



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Recuperación de amplitud y fase de un objeto mediante  
pticografía de Fourier

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Andres Yañez Cabrera

Asesorado por

M. C. Luis Alberto Rendón Delgado

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez

Puebla Pue.  
Noviembre de 2022





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Recuperación de amplitud y fase de un objeto mediante  
pticografía de Fourier

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**LICENCIADO EN FÍSICA**

por

Andres Yañez Cabrera

Asesorado por

M. C. Luis Alberto Rendón Delgado

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez

Puebla Pue.  
Noviembre de 2022



**Título:** Recuperación de amplitud y fase de un objeto mediante pticografía de Fourier.

**Estudiante:** Andres Yañez Cabrera

COMITÉ

---

Dr. Miguel Ángel Olvera Santamaría  
Presidente

---

Dra. Areli Montes Pérez  
Secretario

---

Dr. Cruz Meneses Fabián  
Vocal

---

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez  
Suplente

---

M. C. Luis Alberto Rendón Delgado  
Asesor

---

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez  
Asesor



# Agradecimientos

- ❖ A mi madre, padre y hermano Alex por brindarme siempre el cariño, sabiduría, comprensión y herramientas que me han permitido superarme en toda mi vida.
- ❖ A mi abuelita, tías y tíos por su enorme apoyo y consejos que han formado una parte significativa en mi desarrollo.
- ❖ A mis asesores, el M. C. Luis Alberto Rendón Delgado y el Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez por su incontable y continuo apoyo y dirección durante el desarrollo de este trabajo.
- ❖ A mis queridos amigos y amigas, que me han acompañado en toda la carrera brindándome su invaluable amistad.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Antecedentes</b>	<b>1</b>
1.1. Hipótesis .....	3
1.2. Objetivos .....	3
<b>2. Marco teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Interferencia .....	5
2.2. Difracción .....	6
2.3. Óptica de Fourier .....	6
2.3.1. Análisis de Fourier en dos dimensiones .....	6
2.3.2. Sistemas lineales .....	8
2.3.3. Principio de Huygens-Fresnel .....	10
2.3.4. Difracción de Fresnel y Fraunhofer .....	12
2.3.5. Propiedades transformantes de Fourier de las lentes.....	13
2.3.6. Función de transferencia de amplitud .....	16
2.4. Pticografía de Fourier .....	18
<b>3. Metodología</b>	<b>21</b>
3.1. Funcionamiento del algoritmo iterativo de recuperación .....	21
3.2. Simulación .....	23
<b>4. Resultados</b>	<b>29</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>41</b>



# Índice de figuras

2.1. Líneas de fase de la función $e^{j2\pi(f_x x + f_y y)}$ . [9] .....	7
2.2. Esquema representativo del principio de Huygens-Fresnel. [10] .....	11
2.3. Esquema: planos de entrada y salida de difracción. [9] .....	11
2.4. Esquema de las configuraciones: a) entrada justo enfrente de la lente. b) entrada a una distancia d de la lente. [9] .....	14
2.5. Esquema configuración experimental de la técnica: pticografía de Fourier. ....	18
2.6. Esquemas: iluminación en pticografía de Fourier .....	19
3.1. Diagrama de flujo del algoritmo iterativo de pticografía de Fourier. ....	22
3.2. Amplitud y fase del objeto introducido, usado para la simulación. ....	24
3.3. Secuencia de encendido de los leds en cada matriz. ....	24
3.4. Espectros de Fourier filtrados correspondientes a cada led. ....	25
3.5. Imágenes de baja resolución correspondientes a cada led. ....	25
3.6. Proceso de plegado de espectros en el 1° ciclo del algoritmo. ....	26
3.7. Proceso de plegado de espectros en el 10° ciclo del algoritmo. ....	26
3.8. Espectro de Fourier sintético obtenido con el algoritmo de PF. ....	27
4.1. Espectro de Fourier sintético; matriz de 5x5 leds. ....	30
4.2. Amplitud y fase recuperadas; matriz de 5x5 leds. ....	30
4.3. Espectro de Fourier sintético; matriz de 7x7 leds. ....	31
4.4. Amplitud y fase recuperadas; matriz de 7x7 leds. ....	31
4.5. Espectro de Fourier sintético; matriz de 9x9 leds. ....	32
4.6. Amplitud y fase recuperadas; matriz de 9x9 leds. ....	32
4.7. Espectro de Fourier sintético; matriz de 11x11 leds. ....	33
4.8. Amplitud y fase recuperadas; matriz de 11x11 leds. ....	33
4.9. Espectro de Fourier sintético; matriz de 13x13 leds. ....	34
4.10. Amplitud y fase recuperadas; matriz de 13x13 leds. ....	34
4.11. Espectro de Fourier sintético; matriz de 15x15 leds. ....	35
4.12. Amplitud y fase recuperadas; matriz de 15x15 leds. ....	35
4.13. Porcentaje de error en la amplitud en cada experimento respecto a los valores de entrada. ....	36
4.14. Porcentaje de error en la fase en cada experimento respecto a los valores de entrada. ....	37
4.15. Porcentaje de error en la recuperación para diferente número de ciclos en el algoritmo iterativo. ....	37



# Introducción

En la obtención de imágenes de muestras biológicas, a menudo existen dificultades que limitan la visualización de características específicas, una de estas es la frecuencia de iluminación con la que se irradian las muestras para su observación en microscopios ópticos, la frecuencia de la luz visible puede ser insuficiente para obtener detalles específicos de interés, pero si la frecuencia es muy alta la muestra es dañada. Este problema al igual que las aberraciones de las lentes y su limitada apertura numérica usadas en los microscopios, implican una resolución más baja de la deseada al obtener la imagen.

Micrografía de Fourier (PF) es una técnica para obtener imágenes microscópicas computacionales, está basada en la microscopia óptica y consiste en la síntesis de una mayor apertura numérica a partir de un conjunto de imágenes adquiridas por varios ángulos de iluminación en el dominio de la luz visible, resultando en un alto incremento en la resolución, comparada con la microscopia convencional. A diferencia de los enfoques holográficos, que generalmente se basan en la interferencia con un haz de referencia conocido, PF resuelve la fase faltante con un algoritmo de reconstrucción iterativo. En consecuencia, la técnica no requiere el haz de referencia ni mucho hardware óptico adicional.

Una ventaja principal de PF radica en su capacidad para medir cuantitativamente la fase con una configuración no interferométrica. La formación de imágenes en fase es una modalidad crítica en la formación de imágenes biomédicas, en la que muchas muestras son principalmente transparentes, por lo tanto, la fase proporciona un mecanismo de contraste complementario para revelar las estructuras detalladas que de otro modo serían invisibles en las imágenes de campo brillante. Si bien los sistemas de medición de fase interferométrica pueden ser rápidos y precisos, generalmente requieren componentes ópticos sofisticados, alineación y calibración precisas.

Al recuperar la fase de la muestra cuantitativamente a través de la reconstrucción computacional a partir de imágenes de microscopio estándar, PF elimina la necesidad de hardware complejo. Además, el uso de LED parcialmente coherentes para la iluminación ayuda a evitar los artefactos de alto costo y uso limitado.

Las cámaras y los microscopios típicos pueden "acercar" y obtener una imagen de alta resolución, o pueden "alejarse" para ver un área más grande a una resolución más baja, pero rara vez pueden lograr ambos efectos simultáneamente. PF aborda el compromiso anterior para producir imágenes a escala de gigapíxeles sin necesidad de piezas móviles. Durante los últimos 8 años, PF ha evolucionado desde su primera demostración dentro

de un microscopio[1] hasta convertirse en una técnica general que ahora se aplica en una amplia variedad de configuraciones y escenarios.

Por lo tanto, el propósito de este trabajo es estudiar la técnica de pticografía de Fourier como método de recuperación de fase, contribuyendo a motivar su desarrollo e implementación en diversas áreas de la ciencia para facilitar observaciones que de otra manera pueden ser limitadas. Puesto que tiene ventajas considerables tanto en resultados como en implementación. Para ello, haciendo un análisis por medio de los conceptos fundamentales de óptica de Fourier, se estudia el proceso iterativo para la recuperación de imagen de fase y amplitud a partir de la reconstrucción del espectro de frecuencias espaciales (plano de Fourier) de un objeto muestra para posteriormente realizar la simulación de este proceso para un objeto también simulado.

# Capítulo 1

## Antecedentes

El nombre "pticografía" fue acuñado por Hegerl y Hoppe en 1970 para describir una solución al problema de la fase cristalográfica sugerida por primera vez por Hoppe en 1969 [2]. Aunque la idea encapsula el concepto subyacente de interferencia por convolución (ptico) e invariancia traslacional, la pticografía cristalina no se puede utilizar para obtener imágenes de objetos continuos, porque muchos (hasta millones) de haces interfieren al mismo tiempo, por lo que las diferencias de fase son inseparables. Hoppe abandonó su concepto de pticografía en 1973.

Entre 1989 y 2007, Rodenburg y sus compañeros de trabajo desarrollaron varios métodos de inversión para el problema general de la fase pticográfica de imágenes, incluida la deconvolución de distribución de Wigner (WDD)[3]. Chapman utilizó el método de inversión WDD para demostrar la primera implementación de la pticografía de rayos X en 1996[4]. La pequeñez de las computadoras y la mala calidad de los detectores en ese momento pueden explicar el hecho de que la pticografía no fue adoptada al principio por otros trabajadores.

El interés generalizado en la pticografía solo comenzó después de la primera demostración de la pticografía iterativa de recuperación de fases de rayos X en 2007 en la Swiss Light Source (SLS)[5]. Desde 2010, varios grupos han desarrollado las capacidades de la pticografía para caracterizar y mejorar la óptica reflectante[6] y de rayos X refractiva[7]. En 2012 también se demostró que la pticografía electrónica podría mejorarla resolución de una lente electrónica en un factor de cinco[8], un método que se utilizó en 2018 para proporcionar la imagen de transmisión de mayor resolución jamás obtenida.

En 2013, Zheng et al. descubrieron los beneficios de las matemáticas de la pticografía para permitir imágenes microscópicas de diapositivas completas sin partes móviles y demostró su importancia experimental[1]. La simplicidad de la primera configuración experimental de PF de Zheng et al. ayudó a que la técnica ganara interés científico y comercial en una amplia variedad de áreas de investigación. Su relación con la pticografía también ha ayudado en la transferencia de conocimiento y la rápida aceleración de la investigación relacionada.



## **1.1. Hipótesis**

En un microscopio compuesto estándar, al irradiar un objeto secuencialmente con diferentes ángulos de iluminación con respecto al eje óptico, se logra acceder a distintas regiones de su espectro de Fourier, las cuales contendrán frecuencias más altas.

Las imágenes capturadas correspondientes a cada ángulo de iluminación, al ser procesadas computacionalmente, es posible obtener un espectro de Fourier sintético con información de altas frecuencias, el cual parece haber sido obtenido con una lente objetivo de mayor apertura numérica, y así obtener una recuperación del objeto con mayor resolución.

Entonces si se aumenta la cantidad de imágenes a procesar aumentando el ángulo máximo de iluminación, se espera obtener una mejora progresiva en la recuperación del objeto en amplitud y fase.

## **1.2. Objetivos**

### **Objetivo general**

Estudiar la técnica pticografía de Fourier para la recuperación de amplitud y fase de objetos y motivar su desarrollo e implementación en diversas áreas de la ciencia para facilitar observaciones que de otra manera pueden ser muy limitadas.

### **Objetivos particulares**

1. Mostrar el funcionamiento del algoritmo iterativo de PF con la simulación de un objeto muestra.
2. Hacer una comparación entre las recuperaciones en diferentes simulaciones en las que se aumenta la cantidad de mediciones a procesar, es decir, aumentando el ángulo máximo de iluminación.
3. Obtener el error cuadrático medio en la recuperación de amplitud y fase del proceso numérico del algoritmo iterativo con respecto a los valores de entrada simulados.



# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Interferencia

La interferencia es el fenómeno producido por la interacción de dos o más ondas en un punto del espacio, generando una onda resultante que será igual a la suma de las ondas componentes. Y cuya irradiancia es proporcional a la suma de las irradiancias de estas ondas constitutivas. Tratándose de ondas de luz, se refiere a interferencia óptica.

En general, cuando dos ondas se encuentran en el espacio, no interaccionan de forma apreciable. Ahora bien, si se verifican unas determinadas condiciones, estas ondas pueden generar una distribución de intensidad con zonas donde la energía se potencia y otras en las que la energía disminuye. Las condiciones para obtener imágenes de interferencia estables son tres:

1. Las ondas que interfieren deben ser coherentes
2. Las ondas deben tener la misma frecuencia
3. Amplitudes iguales o aproximadamente iguales.

