cl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ es un subcontinuo de \mathcal{N} y que, por ende, $\text{cl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ es un arco. Además, $\text{cl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ es libre en \mathcal{N} y, como este último conjunto es libre en \mathcal{A} , el Lema 2.7 (a) asegura que $\text{cl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ es libre en \mathcal{A} . Como $\text{cl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{A} \cap C(G)$, $\text{cl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U})$ es también un arco libre de $\mathcal{A} \cap C(G)$. Luego, por el Teorema 1.37, existe $\mathcal{L} \in \mathfrak{A}_S(\mathcal{A} \cap C(G))$ tal que $\text{cl}_{\mathcal{A}}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{L}$. Como G es una dendrita, el Lema 3.6 garantiza que \mathcal{L} no es un ciclo y, por ende, que es un arco libre maximal de $C(G) \cap \mathcal{A}$. Así, por el Teorema 3.2, existe $J \in \mathfrak{A}_S(G)$ tal que $\mathcal{L} = C(J) \cap \mathcal{A}$. Como G es una s-gráfica libre de X , por el Lema 2.7 (c) se tiene que $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Por otro lado, $B \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{L}$, así que $B \in \text{int}_{\mathcal{A} \cap C(G)}(\mathcal{L})$. Además, por el Lema 3.4, $\text{int}_{\mathcal{A} \cap C(G)}(\mathcal{L}) = \langle \text{int}_G(J) \rangle \cap (C(G) \cap \mathcal{A}) = \langle \text{int}_G(J) \rangle \cap \mathcal{A}$. De este modo, $B \subset \text{int}_X(G) \cap \text{int}_G(J) \subset \text{int}_X(J)$.

Recíprocamente, supongamos que J es un arco libre de X tal que $A \subset \text{int}_X(J)$. Luego, $A \in \langle \text{int}_X(J) \rangle \cap \mathcal{A} \subset \text{int}_{\mathcal{A}}(C(J) \cap \mathcal{A})$ y, por el Lema 3.3, $C(J) \cap \mathcal{A}$ es un arco libre de \mathcal{A} . \square

Teorema 3.9 ([2, Theorem 3.7]). *Sean X una dendrita que no es un arco y \mathcal{A} un nivel de Whitney positivo de X . Entonces,*

$$\mathfrak{A}_S(\mathcal{A}) = \{C(J) \cap \mathcal{A} : J \in \mathfrak{A}_S(X) \text{ y } (C(J) \cap \mathcal{A}) - \{J\} \neq \emptyset\},$$

Demostración. Observe primero que, por el Lema 3.6, cada elemento de $\mathfrak{A}_S(X)$ es un arco. Supongamos que $L \in \mathfrak{A}_S(X)$ es tal que $\mathcal{N}_L - \{L\} \neq \emptyset$, donde $\mathcal{N}_L = C(L) \cap \mathcal{A}$. Luego, por el Lema 3.3, \mathcal{N}_L es un arco libre de \mathcal{A} . Por el Teorema 1.37,

existe $\mathcal{N} \in \mathfrak{A}_S(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{N}_L \subset \mathcal{N}$. Supongamos que $\mathcal{N}_L \neq \mathcal{N}$. Luego, existe $F \in E(\mathcal{N}_L) - E(\mathcal{N})$. Note que $F \in (\mathcal{N} - E(\mathcal{N})) \subset \text{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{N})$. Aplicando el Lema 3.8, obtenemos un arco libre M de X tal que $F \subset \text{int}_X(M)$. Además, si $F \in \text{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{N}_L)$, entonces $F \in \text{int}_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}_L)$ y, por ende, $F \in E(\mathcal{N})$. Como esto último no es posible, se tiene que $F \in \text{Fr}_{\mathcal{A}}(\mathcal{N}_L)$. Por otro lado, puesto que F es un subcontinuo no degenerado de L y $\text{Fr}_X(L)$ es un conjunto finito (por estar contenido en $E(L)$), se tiene que $F \cap \text{int}_X(L) \neq \emptyset$. Así, $\text{int}_X(L) \cap \text{int}_X(M) \neq \emptyset$. Luego, por el Teorema 1.35, $L \cup M$ es un arco libre de X . Como L es un arco libre maximal de X , lo anterior implica que $M \subset L \cup M = L$, $F \subset \text{int}_X(L)$ y $F \in \langle \text{int}_X(L) \rangle \cap \mathcal{A} \subset \text{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{N}_L)$. Esto contradice el hecho de que $F \in \text{Fr}_{\mathcal{A}}(\mathcal{N}_L)$. Por tanto, $\mathcal{N}_L = \mathcal{N} \in \mathfrak{A}_S(\mathcal{A})$.

Supongamos que $\mathcal{N}_0 \in \mathfrak{A}_S(\mathcal{A})$. Sea $B \in \mathcal{N}_0 - E(\mathcal{N}_0) \subset \text{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{N}_0)$. Por el Teorema 3.8, existe un arco libre J de X tal que $B \subset \text{int}_X(J)$. Por el Teorema 1.37, existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $J \subset K$. Luego, $B \in \langle \text{int}_X(K) \rangle \cap \mathcal{A} \subset \text{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{N}_K)$, en donde $\mathcal{N}_K = C(K) \cap \mathcal{A}$. Como $\mathcal{N}_K \in \mathfrak{A}_S(\mathcal{A})$ (por el párrafo previo) y $B \in \text{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{N}_K) \cap \text{int}_{\mathcal{A}}(\mathcal{N}_0)$, por el Corolario 1.34 se tiene $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_K$. Por lo tanto, $\mathcal{N}_0 = C(K) \cap \mathcal{A}$ y, ya que este subespacio de \mathcal{A} es un continuo no degenerado, se tiene $(C(K) \cap \mathcal{A}) - \{K\} \neq \emptyset$. \square

3.2. Cubos de Hilbert

En esta sección vamos a mostrar que algunos subespacios de los elementos de $\mathfrak{W}\mathfrak{L}(X)$, dado $X \in \mathfrak{D}$, son cubos de Hilbert (Teorema 3.17). Para esto, utilizaremos algunos hiperespacios adicionales a los mencionados en las secciones previas. Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$, $t \in [0, \mu(X)]$, $K \in C(X)$ y $p \in X$. Denotamos

$$\begin{aligned} C(X, K) &= \{A \in C(X) : K \cap A \neq \emptyset\}, \\ C^K(X) &= \{A \in C(X) : K \subset A\}, \\ C^K(X, t) &= \mu^{-1}(t) \cap C^K(X). \end{aligned}$$

Cuando K sea un conjunto unitario, se prescindirá de las llaves en la notación anterior, es decir, $C^p(X) = C^{\{p\}}(X)$ y $C^p(X, t) = C^{\{p\}}(X, t)$. Note que $C(X, \{p\}) = C^p(X)$.

Teorema 3.10 (de Lynch, [15, Theorem 66.4]). *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in [0, \mu(X)]$. Si $E \in C(X)$ es tal que $\mu(E) \leq t_0$, entonces $C^E(X, t_0)$ es un retracto absoluto.*

Lema 3.11. *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in [0, \mu(X)]$. Sea $K \in C(X)$ tal que $\mu(K) \leq t_0$. Entonces, $C^K(X, t)$ es un continuo.*

Demostración. Suponga que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $C^K(X, t)$ que converge a algún punto $A \in C(X)$. Como $\mu^{-1}(t_0)$ es cerrado en $C(X)$, se tiene que $A \in \mu^{-1}(t_0)$.

Además, es inmediato que $K \subset A$. Así, $A \in C^K(X, t)$. Por lo tanto, $C^K(X, t)$ es cerrado en $C(X)$ y, por tanto, compacto. Para mostrar que $C^K(X, t)$ es conexo, se puede utilizar el Teorema 3.10, puesto que cualquier retracto absoluto es conexo. \square

Sean X un espacio métrico compacto y A un subconjunto cerrado de X . Decimos que A es un Z -conjunto en X si Id_X es el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas cuyas imágenes no intersectan a A . Decimos que una función continua f entre espacios métricos compactos X_1 y X_2 es una Z -función si $f(X_1)$ es un Z -conjunto en X_2 .

Observación 3.12. *Sea X un espacio métrico. Suponga que A es un Z -conjunto en X y que B es un cerrado de X contenido en A . Entonces, B es un Z -conjunto en X .*

Demostración. Note primero que B es un subconjunto cerrado de X . Por otro lado, puesto que B es un Z -conjunto de X , existe una sucesión de funciones, digamos $\{f_n : X \rightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$, que converge uniformemente a Id_X y tal que $f_n(X) \cap A = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $B \subset A$, se cumple que $f_n(X) \cap B = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, B es un Z -conjunto de X . \square

Teorema 3.13 (de Toruńczyk, [15, Theorem 9.3]). *Sea X un retracto absoluto compacto. Si la función identidad sobre X es el límite uniforme de una sucesión de Z -funciones, entonces X es un cubo de Hilbert.*

Lema 3.14 ([9, Proposition 3.1]). *Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Sea $\mathcal{S} \subset C(X)$ y sea $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow C(C(X))$ una función continua tal que, para cada $B \in \mathcal{S}$, $\sigma(B)$ es un arco ordenado en $C(X)$. Sea $t_0 \in [0, \mu(X)]$ y supóngase que, para cada $B \in \mathcal{S}$, $\sigma(B) \cap \mu^{-1}(t_0) \neq \emptyset$. Entonces, para cada $B \in \mathcal{S}$, $\sigma(B) \cap \mu^{-1}(t_0)$ consiste exactamente de un punto, denotado por $\sigma_{t_0}(B)$, y la función $\sigma_{t_0} : \mathcal{S} \rightarrow \mu^{-1}(t_0)$ es continua.*

Teorema 3.15 (véase [11, Lemma 15]). *Sean X un continuo localmente conexo, R un subconjunto cerrado de $\mathcal{P}(X)$ y $K \in C(X)$ tal que $\text{int}_X(K) \cap R \neq \emptyset$. Entonces, $C^K(X)$ es un Z -conjunto de $C(X, R)$.*

Lema 3.16 ([2, Lemma 2.3]). *Sean X una dendrita y μ una función de Whitney para $C(X)$. Suponga que la métrica de X es convexa y que existe $p \in \mathcal{P}(X)$. Sean $t_0 \in (0, \mu(X))$, $\varepsilon > 0$ y $K = C_d(\{p\}, \varepsilon)$. Entonces, $C^K(X, t_0)$ es un Z -conjunto de $C^p(X, t_0)$.*

Demostración. Antes de iniciar esta demostración, observe que la hipótesis de que la métrica de X es convexa garantiza que la función C_d es continua (Lema 1.43). Sea $\varepsilon > 0$. En primer lugar, el Teorema 1.92 asegura la existencia de una deformación μ -admisibles $h : C(X) \times [0, 1] \rightarrow C(X)$ tal que

(I) $h(A, t) \subset A$ para cada $A \in C(X)$ y cada $t \in [0, \mu(X)]$.

(II) $h(C^p(X) \times [0, 1]) \subset C^p(X)$.

Dado $s' \in (0, 1)$, sea $\lambda_{s'} = \inf\{\mu(C_d(h(B, s), \varepsilon)) : B \in \mu^{-1}(t_0), s \in [s', 1]\}$. Afirmamos que existe $s_0 \in (0, 1)$ tal que $\lambda_{s_0} > t_0$. Supongamos que esto no es así. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_{1-\frac{1}{n}} \leq t_0$; así, por la continuidad de las funciones μ , C_d y h y por la compacidad de $\mu^{-1}(t_0)$ y $[1 - \frac{1}{n}, 1]$, existen $s_n \in [1 - \frac{1}{n}, 1]$ y $D_n \in \mu^{-1}(t_0)$ tales que $\mu(C_d(h(D_n, s_n), \varepsilon)) \leq t_0$. Note que $\lim s_n = 1$ y que, como $C(X)$ es compacto, existe una subsucesión convergente $\{D_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $D = \lim D_{n_k}$. Luego, aplicando límites sobre las sucesiones $\{D_{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{s_{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ en la desigualdad anterior, tenemos que $\mu(C_d(D, \varepsilon)) = \mu(C_d(h(D, 1), \varepsilon)) \leq t_0$. Sin embargo, como $\mu^{-1}(t_0)$ es cerrado, se tiene la igualdad $\mu(D) = t_0$. Esto implica que $D \neq X$ y, en consecuencia, que $D \subsetneq C_d(D, \varepsilon)$ y $\mu(C_d(D, \varepsilon)) > t_0$. Esta contradicción muestra que existe $s_0 \in (0, 1)$ tal que $\lambda_{s_0} > t_0$. Para abreviar, sea $\lambda = \lambda_{s_0}$. Así

$$t_0 < \lambda \leq \mu(C_d(h(B, s), \varepsilon)) \text{ para cualesquiera } B \in \mu^{-1}(t_0) \text{ y } s \in [s', 1]. \quad (3.1)$$

Como h es uniformemente continua, existe $\nu > 0$ tal que, para cualesquiera $B_1, B_2 \in C(X)$ y $t_1, t_2 \in [0, 1]$,

$$\text{si } d(B_1, B_2) + |t_1 - t_2| < \nu, \text{ entonces } H_d(h(B_1, t_1), h(B_2, t_2)) < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Fijemos $s \in (\max\{1 - \nu, s_0\}, 1)$. Luego, puesto que $s < 1$, cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$ cumple que $\mu(h(B, s)) < \mu(h(B, 1)) = t_0$. Como $\mu^{-1}(t_0)$ es compacto, lo anterior implica que $\xi < t_0$, en donde $\xi = \sup\{\mu(h(B, s)) : B \in \mu^{-1}(t_0)\}$. Así,

$$\mu(h(B, s)) \leq \xi < t_0 \text{ para cada } B \in \mu^{-1}(t_0). \quad (3.3)$$

Dado que μ es uniformemente continua, existe $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que si $H_d(A_1, A_2) < \delta$, entonces $|\mu(A_1) - \mu(A_2)| < \min\{\frac{1}{2}(\lambda - t_0), \frac{1}{2}(t_0 - \xi)\}$. Al igual que en la demostración del Teorema 3.15, existe una función continua $g : C^p(X) \rightarrow C^p(X) - C^K(X)$ tal que, para cualesquiera $A, B \in C^p(X)$,

$$\text{si } A \subset B, \text{ entonces } H_d(A, g(A)) < \delta \text{ y } g(A) \subset g(B). \quad (3.4)$$

Así,

$$-\frac{1}{2}(\lambda - t_0) < \mu(g(A)) - \mu(A) < \frac{1}{2}(t_0 - \xi) \text{ para cada } A \in C^p(X). \quad (3.5)$$

Por tanto, para cada $B \in C^p(X, t_0)$, las desigualdades de (3.1) y (3.5) implican que $t_0 < \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}t_0 = \lambda - \frac{1}{2}(\lambda - t_0) \leq \mu(C_d(h(B, s), \varepsilon)) - \frac{1}{2}(\lambda - t_0) < \mu(g(C_d(h(B, s), \varepsilon)))$; análogamente, las desigualdades de (3.3) y (3.5) garantizan que $t_0 > \frac{1}{2}t_0 + \frac{1}{2}\xi =$

$\frac{1}{2}(t_0 - \xi) + \xi > \mu(g(h(B, s))) - \mu(h(B, s)) + \xi \geq \mu(g(h(B, s)))$. De este modo, para cada $B \in C^p(X, t_0)$,

$$\mu(g(h(B, s))) < t_0 < \mu(g(C_d(h(B, s), \varepsilon))). \quad (3.6)$$

Además, puesto que $1 - \nu < s < 1$, reemplazando $B_1 = B_2 = B$, $t_1 = s$ y $t_2 = 1$ en (3.2) se obtiene que

$$H_d(h(B, s), B) < \varepsilon \text{ para cada } B \in C(X) \quad (3.7)$$

Considere la función $\sigma : C^p(X) \rightarrow C(C^p(X))$, dada por

$$\sigma(B) = \{g(C_d(h(B, s), r)) : r \geq 0\}.$$

Observe que se cumple la igualdad $\sigma(B) = (g \circ C_d)^* (\{h(B, s)\} \times [0, \text{diám}(X)])$, en donde $(g \circ C_d)^* : C(C(X) \times [0, \text{diám}(X)]) \rightarrow C(C(X))$ es la respectiva función inducida por $g \circ C_d$. Puesto que $(g \circ C_d)^*$ es continua (Corolario 1.16), se tiene que σ es una función continua. Por otro lado, por la monotonía de C_d y de g , $\sigma(B)$ es un arco ordenado y, por (II) y por la elección de g , cada uno de sus elementos contiene a p . Además, por (3.6), cada $B \in C^p(X, t_0)$ cumple que $\sigma_{t_0}(B) \cap \mu^{-1}(t_0) \neq \emptyset$. Luego, σ cumple las hipótesis del Lema 3.14, así que la función $\sigma_{t_0} : C^p(X, t_0) \rightarrow C^p(X, t_0)$, que a cada $B \in C^p(X)$ le asigna el único punto de $\sigma(B) \cap \mu^{-1}(t_0)$, es una función continua. Sea $r_B \geq 0$ tal que $\sigma_{t_0}(B) = g(C_d(h(B, s), r_B))$. Tomando en cuenta que $g(C^p(X)) \subset C^p(X) - C^K(X)$, la igualdad anterior asegura que $\sigma_{t_0}(B) \notin C^K(X)$. Así, $\sigma_{t_0}(C^p(X, t_0)) \subset C^p(X, t_0) - C^K(X, t_0)$. Además, por (3.6), se tiene que $0 < r_B < \varepsilon$. Aplicando la desigualdad triangular, luego (3.4) y (3.7), y, por último, la desigualdad anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned} H_d(\sigma_{t_0}(B), B) &\leq H_d(\sigma_{t_0}(B), C_d(h(B, s), r_B)) + H_d(C_d(h(B, s), r_B), h(B, s)) \\ &\quad + H_d(h(B, s), B) \\ &< \delta + r_B + \varepsilon < 3\varepsilon \end{aligned}$$

para cada $B \in C^p(X, t_0)$. Esto prueba que la función identidad de $C^p(X, t_0)$ es el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas cuyas imágenes no intersectan a $C^K(X, t_0)$, es decir, que $C^K(X, t_0)$ es un Z-conjunto de $C^p(X, t_0)$. \square

Teorema 3.17 ([2, Theorem 2.6]). *Sean X una dendrita, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in (0, \mu(X))$. Suponga que existe $p \in \mathcal{P}(X)$. Entonces, $C^p(X, t_0)$ es un cubo de Hilbert.*

Demostración. Por el mismo argumento dado al principio de la prueba del Lema 3.16, podemos asumir que C_d es continua. Como $C^p(X, t_0)$ es un continuo (Lema 3.11) y es un retracto absoluto (Teorema 3.10), el Teorema 3.13 garantiza que basta mostrar

que la función identidad de $C^p(X, t_0)$ es el límite uniforme de una sucesión de Z -funciones para concluir que $C^p(X, t_0)$ es un cubo de Hilbert. Para hacer esto último, sea $\varepsilon > 0$. De acuerdo con la demostración del Lema 3.16, existen una deformación μ -admisibles $h : C(X) \times [0, 1] \rightarrow C(X)$, $s \in (0, 1)$ y un número real λ tales que tal que

(I) $h(A, t) \subset A$ para cada $A \in C(X)$ y cada $t \in [0, 1]$.

(II) $h(C^p(X) \times [0, 1]) \subset C^p(X)$.

(III) $t_0 < \lambda \leq \mu(C_d(h(B, s), \varepsilon))$ para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$,

(IV) $H_d(B, h(B, s)) < \varepsilon$ para cada $B \in C(X)$.

((I) y (II) son los incisos respectivos de la demostración del Lema 3.16; (III) y (IV) son 3.1 y 3.7 de dicha prueba). Por otro lado, puesto que $s < 1$ y h es admisible, se tiene que $\mu(h(B, s)) < t_0$ para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Como $\mu^{-1}(t_0)$ es compacto, esto implica que $\xi < t_0$, en donde $\xi = \sup\{\mu(h(B, s)) : B \in \mu^{-1}(t_0)\}$. Luego,

$$\mu(h(B, s)) \leq \xi < t_0, \text{ para cada } B \in \mu^{-1}(t_0). \quad (3.8)$$

Por otro lado, (3.8) y (III) implican que

$$\mu(h(B, s)) < t_0 < \mu(C_d(h(B, s), \varepsilon)), \text{ para cada } B \in \mu^{-1}(t_0). \quad (3.9)$$

Considere la función $\sigma : \mu^{-1}(t_0) \rightarrow C(\mu^{-1}(t_0))$, dada por

$$\sigma(B) = \{C_d(h(B, s), t) : t \geq 0\}.$$

Note que se cumple la igualdad $\sigma(B) = C_d^*(\{h(B, s)\} \times [0, \text{diám}(X)])$, en donde $C_d^* : C(C(X) \times [0, \text{diám}(X)]) \rightarrow C(C(X))$ es la respectiva función inducida por C_d . Puesto que C_d^* es continua (Corolario 1.16), se tiene que σ es una función continua. Por otro lado, por la monotonía de C_d , $\sigma(B)$ es un arco ordenado. Además, por (3.9), cada $B \in C^p(X, t_0)$ cumple que $\sigma_{t_0}(B) \cap \mu^{-1}(t_0) \neq \emptyset$. Así, σ cumple las hipótesis del Lema 3.14 y, por consiguiente, la función $\sigma_{t_0} : \mu^{-1}(t_0) \rightarrow \mu^{-1}(t_0)$, que a cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$ le asigna el único punto de $\sigma(B) \cap \mu^{-1}(t_0)$, es continua.

Dado $B \in \mu^{-1}(t_0)$, sea $t_B \geq 0$ tal que $\sigma_{t_0}(B) = C_d(h(B, s), t_B)$. Note que, por (3.9), $t_B > 0$. Luego, $h(B, s) \subset N_d(h(B, s), t_B) \subset \text{int}_X(\sigma_{t_0}(B))$. Además, por (I), se tiene que $h(B, s) \subset B$. Así,

$$h(B, s) \subset \text{int}_X(\sigma_{t_0}(B)) \cap B \text{ para cada } B \in \mu^{-1}(t_0); \quad (*)$$

Más aún, si $B \in C^p(X, t_0)$, entonces se tiene por (II) que $p \in h(B, s)$, por lo cual la contención de (*) implica que

$$p \in \text{int}_X(\sigma_{t_0}(B)), \text{ para cada } B \in C^p(X, t_0). \quad (**)$$

((*) y (**)) serán usados más adelante, en la pruebas del Lema 5.14 y del Teorema 5.15). En particular, $\sigma_{t_0}(C^p(X, t_0)) \subset C^p(X, t_0)$.

Por otro lado, como $\mu^{-1}(t_0)$ y $\mu^{-1}([0, \xi])$ son subconjuntos de $C(X)$ compactos y ajenos, se tiene que $\gamma > 0$, donde

$$\gamma = \inf \{H_d(B_1, B_2) : B_1 \in \mu^{-1}(t_0), B_2 \in \mu^{-1}([0, \xi])\}.$$

Así, y puesto que $h(B, s) \in \mu^{-1}([0, \xi])$ (por la primera desigualdad de (3.8)) y $\sigma_{t_0}(B) \in \mu^{-1}(t_0)$, se cumple que $H_d(h(B, s), C_d(h(B, s), t_B)) \geq \gamma$ para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Por tanto, cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$ satisface que $t_B \geq \gamma > 0$. Sea $K = C_d(\{p\}, \gamma)$. Dado cualquier $A \in C^p(X, t_0)$, se tiene $p \in h(B, s)$ y, por ende, que $K \subset \sigma_{t_0}(A)$. Así, $\sigma_{t_0}(C^p(X, t_0)) \subset C^K(X, t_0)$. Además, por el Lema 3.16, $C^K(X, t_0)$ es un Z-conjunto de $C^p(X, t_0)$. Como $\sigma_{t_0}(C^p(X, t_0))$ es un subconjunto cerrado de $C^p(X, t_0)$ (por ser la imagen continua de un compacto), esto implica que $\sigma_{t_0}(C^p(X, t_0))$ es un Z-conjunto. Por tanto, $\sigma_{t_0}|_{C^p(X, t_0)} : C^p(X, t_0) \rightarrow C^p(X, t_0)$ es una Z-función. Además, por (3.9) y por la monotonía de las funciones C_d y μ , se tiene que $t_B < \varepsilon$. Aplicando la desigualdad triangular seguida de (iv) y de la desigualdad anterior, se tiene que

$$H_d(\sigma_{t_0}(B), B) \leq H_d(\sigma_{t_0}(B), h(B, s)) + H_d(h(B, s), B) < t_B + \varepsilon < 2\varepsilon, \quad (\dagger)$$

para cada $B \in C^p(X, t_0)$. Esto muestra que la función identidad de $C^p(X, t_0)$ es el límite uniforme de una sucesión de Z-funciones. Por lo tanto, $C^p(X, t_0)$ es un cubo de Hilbert. \square

Lema 3.18. *Sean X un continuo, μ una función de Whitney para $C(X)$. Suponga que p es un punto de corte de X . Entonces, existe $t_0 \in (0, \mu(X))$ tal que cada $B \in C(X)$ con $\mu(B) \geq t_0$ satisface que $p \in B$.*

Demostración. Como p es un punto de corte de X , existen abiertos U y V de $X - \{p\}$ distintos del vacío y tales que $X - \{p\} = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego, $\text{cl}_X(U) = U \cup \{p\}$, $\text{cl}_X(V) = V \cup \{p\}$ y ambos conjuntos son continuos. Note también que $\mu(U \cup \{p\}) < \mu(X)$ y $\mu(V \cup \{p\}) < \mu(X)$. Sea t_0 tal que $\max\{\mu(U \cup \{p\}), \mu(V \cup \{p\})\} < t_0 < \mu(X)$. Sea $B \in C(X)$ tal que $\mu(B) \geq t_0$. Luego, $B \not\subset U \cup \{p\}$, es decir, $B \cap V \neq \emptyset$. Análogamente, $B \cap V \neq \emptyset$. Como B es conexo, lo anterior implica que $B \not\subset U \cup V$, es decir, que $p \in B$. Por lo tanto, $p \in B$ para cada $B \in C(X)$ con $\mu(B) \geq t_0$. \square

Corolario 3.19 ([2, Corollary 2.7]). *Sean X una dendrita y μ una función de Whitney para $C(X)$. Suponga que $X \notin \mathfrak{D}$. Entonces existe $t_0 \in (0, \mu(X))$ tal que para cada $t \in [t_0, \mu(X))$ se cumple que $\mu^{-1}(t)$ es un cubo de Hilbert.*

Demostración. Por el Lema 1.77, existe $p \in \mathcal{P}(X)$ tal que p es un punto de corte de X . Esto implica, por el Lema 3.18, que existe $t_0 \in (0, \mu(X))$ tal que para cualesquiera $t \in [t_0, \mu(X))$ y $B \in \mu^{-1}(t)$ se tiene que $p \in B$. Así, para cada $t \in [t_0, \mu(X))$ se tiene que $\mu^{-1}(t) = C^p(X, t)$, el cual, por el Teorema 3.17, es un cubo de Hilbert. \square

Corolario 3.20 ([2, Corollary 2.8]). *Sean X una dendrita y $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$. Entonces,*

$$\{B \in \mathcal{A} : \dim_B \mathcal{A} < \infty\} = \mathfrak{F}(X) \cap \mathcal{A}.$$

Demostración. Si $C \in \mathfrak{F}(X) \cap \mathcal{A}$, entonces $\dim_C \mathcal{A} \leq \dim_C C(X) < \infty$. Recíprocamente, supongamos que $B \in \mathcal{A}$ cumple que $\dim_B \mathcal{A} < \infty$. Si existe $p \in B \cap \mathcal{P}(X)$, entonces $B \in C^p(X, t_0)$ y, como este último conjunto es un cubo de Hilbert contenido en \mathcal{A} , tenemos que $\dim_B \mathcal{A} = \infty$. Como esto no es posible, concluimos que $B \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. Aplicando el Teorema 1.74, obtenemos que $B \in \mathfrak{F}(X)$. Así, se cumple la igualdad del corolario. \square

3.3. Caracterización de \mathfrak{D} usando $\mathfrak{WL}(X)$

Como primera aplicación importante del Teorema 3.17, tenemos la siguiente caracterización de los elementos de la clase \mathfrak{D} en la clase de las dendritas.

Teorema 3.21 ([2, Theorem 2.9]). *Sea X una dendrita. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (a) X es un elemento de \mathfrak{D} .
- (b) Para cada $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$, $\mathfrak{F}(X) \cap \mathcal{A}$ es denso en \mathcal{A} .
- (c) Para cada $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$, $\{F \in \mathcal{A} : \dim_F \mathcal{A} < \infty\}$ es denso en \mathcal{A} .
- (d) Para cada $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$, existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $\dim_B \mathcal{A}$ es finito.
- (e) Ningún elemento de $\mathfrak{WL}(X)$ es un cubo de Hilbert.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Supongamos primero (a), es decir, que $X \in \mathfrak{D}$. Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in (0, \mu(X))$. Afirmamos que $\mu^{-1}(t_0) \cap \mathfrak{F}(X)$ es denso en $\mu^{-1}(t_0)$. Sean $B \in \mu^{-1}(t_0)$ y $\varepsilon > 0$. Por [15, 66.8], existe $\delta > 0$ tal que cualesquiera $A_1, A_2 \in \mu^{-1}(t_0)$ con $A_1 \subset N_d(A_2, \delta)$ cumplen que $H_d(A_1, A_2) < \varepsilon$. Note que $\mathcal{U} = \mu^{-1}((t_0, \mu(X)) \cap B_{H_d}(B, \delta))$ es un abierto de $C(X)$ distinto del vacío. Luego, por el Lema 1.77, existe $F \in \mathcal{U}$ tal que $\dim_F(C(X)) < \infty$. Sea $p \in F$. Como $\mu(\{p\}) < t_0 < \mu(F)$, existe $B_1 \in C(X)$ tal que $B_1 \subset F$ y $\mu(B_1) = t_0$ (Lema 1.84). Por otro lado, por el Teorema 1.74, $F \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. En particular, $B_1 \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$ y, de nuevo por el Teorema 1.74, $\dim_{B_1}(C(X)) < \infty$. Así, $B_1 \in \mathfrak{F}(X) \cap \mu^{-1}(t_0)$. Además, puesto que $H_d(B, F) < \delta$, se cumple que $B_1 \subset F \subset N_d(B, \delta)$. De este modo, la elección de δ garantiza que $H_d(B_1, B) < \varepsilon$. Esto muestra nuestra afirmación. Por lo tanto, se cumple (b).

(b) \Rightarrow (c) Es una consecuencia inmediata del Corolario 3.20.

(c) \Rightarrow (d) y (d) \Rightarrow (e) Son inmediatas.

(e) \Rightarrow (a) Supongamos ahora que no se cumple (a), es decir, que $X \notin \mathfrak{D}$. Por el Corolario 3.19, existen niveles de Whitney en $C(X)$ que son cubos de Hilbert. Así, no se cumple (e). \square

Capítulo 4

Descomposición de los niveles de Whitney

La descomposición de un espacio topológico en subespacios con ciertas propiedades, cuando es posible, puede resultar de mucha utilidad para el estudio de las propiedades globales del espacio dado. Como un ejemplo muy claro de esto, R. Duda [7] mostró que el hiperespacio de subcontinuos de una gráfica finita arbitraria se descompone en una cantidad finita de celdas fácilmente identificables y este hecho ha sido bastante utilizado en investigaciones posteriores. En este capítulo, vamos a generalizar esta descomposición a los elementos de $\mathfrak{WL}(X)$, para cualquier $X \in \mathfrak{D}$ dado, así como a establecer algunas propiedades de esta descomposición.

4.1. Descomposición de $\mathfrak{F}(X)$ en celdas

En lo que sigue de este trabajo, usaremos ampliamente la descomposición de $C(X)$ en celdas que introdujo R. Duda [7], así como diversos resultados que usan esta descomposición y la inducida por esta a los niveles de Whitney. Tales resultados se expresan, originalmente, usando la notación $\mathfrak{M}_{K \subset L}$. En este trabajo, usaremos dicha notación con un significado simplificado, puesto que, en última instancia, solo la utilizaremos en árboles (pero vistos estos como subespacios de dendritas).

Sea X un continuo. Para cualesquiera subconjuntos K y L de X con $K \subset L \subset \mathcal{G}(X)$, denotamos

$$\mathfrak{M}_{K \subset L} = \{A \in C(X) : K \subset A \subset L\}$$

Si $K \neq \emptyset$, denotamos

$$\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M}_{K \subset \text{St}_f(K)}.$$

Si $K = \{p\}$, para algún p , denotamos

$$\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_K.$$

Para evitar ambigüedades al usar la notación \mathfrak{M}_K , el espacio que toma el papel de X es, en cada caso, el mayor espacio en consideración que contiene a L ; si se consideran dos continuos X y Y , estos serán ajenos, a menos que se diga lo contrario. Además, se usará la notación $\mathfrak{M}_{K \subset \text{St}_f^X(K)}$ cuando se requiera.