De manera general la representación compleja de un campo eléctrico se hace con la función de onda  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , en la forma de la ecuación (2.1)

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r})e^{j(\varphi(\mathbf{r})-\omega t)} \quad (2.1)$$

Entonces en particular dos ondas  $\psi_1(\mathbf{r}, t)$  y  $\psi_2(\mathbf{r}, t)$  con la forma de la ecuación (2.1) al superponerse forman una onda resultante  $\psi_r(\mathbf{r}, t)$ , como lo expresa la ecuación (2.2).

$$\psi_r(\mathbf{r}, t) = \psi_1(\mathbf{r}, t) + \psi_2(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)$$

Además, la intensidad o irradiancia que se detecta de esta superposición se obtiene utilizando la amplitud compleja de  $\psi_r(\mathbf{r}, t)$ , como se aprecia en la ecuación (2.3).[10]

$$I(\mathbf{r}) = |U_r(\mathbf{r})|^2 = U_r(\mathbf{r})U_r^*(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

Donde la amplitud compleja  $U_r(\mathbf{r})$  se obtiene de la ecuación (2.4).

$$U_r(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) + \psi_2(\mathbf{r}) = A_1(\mathbf{r})e^{j\varphi_1(\mathbf{r})} + A_2(\mathbf{r})e^{j\varphi_2(\mathbf{r})} \quad (2.4)$$

Así entonces la intensidad a la que se llega queda expresada en la ecuación (2.5).

$$I(\mathbf{r}) = I'(\mathbf{r}) + I''(\mathbf{r}) \cos \phi(\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

$$I(\mathbf{r}) = A_1^2(\mathbf{r}) + A_2^2(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$

$$I''(\mathbf{r}) = 2A_1(\mathbf{r})A_2(\mathbf{r}) \quad (2.7)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) - \varphi_2(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

La expresión en la ecuación (2.5) tiene dos términos, el primero expresado en la ecuación (2.6) representa la suma de amplitudes de las dos ondas, conocido en interferometría como iluminación de fondo; el segundo formado por las ecuaciones (2.7) y (2.8), es el término de interferencia caracterizado por la diferencia de fases de las ondas.

## 2.2. Difracción

Al igual que la interferencia, la difracción es un fenómeno ondulatorio. Cuando una onda óptica se transmite a través de una abertura en una pantalla opaca y viaja cierta distancia en el espacio libre, su distribución de intensidad es llamado patrón de difracción. Asumiendo que la onda tiene el comportamiento descrito por el principio de Huygens- Fresnel, abordado en la subsección 2.3.3. Para entender totalmente las propiedades de las imágenes ópticas, es necesario que la difracción y las limitantes que impone sobre el sistemasean apreciadas. Debido a la naturaleza ondulatoria de la luz, el patrón de difracción puede desviarse ligera o sustancialmente de la sombra de la apertura, dependiendo de la distancia entre la apertura y el plano de observación, la longitud de onda y las dimensiones de la apertura. Hay dos clases de análisis que usualmente se estudia en difracción, de Fresnel y Fraunhofer, las cuales son de gran relevancia en este trabajo para entender las propiedades de transformación que generan las lentes en un sistema óptico, lo cual es parte fundamental para seguir el análisis de la técnica de pticografía de Fourier. Ambas clases se analizarán con más detalle en la subsección 2.3.4.

## 2.3. Óptica de Fourier

La óptica de Fourier provee una descripción de la propagación de ondas de luz basado en un análisis armónico (transformada de Fourier) y sistemas lineales.

### 2.3.1. Análisis de Fourier en dos dimensiones

La transformada de Fourier (alternativamente el espectro de Fourier o espectro de frecuencias) de una función  $g$  (en general, de valor complejo) de dos variables independientes  $x$  y  $y$ , es representada comúnmente en la literatura como  $\mathcal{F}\{g(x, y)\}$  y está definida como:

$$\mathcal{F}\{g(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy \quad (2.9)$$

La transformada es en sí misma una función de valores complejos de dos variables independientes  $f_x$  y  $f_y$  las cuales llamamos frecuencias. Similarmente la transformada inversa de Fourier de una función  $G(f_x, f_y)$  está representada por  $\mathcal{F}^{-1}\{G(f_x, f_y)\}$  y está definida como:

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(f_x, f_y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) \exp[j2\pi(f_x x + f_y y)] df_x df_y \quad (2.10)$$

La transformada inversa de Fourier es a veces referida como la representación integral de Fourier de una función  $g(x, y)$ .

Además, se puede considerar la transformada de Fourier de dos dimensiones, como la descomposición de una función  $g(x, y)$  en una combinación lineal de funciones de la forma  $e^{j2\pi(f_x x + f_y y)}$ .

Para cualquier par de frecuencias  $(f_x, f_y)$  la correspondiente función elemental tiene una fase que es cero o un múltiplo entero de  $2\pi$  a lo largo de las líneas descritas por la ecuación (2.11).

$$y = -\frac{f_x}{f_y}x + \frac{n}{f_y} \quad (2.11)$$

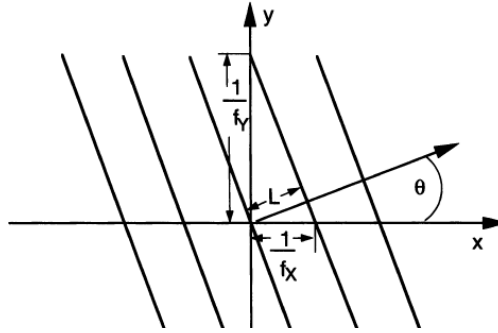


Figura 2.1: Líneas de fase de la función  $e^{j2\pi(f_x x + f_y y)}$  [9]

Donde  $n$  es un número entero. Entonces como puede apreciarse en la figura 2.1, esta función elemental puede considerarse como “dirigida” en el plano  $(x, y)$  en un ángulo  $\theta$  (ec. 2.12) y además el periodo espacial está dado por la ecuación (2.13).

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right) \quad (2.12)$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \quad (2.13)$$

En la práctica ciertas partes de una imagen pueden contener líneas de cuadrícula paralelas en un cierto espacio fijo, y la frecuencia o frecuencias particulares representadas por las líneas de cuadrícula se localizan en ciertas regiones espaciales de la imagen. El período de estas líneas está relacionado con las frecuencias por medio de la ecuación (2.13) donde se aprecia que, si el periodo es pequeño, lo que hace referencia a una imagen con detalles más finos, entonces sus correspondientes frecuencias deben ser más grandes.

Las propiedades de la transformada de Fourier de dos dimensiones son extensiones directas de sus análogas en una dimensión. Aquí se presentan dos de estas propiedades, las cuales son utilizadas en este trabajo.

**Propiedad de cambio.** Si  $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$ , entonces

$$\mathcal{F}\{g(x - a, y - b)\} = G(f_x, f_y)e^{-j2\pi(f_x a + f_y b)} \quad (2.14)$$

**Propiedad de convolución.** Si  $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$  y  $\mathcal{F}\{h(x, y)\} = H(f_x, f_y)$  entonces:

$$\mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta)h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta\right\} = G(f_x, f_y)H(f_x, f_y) \quad (2.15)$$

### 2.3.2. Sistemas lineales

Para el propósito de este trabajo se define la palabra “sistema” en una vía lo suficientemente general para esclarecer su comportamiento a funciones de entrada y salida. Respectivamente, un sistema está definido para hacer un mapeo de un conjunto de funciones de entrada a un conjunto de funciones de salida. Para el caso de sistemas de imágenes, las entradas y salidas pueden ser funciones de valores reales (intensidad) o funciones de valores complejos (campo de amplitud) bidimensionales. Un sistema se dice lineal si la siguiente propiedad de superposición expresada en la ecuación (2.16) se cumple para todas funciones de entrada  $p$  y  $q$  y cualesquiera constantes complejas  $a$  y  $b$ .

$$S\{ap(x_1, y_1) + bq(x_1, y_1)\} = aS\{p(x_1, y_1)\} + bS\{q(x_1, y_1)\} \quad (2.16)$$

La gran ventaja de la linealidad es la habilidad para expresar la respuesta de un sistema a una entrada arbitraria en términos de las respuestas a ciertas funciones elementales en las que se ha descompuesto la entrada. Entonces, lo más importante es encontrar un medio simple y conveniente de descomponer la entrada. Tal descomposición es ofrecida por la llamada propiedad de tamizado de la función delta definida en la ecuación (2.17).

$$g_1(x_1, y_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta)\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)d\xi d\eta \quad (2.17)$$

Esta ecuación puede ser considerada expresando  $g_1$  como una combinación lineal de funciones delta ponderadas y desplazadas; las funciones elementales de la descomposición son por tanto las funciones delta.

En este sentido si consideramos una función de salida  $g_2(x, y)$  respuesta de la interacción de una función de entrada  $g_1(x, y)$  al sistema, representándolo en la ecuación (2.18).

$$g_2(x_2, y_2) = S\{g_1(x_1, y_1)\} \quad (2.18)$$

Donde  $S\{\}$  es un operador que representa matemáticamente al sistema. Se tiene entonces lo siguiente:

$$g_2(x_2, y_2) = S\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta)\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)d\xi d\eta\right\} \quad (2.19)$$

Y aplicando la propiedad de linealidad (ec. 2.16) se obtiene la expresión 2.20.

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} S\{g_1(\xi, \eta)\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\}d\xi d\eta \quad (2.20)$$

Como último paso se define una función  $h(x_2, y_2; \xi, \eta)$  que denota la respuesta del sistema en un punto  $(x_2, y_2)$  del espacio de salida, a una función delta de entrada en las coordenadas  $(\xi, \eta)$  del espacio de entrada. De modo que la función de salida  $g_2(x_2, y_2)$  toma la forma expresada en la ecuación (2.21).

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta)h(x_2, y_2; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.21)$$

La función  $h$  es llamada la función de impulso o respuesta impulso. Esta función denota la respuesta del sistema en un punto  $(x_2, y_2)$  del espacio de salida por una función delta de entrada con coordenadas  $(\xi, \eta)$  del espacio de entrada.

La ecuación (2.21) demuestra que en efecto un sistema lineal está completamente caracterizada por su respuesta a impulsos unitarios.

### **Sistemas lineales invariantes: funciones de transferencia**

Un sistema de imagen lineal tiene invariancia espacial (o equivalentemente “isoplanático”) si la respuesta impulso  $h(x_2, y_2; \xi, \eta)$  depende solamente de las distancias  $(x_2, \eta)$  y  $(y_2 - \eta)$ , es decir, las distancias  $x$  y  $y$  entre el punto de excitación y el punto de respuesta, por lo que la función impulso toma la forma expresada en la ecuación (2.22).

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = h(x_2 - \xi, y_2 - \eta) \quad (2.22)$$

Entonces un sistema de imagen es espacialmente invariante si la imagen de un objeto de fuente puntual cambia únicamente en posición y no en su forma funcional conforme la fuente puntual explora el campo objeto.

En la práctica rara vez los sistemas de imagen son isoplanáticos sobre su campo de objetos, pero usualmente es posible dividir ese campo en regiones pequeñas (parches isoplanáticos) dentro del cual el sistema es aproximadamente invariante.

Para describir completamente el sistema imagen, la respuesta impulso apropiada debe especificarse para cada parche isoplanático, pero si la porción particular del campo objeto de interés es suficientemente pequeña, a menudo es suficiente considerar solo el parche isoplanático sobre el eje óptico del sistema.

Notar entonces que, para un sistema invariante, la integral de superposición (ec. (2.21)), toma la forma particular y simple definida por la ecuación (2.23).

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_2 - \xi, y_2 - \eta) d\xi d\eta \quad (2.23)$$

La cual es la convolución de la función objeto con la respuesta impulso del sistema. También se expresa como en la ecuación (2.24).

$$g_2 = g_1 \otimes h \quad (2.24)$$

Si tomamos la transformada de Fourier de la convolución (2.23), entonces los espectros de salida  $G_2(f_x, f_y)$  y de entrada  $G_1(f_x, f_y)$  están relacionados por la ecuación (2.25).

$$G_2(f_x, f_y) = G_1(f_x, f_y) H(f_x, f_y) \quad (2.25)$$

Donde H es la transformada de Fourier de la respuesta impulso, definida por la ecuación (2.26).

$$H(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) \exp[-j2\pi(f_x \xi + f_y \eta)] d\xi d\eta \quad (2.26)$$

La función H llamada la función de transferencia del sistema que indica los efectos del sistema en el dominio de la frecuencia. Notar que al transformar la entrada entonces vemos que es descompuesta en funciones elementales las cuales son las funciones exponenciales complejas de la integral de Fourier. Entonces la ecuación (2.25) toma en cuenta el efecto del sistema sobre cada función elemental.

### 2.3.3. Principio de Huygens-Fresnel

El principio de Huygens-Fresnel establece que cada punto en un frente de onda genera una onda esférica y la envolvente de esas ondas secundarias constituye un nuevo frente de onda. Su superposición constituye la onda en otro plano, como se muestra en el esquema de la figura 2.2. En general una onda cualquiera puede ser expresada en términos de una combinación lineal de ondas esféricas.

Siguiendo el esquema de la figura 2.3, matemáticamente y resultando de la teoría escalar de la difracción, se obtiene la amplitud compleja de una perturbación óptica en un plano  $(x, y)$  proveniente de un plano paralelo  $(\xi, \eta)$  y a una distancia normal  $z$  por medio de la ecuación (2.27).

$$U(x, y) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{jkr}}{r} \cos \theta d\xi d\eta \quad (2.27)$$

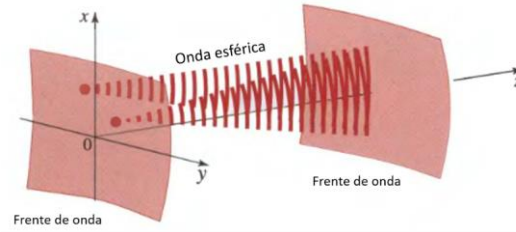


Figura 2.2: Esquema representativo del principio de Huygens-Fresnel.[10]

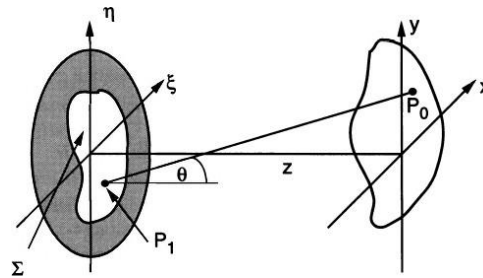


Figura 2.3: Esquema: planos de entrada y salida de difracción.[9]

Donde  $r$  está definida por la ecuación (2.28).

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} \quad (2.28)$$

La distancia de observación  $z$  se considera mucho mayor que las distancias transversales involucradas y, por lo tanto, podemos considerar que el factor de oblicuidad ( $\cos\theta$ ) es cercano a la unidad y dado que la amplitud de un haz de luz cambia muy lentamente con la distancia  $z$ , el factor  $1/r$  se aproxima a  $1/z$ . De esta manera la ecuación 2.27 pasa a la forma mostrada en la ecuación (2.29).

$$U(x, y) = \frac{1}{j\lambda z} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) e^{jkr} d\xi d\eta \quad (2.29)$$

Notar que la ecuación (2.29) que describe el principio de Huygens-Fresnel representa una integral de superposición como se muestra en la ecuación (2.30).

$$U(x, y) = \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (2.30)$$

Donde la respuesta impulso en este caso está dada por la ecuación (2.31).

$$h(x - \xi, y - \eta) = \frac{1}{j\lambda} \frac{e^{jkr}}{z} \quad (2.31)$$

La que además es espacialmente invariante por lo que la ecuación (2.30) es además una integral de convolución.

### 2.3.4. Difracción de Fresnel y Fraunhofer

#### Aproximación paraboloidal

Para reducir el principio de Huygens-Fresnel a una más simple y utilizable expresión, se introduce ahora una aproximación para la distancia  $r$  entre  $P_1$  y  $P_0$ , conocida como la aproximación paraboloidal de Fresnel y se basa en la expansión binomial, expresando a  $r$  como en la ecuación (2.32).

$$r = z \sqrt{1 + \left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2} \quad (2.32)$$

Recordando que para una expresión del tipo  $r = \sqrt{1 + b}$  su expansión binomial es  $r = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots$ , entonces de manera similar la aproximación para  $r$

$$r \approx z \left[ 1 + \left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2 \right] \quad (2.33)$$

Reteniendo hasta el primer orden de la expansión, puesto que la fase varía mucho más rápido con la distancia a comparación de la amplitud, por lo que el error a considerar en la aproximación aumentaría si solo se retuviera el primer término de la expansión. Así la expresión resultante para el campo en el plano  $(x, y)$  toma la forma denotada por la ecuación (2.34).

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ j \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta \quad (2.34)$$

Además, si se factoriza el término  $\exp \left[ \frac{jk}{2z} (x^2 + y^2) \right]$  de la integral se obtiene otra forma de expresar la ecuación (2.34), mostrado en la ecuación (2.35).

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{j\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta \quad (2.35)$$

La cual salvo por el factor  $\frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}$  puede reconocerse como la transformada de Fourier de dos dimensiones del producto del campo complejo  $U(\xi, \eta)$  y una fase exponencial cuadrática.

Esta integral puede reconocerse también como la convolución del campo complejo  $U(\xi, \eta)$  y una función impulso  $h(x, y; z)$ , dado por la ecuación (2.36).

$$U(x, y) = U(\xi, \eta) \otimes h(x, y; z) \quad (2.36)$$

Donde

$$h(x, y; z) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp \left\{ j \frac{k}{2z} [x^2 + y^2] \right\} \quad (2.37)$$

A las ecuaciones (2.34) y (2.35) se les conoce como la **integral de difracción de Fresnel**. Cuando esta aproximación es válida se dice que el observador está en la región

de Fresnel o equivalentemente en el campo cercano de la apertura. La precisión de esta aproximación está determinada por los errores que se inducen cuando se eliminan términos superiores al primer orden en la expansión binomial. Una condición suficiente para la precisión es que el cambio de fase máximo inducido al dejar en la aproximación el término  $\frac{b^2}{8}$  es mucho más grande que 1 radian. Esta condición se cumplirá si la distancia  $z$  satisface.

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]_{max}^2 \quad (2.38)$$

### **Integral de difracción de Fraunhofer**

Si ahora en la difracción de Fresnel se satisface la siguiente aproximación:

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)_{max}}{2} \quad (2.39)$$

Entonces el factor de fase cuadrático dentro de la integral es aproximadamente la unidad y entonces la expresión (2.35) resulta ahora:

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta \quad (2.40)$$

A la ecuación (2.40) se le conoce como **integral de difracción de Fraunhofer**, expresión que salvo los factores de fase multiplicando a la integral, esta es simplemente la transformada de Fourier del campo  $U(\xi, \eta)$  evaluada en las frecuencias  $f_x = \frac{x}{\lambda z}$  y  $f_y = \frac{y}{\lambda z}$ .

### **2.3.5. Propiedades transformantes de Fourier de las lentes**

Una de las más remarcables y útiles propiedades de una lente convergente, es su capacidad para realizar transformadas de Fourier de dos dimensiones.

Esta complicada operación puede realizarse con extrema simplicidad en un sistema óptico coherente tomando ventaja de las leyes básicas de propagación y difracción de la luz, interesándonos la amplitud compleja resultante de la interacción con el sistema óptico en el plano focal posterior de la lente. La información para realizar la transformación de Fourier es introducida por un objeto con una transmitancia de amplitud que es proporcional a la función de entrada de interés.

Para ello nos fijaremos en dos configuraciones las cuales se muestran en el esquema de la figura (2.4). En ambos casos se asume que la entrada es iluminada normalmente por una onda monocromática de amplitud compleja  $U_i(x, y)$ .

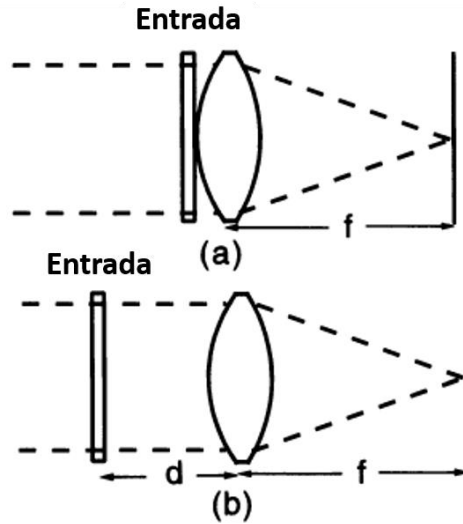


Figura 2.4: Esquema de las configuraciones: a) entrada justo enfrente de la lente. b) entrada a una distancia  $d$  de la lente. [9]

**Caso a)** La entrada se encuentra justo enfrente de la lente.

Dado que la lente tiene una extensión finita, le asociaremos una función  $P(x, y)$  conocida como función de pupila.

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dentro de la apertura de la lente} \\ 0, & \text{de cualquier otra manera} \end{cases} \quad (2.41)$$

Dado que la lente es un objeto de fase (idealmente transmite toda la luz incidente), su función de transmitancia está dada por:

$$t_l(x, y) = \exp \left[ -j \frac{k_0}{2f} (x^2 + y^2) \right] \quad (2.42)$$

Así la amplitud compleja que sale de la lente está dada por:

$$U'_l(x, y) = U_l(x, y) P(x, y) \exp \left[ -j \frac{k_0}{2f} (x^2 + y^2) \right] \quad (2.43)$$

Ahora, para obtener la amplitud compleja resultante  $U_f(u, v)$  en el plano focal posterior de la lente, nos fijamos en el resultado de la convolución de  $U'_l(x, y)$  con la función  $h$  de respuesta impulso de espacio libre con  $z = f$ , lo cual nos lleva a la integral de difracción de Fresnel.

$$U_f(u, v) = \frac{e^{jkf}}{j\lambda f} e^{j\frac{k}{2f}(u^2+v^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U'_l(x, y) e^{j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}(xu+yv)} dx dy \quad (2.44)$$

Sustituyendo la ecuación (2.43) en (2.44) se obtiene:

$$U_f(u, v) = \frac{e^{jkf}}{j\lambda f} e^{\frac{jk}{2f}(u^2+v^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U_l(x, y) P(x, y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}(xu+yv)} dx dy \quad (2.45)$$

Así observamos que la amplitud compleja  $U_f(u, v)$  es proporcional a la transformada de Fourier de dos dimensiones de la amplitud compleja  $U_l(x, y)$  multiplicada por un factor  $P(x, y)$ . Sin embargo si la extensión física de la entrada es más pequeña que la apertura de la lente, entonces la función de pupila puede ser despreciada, resultando en:

$$U_f(u, v) = \frac{e^{jkf}}{j\lambda f} e^{\frac{jk}{2f}(u^2+v^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U_l(x, y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}(xu+yv)} dx dy \quad (2.46)$$

**Caso b)** La entrada colocada a una distancia  $d$  de la lente.

En este caso consideraremos la amplitud compleja de entrada  $U_t(x, y)$  a la amplitud compleja que es transmitida por la entrada, y  $U_l(x, y)$  a la amplitud compleja que incide a la lente después de haberse trasladado una distancia  $d$  en espacio libre. De modo que:

$$U_l(x, y) = U_t(x, y) \otimes h(x, y; d) \quad (2.47)$$

Aplicando la transformada de Fourier de dos dimensiones a  $U_l(x, y)$

$$F_l(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{U_l(x, y)\} = F_t(f_x, f_y) H(f_x, f_y) \quad (2.48)$$

Donde  $F_t(f_x, f_y)$  corresponde a la transformada de Fourier de la amplitud compleja de entrada y  $H(f_x, f_y)$  la transformada de Fourier de la función respuesta impulso de espacio libre, expresadas en las ecuaciones (2.49) y (2.50) respectivamente.

$$F_t(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{U_t(x, y)\} \quad (2.49)$$

$$H(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{h(x, y; d)\} = e^{jkd} e^{-j\pi\lambda(f_x^2+f_y^2)} \quad (2.50)$$

Reescribiendo ahora la ecuación (2.46) como:

$$U_f(u, v) = \frac{e^{jkf}}{j\lambda f} e^{\frac{jk}{2f}(u^2+v^2)} F_l\left(\frac{u}{\lambda f}, \frac{v}{\lambda f}\right) \quad (2.51)$$

Y sustituyendo la ecuación (2.48) en (2.51) se obtiene:

$$U_f(u, v) = \frac{e^{jkf}}{j\lambda f} e^{\frac{jk}{2f}\left(1-\frac{d}{f}\right)(u^2+v^2)} F_t\left(\frac{u}{\lambda f}, \frac{v}{\lambda f}\right) \quad (2.52)$$

Donde  $F_l\left(\frac{u}{\lambda f}, \frac{v}{\lambda f}\right)$  es la transformada de Fourier de la amplitud compleja  $U_l(x, y)$  que incide en la lente, que a diferencia del caso a) en la ecuación (2.45 o 2.46), ahora esta  $F_l\left(\frac{u}{\lambda f}, \frac{v}{\lambda f}\right)$  contiene la información de la propagación en espacio libre que realizó esta amplitud  $U_l(x, y)$  antes de entrar en la lente, por lo que finalmente la amplitud compleja  $U_f(u, v)$  queda expresada como:

$$U_f(u, v) = \frac{e^{jkf}}{j\lambda f} e^{\frac{jk}{2f}(1-\frac{d}{f})(u^2+v^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U_l(x, y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}(xu+yv)} dx dy \quad (2.53)$$

Ahora basta con notar que si la entrada es colocada a la distancia focal anterior de la lente  $d = f$  entonces la amplitud compleja  $U_f(u, v)$  será exactamente la transformada de Fourier de la amplitud compleja transmitida por la entrada.

$$U_f(u, v) = \frac{e^{jkf}}{j\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} U_l(x, y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}(xu+yv)} dx dy \quad (2.54)$$

### 2.3.6. Función de transferencia de amplitud

Las lentes tienen una extensión finita por lo que constituyen un sistema limitado por la difracción, así podemos considerar la imagen producida como una convolución de la imagen predicha por la óptica geométrica con una función de respuesta impulso dada por la ecuación (2.55) que es el patrón de difracción de Fraunhofer de la pupila de salida y donde  $z_i$  es la distancia de la lente a la imagen.

$$h(u, v) = \frac{A}{\lambda z_i} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z_i}(ux+vy)} dx dy \quad (2.55)$$

Los sistemas coherentes (iluminación coherente) permiten que el campo no presente cambios en su forma funcional al interactuar con el sistema, como lo demuestra la ecuación de convolución con la respuesta impulso espacialmente invariante, por lo que los conceptos de funciones de transferencia pueden ser aplicados a estos sistemas. Para visualizar esto, defino los siguientes espectros de frecuencia, de entrada y de salida,  $G_g(f_x, f_y)$  y  $G_i(f_x, f_y)$  respectivamente.

$$G_g(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_g(u, v) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(f_x u + f_y v)} du dv \quad (2.56)$$

$$G_i(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_i(u, v) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(f_x u + f_y v)} du dv \quad (2.57)$$

Además, defino la función de transferencia de amplitud  $H$  como la transformada de Fourier de dos dimensiones de la función respuesta impulso de amplitud invariable en el espacio.

$$H(f_x, f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(u, v) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(f_x u + f_y v)} du dv \quad (2.58)$$

Ahora aplicando el teorema de convolución ec. (2.15), se sigue que:

$$G_i(f_x, f_y) = H(f_x, f_y) G_g(f_x, f_y) \quad (2.59)$$

Así los efectos en el sistema de imágenes de difracción limitada han sido expresados en el dominio de la frecuencia. Notar que mientras la ecuación (2.58) define  $H$  como la transformada de Fourier de la función de respuesta impulso de amplitud, es además en sí misma un patrón de difracción de Fraunhofer y puede expresarse como la transformada de Fourier escalada de la función pupila ec. (2.55).

$$H(f_x, f_y) = \mathcal{F} \left\{ A/\lambda z_i \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z_i}(ux+vy)} dx dy \right\} = (A\lambda z_i) P(-\lambda z_i f_x, -\lambda z_i f_y) \quad (2.60)$$

Por conveniencia en la notación tomemos la constante  $A\lambda z_i$  igual a la unidad y además podemos ignorar los signos negativos en los argumentos de  $P$  puesto que para la aplicación que aquí se trabaja, nuestra función de pupila es simétrica en  $x$  y  $y$ . Entonces:

$$H(f_x, f_y) = P(\lambda z_i f_x, \lambda z_i f_y) \quad (2.61)$$

Si la función de la pupila es realmente la unidad dentro de alguna región y cero en caso contrario, entonces existe un filtro pasa-banda finita en el dominio de la frecuencia dentro del cual los sistemas de imagen de difracción limitada pasan todos los componentes de frecuencia sin distorsión de amplitud o fase. En el límite de este filtro pasa-banda, la respuesta de frecuencia cae repentinamente a cero, lo que implica que los componentes de frecuencia fuera del filtro pasa-banda se eliminan por completo.