Para cualquier subcontinuo F de X , denotamos

$$\begin{aligned} \mathfrak{TM}(X) &= \{\mathfrak{M}_{\gamma \subset \text{St}_f^X(\gamma)} : \gamma \text{ es una s-gráfica fina de } X\} \cup \{\mathfrak{M}_{\emptyset \subset J} : J \in \mathfrak{A}_S(X)\}, \\ &= \{\mathfrak{M} \in \mathfrak{TM}(X) : F \in \mathfrak{M}\}. \end{aligned}$$

El siguiente lema establece que, bajo ciertas condiciones, los conjuntos que representa la notación $\mathfrak{M}_{K \subset L}$ respecto de G y respecto de X son el mismo, aclarando así posibles inconsistencias. Observe que, en el lema, el lado derecho de la igualdad es \mathfrak{M}_ν respecto del árbol G , que coincide para este caso (según lo expresado en [7, final de la página 270]) con el significado dado por Duda [7] a esta notación.

Lema 4.1. *Sean $X \in \mathfrak{D}$, G una s-gráfica libre de X y ν un subconjunto no vacío de G . Si ν es una s-gráfica fina de G o $\nu \subset \text{int}_X(G)$, entonces*

$$\mathfrak{M}_{\nu \subset \text{St}_f^X(\nu)} = \mathfrak{M}_{\nu \subset \text{St}_f^G(\nu)}.$$

Demostración. Es el Lema 2.8 (e). □

En el siguiente lema, observe que (por el Lema 4.1) la notación \mathfrak{M}_ν puede interpretarse como relativa tanto a G como a X , sin ambigüedad.

Lema 4.2. *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y G una s-gráfica libre de X . Entonces,*

$$\begin{aligned} \mathfrak{TM}(G) &= \{\mathfrak{M}_\nu : \nu \text{ es una s-gráfica fina de } X \text{ y } \nu \subset \text{int}_X(G)\} \cup \\ &\quad \{\mathfrak{M}_{\emptyset \subset J} : J \in \mathfrak{A}_S(X), J \subset G\}. \end{aligned}$$

Demostración. Suponga que $\mathfrak{M} \in \mathfrak{TM}(G)$. Si $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset J}$ para algún $J \in \mathfrak{A}_S(G)$, entonces el Lema 2.7 (c) garantiza que $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Si $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\nu$ para alguna s-gráfica fina ν de G , entonces, por el Lema 2.8 (b), ν es una s-gráfica fina de X con $\nu \subset \text{int}_X(G)$. Esto prueba la contención hacia la derecha de la igualdad del lema. Por otra parte, si ν es una s-gráfica fina de X tal que $\nu \subset \text{int}_X(G)$, entonces se tiene por el Lema 2.8 (b) que ν es una s-gráfica fina de G y, por ende, que $\mathfrak{M}_\nu \in \mathfrak{TM}(G)$. Si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces el Lema 2.7 (b) asegura que $J \in \mathfrak{A}_S(G)$ y, así, $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset J} \in \mathfrak{TM}(G)$. Esto prueba la igualdad del lema. □

Los siguientes dos teoremas reúnen casos especiales de algunos resultados de [7] y de [16] que nos serán de mucha utilidad. Vale la pena mencionar que los resultados originales se desarrollaron originalmente para la clase de las gráficas finitas, pero que en este trabajo enunciamos versiones simplificadas para la clase de los árboles.

En lo que sigue, ∂M denota la frontera como variedad de la k -celda M .

Teorema 4.3 ([7]). *Sean G un árbol y η una s-gráfica fina de G . Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- (a) \mathfrak{M}_η es una k -celda, en donde $k = \text{ord}(\eta, G)$.
- (b) Si S y T son s-gráficas de G con $S \subset T$ y tales que $\eta \subsetneq S$ o $T \subsetneq \text{St}_f(\eta)$, entonces $\mathfrak{M}_{S \subset T} \subset \partial \mathfrak{M}_\eta$.
- (c) $C(G) = \bigcup \mathfrak{IM}(G)$.
- (d) $\mathfrak{M}_\eta - \partial \mathfrak{M}_\eta$ es un abierto de $C(G)$.

Demostración. El inciso (a) se cumple por [7, 5.2 y 5.3]. El inciso (b) es un caso especial [7, 6.1]. El inciso (c) está contenido en [7, 5.4]. El inciso (d) es una consecuencia de (c) y (b). \square

Teorema 4.4 ([16, Theorem 1.1 (a), Theorem 1.2]). *Sean G un árbol, $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(G)$ y η una s-gráfica fina de G . Suponga que $\mathfrak{M}_\eta \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- (a) $\mathfrak{M}_\eta \cap \mathcal{A}$ es una k -celda, en donde $k = \text{ord}(\eta, G) - 1$.
- (b) $\partial(\mathfrak{M}_\eta \cap \mathcal{A}) = \{B \in \mathfrak{M}_\eta \cap \mathcal{A} : \text{existe } (S, T) \in \mathcal{B} \text{ tal que } S \subset B \subset T\}$, en donde $\mathcal{B} = \{(S, T) : S \text{ y } T \text{ son s-gráficas de } G \text{ tales que } \eta \subsetneq S \text{ o } T \subsetneq \text{St}_f(\eta)\}$. En otras palabras, $\partial(\mathfrak{M}_\eta \cap \mathcal{A}) = \bigcup \{\mathfrak{M}_{S \subset T} \cap \mathcal{A} : (S, T) \in \mathcal{B}\}$.
- (c) $(\mathfrak{M}_\eta \cap \mathcal{A}) - \partial(\mathfrak{M}_\eta \cap \mathcal{A})$ es abierto en \mathcal{A} .

Lema 4.5 ([2, Lemma 3.8]). *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

- (a) Dado cualquier $B \in \mathfrak{F}(X)$, el conjunto $\mathfrak{EM}(B, X)$ es finito y $\bigcup \mathfrak{EM}(B, X)$ es una vecindad de B en $C(X)$.
- (b) $\mathfrak{F}(X) = \bigcup \mathfrak{IM}(X)$.
- (c) $\{B \in \mathcal{A} : \dim_B \mathcal{A} < \infty\} = \bigcup \{\mathfrak{M} \cap \mathcal{A} : \mathfrak{M} \in \mathfrak{IM}(X)\}$.

Demostración. (a) Sea $B \in \mathfrak{F}(X)$. Sea $G = \text{St}_f(B)$. Luego, por el Lema 2.10, se cumple que G es una s-gráfica libre de X y que $B \subset \text{int}_X(G) \subset G \subset \mathcal{G}(X)$. Así, $B \in \langle \text{int}_X(G) \rangle \subset \text{int}_{C(X)} C(G)$. Por otro lado, por el Lema 4.3 (c), $C(G) = \bigcup \mathfrak{IM}(G)$. Considerando que $\mathfrak{IM}(G)$ es finito y que todos sus elementos son compactos, esto implica que $\mathfrak{EM}(B, G)$ es finito y que $\bigcup \mathfrak{EM}(B, G)$ es una vecindad de B en $C(G)$ y, por ende, en $C(X)$. Por estas razones, para probar (a) basta mostrar que $\mathfrak{EM}(B, G) = \mathfrak{EM}(B, X)$. Observe para esto que el Lema 4.2 implica que $\mathfrak{IM}(G) \subset \mathfrak{IM}(X)$. En particular, $\mathfrak{EM}(B, G) \subset \mathfrak{EM}(B, X)$. Además, si ν es una s-gráfica fina de X con

$B \in \mathfrak{M}_\nu$, entonces $\nu \subset B \subset \text{int}_X(G)$. Así, en este caso, ν es una s-gráfica fina de G (Lema 2.8 (b)) y $\mathfrak{M}_\nu \in \mathfrak{CM}(B, G)$ (Lema 4.2). Asimismo, si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ es tal que $B \in \mathfrak{M}_{\emptyset \subset J}$, entonces $J \in \mathfrak{A}_S(G)$ (Lema 2.7 (d)) y $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset J} \in \mathfrak{CM}(F, G)$ (Lema 4.2). Por lo tanto, $\mathfrak{CM}(B, X) = \mathfrak{CM}(B, G)$. Esto muestra (a).

(b) Note que, por (a), se cumple la contención $\mathfrak{F}(X) \subset \bigcup \mathfrak{IM}(X)$. Para mostrar que se cumple la igualdad esta contención, sea η una s-gráfica fina de X . Por el Lema 2.10 (a), se cumple que $\text{St}_f(\eta) \subset \mathcal{G}(X)$ y, por consiguiente, cada $A \in \mathfrak{M}_\eta$ satisface que $A \cap \mathcal{P}(X) = \emptyset$. Esto último implica, por el Teorema 1.74, que $A \in \mathfrak{F}(X)$. Por lo tanto, $\mathfrak{M}_\eta \subset \mathfrak{F}(X)$. Análogamente, si $K \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces $K \subset \mathcal{G}(X)$ (Lema 2.4 (c)) y, por ende, $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset K} \subset \mathfrak{F}(X)$. Esto prueba que $\mathfrak{F}(X) = \bigcup \mathfrak{IM}(X)$.

(c) Note que, por el Corolario 3.20 $\{B \in \mathcal{A} : \dim_B \mathcal{A} < \infty\} = \mathfrak{F}(X) \cap \mathcal{A}$ y, por (b), $\mathfrak{F}(X) \cap \mathcal{A} = (\bigcup \mathfrak{IM}(X)) \cap \mathcal{A} = \bigcup \{\mathfrak{M} \cap \mathcal{A} : \mathfrak{M} \in \mathfrak{IM}(X)\}$. Así, se cumple (c). \square

Teorema 4.6 ([17, Theorem 1.7]). *Sea G una gráfica finita distinta de un arco y de una curva cerrada simple. Sean $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(G)$ y $B \in \mathcal{A}$. Entonces, $\dim_B \mathcal{A} \leq \dim_B C(X) - 1$ y los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (a) A es una s-gráfica fina de G .
- (b) $\dim_B \mathcal{A} \neq \dim_B C(X) - 1$.
- (c) $\dim_B \mathcal{A} < \dim_B C(X) - 1$.

Teorema 4.7 ([17, Lemma 2.4]). *Sea G una gráfica finita distinta de un arco y de una curva cerrada simple. Sea $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(G)$ y sean η y γ dos s-gráficas finas de G tales que $\mathfrak{M}_\eta \neq \mathfrak{M}_\gamma$. Suponga que $N = \dim(\mathfrak{M}_\eta \cap \mathcal{A}) = \dim(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) \geq 1$. Entonces, $\dim(\mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) \leq N - 2$.*

Teorema 4.8 ([17, Lemma 2.5]). *Sea G una gráfica finita distinta de un arco y de una curva cerrada simple. Sean $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(G)$ y $N \in \mathbb{N}$. Suponga que existe un subconjunto abierto \mathcal{D} de \mathcal{A} que es homeomorfo a $(0, 1)^N$. Entonces, existe una s-gráfica fina η de G , tal que $\mathcal{D} \subset \mathfrak{M}_\eta \cap \mathcal{A}$.*

Observación 4.9. *Sean X un continuo y A un subcontinuo de X . Suponga que $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y que $(J - E(J)) \cap \text{St}_f(A) \neq \emptyset$. Entonces, $J \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $p \in (J - E(J)) \cap \text{St}_f(A)$. Luego, existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $K \cap A \neq \emptyset$ y $p \in K$. Así, $(J - E(J)) \cap K \neq \emptyset$ y, por el Corolario 1.34, $J = K$. En particular, $J \cap A \neq \emptyset$. \square

Observación 4.10. *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y sean S y T s-gráficas de X . Entonces, $S \cap T$ es también una s-gráfica de X .*

Demostración. Si $S \cap T = \emptyset$, $S \subset T$ o $T \subset S$, es inmediato que $S \cap T$ es una s-gráfica de X . Suponga que $S \cap T \neq \emptyset$, $S \not\subset T$ y que $T \not\subset S$. Observe que esto implica que tanto S como T tienen más de un punto. Luego, existen dos subconjuntos finitos Λ y Γ de $\mathfrak{A}_S(X)$ tales que $S = \bigcup \Lambda$ y $T = \bigcup \Gamma$. Por otro lado, se sigue del Teorema 1.54 que $S \cap T$ es un continuo. Consideremos primero el caso en el que $S \cap T = \{p\}$ para algún $p \in X$. Sean $J \in \Lambda$ y $K \in \Gamma$ tales que $p \in J \cap K$. Como $J \cap K = \{p\}$, el Corolario 1.34 garantiza que $p \in E(J) \cap E(K)$. Esto implica, en particular, que $p \in \text{Fr}_X(J)$. Considerando que $\text{Fr}_X(J) \subset R(X) \cap \mathcal{G}(X)$ (lo cual se sigue del Lema 2.4 (c)), se tiene que $\{p\}$ es una s-gráfica de X . Ahora consideremos el caso en el que $S \cap T$ tiene más de un punto. Vamos a mostrar que $S \cap T = \bigcup (\Lambda \cap \Gamma)$. Para esto, note primero que la contención $\bigcup (\Lambda \cap \Gamma) \subset S \cap T$ es inmediata. Sea $E_0 = \bigcup \{E(L) : L \in \Lambda\}$. Considere $p \in (S \cap T) - E_0$. Sean $J \in \Lambda$ y $K \in \Gamma$ tales que $p \in J \cap K$. Luego, $p \in (J - E(J)) \cap K$ lo cual implica, por el Corolario 1.34, que $J = K$. Así, $J \in \Lambda \cap \Gamma$. Esto muestra que $(S \cap T) - E_0 \subset \bigcup (\Lambda \cap \Gamma)$. Más aún, como E_0 es finito, $(S \cap T) - E_0$ es denso en $(S \cap T)$, por lo cual $S \cap T \subset \bigcup (\Lambda \cap \Gamma)$. Esto muestra que $S \cap T = \bigcup (\Lambda \cap \Gamma)$ y, por ende, que $S \cap T$ es una s-gráfica también en este caso. \square

Para los siguientes resultados, usaremos la siguiente notación. Dado un continuo X y cualquier subespacio A de X , sean

$$\mathfrak{A}_S^o(X, A) = \{J \in \mathfrak{A}_S(X) : J \not\subset A, J \cap A \neq \emptyset\}.$$

Observación 4.11. *Sea X una dendrita. Suponga que S es una s-gráfica de X y que existe $J \in \mathfrak{A}_S^o(X, S)$. Sea $p \in J \cap S$. Entonces, $J \cap S = \{p\}$ y $p \in E(J)$. En particular, si $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ es tal que $K \neq J$ y existe $p \in J \cap K$, entonces $J \cap K = \{p\}$ y $p \in E(J) \cap E(K)$.*

Demostración. Veamos la primera parte de la observación. Supongamos que $S = \{p\}$, para algún $p \in X$. Luego, $p \in (R(X) \cup E(X)) \cap \mathcal{G}(X)$. También, es inmediato que $J \cap S = \{p\}$. Además, puesto que $J - E(J)$ es abierto en X , este conjunto está contenido en $O(X)$ y, por ende, $p \in E(J)$. Supongamos ahora que S tiene más de un punto. Por el Corolario 1.34, $J \cap K \subset E(J) \cap E(K)$ para cada $K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Como S es la unión de algunos elementos de $\mathfrak{A}_S(X)$, lo anterior implica que $J \cap S \subset E(J)$. Como $J \cap S$ es conexo (Teorema 1.54) y $E(J)$ es finito, lo anterior implica que $J \cap S$ tiene un único elemento. Así, $J \cap S = \{p\}$, para algún $p \in E(J)$. Además, si $S \in \mathfrak{A}_S(X)$,

Suponga ahora que $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ es tal que $K \neq J$ y existe $p \in J \cap K$. Como K es una s-gráfica de X y $J \not\subset K$ (porque son arcos libres maximales de X distintos), el párrafo anterior implica que $J \cap K = \{p\}$ y $p \in E(J)$. Análogamente, J es una s-gráfica de X y $K \not\subset J$, por lo cual $p \in E(K)$. \square

Observación 4.12. *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y ν una s-gráfica de X . Suponga que $J, K \in \mathfrak{A}_S^o(X, \nu)$. Si $J \cap K \neq \emptyset$ y $J \neq K$, entonces $J \cap K = J \cap \nu = K \cap \nu = \{p\}$, para*

algún $p \in E(J) \cap E(K)$. Más aún, existe $p \in E(J)$ tal que $J \cap \nu = \{p\}$ y $J - \{p\}$ es abierto en $\text{St}_f(\nu)$.

Demostración. Por la Observación 4.11, existen $p \in E(J)$ y $q \in E(K)$ tales que $J \cap \nu = \{p\}$ y $K \cap \nu = \{q\}$. Suponga que $J \cap K \neq \emptyset$ y que $J \neq K$. Luego, $J \cup K$ es un continuo y, por el Teorema 1.54, el conjunto $(J \cup K) \cap \nu = \{p, q\}$ es conexo. En consecuencia, $p = q$. Como el conjunto $J \cap K$ es unitario (Observación 4.11), se tiene que $J \cap K = \{p\}$. Por tanto, $J \cap K = J \cap \nu = K \cap \nu = \{p\}$.

Por otro lado, se sigue del párrafo anterior que J intersecta tanto a ν como a $\bigcup\{K \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(X, \nu) : K \neq J, J \cap K \neq \emptyset\}$ en el conjunto $\{p\}$. Por tanto, $J - \{p\} = \text{St}_f(\nu) - (\nu \cup \bigcup\{K \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(X, \nu) : K \neq J\})$. Como $\mathfrak{A}_S^{\circ}(X, \nu)$ es finito (Lema 2.10 (b)), lo anterior implica que $J - \{p\}$ es abierto en $\text{St}_f(\nu)$. \square

Observación 4.13. Sea G un árbol. Si ν es una s -gráfica de G , entonces $\text{ord}(\nu, G) = |\mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)|$. En particular, si η y γ son s -gráficas finas de G tales que $\eta \subsetneq \gamma$, entonces $\text{ord}(\eta, G) < \text{ord}(\gamma, G)$.

Demostración. Supongamos que ν es una s -gráfica de G . Sea $E_0 = \{q : q \in \nu - E(J), \text{ para algún } J \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)\}$. Note que E_0 es finito y cerrado en G .

Sea U un abierto de G tal que $\nu \subset U \subset \text{cl}_X(U) \subset \text{int}_X(\text{St}_f(\nu)) - E_0$. Vamos a mostrar que $|\mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)| \leq |\text{Fr}_X(U)|$. Sea $J \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)$. Por la Observación 1.34, existe $p_J \in E(J)$ tal que $J \cap \nu = \{p_J\}$. Sea q_J tal que $E(J) = \{p_J, q_J\}$. Como $p_J \in J \cap U$ y $q_J \in J \cap E_0 \subset J - \text{cl}_X(U)$, la conexidad de J garantiza que existe $a_J \in J \cap \text{Fr}_X(U)$. Observe que $a_J \neq p_J$ y $a_J \neq q_J$. Así, $a_J \in J - E(J)$. Considere $K \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G)$ con $K \neq J$. Como $(J - E(J)) \cap (K - E(K)) = \emptyset$ (Corolario 1.34), se cumple que $a_J \neq a_K$. Esto implica que $|\mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)| \leq |\text{Fr}_X(U)|$.

Para cada $J \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)$, sean α_J y $r_J \in G$ tales que $E(\alpha_J) = \{p_J, r_J\}$ y $\alpha_J \subset J \cap U$. Sea $V = \nu \cup \bigcup\{\alpha_J - \{r_J\} : J \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)\}$. Es inmediato que $V \subset U$. Vamos a mostrar que V es un abierto de G y que $|\text{Fr}_X(V)| = |\mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)|$. Para lo primero, dado cualquier $J \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)$, sea β_J el único subarco de J tal que $E(\beta_J) = \{r_J, q_J\}$. Note que $\alpha_J \cap \beta_J = \{r_J\}$ y que, por ende, $\alpha_J - \{r_J\} = J - \beta_J$ y $p_J \notin \beta_J$. Como $J \cap \nu = \{p_J\}$, se tiene que $\beta_J \cap \nu = \emptyset$. Además, si $K \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)$ es tal que $J \neq K$ y $J \cap K \neq \emptyset$, entonces $J \cap K = J \cap \nu = \{p_J\}$ (Observación 4.12). Esto implica que $\beta_J \cap K = \emptyset$. Así, $V = \nu \cup \bigcup\{J - \beta_J : J \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)\} = \text{St}_f(\nu) - \bigcup\{\beta_J : J \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)\}$. Como $V \subset U \subset \text{St}_f(\nu)$, se tiene por lo anterior que $V = U - \bigcup\{\beta_J : J \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)\}$. Puesto que $\bigcup\{\beta_J : J \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)\}$ es un cerrado de G que no intersecta a ν , V es un abierto de G que contiene a ν . Por otro lado, como $V \cup \{r_J : J \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)\} = \nu \cup \bigcup\{\alpha_J : J \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)\}$, este conjunto es cerrado en G y, por ende, $\text{Fr}_X(V) = \{r_J : J \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)\}$. Además, para cualesquiera $J, K \in \mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)$, se cumple que $r_J \in \beta_J$, $r_K \in K$ y $\beta_J \cap K = \emptyset$, por lo cual $r_J \neq r_K$. Así, $|\text{Fr}_X(V)| = |\mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)|$.

De este modo, para cualquier abierto U de G tal que $\nu \subset U \subset \text{cl}_X(U) \subset \text{int}_X(\text{St}_f(\nu)) - E_0$ se cumple que $|\mathfrak{A}_S^{\circ}(G, \nu)| \leq |\text{Fr}_X(U)|$ y existe un abierto V de G

tal que $V \subset U$ y $|\text{Fr}_X(V)| = |\mathfrak{A}_S^0(G, \nu)|$. Por lo tanto, $\text{ord}(\nu, G) = |\mathfrak{A}_S^0(G, \nu)|$.

Para mostrar la segunda parte de la observación, considere dos s-gráficas finas de G , digamos η y γ , tales que $\eta \subsetneq \gamma$. Vamos a mostrar que $|\mathfrak{A}_S^0(G, \eta)| < |\mathfrak{A}_S^0(G, \gamma)|$. Basta mostrar el caso en el que $\eta \cup J = \gamma$. Observe que $J \cap \eta \neq \emptyset$ (porque γ es conexo) y $J \not\subset \eta$ (porque $\eta \subsetneq \gamma$). Así, $J \in \mathfrak{A}_S^0(G, \eta)$. De igual manera, que en los párrafos anteriores, podemos hacer $E(J) = \{p_J, q_J\}$ de tal modo que $J \cap \eta = \{p_J\}$. Note que $\text{St}_f(q_J)$ es una vecindad de q_J en G (Lema 2.10 (a)). Si $\mathfrak{A}_S(G, q_J) = \{J\}$, entonces $J = \text{St}_f(q_J)$ es una vecindad de q_J en G , por lo cual $q_J \in \gamma \cap E(G)$. Como esto último no es posible, se tiene que existe $K \in \mathfrak{A}_S(G, q_J)$ con $K \neq J$. Note que $J \cap K = \{q_J\}$ (Observación 4.11), con $q_J \in E(J) \cap E(K)$. En consecuencia, $J \cup K$ es un arco y $E(J \cup K) = \{p_J, p\}$, donde p es tal que $E(K) = \{q_J, p\}$. Si $\mathfrak{A}_S(G, q_J) = \{J, K\}$, entonces el conjunto $J \cup K = \text{St}_f(q_J)$ es una vecindad de q_J , con lo cual $(J - E(J)) \cup (K - E(K)) \cup \{q_J\}$ es abierto en G , es decir, $J \cup K$ es un arco libre de G , que tampoco es posible (por la maximalidad de J). De este modo, $|\mathfrak{A}_S(G, q_J)| \geq 3$. Observe que si $K \in \mathfrak{A}_S(G, q_J)$ es tal que $K \neq J$ y $K \subset \gamma$, entonces $J \cap K = \{q_J\}$ y $K \subset \gamma - (J - \{q_J\}) \subset \eta \cup \{q_J\}$. Como $q_J \in K - \eta$, esto último implica que $K \subset \{q_J\}$. Esta contradicción muestra que, si $K \in \mathfrak{A}_S(G, q_J)$ y $K \neq J$, entonces $K \not\subset \gamma$. Por lo tanto,

$$|\{K \in \mathfrak{A}_S^0(G, \gamma) : q_J \in K\}| \geq 2. \quad (4.1)$$

Además, si $K \in \mathfrak{A}_S^0(G, \gamma)$ y $q_J \in K$, entonces $K \cap \gamma = \{q_J\}$ (Observación 4.11), por lo cual $K \cap \eta = \emptyset$. Así,

$$(\mathfrak{A}_S^0(G, \eta) - \{J\}) \cap \{K \in \mathfrak{A}_S^0(G, \gamma) : q_J \in K\} = \emptyset. \quad (4.2)$$

Sea $K \in \mathfrak{A}_S^0(G, \eta)$ tal que $K \neq J$. Luego, por la Observación 4.12, existe p tal que $K \cap J = K \cap \eta = \{p\}$. Así, $K \cap \gamma = \{p\}$ y, por ende, $K \in \mathfrak{A}_S^0(G, \gamma)$. Por lo tanto,

$$\mathfrak{A}_S^0(G, \eta) - \{J\} \subset \mathfrak{A}_S^0(G, \gamma). \quad (4.3)$$

De este modo, usando (4.3), (4.2) y (4.1), se tiene que $|\mathfrak{A}_S^0(G, \gamma)| \geq |\mathfrak{A}_S^0(G, \eta) - \{J\}| + |\{K \in \mathfrak{A}_S^0(G, \gamma) : q_J \in K\}| \geq |\mathfrak{A}_S^0(G, \eta) - \{J\}| + 2 = |\mathfrak{A}_S^0(G, \eta)| + 1$. Por lo tanto, $|\mathfrak{A}_S^0(G, \gamma)| > |\mathfrak{A}_S^0(G, \eta)|$. \square

Suponga que $X \in \mathfrak{D}$. Dados una s-gráfica fina γ de X con más de un punto y $p \in E(\gamma)$, denotaremos

$$\gamma^{-p} = \begin{cases} \bigcup \mathfrak{A}_S^i(X, \gamma - \{p\}) & \text{si } \gamma \notin \mathfrak{A}_S(X), \\ \{q\} & \text{si } \gamma \in \mathfrak{A}_S(X), \text{ en donde } E(\gamma) = \{p, q\}. \end{cases}$$

La siguiente observación establece algunas propiedades de γ^{-p} que daremos por ciertas al hablar de este conjunto.

Observación 4.14. Sean $X \in \mathfrak{D}$ y γ una s -gráfica fina de X con más de un punto. Sea $p \in E(\gamma)$. Entonces, γ^{-p} es una s -gráfica fina de X y existen $J \in \mathfrak{A}_S(Y)$ y $q \in E(J)$ tales que $\gamma = \gamma^{-p} \cup J$ y $\gamma^{-p} \cap J = \{q\}$. Además, para cualquier s -gráfica ν de X con $\nu \subset \gamma - \{p\}$, se cumple que $\nu \subset \gamma^{-p}$.

Demostración. El resultado es inmediato si $\gamma \in \mathfrak{A}_S(X)$. Considere el caso en el que $\gamma \notin \mathfrak{A}_S(X)$. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $p \in J \subset \gamma$ y sea q el punto extremo de J distinto de p .

Note que J es un arco libre de γ . Luego, por la Observación 2.3, $p \in \text{int}_\gamma(J)$. Así, $J - \{q\}$ es abierto en γ . Afirmamos que $\gamma - (J - \{q\})$ es conexo. Sean A y B dos cerrados de γ tales que $\gamma - (J - \{q\}) = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Podemos suponer que $q \in A$. Luego, $A \cup J$ y B son cerrados en γ y ajenos. Como γ es conexo y $q \in A \cup J$, esto implica que $B = \emptyset$. Por tanto, $\gamma - (J - \{q\})$ es conexo. Sea Λ un subconjunto finito de $\mathfrak{A}_S(X)$ tal que $\gamma = \bigcup \Lambda$. Sea $K \in \Lambda$ tal que $K \cap J \neq \emptyset$. Luego, existe $r \in E(J) \cap E(K)$ tal que $K \cap J = \{r\}$ (Observación 4.11). Si $r = p$, entonces $p \in \text{Fr}_\gamma(J)$, lo cual no es posible. Así, $r = q$. Esto muestra que $\bigcup \{K \in \Lambda : K \neq J\} \subset \gamma - (J - \{q\})$. Más aún, puesto que γ es conexo y Λ tiene al menos dos elementos, existe $K_0 \in \Lambda$ tal que $K_0 \cap J \neq \emptyset$ y $K_0 \neq J$; de este modo, por lo dicho anteriormente, $q \in K_0$. Además, es inmediato que $\gamma - J \subset \bigcup \{K \in \Lambda : K \neq J\}$. Por lo tanto, $\bigcup \{K \in \Lambda : K \neq J\} = \gamma - (J - \{q\})$.

Por otra parte, (usando lo obtenido en el párrafo anterior) es inmediato que $\{K \in \Lambda : K \neq J\} \subset \mathfrak{A}_S^i(X, \gamma - \{p\})$. Considere $K \in \mathfrak{A}_S^i(X, \gamma - \{p\})$. Sean $a \in K - E(K)$. Como $K \subset \gamma$, existe $L \in \Lambda$ tal que $a \in L$. Luego, por la Observación 4.11, se tiene que $K = L \in \Lambda$. Además, como $p \in K - J$, se tiene $K \neq J$. Esto muestra que $\mathfrak{A}_S^i(X, \gamma - \{p\}) = \{K \in \Lambda : K \neq J\}$.

Por los dos párrafos anteriores, se tiene que $\gamma^{-p} = \gamma - (J - \{q\})$ y que este conjunto es conexo. Se sigue de esto que γ^{-p} es una s -gráfica de X y, puesto que $\gamma^{-p} \cap E(X) \subset \gamma \cap E(X) = \emptyset$, también se cumple que γ^{-p} es fina en X . Más aún, se tiene que $\gamma^{-p} \cup J = (\gamma - (J - \{q\})) \cup J = \gamma$ y que $\gamma \cap J = (\gamma - (J - \{q\})) \cap J = \{q\}$.

Por último, dada cualquier s -gráfica ν contenida en $\gamma - \{p\}$, es inmediato que $\Lambda' \subset \mathfrak{A}_S^i(X, \gamma - \{p\})$, en donde Λ' es un subconjunto finito de $\mathfrak{A}_S(X)$ tal que $\nu = \bigcup \Lambda'$. En tal caso, se sigue que $\nu \subset \gamma^{-p}$. \square

Observación 4.15. Sean $X \in \mathfrak{D}$ y ν una s -gráfica fina de X . Entonces, se cumple que $\text{ord}(\nu, X) \geq 3$.

Demostración. Si $\nu = \{p\}$ para algún p , entonces $p \in (R(X) \cup E(X)) \cap \mathcal{G}(X)$ y, puesto que $\nu \cap E(X) = \emptyset$, se tiene que $p \in R(X)$. Supongamos que ν tiene más de un punto. Luego, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $J \subset \nu$. Sea $p' \in E(J)$. Si $p' \in \text{int}_X(J)$, entonces $p' \in E(X) \cap \nu$, lo cual no es posible. Así, $p' \in \text{Fr}_X(J)$ y, por el Lema 2.4 (c), $p' \in R(X) \cap \mathcal{G}(X)$. Así, en cualquier caso, existe una s -gráfica fina $\{p\}$ tal que $\{p\} \subset \nu$. Así, por la Observación 4.13, $\text{ord}(\nu, G) \geq \text{ord}(\{p\}, G) \geq 3$. \square

Lema 4.16 ([2, Lemma 3.10]). Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$. Sean η y γ s-gráficas finas de X con $\mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma \neq \emptyset$. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones.

- (a) \mathfrak{M}_γ es una $\text{ord}(\gamma, X)$ -celda y $\mathfrak{M}_\gamma - \partial \mathfrak{M}_\gamma$ es abierto en $C(X)$.
- (b) Si $\eta \cap \gamma = \emptyset$, entonces existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $\eta = \{p\}$, $\gamma = \{q\}$ y $\mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma = \{J\}$, en donde $E(J) = \{p, q\}$.
- (c) Si $\eta \cap \gamma \neq \emptyset$, entonces $\mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma \subset \mathfrak{M}_{\eta \cup \gamma} \cap \mathfrak{M}_{\eta \cap \gamma}$.
- (d) Si $\gamma \neq \eta$, entonces $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathfrak{M}_\eta \subset \partial \mathfrak{M}_\gamma$ y $\mathfrak{M}_\gamma \not\subset \mathfrak{M}_\eta$.
- (e) Si $\eta \subsetneq \gamma$, entonces $\dim \mathfrak{M}_\eta < \dim \mathfrak{M}_\gamma$.
- (f) Si $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto, entonces es una $(\text{ord}(\gamma, X) - 1)$ -celda y $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A} - \partial(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A})$ es abierto en \mathcal{A} .
- (g) Si $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A} = \mathfrak{M}_\eta \cap \mathcal{A}$ y este conjunto tiene más de un punto, entonces $\eta = \gamma$.
- (h) Asuma que $\dim \mathfrak{M}_\eta < \dim \mathfrak{M}_\gamma$, que $\mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma$ tiene más de un punto y que existe $F \in C(X)$ con $\mathfrak{EM}(F, X) = \{\mathfrak{M}_\eta, \mathfrak{M}_\gamma\}$. Entonces, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $\gamma = \eta \cup J$ (equivalentemente, $\eta = \gamma - p$ para algún $p \in E(\gamma)$).
- (i) Asuma que γ , $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}$ y $\mathfrak{M}_{\gamma-p} \cap \mathcal{A}$ tienen todos más de un punto, para algún $p \in E(\gamma)$. Entonces, existe $F \in \mathcal{A}$ con $\mathfrak{EM}(F, X) = \{\mathfrak{M}_\gamma, \mathfrak{M}_{\gamma-p}\}$.