Por lo tanto, la función pupila definida para la extensión finita de la lente, limita el rango de componentes de Fourier que pasan por el sistema óptico.

## 2.4. Pticografía de Fourier

La pticografía de Fourier consiste en la síntesis de una apertura numérica más amplia a partir de un conjunto de imágenes adquiridas en varios ángulos de iluminación coherentes. Cada imagen se adquiere bajo la iluminación de una fuente de luz coherente en varios ángulos de incidencia (típicamente de una matriz de LED); el conjunto de imágenes adquiridas se combina utilizando un algoritmo iterativo de recuperación de objeto complejo en una imagen final de alta resolución.

### Técnica

En la primera demostración de la técnica se utilizó un microscopio óptico estándar, el único hardware nuevo que se requería era una matriz relativamente económica de diodos emisores de luz (LED), el arreglo de las componentes necesarias para realizar este proceso se muestra en el esquema de la figura (2.5). Después se tomaron imágenes de esta muestra con un microscopio estándar utilizando una lente de objetivo con corrección al infinito y de  $NA_{obj}$  (apertura numérica) baja. [1]

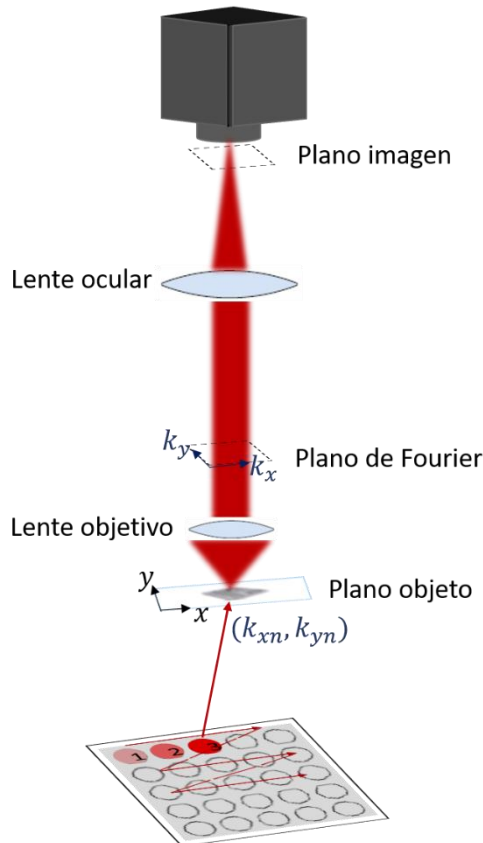


Figura 2.5: Esquema configuración experimental de la técnica: pticografía de Fourier. [1]

Para comenzar, se considera que cada LED que actúa como una pequeña fuente puntual, llega al objeto en forma de ondas planas con coordenadas de dirección  $(k_{xn}, k_{yn})$ , (considerando un sistema de iluminación tipo Köhler o que la matriz se encuentra muy

cerca del objeto), y que encendemos solo un LED individual en la matriz para iluminar la muestra para la formación de la imagen posterior. Dado que la muestra de interés contiene muchas características submicrométricas pequeñas a la escala de la longitud de onda de la luz, la muestra difractará la luz entrante en un cono grande (es decir, una distribución de vectores de onda).[11]

El cono de luz difractada de la muestra en el plano focal posterior de la lente es proporcional a la transformada de Fourier de esta. De acuerdo con lo visto en la sección 2.3.5.

Este gran cono casi siempre excederá el ángulo máximo de aceptación de la lente objetivo, cuyo medio ángulo denotamos como  $\theta$ . La resolución de un sistema de imagen está especificada por el ángulo de aceptación de la lente objetivo y por tanto de su función de transferencia de amplitud (FTA), como se muestra en el esquema de la figura 2.6(a).

Si la lente puede detectar toda la luz dispersada por una muestra de interés, podrá resolver las características hasta una longitud de onda óptica en sistemas coherentes, mientras que, si la lente solo puede aceptar un cono más pequeño de luz dispersada por la muestra, su resolución será proporcionalmente menor.

La pticografía de Fourier como ya se ha mencionado utiliza una lente de NA baja para la adquisición de imágenes, pero captura secuencialmente diferentes segmentos del gran cono de luz difractada mediante la adquisición de múltiples imágenes. Cada imagen se captura con la muestra bajo iluminación desde un ángulo único  $\phi$ , (es decir, con una onda plana en ángulo  $\phi$ ) como se muestra en el diagrama de la Fig. 2.6(b).

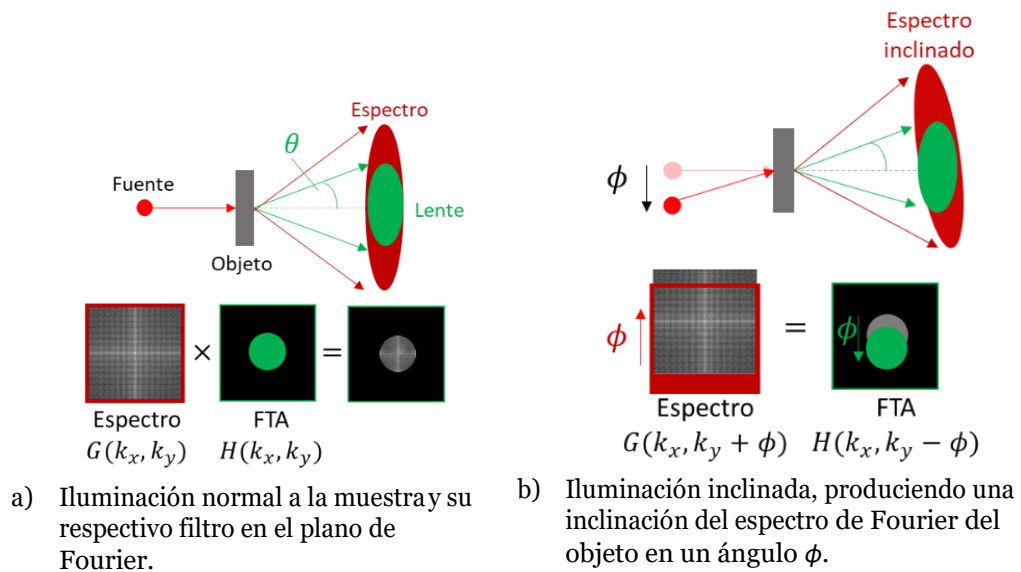


Figura 2.6: Esquemas: iluminación en pticografía de Fourier

Iluminar la muestra desde un ángulo hará que un nuevo segmento del cono de luz

difractado que emerge de la superficie de la muestra pase a través de la apertura de la lente objetivo y luego al sensor de imagen. Al cambiar la fuente de iluminación puntual a muchas posiciones diferentes, es posible garantizar que una gran fracción del cono de luz difractado pase a través de la lente y hacia el sensor de imagen, aunque en diferentes puntos en el tiempo (es decir, dentro de diferentes imágenes). Para capturar de manera efectiva imágenes de la muestra bajo iluminación desde una gran cantidad de ángulos, la pticografía de Fourier ilumina secuencialmente la muestra desde diferentes LED dentro de la matriz insertada, y luego combina computacionalmente estos datos en una sola imagen que parece haber pasado a través de una lente sintética, cuyo tamaño efectivo puede extenderse por todo el cono de luz difractada para ofrecer una resolución mucho mayor.

Para modelar este proceso matemáticamente se utilizan conceptos fundamentales de óptica de Fourier.

Primero, se pueden describir las propiedades de cambio de fase y transmisión de la muestra delgada definiendo una función compleja  $S_{objeto}(x, y)$ , la cual representa el objeto que es la cantidad desconocida que se busca reconstruir. Aquí  $(x, y)$  indican coordenadas del plano de muestra 2D.

De manera general para cualquier iluminación, incluyendo la iluminación normal, el proceso se describe por la convolución:

$$S_{salida}(x, y) = \left( S_{objeto}(x, y) e^{j(k_{xn}x + k_{yn}y)} \right) \otimes h(x, y) \quad (2.62)$$

Donde  $h(x, y)$  la función de respuesta impulso de amplitud, asociada a la lente objetivo, y el factor de fase  $e^{j(k_{xn}x + k_{yn}y)}$  representa a la  $n$  – ésima onda plana proveniente del  $n$  – ésimo led, incidiendo en el objeto.

El cono de luz difractado de la muestra en el plano focal posterior de la lente es proporcional a la transformada de Fourier de  $S_{objeto}(x, y)$  denotándola como  $G_{objeto}(f_x, f_y)$ , donde  $(f_x, f_y)$ , denotan frecuencias espaciales en 2D.

Así en el espacio de Fourier la ecuación 2.62 pasa a ser descrita por la ecuación 2.63.

$$G_{salida}(x, y) = G_{objeto}(k_x - k_{xn}, k_y - k_{yn}) H(k_x, k_y) \quad (2.63)$$

Donde  $H(k_x, k_y)$  denota la función de transferencia de amplitud de radio finito que actúa efectivamente como un filtro pasa-banda y  $n$  representa el  $n$  – ésimo Led que ilumina la muestra.

Mediante la transformación inversa de Fourier de la ecuación (2.63), podemos modelar aproximadamente la  $n$  – ésima imagen detectada como:

$$I_n = \left| \mathcal{F}^{-1} \{ G_{objeto}(k_x - k_{xn}, k_y - k_{yn}) H(k_x, k_y) \} \right|^2 \quad (2.64)$$

El objetivo de la pticografía de Fourier es reconstruir la función compleja del objeto  $S_{objeto}(x, y)$  con alta resolución, a partir de las mediciones (imágenes)  $\{I_n\}_{i=1}^N$ , donde  $N$  es el número total de ángulos de iluminación o imágenes capturadas.[11]

## Capítulo 3

# Metodología

### 3.1. Funcionamiento del algoritmo iterativo de recuperación

Como se mencionó en la sección 2.4 el objetivo de la técnica es recuperar la función compleja del objeto (amplitud y fase) utilizando mediciones de intensidad obtenidas desde diferentes ángulos de iluminación, las cuales son procesadas por el algoritmo iterativo de recuperación, logrando un aumento en la resolución de las imágenes resultantes de amplitud y fase.

El algoritmo iterativo funciona proyectando al objeto alternadamente entre el dominio espacial y el frecuencial, a este proceso se le conoce como proyección alternada, el cual encuentra la intersección entre dos tipos de conjuntos. El primer conjunto se compone de todas las soluciones al objeto que están sujetas a constricciones con un área de soporte dada y es llamado el conjunto constreñido. En este caso el área de soporte es la apertura de la pupila en el dominio de Fourier. El segundo conjunto consiste en todas las soluciones al objeto que son consistentes con la medición de intensidad dada, y es llamado el conjunto de módulo. [12]

La búsqueda por la intersección se realiza proyectando la estimación actualizada en los dos conjuntos. El procedimiento se explica en los siguientes pasos.

1. Inicia el proceso con una estimación inicial del objeto de alta resolución  $\sqrt{I_{hr}}e^{i\phi_{hr}}$ , donde el subíndice  $hr$  indica alta resolución por su nombre en inglés (high resolution).
2. Genera una imagen de baja resolución  $\sqrt{I_{ln}}e^{i\phi_{ln}}$  correspondiente a la obtenida con la iluminación del  $n$ -ésimo Led. El subíndice  $l$  indica baja resolución por su nombre en inglés (low resolution).
3. Reemplazar  $I_{ln}$  con la intensidad medida  $I_{lm}$ :  $\sqrt{I_l}e^{i\phi_l} \rightarrow \sqrt{I_{lm}}e^{i\phi_{lm}}$  para actualizar la información del objeto en el dominio espacial. Y así también actualizar la región correspondiente de  $\sqrt{I_{hr}}e^{i\phi_{hr}}$  en el espacio de Fourier.
4. Repetir los pasos 2 y 3 para los diferentes ángulos de iluminación correspondientes a cada Led.
5. Repetir los pasos 2 a 4 hasta que se obtenga una solución auto-consistente.

**Especificaciones**

Para generar la imagen de baja resolución  $\sqrt{I_{ln}}e^{i\phi_{ln}}$  correspondiente (paso 2), primero se proyecta la estimación inicial del objeto  $\sqrt{I_{hr}}e^{i\phi_{hr}}$  en el conjunto constreñido que corresponde al espacio de Fourier en el plano focal posterior de la lente objetivo. Con ello se ha obtenido la región del espectro de Fourier estimado que es correspondiente con el ángulo de iluminación del  $n$ -ésimo Led.

Segundo, la región del espectro, resultado de la proyección del objeto estimado en el conjunto constreñido, es llevada al dominio espacial, y entonces la amplitud del objeto es remplazada por la medición, mientras que la fase se mantiene sin cambio (paso 3). Una vez reemplazada la amplitud, se le aplica la transformada de Fourier de dos dimensiones para obtener así una actualización en la región correspondiente del espectro de  $\sqrt{I_{hr}}e^{i\phi_{hr}}$ . Las regiones actualizadas correspondientes a cada led se superponen o pliegan con regiones vecinas, iteradamente en el dominio de Fourier para generar el espectro sintético (paso 4).

El proceso concluye después de realizar el plegado de todas las regiones correspondientes, obteniendo el espectro de Fourier sintético. Finalmente (paso 5) se repiten los pasos 2 a 4, hasta obtener una solución auto-consistente pero se debe aclarar que a partir del segundo ciclo, se utiliza el espectro de Fourier sintético en lugar de la proyección de la estimación inicial en el espacio de Fourier filtrado o constreñido. La esquematización del proceso que sigue el algoritmo se muestra en el diagrama de flujo de la figura 3.1.

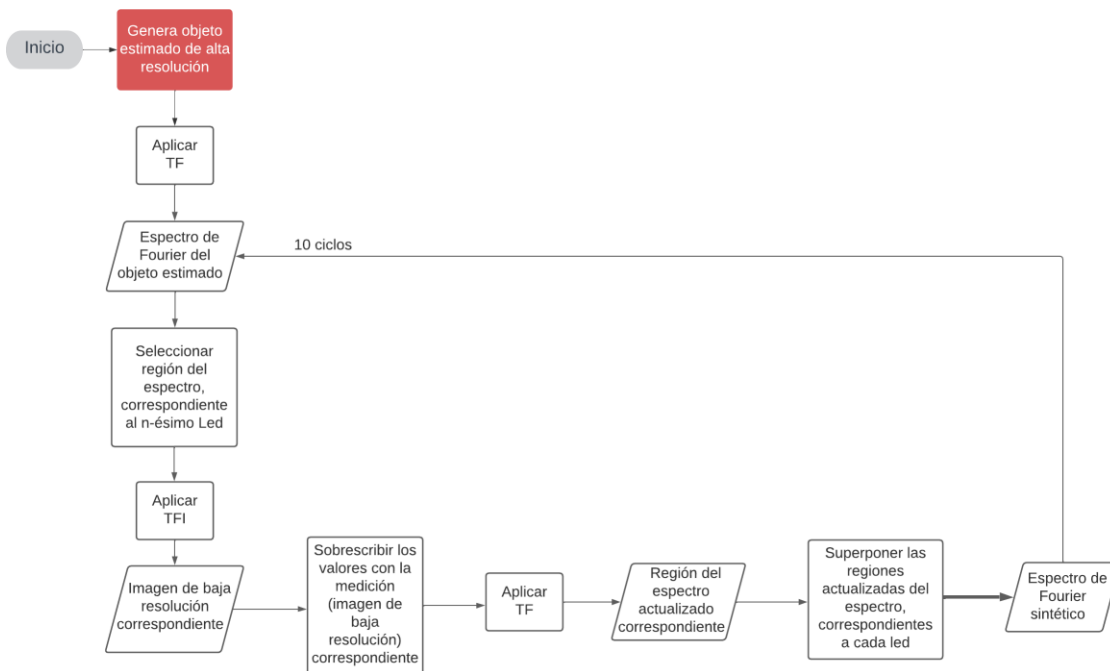


Figura 3.1: Diagrama de flujo del algoritmo iterativo de ptycografía de Fourier.

## 3.2. Simulación

A continuación, se muestran las simulaciones que se realizaron en este trabajo utilizando el algoritmo descrito en la subsección anterior. Las simulaciones se llevaron a cabo utilizando Matlab.

Los parámetros físicos simulados son escogidos de tal manera que se realicen simulaciones de experimentos con parámetros reales y se tenga así una estimación de lo que se puede obtener si se realiza el arreglo experimental.

### Parámetros

- Longitud de onda de cada led de la matriz:  $631.75nm$
- Lente objetivo:  $NA = 0.1$  y aumento de  $4X$
- Tamaño de píxel del sensor:  $6\mu m$
- Distancia entre leds:  $4mm$
- Distancia de la matriz de leds a la muestra:  $90mm$

En total se realizaron 6 simulaciones, en cada una se utilizó una matriz de leds de diferente tamaño, las cuales son de:  $5 \times 5$ ,  $7 \times 7$ ,  $9 \times 9$ ,  $11 \times 11$ ,  $13 \times 13$  y  $15 \times 15$  leds.

La visualización del procedimiento se muestra con la simulación que utiliza la matriz de  $5 \times 5$  leds, sin embargo, el procedimiento es el mismo para cualquiera de las demás matrices.

El objeto a reconstruir se considera de fase delgada y tiene la siguiente información de amplitud y de fase, mostrada en la figura 3.2. Donde a la fase tiene un rango de valores entre  $[0, \pi/2]$ .

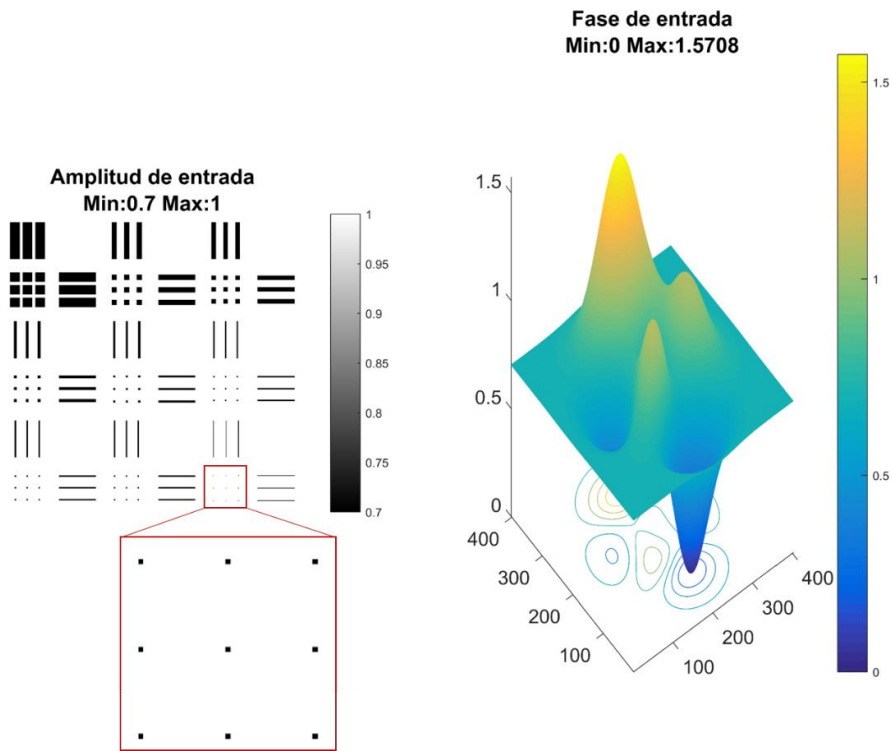


Figura 3.2: Amplitud y fase del objeto introducido, usado para la simulación.

La secuencia de encendido de los leds en la matriz se aprecia en la figura 3.3, lo cual significa también que ese es el orden en el que se capturan las imágenes de baja resolución.

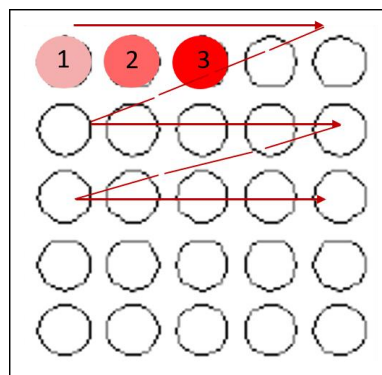


Figura 3.3: Secuencia de encendido de los leds en cada matriz.

Primero se obtienen las mediciones que utiliza el algoritmo (imágenes de baja resolución), para ello se simula el proceso en el que la muestra difracta la luz incidente en un cono que al pasar por la lente objetivo, es filtrada de acuerdo a la ecuación 2.62 o 2.63, obteniendo un espectro de Fourier filtrado en el plano focal posterior de la lente, figura 3.4. Seguido de esto, al pasar por la lente ocular realizando una transformada inversa de Fourier, se obtienen imágenes de baja resolución correspondientes, figura (3.5).

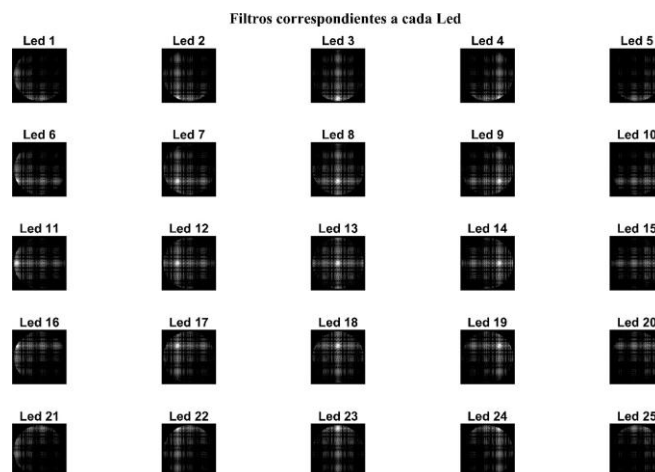


Figura 3.4: Espectros de Fourier filtrados correspondientes a cada led.

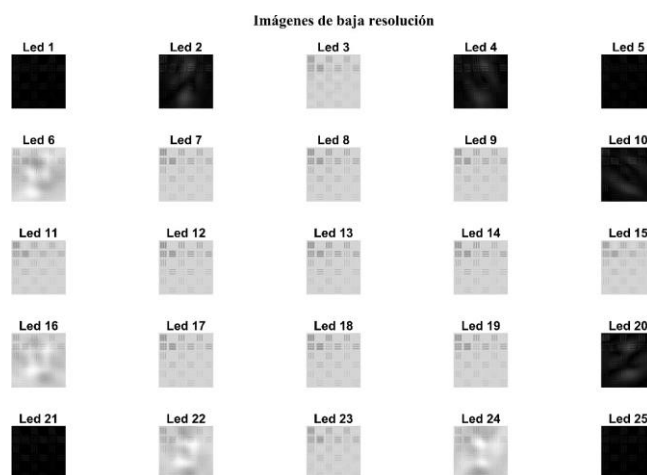


Figura 3.5: Imágenes de baja resolución correspondientes a cada led.

Las imágenes de baja resolución ahora son importadas en el algoritmo iterativo de PF para la reconstrucción del objeto, el cual sigue el procedimiento descrito en la sección 3.1. Como ya se vio el algoritmo inicia con la generación de una estimación inicial (pasos 1 y 2) y una vez reemplazada la intensidad estimada con la medida y habiendo actualizado la región correspondiente del espectro de Fourier de  $\sqrt{I_{hr}}e^{i\phi_{hr}}$  (pasos 3 y 4), se realiza el plegado en el espacio de Fourier para obtener el espectro de Fourier sintético el cual contiene ahora una mayor cantidad de frecuencias del espectro de Fourier del objeto. Se realizaron 10 ciclos (paso 5) para obtener una solución auto-consistente, es decir, hasta que presente un error cuadrático medio en la recuperación, lo suficientemente pequeño para ser despreciable. En la figura 3.6 se muestra el proceso de plegado con solo 1 ciclo y la figura 3.7 muestra el

procedimiento después de 10 ciclos.

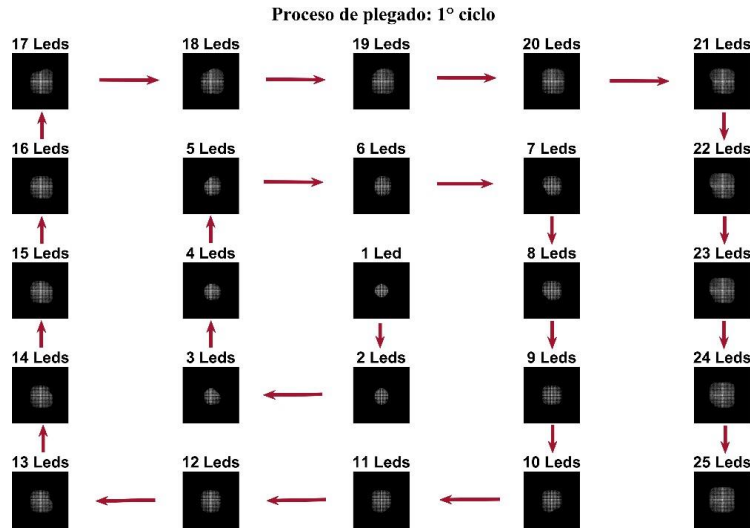


Figura 3.6: Proceso de plegado de espectros en el 1º ciclo del algoritmo.