Demostración. Antes de probar este lema, es importante notar que el Lema 4.3 considera la notación \mathfrak{M}_ν para el conjunto $\mathfrak{M}_{\nu \subset \text{St}_f^G(\nu)}$ (para alguna gráfica finita G y alguna s-gráfica fina ν de G), mientras que en la mayoría de resultados (incluido este) \mathfrak{M}_ν representa al conjunto $\mathfrak{M}_{\nu \subset \text{St}_f^X(\nu)}$. Sin embargo, por el Lema 4.1, si G es una s-gráfica libre de X y ν es un s-gráfica fina de G , entonces $\mathfrak{M}_{\nu \subset \text{St}_f^X(\nu)} = \mathfrak{M}_{\nu \subset \text{St}_f^G(\nu)}$, así que, en tal caso, \mathfrak{M}_ν representa a ambos conjuntos. Esto será usado repetidamente en lo que sigue. Usaremos además, como fue convenido, $\text{St}_f(A) = \text{St}_f^X(A)$ para cada $A \in C(X)$.

Sean $G_1 \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $G_{n+1} = \text{St}_f(G_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.10, incisos (d) y (a), cada G_n es una s-gráfica libre de X , $G_n \subset \text{int}_X(G_{n+1})$ y $G_n \subset \mathcal{G}(X)$. Además, por el Lema 2.6, existe N tal que $\text{St}_f(\eta) \cup \text{St}_f(\gamma) \subset \text{int}_X(G_N)$. Sea $G = G_N$. Luego, $\mathfrak{M}_\eta \subset \langle \text{St}_f(\eta) \rangle \subset \langle \text{int}_X G \rangle \subset C(G)$. Así \mathfrak{M}_η y, por un argumento análogo, \mathfrak{M}_γ están contenidos en $\text{int}_{C(X)}(C(G))$. Por otro lado, note que $\eta \cup \gamma \subset \text{int}_X(G)$. Así, por el Lema 2.8 (b), η y γ son s-gráficas finas de G .

(a) Por el Lema 4.3 (a), \mathfrak{M}_γ es una k -celda, en donde $k = \text{ord}(\gamma, G) = \text{ord}(\gamma, X)$. Más aún, puesto que $\mathfrak{M}_\gamma - \partial \mathfrak{M}_\gamma$ es abierto en $C(G)$ (Lema 4.3 (a)), también es abierto en $C(X)$. Así, se cumple (a).

Para demostrar (b), suponga que $\eta \cap \gamma = \emptyset$ y $F \in \mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma$. Supongamos que existen $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $J \cup K \subset \text{St}_f(\eta) \cap \text{St}_f(\gamma)$. Luego, por la Observación

4.9, $J \cap \eta \neq \emptyset$ y $J \cap \gamma \neq \emptyset$. Sean $p_1 \in J \cap \eta$, $p_2 \in J \cap \gamma$ y α un arco contenido en J que va de p_1 a p_2 . Note que también $K \cap \eta \neq \emptyset$ y $K \cap \gamma \neq \emptyset$ (Observación 4.9). Luego, $K \cup \eta \cup \gamma$ es un subcontinuo de X y, por ende, es un dendrita (Teorema 1.52). En particular, $K \cup \eta \cup \gamma$ es arco conexo. Como $p_1 \in \eta$ y $p_2 \in \gamma$, esto implica que existe un arco β contenido en $K \cup \eta \cup \gamma$ que va de p_1 a p_2 . Como X es únicamente arco conexo (Observación 1.64), se tiene que $\alpha = \beta$ y, por consiguiente $\alpha \subset J \cap (K \cup \eta \cup \gamma)$. Como $J \cap \eta$ y $J \cap \gamma$ son cerrados en J y ajenos, además de que ambos intersectan a α , es inmediato que $\alpha \not\subset \eta \cup \gamma$. Así, existe $p \in \alpha - (\eta \cup \gamma)$. Como $E(\alpha) = \{p_1, p_2\} \subset \eta \cup \gamma$, esto garantiza que $p \notin E(\alpha)$ y, ya que $E(J) \cap \alpha \subset E(\alpha)$, se tiene que $p \notin E(J)$. Puesto que $p \in \alpha \subset K$, se tiene por esto último que $(J - E(J)) \cap K \neq \emptyset$. De este modo, $J = K$ (Corolario 1.34). Por lo tanto, $\text{St}_f(\eta) \cap \text{St}_f(\gamma)$ contiene a lo más un elemento de $\mathfrak{A}_S(X)$ y, considerando que $\text{St}_f(\eta) \cap \text{St}_f(\gamma)$ es una s-gráfica de X (Observación 4.10), se cumple que $\text{St}_f(\eta) \cap \text{St}_f(\gamma) \subset J$, para alguna $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. De este modo, y tomando en cuenta que $\eta \subset F \subset \text{St}_f(\eta) \cap \text{St}_f(\gamma)$, se tiene que $\eta \subset J$. Análogamente, $\gamma \subset J$. Dado que η y γ son s-gráficas finas de X ajenas, se sigue de lo anterior que $\eta = \{e_1\}$ y $\gamma = \{e_2\}$, donde $E(J) = \{e_1, e_2\}$. Así $\text{St}_f(\eta) \cap \text{St}_f(\gamma) = J$. Por lo tanto $\mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma = \mathfrak{M}_{\eta \cup \gamma \subset \text{St}_f(\eta) \cap \text{St}_f(\gamma)} = \mathfrak{M}_{E(J) \subset J} = \{J\}$. Esto prueba (b).

(c) Suponga ahora que $\eta \cap \gamma \neq \emptyset$. Sea $F \in \mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma$. Entonces, $\eta \cup \gamma \subset F \subset \text{St}_f(\eta) \cap \text{St}_f(\gamma) \subset \text{St}_f(\eta \cup \gamma)$. Así, $F \in \mathfrak{M}_{\eta \cup \gamma}$. Además, es inmediato que $\eta \cap \gamma \subset F$. Vamos a demostrar que $F \subset \text{St}_f(\eta \cap \gamma)$. Esto es inmediato si η o γ son degenerados, así que vamos a suponer que ambos tienen más de un punto. Sea $p \in F$. Puesto que $\eta \subset F \subset \text{St}_f(\gamma)$, si $p \in \eta$, entonces cualquier $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ con $p \in J \subset \eta$ cumple que $J \cap \eta \cap \gamma = J \cap \gamma \neq \emptyset$ (esta última desigualdad se da por la Observación 4.9) y, por ende, $p \in \text{St}_f(\eta \cap \gamma)$. Análogamente, si $p \in \gamma$, entonces $p \in \text{St}_f(\eta \cap \gamma)$. De esta forma, podemos suponer que $p \notin \eta \cup \gamma$. Sean $J, K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tales que $p \in J \cap K$, $J \cap \eta \neq \emptyset$ y $K \cap \gamma \neq \emptyset$. Suponga que $J \neq K$. Luego, $J \cap K = \{p\}$ (Observación 4.11) y, por consiguiente, $J \cup K$ es un arco y contiene un arco α que va de un punto de $\eta \cap J$ a un punto de $\gamma \cap K$. Note que $p \in \alpha$, que $\eta \cup \gamma$ es un subcontinuo de X y que, por ende, $\eta \cup \gamma$ es una dendrita (Teorema 1.52). Como $\eta \cup \gamma$ es arco conexo y X es únicamente arco conexo (Observación 1.64), se tiene que $p \in \alpha \subset \eta \cup \gamma$, lo cual no es posible. Así, $J = K$ y, en consecuencia, $J \cap \eta \neq \emptyset$ y $J \cap \gamma \neq \emptyset$. Puesto que $J \not\subset \eta \cup \gamma$, se tiene por la Observación 4.11 que $J \cap (\eta \cup \gamma) = \{e_J\}$, para algún $e_J \in E(J)$. Esto implica que $J \cap \eta = J \cap \gamma = \{e_J\}$ y, por ende, que $p \in \text{St}_f(\eta \cap \gamma)$. Por lo tanto, $F \subset \text{St}_f(\eta \cap \gamma)$. Esto muestra que $F \in \mathfrak{M}_{\eta \cap \gamma}$ y concluye la prueba de (c).

(d) Supongamos que $\gamma \cap \eta \neq \emptyset$. Note que $\eta \subset F \subset \text{St}_f(\gamma)$. Si $\gamma \subsetneq \eta$, entonces $\mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma \subset \mathfrak{M}_{\eta \subset \text{St}_f(\gamma)} \subset \partial \mathfrak{M}_\gamma$, en donde la última contención se da por 4.3 (b). Supongamos que $\gamma \not\subset \eta$. Sean $a \in \gamma - \eta$ y $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $a \in J \subset \gamma$. Como $J \subset F \subset \text{St}_f(\eta)$, se tiene (por la Observación 4.9) que $J \cap \eta \neq \emptyset$. Como $a \in J - \eta$, por la Observación 4.11 existe $p \in E(J)$ tal que $J \cap \eta = \{p\}$. Sea q tal que $E(J) = \{p, q\}$. Si $\mathfrak{A}_S(G, q) = \{J\}$, entonces $J = \text{St}_f(q)$ y este conjunto es una vecindad de q en

X (Lema 2.10 (a)), con lo cual $q \in E(X) \cap \gamma$. Puesto que esto no es posible, existe $K \in \mathfrak{A}_S(G, q)$ tal que $K \neq J$. Observe que $q \in K \cap J \subset K \cap \gamma$ y, por ende $K \subset \text{St}_f(\gamma)$. Por otro lado, por la Observación 4.11, $J \cap K = \{q\}$. Note que $q \in K - \eta$. Luego, si $K \cap \eta \neq \emptyset$, entonces (también por la Observación 4.11), existe $r \in E(K)$ tal que $K \cap \eta = \{r\}$. En tal caso, como $K \cap (J \cup \eta) = \{q, r\}$ y esta intersección es conexa (Teorema 1.54), se tiene que $r = q \in \eta$, lo cual no es posible. Por tanto, $K \cap \eta = \emptyset$. De este modo, $K \not\subset \text{St}_f(\eta)$ (por la Observación 4.9), pero $K \subset \text{St}_f(\gamma)$. Por tanto, el conjunto $S = \text{St}_f(\gamma) \cap \text{St}_f(\eta)$ está contenido propiamente en $\text{St}_f(\gamma)$. Como S y $\eta \cup \gamma$ son s-gráficas de X (la primera por la Observación 4.10) y $\eta \cup \gamma \subset F \subset \text{St}_f(\gamma)$, el Teorema 4.3 (b) garantiza que $\mathfrak{M}_{\gamma \cup \eta \subset S} \subset \partial \mathfrak{M}_\gamma$, es decir, que $\mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma \subset \partial \mathfrak{M}_\gamma$. Así, esta contención se cumple en cualquier caso. Por último, note que $\partial \mathfrak{M}_\gamma \subsetneq \mathfrak{M}_\gamma$, por lo cual tal contención implica que $\mathfrak{M}_\gamma \not\subset \mathfrak{M}_\eta$.

(e) Supongamos que $\eta \subsetneq \gamma$. Luego, por la Observación 4.13, se cumple que $\text{ord}(\eta, G) < \text{ord}(\gamma, G)$. Además, por (a), \mathfrak{M}_η es una $\text{ord}(\gamma, G)$ -celda y \mathfrak{M}_γ es una $\text{ord}(\eta, G)$ -celda. Así, $\dim \mathfrak{M}_\eta < \dim \mathfrak{M}_\gamma$.

Antes de continuar con los siguientes incisos, note que si $C(G) \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto, entonces este conjunto es elemento de $\mathfrak{W}\mathfrak{L}(G)$ (Observación 1.83). Por esta razón, y puesto que $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto para cada uno de los incisos restantes, asumiremos que $C(G) \cap \mathcal{A} \in \mathfrak{W}\mathfrak{L}(G)$ en lo que resta de esta prueba.

(f) Por el Teorema 4.4 (a) $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}$ es una k -celda, donde $k = \text{ord}(\gamma, G) - 1 = \text{ord}(\gamma, X) - 1$ y, por (c) de ese mismo teorema, $(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) - \partial(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A})$ es abierto en $C(G) \cap \mathcal{A}$. Como $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A} \subset \text{int}_{\mathcal{A}}(C(G) \cap \mathcal{A})$, esto último implica que $(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) - \partial(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A})$ es abierto en \mathcal{A} .

(g) Supongamos que $\mathfrak{M}_\eta \cap \mathcal{A} = \mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}$ y que este conjunto tiene más de un punto. Note que (b) implica que $\eta \cap \gamma \neq \emptyset$. Vamos a probar primero que $\eta \subset \gamma$. Si η es un conjunto unitario, esto es inmediato. Supongamos que η tiene más de un punto. Sea $F \in \mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A} - \partial(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A})$. Considere $e \in \text{St}_f(\gamma)$. Sea $L \in \mathfrak{A}_S(X, \gamma)$ tal que $e \in L$. Observe que $e \in E(L)$. Si $e \in \gamma$, entonces $\text{St}_f(\gamma)$ es una vecindad de e , con lo cual $e \in E(X) \cap \gamma$, lo cual no es posible. Así, $e \notin \gamma$. Por la Observación 4.11, existe $p \in E(L)$ tal que $L \cap \nu = \{p\}$. Observe que $E(L) = \{p, e\}$ y que $L \cap F$ es un subcontinuo de L (Teorema 1.54) que contiene a p . Si $e \in F$, entonces $L \cap F = F$ (porque $L \cap F$ contiene a ambos extremos de L), con lo cual, $\nu \cup L$ es una s-gráfica contenida en F . Esto último implica, por el Teorema 4.4 (b), que $F \in \partial(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A})$, lo cual no es posible. Por tanto, $e \notin F$. Como esto ocurre para cualquier $e \in E(\text{St}_f(\gamma))$, se tiene que $F \cap \text{St}_f(\gamma) = \emptyset$. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ con $J \subset \eta$. Puesto que $\eta \subset F \subset \text{St}_f(\gamma) - E(\text{St}_f(\gamma))$, se cumple que $J \cap \gamma \neq \emptyset$ (Observación 4.9) y $J \cap E(\text{St}_f(\gamma)) = \emptyset$. Suponga que $J \not\subset \gamma$. Luego, por la Observación 4.11, existe $q \in E(J)$ tal que $J \cap \gamma = \{q\}$. Sea r tal que $E(J) = \{q, r\}$. Por la Observación 4.12, J es una vecindad de r en $\text{St}_f(\gamma)$ y, por ende, $r \in E(\text{St}_f(\gamma)) \cap J$, lo cual no es posible. Así $J \subset \gamma$. De este modo, $\eta \subset \gamma$ en cualquier caso. De manera análoga, $\gamma \subset \eta$. Por

lo tanto, $\eta = \gamma$.

(h) Por (b), se tiene que $\eta \cap \gamma \neq \emptyset$. Observe que $\eta \cup \gamma$ es una s-gráfica de X y que, por (c), $F \in \mathfrak{M}_{\eta \cup \gamma}$. Así, por la elección de F , se cumple que $\mathfrak{M}_{\eta \cup \gamma} \in \{\mathfrak{M}_\eta, \mathfrak{M}_\gamma\}$. Si $\eta \neq \eta \cup \gamma$ y $\gamma \neq \eta \cup \gamma$, se tiene (por (d)) que $\mathfrak{M}_{\eta \cup \gamma}$ es distinto tanto de \mathfrak{M}_η como de \mathfrak{M}_γ , lo cual no es posible. Así, $\eta \cup \gamma = \eta$ o $\eta \cup \gamma = \gamma$. Por tanto, $\gamma \subsetneq \eta$ o $\eta \subsetneq \gamma$. Puesto que $\dim \mathfrak{M}_\eta < \dim \mathfrak{M}_\gamma$, se tiene (por (e)) que $\eta \subsetneq \gamma$. Luego, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $\eta \subsetneq \eta \cup J \subset \gamma$. Note que $(\eta \cup J) \cap E(X) \subset \gamma \cap E(X) = \emptyset$. Además, como $J \subset \gamma \subset F \subset \text{St}_f(\eta)$, se cumple que $J \cap \eta \neq \emptyset$ (Observación 4.9). Así $\eta \cup J$ es una s-gráfica fina de X con $\eta \cup J \subset \gamma \subset F \subset \text{St}_f(\eta) \subsetneq \text{St}_f(\eta \cup J)$. Por tanto, $\mathfrak{M}_{\eta \cup J} \in \mathfrak{EM}(F, X)$. Como $\mathfrak{M}_{\eta \cup J} \neq \mathfrak{M}_\eta$ (por (d)), la elección de F garantiza que $\mathfrak{M}_{\eta \cup J} = \mathfrak{M}_\gamma$. Aplicando (d), se tiene que $\eta \cup J = \gamma$.

(i) Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in (0, \mu(X))$ tales que $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t_0)$. Note que, como $\gamma \cap E(X) = \emptyset$ y $\gamma \subset \text{int}_X(\text{St}_f(\gamma))$, se cumple que $\gamma \cap E(\text{St}_f(\gamma)) = \emptyset$. Además, $\text{St}_f(\gamma)$ es una s-gráfica de X y, por ende, $E(\text{St}_f(\gamma))$ es finito. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea U_n un abierto de X conexo con $\gamma \subset U_n \subset \text{cl}_X(U_n) \subset (\text{St}_f(\gamma) - E(\text{St}_f(\gamma))) \cap N_d(\gamma, \frac{1}{n})$ (véase (1.1) para el significado de N_d). Observe que, como $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto, se cumple que $\mu(\gamma) < t_0$ (Observación 1.86). Puesto que $\lim \text{cl}_X(U_n) = \gamma$, la continuidad de μ garantiza que $\lim \mu(\text{cl}_X(U_n)) = \mu(\gamma) < t_0$ y, en consecuencia, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\text{cl}_X(U_N)) < t_0$. Considere el continuo $B = \text{cl}_X(U_N) \cap \text{St}_f(\gamma^{-p})$ (Teorema 1.54). Observe que $B \subset \text{St}_f(\gamma^{-p}) - E(\text{St}_f(\gamma))$. Como $p \in E(\gamma)$, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $\gamma = \gamma^{-p} \cup J$. Luego, $\text{St}_f(\gamma) = \text{St}_f(\gamma^{-p}) \cup \text{St}_f(p)$. Note que $p \in E(\text{St}_f(\gamma^{-p})) \subset E(\text{St}_f(\gamma)) \cup \{p\}$ y que, por ende, $B \cap E(\text{St}_f(\gamma^{-p})) = \{p\}$. Así, $B \subset (\text{St}_f(\gamma^{-p}) - E(\text{St}_f(\gamma^{-p}))) \cup \{p\}$ y $\mu(B) < t_0$. Note también que, como $\mathfrak{M}_{\gamma^{-p}} \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto, $\mu(\text{St}_f(\gamma^{-p})) > t_0$. Además, por el Lema 1.10, $(\text{St}_f(\gamma^{-p}) - E(\text{St}_f(\gamma^{-p}))) \cup \{p\}$ es conexo. Así, y puesto que este último conjunto es denso en $\text{St}_f(\gamma^{-p})$, el Lema 1.85 garantiza que existe $F \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset F \subset (\text{St}_f(\gamma^{-p}) - E(\text{St}_f(\gamma^{-p}))) \cup \{p\}$. En particular, $\gamma \subset F \subset \text{St}_f(\gamma^{-p})$ y, por consiguiente, $\mathfrak{M}_\gamma, \mathfrak{M}_{\gamma^{-p}} \in \mathfrak{EM}(F, X)$. Vamos a mostrar ahora que $\mathfrak{EM}(F, X) = \{\mathfrak{M}_\gamma, \mathfrak{M}_{\gamma^{-p}}\}$. Sea η una s-gráfica fina de X con $\eta \neq \gamma$ y $F \in \mathfrak{M}_\eta$. Mostraremos primero que $\eta \subset \gamma$. Suponga, por el contrario, que existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $K \subset \eta$ y $K \not\subset \gamma$. Como $K \subset \eta \subset F \subset \text{St}_f(\gamma)$, se tiene que $K \cap \gamma \neq \emptyset$ (Observación 4.9). En consecuencia, $K \cap \gamma = \{e\}$, para algún $e \in E(K)$ (Observación 4.11) y existe $q \in E(K) - \gamma$. De este modo, K es una vecindad de q en $\text{St}_f(\gamma)$ (Observación 4.12) y $q \in E(\text{St}_f(\gamma))$. Por tanto, $q \in F \cap E(\text{St}_f(\gamma)) \subset \text{St}_f(\gamma^{-p}) \cap E(\text{St}_f(\gamma)) \subset E(\text{St}_f(\gamma^{-p}))$. Sin embargo, la elección de F garantiza que $F \cap E(\text{St}_f(\gamma^{-p})) = \{p\}$, así que lo anterior implica que $q = p$, lo cual contradice el hecho de que $p \in \gamma$ y $q \notin \gamma$. Por lo tanto, $\eta \subsetneq \gamma$. Sea $L \in \mathfrak{A}_S(X)$ con $\eta \subsetneq \eta \cup L \subset \gamma$. Luego, $L \subset \gamma \subset F \subset \text{St}_f(\eta)$. De manera análoga a lo obtenido para K , η y $\text{St}_f(\gamma)$, se cumple que existe $r \in E(L) - \eta$, que L es una vecindad de r en $\text{St}_f(\eta)$ y que, por ende, $r \in F \cap E(\text{St}_f(\eta))$. Como $r \in \gamma$ y $F \subset \text{St}_f(\eta)$, se tiene que $r \in E(F) - E(X)$ y, por ende, $r \in \text{Fr}_X(F)$. Como $\gamma - \{p\} \subset \text{int}_X(B) \subset F$, esto

implica que $r = p$. Así, $p \in E(L) - \eta$. Consideremos $a \in \gamma - \eta$. Vamos a mostrar que $a \in L$ (y, con ello, que $\gamma \subset \eta \cup L$). Sea $L' \in \mathfrak{A}_S(X)$ con $a \in L' \subset \gamma$. Luego, $\eta \subsetneq \eta \cup L' \subset \gamma$. Por un argumento completamente análogo al usado para L , se cumple que $L' \cap \eta \neq \emptyset$ y que $p \in E(L') - \eta$. Luego, $L \cup L'$ es conexo y, por ende, $(L \cup L') \cap \eta$ es conexo (Teorema 1.54). Como $L \cap \eta$ y $L' \cap \eta$ son conjuntos unitarios (Observación 4.11), lo anterior implica que $L \cap \eta = L' \cap \eta$. Así, L y L' tienen al menos dos puntos en común, $p \notin \eta$ y un punto en η . En consecuencia, por la Observación 4.11, $L = L'$. Por lo tanto, $a \in L$. De este modo, $\gamma = \eta \cup L$, con $p \in E(L) - \eta$, y, por ende, $\eta = \gamma^{-p}$. Esto muestra que $\mathfrak{CM}(F, X) = \{\mathfrak{M}_\gamma, \mathfrak{M}_{\gamma^{-p}}\}$. \square

4.2. Descomposición de los niveles de Whitney en celdas

En esta sección, utilizaremos la descomposición de los elementos de $\mathfrak{WL}(Y)$, establecida en la sección anterior para continuos $Y \in \mathfrak{D}$, con el fin de obtener información acerca de Y . Esto nos permitirá obtener información de Y , suponiendo que compare sus niveles de Whitney con algún $X \in \mathfrak{D}$ conocido (lo cual será clave para la demostración del Teorema 5.9).

Teorema 4.17 (caso $n=1$ de [19, Theorem 2.4 (a)]). *Sea G una gráfica finita y $A \in C(X)$. Entonces,*

$$\dim_B C(G) = 2 + \sum_{p \in B \cap R(G)} (\text{ord}(p, G) - 2)$$

Lema 4.18 ([2, Lemma 4.2]). *Sean $X \in \mathfrak{D}$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$ y $B \in \mathcal{A}$. Si $B \subset \mathcal{G}(X)$ y B no es una s-gráfica fina de X , entonces*

$$\dim_B \mathcal{A} + 1 = \dim_B C(X) = 2 + \sum_{p \in B \cap R(X)} (\text{ord}(p, X) - 2).$$

Demostración. Sea $G = \text{St}_f(B)$. Por el Lema 2.10, incisos (d) y (a), G es una s-gráfica libre de X y $B \subset \text{int}_X(G)$. Así, $B \in (\text{int}_X(G)) \subset \text{int}_{C(X)} C(G)$ y, por ende, $\dim_B C(G) = \dim_B C(X)$. Además, por el Teorema 4.17, se tiene que $\dim_B C(G) = 2 + \sum_{p \in B \cap R(G)} (\text{ord}(p, G) - 2)$. Dado $p \in B$, puesto que G es una vecindad de p en X , se cumple que $p \in R(G)$ si y solo si $p \in R(X)$; más aún, $\text{ord}(p, G) = \text{ord}(p, X)$. De este modo, $\sum_{p \in B \cap R(G)} (\text{ord}(p, G) - 2) = \sum_{p \in B \cap R(X)} (\text{ord}(p, X) - 2)$. Por lo tanto, $\dim_B C(X) = 2 + \sum_{p \in B \cap R(X)} (\text{ord}(p, X) - 2)$.

Por otro lado, si $B = G$, entonces B es abierto y cerrado en X , por lo cual $B = X$. Esto último no es posible porque $B \in \mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$, así que $B \subsetneq G$. Por tanto, por la Observación 1.83, $C(G) \cap \mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(G)$. Note que $B \in (\text{int}_{C(X)} C(G)) \cap \mathcal{A} \subset \text{int}_{\mathcal{A}}(C(G) \cap \mathcal{A})$. Asimismo, como B no es una s-gráfica fina de X , B no es una s-gráfica fina de G (Lema 2.8 (b)) y, por ende, el Teorema 4.6 garantiza que

$\dim_B(C(G) \cap \mathcal{A}) = \dim_B C(G) - 1$. Por lo tanto, $\dim_B \mathcal{A} = \dim_B(C(G) \cap \mathcal{A}) = \dim_B C(G) - 1 = \dim_B C(X) - 1$. \square

Note que no se hace mención alguna de \mathcal{A} en la demostración de la segunda igualdad del Lema 4.18, así que esta igualdad es independiente del nivel \mathcal{A} . Este hecho será usado en la prueba de del Teorema 5.9.

Observación 4.19. Sean $X \in \mathfrak{D}$ y F un subcontinuo de X que no es un arco libre de X y que posee más de un punto. Suponga que existe $\mathfrak{M} \in \mathfrak{CM}(F, X)$. Entonces, existe una s-gráfica fina ν de X tal que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\nu$.

Demostración. Suponga que existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset J}$. Entonces, $F \subset J$ y, considerando que J es un arco libre de X , se tiene que F también es un arco libre de X . Como esto último contradice las hipótesis iniciales, existe una s-gráfica fina ν de X tal que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\nu$. \square

Observación 4.20. Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $F \in \langle \mathcal{G}(X) \rangle$ con más de un punto. Entonces, existe $\mathfrak{M}_0 \in \mathfrak{CM}(F, X)$ tal que $\dim \mathfrak{M}_0 < \dim \mathfrak{M}$ para cada $\mathfrak{M} \in \mathfrak{CM}(F, X)$ con $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}_0$.

Demostración. Observe que $F \in \mathfrak{F}(X)$ (Teorema 1.74), así que, por el Lema 4.5 incisos (a) y (b), $\mathfrak{CM}(F, X)$ es un conjunto finito y distinto del vacío. Sea $\mathfrak{M}_0 \in \mathfrak{CM}(F, X)$ tal que $\dim \mathfrak{M}_0 \leq \dim \mathfrak{M}$ para cada $\mathfrak{M} \in \mathfrak{CM}(F, X)$. Suponga que $\mathfrak{M} \in \mathfrak{CM}(F, X)$ es tal que $\dim \mathfrak{M} = \dim \mathfrak{M}_0$. Vamos a probar que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$. Sean ν y τ s-gráficas de X tales que $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_{\nu \subset \tau}$. Sean η y γ s-gráficas de X tales que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\eta \subset \gamma}$.

Supongamos que $\nu = \emptyset$ y $\eta \neq \emptyset$. Luego, $\tau \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $\gamma = \text{St}_f(\eta)$. Note que $\mathfrak{M}_0 = C(\tau)$. Luego, por el Ejemplo 1.17 y por el Lema 4.16 (a), respectivamente, \mathfrak{M}_0 es una 2-celda y \mathfrak{M} es una $\text{ord}(\eta, G)$ -celda. Como $\text{ord}(\eta, G) \geq 3$ (Observación 4.15), se tiene que $\dim \mathfrak{M}_0 < \dim \mathfrak{M}$, lo cual contradice la elección de \mathfrak{M} . Así, $\nu \neq \emptyset$ o $\eta = \emptyset$. Por un argumento análogo, $\nu = \emptyset$ o $\eta \neq \emptyset$. De esta forma, $\nu = \emptyset$ y $\eta = \emptyset$, o bien $\nu \neq \emptyset$ y $\eta \neq \emptyset$.

Consideremos primero el caso en el que $\nu = \eta = \emptyset$. Luego, $\tau, \gamma \in \mathfrak{A}_S(X)$. Como $F \in \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}$, se tiene que $F \subset \tau \cap \gamma$ y, puesto que F tiene más de un punto, la Observación 4.11 implica que $\tau = \gamma$. Así, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$.

Consideremos ahora el caso en el que $\nu \neq \emptyset$ y $\eta \neq \emptyset$. Supongamos que $\nu \cap \eta = \emptyset$. Luego, el Lema 4.16 (b) garantiza que $F \in \mathfrak{A}_S(X)$, y así $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset F} \in \mathfrak{CM}(F, X)$. Observe que $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset F}$ es una 2-celda y que \mathfrak{M}_0 es una $\text{ord}(\nu, X)$ -celda (Ejemplo 1.17 y Lema 4.16 (a)). Como $\text{ord}(\nu, G) \geq 3$, se tiene por lo anterior que $\dim \mathfrak{M}_{\emptyset \subset F} < \dim \mathfrak{M}_0$, lo cual contradice la elección de \mathfrak{M}_0 . Así, $\nu \cap \eta \neq \emptyset$. Luego, por la Observación 4.10, $\nu \cap \eta$ es una s-gráfica de G y, por el Lema (c), $F \in \mathfrak{M}_{\nu \cap \eta}$. Además, puesto que $\nu \cap \eta \cap E(X) \subset \eta \cap E(X) = \emptyset$, se cumple que $\nu \cap \eta$ es una s-gráfica fina de X . Así, $\mathfrak{M}_{\nu \cap \eta} \in \mathfrak{CM}(F, X)$. Por otro lado, por el Lema 4.16 (a), $\mathfrak{M}_{\nu \cap \eta}$ es una $\text{ord}(\nu \cap \eta, G)$ -celda,

\mathfrak{M}_0 es una $\text{ord}(\nu, G)$ -celda y \mathfrak{M} es una $\text{ord}(\eta, G)$ -celda. Como las dimensiones de estos dos últimos espacios coinciden, se cumple que $\text{ord}(\eta, G) = \text{ord}(\nu, G)$. Además, puesto que $\dim M_0 \leq \dim \mathfrak{M}_{\nu \cap \eta}$, se tiene $\text{ord}(\eta, G) \leq \text{ord}(\nu \cap \eta, G)$. Observe que, si $\eta \neq \nu$, entonces $\nu \cap \eta \subsetneq \nu$ o $\nu \cap \eta \subsetneq \eta$, con lo cual la Observación 4.13 garantiza que $\text{ord}(\nu \cap \eta, G) < \text{ord}(\nu, G)$ o $\text{ord}(\nu \cap \eta, G) < \text{ord}(\eta, G)$, lo cual no es posible. Por tanto, $\eta = \nu$ y $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$ también en este caso.

Esto prueba que $\dim \mathfrak{M}_0 < \dim \mathfrak{M}$ para cada $\mathfrak{M} \in \mathfrak{CM}(F, X)$ con $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}_0$ y concluye esta prueba. \square

Sean $X \in \mathfrak{D}$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$ y $F \in \mathcal{A} \cap \langle \mathcal{G}(X) \rangle$. Denotamos

$$\mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A}) = \{\mathfrak{M} \in \mathfrak{CM}(F, X) : \mathfrak{M} \cap \mathcal{A} \text{ tiene más de un punto}\}.$$

También, para los siguientes dos resultados, usaremos la notación que sigue. Suponga que F no es un arco libre de X . Por consiguiente, cada elemento de $\mathfrak{CM}(F, X)$ es de la forma \mathfrak{M}_ν , en donde ν es una s-gráfica fina de X (Observación 4.19). Luego, por la Observación 4.20 y el Lema 4.16 (d), existe una única s-gráfica fina $\eta_{\min}(F, X)$ de X tal que $\dim \mathfrak{M}_{\eta_{\min}(F, X)} < \dim \mathfrak{M}$ para cada $\mathfrak{M} \in \mathfrak{CM}(F, X)$ con $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}_{\eta_{\min}(F, X)}$. Asimismo, dada una s-gráfica fina η de X con $\eta \subset F$, sea

$$\mathfrak{A}_S^b(X, \eta, F) = \{J \in \mathfrak{A}_S^o(X, \eta) : J \subset F, J \cap E(X) = \emptyset\}.$$

Lema 4.21 ([2, Lemma 4.3]). *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $F \in \langle \mathcal{G}(X) \rangle$ con más de un punto. Asuma que F no es un arco libre de X . Sea $\eta_0 = \eta_{\min}(F, X)$. Entonces,*

$$\mathfrak{CM}(F, X) = \{\mathfrak{M}_{\gamma_{\mathfrak{C}}} : \mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}_S^b(X, \eta_0, F), \gamma_{\mathfrak{C}} = \eta_0 \cup \bigcup \mathfrak{C}\}.$$

Demostración. En primer lugar, considere una s-gráfica fina γ de X tal que $F \in \mathfrak{M}_\gamma$. Note que, si $\gamma \cap \eta_0 = \emptyset$, el Lema 4.16 (b) implica que $F \in \mathfrak{A}_S(X)$, lo cual contradice el hecho de que F no es un arco libre de X . Así, $\gamma \cap \eta_0 \neq \emptyset$. Luego, por el Lema 4.16 (c), se tiene que $F \in \mathfrak{M}_{\gamma \cap \eta_0}$. Si $\gamma \cap \eta_0 \subsetneq \eta_0$, entonces $\dim \mathfrak{M}_{\gamma \cap \eta_0} < \dim \mathfrak{M}_{\eta_0}$ (Lema 4.16 (e)), lo cual contradice la minimalidad de η_0 . Esta contradicción muestra que $\gamma \cap \eta_0 = \eta_0$, lo cual implica que $\eta_0 \subset \gamma \subset F \subset \text{St}_f(\eta_0)$.

Sean $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_S^b(X, \eta_0, \gamma)$ y $\gamma_{\mathfrak{C}} = \eta_0 \cup \bigcup \mathfrak{C}$. Luego, cualquier $J \in \mathfrak{C}$ cumple que $J \subset \gamma \subset F$ y, por consiguiente, $J \in \mathfrak{A}_S^b(X, \eta_0, F)$. Así, $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}_S^b(X, \eta_0, F)$. Vamos a mostrar que $\gamma = \gamma_{\mathfrak{C}}$. Es inmediato que $\gamma_{\mathfrak{C}} \subset \gamma$. Sean $p \in \gamma - \eta_0$ y $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $p \in K \subset \gamma$. Luego, $p \in K - \eta_0$, por lo cual $K \not\subset \eta_0$. Además, $K \subset \gamma \subset \text{St}_f(\eta_0)$ y, por ende, $K \cap \eta_0 \neq \emptyset$ (Observación 4.9). Así, $K \in \mathfrak{A}_S^o(X, \eta_0)$. Además, $K \cap E(X) \subset \gamma \cap E(X) = \emptyset$. Por lo tanto, $K \in \mathfrak{C}$ y $p \in \gamma_{\mathfrak{C}}$. Esto muestra que $\gamma = \gamma_{\mathfrak{C}}$.

Por la Observación 4.19 y lo mostrado en los dos párrafos anteriores, cada elemento de $\mathfrak{CM}(F, X)$ es de la forma $\mathfrak{M}_{\gamma_{\mathfrak{C}}}$, en donde

$$\gamma_{\mathfrak{C}} = \eta_0 \cup \left(\bigcup \mathfrak{C} \right), \quad (4.4)$$

para algún $\mathfrak{C} \in \mathfrak{A}_S^b(X, \eta_0, F)$.

Recíprocamente, si $\mathfrak{C} \in \mathfrak{A}_S^b(X, \eta_0, F)$ y $\gamma_{\mathfrak{C}} = \eta_0 \cup \bigcup \mathfrak{C}$, entonces es inmediato que $\gamma_{\mathfrak{C}}$ es una s-gráfica fina de X , que $\gamma_{\mathfrak{C}} \subset F \subset \text{St}_f(\eta_0) \subset \text{St}_f(\gamma_{\mathfrak{C}})$ y, por ende, que $\mathfrak{M}_{\gamma_{\mathfrak{C}}} \in \mathfrak{CM}(F, X)$. \square

Observación 4.22. Sean $X \in \mathfrak{D}$. Si $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y $E(J) = \{p, q\}$, entonces

$$\mathfrak{CM}(J, X) = \{\mathfrak{M}_{\nu} : \nu \in \{\{p\}, \{q\}, J\} \text{ y } \nu \cap E(X) = \emptyset\} \cup \{\mathfrak{M}_{\emptyset \subset J}\}.$$

Demostración. Sea $\mathfrak{M} \in \mathfrak{CM}(J, X)$. Si $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset K}$ para algún $K \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces $J \subset K$ y, por la maximalidad de J , se cumple que $J = K$. Así, en el caso anterior, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset J}$. Suponga que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\nu}$ para alguna s-gráfica fina ν de X con $\nu \neq J$. Luego, $\nu \subsetneq J \subset \text{St}_f(\nu)$ y, por la Observación 4.12, existe $p \in E(J)$ tal que $J \cap \nu = \{p\}$. Así, $\nu = \{p\}$ y, claramente, $p \notin E(X)$. Esto muestra la contención hacia la derecha de la observación. La contención hacia la izquierda es inmediata. \square

Una *estrella libre* de X es cualquier conjunto que es un elemento de $\mathfrak{A}_S(X)$ o que es de la forma $\text{St}_f(\gamma)$, en donde γ es una s-gráfica fina de X .

Lema 4.23 ([2, Lemma 4.4]). Sean X y Y elementos de \mathfrak{D} que no son gráficas finitas. Sean $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$ y $\mathcal{B} \in \mathfrak{WL}(Y)$. Asuma que existe un homeomorfismo $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Entonces, se cumplen los siguientes enunciados.

- (a) Para cada s-gráfica fina γ de X tal que $\mathfrak{M}_{\gamma} \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto, existe una única s-gráfica fina ξ de Y tal que $h(\mathfrak{M}_{\gamma} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\xi} \cap \mathcal{B}$.
- (b) Para cada $F \in \mathcal{A}$, se tiene que $|\mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A})| = |\mathfrak{NM}(h(F), Y, \mathcal{B})|$. Por tanto, si $F \in \mathcal{A}$ no es una s-gráfica fina de X ni una estrella libre de X y $h(F)$ no es una s-gráfica fina de Y ni una estrella libre de Y , entonces $|\mathfrak{CM}(F, X)| = |\mathfrak{CM}(h(F), Y)|$.

En (c) y en (d) suponga además que \mathcal{A} no contiene ningún elemento que es una s-gráfica de X .

- (c) Ningún elemento de \mathcal{B} es una s-gráfica fina de Y . También, si $S \in \mathcal{B}$ es una estrella libre de Y , entonces $S \in \mathfrak{A}_S(Y)$ o existen $L \in \mathfrak{A}_S(Y)$, una s-gráfica ξ de Y y $p \in Y$ tales que $S = \xi \cup L$ y $\xi \cap L = \{p\} = \text{Fr}_Y(\xi)$; en este último caso, $|\mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B})| = 1$.
- (d) Sean η y γ s-gráficas finas de X tales que tanto $\mathfrak{M}_{\eta} \cap \mathcal{A}$ como $\mathfrak{M}_{\gamma} \cap \mathcal{A}$ tienen más de un punto. Sean ζ y ξ s-gráficas finas de Y con $h(\mathfrak{M}_{\eta} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\zeta} \cap \mathcal{B}$ y $h(\mathfrak{M}_{\gamma} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\xi} \cap \mathcal{B}$. Si $\gamma = \eta \cup J$ para algún $J \in \mathfrak{A}_S(X)$, entonces $\xi = \zeta \cup L$ para algún $L \in \mathfrak{A}_S(Y)$. Si $\eta \subsetneq \gamma$, entonces $\zeta \subsetneq \xi$.

Demostración. (a) Sea $G = \text{St}_f(\text{St}_f(\gamma))$. Luego G es una s-gráfica libre de X y $\gamma \subset \text{St}_f(\gamma) \subset \text{int}_X(G)$ (Lema 2.10, incisos (d) y (a)). Por el Lema 2.8 (b), esto implica que γ es una s-gráfica fina de G . Además, como cada $F \in \mathfrak{M}_\gamma$ cumple que $F \in \langle \text{St}_f(\gamma) \rangle \subset \langle \text{int}_X(G) \rangle \subset C(G)$, se cumple que $\mathfrak{M}_\gamma \subset \text{int}_{C(X)} C(G)$ y $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A} \subset \text{int}_{\mathcal{A}}(C(G) \cap \mathcal{A})$. Por otro lado, por el Lema 4.5 (c), $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A} \subset \{B \in \mathcal{A} : \dim_B \mathcal{A} < \infty\}$ y así $h(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) \subset \{S \in \mathcal{B} : \dim_S \mathcal{B} < \infty\}$. Por el Lema 3.20, esto implica que $h(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A})$ es un continuo contenido en $\mathfrak{F}(Y)$. Luego, por el Lema 2.10 (g), existe una s-gráfica libre T de Y tal que $h(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) \subset \langle \text{int}_Y(T) \rangle \subset \text{int}_{C(Y)} C(T)$. Así, $h(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) \subset \text{int}_{\mathcal{B}}(C(T) \cap \mathcal{B})$. Por otro lado, por el Lema 4.16 (f), $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A} - \partial(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A})$ es un subconjunto abierto de \mathcal{A} homeomorfo a $(0, 1)^m$, para algún $m \in \mathbb{N}$. En consecuencia $h(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) - \partial h(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A})$ es un subconjunto abierto de \mathcal{B} (y, por consiguiente, de $C(T)$) homeomorfo a $(0, 1)^m$. Por el Teorema 4.8 y el Lema 2.8 (e), existe una s-gráfica fina ξ de T tal que $h(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) - \partial h(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) \subset \mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}$. Note que, por el Lema 2.10 (f), ξ es una s-gráfica fina de Y . También, $h(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) \subset \mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}$. Del mismo modo, existen una s-gráfica libre G' de X y una s-gráfica fina γ' de G' (y, en consecuencia, de X) tales que $h^{-1}(\mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}) \subset \langle \text{int}_X(G') \rangle \cap \mathcal{A} \subset \text{int}_{\mathcal{A}}(C(G') \cap \mathcal{A})$ y $h^{-1}(\mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}) \subset \mathfrak{M}_{\gamma'}$. Observe que $\mathfrak{M}_{\gamma'} \cap \mathcal{A}$ es una N -celda (Lema 4.16 (f)), para alguna $N \in \mathbb{N}$, que contiene al conjunto $(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) - \partial(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A})$. Como este último conjunto es abierto en $\mathfrak{M}_{\gamma'} \cap \mathcal{A}$ (porque es abierto en \mathcal{A}), se cumple que $N = m$. Note que, dado cualquier $F \in \mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}$, se tiene $F \in h^{-1}(\mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}) \subset \langle \text{int}_X(G') \rangle$ y, como consecuencia, $\gamma \subset F \subset \text{int}_X(G')$. Así, $\gamma \subset \text{int}_X(G')$ y, por tanto, el Lema 2.8 (b) garantiza que γ es una s-gráfica fina de G' . Si $\mathfrak{M}_\gamma \neq \mathfrak{M}_{\gamma'}$, entonces, por los Lemas 2.8 (e) y 4.7, $\dim(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathfrak{M}_{\gamma'} \cap \mathcal{A}) \leq m - 2$ y, por ende, $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A} \not\subset \mathfrak{M}_{\gamma'} \cap \mathcal{A}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathfrak{M}_\gamma = \mathfrak{M}_{\gamma'}$, y así $h(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}$. La unicidad se sigue del Lema 4.16 (d).

(b) Sea $F \in \mathcal{A}$. Sea $\mathfrak{M} \in \mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A})$. Afirmamos que existe un único elemento $\mathfrak{M}' \in \mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A})$ tal que $h(\mathfrak{M} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}' \cap \mathcal{B}$. Para probar esta afirmación, suponga primero que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\gamma$, para alguna s-gráfica fina γ de X . Entonces, por (a), se tiene que $h(\mathfrak{M} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}$ para alguna s-gráfica fina ξ de Y . Es inmediato que $\mathfrak{M}_\xi \in \mathfrak{NM}(h(F), Y, \mathcal{B})$. Note que $\text{ord}(\xi, Y) \geq 3$ (Observación 4.15) y así el Lema 4.16 (a) implica que $\mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}$ no es un arco. Sea $\mathfrak{M}' \in \mathfrak{NM}(h(F), Y, \mathcal{B})$ con $h(\mathfrak{M}' \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}' \cap \mathcal{B}$. Si $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset L}$ para algún $L \in \mathfrak{A}_S(Y)$, entonces $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset L} \cap \mathcal{A}$ es un arco (Teorema 3.9) y, por ende, $\mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}$ es un arco, lo cual no es posible. De este modo, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_\zeta$, para alguna s-gráfica fina ζ de Y . Luego, $\mathfrak{M}_\zeta \cap \mathcal{B} = h(\mathfrak{M}' \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}$ y así, por (a), se tiene $\zeta = \xi$. Por tanto, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_\xi$, lo cual muestra la unicidad de \mathfrak{M}_ξ . Suponga ahora que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset K}$ para algún $K \in \mathfrak{A}_S(X)$. Luego, se sigue del Teorema 3.9 que $h(\mathfrak{M} \cap \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}_S(\mathcal{B})$ y que existe $L \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(\mathfrak{M} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset L} \cap \mathcal{B}$. Es inmediato que $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset L} \in \mathfrak{NM}(h(F), Y, \mathcal{B})$. Sea $\mathfrak{M}' \in \mathfrak{NM}(h(F), Y, \mathcal{B})$ con $h(\mathfrak{M}' \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}' \cap \mathcal{B}$. Si $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_\zeta$ para alguna s-gráfica fina ζ de Y , entonces el conjunto $\mathfrak{M}' \cap \mathcal{B} = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset L} \cap \mathcal{B}$ es una n -celda con $n = \text{ord}(\zeta) - 1 \geq 2$ (Lema 4.16 (a) y Observación 4.15),

lo cual no es posible. Así, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset L'}$, para algún $L' \in \mathfrak{A}_S(Y)$. Puesto que $h(F) \in \mathfrak{M}_{\emptyset \subset L} \cap \mathfrak{M}_{\emptyset \subset L'}$, se cumple que $h(F) \subset L \cap L'$. Considerando que $h(F)$ es un continuo no degenerado, esto implica que $(L - E(L)) \cap L' \neq \emptyset$ y, por ende, que $L = L'$ (Corolario 1.34). De este modo, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset L}$, lo cual muestra la unicidad de $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset L}$ y concluye la prueba de nuestra afirmación. Por lo tanto, $|\mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A})| \leq |\mathfrak{NM}(h(F), Y, \mathcal{B})|$. De forma análoga, $|\mathfrak{NM}(h(F), Y, \mathcal{B})| \leq |\mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A})|$. En consecuencia, se cumple la primera igualdad de (b).

Ahora demostraremos la segunda parte de (b). Supongamos que $F \in \mathcal{A}$ no es una s-gráfica fina de X ni una estrella libre de X . Haremos la prueba de que $\mathfrak{EM}(F, X) = \mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A})$. Para ello, basta mostrar que $\mathfrak{EM}(F, X) \subset \mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A})$. Consideremos primero una s-gráfica fina γ de X tal que $\mathfrak{M}_\gamma \in \mathfrak{EM}(F, X)$. Luego, $\gamma \subset F \subset \text{St}_f(\gamma)$. Más aún, se sigue de las hipótesis que $\gamma \subsetneq F \subsetneq \text{St}_f(\gamma)$. Así, por la Observación 1.86, $\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}$ tiene al menos dos puntos, es decir, $\mathfrak{M}_\gamma \in \mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A})$. De manera similar, sea $L \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset L} \in \mathfrak{EM}(F, X)$. Sea $p \in F$. Luego, $F \subset L$ y, puesto que F no es una estrella libre de X y es un continuo no degenerado, se cumple que $\{p\} \subsetneq F \subsetneq L$. Así, por la Observación 1.86, $\mathfrak{M}_{\{p\} \subset L} \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto y, como $\mathfrak{M}_{\{p\} \subset L} \subset \mathfrak{M}_{\emptyset \subset L}$, el conjunto $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset L} \cap \mathcal{A}$ también tiene al menos dos puntos, es decir, es un elemento de $\mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A})$. Esto muestra que $\mathfrak{EM}(F, X) \subset \mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A})$. Por consiguiente, si F no es una s-gráfica fina de X ni una estrella libre de X , entonces

$$\mathfrak{EM}(F, X) = \mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A}). \quad (4.5)$$

Del mismo modo, si $h(F)$ no es una s-gráfica fina de Y ni una estrella libre de Y , entonces $\mathfrak{EM}(h(F), Y) = \mathfrak{NM}(h(F), Y, \mathcal{B})$. Por lo tanto, se cumple la segunda parte de (b).

(c) Sean $S \in \mathcal{B}$ y $F = h^{-1}(S)$. Consideremos primero el caso en el que F es un arco libre de X . Luego, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $F \subset J$ (Lema 1.37). Más aún, como F no es una estrella libre de X (porque \mathcal{A} no tiene elementos que son s-gráficas de X), $F \subsetneq J$ y, por ende, $C(J) \cap \mathcal{A}$ contiene a F pero no a J . Así, se sigue del Teorema 3.9 que $F \in C(J) \cap \mathcal{A} \in \mathfrak{A}_S(\mathcal{A})$, que $S \in h(C(J) \cap \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}_S(\mathcal{B})$ y que existe $L \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(C(J) \cap \mathcal{A}) = C(L) \cap \mathcal{B}$. En consecuencia, $S \subsetneq L$, lo cual implica que S no es una s-gráfica fina de Y ni una estrella libre de Y . Por tanto, (c) se satisface si F es un arco libre de X . Suponga ahora S es un arco libre de Y y que S es una s-gráfica fina de Y . Luego $S \in \mathfrak{A}_S(Y)$. Note también que $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset S} \cap \mathcal{B} = \{S\} = \mathfrak{M}_S \cap \mathcal{B}$, así que, por la Observación 4.22, $\mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B}) = \{\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_q\}$, en donde $\{p, q\} = E(S)$. En consecuencia, por (b), existen s-gráficas finas η y γ de X tales que $h(\mathfrak{M}_\eta \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_p \cap \mathcal{B}$, $h(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_q \cap \mathcal{B}$ y $\mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A}) = \{\mathfrak{M}_\eta, \mathfrak{M}_\gamma\}$. Además, $\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{M}_q = \{S\}$ (Lema 4.16 (b)) y, por ende, $\mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A} = \{F\}$. Puesto que $F \notin \mathfrak{A}_S(X)$, se tiene que $\eta \cap \gamma \neq \emptyset$ (Lema 4.16 (b)). Por consiguiente, $F \in \mathfrak{M}_{\eta \cap \gamma}$ (Lema 4.16 (c)). Note que, como F no es una s-gráfica de X , se cumple que

$\eta \cap \gamma \subsetneq F \subsetneq \text{St}_f(\eta \cap \gamma)$, así que $\mathfrak{M}_{\eta \cap \gamma} \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto (Observación 1.86). Así, $\mathfrak{M}_{\eta \cap \gamma} \in \{\mathfrak{M}_\eta, \mathfrak{M}_\gamma\}$. Por consiguiente, $\eta \cap \gamma \in \{\eta, \gamma\}$ (Lema 4.16 (d)), es decir, $\eta \subset \gamma$ o $\gamma \subset \eta$. Suponga, sin pérdida de generalidad, que $\eta \subset \gamma$. Luego, $\mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma = \mathfrak{M}_{\gamma \subset \text{St}_f(\eta)}$. Además, por la Observación 1.86, $\eta \subsetneq F \subsetneq \text{St}_f(\gamma)$ y, por ende, la misma observación garantiza que $\mathfrak{M}_{\gamma \subset \text{St}_f(\eta)} \cap \mathcal{A}$ tiene más de un elemento. Esto contradice el hecho de que $\mathfrak{M}_{\gamma \subset \text{St}_f(\eta)} \cap \mathcal{A} = \{F\}$. De este modo, si S es un arco libre de Y entonces S no es una s-gráfica fina de Y . Además, es inmediato que si S es un arco libre de Y y una estrella libre de Y , entonces $S \in \mathfrak{A}_S(Y)$. Por lo tanto, (c) se cumple en el caso en el que S es un arco libre de Y . De esta forma, podemos suponer que F no es un arco libre de X y que S no es un arco libre de Y . Esto garantiza que cada elemento de $\mathfrak{EM}(F, X)$ (de $\mathfrak{EM}(S, Y)$) sea de la forma \mathfrak{M}_γ , para alguna s-gráfica fina de X (de Y).

Sean $\xi_0 = \eta_{\min}(S, Y)$ y $S' = \xi_0 \cup \bigcup \mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0, S)$. Es inmediato que S' es una s-gráfica fina de Y y que $\xi_0 \subset S' \subset S$. Mostraremos que

$$\text{si } S \text{ es una s-gráfica fina de } Y \text{ o una estrella libre de } Y, \text{ entonces } \xi_0 \subsetneq S' \quad (4.6)$$

Suponga primero que S es una s-gráfica fina de Y . Luego, $S = S'$. Como S tiene más de un punto y no es un arco libre de Y , se cumple que S es la unión de dos o más elementos distintos de $\mathfrak{A}_S(Y)$. Sea $q \in E(S)$. Luego, S^{-q} es una s-gráfica fina de Y contenida propiamente en S y existe $L \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $S = S^{-q} \cup L$. Más aún, $L \cap S^{-q} \neq \emptyset$ y $S^{-q} \subset S \subset \text{St}_f(S^{-q})$. Así, $\mathfrak{M}_{S^{-q}} \in \mathfrak{EM}(S, Y)$. Note que $\mathfrak{M}_{S^{-q} \cap \xi_0} \in \mathfrak{EM}(S, Y)$ (Lema 4.16, incisos (b) y (c)). Si $S^{-q} \cap \xi_0 \subsetneq \xi_0$, entonces $\dim \mathfrak{M}_{S^{-q} \cap \xi_0} < \dim \mathfrak{M}_{\xi_0}$ (Observación 4.13 y Lema (a)), lo cual contradice la minimalidad de ξ_0 . Así, $S^{-q} \cap \xi_0 = \xi_0$ y, por ende, $\xi_0 \subset S^{-q} \subsetneq S$. Supongamos, ahora que S es una estrella libre de Y . Sea ξ una s-gráfica fina de Y tal que $S = \text{St}_f(\xi)$. Luego, $\mathfrak{M}_\xi \in \mathfrak{EM}(S, Y)$. De manera análoga a lo hecho para S^{-q} en el caso anterior, tenemos que $\xi_0 \subset \xi$. Luego, $\text{St}_f(\xi_0) \subset \text{St}_f(\xi) = S \subset \text{St}_f(\xi_0)$. Así, $S = \text{St}_f(\xi_0)$. Suponga que $\xi_0 = S'$. Luego $\mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0, S) = \emptyset$. Note que $\text{St}_f(\xi_0)$ es una vecindad de ξ_0 (Lema 2.10 (a)). Sean $p \in \text{St}_f(\xi_0) - \xi_0$ y $L \in \mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0)$ tal que $p \in L$. Luego, por la Observación 4.11, existe $r \in E(L)$ tal que $L \cap \xi_0 = \{r\}$. Note que $L \subset S$ y que, como $\mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0, S) = \emptyset$, esto implica que existe $e \in L \cap E(X)$. Así, $e \in E(L)$ y $e \in \text{int}_Y(L)$ (Observación 2.3). Como L es un arco libre y $p \in L - \xi_0 = L - \{r\}$, esto implica que $L - \{r\}$ es un abierto de Y que contiene a p y que está contenido en $\text{St}_f(\xi_0)$. Por tanto, $p \in \text{int}_Y(\text{St}_f(\xi_0))$. Esto muestra que $\text{St}_f(\xi_0)$ es abierto y cerrado en Y y, en consecuencia, que este conjunto es igual a Y . Como esto último contradice la hipótesis de que Y no es una gráfica finita, se cumple que $\xi_0 \subsetneq S'$. Por lo tanto, se cumple (4.6).

Vamos a probar que

$$S \text{ es una s-gráfica fina de } Y \text{ si y solo si } \mathfrak{M}_{S'} \in \mathfrak{EM}(S, Y) - \mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B}). \quad (4.7)$$

Note primero que, por el Lema 4.21, $\mathfrak{M}_{S'} \in \mathfrak{EM}(S, Y)$, es decir, $S' \subset S \subset \text{St}_f(S')$. Supongamos que S es una s-gráfica fina de Y . Luego, $\mathfrak{M}_S \in \mathfrak{EM}(S, Y)$ y, por

la Observación 1.86, $\mathfrak{M}_S \notin \mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B})$. Además, lo primero implica, por el Lema 4.21, que $S = \xi_0 \cup \bigcup \mathcal{C}$, para algún $\mathcal{C} \subset \mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0, S)$. Así, $S \subset S'$ y, por ende, $S = S'$ y $\mathfrak{M}_{S'} \in \mathfrak{EM}(S, Y) - \mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B})$. Recíprocamente, supongamos que $\mathfrak{M}_{S'} \in \mathfrak{EM}(S, Y) - \mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B})$. Luego, por la Observación 1.86, $S = S'$ o $S = \text{St}_f(S')$. Consideremos primero el caso en el que $S = \text{St}_f(S')$. Luego, considerando que $S \in \mathfrak{M}_{\xi_0}$ y $\xi_0 \subset S'$, se cumple que $\text{St}_f(S') \subset \text{St}_f(\xi_0) \subset \text{St}_f(S')$. Estas dos últimas relaciones implican que $\text{St}_f(S') = \text{St}_f(\xi_0)$. Además, por 4.6, $\xi_0 \subsetneq S'$. De este modo, el Teorema 4.3 (b) garantiza que $\mathfrak{M}'_S \subset \partial \mathfrak{M}_{\xi_0}$ y, por consiguiente, que $\dim \mathfrak{M}_{S'} < \dim \mathfrak{M}_{\xi_0}$. Esto contradice la minimalidad de ξ_0 . Por lo tanto, el caso $S = \text{St}_f(S')$ no es posible. Así, $S = S'$ y S es una s-gráfica fina de Y .

Ahora mostraremos que

$$S \text{ es una estrella libre de } Y \text{ si y solo si } \mathfrak{M}_{\xi_0} \in \mathfrak{EM}(S, Y) - \mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B}). \quad (4.8)$$

Si S es una estrella libre de Y , entonces, como fue mostrado en la prueba de (4.6), $S = \text{St}_f(\xi_0)$. Más aún, esta última igualdad implica, por la Observación 1.86, que $\mathfrak{M}_{\xi_0} \notin \mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B})$. Supongamos que $\mathfrak{M}_{\xi_0} \notin \mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B})$. Luego, $S = \xi_0$ o $S = \text{St}_f(\xi_0)$. Puesto que $\xi_0 \subsetneq S' \subset S$, se tiene que $S = \text{St}_f(\xi_0)$.

Por otro lado, considere una s-gráfica fina ξ de Y con $\xi_0 \subsetneq \xi \subsetneq S$. Note que $\text{St}_f(\xi_0) \subset \text{St}_f(\xi)$. Si $\text{St}_f(\xi_0) = \text{St}_f(\xi)$, entonces $\mathfrak{M}_\xi \subset \partial \mathfrak{M}_{\xi_0}$ (Teorema 4.3 (b)), lo cual implica que $\dim \mathfrak{M}_\xi < \dim \dim \mathfrak{M}_{\xi_0}$. Puesto que esto último contradice la minimalidad de ξ_0 , se tiene que $\text{St}_f(\xi_0) \subsetneq \text{St}_f(\xi)$. Así, $\xi \subsetneq S \subset \text{St}_f(\xi)$, es decir, $\mathfrak{M}_\xi \in \mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B})$ (Observación 1.86). Por lo tanto

$$\text{para cada } \mathcal{C} \subsetneq \mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0, S) \text{ con } \mathcal{C} \neq \emptyset, \text{ se tiene } \mathfrak{M}_{\xi_0 \cup \mathcal{C}} \in \mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B}) \quad (4.9)$$

Note que, por el Lema 4.21 y (4.9), se tiene $\mathfrak{EM}(S, Y) - \{\mathfrak{M}_{\xi_0}, \mathfrak{M}_{S'}\} \subset \mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B})$. Sean $\chi_f = 1$ o $\chi_f = 0$ si S es una s-gráfica fina de Y o si no lo es, respectivamente, y $\chi_s = 1$ o $\chi_s = 0$ si S es una estrella libre de Y o si no lo es, respectivamente. Afirmamos que

$$|\mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B})| = |\mathfrak{EM}(S, Y)| - \chi_f - \chi_s. \quad (4.10)$$

Si $\chi_f = 0$ y $\chi_s = 0$, entonces por (4.7) y (4.8), se tiene que $\mathfrak{M}_{\xi_0}, \mathfrak{M}_{S'} \in \mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B})$. Así, en este caso $\mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B}) = \mathfrak{EM}(S, Y)$ y se cumple (4.10). Si $\chi_f = 1$, entonces (4.6) y (4.7) implican que $\mathfrak{M}_{\xi_0} \neq \mathfrak{M}_{S'}$ y que $\mathfrak{M}_{S'} \notin \mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B})$. Además, por 4.8, $\xi_s = 1$ si y solo si $\mathfrak{M}_{\xi_0} \notin \mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B})$. De este modo, si $\chi_f = 1$, entonces se cumple (4.10). Del mismo modo, se tiene la igualdad (4.10) si $\chi_s = 1$.

Por otro lado, por el Lema 4.21, se cumple $|\mathfrak{EM}(S, Y)| = 2^{k_1}$, en donde $k_1 = |\mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0, S)|$ y, como ya fue establecido, $\xi_0 = \eta_{\min}(S, Y)$. Así, por lo anterior y por (4.10), se cumple que

$$|\mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B})| = 2^{k_1} - \chi_f - \chi_s. \quad (4.11)$$

Además, también por el Lema 4.21, se tiene que $|\mathfrak{CM}(F, X)| = 2^{k_0}$, en donde $\eta_0 = \eta_{\min}(F, X)$ y $k_0 = |\mathfrak{A}_S^b(X, \eta_0, F)|$. Más aún, como F no es una s-gráfica de X , se tiene por (4.5) que $\mathfrak{CM}(F, X) = \mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A})$. De este modo,

$$|\mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A})| = 2^{k_0}. \quad (4.12)$$

Por lo tanto, por (b), (4.11) y (4.12), se satisface la igualdad

$$2^{k_0} = 2^{k_1} - \chi_f - \chi_s. \quad (4.13)$$

Supongamos que S es una s-gráfica fina de Y , es decir, que $\chi_f = 1$. Luego, $2^{k_0} = 2^{k_1} - \chi_s - 1$, lo cual implica que $k_1 \leq 2$ y $k_0 \leq 1$. Como S es una s-gráfica con más de un punto y no es un arco libre de Y , se cumple que S es la unión de dos o más elementos de $\mathfrak{A}_S(Y)$. Además, por el Teorema 1.9, existen $e_1, e_2 \in S$ distintos y tales que los conjuntos $S - \{e_1\}$ y $S - \{e_2\}$ son conexos. Luego, por el Teorema 1.53, $e_1, e_2 \in E(S)$. Considere S^{-e_1} y sea $L_1 \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $S = S^{-e_1} \cup L_1$. Como $e_1 \in L_1 - S^{-e_1}$, existe $p_1 \in E(L_1)$ tal que $L_1 \cap S^{-e_1} = \{p_1\}$ (Observación 4.11). Luego, $L_1 - \{p_1\}$ es abierto en S . Si $e_2 \in L_1$, entonces $e_2 \in E(L_1)$, $e_2 = p_1$ y $e_2 \in \text{int}_S(L_1)$ (Observación 2.3), con lo cual L_1 es abierto y cerrado en S , es decir, $L_1 = S$. Como esto último contradice el hecho de que S no es un arco libre de Y , se tiene que $e_2 \in S - L_1 \subset S^{-e_1}$. Así, $e_2 \neq p_1$ y ambos puntos son elementos de S^{-e_1} . Como consecuencia de esto, S^{-e_1} es una s-gráfica de Y no degenerada y podemos considerar la s-gráfica $S_0 = (S^{-e_1})^{-e_2}$. Sea $L_2 \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $S^{-e_1} = S_0 \cup L_2$. Como $e_2 \in L_2 - S_0$, existe $p_2 \in E(L_2)$ tal que $L_2 \cap S_0 = \{p_2\}$ (Observación 4.11). Si $L_1 \cap S_0 = \emptyset$, entonces $p_1 \in L_2 - S_0 = L_2 - \{p_2\}$ y, ya que $L_1 \cap L_2 \subset E(L_2)$ (Lema 1.34), $p_1 = e_2$. Esto último implica que $L_1 \cup L_2$ es un arco contenido en S (porque Y no contiene curvas cerradas simples) y $e_2 \in (L_1 \cup L_2) - E(L_1 \cup L_2)$, lo cual contradice el hecho de que $e_2 \in E(S)$. De este modo, $L_1 \cap S_0 \neq \emptyset$. Por tanto, $S_0 \subset S \subset \text{St}_f(S_0)$, es decir, $\mathfrak{M}_{S_0} \in \mathfrak{CM}(S, Y)$. Luego, por el Lema 4.21, $\xi_0 \subset S_0$ y, como $S \subset \text{St}_f(\xi_0)$, se tiene que $L_1 \not\subset \xi_0$ y $L_1 \cap \xi_0 \neq \emptyset$ (esto último, por la Observación 4.9). Así, $L_1 \in \mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0, S)$. De forma análoga, $L_2 \in \mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0, S)$. Esto muestra que $|\mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0, S)| \geq 2$. Por tanto, $k_1 = 2$, $\chi_s = 1$ y $k_0 = 1$. Así, S es una estrella libre de Y y, al igual que en la prueba de 4.6, se cumple que $S = \text{St}_f(\xi_0)$. Por otro lado, $\text{St}_f(\xi_0)$ es libre en Y y es una vecindad de ξ_0 (Lema 2.10, incisos (d) y (a)), además de que ξ_0 es una s-gráfica fina de $\text{St}_f(\xi_0)$ (Lema 2.8 (b)). Luego, por las Observaciones 4.13 y 4.15, se tiene

$$|\mathfrak{A}_S^o(\text{St}_f(\xi_0), \xi_0)| \geq 3. \quad (4.14)$$

Por otro lado, se sigue del Lema 2.7 (c) que $\mathfrak{A}_S^o(\text{St}_f(\xi_0), \xi_0) \subset \mathfrak{A}_S^o(Y, \xi_0)$. Además, como $S = \text{St}_f(\xi_0)$ es fina en Y , se tiene $\mathfrak{A}_S^o(Y, \xi_0) = \mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0, S)$. En consecuencia, $k_1 = |\mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0, S)| \geq 3$, una contradicción. Por lo tanto, S no es una s-gráfica fina de Y , es decir, $\chi_f = 0$.