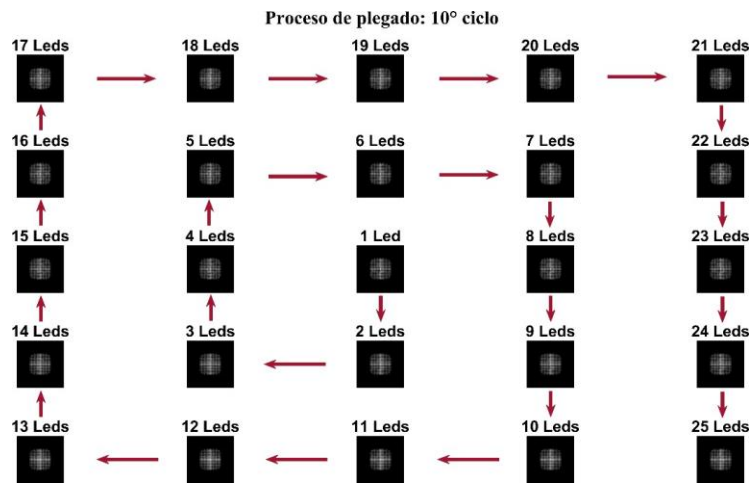


Figura 3.7: Proceso de plegado de espectros en el 10º ciclo del algoritmo.

El algoritmo finaliza después de realizar los 10 ciclos obteniendo el espectro de Fourier sintético que contiene la información tanto de amplitud como de fase del objeto a reconstruir, el cual se muestra en la figura 3.8.

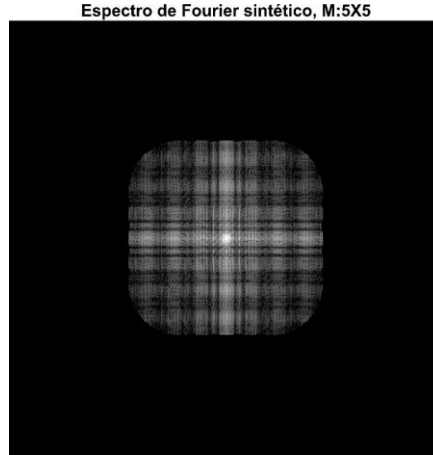


Figura 3.8: Espectro de Fourier sintético obtenido con el algoritmo de PF.

### Consideraciones

El poder de resolución del sistema es la capacidad que tiene para presentar dos puntos cercanos como puntos diferentes y separarlos y está definido por la ecuación 3.1 donde  $NA_{obj}$  es la apertura numérica de la lente objetivo y  $\lambda$  la longitud de onda de la iluminación de los leds.

$$R = \frac{\lambda}{NA_{obj}} \quad (3.1)$$

El proceso de muestreo sobre una señal continua que varía en el tiempo o en el espacio es realizado midiendo simplemente los valores de la señal continua cada  $T$  unidades de tiempo (o espacio), llamado intervalo de muestreo. La frecuencia de muestreo  $f$  es el recíproco del intervalo de muestreo  $f = \frac{1}{T}$ . De acuerdo con el teorema de muestreo de Nyquist la frecuencia de muestreo debe ser mayor o igual al doble del ancho de banda de la señal, como se muestra en la ecuación (3.2).

$$f_N \geq 2WB \quad (3.2)$$

En este trabajo, el ancho de banda  $WB$  está determinado por la apertura numérica de la lente objetivo  $NA_{obj}$  y por tanto la restricción a la frecuencia de muestreo está dada por la ecuación (3.3).

$$f_N \geq \frac{2NA_{obj}}{\lambda} \quad (3.3)$$

Con esto se hace la observación de que el tamaño máximo de píxel de la muestra en el plano del objeto está limitado a  $\frac{\lambda}{2NA_{obj}}$  para evitar una distorsión en las mediciones capturadas por el sensor. De acuerdo con los parámetros que se utilizan en la simulación ( $\lambda = 631.75$  y  $NA_{obj} = 0.1$ ) este límite es  $3.15875 \mu\text{m}$ . Considerando además el aumento

de la lente que en este caso es de  $4X$ , entonces se requiere que el tamaño de píxel del sensor que captura las imágenes debe ser menor o igual a  $12.635\mu m$ .

La apertura numérica sintética  $NA_{syn}$  que resulta de aumentar el ángulo de iluminación se expresa en la ecuación (3.4) y está definida por la geometría del sistema.

$$NA_{syn} = NA_{illu} + NA_{obj} \quad (3.4)$$

Donde  $NA_{illu}$  es la apertura numérica de iluminación definida por la ecuación (3.5), donde  $\phi_{m\acute{a}x}$  es el ángulo máximo de iluminación entre el eje óptico y un led y  $n_{illu}$  es el índice de refracción entre la fuente de iluminación y la muestra.

$$NA_{illu} = n_{illu} \sin \phi_{max} \quad (3.5)$$

También existe un límite en la cantidad de leds a utilizar para variar el ángulo de iluminación, puesto que, si el ángulo máximo de la matriz es muy grande, además de que la muestra es irradiada con una escasa intensidad, esta no es iluminada en su totalidad, ocasionando que la imagen capturada no contenga las mediciones necesarias que requiere el algoritmo iterativo para actualizar la región correspondiente, generando por tanto una falla en el resultado.

## Capítulo 4

# Resultados

Después de obtener el espectro de Fourier sintético en cada experimento realizado para las distintas matrices de leds, se le aplica una transformada inversa de Fourier para obtener el objeto complejo para, a partir de ahí obtener la amplitud y la fase utilizando los comandos de `abs` y `angle`, (valor absoluto y tangente inversa del cociente entre la parte imaginaria y la parte real de la función compleja resultante, respectivamente).

Los resultados se muestran para cada matriz de leds por separado, mostrando el espectro de Fourier sintético y la amplitud y fase que se recuperan.

En la tabla 4.1 se registran las aperturas numéricas sintéticas calculadas de acuerdo con la ecuación (3.4) que se obtienen al utilizar diferente tamaño de matriz de leds y portanto un mayor ángulo máximo de iluminación.

Finalmente se muestran las gráficas de error en la amplitud y en la fase recuperadas respecto a los valores de entrada, donde se aprecia el resultado de aumentar la iluminación utilizando diferentes tamaños de matriz de leds. Además, se muestra el error en la recuperación al utilizar diferente número de ciclos en el algoritmo iterativo.

No. de experimento	Tamaño de matriz de Leds	$NA_{illu}$	$NA_{syn}$
1	5X5	0.08	0.18
2	7X7	0.13	0.23
3	9X9	0.17	0.27
4	11X11	0.21	0.31
5	13X13	0.25	0.35
6	15X15	0.29	0.39

Tabla 4.1:  $NA_{illu}$  y  $NA_{syn}$  obtenidas para las distintas matrices de leds utilizadas.

Matriz de 5x5 leds



Figura 4.1: Espectro de Fourier sintético; matriz de 5x5 leds.

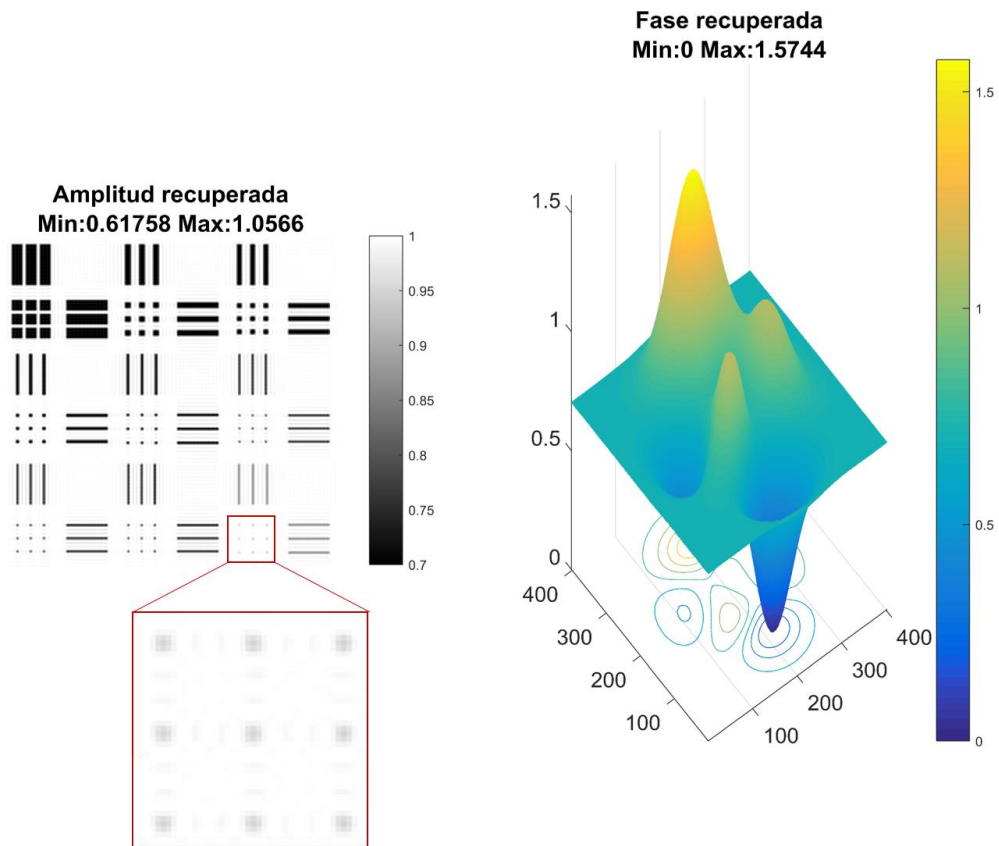


Figura 4.2: Amplitud y fase recuperadas; matriz de 5x5 leds.

Matriz de 7x7 leds

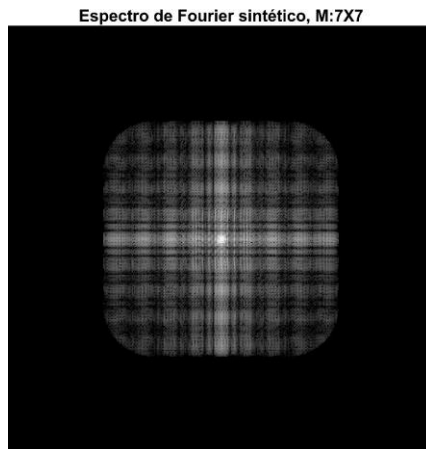


Figura 4.3: Espectro de Fourier sintético; matriz de 7x7 leds.

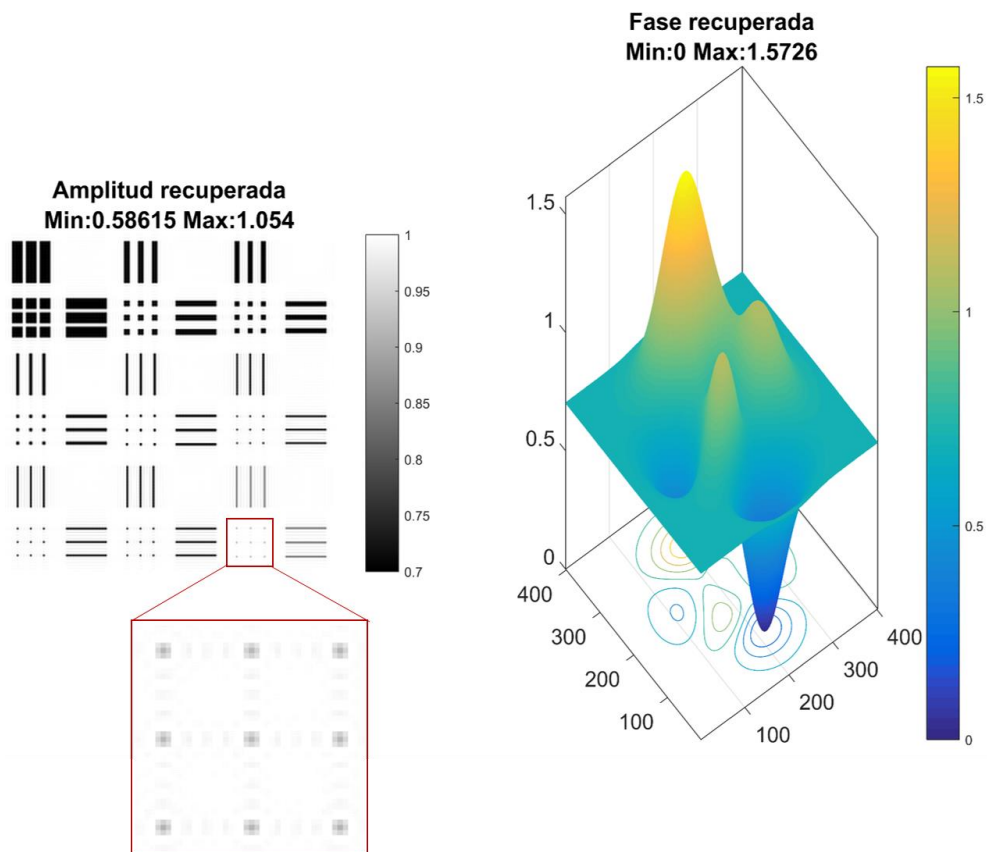


Figura 4.4: Amplitud y fase recuperadas; matriz de 7x7 leds.