Supongamos ahora que S es una estrella libre de Y . Luego, $S = \text{St}_f(\xi_0)$ (como en la prueba de 4.6), $2^{k_0} = 2^{k_1} - 1$ y, por consiguiente, $k_0 = 0$ y $k_1 = 1$. En consecuencia, el conjunto $\mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0, S)$ tiene un único elemento, digamos L . Sean p y q tales que $E(L) = \{p, q\}$ y $L \cap \xi_0 = \{q\}$ (Observación 4.11). Sea $L' \in \mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0)$, con $L' \neq L$. Luego, $L' \notin \mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0, S)$, por lo cual $L' \cap E(X) \neq \emptyset$. Por la Observación 4.11, existen p' y q' tales que $E(L') = \{p', q'\}$ y $L' \cap \xi_0 = \{q'\}$. Note que $L \cap L' \subset E(L')$ (Corolario 1.34) y, por consiguiente, $\xi_0 \cup L$ es una s-gráfica que no contiene a L' . Así, $(\xi_0 \cup L) \cap L' = \{q'\}$ (Observación 4.11). Por otro lado, por la Observación 2.3, $L' \cap E(Y) \subset \text{int}_Y(L')$. Si $q' \in E(Y)$, entonces $q' \in \text{int}_Y(L')$, con lo cual $\{q'\}$ es un abierto y cerrado en $\xi_0 \cup L$, lo cual no es posible, dado que L tiene más de un punto. Como consecuencia de esto, se tiene que $q' \notin E(Y)$ y $p' \in E(Y) \cap \text{int}_Y(L')$. Además, $q' \in \xi_0 \subset \text{int}_Y(\text{St}_f(\xi_0))$ (Lema 2.10 (a)) y, considerando que L' es un arco libre de Y , $L' - E(L') \subset \text{int}_Y(\text{St}_f(\xi_0))$. De este modo, $L' \subset \text{int}_Y(\text{St}_f(\xi_0))$. Esto muestra que el continuo $\xi = \bigcup (\mathfrak{A}_S^b(Y, \xi_0) - \{L\})$ está contenido en $\text{int}_Y(\text{St}_f(\xi_0))$. Asimismo, ξ es una s-gráfica de Y y $\text{St}_f(\xi_0) = \xi \cup L$. Más aún, $L - E(L) \subset \text{int}_Y(\text{St}_f(\xi_0))$ y $q \in \xi_0 \subset \text{int}_Y(\text{St}_f(\xi_0))$; por consiguiente, $\text{St}_f(\xi_0) - \{p\} \subset \text{int}_Y(\text{St}_f(\xi_0))$ y, dado que Y no es una gráfica finita, $\{p\} = \text{Fr}_Y(\xi)$. Por último, por el Lema 4.21 se tiene $\mathfrak{CM}(S, Y) = \{\mathfrak{M}_{\xi_0}, \mathfrak{M}_{\xi_0 \cup L}\}$ y, como $S = \text{St}_f(\xi_0)$, el Lema 1.86 garantiza que $\mathfrak{M}_{\xi_0} \cap \mathcal{A} = \{S\}$, con lo cual $\mathfrak{NM}(S, Y, \mathcal{B}) = \{\mathfrak{M}_{\xi_0 \cup L}\}$.

(d) Suponga primero que $\eta \subsetneq \gamma = \eta \cup J$, para algún $J \in \mathfrak{A}_S(X)$. Sea $p \in E(J) - \eta$. Así, $\eta = \gamma^{-p}$ y, como γ es conexo, $J \in \mathfrak{A}_S^b(Y, \eta)$. Luego, por el Lema 4.16 (i), existe $F \in \mathcal{A}$ tal que $\mathfrak{CM}(F, X) = \{\mathfrak{M}_\eta, \mathfrak{M}_\gamma\}$. Note que, como \mathcal{A} no contiene elementos que son s-gráficas de X , por (4.5) se tiene $\mathfrak{CM}(F, X) = \mathfrak{NM}(F, X, \mathcal{A})$. Así, por (a) y (b), $\mathfrak{NM}(h(F), Y, \mathcal{B}) = \{\mathfrak{M}_\zeta, \mathfrak{M}_\xi\}$. Por otro lado, por (c), \mathcal{B} no contiene ningún elemento que es una s-gráfica fina de Y ; además, como $|\mathfrak{NM}(h(F), Y, \mathcal{B})| = 2$, el mismo resultado garantiza que $h(F)$ no es una estrella libre de Y . Por tanto, por (4.5) se tiene que $\mathfrak{CM}(h(F), Y) = \mathfrak{NM}(h(F), Y, \mathcal{B})$. Observe que $\mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma = \mathfrak{M}_{\gamma \subset \text{St}_f(\eta)}$ y $\gamma \subsetneq F \subsetneq \text{St}_f(\eta)$. En particular, $\mathcal{A} \cap C(\text{St}_f(\eta)) \in \mathfrak{WL}(\text{St}_f(\eta))$ (Observación 1.83). Además, se tiene por el Lema 2.10 (d) que $\text{St}_f(\eta)$ es una s-gráfica libre de X , por lo cual $\text{St}_f^{\text{St}_f(\eta)}(\gamma) = \text{St}_f(\gamma) \cap \text{St}_f(\eta) = \text{St}_f(\eta)$ (Lema 2.8 (c)). Asimismo, por un razonamiento análogo al usado con ξ_0 en la prueba de (4.14), se tiene que $|\mathfrak{A}_S^b(\text{St}_f(\eta), \eta)| \geq 3$ y, considerando que J es un elemento de $\mathfrak{A}_S^b(\text{St}_f(\eta), \eta)$ tal que $\eta \cup J = \gamma$, $|\mathfrak{A}_S^b(\text{St}_f(\eta), \gamma)| \geq 2$. Como consecuencia de esto último, $\text{ord}(\gamma, \text{St}_f(\eta)) \geq 2$ (Observación 4.13). Por tanto, el Teorema 4.4 (a) garantiza que $\dim \mathfrak{M}_{\gamma \subset \text{St}_f(\eta)} \cap \mathcal{A} = \text{ord}(\gamma, \text{St}_f(\eta)) - 1 \geq 1$. De este modo, $\dim(\mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) \geq 1$ y, en particular, $\mathfrak{M}_\zeta \cap \mathfrak{M}_\xi$ tiene más de un punto. Note que, como $\eta \subsetneq \gamma \subset \text{int}_X(\text{St}_f(\gamma))$ (Lema 2.10 (a)), la Observación 4.13 implica que $\text{ord}(\eta, X) = \text{ord}(\eta, \text{St}_f(\gamma)) < \text{ord}(\gamma, \text{St}_f(\gamma)) = \text{ord}(\gamma, X)$. Así, se tiene, por el Lema 4.16 (f), que $\dim \mathfrak{M}_\zeta \cap \mathcal{B} < \dim \mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}$. Por tanto, por el Lema 4.16 (h), existe $L \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $\xi = \zeta \cup L$. Esto prueba la primera parte de (d).

Dadas dos s-gráficas finas η' y γ' de X tales que $\eta' \subsetneq \gamma'$, sea $n(\eta', \gamma') = |\{J \in$

$\mathfrak{A}_S(X) : J \not\subset \eta', J \subset \gamma'\}$. Observe que $\gamma' = \eta' \cup \bigcup\{J \in \mathfrak{A}_S(X) : J \not\subset \eta', J \subset \gamma'\}$. Vamos a demostrar la segunda parte de (d) por inducción sobre $n(\eta, \gamma)$. El caso $n(\eta, \gamma) = 1$ se cumple como una implicación de lo obtenido en el párrafo anterior. Suponga que la segunda parte de (d) se cumple para cualesquiera s-gráficas finas η' y γ' de X con $n(\eta', \gamma') \leq k$, para algún $k \geq 1$. Suponga que η y γ son s-gráficas finas de X con $n(\eta, \gamma) = k + 1$. Sea $q \in E(\gamma) - \eta$. Observe que η es una s-gráfica contenida en γ que no contiene a q y que, por ende, $\eta \subset \gamma^{-q}$. Más aún, existe $L \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $\gamma = \gamma^{-q} \cup L$ y $\gamma^{-q} \cap L = \{p\}$, para algún $p \in E(L)$. Esto implica que $\gamma^{-q} \subset \eta' \cup \bigcup\{J \in \mathfrak{A}_S(X) : J \not\subset \eta', J \subset \gamma', J \neq L\}$. Así, γ^{-q} es una s-gráfica fina de X tal que $n(\eta, \gamma^{-q}) \leq k$. Note que $\gamma^{-q} \subset \gamma \subsetneq F \subsetneq \text{St}_f(\eta) \subset \text{St}_f(\gamma^{-q})$. Así, $\mathfrak{M}_{\gamma^{-q}} \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto (Observación 1.86). Por (a), existen s-gráficas finas ζ y ξ_0 de Y tales que $h(\mathfrak{M}_\eta \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_\zeta \cap \mathcal{B}$ y $h(\mathfrak{M}_{\gamma^{-q}} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\xi_0} \cap \mathcal{B}$. De este modo, por la hipótesis de inducción, $\zeta \subsetneq \xi_0$. Sea ξ una s-gráfica fina de Y tal que $h(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}$. Como $n(\gamma^{-q}, \gamma) = 1$ y $\gamma^{-q} \subsetneq \gamma$, se tiene $\xi_0 \subsetneq \xi$. Por lo tanto, $\zeta \subsetneq \xi$. Esto concluye la prueba del lema. \square

Capítulo 5

Las dendritas de la clase \mathfrak{D} son Whitney determinadas

En este capítulo vamos a probar el resultado principal de este trabajo, es decir, que cada dendrita de la clase \mathfrak{D} no comparte sus niveles de Whitney con ningún otro continuo, en un sentido topológico (este hecho se establece de forma precisa en el Teorema 5.9). Más aún, mostraremos que esta propiedad caracteriza a los elementos de la clase \mathfrak{D} dentro de la clase de las dendritas (Teorema 5.19). Para establecer y demostrar estos resultados, vamos a utilizar los conceptos expresados en las definiciones 5.1 y 5.16, los cuales fueron introducidos por A. Illanes y R. Leonel [14].

Definición 5.1. Sean X y Y continuos. Decimos que X es **Whitney equivalente** a Y , si para cualesquiera $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$ y $\mathcal{B} \in \mathfrak{WL}(Y)$ existen $\mathcal{C} \in \mathfrak{WL}(X)$ y $\mathcal{D} \in \mathfrak{WL}(Y)$ tales que \mathcal{A} es homeomorfo a \mathcal{D} y \mathcal{B} es homeomorfo a \mathcal{C} .

Ejemplo 5.2.

1. Cualesquiera dos dendritas que no poseen arcos libres son Whitney equivalentes. De hecho, cualquier continuo X de esta clase satisface que cada elemento de $\mathfrak{WL}(X)$ es un cubo de Hilbert (Teorema 5.11).
2. Si X es un arco, entonces no existe un continuo Whitney equivalente a X que no sea un arco (véase [15, Theorem 31.1, Theorem 31.2]). Si reemplazamos “arco” por “curva cerrada simple” o por “continuo homeomorfo a la curva seno del topólogo” en el enunciado anterior, entonces este sigue siendo válido (véase, respectivamente, [15, Theorem 38.1, Theorem 38.2] y [14, Corollary 3.6]).

Para probar el Teorema 5.5, el cual es un paso más para demostrar la caracterización expresada en el Teorema 5.19, se usará la caracterización de los dendroides dada en el Teorema 5.4 y la definición siguiente.

Definición 5.3. Un espacio métrico Y es **2-conexo** si, para cualquier $i \in \{0, 1\}$, cada función continua $f : S^i \rightarrow Y$ es homotópica a una función constante, en donde S^i denota la i -esfera.

Teorema 5.4 ([13]). *Sea X un continuo. Entonces, X es un dendroide si y solo si cada elemento de $\mathfrak{WL}(X)$ es 2-conexo.*

Teorema 5.5 ([2, Theorem 4.1]). *Sea $X \in \mathfrak{D}$. Si Y es un continuo Whitney equivalente a X , entonces $Y \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. Supongamos que Y es un continuo Whitney equivalente a X . Note que X es un dendroide localmente conexo (Observación 1.63). Luego, por los Teoremas 3.7 y 5.4, cada elemento de $\mathfrak{WL}(X)$ es localmente conexo y 2-conexo. Así, cada elemento de $\mathfrak{WL}(Y)$ es localmente conexo y 2-conexo. De esto se sigue, de nuevo por los Teoremas 3.7 y 5.4, que Y es localmente conexo y que Y es un dendroide. Así, Y es una dendrita (Observación 1.63). Además, por el Teorema 3.21, se cumple que cada elemento de $\mathfrak{WL}(X)$, y por ende cualquier elemento de $\mathfrak{WL}(Y)$, es distinto de un cubo de Hilbert. De esta manera, aplicando de nuevo el Teorema 3.21, obtenemos que $Y \in \mathfrak{D}$. \square

5.1. No existen dos dendritas Whitney equivalentes en la clase \mathfrak{D}

Esta sección únicamente contiene un teorema. Su demostración contiene los detalles más técnicos del teorema principal (Teorema 5.19) y, por ende, es la demostración más larga de este trabajo. De hecho, los resultados del capítulo 4 están motivados por dicha demostración y serán usados repetidamente en ella. Antes de proceder a detallarla, haremos algunas observaciones.

Para cualesquiera continuo X , $K \subset X$ y $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$, denotaremos $\mathcal{A}_K = \mathcal{A} \cap \langle K \rangle$. También, dado una función g de X a un continuo Y , \hat{g} representa la función inducida $\hat{g} : C(X) \rightarrow C(Y)$, la cual está dada por $\hat{g}(A) = g(A)$.

Observación 5.6. *Sea $X \in \mathfrak{D}$ que no es una gráfica finita. Entonces, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $\text{Fr}_X(J) = E(J)$.*

Demostración. Observe que, como X no es un arco, existe $p \in R(X)$ (Teorema 1.49). Note que $p \in \mathcal{G}(X)$ (Lema 2.4 (a)). Luego, $\text{St}_f(p)$ es una s -gráfica de X contenida en $\mathcal{G}(X)$ y $\text{St}_f(\text{St}_f(p))$ es una vecindad de $\text{St}_f(p)$ (Lema 2.10, incisos (d) y (a)). Como X no es una gráfica finita, esto implica que $\text{St}_f(p) \subsetneq \text{St}_f(\text{St}_f(p))$. Luego, existe $K \in \mathfrak{A}_S^o(X, \text{St}_f(p))$. Por la Observación 4.11, existe $q \in E(K)$ tal que $K \cap \text{St}_f(p) = \{q\}$. Sea $J \in \mathfrak{A}_S(X, p)$ tal que $q \in J$. Luego, $J \subset \text{St}_f(p)$ y $J \cap K = \{q\}$. Así, $q \in \text{Fr}_X(J)$ y, como $p \in R(X)$, el Lema 2.4 (c) garantiza que también $p \in \text{Fr}_X(J)$. Por lo tanto, $\text{Fr}_X(J) = E(J)$. \square

Observación 5.7. Sea $X \in \mathfrak{D}$. Asuma que S es una s -gráfica libre de X y que $p \in \text{Fr}_X(S)$. Entonces, existe $K \in \mathfrak{A}_S(X, p)$ tal que $K \subset S$ y $S \cap (\bigcup \mathfrak{A}_S(X, p) - \{K\}) = \{p\}$. Más aún, $(\text{St}_f(p) - S) \cup \{p\} = \bigcup (\mathfrak{A}_S(X, p) - \{K\})$.

Demostración. Como S es una s -gráfica de X , existe $K \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $p \in K \subset S$. Además, por el Lema 2.4 (d), $p \in E(S)$. Suponga que $J \in \mathfrak{A}_S(X, p)$ y $J \neq K$. Luego, $J \cap K = \{p\}$ y $p \in E(J) \cap E(K)$ (Observación 4.11). Esto último implica que $J \cup K$ es un arco y que p no es uno de sus puntos extremos. Como $p \in E(S)$, se sigue de lo anterior que $J \not\subset S$. Luego, $J \cap S = \{p\}$ (Observación 4.11). De esta forma $S \cap (\bigcup \mathfrak{A}_S(X, p) - \{K\}) = \{p\}$. De esto se sigue que $\text{St}_f(p) \cap S = K$ y que $\text{St}_f(p) - S = \text{St}_f(p) - K$. Considerando que $J \cap K = \{p\}$ para cada $J \in \mathfrak{A}_S(X, p)$ con $J \neq K$ (Observación 4.11), se tiene que $(\text{St}_f(p) - K) \cup \{p\} = \bigcup (\mathfrak{A}_S(X, p) - \{K\})$. Por tanto, $(\text{St}_f(p) - S) \cup \{p\} = \bigcup (\mathfrak{A}_S(X, p) - \{K\})$. \square

Observación 5.8. Sean $X \in \mathfrak{D}$ y S una s -gráfica de X . Asuma p y q son elementos distintos de $\text{Fr}_X(S)$. Entonces $((\text{St}_f(p) - S) \cup \{p\}) \cap ((\text{St}_f(q) - S) \cup \{q\}) = \emptyset$.

Demostración. Suponga que existe $x \in (\text{St}_f(p) \cap \text{St}_f(q)) - S$. Luego, existen $J \in \mathfrak{A}_S(X, p)$ y $K \in \mathfrak{A}_S(X, q)$ tales que $x \in J \cap K$. Como $x \notin S$, $p \in J \cap S$ y $q \in K \cap S$, la Observación 4.12 garantiza que $J = K$. Así, y puesto que $J \cap S = \{p\}$ (Lema 4.11), se tiene que $p = q$, lo cual no es posible. Por consiguiente, $(\text{St}_f(p) \cap \text{St}_f(q)) - S = \emptyset$. Como $p \neq q$ y $p \in \text{St}_f(p)$, esto implica que $p \notin (\text{St}_f(q) - S) \cup \{q\}$. De forma similar, $q \notin (\text{St}_f(p) - S) \cup \{p\}$. Por lo tanto, $((\text{St}_f(p) - S) \cup \{p\}) \cap ((\text{St}_f(q) - S) \cup \{q\}) = \emptyset$. \square

Teorema 5.9 ([2, Theorem 4.5]). Sean $X, Y \in \mathfrak{D}$. Asuma que X y Y no son gráficas finitas y que X es Whitney equivalente a Y . Entonces, X es homeomorfo a Y .

Demostración. Por el Teorema 1.39, podemos suponer que las métricas de X y Y son convexas. Por la Observación 5.6, existe $S_0 \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $\text{Fr}_X(S_0) = E(S_0)$. Sea $j_0 = 0$. Para cada $n \geq 0$, sean

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \text{St}_f(S_n) \\ j_{n+1} &= j_n + |\text{Fr}_X(S_n)| \text{ y} \\ \{p_{j_{n+1}}, p_{j_{n+2}}, \dots, p_{j_{n+1}}\} &= \text{Fr}_X(S_n). \end{aligned}$$

En particular, $k_0 = 2$, $j_1 = 2$ y $\{p_1, p_2\} = E(S_0)$. Note que S_n es una s -gráfica libre de X y que $S_n \subset \text{int}_X(S_{n+1})$ para cada $n \geq 0$ (Lema 2.10, incisos (d) y (a)). Más aún, si $S_n = \text{int}_X(S_{n+1})$ o $\text{Fr}_X(S_n) = \emptyset$, entonces S_n es abierto y cerrado en X , lo cual contradice la hipótesis de que X no es una gráfica finita. Por tanto,

$$S_n \subsetneq \text{int}_X(S_{n+1}) \text{ y } \text{Fr}_X(S_n) \neq \emptyset \text{ para cada } n \geq 0. \quad (5.1)$$

Esto implica que $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$ y que $\{j_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión estrictamente creciente. Además, por el Lema 2.4 (d), se tiene que $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \subset R(X)$.

Por otro lado, observe que p_2 es adyacente a p_1 . Considere $i > 2$. Sea $n \geq 1$ tal que $p_i \in \text{Fr}_X(S_n)$. Luego, $j_n + 1 \leq i \leq j_{n+1}$. Como $S_{n-1} \subset \text{int}_X(S_n)$, existe $J \in \mathfrak{A}_S^0(X, S_{n-1})$ tal que $p_i \in J$. Luego, existe $a \in E(J)$ tal que $J \cap S_{n-1} = \{a\}$ (Observación 4.11). Puesto que S_{n-1} es un continuo no degenerado, esto implica que, $a \in \text{Fr}_X(S_{n-1})$. Por consiguiente, existe $j \in \mathbb{N}$ con $j_{n-1} + 1 \leq j \leq j_n$ tal que $a = p_j$. Así, p_i es adyacente a p_j y $j < i$. Esto prueba que

$$\text{cada } p_i \text{ es adyacente a algún } p_j, \text{ con } j < i. \quad (5.2)$$

Sean $G_0 = S_0$ y $G_i = \text{St}_f(\{p_1, p_2, \dots, p_i\})$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Note que, por el Lema 2.10 (e), cada G_n es una s-gráfica libre de X . Afirmamos que

$$S_n = G_{j_n} \text{ para cada } n \geq 0. \quad (5.3)$$

Es inmediato que $S_0 = G_{j_0}$. Supongamos que $S_n = G_{j_n}$ para alguna $n \geq 0$. Note que $\{p_1, p_2, \dots, p_{j_{n+1}}\} \subset S_n$, por lo cual $G_{j_{n+1}} \subset S_{n+1}$. Sea $x \in S_{n+1}$. Si $x \in S_n$, entonces $x \in G_{j_n} \subset G_{j_{n+1}}$. Supongamos que $x \notin S_n$. Luego, existe $J \in \mathfrak{A}_S^0(X, S_n)$ tal que $x \in J$. Por la Observación 4.11, existe $a \in E(J)$ tal que $J \cap S_n = \{a\}$. Como S_n es un continuo no degenerado, se cumple que $a \in \text{Fr}_X(S_n)$. Así, existe $j \in \mathbb{N}$ con $j_n + 1 \leq j \leq j_{n+1}$ tal que $a = p_j$. En consecuencia, $x \in J \subset \text{St}_f(p_j) \subset G_{j_{n+1}}$. Por lo tanto, $S_{n+1} = G_{j_{n+1}}$. Esto prueba nuestra afirmación.

Suponga que n e i son números enteros tales que $n \geq 0$ y $j_n < i < j_{n+1}$. Afirmamos que $\text{Fr}_X(G_i) = \{p_j : i < j \leq j_{n+2}\} \cap G_i$. Sea $p \in \text{Fr}_X(G_i)$. Observe que $S_n = G_{j_n} \subset G_i \subset G_{j_{n+1}} = S_{n+1}$. Luego, si $p \in S_n$, entonces $p \in \text{Fr}_X(S_n) = \{p_{j_n+1}, p_{j_n+2}, \dots, p_{j_{n+1}}\}$ y, como $\{p_j : j \leq i\} \subset \text{int}_X(G_i)$ (Lema 2.10 (a)), tenemos que $p = p_l$, para algún l con $i < l \leq j_{n+1}$. Supongamos que $p \notin S_n$. Puesto que $p \in G_i$, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X, \{p_1, \dots, p_i\})$ tal que $p \in J \subset G_i$. Note que $J \subset S_{n+1}$ y que, por ende, $J \cap S_n \neq \emptyset$ (Observación 4.9). Como $p \in J - S_n$, J es una vecindad de p en S_{n+1} (Observación 4.12). Por consiguiente, si $p \in \text{int}_X(S_{n+1})$, entonces $p \in \text{int}_X(G_i)$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $p \in \text{Fr}_X(S_{n+1})$, es decir, $p = p_l$ con $j_{n+1} + 1 \leq l \leq j_{n+2}$. De esta manera, $\text{Fr}_X(G_i) \subset \{p_j : i < j \leq j_{n+2}\} \cap G_i$. Recíprocamente, sea $l \in \mathbb{N}$ tal que $i < l \leq j_{n+2}$ y $p_l \in G_i$. Si $j_{n+1} + 1 \leq l \leq j_{n+2}$, entonces $p_l \in \text{Fr}_X(S_{n+1})$, con lo cual $p_l \in \text{Fr}_X(G_i)$. Consideremos el caso en el que $l \leq j_{n+1}$. Luego, $p_l \in \text{Fr}_X(S_n)$. Vamos a probar que S_n es una vecindad de p_l en G_i . Si $n = 0$, entonces $j_n = 0$, $j_{n+1} = 2$, $r = i = 1$ y $l = 2$. En este caso, $G_i = \text{St}_f(p_r)$ y $S_n \in \mathfrak{A}_S(X, p_r)$, por lo cual la Observación 4.9 garantiza que S_n es una vecindad de p_l en G_i . Suponga que $n \geq 1$ y que existen $r \in \{j_n + 1, \dots, i\}$ y $J \in \mathfrak{A}_S(X, p_r)$ tales que $p_l \in J$. Observe que $p_r \in \text{Fr}_X(S_n)$. Como p_r y p_l son elementos distintos de $J \cap S_n$, se cumplen las contenciones $J \subset S_n \subset G_i$ (Observación 4.11). Puesto que $S_{n-1} \subset \text{int}_X(S_n)$, se tiene que tanto p_l como p_r no son elementos de S_{n-1} . Además, considerando que $J \subset S_n$, se tiene que $J \cap S_{n-1} \neq \emptyset$ (Observación 4.9). Luego, $J \cap S_{n-1} = \{a\}$, para algún $a \in E(J)$ (Observación 4.9). Así, $\{p_r, p_l\} \cap (J -$

$E(J) \neq \emptyset$. Sin embargo, para cada $x \in J - E(J)$, J es una vecindad de x en X y, por ende, $\text{ord}(x, X) = \text{ord}(x, J) = 2$. Esta contradicción muestra que si $n \geq 1$ y $J \in \mathfrak{A}_S(X, \{p_1, \dots, p_i\})$ es tal que $p_l \in J$, entonces $J \in \mathfrak{A}_S(X, \{p_1, \dots, p_{j_n}\})$. De este modo, el conjunto $G_{j_n} = S_n$ es una vecindad de p_l en G_i , también para $n \geq 1$. Por consiguiente (tanto en el caso en que $n = 0$, como en el que $n \geq 1$), si $p_l \in \text{int}_X(G_i)$, entonces $p \in \text{int}_X(S_n)$, lo cual no es posible. De esta forma, $p_l \in \text{Fr}_X(G_i)$. Esto prueba que $\{p_j : i < j \leq j_{n+2}\} \cap G_i \subset \text{Fr}_X(G_i)$ y, con ello, nuestra afirmación. Considerando esto, (5.1) y (5.3), se tiene que cualesquiera números enteros n e i con $n \geq 0$ y $j_n + 1 \leq i \leq j_{n+1}$ satisfacen que

$$\text{Fr}_X(G_i) = \{p_j : i < j \leq j_{n+2}\} \cap G_i, \quad (5.4)$$

En particular,

$$\text{Fr}_X(G_i) \cap \text{int}_X(G_{i+1}) = \{p_{i+1}\} \text{ para cada } i \geq 0 \quad (5.5)$$

Como consecuencia, se tienen las relaciones (para $n \geq 2$)

$$G_0(= S_0) \subsetneq G_1 \subsetneq G_2(= S_1) \subsetneq \dots G_{j_n}(= S_n) \subsetneq G_{j_{n+1}} \subsetneq \dots \quad (5.6)$$

Afirmación 1. Suponga que existe una sucesión $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que cumple lo siguiente.

- (i) Cada φ_i es un encaje de G_i en Y con $\varphi_i = \varphi_{i+1}|_{G_i}$.
- (ii) Cada $\varphi_{j_n}(S_n)$ es una s-gráfica de Y contenida en $\text{int}_Y(\varphi_{j_{n+1}}(S_{n+1}))$.

Entonces, X es homeomorfo a Y .

Vamos a mostrar la Afirmación 1. Sea $T_n = \varphi_{j_n}(S_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observe que, por (5.1) y (ii) (respectivamente)

$$S_n \subset \text{int}_X(S_{n+1}) \text{ y } T_n \subset \text{int}_Y(T_{n+1}). \quad (5.7)$$

Además, puesto que S_n es una s-gráfica libre de S_{n+1} (Lema 2.10 (d)), se cumple que T_n es una s-gráfica libre de T_{n+1} (por ser imágenes homeomorfas de S_n y S_{n+1} bajo $\varphi_{j_{n+1}}$, respectivamente). Así, $T_n - E(T_n)$ es un abierto de T_{n+1} contenido en $\text{int}_Y(T_{n+1})$ y, por ende, T_n es una s-gráfica libre de Y . Como esto pasa para cualquier número natural, también T_{n+1} es una s-gráfica libre de Y . Luego, por el Lema 2.8 (d), se tienen las igualdades $\text{St}_f(S_n) = \text{St}_f^{S_{n+1}}(S_n)$ y $\text{St}_f(T_n) = \text{St}_f^{T_{n+1}}(T_n)$. Más aún, considerando que $\varphi_{j_{n+1}}$ es un homeomorfismo sobre T_{n+1} que manda S_n sobre T_n (esto último, por (i)), se tiene que $\varphi_{j_{n+1}}(\text{St}_f^{S_{n+1}}(S_n)) = \text{St}_f^{\varphi_{j_{n+1}}(S_{n+1})}(\varphi_{j_{n+1}}(S_n)) = \text{St}_f^{T_{n+1}}(T_n)$. De esta manera, $\varphi_{j_{n+1}}(S_{n+1}) = \varphi_{j_{n+1}}(\text{St}_f(S_n)) = \varphi_{j_{n+1}}(\text{St}_f^{S_{n+1}}(S_n)) = \text{St}_f(T_n)$. Por tanto,

$$T_{n+1} = \text{St}_f(T_n). \quad (5.8)$$

De forma análoga, para cada $p \in S_n$ se satisface (por 5.7) que $p \in \text{int}_X(S_{n+1})$ y $\varphi_{j_{n+1}}(p) \in \text{int}_Y(T_{n+1})$, por lo cual se tiene que $\text{St}_f(\varphi_{j_n}(p)) = \text{St}_f^{T_{n+1}}(\varphi_{j_{n+1}}(p)) = \varphi_{j_{n+1}}(\text{St}_f^{S_{n+1}}(p)) = \varphi_{j_{n+1}}(\text{St}_f(p))$. Así,

$$\text{St}_f(\varphi_{j_n}(p)) = \varphi_{j_{n+1}}(\text{St}_f(p)), \text{ para cada } p \in S_n. \quad (5.9)$$

Además, por (5.7) se cumple que $\text{Fr}_Y(T_n) = \text{Fr}_{T_{n+1}}(T_n) = \varphi_{j_{n+1}}(\text{Fr}_{S_{n+1}}(S_n)) = \varphi_{j_n}(\text{Fr}_X(S_n))$. Así,

$$\text{Fr}_Y(T_n) = \varphi_{j_n}(\text{Fr}_X(S_n)). \quad (5.10)$$

Sea $x \in S_{n+1} - S_n$. Luego, por la Observación 4.9, existe $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $J \cap S_n = \{p\}$. Luego, $p \in \text{Fr}_X(S_n)$ y $x \in (\text{St}_f(p) - S_n) \cup \{p\}$. Por tanto,

$$S_{n+1} = S_n \cup \bigcup \{(\text{St}_f(p) - S_n) \cup \{p\} : p \in \text{Fr}_X(S_n)\}. \quad (5.11)$$

Por otro lado, las Observaciones 5.7 y 5.8 garantizan que, para cualesquiera elementos distinto de $\text{Fr}_X(S_n)$, digamos p y p' ,

$$(\text{St}_f(p) - S_n) \cup \{p\} \text{ y } (\text{St}_f(p') - S_n) \cup \{p'\} \text{ son continuos ajenos.} \quad (5.12)$$

Además, es inmediato que cualquier $p \in \text{Fr}_X(S_n)$ cumple que

$$((\text{St}_f(p) - S_n) \cup \{p\}) \cap S_n = \{p\}. \quad (5.13)$$

De esta manera, por los incisos (5.11), (5.12) y (5.13) podemos considerar la función $f_n : S_{n+1} \rightarrow S_n$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in S_n, \\ p & \text{si } x \in (\text{St}_f(p) - S_n) \cup \{p\} \text{ para algún } p \in \text{Fr}_X(S_n). \end{cases}$$

Puesto que $f_n|_{S_n}$ es la función identidad y, para cada $p \in \text{Fr}_X(S_n)$, la restricción $f_n|_{(\text{St}_f(p) - S_n) \cup \{p\}}$ es la función constante con valor p , se cumple que f_n es continua y, más aún, que es una retracción (porque, además, $f_n(S_{n+1}) = S_n$). De forma análoga, podemos considerar la retracción $g_n : T_{n+1} \rightarrow T_n$ dada por

$$g_n(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in T_n, \\ q & \text{si } y \in (\text{St}_f(q) - T_n) \cup \{q\} \text{ para algún } q \in \text{Fr}_Y(T_n). \end{cases}$$

Sean $j \in \mathbb{N}$ y $p \in \text{Fr}_X(S_j)$. Luego, $p \in E(S_j)$ y $S_j - \{p\}$ es conexo (Lema 2.4 (d) y Teorema 1.53, respectivamente). Sea V la componente de $X - \{p\}$ que contiene a $S_j - \{p\}$. Como $X - \{p\}$ es abierto en X , tanto V como $(X - \{p\}) - V$ son abiertos en X (Teorema 1.3). Así, por el Lema 1.9, los conjuntos $V \cup \{p\}$ y $((X - \{p\}) - V) \cup \{p\} = X - V$ son continuos y, por ende, son dendritas (Teorema

1.52). Sea $C_p^j = X - V$. Observe que, como V es abierto y conexo, es arco conexo. Como X es únicamente arco conexo, esto implica que cualquier arco α con $E(\alpha) \subset V$ cumple que $\alpha \subset V$. En otras palabras,

$$\text{si } \alpha \text{ es un arco con } E(\alpha) \cap C_p^j = \emptyset, \text{ entonces } \alpha \cap C_p^j = \emptyset. \quad (5.14)$$

Note que $p \in C_p^j \cap S_j$ y que $S_j \subset V \cup \{p\} = (X - C_p^j) \cup \{p\}$. De este modo,

$$C_p^j \cap S_j = \{p\}. \quad (5.15)$$

Además, si $p' \in \text{Fr}_X(S_j)$ y $C_p^j \cap C_{p'}^j \neq \emptyset$, entonces $C_p^j \cup C_{p'}^j$ y $(C_p^j \cup C_{p'}^j) \cap S_j$ son continuos (este último por el Teorema 1.54), y, considerando que el último de estos dos conjuntos es $\{p, p'\}$ (por (5.15)), se tiene $p = p'$. De esta forma,

$$C_p^j \cap C_{p'}^j = \emptyset \text{ para cualesquiera } p, p' \in \text{Fr}_X(S_j) \text{ distintos.} \quad (5.16)$$

Vamos a mostrar que

$$(f_j)^{-1}(p) \subset C_p^j. \quad (5.17)$$

Sea $x \in S_{j+1}$ tal que $f_j(x) = p$, o equivalentemente, tal que $x \in (\text{St}_f(p) - S_j) \cup \{p\}$. Como queremos mostrar que $x \in C_p^j$ y p es un elemento de este conjunto, podemos suponer que $x \neq p$. Luego, $x \in \text{St}_f(p) - S_j$. Así, dado cualquier $p_0 \in \text{int}_X(S_j)$, existe $a \in \text{Fr}_X(S_j) \cap [x, p_0]$. Note que, por (5.14) y (5.15), esto implica que $x \in C_a^j$. Luego, $(\text{St}_f(p) - S_j) \cup \{p\} \cup C_a^j$ y $((\text{St}_f(p) - S_n) \cup \{p\} \cup C_a^j) \cap S_j$ son continuos (el segundo conjunto, por el Teorema 1.54). Puesto que esta intersección es el conjunto $\{p, a\}$ (por (5.13) y (5.15)), se tiene que $p = a$. Así, $x \in C_p^j$. Esto prueba (5.17). Más aún, muestra que $f_j(x) \in [x, p_0]$, en el caso en que $x \in (\text{St}_f(p) - S_j)$. Tomando en cuenta que $f_j(x) = x \in [x, p_0]$ para cada $x \in S_j$ y considerando (5.11), se tiene que

$$f_j(x) \in [x, p_0], \text{ para cualesquiera } x \in S_{j+1} \text{ y } p_0 \in \text{int}_X(S_j). \quad (5.18)$$

Para cualesquiera l, l' con $l < l'$, sea

$$f_{ll'} = \begin{cases} f_l : S_{l'} \rightarrow S_l & \text{si } l' = l + 1, \\ f_l \circ \dots \circ f_{l'-1} : S_{l'} \rightarrow S_l & \text{si } l + 1 < l'. \end{cases}$$

Observe que $f_{ll'}$ es una retracción de $S_{l'}$ en S_l .

Sean $N \in \mathbb{N}$ y $p_0 \in \text{int}_X(S_N)$. Dado $x \in S_{N+1}$, se satisface, por (5.18), que $f_{N(N+1)}(x) = f_N(x) \in [x, p_0]$. Además, si $x \notin S_N$, entonces $f_{N(N+1)}(x) \in \text{Fr}_X(S_N)$ (por (5.11)). Suponga que, para alguna $j > N$, $f_{Nj}(x) \in [x, p_0]$ para cada $x \in S_j$ y que $f_{Nj}(x) \in \text{Fr}_X(S_N)$ si $x \in S_j - S_N$. Considere un punto $x \in S_{j+1}$. Luego, $f_{N(j+1)}(x) = f_{Nj}(f_j(x))$ y así, por la hipótesis de inducción, $f_{N(j+1)}(x) \in [f_j(x), p_0]$. Además, por (5.18), se cumple que $f_j(x) \in [x, p_0]$, con lo cual $f_{N(j+1)}(x) \in$

$[f_j(x), p_0] \subset [x, p_0]$. Suponga que $x \notin S_N$. Si $x \in S_j$, entonces $f_j(x) = x$, por lo cual $f_{N(j+1)}(x) = f_{Nj}(x)$, con $f_{Nj}(x) \in \text{Fr}_X(S_N)$ (por la hipótesis de inducción). Si $x \notin S_j$, entonces $f_j(x) \in \text{Fr}_X(S_j) \subset S_j - S_N$ (la contención se sigue de (5.7)) y, por ende, la hipótesis de inducción implica que $f_{N(j+1)}(x) = f_{Nj}(f_j(x)) \in \text{Fr}_X(S_N)$. De esta forma, hemos probado que

$$f_{Nj}(x) \in [x, p_0] \text{ para cualesquiera } j > N, x \in S_j, \text{ y } p_0 \in \text{int}_X(S_N). \quad (5.19)$$

$$f_{Nj}(x) \in \text{Fr}_X(S_N) \text{ para cualesquiera } j > N \text{ y } x \in S_j - S_N. \quad (5.20)$$

Considere $p \in \text{Fr}_X(S_N)$ y $x \in (f_{Nj})^{-1}(p)$. Luego, por (5.19), se tiene que $p \in [x, p_0] \cap C_p^N$. Como $p_0 \in \text{int}_X(S_N) \subset X - C_p^j$ (esto último, por (5.15), el enunciado (5.14) garantiza que $x \in C_p^N$). De esta forma,

$$(f_{Nj})^{-1}(p) \subset C_p^N \text{ para cualesquiera } j > N \text{ y } p \in \text{Fr}_X(S_N) \quad (5.21)$$

Considere ahora $x, x' \in S_j$, con $f_{Nj}(x) \neq f_{Nj}(x')$. Si $x \in S_N$ o $x' = f_{Nj}(x)$, es inmediato que $f_{Nj}(x) \in [x, x']$. Suponga que $x \notin S_N$ y que $x \neq f_{Nj}(x)$. Luego, $f_{Nj}(x) \in \text{Fr}_X(S_N)$ (por (5.20)) y, por ende, (5.21) implica que $x \in C_p^N$, en donde $p = f_{Nj}(x)$. Sea $p' = f_{Nj}(x')$. Si $p' \in \text{Fr}_X(S_N)$, entonces $x' \in C_{p'}^N$ y, así, (5.16) implica que $p = p'$, lo cual no es posible. De este modo, $p' \notin \text{Fr}_X(S_N)$ y $x' \in S_N - \text{Fr}_X(S_N)$ (esto último se sigue de (5.20)). En consecuencia, por (5.19), se cumple que $f_{Nj}(x) \in [x, x']$. Por tanto,

$$f_{Nj}(x) \in [x, x'] \text{ si } j > N \text{ y } x, x' \in S_j \text{ son tales que } f_{Nj}(x) \neq f_{Nj}(x'). \quad (5.22)$$

Observe que, por el Lema 2.6, $\lim S_n = X$. Sea $\varepsilon > 0$. Como X es compacto, existen $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^k B_i$, en donde $B_i = B_d(x_i, \frac{\varepsilon}{4})$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S_{N_0} \in \langle B_1, B_2, \dots, B_k \rangle$. Considere un punto $p \in \text{Fr}_X(S_{N_0})$. Mostraremos que $C_p^{N_0} \subset B_d(p, \frac{\varepsilon}{2})$. Suponga que $x \in C_p^{N_0}$. Sea $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $x \in B_i$ y sea $x' \in B_i \cap S_{N_0}$. Así, $d(x, x') < \frac{\varepsilon}{2}$. Observe que $C_p^{N_0}$ y S_{N_0} son espacios arco conexos (Teorema 1.29), dado que ambos son dendritas. Como X es únicamente arco conexo (Observación 1.64), esto garantiza que $[x, p] \subset C_p^{N_0}$ y $[p, x'] \subset S_{N_0}$. Esto implica, por (5.15), que $[x, p] \cap [p, x'] = \{p\}$. Así, $[x, p] \cup [p, x']$ es un arco con puntos extremos x y x' , es decir, es el arco $[x, x']$. En consecuencia, $p \in [x, x']$ y, considerando que d es convexa, se tiene que $d(x, p) < \frac{\varepsilon}{2}$. De esta forma, $C_p^{N_0} \subset B_d(p, \frac{\varepsilon}{2})$. Por lo tanto, (5.17) garantiza que $(f_{N_0j})^{-1}(p) \subset B_d(p, \frac{\varepsilon}{2})$ para cualquier $j > N_0$, en el caso en el que $p \in \text{Fr}_X(S_{N_0})$. Si, por el contrario, $p \in \text{int}_X(S_{N_0})$, entonces se sigue de (5.20) que $(f_{N_0j})^{-1}(p) = \{p\}$ y, como consecuencia, la contención anterior es válida también en este caso. Por consiguiente, se cumple (a) del Teorema 1.27. Además, para cualesquiera $j' > j$ y $a, a' \in S_{j'}$ con $f_{jj'}(a) \neq f_{jj'}(a')$, (5.22) garantiza que $f_{jj'}(a), f_{jj'}(a') \in [a, a']$ y, como consecuencia (de nuevo por la convexidad de d), se tiene que $d(f_{jj'}(a), f_{jj'}(a')) \leq d(a, a')$. Así,

se satisface (b) del Teorema 1.27. De este modo, $\lim_{\leftarrow}\{S_n, f_n\}$ es homeomorfo a $\text{cl}_X(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n)$. De forma análoga, $\lim_{\leftarrow}\{T_n, g_n\}$ es homeomorfo a $\text{cl}_Y(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n)$.

Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Considere $x \in S_{n+1} - S_n$. Sea $p = f_n(x)$. Luego, $p \in \text{Fr}_X(S_n)$ (por 5.11) y, tomando en cuenta (5.9), se tiene que $\varphi_{j_{n+1}}(f_n^{-1}(p)) = \varphi_{j_{n+1}}((\text{St}_f(p) - S_n) \cup \{p\}) = (\text{St}_f(\varphi_{j_n}(p)) - T_n) \cup \{\varphi_{j_n}(p)\} = g_n^{-1}(\varphi_{j_n}(p))$. Como $x \in f_n^{-1}(p)$, esto implica que $\varphi_{j_{n+1}}(x) \in g_n^{-1}(\varphi_{j_n}(p))$ y, así, $g_n(\varphi_{j_{n+1}}(x)) = \varphi_{j_n}(p) = \varphi_{j_n}(f_n(x))$. Ahora considere $x \in S_n$. Luego $\varphi_{j_{n+1}}(x) = \varphi_{j_n}(x) \in T_n$ y, puesto que f_n y g_n son retracciones, se cumple que $\varphi_{j_n}(f_n(x)) = \varphi_{j_n}(x) = g_n(\varphi_{j_n}(x)) = g_n(\varphi_{j_{n+1}}(x))$. Por tanto, en cualquier caso, $\varphi_{j_n} \circ f_n(x) = g_n \circ \varphi_{j_{n+1}}(x)$. De este modo, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} S_0 & \xleftarrow{f_0} & S_1 & \xleftarrow{f_1} & S_2 & \xleftarrow{f_2} & S_3 & \xleftarrow{\quad} & \dots \\ \downarrow \varphi_{j_0} & & \downarrow \varphi_{j_1} & & \downarrow \varphi_{j_2} & & \downarrow \varphi_{j_3} & & \\ T_0 & \xleftarrow{g_0} & T_1 & \xleftarrow{g_1} & T_2 & \xleftarrow{g_2} & T_3 & \xleftarrow{\quad} & \dots, \end{array}$$

en donde cada φ_{j_n} es un homeomorfismo del continuo S_n sobre el continuo T_n . Por tanto, por el Teorema 1.28, $\lim_{\leftarrow}\{S_n, f_n\}$ es homeomorfo a $\lim_{\leftarrow}\{T_n, g_n\}$. Como $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = \mathcal{G}(X)$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \mathcal{G}(Y)$ (Lema 2.6), y tomando en cuenta que tanto X como Y son casi enrejados (Teorema 1.76), se tiene que X y Y son homeomorfos.

De esta manera, por la Afirmación 1, para probar el teorema basta demostrar la siguiente afirmación.

Afirmación 2. Existe una sucesión $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que satisface (i) y (ii).

Sean $p_M \in G_0 - E(G_0)$ y μ una función de Whitney para $C(X)$. Note que X tiene una base numerable para su topología. Además, se sigue del Corolario 1.34 que $\{K - E(K) : K \in \mathfrak{A}_S(X)\}$ es una colección de subconjuntos abiertos de X ajenos entre sí. Como consecuencia de esto, $\mathfrak{A}_S(X)$ y, por ende, el conjunto de s-gráficas no degeneradas de X son numerables. De esta forma, y considerando que $E(G_0) = \{p_1, p_2\}$, existe $t_0 \in (0, \mu(X))$ tal que $\mu([p_1, p_M]) > t_0$, $\mu([p_M, p_2]) > t_0$ y $t_0 \notin \{\mu(A) : A \text{ es una s-gráfica } X \text{ distinta del vacío}\}$.

Sean ω una función de Whitney para $C(Y)$ y $s_0 \in (0, \mu(Y))$ tales que $\mu^{-1}(t_0)$ es homeomorfo a $\omega^{-1}(s_0)$. Sean $\mathcal{A} = \mu^{-1}(t_0)$ y $\mathcal{B} = \omega^{-1}(s_0)$. Luego, \mathcal{A} no contiene elementos que son s-gráficas de X y así, por el Lema 4.23 (c), \mathcal{B} no contiene elementos que son s-gráficas finas de Y . Sea $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un homeomorfismo. Note que tanto $\mathcal{A}_{[p_1, p_M]}$ como $\mathcal{A}_{[p_M, p_2]}$ tienen más de un punto. También, por el Teorema 3.9, \mathcal{A}_{G_0} es un arco libre maximal de \mathcal{A} y existe $T_0 \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $\mathcal{B}_{T_0} = h(\mathcal{A}_{G_0})$. Recuerde que $\text{Fr}_X(G_0) = \{p_1, p_2\}$. Sea A_i el único elemento de \mathcal{A}_{G_0} con $p_i \in A_i$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Luego, $\{A_1, A_2\} = E(\mathcal{A}_{G_0})$ y $\{h(A_1), h(A_2)\} = E(\mathcal{B}_{T_0})$. Así, podemos expresar $E(T_0) = \{q_1, q_2\}$, en donde q_i es el único punto extremo de T_0 tal que

$q_i \in h(A_i)$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Sea $\varphi_0 : G_0 \rightarrow Y$ un encaje tal que $\varphi_0(G_0) = T_0$ y $\varphi_0(p_i) = q_i$ para cada $i \in \{1, 2\}$.

Dadas una s-gráfica G de X arbitraria y una función $\varphi : G \rightarrow Y$, considere las siguientes condiciones

- (a) $\varphi(G)$ es una s-gráfica libre de Y .
- (b) $\text{Fr}_Y(\varphi(G)) = \varphi(\text{Fr}_X(G))$.
- (c) Para cada $p \in \text{Fr}_X(G)$, el único punto de $\mathcal{A}_{[p, p_M]}$ que contiene a p , digamos F_p , satisface que $\mathfrak{CM}(h(F_p), Y) = \mathfrak{CM}(\hat{\varphi}(F_p), Y)$.

En lo que resta de la demostración, vamos a construir una sucesión $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ cuyos elementos son encajes que satisfacen (a), (b) y (c), concluyendo posteriormente que se cumple la Afirmación 2. Note primero que φ_0 satisface todas estas condiciones, puesto que, para cada $i \in \{1, 2\}$, tanto $\hat{\varphi}_0(F_{p_i})$ como $h(F_{p_i})$ son subarcos de T_0 que contienen a q_i y, por ende, $\mathfrak{CM}(h(F_{p_i}), Y) = \mathfrak{CM}(\hat{\varphi}_0(F_{p_i}), Y) = \{\mathfrak{M}_{\emptyset \subset T_0}, \mathfrak{M}_{q_i}\}$.

Suponga que, para un número entero $i \geq 0$ dado, existe un encaje $\varphi_i : G_i \rightarrow Y$ que satisface (a), (b) y (c). Vamos a construir un encaje $\varphi_{i+1} : G_{i+1} \rightarrow Y$ para el cual se cumplen estas mismas condiciones. Para esto, note que $p_{i+1} \in \text{Fr}_X(G_i)$, $G_{i+1} = G_i \cup \text{St}_f(p_{i+1})$ y G_{i+1} es una s-gráfica libre de X . Para abreviar notación, sea $F = F_{p_{i+1}}$.

Observe que, por el Lema 4.5 (a) y la condición (c) de esta prueba, $\dim_{h(F)} C(Y) = \max\{\dim \mathfrak{M} : \mathfrak{M} \in \mathfrak{CM}(h(F), Y)\} = \dim_{\hat{\varphi}_i(F)} C(Y)$. Puesto que $h(F)$ no es una s-gráfica fina de Y y F no es una s-gráfica de X , se sigue del Lema 4.18 que

$$\begin{aligned} \sum_{p \in F \cap R(X)} (\text{ord}(p, X) - 2) &= \dim_F \mathcal{A} - 1 = \dim_{h(F)} \mathcal{B} - 1 = \dim_{\hat{\varphi}_i(F)} C(Y) - 2 \\ &= \sum_{q \in \hat{\varphi}_i(F) \cap R(Y)} (\text{ord}(q, Y) - 2) \end{aligned} \tag{5.23}$$

(para la última igualdad, véase la observación posterior a la demostración del Lema 4.18, p. 63). Note que $F \cap \text{Fr}_X(G_i) \subset F \cap E(G_i) = \{p_{i+1}\}$ y, así, $F - \{p_{i+1}\} \subset \text{int}_X(G_i)$. Asimismo, por (b), $\varphi_i(F - \{p_{i+1}\}) \subset \text{int}_Y(\varphi_i(G_i))$. De este modo, $\text{ord}(p, X) = \text{ord}(\varphi_i(p), Y)$ para cada $p \in F - \{p_{i+1}\}$. Por esto y por (5.23), se sigue que $\text{ord}(p_{i+1}, X) = \text{ord}(\varphi_i(p_{i+1}), Y)$.

Observe que, por la condición (a), $\varphi_i(G_i)$ es una s-gráfica libre de Y . Así, por el Lema 2.7 (d), y considerando que φ_i es un homeomorfismo sobre su imagen, se tiene

$$\begin{aligned} \{\varphi_i(J) : J \in \mathfrak{A}_S(X, \text{int}_X(G_i))\} &= \{\varphi_i(J) : J \in \mathfrak{A}_S(G_i)\} \\ &= \mathfrak{A}_S(\varphi_i(G_i)) = \mathfrak{A}_S^i(Y, \varphi_i(G_i)). \end{aligned} \tag{5.24}$$

A continuación, vamos a dar una expresión para los elementos del conjunto $\mathfrak{EM}(h(F)B, Y) = \mathfrak{EM}(\hat{\varphi}_i(F), Y)$ (la cual será usada posteriormente) considerando los dos casos siguientes. Antes de proceder con estos casos, observe que, puesto que $\hat{\varphi}_i(F)$ es un arco que no es una s-gráfica fina de Y , $\mathfrak{EM}(\hat{\varphi}_i(F), Y)$ tiene a lo más dos elementos.

- $\mathfrak{A}_S^i(X, F) \neq \emptyset$. Sea $\nu_F = \bigcup \mathfrak{A}_S^i(X, F)$. Luego, ν_F es una s-gráfica fina de X con más de un punto. Observe que, de la misma forma que en la prueba del Lema 4.16 (i), pero reemplazando γ por ν_F , se cumple que $\mathfrak{EM}(F, X) = \{\mathfrak{M}_{\nu_F}, \mathfrak{M}_{\nu_F^{-p_i+1}}\}$. Además,

$$\varphi_i(F) \subset \varphi_i(\text{St}_F^{G_i}(\nu_F)) = \text{St}_F^{\varphi_i(G_i)}(\varphi_i(\nu_F)) \subset \text{St}_F(\varphi_i(\nu_F))$$

(para la última contención use las igualdades de (5.24)). Tomando en cuenta que $\varphi_i(\nu_F)$ es una s-gráfica fina de Y (porque uno de los puntos extremos de $\varphi_i(\nu_F)$ está contenido en $\text{Fr}_Y(\varphi_i(G))$, a saber $\varphi_i(p_{i+1})$, y el otro en $\varphi_i(G_i - E(G_i)) = \varphi_i(G_i) - E(\varphi_i(G_i))$), esto implica que $\hat{\varphi}_i(F) \in \mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F)}$. De forma similar se prueba que $\hat{\varphi}_i(F) \in \mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F^{-p_i+1})}$. Por tanto,

$$\mathfrak{EM}(h(F), Y) = \{\mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F)}, \mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F^{-p_i+1})}\}. \quad (5.25)$$

Como $\nu_F^{-p_i+1} \subsetneq \nu_F$ y los puntos extremos de ν_F tienen orden en X mayor o igual a 3 (como consecuencia del Lema 2.4), se tiene que $\text{ord}(\nu_F^{-p_i+1}, X) < \text{ord}(\nu_F, X)$. Así, el Lema 4.16 (f) implica que $\dim \mathfrak{M}_{\nu_F^{-p_i+1}} \cap \mathcal{A} < \dim \mathfrak{M}_{\nu_F} \cap \mathcal{A}$. De forma análoga, $\dim \mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F^{-p_i+1})} \cap \mathcal{B} < \dim \mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F)} \cap \mathcal{B}$. Por tanto,

$$h(\mathfrak{M}_{\nu_F^{-p_i+1}} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F^{-p_i+1})} \cap \mathcal{B} \text{ y } h(\mathfrak{M}_{\nu_F} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F)} \cap \mathcal{B}. \quad (5.26)$$

- $\mathfrak{A}_S^i(X, F) = \emptyset$. En este caso existe $J_F \in \mathfrak{A}_S(X)$ tal que $F \subsetneq J_F$ y $\mathfrak{EM}(F, X) = \{\mathfrak{M}_{\emptyset \subset J_F}, \mathfrak{M}_{p_{i+1}}\}$. Como $\varphi_i(J_F) \in \mathfrak{A}_S(\varphi_i(G_i)) \subset \mathfrak{A}_S(Y)$ (esta contención se sigue de (5.24)) y $\varphi_i(F) \subset \varphi_i(J_F)$, se cumple que $\hat{\varphi}_i(F) \in \mathfrak{M}_{\emptyset \subset \varphi_i(J_F)}$. Así,

$$\mathfrak{EM}(h(F), Y) = \{\mathfrak{M}_{\emptyset \subset \varphi_i(J_F)}, \mathfrak{M}_{\varphi_i(p_{i+1})}\}. \quad (5.27)$$

Dado que $\mathfrak{M}_{p_{i+1}} \cap \mathcal{A}$ y $\mathfrak{M}_{\varphi_i(p_{i+1})} \cap \mathcal{B}$ no son arcos (de hecho, por [16, Theorem 1.1 (a)], ambos conjuntos son k -celdas, con $k = \text{ord}(p_{i+1}, X) - 1 \geq 2$), el Teorema 3.9 y el Lema 4.23 (a) garantizan que

$$h(\mathfrak{M}_{\emptyset \subset J_F} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset \varphi_i(J_F)} \cap \mathcal{B} \text{ y, por ende, } h(\mathfrak{M}_{p_{i+1}} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\varphi_i(p_{i+1})} \cap \mathcal{B}. \quad (5.28)$$

Para este caso, sea $\nu_F = \{p_{i+1}\}$.

Note que en los dos casos anteriores, ν_F es la mayor s-gráfica fina de X contenida en F . Es muy importante mencionar que los hechos que acabamos de establecer para estos dos casos serán usados en lo que resta de la demostración.

Considere $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < i + 1$ y p_{i+1} es adyacente a p_k . Sean $r = \text{ord}(p_{i+1}, X)$ y $\mathfrak{A}_S(X, p_{i+1}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$, con $\alpha_1 = [p_k, p_{i+1}]$. También, sea $\kappa_1 = \varphi_i(\alpha_1)$. Fije $j \in \{2, 3, \dots, r\}$. Sea a_j el punto extremo de α_j diferente de p_{i+1} (así, $\alpha_j = [p_{i+1}, a_j]$). Sea β_j el único elemento de $\mathcal{A}_{[p_M, a_j]}$ tal que $a_j \in \beta_j$. Vamos a asociar a α_j con un elemento κ_j de $\mathfrak{A}_S(Y, \varphi_i(p_{i+1}))$ en una forma inyectiva (con respecto al índice j) y tal que $\kappa_j \cap \varphi_i(G_i) = \{\varphi_i(p_{i+1})\}$. Considere los casos siguientes (por la elección de \mathcal{A} no es posible que $\alpha_j = \beta_j$ y el caso en el que $a_j \in E(X)$ será tratado después):

Caso 1. $a_j \notin E(X)$ y $\alpha_j \subsetneq \beta_j$.

Sea $\gamma_j = \bigcup \mathfrak{A}_S^1(X, \beta_j)$. Observe que $\alpha_j \subset \gamma_j$ y que, como β_j es un arco que no es una s-gráfica de X , se tiene $\mathfrak{EM}(\beta_j, X) = \mathfrak{NM}(\beta_j, X, \mathcal{A}) = \{\mathfrak{M}_{\gamma_j}, \mathfrak{M}_{\gamma_j^{-a_j}}\}$. Por el Lema 4.23 (a), existen s-gráficas finas ζ_j y ζ'_j de Y tales que $\mathfrak{M}_{\zeta_j} \cap \mathcal{B} = h(\mathfrak{M}_{\gamma_j} \cap \mathcal{A})$ y $\mathfrak{M}_{\zeta'_j} \cap \mathcal{B} = h(\mathfrak{M}_{\gamma_j^{-a_j}} \cap \mathcal{A})$. Así, $\mathfrak{NM}(h(\beta_j), Y, \mathcal{B}) = \{\mathfrak{M}_{\zeta_j}, \mathfrak{M}_{\zeta'_j}\}$. Por tanto, y considerando que el Lema 4.23 (c) implica que $h(\beta_j)$ no es una estrella libre de Y , se cumple que $\mathfrak{EM}(h(\beta_j), Y) = \mathfrak{NM}(h(\beta_j), Y, \mathcal{B}) = \{\mathfrak{M}_{\zeta_j}, \mathfrak{M}_{\zeta'_j}\}$. Además, puesto que $\text{ord}(\gamma_j, X) > \text{ord}(\gamma_j^{-a_j})$, se sigue del Lema 4.16 (incisos (a) y (f)) que $\dim \mathfrak{M}_{\zeta_j} > \dim \mathfrak{M}_{\zeta'_j}$. Así, por el Lema 4.16 (h) se tiene que $\mathfrak{M}_{\zeta'_j} = \mathfrak{M}_{\zeta_j^{-d_j}}$, para algún punto extremo d_j de ζ_j . Por consiguiente, $h(\mathfrak{M}_{\gamma_j^{-a_j}} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\zeta_j^{-d_j}} \cap \mathcal{B}$. Sea $\kappa_j \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $\zeta_j = \zeta_j^{-d_j} \cup \kappa_j$. Es inmediato que $|\kappa_j \cap \zeta_j^{-d_j}| = 1$.

Observe que $[p_{i+1}, a_j] \subset \gamma_j \subset \beta_j \subset [p_M, p_{i+1}] \cup [p_{i+1}, a_j]$ y que, por ende, $p_{i+1} \in \gamma_j^{-a_j} \subset [p_M, p_{i+1}]$. Así, tanto F como $\gamma_j^{-a_j}$ son subconjuntos de $[p_M, p_{i+1}]$ que contienen a p_{i+1} , por lo cual se tiene alguna de las contenciones $\gamma_j^{-a_j} \subset F$ o $F \subset \gamma_j^{-a_j} \subsetneq \beta_j$. Sin embargo, el segundo caso no es posible, puesto que F y β_j son elementos de \mathcal{A} . Por lo tanto, $\gamma_j^{-a_j} \subset F$.

Suponga que $\mathfrak{A}_S^1(X, F) = \emptyset$. Luego, $\gamma_j^{-a_j} = \{p_{i+1}\}$ (porque $\{p_{i+1}\}$ es la única s-gráfica de X distinta del vacío que está contenida en F) y, en consecuencia, $h(\mathfrak{M}_{\gamma_j^{-a_j}} \cap \mathcal{A}) = h(\mathfrak{M}_{p_{i+1}} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\varphi_i(p_{i+1})} \cap \mathcal{B}$ (see (5.28)). Por lo tanto, $\zeta_j^{-d_j} = \{\varphi_i(p_{i+1})\}$. En particular, $\varphi_i(p_{i+1})$ es un punto extremo de $\kappa_j = \zeta_j$. Además, si $\kappa_j \subset \varphi_i(G_i)$, entonces $\kappa_j = \varphi_i(J_F)$ y, así, $h(F) \subsetneq \kappa_j \subset h(\beta_j)$, lo cual contradice el hecho de que $h(F), h(\beta_j) \in \mathcal{B}$. De esta forma, $\kappa_j \cap \varphi_i(G_i) = \{\varphi_i(p_{i+1})\}$.