Matriz de 9x9 leds

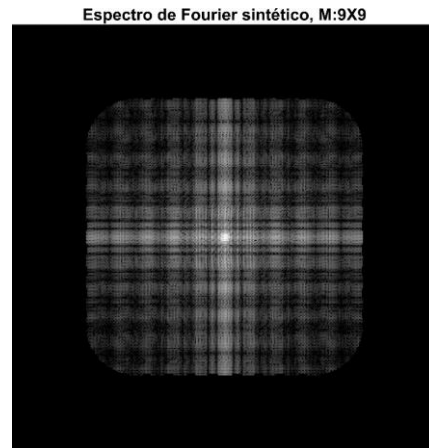


Figura 4.5: Espectro de Fourier sintético; matriz de 9x9 leds.

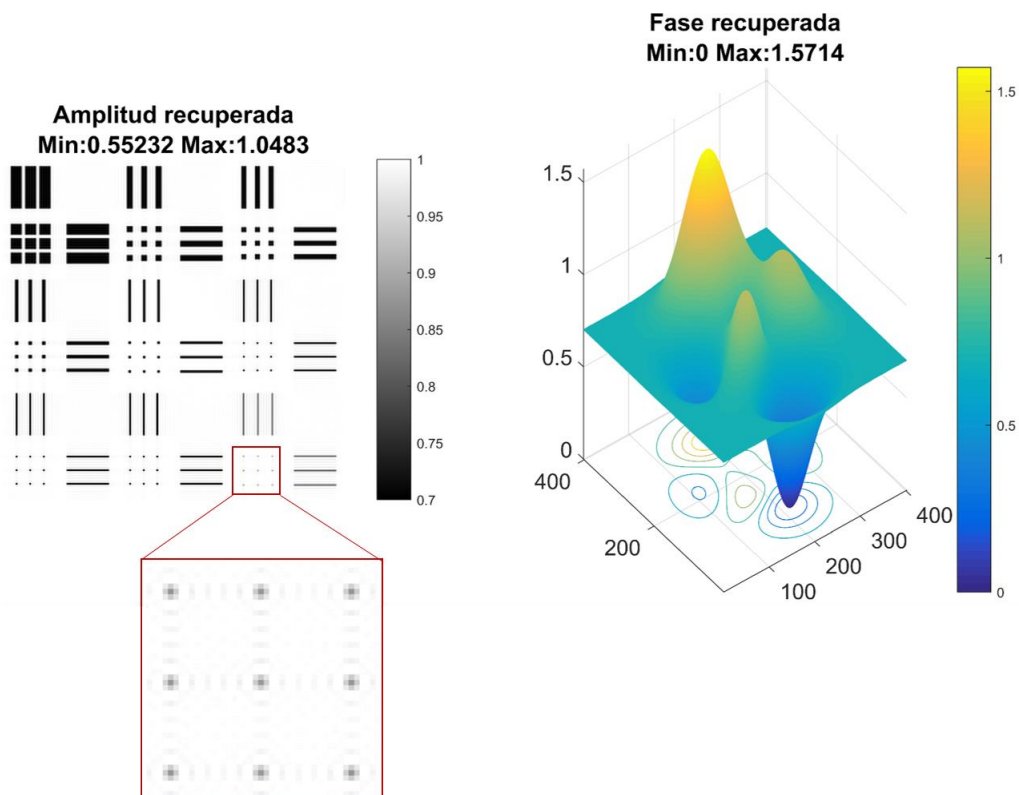


Figura 4.6: Amplitud y fase recuperadas; matriz de 9x9 leds.

**Matriz de 11x11 leds**

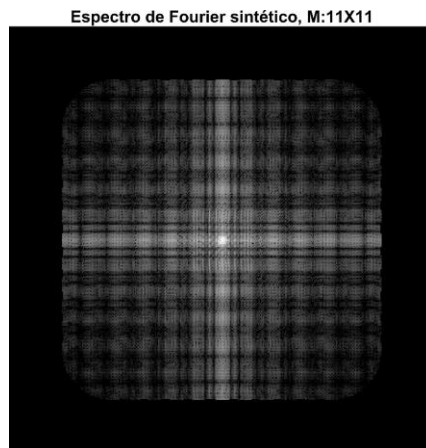


Figura 4.7: Espectro de Fourier sintético; matriz de 11x11 leds.

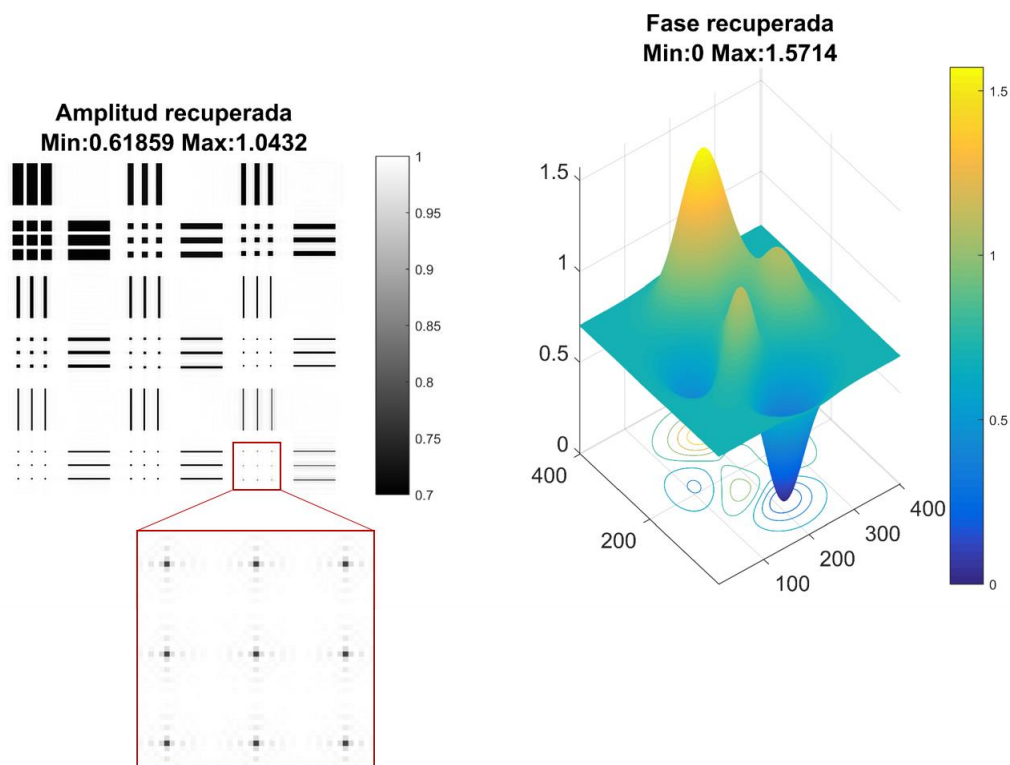


Figura 4.8: Amplitud y fase recuperadas; matriz de 11x11 leds.

Matriz de 13x13 leds

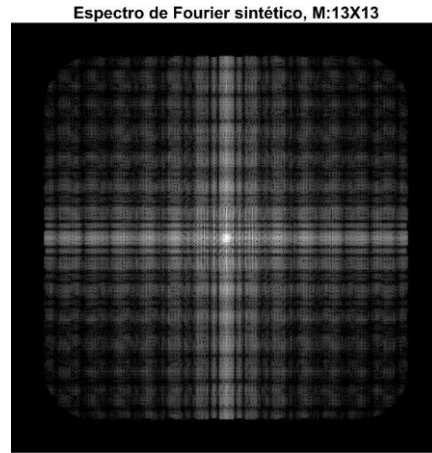


Figura 4.9: Espectro de Fourier sintético; matriz de 13x13 leds.

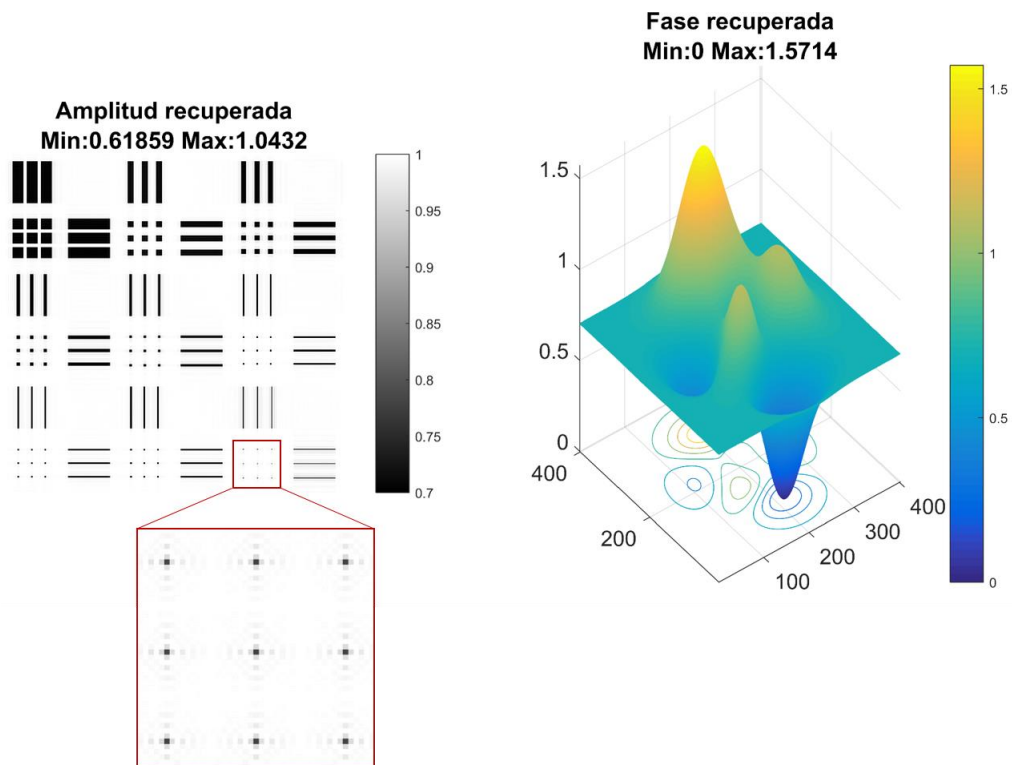


Figura 4.10: Amplitud y fase recuperadas; matriz de 13x13 leds.

Matriz de 15x15 leds

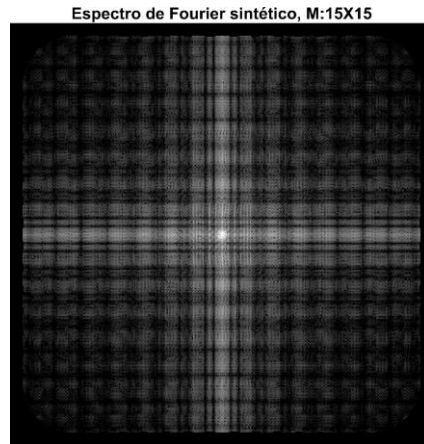


Figura 4.11: Espectro de Fourier sintético; matriz de 15x15 leds.

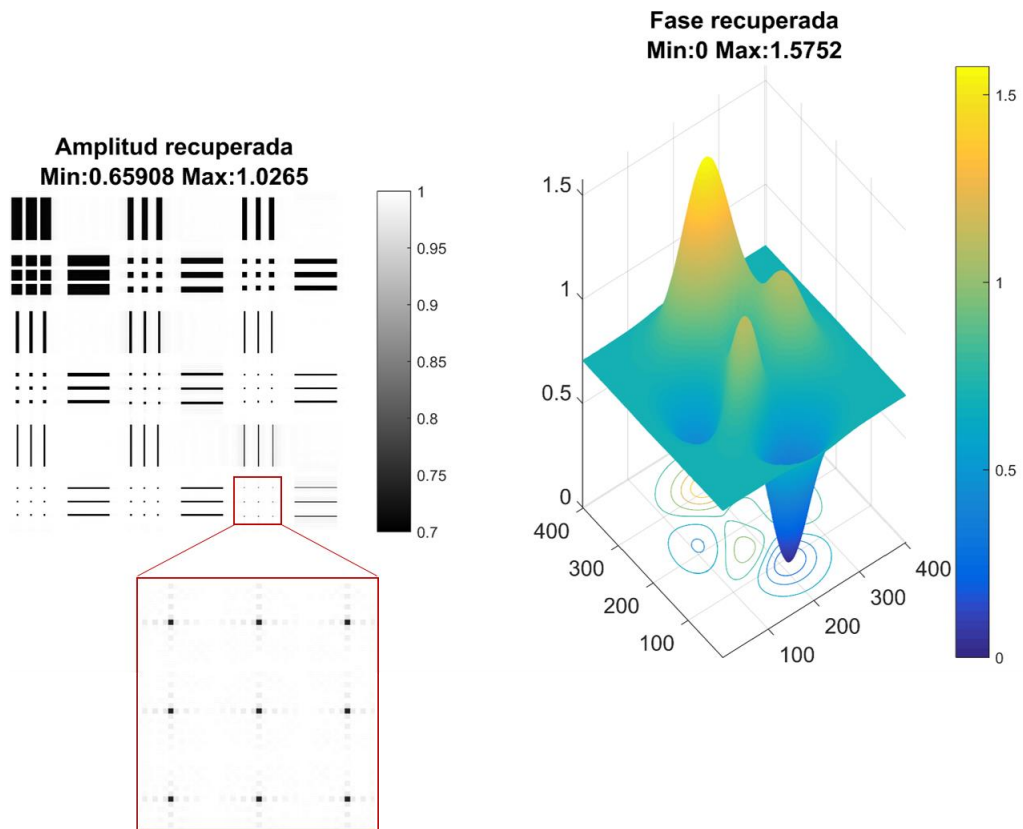


Figura 4.12: Amplitud y fase recuperadas; matriz de 15x15 leds.