Ahora suponga que $\mathfrak{A}_S^1(X, F) \neq \emptyset$. Puesto que $\gamma_j^{-a_j} \subset \nu_F$, el Lema 4.23 (d) garantiza que $\zeta_j^{-d_j} \subset \varphi_i(\nu_F) \subset \varphi_i(F)$. En particular, $\zeta_j^{-d_j}$ es un arco o un conjunto unitario. Note que $\emptyset \neq \kappa_j \cap \zeta_j^{-d_j} \subset \kappa_j \cap \varphi_i(\nu_F)$. Si $\kappa_j \subset \varphi_i(\nu_F)$, entonces $\zeta_j \subset$

$\varphi_i(\nu_F)$ y, así, por el Lema 4.23 (d), $\gamma_j \subset \nu_F$. Puesto que esto último no es posible (debido a que $a_j \in \gamma_j - \nu_F$), se tiene que $\kappa_j \not\subset \varphi_i(\nu_F)$. Así, $\kappa_j \cap \varphi_i(\nu_F)$ tiene un único elemento, digamos r . Asimismo, $\kappa_j \cap \zeta_j^{-d_j} = \{r\}$ y, dado que $h(F) \in \mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F)}$ (por (5.25)), se tiene $r \in h(F)$. Además, si $\kappa_j \subset h(F)$, entonces $\varphi_i(\nu_F) \cup \kappa_j \subset h(F) \subset \text{St}_f(\varphi_i(\nu_F)) \subset \text{St}_f(\varphi_i(\nu_F) \cup \kappa_j)$, por lo cual $\mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F) \cup \kappa_j} \in \mathfrak{EM}(h(F), Y) - \{\mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F)}, \mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F^{-p_{i+1}})}\}$. Como esto es una contradicción, se cumple que $\kappa_j \not\subset h(F)$ y, en consecuencia, $\omega(h(F) \cup \kappa_j) > s_0$. De esta forma, existe $\tau \in \mathcal{B}$ tal que $\zeta_j \subset \tau \subset h(F) \cup \kappa_j$. Podemos asumir que $\tau \cap E(h(F) \cup \kappa_j) = \{d_j\}$, de modo que $\tau \cap E(X) = \emptyset$. Suponga que $r \neq \varphi_i(p_{i+1})$. Luego, $r \in \varphi_i(\nu_F)^{-\varphi_i(p_{i+1})} = \varphi_i(\nu_F^{-p_{i+1}})$. Puesto que $\varphi_i(p_{i+1}) \in h(F) \subset \text{St}_f(\varphi_i(\nu_F^{-p_{i+1}}))$, se tiene $\varphi_i(p_{i+1}) \in E(h(F))$. Así, $d_j, \varphi_i(p_{i+1}) \in E(h(F) \cup \kappa_j)$. Asimismo, $d_j \in E(\zeta_j)$ y, por ende, $d_j \in E(\tau)$. Sea $\xi = \bigcup \mathfrak{A}_S^i(Y, \tau)$. Observe que ξ es una s-gráfica fina de X , $\zeta_j \subset \xi$ y $d_j \in E(\xi)$. Como $\mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F)}$ es el elemento de mayor dimensión de $\mathfrak{EM}(h(F), Y)$, el Lema 4.16 (e) implica que $\varphi_i(\nu_F) = \bigcup \{L \in \mathfrak{A}_S^i(Y, h(F)) : L \cap E(Y) = \emptyset\}$. De este modo, y considerando que ξ^{-d_j} es una s-gráfica fina contenida en $h(F)$, se cumple que $\xi^{-d_j} \subset \varphi_i(\nu_F)$. Además, $\tau \in \mathfrak{M}_\xi$ y $\xi^{-d_j} \subset \xi \subset \tau \subset \text{St}_f(\xi) = \text{St}_f(\xi^{-d_j}) \cup \text{St}_f(d_j)$. Más aún, dado que $d_j \in E(\tau)$ y $\kappa_j \subset \tau$, se tiene $\text{St}_f(d_j) \cap \tau = \kappa_j \subset \text{St}_f(\xi^{-d_j})$ y, así, $\tau \in \mathfrak{M}_{\xi^{-d_j}}$. De forma análoga, si $\varphi_i(p_{i+1}) \in \tau$, entonces $\tau \in \mathfrak{M}_{\xi^{-\varphi_i(p_{i+1})}}$, por lo cual $\tau \in \mathfrak{M}_{\xi_0}$, en donde $\xi_0 = (\xi^{-d_j})^{-\varphi_i(p_{i+1})}$ (Lema 4.16 (c)). Si $\varphi_i(p_{i+1}) \notin \tau$, entonces $\xi^{-d_j} \subset \varphi_i(\nu_F^{-p_{i+1}})$; en este caso, sea $\xi_0 = \xi^{-d_j}$. De esta forma, en cualquiera de estos casos, $\xi_0 \subset \varphi_i(\nu_F^{-p_{i+1}})$ y $\tau \in \mathfrak{M}_{\xi_0}$. Si $\mathfrak{M}_{\xi_0} \cap \mathcal{B}$ es degenerado, entonces $\text{St}_f(\xi_0) = \tau$ y, por ende, τ es una s-gráfica fina de Y , lo cual contradice el hecho de que \mathcal{B} no tiene elementos que son s-gráficas finas de Y . Por tanto, $\mathfrak{M}_{\xi_0} \cap \mathcal{B}$ es no degenerado. Sea λ_0 una s-gráfica fina de X tal que $h(\mathfrak{M}_{\lambda_0} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\xi_0} \cap \mathcal{B}$. Luego, por el Lema 4.23 (d), $\lambda_0 \subset \nu_F^{-p_{i+1}}$. Además, como $h^{-1}(\tau) \in \mathfrak{M}_{\lambda_0} \cap \mathfrak{M}_{\gamma_j}$, se tiene que $\gamma_j \subset \text{St}_f(\lambda_0)$. En consecuencia, $\gamma_j \subset \text{St}_f(\nu_F^{-p_{i+1}})$, lo cual no es posible debido a que $[p_{i+1}, a_j] \cap \nu_F^{-p_{i+1}} = \emptyset$. Esta contradicción muestra que $r = \varphi_i(p_{i+1})$ y, así, $\kappa_j \cap \varphi_i(\nu_F) = \kappa_j \cap \zeta_j^{-d_j} = \{\varphi_i(p_{i+1})\}$. Por lo tanto, y tomando en cuenta que $\varphi_i(p_{i+1}) \in E(\varphi_i(G_i))$, se tiene la igualdad $\kappa_j \cap \varphi_i(G_i) = \{\varphi_i(p_{i+1})\}$.

Vamos a mostrar que $\mathfrak{EM}(h(\beta_j), Y) = \mathfrak{EM}(\varphi_i(\beta_j \cap G_i) \cup \kappa_j, Y)$ (este hecho será usado más adelante, en esta misma prueba). Como $\beta_j \cap G_i$ es un arco que no es una s-gráfica de G_i y $\kappa_j \cap \varphi_i(\beta_j \cap G_i) = \{\varphi_i(p_{i+1})\}$, se tiene que $\varphi_i(\beta_j \cap G_i) \cup \kappa_j$ es un arco que no es una s-gráfica de Y . Por tanto, $\mathfrak{EM}(\varphi_i(\beta_j \cap G_i) \cup \kappa_j, Y)$ tiene a lo más dos elementos y para concluir esta parte de la demostración basta mostrar que este conjunto contiene a $\{\mathfrak{M}_{\zeta_j}, \mathfrak{M}_{\zeta_j^{-d_j}}\}$. Observe que cada $p \in \nu_F$ satisface $\text{ord}(p, X) = \text{ord}(\varphi_i(p), Y)$ y, por ende, $\text{ord}(\varphi_i(\gamma_j^{-a_j}), Y) = \text{ord}(\gamma_j^{-a_j}, X)$. También, por el Lema 4.16 (f), $\text{ord}(\gamma_j^{-a_j}, X) = \dim(\mathfrak{M}_{\gamma_j^{-a_j}} \cap \mathcal{A}) + 1 = \dim(\mathfrak{M}_{\zeta_j^{-d_j}} \cap \mathcal{B}) + 1 = \text{ord}(\zeta_j^{-d_j}, Y)$. Por consiguiente, $\text{ord}(\varphi_i(\gamma_j^{-a_j}), Y) = \text{ord}(\zeta_j^{-d_j}, Y)$. Además, puesto

que tanto $\varphi_i(\gamma_j^{-a_j})$ como $\zeta_j^{-d_j}$ son subcontinuos del arco $\varphi(\nu_F)$ y $\varphi_i(p_{i+1})$ es un punto extremo de cada uno de ellos, se tiene que $\varphi_i(\gamma_j^{-a_j}) \subset \zeta_j^{-d_j}$ o $\zeta_j^{-d_j} \subset \varphi_i(\gamma_j^{-a_j})$. Por lo tanto, $\zeta_j^{-d_j} = \varphi_i(\gamma_j^{-a_j})$. Así, $\zeta_j^{-d_j} \subset \varphi_i(\beta_j \cap G_i) \cup \kappa_j$. Más aún, dado que $\gamma_j^{-a_j} = \bigcup \mathfrak{A}_S^i(G_i, \beta_j \cap G_i)$, se tienen las igualdades $\zeta_j^{-d_j} = \bigcup \mathfrak{A}_S^i(\varphi_i(G_i), \varphi_i(\beta_j \cap G_i)) = \bigcup \mathfrak{A}_S^i(Y, \varphi_i(\beta_j \cap G_i))$. Como consecuencia de esto, $\zeta_j^{-d_j} \subset \varphi_i(\beta_j \cap G_i) \subset \text{St}_f(\zeta_j^{-d_j})$. Considerando que $\kappa_j \subset \text{St}_f(\zeta_j^{-d_j})$, se sigue de lo anterior que $\varphi_i(\beta_j \cap G_i) \cup \kappa_j \in \mathfrak{M}_{\zeta_j^{-d_j}} \cap \mathfrak{M}_{\zeta_j}$. Por lo tanto,

$$\mathfrak{EM}(h(\beta_j), Y) = \mathfrak{EM}(\varphi_i(\beta_j \cap G_i) \cup \kappa_j, Y). \quad (5.29)$$

Caso 2. $a_j \notin E(X)$ y $\beta_j \subsetneq \alpha_j$.

Por el Teorema 3.9, $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset \alpha_j} \cap \mathcal{A}$ es un arco y, por el mismo resultado, existe $\kappa_j \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(\mathfrak{M}_{\emptyset \subset \alpha_j} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset \kappa_j} \cap \mathcal{B}$. Sea θ el punto extremo de $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset \alpha_j} \cap \mathcal{A}$ distinto de β_j . Así, $p_{i+1} \in \theta$. Puesto que $p_{i+1} \in E(\alpha_j)$, es inmediato que $\mathfrak{M}_{p_{i+1}} \cap \mathcal{A}$ tiene más de un punto. Sea ζ_j una s-gráfica fina de Y tal que $h(\mathfrak{M}_{p_{i+1}} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\zeta_j} \cap \mathcal{B}$. Como $h(\theta) \in \mathfrak{M}_{\zeta_j} \cap \mathfrak{M}_{\emptyset \subset \kappa_j}$, se cumple que $\zeta_j \subsetneq \kappa_j$ y, por ende, $\zeta_j = \{q\}$, donde q es alguno de los puntos extremos de κ_j .

Suponga que $\mathfrak{A}_S^i(X, F) = \emptyset$. Luego, $h(\mathfrak{M}_{p_{i+1}} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\varphi_i(p_{i+1})} \cap \mathcal{B}$ (por (5.28)) y, así, $q = \varphi_i(p_{i+1})$. Además, $h(\mathfrak{M}_{\emptyset \subset J_F} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset \varphi_i(J_F)} \cap \mathcal{B}$. Si $\kappa_j \subset \varphi_i(G_i)$, entonces $\kappa_j = \varphi_i(J_F)$ y, en consecuencia, $\alpha_j = J_F$. Puesto que esta última igualdad contradice el hecho de que $\alpha_j \cap G_i = \{p_{i+1}\}$ y $J_F \subset G_i$, se cumple $\kappa_j \cap \varphi_i(G_i) = \{\varphi_i(p_{i+1})\}$.

Suponga ahora que $\mathfrak{A}_S^i(X, F) \neq \emptyset$. Como $p_{i+1} \in \nu_F$, se tiene, por el Lema 4.23 (d), que $q \in \varphi_i(\nu_F)$. Note que $h(F) \in \mathfrak{M}_{\varphi_i(\nu_F)} \cap \mathcal{B}$ (por (5.26)) y que $h(\beta_j) \in \mathfrak{M}_{\emptyset \subset \kappa_j}$. De esta forma, $\omega(\varphi_i(\nu_F)) < s_0 < \omega(\kappa_j)$ y, por ende, $\kappa_j \not\subset \varphi_i(\nu_F)$. Por consiguiente, $\kappa_j \cap \varphi_i(\nu_F) = \{q\}$. Más aún, como $p_{i+1} \notin \nu_F^{-p_{i+1}}$, se tiene, por el Lema 4.23 (d), que $q \notin \varphi_i(\nu_F^{-p_{i+1}})$. Por lo tanto, $q = \varphi_i(p_{i+1})$ y, así, $\kappa_j \cap \varphi_i(G_i) = \{\varphi_i(p_{i+1})\}$. Esto concluye el caso 2.

Ahora vamos a probar que la relación entre α_j y κ_j es inyectiva para los casos 1 y 2. Sean j y j' tales que $\kappa_j = \kappa_{j'}$. Considere los siguientes casos.

- $a_j \notin E(X)$, $\alpha_j \subsetneq \beta_j$, $a_{j'} \notin E(X)$, y $\alpha_{j'} \subsetneq \beta_{j'}$. Puesto que $\zeta_j^{-d_j}$ y $\zeta_{j'}^{-d_{j'}}$ son ambos subcontinuos del arco $\varphi_i(\nu_F)$ y $\varphi_i(p_{i+1})$ es un punto extremo de cada uno de ellos, se cumple que $\zeta_j^{-d_j} \subset \zeta_{j'}^{-d_{j'}}$ o $\zeta_{j'}^{-d_{j'}} \subset \zeta_j^{-d_j}$. Suponga, sin pérdida de generalidad, que $\zeta_j^{-d_j} \subset \zeta_{j'}^{-d_{j'}}$. Considerando que $\zeta_j = \zeta_j^{-d_j} \cup \kappa_j$ y $\zeta_{j'} = \zeta_{j'}^{-d_{j'}} \cup \kappa_j$, esto implica que $\zeta_j \subset \zeta_{j'}$. Luego, por el Lema 4.23 (d), se tiene que $\gamma_j \subset \gamma_{j'}$. Así, $a_j \in \gamma_{j'} \subset \beta_{j'}$. Por lo tanto, $j = j'$, es decir, $\alpha_j = \alpha_{j'}$.

- $a_j \notin E(X)$, $\alpha_j \subsetneq \beta_j$ y $\beta_{j'} \subsetneq \alpha_{j'}$. En este caso, $\kappa_j \subsetneq h(\beta_j)$ y $h(\beta_{j'}) \subsetneq \kappa_{j'}$, así que $\omega(\kappa_j) < s_0$ y $\omega(\kappa_{j'}) > s_0$, lo cual contradice el hecho de que $\kappa_j = \kappa_{j'}$. Por lo tanto, este caso no es posible.
- $\beta_j \subsetneq \alpha_j$ y $\beta_{j'} \subsetneq \alpha_{j'}$. Como $\mathfrak{M}_{\emptyset \subset \alpha_j} \cap \mathcal{A} = h^{-1}(\mathfrak{M}_{\emptyset \subset \kappa_j} \cap \mathcal{B}) = h^{-1}(\mathfrak{M}_{\emptyset \subset \kappa_{j'}} \cap \mathcal{B}) = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset \alpha_{j'}} \cap \mathcal{A}$, se tiene en este caso que $\alpha_j = \alpha_{j'}$.

Esto prueba que la relación entre α_j y κ_j es uno a uno (para los casos 1 y 2).

Para el resto de la prueba vamos a asumir que r' es tal que $a_l \notin E(X)$ para cada $l \in \{1, \dots, r\}$ con $l \leq r'$ y que $a_l \in E(X)$ para cada $l \in \{1, \dots, r\}$ con $r' < l$ (por supuesto, puede ocurrir que $r' = 1$ or $r' = r$). Como $\text{ord}(p_{i+1}, X) = \text{ord}(\varphi_i(p_{i+1}), Y)$, la correspondencia inyectiva entre α_j y κ_j nos permite expresar $\mathfrak{A}_S(Y, \varphi_i(p_{i+1})) - \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{r'}\} = \{\kappa_{r'+1}, \dots, \kappa_r\}$ (si $r' = r$, entonces este conjunto es vacío). Para cada $l \in \{1, \dots, r\}$ con $l > r'$, sea d_l el punto extremo de κ_l diferente de $\varphi_i(p_{i+1})$ (definimos previamente d_l solo para $l \leq r'$).

Para cada $j \in \{2, \dots, r\}$, considere un homeomorfismo $f_j : \alpha_j \rightarrow \kappa_j$ tal que $f_j(p_{i+1}) = \varphi_i(p_{i+1})$ y $f_j(a_j) = d_j$. Entonces, existe una función $\varphi_{i+1} : G_{i+1} \rightarrow Y$ que es una extensión común de $\varphi_i, f_2, f_3, \dots$, y f_r . No es difícil ver que φ_{i+1} es un encaje. Sea $A = \{p_1, \dots, p_i\}$ y note que $G_i = \text{St}_f(A)$. Observe también que, por el Lema 2.10 (a), $A \subset \text{int}_X(\text{St}_f(A)) = \text{int}_X(G_i)$. Así, por la propiedad (b) de esta prueba, $\varphi_i(A) \subset \varphi_i(\text{int}_X(G_i)) = \text{int}_Y(\varphi_i(G_i))$. Aplicando dos veces el Lema 2.8 (d), se obtienen las igualdades $\varphi_i(\text{St}_f(A)) = \varphi_i(\text{St}_f^{G_i}(A)) = \text{St}_f^{\varphi_i(G_i)}(\varphi_i(A)) = \text{St}_f(\varphi_i(A))$. Como consecuencia,

$$\varphi_i(G_i) = \text{St}_f(\varphi_i(A)). \quad (5.30)$$

Por lo tanto, por construcción,

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1}(G_{i+1}) &= \varphi_i(G_i) \cup \text{St}_f(\varphi_i(p_{i+1})) \\ &= \text{St}_f(\varphi_i(A)) \cup \text{St}_f(\varphi_i(p_{i+1})) = \text{St}_f(\varphi_i(A \cup \{p_{i+1}\})), \end{aligned}$$

y, así, el Lema 2.10 (e) garantiza que $\varphi_{i+1}(G_{i+1})$ es una s-gráfica libre de Y . De esta forma, φ_{i+1} satisface la propiedad (a).

Por otro lado, observe que

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1}(\text{Fr}_X(G_{i+1})) &= \varphi_{i+1}((\text{Fr}_X(G_i) - \{p_{i+1}\}) \cup \{a_2, \dots, a_{r'}\}) \\ &= (\text{Fr}_Y(\varphi_i(G_i)) - \{\varphi_i(p_{i+1})\}) \cup \{d_2, \dots, d_{r'}\} \subset \text{Fr}_Y(\varphi_{i+1}(G_{i+1})) \end{aligned}$$

Como $\text{Fr}_Y(\varphi_{i+1}(G_{i+1})) = (\text{Fr}_Y(\varphi_i(G_i)) - \{\varphi_i(p_{i+1})\}) \cup (\text{Fr}_Y(\text{St}_f(\varphi_i(p_{i+1}))) - \kappa_1)$, para probar que φ_{i+1} cumple (b) basta mostrar que $(\text{Fr}_Y(\text{St}_f(\varphi_i(p_{i+1}))) - \kappa_1) \subset \{d_2, \dots, d_{r'}\}$. Para este propósito, suponga que $e \in \text{Fr}_Y(\text{St}_f(\varphi_i(p_{i+1}))) - \kappa_1$. Note que, por el Lema 2.10 (d), se tiene que $e \in E(\text{St}_f(\varphi_i(p_{i+1})))$. Luego, existe $\kappa \in \mathfrak{A}_S(Y)$ con $\varphi_i(p_{i+1}) \in \kappa$, $\kappa \not\subset \varphi_i(G_i)$ y $e \in E(\kappa) - \{\varphi_i(p_{i+1})\}$. Observe que $\kappa \cap \varphi_i(G_i) =$

$\{\varphi_i(p_{i+1})\}$. Vamos a mostrar que $\kappa = \kappa_j$ para algún $j \in \{2, 3, \dots, r'\}$ (y, con ello, que $e = d_j$).

Suponga que $\omega(\kappa) > s_0$. Luego, se sigue del Teorema 3.9 que existe $\alpha \in \mathfrak{A}_S(Y)$ tal que $h(\mathfrak{M}_{\emptyset \subset \alpha} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\emptyset \subset \kappa} \cap \mathcal{B}$. Asimismo, se sigue del Lema 4.23 (d) que $h(\mathfrak{M}_p \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\varphi_i(p_{i+1})} \cap \mathcal{B}$ para algún punto extremo p de α . Puesto que $\varphi_i(p_{i+1}) \subset \varphi_i(\nu_F)$, por el Lema 4.23 (d) se tiene que $p \in \nu_F$. Si ν_F es degenerado (es decir, si $\mathfrak{A}_S^i(X, F) = \emptyset$) y $\alpha \subset G_i$, entonces $p = p_{i+1}$, $F \subset \alpha$ y, por ende, tanto $h(F)$ como $\hat{\varphi}_i(F)$ son subconjuntos de κ (el segundo, por (c)) y $\kappa \subset \varphi_i(G_i)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si ν_F es degenerado, entonces $\alpha \cap G_i = \{p_{i+1}\}$. Si ν_F tiene más de un punto, entonces, considerando que $\varphi_i(p_{i+1}) \notin \varphi_i(\nu_F^{-p_{i+1}})$, el Lema 4.23 (d) garantiza que $p \notin \nu_F^{-p_{i+1}}$, por lo cual $p = p_{i+1}$. Además, si ν_F tiene más de un punto, entonces, como $\mu(\nu_F) < t_0 < \mu(\alpha)$, se tiene que $\alpha \not\subset \nu_F$ y, en consecuencia, $\alpha \cap G_i = \{p_{i+1}\}$. Por lo tanto, en cualquier caso, $\alpha = \alpha_j$ y, por ende, $\kappa = \kappa_j$ para algún $j \in \{2, 3, \dots, r\}$. Más aún, es inmediato que $|E(\alpha_j) - E(X)| = |E(\mathfrak{M}_{\emptyset \subset \alpha_j} \cap \mathcal{A}) - E(\mathcal{A})| = |E(\mathfrak{M}_{\emptyset \subset \kappa_j} \cap \mathcal{B}) - E(\mathcal{B})| = |E(\kappa_j) - E(Y)| = 2$ y, por consiguiente, $\alpha_j \cap E(X) = \emptyset$ y $j \in \{2, \dots, r'\}$.

Suponga que $\omega(\kappa) < s_0$. Luego, existe $\chi_0 \in \mathcal{B}$ tal que $\kappa \subset \chi_0 \subset h(F) \cup \kappa$. Podemos asumir que $\chi_0 \cap E(h(F) \cup \kappa) = \{e\}$, de modo que $\chi_0 \cap E(Y) = \emptyset$. Sea $\xi = \bigcup \mathfrak{A}_S^i(Y, \chi_0)$. Observe que ξ es una s-gráfica fina de Y y $\kappa \subset \xi \subset \varphi_i(\nu_F) \cup \kappa$ (debido a que $\varphi_i(\nu_F) \cup \kappa$ es la mayor s-gráfica fina de Y contenida en $h(F) \cup \kappa$) y que, por consiguiente, ξ es un arco. Si $\mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}$ es degenerado, entonces $\text{St}_f(\xi) = \chi_0$ y, por ende, χ_0 es una s-gráfica fina de Y , lo cual contradice el hecho de que \mathcal{B} no contiene elementos que son s-gráficas finas de Y . En consecuencia, $\mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}$ tiene más de un punto. De forma análoga, $\mathfrak{M}_{\xi - e} \cap \mathcal{B}$ no es degenerado. De esta forma, por el Lema 4.16 (i), existe $\chi \in \mathcal{B}$ tal que $\mathfrak{CM}(\chi, Y) = \{\mathfrak{M}_\xi, \mathfrak{M}_{\xi - e}\}$. Por lo tanto, se sigue de los Lemas 4.23 (a) y 4.16 (h) que existen una s-gráfica γ de X no degenerada y $z \in E(\gamma)$ tales que $h(\mathfrak{M}_\gamma \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_\xi \cap \mathcal{B}$ y $h(\mathfrak{M}_{\gamma - z} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\xi - e} \cap \mathcal{B}$. Puesto que $\xi - e \subset \varphi_i(\nu_F)$ y $\xi - e \not\subset \varphi_i(\nu_F^{-p_{i+1}})$, el Lema 4.23 (d) garantiza que $\gamma - z \subset \nu_F$, $\gamma - z \not\subset \nu_F^{-p_{i+1}}$ y, por ende, $p_{i+1} \in \gamma - z$. Sean $J \in \mathfrak{A}_S(X)$ y p tales que $\gamma - z \cup J = \gamma$ y $\gamma - z \cap J = \{p\}$. Como $\xi \not\subset \varphi_i(\nu_F)$, se tiene, de nuevo por el Lema 4.23 (d), que $\gamma \not\subset \nu_F$. Así, $J \cap \nu_F = \{p\}$ y $J \not\subset F$. Además, $\gamma - z \cup J \subset \nu_F \cup J \subset F \cup J$. De esta forma, existe $\tau \in \mathcal{A}$ tal que $\gamma \subset \tau \subset F \cup J$. Suponga que $p \neq p_{i+1}$ (observe que esto implica, en particular, que ν_F es no degenerado). Luego, $\tau \in \mathfrak{M}_{\eta \cup J} \cup \mathfrak{M}_\eta \cap \mathfrak{M}_{\eta^{-p_{i+1}}}$, en donde η es la única s-gráfica fina de X tal que $\eta \cup J = \bigcup \mathfrak{A}_S^i(X, \tau)$ y $\eta \subset \nu_F$. Note que $p_{i+1} \in \gamma \subset \eta \cup J$. Sean ρ y ρ' s-gráficas finas de Y tales que $h(\mathfrak{M}_{\eta \cup J} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_\rho \cap \mathcal{B}$ y $h(\mathfrak{M}_{\eta^{-p_{i+1}}} \cap \mathcal{A}) = \mathfrak{M}_{\rho'} \cap \mathcal{B}$. Considerando que $\eta^{-p_{i+1}} \subset \nu_F^{-p_{i+1}}$ y $\gamma \subset \eta \cup J$, se tiene, por el Lema 4.23 (d), que $\rho' \subset \varphi_i(\nu_F^{-p_{i+1}})$ y $\xi \subset \rho$. Como $\rho \subset h(\tau) \subset \text{St}_f(\rho')$, lo anterior implica que $\xi \subset \text{St}_f(\rho')$. Esto contradice el hecho de que $\kappa \subset \xi$ y $\kappa \cap \rho' \subset \kappa \cap \varphi_i(\nu_F^{-p_{i+1}}) = \emptyset$. Por lo tanto, $p = p_{i+1}$ y, así, $J \cap \gamma - z = J \cap \nu_F = \{p_{i+1}\}$. Si ν_F es degenerado y $J \subset [p_M, p_{i+1}]$, entonces $\gamma - z$ es degenerado, $\gamma = J$ y $F \subsetneq J \subsetneq h^{-1}(\chi)$, lo cual contradice el hecho de que F y $h^{-1}(\chi)$

son elementos de \mathcal{A} (la contención $F \subsetneq J$ se tiene porque F y J son subarcos de $[p_M, p_{i+1}]$ que tienen a p_{i+1} como uno de sus puntos extremos). De esta forma, si ν_F es degenerado, entonces $J \cap [p_M, p_{i+1}] = \{p_{i+1}\}$. Puesto que esta misma igualdad se cumple si ν_F tiene más de un punto, concluimos que, en cualquier caso, $J = \alpha_j$ para algún $j \in \{2, \dots, r\}$.

Como $\gamma \subset [p_M, a_j]$, $a_j \in \gamma$ y $\mu(\gamma) < t_0$, se tiene que $\gamma \subset \beta_j$ y, así, $\gamma \subset \gamma_j$. Por consiguiente, por el Lema 4.23 (d), $\xi^{-e} \cup \kappa = \xi \subset \zeta_j = \zeta_j^{-d_j} \cup \kappa_j$. Considerando que tanto ξ^{-e} como $\zeta_j^{-d_j}$ son subconjuntos de $\varphi_i(\nu_F)$, pero ni κ ni κ_j lo son, esto prueba que $\kappa = \kappa_j$. Más aún, dado que $\alpha_j \subset \gamma$ y γ es una s-gráfica fina de X , se cumple que $\alpha_j \cap E(X) = \emptyset$, por lo cual $j \in \{2, \dots, r'\}$. Esto muestra que φ_{i+1} satisface la propiedad (b).

Sea $j \in \{2, \dots, r'\}$. Si $\alpha_j \subsetneq \beta_j$, entonces $\varphi_i(\beta_j \cap G_i) \cup \kappa_j = \varphi_{i+1}(\beta_j \cap G_i) \cup \varphi_{i+1}(\alpha_j) = \varphi_{i+1}(\beta_j)$ y, así, por (5.29), $\mathfrak{EM}(h(\beta_j), Y) = \mathfrak{EM}(\varphi_i(\beta_j \cap G_i) \cup \kappa_j, Y) = \mathfrak{EM}(\hat{\varphi}_{i+1}(\beta_j), Y)$. Si $\beta_j \subsetneq \alpha_j$, entonces se cumplen las igualdades $\mathfrak{EM}(h(\beta_j), Y) = \{\mathfrak{M}_{\emptyset \subset \kappa_j}, \mathfrak{M}_{d_j}\} = \mathfrak{EM}(\hat{\varphi}_{i+1}(\beta_j), Y)$, debido a que $\hat{\varphi}_{i+1}(\beta_j) = f_j(\beta_j) \subsetneq \kappa_j$ y $d_j = f_j(a_j) \in f_j(\beta_j)$. Por lo tanto φ_{i+1} satisface la propiedad (c). Esto completa la construcción de $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Es inmediato que $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisface (i) y que cada $\varphi_{j_n}(S_n)$ es una s-gráfica de Y . Más aún, $\varphi_{j_n}(S_n) \subset \varphi_{j_{n+1}}(S_{n+1})$ y, por (b), $\text{Fr}_Y(\varphi_{j_n}(S_n)) = \varphi_{j_n}(\text{Fr}_X(S_n)) = \varphi_{j_n}(\{p_{j_n+1}, p_{j_n+2}, \dots, p_{j_{n+1}}\})$. Observe que, dado cualquier $i \in \mathbb{N}$ y el conjunto $A = \{p_1, \dots, p_i\}$, la igualdad $\varphi_i(\text{St}_f(A)) = \text{St}_f(\varphi_i(A))$ de (5.30) es válida reemplazando A por cualquiera de sus subconjuntos. Como consecuencia de esto, para cada $l \in \{1, \dots, j_{n+1} - j_n\}$ se tiene $\varphi_{j_n}(p_{j_n+l}) = \varphi_{j_{n+l}}(p_{j_n+l}) \in \text{int}_Y(\text{St}_f(\varphi_{j_{n+l}}(p_{j_n+l}))) = \text{int}_Y(\varphi_{j_{n+l}}(\text{St}_f(p_{j_n+l}))) \subset \varphi_{j_{n+1}}(S_{n+1})$. De esta forma, $\varphi_{j_n}(S_n) \subset \text{int}_Y(\varphi_{j_{n+1}}(S_{n+1}))$. Por lo tanto, $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisface también la condición (ii). Esto concluye la prueba tanto de la Afirmación 2 como del teorema. \square

5.2. Dendritas Whitney equivalentes

Mientras que en la sección anterior se mostró que las dendritas de la familia \mathfrak{D} no son Whitney equivalentes entre sí (a menos que sean homeomorfas, claro) en esta sección se prueba que las dendritas que no son de esta clase no tienen esta característica. En otras palabras, el resultado principal de esta sección establece que, para cualquier dendrita de que no pertenece a \mathfrak{D} , existe otra del mismo tipo (pero que no es homeomorfa a la primera) que es Whitney equivalente a la primera (Teorema 5.15). Para mostrar esto, se utilizarán ampliamente los resultados del capítulo 3.

Para enunciar el próximo resultado, vamos a usar la notación siguiente. Dados dos espacios topológicos X y D ajenos y puntos $p \in X$ y $q \in D$, sea $X \cup_{p=q} D$ el espacio que se obtiene al tomar la unión topológica $X \cup D$ para luego identificar p con q , es decir, $X \cup_{p=q} D = (X \cup D) / \{p, q\}$.

Teorema 5.10 (veáse la demostración de [1, Theorem 5.1]). *Sea X una dendrita que no pertenece a \mathfrak{D} y sea p un punto de corte de X tal que $p \in \mathcal{P}(X)$. Entonces, existen una clase no numerable $\{D_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ y una clase $\{q_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ con las siguientes propiedades:*

- a) *Para cada $\alpha \in \Lambda$, $q_\alpha \in D_\alpha$, D_α es un dendrita sin arcos libres y X no es homomorfo a $X \cup_{p=q_\alpha} D_\alpha$.*
- b) *si $\alpha, \beta \in \Lambda$ y $\alpha \neq \beta$, entonces $X \cup_{p=q_\alpha} D_\alpha$ y $X \cup_{p=q_\beta} D_\beta$ no son homeomorfos.*

Teorema 5.11 ([14, Theorem 5.2]). *Sea D un continuo. Entonces D es una dendrita sin arcos libres si y solo si cada nivel de Whitney positivo de D es un cubo de Hilbert.*

Teorema 5.12 ([10, Theorem 1]). *Sea Q un espacio topológico y sean Q_1 y Q_2 subespacios de Q tales que $Q = Q_1 \cup Q_2$. Si Q_1 , Q_2 y $Q_1 \cap Q_2$ son cubos de Hilbert y este último es un Z -conjunto de Q_1 , entonces $Q_1 \cup Q_2$ es un cubo de Hilbert.*

Teorema 5.13 ([3, Theorem 10.1]). *Si $h : A \rightarrow B$ es un homeomorfismo entre Z -conjuntos en un cubo de Hilbert Q , entonces h se puede extender a un homeomorfismo de Q sobre Q .*

El Lema 5.14 es un resultado auxiliar que nos ayudará a demostrar el Teorema 5.15. En el enunciado de este lema se asumen ciertas condiciones sobre las dendritas X , D y Z ; dicha configuración será obtenida en la prueba del Teorema 5.15.

Lema 5.14 ([2, Lemma 5.4]). *Suponga que X , D y Z son dendritas tales que $Z = X \cup D$, D no tiene arcos libres y $X \cap D = \{p\}$, para algún punto de corte p de X tal que $p \in \mathcal{P}(X)$. Sean ω una función de Whitney para $C(Z)$, $\mu = \omega|_{C(X)}$ y $t_0 \in (0, \mu(X))$. Entonces, $\omega^{-1}(t_0)$ es homeomorfo a $\mu^{-1}(t_0)$.*

Demostración. Esta demostración sigue las ideas de la prueba de [11, Theorem 20].