## Resultados

Como puede observarse, la resolución del objeto aumenta conforme aumenta el tamaño de la matriz de leds y por tanto aumentando la información de frecuencias en el plano de Fourier logrando apreciar en la amplitud los cuadrados con dimensión de 1 píxel x 1 píxel, a diferencia de las primeras matrices utilizadas donde no se podía distinguir su forma. En cuanto a la fase, se aprecia que en todos los experimentos se recupera con una alta calidad en su forma, con únicamente una variación en la altura de entrada de la función picos en el orden de milésimas.

Gráficamente el error cuadrático medio para la amplitud y la fase, con respecto a los valores de entrada, se muestra en las figuras 4.13 y 4.14 donde se encuentra una reducción uniforme del error en la amplitud del objeto conforme se trabaja con una mayor iluminación, es decir, con una mayor cantidad de leds, sin embargo, se encuentra que la fase tiene valores de error considerablemente bajos y fluctuantes entre matrices utilizadas, situación que se apreciaba en la visualización de los resultados previos.

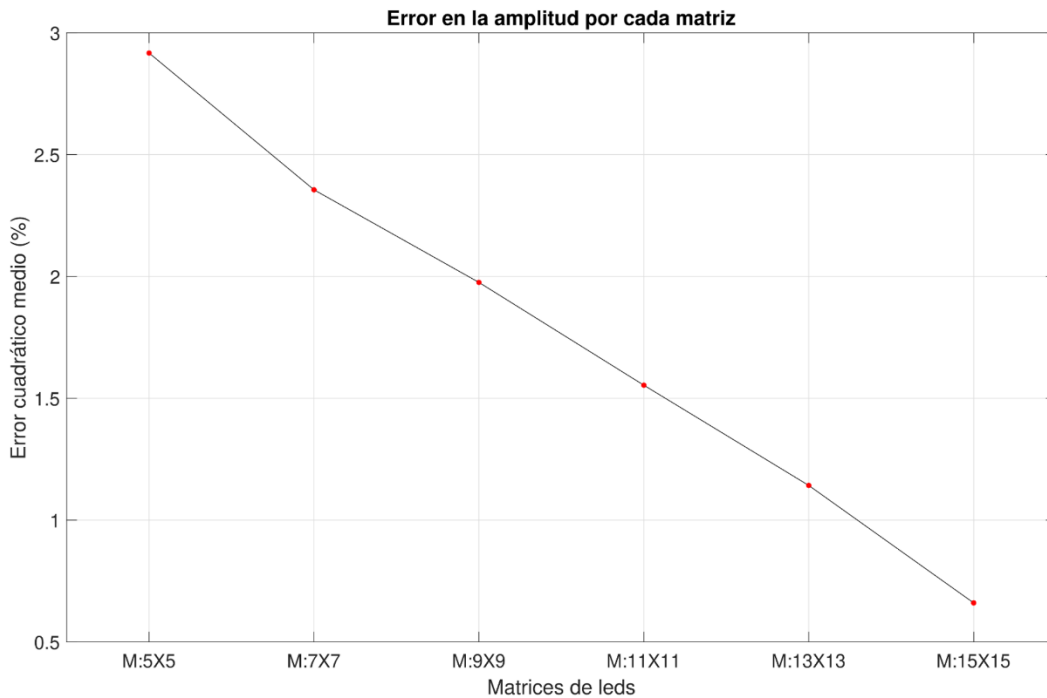


Figura 4.13: Porcentaje de error en la amplitud en cada experimento respecto a los valores de entrada.

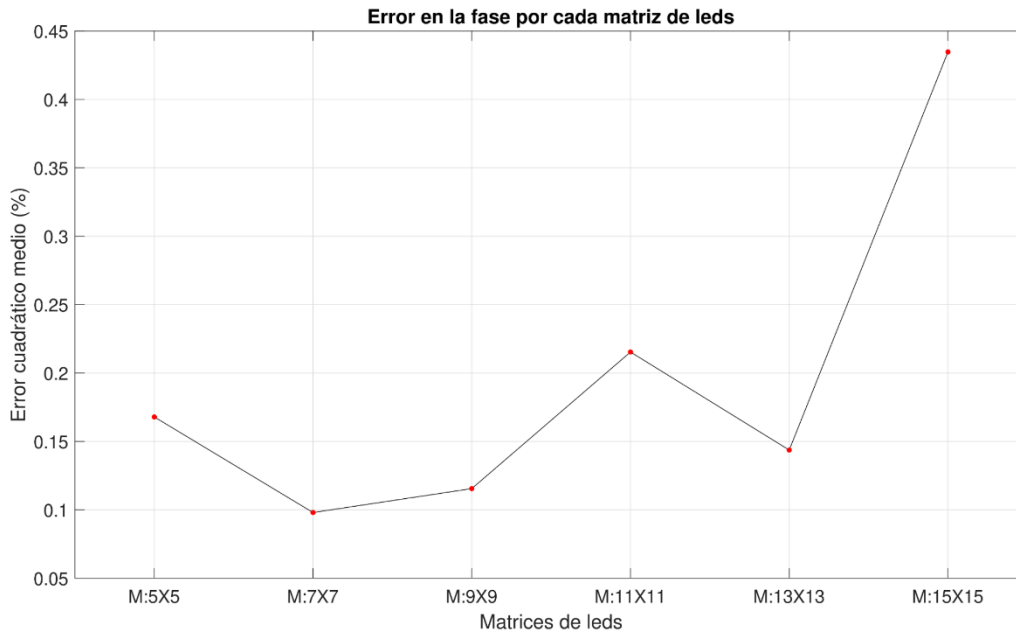


Figura 4.14: Porcentaje de error en la fase en cada experimento respecto a los valores de entrada.

Además, se obtiene el error cuadrático medio en la recuperación de la amplitud y la fase utilizando distinto número de ciclos, figura 4.15. Como se recordará, las simulaciones realizadas se trabajaron con 10 ciclos y la razón de esto como puede observarse en las gráficas de la figura 4.15, es que a partir de 10 ciclos la variación del error entre matrices para un mismo ciclo se vuelve considerablemente baja, y por tanto hay un ahorro computacional evitando trabajar con un número de ciclos mayor.

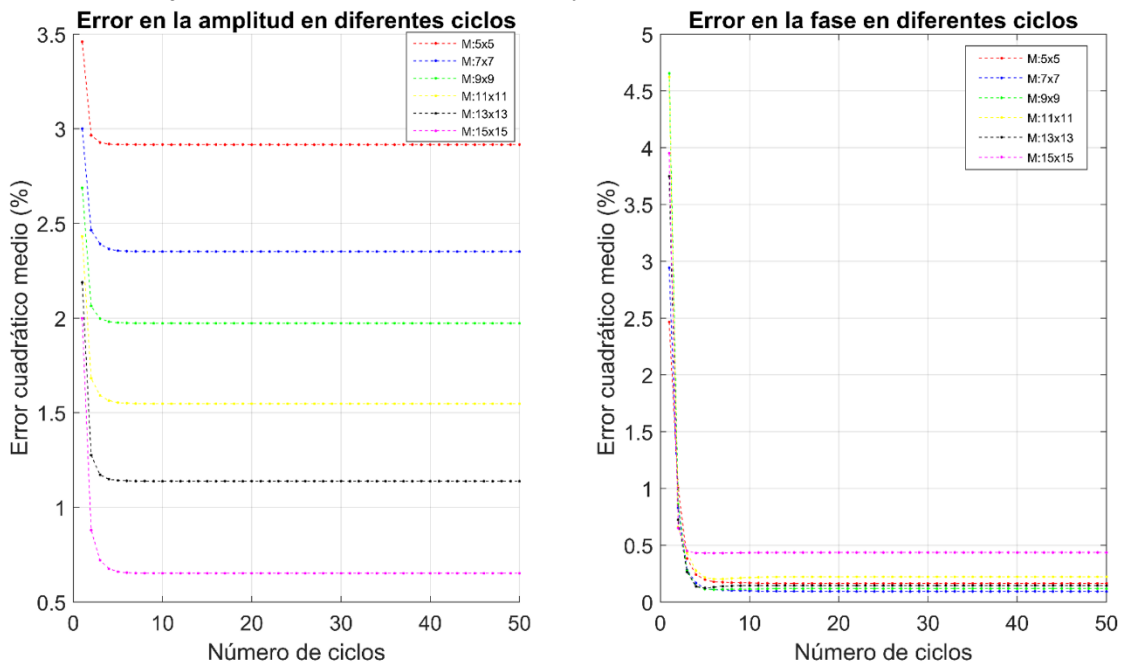


Figura 4.15: Porcentaje de error en la recuperación para diferente número de ciclos en el algoritmo iterativo.

Puede observarse también que el comportamiento del error en la amplitud y la fase entre matrices de leds utilizadas mostradas en las figuras 4.13 y 4.14, se vuelve algo aproximadamente constante a partir de 10 ciclos en adelante, atribuyendo esta respuesta a la recuperación numérica que realiza el algoritmo.

## Capítulo 5

# Conclusiones

Utilizando matrices de leds que irradian un objeto muestra en diferentes ángulos de iluminación con respecto al eje óptico y procesando las imágenes correspondientes en el dominio de Fourier con el algoritmo iterativo de pticografía de Fourier se obtiene un espectro de frecuencias sintético del cual se recupera la amplitud y la fase de la función compleja del objeto.

La calidad de la recuperación de la amplitud aumenta conforme aumenta la cantidad de información a procesar, es decir, conforme aumenta el ángulo máximo de iluminación.

Resultado esperado puesto que al cambiar el ángulo de iluminación se accede a una región distinta y más alejada del centro del espectro de Fourier del objeto, lo que corresponde a más altas frecuencias y por tanto, como lo predice la teoría en óptica de Fourier, al tener acceso a frecuencias más altas de un espectro significa que la imagen tiene una mayor resolución.

La fase que se introdujo tiene un rango de valores entre  $[0, \pi/2]$ , lo que significa que se trabajó con un objeto de fase delgada, por lo que la recuperación no generó un problema de envolvimiento.

La calidad de la recuperación de la fase no presenta un tipo de mejoría progresiva apreciable como en el caso de la amplitud, sin embargo, el error en la reconstrucción con respecto a los valores de entrada no rebasa el 0.5%, trabajando incluso con no más de 5 ciclos, por lo que se puede asegurar que el algoritmo iterativo hace una recuperación óptima de la información de la fase en cada una de las simulaciones.

Pticografía de Fourier es una técnica simple y versátil que tiene aplicación en distintas áreas de investigación. Su capacidad para reconstruir imágenes cuantitativas de fase y amplitud simultáneamente a bajo costo se encuentran entre las principales ventajas que la distinguen de otras técnicas de formación de imágenes.



# Bibliografía

- [1] G. Zheng, R. Horstmeyer, and C. Yang, (2013). "*Wide-field, high-resolution Fourier ptychographic microscopy.*" *Nat. Photonics* 7(9), 739–745.
- [2] Hegerl R, Hoppe W (1970). "Dynamic theory of crystal structure analysis by electron diffraction in the inhomogeneous primary beam wave field". *Reports of the Bunsen Society for Physical Chemistry.*74 (11): 1148–1154.
- [3] Rodenburg J, Bates RH (1992). "The theory of super-pressure electron microscopy via the deconvolution of the Wigner distribution". *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 339 (1655): 521–553.
- [4] Chapman HN (1996). "Phase-retrieval X-ray microscopy by Wigner-distribution deconvolution". *Ultramicroscopía.* 66 (3–4): 153–172.
- [5] Rodenburg JM, Hurst AC, Cullis AG, Dobson BR, Pfeiffer F, Bunk O, et al. (2007). "Hard x-ray lensless images of extended objects." *Physical review letters.* 98 (3): 034801.
- [6] Kewish CM, Thibault P, Dierolf M, Bunk O, Menzel A, Vila-Comamala J, et al. (2010). "Ptychographic characterization of the wave field at the focus of reflective hard X-ray optics." *Ultramicroscopy.* 110 (4): 325–329.
- [7] Schropp A, Boye P, Feldkamp JM, Hoppe R, Patommel J, Samberg D, et al. (2010). "Characterization of hard X-ray nanobeam by coherent diffraction microscopy". *Letters of Applied Physics.* 96 (9): 091102.
- [8] Humphry MJ, Kraus B, Hurst AC, Maiden AM, Rodenburg JM (2012). "Ptychographic electron microscopy using high-angle dark-field scattering for sub-nanometer resolution imaging". *Nature Communications.* 3 (370): 730.
- [9] J. W. Goodman. (2005). *Introduction to Fourier optics.* Third edition. Roberts and Company.
- [10] B. E. A. Saleh, M. C. Teich. (2007). *Principles of photonics.* Second edition. John Wiley and sons, Inc.
- [11] Pavan Chandra Konda, Lars Loetgering, Kevin C. Zhou, Shiqi Xu, Andrew R. Harvey, and Roarke Horstmeyer, (2020). "Fourier ptychography: current applications and future promises." *Opt. Express* 28, 9603-9630

- [12] Zheng, G., Shen, C., Jiang, S. et al. (2021). “Concept, implementations and applications of Fourier ptychography.” *Nat Rev Phys* 3, 207–223. <https://doi.org/10.1038/s42254-021-00280-y>