Observe primero que $X - \{p\} = Z - D$ y que $D - \{p\} = Z - X$ y que, por ende, $X - \{p\}$ y $D - \{p\}$ son abiertos de Z ajenos y cada uno de ellos tiene más de un punto. Además, dado cualquier abierto U de Z con $p \in U$, se tiene que $U \cap X$ es un abierto del continuo no degenerado X y, por tanto, tiene una cantidad infinita de elementos; en particular, $U \cap (X - \{p\}) \neq \emptyset$. Como $p \in D = Z - (X - \{p\})$, lo anterior implica que $p \in \text{Fr}_Z(X - \{p\})$. De manera análoga, $p \in \text{Fr}_Z(D - \{p\})$

Sea $\mathcal{B}_D = C(D) \cap \omega^{-1}(t_0)$. Vamos a mostrar que

$$\omega^{-1}(t_0) = \mu^{-1}(t_0) \cup C^p(Z, t_0) \cup \mathcal{B}_D. \quad (5.31)$$

Es inmediato que $\mu^{-1}(t_0) \cup C^p(Z, t_0) \cup \mathcal{B}_D \subset \omega^{-1}(t_0)$. Supongamos que $A \in \omega^{-1}(t_0)$ y que $A \notin C^p(Z, t_0)$. Luego, $A \subset Z - \{p\}$. Note que $X - \{p\}$ y $D - \{p\}$ son abiertos de Z ajenos y $(X - \{p\}) \cup (D - \{p\}) = Z - \{p\}$. Como A es conexo, esto implica que $A \subset X - \{p\}$ o $A \subset D - \{p\}$. Así, $A \in \mu^{-1}(t_0) \cup \mathcal{B}_D$.

En algunos casos, la igualdad de (5.31) se puede simplificar un poco, a saber:

- Si $\omega(D) > t_0$, entonces \mathcal{B}_D tiene más de un punto y $\mathcal{B}_D \not\subset \mu^{-1}(t_0) \cup C^p(Z, t_0)$, por lo cual la expresión derecha en (5.31) no se puede reducir. Más aún, $\mathcal{B}_D = \omega_D^{-1}(t_0)$, en donde ω_D es la función de Whitney para $C(D)$ dada por la restricción $\omega|_{C(D)}$, lo cual implica que \mathcal{B}_D es un continuo no degenerado.
- Si $\omega(D) = t_0$, entonces $\mathcal{B}_D = \{D\} \subset C^p(Z, t_0)$ y

$$\omega^{-1}(t_0) = \mu^{-1}(t_0) \cup C^p(Z, t_0).$$

- Si $\omega(D) < t_0$, entonces $\mathcal{B}_D = \emptyset$ y

$$\omega^{-1}(t_0) = \mu^{-1}(t_0) \cup C^p(Z, t_0).$$

Afirmación 1. $\text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)} C^p(X, t_0) = \text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B}_D \cup C^p(Z, t_0))$.

Sea $\mathcal{B} = \mathcal{B}_D \cup C^p(Z, t_0)$ Para mostrar la Afirmación 1, vamos a probar primero que

$$\mu^{-1}(t_0) - C^p(X, t_0) = \omega^{-1}(t_0) - \mathcal{B}. \quad (5.32)$$

Sea $A \in \omega^{-1}(t_0) - \mathcal{B}$. Luego, $p \notin A$ y $A \not\subset D$; como p es punto de corte de Z y los conjuntos $D - \{p\}$ y $X - \{p\}$ son abiertos en Z , ajenos y no vacíos, esto implica que $A \subset X - \{p\}$. Así, $A \in \mu^{-1}(t_0) - C^p(X, t_0)$. Recíprocamente, sea $B \in \mu^{-1}(t_0) - C^p(X, t_0)$. Luego, B no contiene a p y está contenido en $X - \{p\} = Z - D$, es decir, $B \in \omega^{-1}(t_0) - \mathcal{B}$. Esto prueba (5.32) y que $\omega^{-1}(t_0) - \mathcal{B} \subset \mu^{-1}(t_0)$.

Ahora mostraremos que

$$C^p(X, t_0) = \mu^{-1}(t_0) \cap \mathcal{B}. \quad (5.33)$$

Es inmediato que $C^p(X, t_0) \subset \mu^{-1}(t_0) \cap C^p(Z, t_0) \subset \mu^{-1}(t_0) \cap \mathcal{B}$. Supongamos que $A \in \mu^{-1}(t_0) \cap \mathcal{B}$. Como $A \in \mu^{-1}(t_0)$, se tiene que $A \subset X$. Si $A \in \mathcal{B}_D$, entonces $A \subset D \cap X = \{p\}$, es decir, $A = \{p\}$. Como lo anterior es imposible, pues cada elemento de $\mu^{-1}(t_0)$ tiene más de un punto, se cumple que $A \in C^p(Z, t_0)$ y, por ende, que $A \in C^p(X, t_0)$. Esto muestra que $\mu^{-1}(t_0) \cap \mathcal{B} \subset C^p(X, t_0)$. Por lo tanto, se tiene (5.33).

Como $\mu^{-1}(t_0)$ es un cerrado de $\omega^{-1}(t_0)$, la cerradura de $\omega^{-1}(t_0) - \mathcal{B}$ en ambos espacios coincide. Considerando esto y las igualdades (5.32) y (5.33), se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)} C^p(X, t_0) &= C^p(X, t_0) \cap \text{cl}_{\mu^{-1}(t_0)}(\mu^{-1}(t_0) - C^p(X, t_0)) \\ &= (\mu^{-1}(t_0) \cap \mathcal{B}) \cap \text{cl}_{\mu^{-1}(t_0)}(\omega^{-1}(t_0) - \mathcal{B}) \\ &= \mathcal{B} \cap \text{cl}_{\omega^{-1}(t_0)}(\omega^{-1}(t_0) - \mathcal{B}) \\ &= \text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Esto muestra la Afirmación 1.

Para lo que sigue de esta demostración, vamos a considerar a d como la métrica de Z y vamos a suponer que d es convexa. Esto implica que las métricas inducidas por d en X y en D también son convexas (Lema 1.41) y nos permitirá utilizar algunas construcciones previas (en especial aquellas de la demostración del Teorema 3.17) sin requerir detalles adicionales.

Afirmación 2. $\text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)} C^p(X, t_0)$ es un Z -conjunto de $C^p(X, t_0)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Considere la función $\sigma_{t_0} : \mu^{-1}(t_0) \rightarrow \mu^{-1}(t_0)$ construida en la demostración del Teorema 3.17, usando el p y el ε aquí fijados. Por (**) y (†) de dicha demostración, σ_{t_0} satisface lo siguiente:

- (1) Para cada $B \in C^p(X, t_0)$, se cumple que $p \in \text{int}_X(\sigma_{t_0}(B))$.
- (2) Para cada $B \in C^p(X, t_0)$, se cumple que $H_d(B, \sigma_{t_0}(B)) < 2\varepsilon$.

Sea $B \in C^p(X, t_0)$. Como p es un punto de corte de X , existen abiertos U y V de X distintos del vacío y tales que $U \cap V = X$ y $U \cup V = \emptyset$. Note que $p \in \text{cl}_X(U) \cap \text{cl}_X(V)$ y que, por ende, los conjuntos $W = U \cap \text{int}_X(\sigma_{t_0}(B))$ y $Z = V \cap \text{int}_X(\sigma_{t_0}(B))$ son distintos del vacío, además de ser abiertos en X . Observe también que $\sigma_{t_0}(B) \in \langle X, W, Z \rangle$. Asimismo, dado cualquier $C \in \langle X, W, Z \rangle$, se tiene que $C \cap U \neq \emptyset$ y $C \cap V \neq \emptyset$, lo cual implica (por la conexidad de C) que $p \in C$. Así, $\sigma_{t_0}(B) \in \langle X, W, Z \rangle \cap \omega^{-1}(t_0) \subset C^p(X, t_0)$ y, en particular, $\sigma_{t_0}(B) \in \text{int}_{\mu^{-1}(t_0)}(C^p(X, t_0))$. Por lo tanto,

$$\sigma_{t_0}(C^p(X, t_0)) \subset \text{int}_{\mu^{-1}(t_0)}(C^p(X, t_0)) = C^p(X, t_0) - \text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)}(C^p(X, t_0)).$$

De este modo, se tiene que $\text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)} C^p(X, t_0)$ es un Z -conjunto de $C^p(X, t_0)$.

Afirmación 3. $\text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(C^p(Z, t_0) \cup \mathcal{B}_D)$ es un Z -conjunto de $C^p(Z, t_0) \cup \mathcal{B}_D$ y $C^p(D, t_0)$ es un Z -conjunto de $C^p(Z, t_0)$.

Para esta prueba nos enfocaremos en la primera parte de la Afirmación 3; la segunda surgirá como una consecuencia. Sean $\mathcal{B} = \mathcal{B}_D \cup C^p(Z, t_0)$ y $\mathcal{K} = \text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(C^p(Z, t_0))$. Sea $\varepsilon > 0$. Considere a $\rho_{t_0} : \omega^{-1}(t_0) \rightarrow \omega^{-1}(t_0)$ como la función análoga a σ_{t_0} , respecto de la demostración del Teorema 3.17, pero con Z y ω tomando el lugar de X y μ , respectivamente. De este modo, (por (**) y (†) de dicha demostración) ρ_{t_0} cumple lo siguiente :

- (1) Para cada $A \in C^p(Z, t_0)$, se cumple que $p \in \text{int}_Z(\rho_{t_0}(A))$.
- (2) Para cada $A \in C^p(Z, t_0)$, se cumple que $H_d(A, \rho_{t_0}(A)) < 2\varepsilon$.

Por un argumento totalmente análogo al usado para σ_{t_0} en la prueba de la Afirmación 2, se tiene que $\rho_{t_0}(C^p(Z, t_0)) \subset C^p(Z, t_0) - \mathcal{K}$. Más aún, dado cualquier

$A \in C^p(Z, t_0)$, se tiene que $p \in \text{int}_Z(\rho_{t_0}(A))$ y, puesto que $p \in \text{Fr}_Z(X - \{p\})$, tenemos que $\text{int}_Z(\rho_{t_0}(A)) \cap (X - \{p\}) \neq \emptyset$, es decir, $\rho_{t_0}(A) \not\subset D$. Así, $\rho_{t_0}(C^p(Z, t_0)) \subset C^p(Z, t_0) - \mathcal{B}_D$. Usando las dos contenciones anteriores, se obtiene que

$$\rho_{t_0}(C^p(Z, t_0)) \subset C^p(Z, t_0) - (\mathcal{K} \cup \mathcal{B}_D). \quad (5.34)$$

Además, por propiedades topológicas de la frontera, se cumple que $\text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{K} \cup \text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B}_D) \subset \mathcal{K} \cup \mathcal{B}_D$. De este modo, $C^p(Z, t_0) - (\mathcal{K} \cup \mathcal{B}_D) \subset C^p(Z, t_0) - \text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B})$. Por lo tanto,

$$\rho_{t_0}(C^p(Z, t_0)) \subset C^p(Z, t_0) - \text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B} - \text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B}). \quad (5.35)$$

Supongamos, por otro lado, que $A \in \mathcal{B}_D - C^p(Z, t_0)$. Luego, $A \subset D - \{p\}$ y, puesto que (*) de la demostración del Teorema 3.17 garantiza que $A \cap \rho_{t_0}(A) \neq \emptyset$, se tiene que $(D - \{p\}) \cap \rho_{t_0}(A) \neq \emptyset$. Así, $\rho_{t_0}(A) \in \langle Z, D - \{p\} \rangle \cap \omega^{-1}(t_0)$. Además, si $C \in \langle Z, D - \{p\} \rangle \cap \omega^{-1}(t_0)$ y $C \notin \mathcal{B}_D$, entonces tanto $D - \{p\}$ como $X - \{p\}$ intersectan a C y, por la conexidad de C , esto implica que $p \in C$, es decir, $C \in C^p(Z, t_0)$. Se tiene así que $\langle Z, D - \{p\} \rangle \cap \omega^{-1}(t_0) \subset \mathcal{B}_D \cup C^p(Z, t_0) (= \mathcal{B})$. De este modo, $\rho_{t_0}(A) \in \text{int}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B}) = \mathcal{B} - \text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B})$. Como A es un elemento arbitrario de $\mathcal{B}_D - C^p(Z, t_0)$, lo anterior asegura que

$$\rho_{t_0}(\mathcal{B}_D - C^p(Z, t_0)) \subset \mathcal{B} - \text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B}) \quad (5.36)$$

Usando (5.35) y (5.36), se obtiene que

$$\rho_{t_0}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B} - \text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B}). \quad (5.37)$$

Además, como $C^p(D, t_0) \subset \mathcal{B}_D$, la contención de (5.34) garantiza que

$$\rho_{t_0}(C^p(Z, t_0)) \subset C^p(Z, t_0) - C^p(D, t_0). \quad (5.38)$$

Por tanto, por (2), (5.37) y (5.38), se tiene que $\text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B})$ es un Z-conjunto de \mathcal{B} y que $C^p(D, t_0)$ es un Z-conjunto de $C^p(Z, t_0)$ (observe que, aunque $C^p(D, t_0)$ puede ser el conjunto vacío, esto no afecta este resultado).

Afirmación 4. $C^p(X, t_0)$ y $C^p(Z, t_0) \cup \mathcal{B}_D$ son cubos de Hilbert.

Por el Teorema 3.17, $C^p(X, t_0)$ y $C^p(Z, t_0)$, son cubos de Hilbert. Si $\omega(D) \geq t_0$, entonces $\mathcal{B}_D \subset C^p(Z, t_0)$ y, por consiguiente, $C^p(Z, t_0) \cup \mathcal{B}_D$ es igual al cubo de Hilbert $C^p(Z, t_0)$. Supongamos que $\omega(D) > t_0$. Luego, $\mathcal{B}_D = \omega_D^{-1}(t_0)$, en donde ω_D es la función de Whitney para $C(D)$ inducida por ω , es decir, $\omega_D = \omega|_{C(D)}$. Como D es una dendrita sin arcos libres, el Teorema 5.11 garantiza que \mathcal{B}_D es un cubo de Hilbert. Note que $C^p(Z, t_0) \cap \mathcal{B}_D = C^p(D, t_0)$ y que, por el Teorema 3.17, este último conjunto es un cubo de Hilbert. Además, por la Afirmación 3, $C^p(D, t_0)$ es

un Z -conjunto de $C^p(Z, t_0)$. Esto implica, por el Teorema 5.12, que $C^p(Z, t_0) \cup \mathcal{B}_D$ es un cubo de Hilbert y concluye la prueba de la Afirmación 4.

Sea $\mathcal{B} = C^p(Z, t_0) \cup \mathcal{B}_D$. Por la Afirmación 1, $\text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)}(C^p(X, t_0)) = \text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B})$. Por esta razón, podemos considerar la función identidad $h_0 : \text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)}(C^p(X, t_0)) \rightarrow \text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B})$. Por las Afirmaciones 2 y 3, $\text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)}(C^p(X, t_0))$ es un Z -conjunto de $C^p(X, t_0)$ y $\text{Fr}_{\omega^{-1}(t_0)}(\mathcal{B})$ es un Z -conjunto de \mathcal{B} . Como $C^p(X, t_0)$ y \mathcal{B} son cubos de Hilbert (Afirmación 4), el Teorema 5.13 garantiza que existe un homeomorfismo $h_1 : C^p(X, t_0) \rightarrow \mathcal{B}$ que extiende a h_0 , es decir, que cumple $h_0 = h_1|_{\text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)}(C^p(X, t_0))}$. Considere la función $h : \mu^{-1}(t_0) \rightarrow \omega^{-1}(t_0)$ dada por

$$h(A) = \begin{cases} A & \text{si } A \in \mu^{-1}(t_0) - C^p(X, t_0), \\ h_1(A) & \text{si } A \in C^p(X, t_0). \end{cases}$$

Sea $\mathcal{C} = \mu^{-1}(t_0) - C^p(X, t_0)$. Note que $h|_{\mathcal{C}}$ es la función identidad, $h|_{C^p(X, t_0)} = h_1$ y $h_1(C^p(X, t_0)) = \mathcal{B}$. Además, por (5.32), $h(\mathcal{C}) = \omega^{-1}(t_0) - \mathcal{B}$. Así, $h|_{\mathcal{C}}$ y $h|_{C^p(X, t_0)}$ tienen dominios complementarios (respecto de $\mu^{-1}(t_0)$) y ajenos, además de que sus imágenes también son complementarias (respecto de $\omega^{-1}(t_0)$) y ajenas. Como estas dos funciones son biyecciones, lo anterior implica que h es una biyección.

Note también que $\text{cl}_{\mu^{-1}(t_0)}(\mathcal{C}) \cap C^p(X, t_0) = \text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)}(C^p(X, t_0)) = \text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)}(\mathcal{C})$ y $h|_{\text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)}(C^p(X, t_0))} = h_0$. Luego, dado cualquier $A \in \text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)}(\mathcal{C})$, se cumple que $h(A) = h_1(A) = h_0(A) = A$ (porque h_0 es la función identidad de $\text{Fr}_{\mu^{-1}(t_0)}(C^p(X, t_0))$). Por tanto, $h(A) = A$ para cada $A \in \text{cl}_{\mu^{-1}(t_0)}(\mathcal{C})$ y podemos expresar a h como sigue

$$h(A) = \begin{cases} A & \text{si } A \in \text{cl}_{\mu^{-1}(t_0)}(\mathcal{C}), \\ h_1(A) & \text{si } A \in C^p(X, t_0); \end{cases}$$

De este modo, el Lema de pegado (Lema 1.1) asegura que h es continua. Como h es una biyección continua cuyos dominio y codominio son continuos, se concluye que h es un homeomorfismo (Teorema 1.2). \square

Teorema 5.15 ([2, Theorem 5.5]). *Sea X una dendrita. Suponga que $X \notin \mathfrak{D}$. Entonces existe una dendrita Z Whitney equivalente a X y tal que X y Z no son homeomorfos.*

Demostración. Supongamos que $X \notin \mathfrak{D}$. Luego, por el Lema 1.77, existe $p \in \mathcal{P}(X)$ tal que p es un punto de corte de X . Por el Teorema 5.10, existen una dendrita D y $q \in D$ tales D no posee arcos libres y la dendrita $Z = X \cup_{p=q} D$ no es homeomorfa a X . Podemos considerar que $X \cup D = Z$ y que $X \cap D = \{p\}$.

Vamos a mostrar que Z es Whitney equivalente a X .

Sean μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in (0, \mu(X))$. Como $C(X)$ es un subconjunto cerrado de 2^Z , el Teorema 1.80 garantiza que existe una función

de Whitney ω_0 para 2^Z que es una extensión de μ . En particular, la restricción $\omega = \omega_0|_{C(Z)}$ es una extensión de μ a $C(Z)$; es decir, $\mu = \omega|_{C(X)}$. Luego, por el Lema 5.14, tenemos que $\mu^{-1}(t_0)$ es homeomorfo a $\omega^{-1}(t_0)$. Por lo tanto, para cada $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$, existe $\mathcal{B} \in \mathfrak{WL}(Z)$ tal que \mathcal{A} y \mathcal{B} son homeomorfos.

Recíprocamente, sean ω una función de Whitney para $C(Z)$ y $t_0 \in (0, \omega(Z))$. Sean $\mathcal{B}_X = C(X) \cap \omega^{-1}(t_0)$ y $\mathcal{B}_D = C(D) \cap \omega^{-1}(t_0)$. Note que, por el mismo razonamiento que el usado para mostrar (5.31) en la demostración del Lema 5.14, se puede expresar

$$\omega^{-1}(t_0) = \mathcal{B}_X \cup C^p(Z, t_0) \cup \mathcal{B}_D.$$

Considere los casos siguientes:

- (i) $\omega(X) \leq t_0$. En este caso, dependiendo de si $\omega(X) < t_0$ o $\omega(D) = t_0$, se cumple que $\mathcal{B}_X = \emptyset$ o $\mathcal{B}_X = \{X\}$. Se tiene así que $\mathcal{B}_X \subset C^p(Z, t_0)$ y que $\omega^{-1}(t_0) = C^p(Z, t_0) \cup \mathcal{B}_D$. Si $\omega(D) \leq t_0$, entonces (de manera análoga a \mathcal{B}_X) $\mathcal{B}_D \subset C^p(Z, t_0)$ y, en consecuencia, $\omega^{-1}(t_0) = C^p(Z, t_0)$. Así, por el Teorema 3.17, $\omega^{-1}(t_0)$ es un cubo de Hilbert si $\omega(D) \leq t_0$. Consideremos el subcaso en el que $\omega(D) > t_0$. Note que, ignorando la mención de $C^p(X, t_0)$, las demostraciones de las Afirmaciones 3 y 4 son válidas para las hipótesis actuales. Por tanto, $C^p(Z, t_0) \cup \mathcal{B}_D$ es un cubo de Hilbert también en este subcaso. De este modo, en este caso siempre se tiene que $\omega^{-1}(t_0)$ es un cubo de Hilbert. Por otro lado, el Corolario 3.19 garantiza que existe $t_1 \in (0, \mu(X))$ tal que $\mu^{-1}(t_1)$ es un cubo de Hilbert. Así, $\omega^{-1}(t_0)$ es homeomorfo a $\mu^{-1}(t_1)$.
- (ii) $\omega(X) > t_0$. En este caso, el Lema 5.14 muestra que $\omega^{-1}(t_0)$ es homeomorfo a $\mu^{-1}(t_0)$.

Así, los dos casos anteriores muestran que para cada $\mathcal{B} \in \mathfrak{WL}(Z)$ existe $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$ tal que \mathcal{B} y \mathcal{A} son homeomorfos. Por lo tanto, se ha mostrado que Z es Whitney equivalente a X . \square

5.3. Caracterización de la clase \mathfrak{D}

Como conclusión de este trabajo, en esta sección mostraremos el teorema principal: una caracterización de la clase \mathfrak{D} (dentro de la clase de las dendritas) mediante el uso del concepto de continuo determinado por sus niveles de Whitney (Teorema 5.19). Este resultado es un corolario a los Teoremas 5.9 y 5.15, resultados en cuyas demostraciones se han sorteado las principales dificultades técnicas de dicha caracterización.

Definición 5.16. Sea X un continuo. Decimos que X es **determinado por sus niveles de Whitney** (o, para abreviar, **Whitney determinado**) si para cualquier continuo Y que es Whitney equivalente a X se satisface que X y Y son homeomorfos.

El concepto que se acaba de definir también fue introducido por A. Illanes y R. Leonel [14]. Para la prueba del Teorema 5.19 utilizaremos dos resultados más de estos mismo autores.

Teorema 5.17 ([14, Theorem 2.1]). *Si X es una gráfica finita y Y es un continuo tal que Y es Whitney equivalente a X , entonces Y es una gráfica finita.*

Teorema 5.18 ([14, Theorem 2.5]). *Sea X una gráfica finita. Entonces, X está determinado por sus niveles de Whitney.*

Teorema 5.19 ([2, Theorem 5.6]). *Sea X una dendrita. Entonces, X es Whitney determinado si y solo si $X \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. Supongamos que X es Whitney determinado, entonces, por el Teorema 5.15, $X \in \mathfrak{D}$.

Recíprocamente, supongamos que $X \in \mathfrak{D}$. Si X es una gráfica finita, entonces, por el Teorema 5.18, X es Whitney determinado. Supongamos entonces que X no es una gráfica finita. Sea Y un continuo que es Whitney equivalente a X . Si Y es una gráfica finita, entonces, por el Teorema 5.17, X es una gráfica finita, lo cual no es posible. Así, Y no es una gráfica finita. Por otro lado, por el Teorema 5.5, se tiene que $Y \in \mathfrak{D}$. Por consiguiente, el Teorema 5.9 garantiza que Y es homeomorfo a X . Por lo tanto, X es Whitney determinado. \square

Corolario 5.20 ([2, Corollary 5.7]). *Sea X un continuo. Entonces, $X \in \mathfrak{D}$ si y solo si X es Whitney determinado y cada elemento de $\mathfrak{WL}(X)$ es localmente conexo y 2-conexo.*

Demostración. Supongamos que $X \in \mathfrak{D}$. Luego, por el Teorema 5.19, X es Whitney determinado. Además, por el Teorema 3.7, cada elemento de $\mathfrak{WL}(X)$ es localmente conexo. Por último, como X es un dendroide (Observación 1.63), se tiene, por el Teorema 5.4, que cada elemento de $\mathfrak{WL}(X)$ es 2-conexo.

Recíprocamente, supongamos que X es Whitney determinado y que cada elemento de $\mathfrak{WL}(X)$ es localmente conexo y 2-conexo. Luego, por el Teorema 3.7, X es localmente conexo y, por el Teorema 5.4, X es un dendroide. Así, se tiene, por la Observación 1.63, que X es una dendrita. Por lo tanto, el Teorema 5.19 garantiza que $X \in \mathfrak{D}$. \square

Conclusiones

En este último capítulo se mencionan los resultados más importantes de este trabajo; todos ellos son originales de [2]. Los tres primeros de estos resultados identifican ciertos subespacios de los niveles de Whitney positivos de dendritas. Para establecerlos, conviene recordar que \mathfrak{D} denota la familia de las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado y que $\mathfrak{A}_S(X)$ denota el conjunto de todos los arcos libres maximales y de los ciclos de un continuo dado X .

Teorema (3.9). *Sean X una dendrita que no es un arco y \mathcal{A} un nivel de Whitney positivo de X . Entonces,*

$$\mathfrak{A}_S(\mathcal{A}) = \{C(J) \cap \mathcal{A} : J \in \mathfrak{A}_S(X) \text{ y } (C(J) \cap \mathcal{A}) - \{J\} \neq \emptyset\},$$

Teorema (3.17). *Sean X una dendrita, μ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in (0, \mu(X))$. Suponga que existe $p \in X$ tal que cada una de sus vecindades en X no es una gráfica finita. Entonces, el conjunto $C^p(X, t_0) = \{A \in \mu^{-1}(t_0) : p \in A\}$ es un cubo de Hilbert.*

Corolario (3.19). *Sean X una dendrita y μ una función de Whitney para $C(X)$. Suponga que $X \notin \mathfrak{D}$. Entonces existe $t_0 \in (0, \mu(X))$ tal que para cada $t \in [t_0, \mu(X))$ se cumple que $\mu^{-1}(t)$ es un cubo de Hilbert.*

Otro resultado de importancia es la siguiente caracterización de los elementos de la familia \mathfrak{D} dentro de la clase de las dendritas. En su enunciado, $\mathfrak{WL}(X)$ denota el conjunto de todos los niveles de Whitney positivos de un continuo dado X .

Teorema (3.21). *Sea X una dendrita. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (a) X es un elemento de \mathfrak{D} .
- (b) Para cada $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$, $\mathfrak{F}(X) \cap \mathcal{A}$ es denso en \mathcal{A} .
- (c) Para cada $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$, $\{F \in \mathcal{A} : \dim_F \mathcal{A} < \infty\}$ es denso en \mathcal{A} .
- (d) Para cada $\mathcal{A} \in \mathfrak{WL}(X)$, existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $\dim_B \mathcal{A}$ es finito.

(e) Ningún elemento de $\mathfrak{WL}(X)$ es un cubo de Hilbert.

Aún más importante que el resultado anterior, respecto de la dirección principal de este trabajo, es el siguiente teorema.

Teorema (5.15). *Sea X una dendrita. Suponga que $X \notin \mathfrak{D}$. Entonces existe una dendrita Z Whitney equivalente a X y tal que X y Z no son homeomorfos.*

La parte principal de este trabajo se resume en el siguiente resultado, cuya demostración fue el objetivo principal de todo este escrito.

Teorema (5.19). *Sea X una dendrita. Entonces, X es Whitney determinado si y solo si $X \in \mathfrak{D}$.*

Como consecuencia de este último resultado, se estableció la siguiente caracterización de los elementos de la familia \mathfrak{D} entre los continuos.

Corolario (5.20). *Sea X un continuo. Entonces, $X \in \mathfrak{D}$ si y solo si X es Whitney determinado y cada elemento de $\mathfrak{WL}(X)$ es localmente conexo y 2-conexo.*

Referencias

- [1] Acosta, G., Herrera-Carrasco, D.: *Dendrites without unique hyperspace*. Houston J. Math., 35(2):451–467, 2009.
- [2] Ahuatzí-Reyes, J. G., Herrera-Carrasco, D., Macías-Romero, F.: *Dendrites which are determined by their positive Whitney levels*. Topology Appl., 250:1–26, 2018.
- [3] Anderson, R. D.: *On topological infinite deficiency*. Michigan Math. J., 14(3):365–383, 1967.
- [4] Arévalo, D., Charatonik, W. J., Pellicer-Covarrubias, P., Simon, L.: *Dendrites with a closed set of end points*. Topology Appl., 115(1):1–17, 2001.
- [5] Bing, R. H.: *Partitioning a set*. Bull. Amer. Math. Soc., 55(12):1101–1110, 1949.
- [6] Charatonik, J. J., Eberhart, C. E.: *On smooth dendroids*. Fund. Math., 67(3):297–322, 1970.
- [7] Duda, R.: *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph, I*. Fund. Math, 62(3):265–286, 1968.
- [8] Dugundji, J.: *Topology*. Advanced Mathematics. Allin and Bacon, Inc., 1966.
- [9] Goodykoontz, J. T., Nadler Jr., S. B.: *Whitney levels in hyperspaces of certain Peano continua*. Trans. Amer. Math. Soc., 274(2):671–694, 1982.
- [10] Handel, M.: *On certain sums of Hilbert cubes*. Gen. Topol. Appl., 9(1):19–28, 1978.
- [11] Hernández-Gutiérrez, R., Illanes, A., Martínez-de-la-Vega, V.: *Uniqueness of hyperspaces of Peano continua*. Rocky Mountain J. Math., 43(5):1583–1624, 2013.
- [12] Herrera-Carrasco, D., Illanes, A., López, M. de J., Macías-Romero, F.: *Dendrites with unique hyperspace $C_2(X)$* . Topology Appl., 156(3):549–557, 2009.

- [13] Illanes, A.: *A characterization of dendroids by the n -connectedness of the Whitney levels*. *Fundamenta Mathematicae*, 140(2):157–174, 1992.
- [14] Illanes, A., Leonel, R.: *Whitney equivalent continua*. *Topology Proc.*, 39:293–315, 2012.
- [15] Illanes, A., Nadler Jr., S. B.: *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, volumen 126 de *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math.* Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1999.
- [16] Illanes, A., Puga, I.: *Determining finite graphs by their large Whitney levels*. *Topology Appl.*, 60(2):173–184, 1994.
- [17] Illanes, A., Torres, R.: *The dimension of Whitney levels of a finite graph*. *Glas. Mat. Ser. III*, 32(52):263–273, 1997.
- [18] Illanes Mejía, A.: *Hiperespacios de continuos*, volumen 28 de *Aportaciones Matemáticas: Textos*. Sociedad Matemática Mexicana, 2004.
- [19] Martínez-de-la-Vega, V.: *Dimension of the n -fold hyperspaces of graphs*. *Houston J. Math.*, 32(3):783–799, 2006.
- [20] Moise, E. E.: *Grille decomposition and convexification theorems for compact metric locally connected continua*. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55(12):1111–1121, 1949.
- [21] Munkres, J. R.: *Topology*. Prentice Hall, Inc., 2^a edición, 2000.
- [22] Nadler Jr., S. B.: *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, volumen 49 de *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. New York-Basel: Marcel Dekker Inc., 1978.
- [23] Nadler Jr., S. B.: *Continuum Theory: An Introduction*, volumen 158 de *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. New York: Marcel Dekker Inc., 1992.
- [24] Nadler Jr., S. B.: *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, volumen 33 de *Aportaciones Matemáticas: Textos*. Sociedad Matemática Mexicana, 2006.
- [25] Petrus, A.: *Contractibility of Whitney continua in $C(X)$* . *Gen. Topol. Appl.*, 9(3):275–288, 1978.

Índice alfabético

- 2-conexo, 76
- m -esfera, 2
- n -celda, 1

- adyacente, 34
- árbol, 10
- arco, 2
- arco libre, 7
- arco libre maximal, 7
- arco ordenado, 5

- bola cerrada generalizada, 9

- casi enrejado, 17
- ciclo, 7
- clase \mathcal{D} , 11
- continuo, 2
- continuo casi enrejado, 17
- continuo enrejado, 17
- continuo no degenerado, 2
- cubo de Hilbert, 2
- curva cerrada simple, 2

- deformación μ -admisibles, 21
- dendrita, 11
- dendroide, 13
- dendroide suave, 14
- dendroide suave en un punto, 14
- determinado por sus niveles de Whitney, 97

- enrejado, 17

- fina, 29

- frontera como variedad, 2
- función de Whitney, 19
- función de Whitney admisible, 21
- función inducida, 4

- gráfica finita, 10

- hereditariamente unicoherente, 13

- límite inverso, 6
- libre, 30

- métrica convexa, 8
- métrica de Hausdorff, 3

- n-odo, 10
- nivel de Whitney, 20
- nivel de Whitney positivo, 20

- Orden, 2

- punto de ramificación, 3
- punto extremo, 3
- punto ordinario, 3

- s-gráfica, 29
- s-gráfica fina, 29
- s-gráfica libre, 30
- suave, 14
- suave en un punto, 14
- subcontinuo libre, 30
- sucesión inversa, 6

- topología de Vietoris, 5

- únicamente arco conexo, 13

unicoherente, 13

vecindad, 1

Whitney determinado, 97

Whitney equivalente, 75